Двоичное представление квантовых наблюдаемых

М.Г. Иванов

22 марта 2016 г.

Аннотация

Для моделирования квантовой системы с непрерывными степенями свободы на квантовом компьютере основанном на кубитах, необходимо сведение непрерывных наблюдаемых (в первую очередь координат и импульсов) к двоичным наблюдаемым. Данная задача рассматривается на основе разложения квантовых наблюдаемых в ряд по степеням двойки, аналогичный двоичному представлению вещественных чисел. Коэффициенты ряда ("цифры") при этом являются ортогональными проекторами.

Оглавление

Мотивировка

- Квантовые компьютеры — ку-биты или ку-диты — дискретные степени свободы.
- Одно из главных назначений квантовых компьютеров — моделирование квантовых систем.
- **Непрерывные** степени свободдны надо свести к **дискретным**.

Цифры как наблюдаемые

- Значение непрерывной наблюдаемой — действительное число в позиционной записи.
- Знание числа = знание всех его цифр.
- Цифры наблюдаемой X — дискретные наблюдаемые, одновременно измеримые с X и друг с другом.
- **Двоичная цифра = ортогональный проектор.**

Координатная решётка и импульсная решётка

- $n = n_+ + n_-$ — число двоичных цифр.
- $N = 2^n$ — число узлов решётки.

- $x = \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} x_s 2^s, \quad x_s \in \{0, 1\}$
- n_+ цифр до запятой.
- n_- цифр после запятой.
- $\Delta x = 2^{-n_-}$ — шаг решётки.
- $\Xi = \Delta x \cdot N = 2^{n_+}$ — период.
- $\Delta x \cdot \mathbb{Z}_N$ — коорд. решётка.

- $p = \sum_{r=-n_+}^{n_--1} p_r 2^r, \quad p_r \in \{0, 1\}$
- n_- цифр до запятой.
- n_+ цифр после запятой.
- $\Delta p = 2^{-n_+}$ — шаг решётки.
- $\Pi = \Delta p \cdot N = 2^{n_-}$ — период.
- $\Delta p \cdot \mathbb{Z}_N$ — имп. решётка.

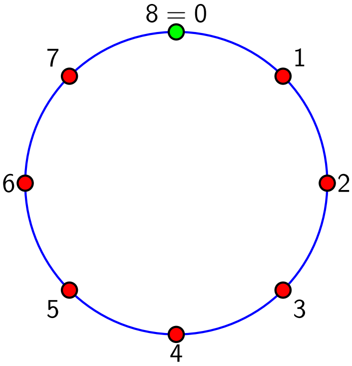
- $\Pi \cdot \Xi = N$.
- $\Delta p \cdot \Delta x = \frac{1}{N}$.
- $\Delta p \cdot \Xi = 1$.
- $\Delta x \cdot \Pi = 1$.

Периодичность решёток

$$x \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N \qquad \Rightarrow \qquad x + \Xi = x.$$

$$p \in \Delta p \cdot \mathbb{Z}_N \qquad \Rightarrow \qquad x + \Pi = p.$$

$\mathbb{Z}_N$ — кольцо остатков от деления на N.
Кольцо и в алгебраическом смысле (есть сложение и умножение), и в интуитивном. Например, при $n = 3$, $N = 2^3 = 8$:



Оператор сдвига (циклического!)

Положим $h = 1$, т.е. $\hbar = \frac{1}{\pi}$.

- $\hat{T}_A\psi(x) = \psi(x + A), \qquad x, A \in \Delta x \cdot Z_N$.
- **Определение (квази)импульса** $\hat{p}$: $\hat{T}_A = \exp(2\pi i A\hat{p})$.
- **Важно**: $\Pi \cdot \Delta x = 1$ — периодичность по импульсу.
- **Минимальный сдвиг**: $\hat{T}_{\Delta x}$.
- $\hat{T}_A = (\hat{T}_{\Delta x})^{A/\Delta x}$.

$$\hat{T}_{\Delta x}\psi(x) = \hat{T}_{\Delta x}\begin{pmatrix} \psi((N-1)\Delta x) \\ \psi((N-2)\Delta x) \\ \vdots \\ \psi(2\Delta x) \\ \psi(\Delta x) \\ \psi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \psi((N-1)\Delta x) \\ \psi((N-2)\Delta x) \\ \vdots \\ \psi(2\Delta x) \\ \psi(\Delta x) \end{pmatrix} = \psi(x+\Delta x).$$

Операторы импульса и цифры импульса

Собственные числа оператора импульса принадлежат импульсной решётке $\Delta p \cdot \mathbb{Z}_N$.
Оператор импульса разлагается на цифры:

$$\hat{p} = \sum_{r=-n_+}^{n_- -1} \hat{p}_r 2^r.$$

Квантовые цифры — ортогональные проекторы, имеют собственные числа 0 и 1:

$$\hat{p}_r = \hat{p}_r^\dagger = \hat{p}_r^2.$$

Явный вид цифр импульса

$$\hat{p}_r = \frac{\hat{1}}{2} - \Delta p \cdot 2^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{\mathbf{2^r}/\Delta \boldsymbol{p}}} \frac{\hat{T}_{-2^{-\boldsymbol{r}-\mathbf{1}}(2D+1)}}{1 - \exp(\pi i \Delta p \cdot 2^{-r}(2D+1))}$$

$$[\hat{x}_s, \hat{p}_r] = 0 \quad \text{при} \quad s + r \leqslant -2.$$

* Дробная часть импульса коммутирует с дробной частью координаты.
* Младшая цифра импульса не коммутирует только со старшей цифрой координаты.
* Младшая цифра координаты не коммутирует только со старшей цифрой импульса.

Если $n \to +\infty$, причём $\Delta p \to 0$, то

$$\hat{p}_r = \frac{\hat{1}}{2} + \sum_{D \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{T}_{-2^{-\boldsymbol{r}-\mathbf{1}}(2D+1)}}{\pi i (2D+1)}$$

Предельный переход от кольца к прямой

- Как от кольца перейти к прямой?
- На кольце все узлы были положительны

$$x = \sum_{s=n_-}^{n_+ -1} x_s 2^s \in \Delta x \cdot \mathbb{Z}_N,$$

откуда возьмутся отрицательные числа?

- **Отрицательные числа возникнут сами собой!**

Возникновение отрицательных чисел

На кольце $\mathbb{Z}_N$ нет естественного отношения порядка:

$$(N-1)+1=0.$$

Для $N=8$

$$\begin{aligned}
0+1 &= 000_2+001_2 = 001_2 = 1 = -7,\\
1+1 &= 001_2+001_2 = 010_2 = 2 = -6,\\
2+1 &= 010_2+001_2 = 011_2 = 3 = -5,\\
3+1 &= 011_2+001_2 = 100_2 = 4 = -4,\\
4+1 &= 100_2+001_2 = 101_2 = 5 = -3,\\
5+1 &= 101_2+001_2 = 110_2 = 6 = -2,\\
6+1 &= 110_2+001_2 = 111_2 = 7 = -1,\\
7+1 &= 111_2+001_2 = \mathbf{1}000_2 = 8 = 0 = 000_2.
\end{aligned}$$

На последнем шаге единица ушла за разрядную сетку и мы её отбросили!

-1 как сумма геометрической прогрессии

При заданном n_+, то число -1 имеет следующее двоичное представление

$$-1 = \sum_{s=0}^{n_+-1} 1 \cdot 2^s = \underbrace{1 \cdots 1}_{n_+ \text{ раз}} = 2^{n_+} - 1 = N - 1.$$

При $n_+ \to \infty$ получаем, что такая геометрическая прогрессия в некотором смысле сходится:

$$\sum_{s=0}^{+\infty}{}' \, 1 \cdot 2^s = \frac{1}{1-2} = -1.$$

Бесконечный хвост из единиц при $s \to +\infty$ есть в записи любого отрицательного числа. Чтобы поменять знак надо инвертировать все цифры: $0 \leftrightarrow 1$:

$$-1 = (1),(0)_2 \quad \leftrightarrow \quad (0),(1)_2 = (0)1,(0)_2 = 1.$$

Как получить сходящийся ряд

$$x = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}{}' x_s \cdot 2^s.$$

$$2 \cdot x = \sum_{s=-\infty}^{+\infty}{}' x_{s-1} \cdot 2^s.$$

$$x = 2 \cdot x - x = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} (x_{s-1} - x_s) \cdot 2^s.$$

Здесь сходимость уже обычная вещественная.
Режутся «хвосты» из единиц при $s \to \pm\infty$.

Двоичное представление с записью отрицательных чисел в дополнительном коде

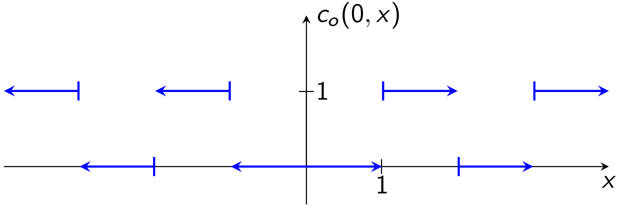


График двоичной цифры, стоящей перед запятой (множитель при 2^0) для обычной двоичной записи (знак — отдельный бит).

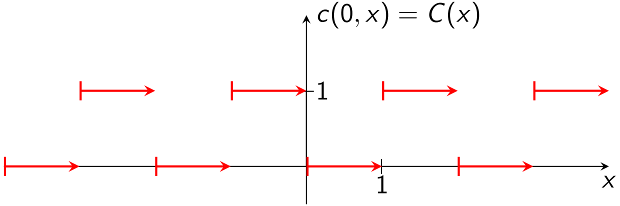


График цифры, стоящей перед запятой (множитель при 2^0) для двоичной записи отрицательных чисел в дополнительном коде.

Пример: $n = 1$, $N = 2^1 = 2$, $\Delta x = 1$, $\Delta p = \frac{1}{2}$

$$\hat{x} = \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hat{1} + \sigma_z}{2} \equiv \hat{c}, \qquad \hat{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 2\hat{h},$$

$$\lambda_0 = 1 = e^{2\pi i \cdot 0}, \quad \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hat{1} + \sigma_x}{2} \equiv \hat{a},$$

$$\lambda_{0,1_2} = -1 = e^{2\pi i \cdot 0,1_2}, \quad \psi_{0,1_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_{0,1_2} = \hat{p} = \hat{p}_{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hat{1} - \sigma_x}{2} \equiv \hat{b},$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = [\hat{x}_0, \hat{p}_{-1}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\sigma_y \equiv \hat{f}.$$

Пример: $n = 2$, $N = 2^1 = 4$, $\Delta x = 1$, $\Delta p = \frac{1}{4}$

$$\hat{x} = \hat{x}_0 + 2\hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{x}_0 = \hat{1}_2 \otimes \hat{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_1 = \hat{c} \otimes \hat{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Эти собственные числа уже были

$$\lambda_0 = 1 = e^{2\pi i \cdot 0}, \quad \psi_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{P}_0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \hat{a} \otimes \hat{a}.$$

$$\lambda_{0,10_2} = -1 = e^{\pi i}, \quad \psi_{0,10_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_{0,10_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \hat{a} \otimes \hat{b},$$

А эти собственные числа новые

$$\lambda_{0,01_2} = i = e^{\pi i/2}, \quad \psi_{0,01_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_{0,01_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ -i & 1 & i & -1 \\ -1 & -i & 1 & i \\ i & -1 & -i & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{0,11_2} = -i = e^{-\pi i/2}, \quad \psi_{0,11_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{P}_{0,11_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & i \\ i & 1 & -i & -1 \\ -1 & i & 1 & -i \\ -i & -1 & i & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{p}_{-1} = \hat{P}_{0,10_2} + \hat{P}_{0,11_2} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccc} 1 & \frac{-1-i}{2} & 0 & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 1 & \frac{-1-i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1+i}{2} & 1 & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & 0 & \frac{-1+i}{2} & 1 \end{array}\right).$$

$$\hat{p}_{-1} = \frac{1}{2}\hat{1}_2 \otimes \hat{1}_2 - \hat{a} \otimes \hat{h} + i\hat{b} \otimes \hat{f}.$$

$$[\hat{x}_0, \hat{p}_{-1}] = \hat{a} \otimes \hat{f} - i\hat{b} \otimes \hat{h}, \qquad [\hat{x}_1, \hat{p}_{-1}] = \hat{f} \otimes (\hat{h} + i\hat{f}).$$

$$\hat{p}_{-2} = \hat{P}_{0,01_2} + \hat{P}_{0,11_2} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \frac{\hat{1}}{2} - \frac{\hat{T}_2}{2} = \hat{b} \otimes \hat{1}_2.$$

$$[\hat{x}_0, \hat{p}_{-2}] = 0, \qquad [\hat{x}_1, \hat{p}_{-2}] = \hat{f} \otimes \hat{1}_2.$$

$$\hat{p} = 0,1_2 \cdot \hat{p}_{-1} + 0,01_2 \cdot \hat{p}_{-2} = \frac{1}{8}\left(\begin{array}{cccc} 3 & -1-i & -1 & -1+i \\ -1+i & 3 & -1-i & -1 \\ -1 & -1+i & 3 & -1-i \\ -1-i & -1 & -1+i & 3 \end{array}\right).$$

Пример: $n = 3,\ N = 3^1 = 8,\ \Delta x = 1,\ \Delta p = \frac{1}{8}$

$$\hat{x} = \hat{x}_0 + 2\hat{x}_1 + 4\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{x}_0 = \hat{1}_2 \otimes \hat{1}_2 \otimes \hat{c}$, $\hat{x}_1 = \hat{1}_2 \otimes \hat{c} \otimes \hat{1}_2$, $\hat{x}_2 = \hat{c} \otimes \hat{1}_2 \otimes \hat{1}_2$.

$$\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\hat{p}_{-3} = \frac{\hat{1}}{2} - \frac{\hat{T}_4}{2} = \hat{b} \otimes \hat{1}_2 \otimes \hat{1}_2$, $\hat{p}_{-2} = \frac{\hat{1}}{2} - \frac{1+i}{4}\hat{T}_6 - \frac{1-i}{4}\hat{T}_2$

$$\hat{p}_{-3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{p}_{-2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1-i}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+i}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1-i}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{-1-i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+i}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{-1-i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+i}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{-1-i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1+i}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{-1-i}{2} \\ \frac{-1-i}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+i}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1-i}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1+i}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Новая цифра импульса

$$
\hat{p}_{-1} = \frac{\hat{1}}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\hat{T}_7}{1-e^{\pi i}} + \frac{\hat{T}_5}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} + \frac{\hat{T}_3}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} + \frac{\hat{T}_1}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}}\right) = \frac{1}{4}\times
$$

$$
\begin{pmatrix}
2 & \frac{-1}{1-e^{\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} \\
\frac{-1}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 2 & \frac{-1}{1-e^{\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 0 \\
0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 2 & \frac{-1}{1-e^{\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} \\
\frac{-1}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 2 & \frac{-1}{1-e^{\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & 0 \\
0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 2 & \frac{-1}{1-e^{\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} \\
\frac{-1}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 2 & \frac{-1}{1-e^{\pi i}} & 0 \\
0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 2 & \frac{-1}{1-e^{\pi i}} \\
\frac{-1}{1-e^{\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 0 & \frac{-1}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 2
\end{pmatrix},
$$

Оператор импульса для $N = 2^3 = 8$

$$\hat{p} = \frac{1}{8}\hat{p}_{-3} + \frac{1}{4}\hat{p}_{-2} + \frac{1}{2}\hat{p}_{-1} = \frac{1}{16}\times$$

$$\begin{pmatrix}
7 & \frac{-2}{1-e^{\pi i}} & 4(\text{-1-i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & -1 & \frac{-2}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 4(\text{-1+i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} \\
\frac{-2}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 7 & \frac{-2}{1-e^{\pi i}} & 4(\text{-1-i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & -1 & \frac{-2}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 4(\text{-1+i}) \\
4(\text{-1+i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 7 & \frac{-2}{1-e^{\pi i}} & 4(\text{-1-i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & -1 & \frac{-2}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} \\
\frac{-2}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 4(\text{-1+i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 7 & \frac{-2}{1-e^{\pi i}} & 4(\text{-1-i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & -1 \\
-1 & \frac{-2}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 4(\text{-1+i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 7 & \frac{-2}{1-e^{\pi i}} & 4(\text{-1-i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} \\
\frac{-2}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & -1 & \frac{-2}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 4(\text{-1+i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 7 & \frac{-2}{1-e^{\pi i}} & 4(\text{-1-i}) \\
4(\text{-1-i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & -1 & \frac{-2}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 4(\text{-1+i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 7 & \frac{-2}{1-e^{\pi i}} \\
\frac{-2}{1-e^{\pi i}} & 4(\text{-1-i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{3}{4}\pi i}} & -1 & \frac{-2}{1-e^{\frac{5}{4}\pi i}} & 4(\text{-1+i}) & \frac{-2}{1-e^{\frac{7}{4}\pi i}} & 7
\end{pmatrix}.$$

Симметричная троичная система

$$x = \sum_{s=-n_-}^{n_+-1} x_s \cdot 3^s, \qquad x_s \in \{0, 1, -1\}.$$

$$\hat{p} = \sum_{r=-n_+}^{n_--1} \hat{p}_r \cdot 3^r, \qquad \hat{p}_r = \hat{p}_{r+} - \hat{p}_{r-}, \quad \hat{p}_{r\pm} = \hat{p}_{r\pm}^\dagger = \hat{p}_{r\pm}^2, \qquad \Delta p = 3^{-n_+}.$$

$$\hat{p}_r = \Delta p \cdot 3^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{3^{n_+ + r}}} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{\exp(-\sigma 2\pi i/3)}{1 - \exp(2\pi i \Delta p \cdot 3^{-r-1}(3D + \sigma))} \hat{T}_{-3^{-r-1}(3D+\sigma)}.$$

Для сравнения оператор двоичной цифры импульса

$$\hat{p}_r = \frac{\hat{1}}{2} - \Delta p \cdot 2^{-r} \sum_{D \in \mathbb{Z}_{2^r/\Delta p}} \frac{\hat{T}_{-2^{-r-1}(2D+1)}}{1 - \exp(\pi i \Delta p \cdot 2^{-r}(2D+1))}.$$