Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской Академии Наук

На правах рукописи

Семенин Никита Викторович

Высокодостоверные перепутывающие квантовые операции в ионах иттербия-171 на основе узких оптических переходов

1.3.19 – Лазерная физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Хабарова Ксения Юрьевна

Москва – 2026

Оглавление

Введение 4

Глава 1. Квантовая динамика ионных цепочек в линейной ловушке Пауля 12

1.1. Линейная ловушка Пауля 12

1.2. Квантовая механика одиночного иона в ловушке 21

1.3. Нормальные моды ионной цепочки 24

Глава 2. Двухкубитные перепутывающие операции на оптическом переходе в ионах $^{171}Yb^{+}$ 32

2.1. Оптический кубит на ионе $^{171}Yb^{+}$ 32

2.2. Взаимодействие иона с лазерным полем 35

2.3. MS гейт, эволюция двухкубитного состояния, достоверность гейта 41

2.4. Амплитудное шейпирование лазерных импульсов 55

2.5. Эксперимент по проведению MS-гейта в цепочке из 10 ионов 64

2.6. Оценка бюджета ошибок MS гейта 68

Глава 3. Перепутывающие ионные гейты в кудитном пространстве 75

3.1. Общее описание кудитных гейтов 76

3.2. Чувствительность кудитных гейтов к флуктуациям экспериментальных параметров 82

3.3. Компенсация и стабилизация кудитных фаз в MS гейте 84

3.4. Редукция кудитного LS гейта при помощи спинового эха 88

Глава 4. Влияние фазового шума лазера на достоверность MS гейта 98

4.1. Гамильтониан MS гейта с фазовым лазерным шумом 100

4.2. Ошибка MS гейта, наведённая фазовым шумом 102

Глава 5. Фильтрация лазерного излучения при помощи оптического резонатора средней резкости 119

5.1. Описание эксперимента 121

5.2. Результаты 125

Заключение 133

Список сокращений и условных обозначений 135

Список литературы 136

Приложение А. Амплитудно-частотное шейпирование импульсов в кудитном MS гейте 147

Приложение Б. Стабилизация локальных и нелокальных фаз в кудитном MS гейте методом проекций 149

Приложение В. Представление произвольного циклического сдвига кудитных состояний через нативные гейты 151

Приложение Г. Эквивалентность редуцированного кудитного LS гейта и ZZ гейта на вложенных кубитах 154

Приложение Д. Средняя ошибка шумного гейта 155

Введение

Настоящая диссертационная работа посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию методов проведения перепутывающих квантовых операций на ионе иттербия $^{171}Yb^{+}$, обладающих высокой достоверностью, с использованием оптического перехода с малой шириной линии.

Актуальность темы исследования и её разработанность

Существует класс вычислительных задач, решение которых классическими алгоритмами даже с помощью суперкомпьютеров требует слишком большого времени. С ростом размера входных данных такой задачи время ее решения быстро масштабируется до непрактичных значений (тысячи или миллионы лет и больше). Применение квантовых алгоритмов, использующих существенно неклассические свойства определенных физических систем, в теории позволяют кардинально снизить сложность некоторых из этих задач, что расширяет возможности решения масштабных прикладных проблем. Один из примеров такого ускорения – задачи теории графов (поиск минимального пути, проверка на связность и т.д.), регулярно возникающие в логистике и других областях. Квантовый алгоритм Гровера [1] (и его расширения) способен на порядки уменьшить ожидаемое время получения ответа на больших объемах данных. Помимо ускорения поиска, квантовые алгоритмы, реализуемые на универсальных квантовых вычислителях, за счет метода адиабатического квантового отжига, дают преимущество в решении проблем оптимизации. Такие задачи актуальны для широкого круга применений, от управления инвестиционными портфелями [2] до машинного обучения [3], расчётов физики полимеров [4], моделирования белков [5], а также поиска новых материалов [6].

Потенциальная реализация квантового превосходства запустила мировую гонку по созданию квантовых компьютеров – вычислительных устройств, в которых информация кодируется в кубитах – квантовых аналогах классических битов информации. Основным отличием кубитов от битов является их возможность находиться в суперпозиции, что является чисто квантовым свойством. Кроме того, кубиты могут быть перепутаны друг с другом, что проявляется в наличии между ними определенной корреляции и невозможно в классических системах. Важно заметить, что для получения реального преимущества в квантовых алгоритмах необходимо наличие *перепутывающих* операций (гейтов) [7], причём обладающих высокой *достоверностью* — вероятностью успешного выполнения [8].

Конкретная реализация кубитов зависит от выбранной физической платформы. На сегодняшний день среди лидеров можно выделить сверхпроводники [9; 10], нейтральные ато-

мы [11; 12], ионы [13; 14] и фотоны [15; 16]. Также активно идет поиск других перспективных платформ. Каждая платформа обладает достоинствами и недостатками. Так, например, сверхпроводящие кубиты достаточно легко масштабируются, однако количество возможных операций ограничено малым временем когерентности. Фотонные кубиты уничтожаются при измерении. Слабость взаимодействия между нейтральными атомами ограничивает связность регистра.

На фоне остальных платформ ионы выглядят одной из наиболее перспективных. Главными преимуществами ионной платформы по сравнению с другими является большое время когерентности относительно времени, необходимого для проведения квантовой операции [17], малость ошибки приготовления и считывания состояния [14], а также возможность обеспечения полной связности в ионной цепочке за счёт дальнодействия кулоновской силы. Важно также упомянуть, что именно на этой платформе на сегодняшний день продемонстрированы рекордные достоверности однокубитного [18] и двухкубитного [19] гейтов, а также самое высокое значение *квантового объёма* [20] — интегральной характеристики, учитывающей как общее количество кубитов в регистре, так и их связность и достоверность операций.

Ион $^{171}Yb^{+}$ — один из часто используемых для квантовых вычислений во многих ведущих научных группах [13; 14; 21]. Большая величина сверхтонкого расщепления основного состояния, составляющая 12.6 ГГц [22], позволяет задать кубит, в достаточной степени обособленный от остальных уровней, в соответствии с первым критерием ДиВинченцо [23]. Кроме того, этот ион обладает схемой уровней, допускающей относительно простое доплеровское лазерное охлаждение, что является обязательным этапом подготовки квантового регистра к вычислениям [24]. Однако длина волны упомянутого перехода слишком большая, чтобы было возможно осуществлять индивидуальное управление ионами непосредственным приложением электромагнитного поля на этой частоте, поскольку характерное расстояние между ионами в квантовом компьютере порядка нескольких микрон. Для решения этой проблемы применяют два рамановских пучка, разность частот которых близка к частоте сверхтонкого расщепления. В таком случае фокусировкой этих пучков можно добиться индивидуальной адресации ионов [13].

Тем не менее, использование рамановских пучков сопряжено с рядом технических трудностей в силу строго требования взаимной когерентности, которая, в свою очередь, чувствительна к флуктуациям длин оптических путей [25]. Альтернативный подход, обходящий эту проблему, был предложен в 2023 году нашей научной группой ФИАН [26]. Состоит он в кодировке кубитных состояний не в микроволновом, а в оптическом переходе между основным термом S и возбуждённым метастабильным термом D. Данный (электрический квадруполь-

ный) переход имеет естественную ширину линии 3.02 Гц [27] и длину волны 435.5 нм, что попадает в видимый диапазон. Адресация кубита, заданного таким образом, не требует наличия нескольких лазерных пучков, а значит, операции на нём будут более устойчивыми к флуктуациям оптических путей. Именно этот переход и будет рассматриваться в диссертации.

Наибольшей трудностью в создании практически полезного ионного квантового вычислителя является масштабирование регистра. Увеличение числа ионов в цепочке приводит к усложнению ее колебательного спектра. Это обстоятельство играет важную роль, поскольку основной механизм перепутывания квантовых состояний ионов – передача взаимодействия через общие колебательные моды [28; 29], и в случае большого количества близко расположенных частот этих мод требуется учитывать взаимодействие с каждой из них, что накладывает дополнительные ограничения, нарушение которых приведёт к ухудшению качества проводимой операции.

Один из распространённых подходов к решению проблемы наличия многих колебательных мод — их систематический учёт с помощью модуляции, или *шейпирования*, лазерных импульсов. Модуляцией можно увеличить количество степеней свободы возбуждающего поля и тем самым удовлетворить ограничениям, возникающим при увеличении количества мод. Наиболее общий тип шейпирования — амплитудно-частотный, при котором любая непрерывная функция задаётся зависимостью амплитуды и фазы импульса от времени. Данный тип активно применяется на практике [30; 31], однако требует наличия генератора сигналов произвольной формы. В более простом варианте шейпирование может быть чисто амплитудным [32; 33], при этом так же, как и для общего типа, удовлетворять всем ограничениям, при условии наличия достаточного количества независимых параметров, задающих импульс.

Второй подход — увеличение размера регистра не за счёт количества частиц, а за счёт количества уровней, используемых для вычислений, в каждой частице. Такие многоуровневые обобщения кубитов называются *кудитами* [34] (от обозначения d — количество уровней). Поскольку один кудит с d уровнями по размерности эквивалентен $\log_2 d$ кубитам [35–37] (для физичности d должно быть степенью двойки), то можно таким образом увеличить эффективное количество кубитов в регистре без повышения реального числа частиц и без значительного усложнения работы с этими эффективными кубитами по сравнению с реальными. При таком увеличении размерности, однако, начинают проявляться физические эффекты, которые были несущественны для кубитов. Например, в результате операции кудитные состояния могут получить дополнительную фазу [38], которая, если не будет учтена, внесёт ошибку в результат вычисления. Следовательно, критически важен последовательный ана-

лиз действия кубитных операций в кудитном пространстве.

Независимо от выбранного подхода, спектральные характеристики излучения, проводящего операции, очевидно, будут играть значительную роль в их достоверности. Это особенно верно для MS гейта [29; 39], в котором поле, воздействующее на ионы, настроено вблизи к резонансу с электронно-колебательными уровнями ионного массива. Фазовые шумы лазерного источника могут вызывать нежелательные переходы между уровнями, снижая достоверность операции [40]. Теоретическое исследование влияния фазового шума лазера на достоверность, таким образом, имеет принципиальное значение.

Не менее важна и экспериментальная реализация методов, позволяющих подавить упомянутый фазовый шум в требуемом частотном диапазоне. Из ранее продемонстрированных методов можно выделить такие, как фильтрация лазерного пучка резонатором Фабри-Перо [41] или инжекция спектрально чистого излучения малой мощности в лазерный диод, аналогичный диоду источника [42]. Оба этих метода имеют существенные ограничения, мотивирующие поиск альтернатив.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью данной работы является теоретический анализ и экспериментальная реализация методов повышения достоверности перепутывающих квантовых операций на ионах $^{171}Yb^{+}$, проводимых с использованием узкого оптического перехода.

Для достижения этой цели были решены следующие **задачи**:

1. Разработать метод амплитудного шейпирования лазерных импульсов для уменьшения систематической ошибки двухкубитной операции с учётом дрейфа колебательных частот;

2. Экспериментально реализовать двухкубитные операции на цепочке из десяти ионов $^{171}Yb^{+}$ шейпированными импульсами и измерить достоверности этих операций;

3. Провести теоретический анализ расширения кубитных ионных гейтов до кудитного пространства, предложить методы подавления дополнительных ошибок, возникающих при таком расширении;

4. Получить аналитические выражения для ошибки MS гейта, индуцированной фазовым шумом лазера;

5. Экспериментально реализовать метод спектральной фильтрации лазерного излучения при помощи фильтрующего резонатора Фабри-Перо.

Научная новизна:

1. Впервые был сформулирован и экспериментально продемонстрирован метод кусочно-постоянного амплитудного шейпирования лазерных импульсов для проведения MS гейта на радиальных колебательных модах ионной цепочки, не только учитывающий влияние самих мод, но и стабилизирующий оптимальные импульсы относительно дрейфа частот этих мод;

2. Получено общее выражение для оператора эволюции стандартных двухкубитных ионных гейтов в кудитном пространстве. Предложены оригинальные методы компенсации и стабилизации дополнительных фаз кудитных состояний;

3. Получены выражения для ошибки MS гейта, вызванной фазовым шумом лазера. Найдены два наиболее значимых при проведении гейта частотных диапазона спектра шумов, а также приближенные упрощённые формулы для ошибки в каждом из диапазонов;

4. Предложен оригинальный метод двухэтапной привязки для фильтрации лазерного излучения резонатором Фабри-Перо, позволяющий независимо управлять процессами фильтрации быстрых фазовых шумов и стабилизацией центральной частоты излучения.

Практическая значимость

Разработанный метод шейпирования значительно уменьшает ошибку гейта, при этом упрощая технические требования к экспериментальной установке, что облегчает масштабирование квантового регистра. Предложенные методы компенсации кудитных фаз могут быть использованы для повышения качества кудитных гейтов, что делает алгоритмы на кудитах более перспективными. Полученные выражения для ошибки MS гейта, возникающей вследствие фазового шума лазера, могут применяться в качестве оценок ожидаемых достоверностей гейтов, реализуемых конкретными лазерными системами. Продемонстрированный метод фильтрации имеет менее строгие требования к системе по сравнению с альтернативными методами, а также разделяет процессы стабилизации и фильтрации, что позволяет улучшить характеристики лазера и уменьшить ошибки гейтов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод амплитудной модуляции лазерного излучения, учитывающий многомодовость спектра радиальных колебаний ионной цепочки и подавляющий влияние дрейфа частот этих мод, обеспечивает среднюю достоверность MS гейта на оптическом переходе

в ионе $^{171}Yb^{+}$ в массиве из 10 ионов 96.3(3)% и уменьшает соответствующую ошибку не менее чем на порядок.

2. При расширении двухкубитных ионных гейтов на кудитный базис базисные кудитные состояния приобретают дополнительные фазовые сдвиги, снижающие достоверность операции. Предложенные методы компенсации этих сдвигов и их стабилизации относительно дрейфов колебательных частот ионов улучшают теоретическую оценку ошибки операции не менее чем на порядок при характерной флуктуации колебательных частот на уровне 500 Гц.

3. Ошибка MS гейта, возникающая вследствие флуктуаций фазы лазера, проявляется в двух частотных диапазонах спектра шума: быстром (в окрестности колебательного спектра ионов) и медленном (ограниченном обратным временем гейта). Для спектра, медленно меняющегося относительно обратного времени гейта, выражения для ошибок в каждом из диапазонов:

$$\epsilon_{\text{fast}} = \frac{4}{5} S_\phi(\mu/2\pi)\Omega^2\tau, \quad \epsilon_{\text{slow}} = \frac{2}{5}\Delta\omega\tau,$$

где $S_\phi(\mu/2\pi)$ — спектральная плотность мощности фазового шума на частоте отстройки лазера от кубитного перехода $\mu/2\pi$, Ω — резонансная частота Раби этого перехода, τ — длительность гейта, $\Delta\omega$ — ширина линии лазера.

4. Фильтрация фазовых шумов лазера резонатором Фабри-Перо с резкостью $3 \cdot 10^4$ при использовании метода двухэтапной привязки обеспечивает снижение оценки на ошибку MS гейта из-за быстрого шума до величины, меньшей 10^{-7}. Метод двухэтапной привязки позволяет отдельно оптимизировать процесс долговременной стабилизации лазера и фильтрации быстрых фазовых шумов.

Достоверность полученных результатов подтверждается воспроизводимостью экспериментальных данных, совпадением аналитических расчётов с численным моделированием (в частности, с результатами опубликованных работ других авторов), а также публикациями в рецензируемых научных журналах и апробацией на российских и международных профильных конференциях.

Апробация работы

Результаты работы докладывались автором лично на 5 российских и международных конференциях и школах:

1. «Robustness of pulse-shaped trapped-ion quantum gates to experimental noise», N. Semenin, I. Zalivako, I. Semerikov, A. Borisenko, A. Korolkov, P. Sidorov, K. Galstyan, V. Smirnov,

K. Khabarova, N. Kolachevsky, VII International conference on quantum technologies, 9-12 июля 2023, Москва;

2. «Методы подавления высокочастотных шумов полупроводниковых лазеров при помощи высокодобротных оптических резонаторов», Н.В. Семенин, И.В. Заливако, И.А. Семериков, А.С. Борисенко, П.Л. Сидоров, А.Е. Корольков, К.П. Галстян, К.Ю. Хабарова, Н.Н. Колачевский, XI Международный симпозиум «Метрология времени и пространства», 27-29 сентября 2023, д. Льялово, Московская обл.;

3. «Cost function approach for designing robust high-fidelity trapped-ion entangling quantum gates», N. Semenin, P. Kamenskikh, I. Zalivako, A. Borisenko, I. Semerikov, K. Khabarova, N. Kolachevsky, VIII International conference on quantum technologies, 21-25 июля 2025, Москва;

4. «Analytical and numerical optimization of amplitude-modulated laser pulses for robust high-fidelity trapped-ion quantum gates», N. Semenin, P. Kamenskikh, I. Zalivako, A. Borisenko, I. Semerikov, K. Khabarova, N. Kolachevsky, Okinawa School in Physics 2025, 21 сентября – 3 октября 2025, Окинава, Япония;

5. «The influence of laser phase noise on the fidelity of the two-qubit MS gate in a trapped-ion quantum computer», N. Semenin, K. Khabarova, N. Kolachevsky, The 29th International Conference on Atomic Physics, 14-19 июня 2026, Ухань, Китай.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в 4 публикациях в рецензируемых научных журналах, индексируемых Scopus и Web of Science:

1. *Заливако И. В.*, *Семенин Н. В.*, *Жаднов Н. О.*, *Галстян К. П.*, *Каменских П. А.*, *Смирнов В. Н.*, *Корольков А. Е.*, *Сидоров П. Л.*, *Борисенко А. С.*, *Аносов Ю. П.*, *Семериков И. А.*, *Хабарова К. Ю.*, *Колачевский Н. Н.* Квантовые вычисления на ионах в ловушках: принципы, достижения и перспективы // Успехи физических наук. — 2025. — Т. 195, № 6. — С. 585–620.

2. *Kamenskikh P. A.*, *Semenin N. V.*, *Zalivako I. V.*, *Smirnov V. N.*, *Semerikov I. A.*, *Khabarova K. Y.*, *Kolachevsky N. N.* Analysis of the Action of Conventional Trapped-Ion Entangling Gates in Qudit Space // Physical Review A. — 2026. — Т. 114, № 1. — С. 012458.

3. *Semenin N.*, *Khabarova K.*, *Kolachevsky N.* Influence of Fast and Slow Laser Phase Noise on the Fidelity of the Mølmer–Sørensen Trapped-Ion Gate // Quantum Reports. — 2026. — Т. 8, № 3. — С. 74.

4. *Semenin N.*, *Zalivako I.*, *Smirnov V.*, *Semerikov I.*, *Borisenko A.*, *Korolkov A.*, *Sidorov P.*, *Galstyan K.*, *Khabarova K.*, *Kolachevsky N.* Improved Laser-Filtering Scheme for Quantum Manipulations with the $^{171}Yb^{+}$ Optical Qubit // Physical Review Applied. — 2025. — Т. 23, № 3. — С. 034080.

Личный вклад автора

Все изложенные в работе результаты были получены лично автором, либо при его непосредственном участии. В частности, автором лично были составлены уравнения амплитудного шейпирования и написан программный код для нахождения оптимальных форм лазерных импульсов для MS гейта, как в кубитном, так и в кудитном случаях. Методы компенсации и стабилизации кудитных фаз разрабатывались при определяющем вкладе автора. Также автор лично разработал теорию ошибки MS гейта, вызванной фазовым шумом лазера и получил аналитические выражения для этой ошибки. Помимо этого, автором была собрана установка по фильтрации излучения, осуществлена двухэтапная фазовая привязка двух лазерных систем и проанализированы полученные данные. Вклад автора диссертации в публикацию номер 1 в списке публикаций заключался в описании теории движения ионов в линейной ловушке Пауля и теории двухкубитных ионных гейтов, в сборке оптической схемы системы индивидуальной адресации ионов, а также в экспериментальной реализации метода шейпирования, изложенного в диссертации, для проведения MS гейта на массиве из 10 ионов $^{171}Yb^{+}$ и измерения его достоверности на всех парах ионов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографии и пяти приложений. Общий объём диссертации составляет 156 страниц, в том числе 41 рисунок и 1 таблица. Список литературы включает 147 наименований.

Глава 1

Квантовая динамика ионных цепочек в линейной ловушке Пауля

1.1. Линейная ловушка Пауля

Удержание заряженной частицы в устойчивом равновесии с помощью статических электрических полей невозможно по теореме Ирншоу, следовательно, для такого удержания необходимо наличие переменной составляющей электрического поля. Ловушки, работающие при таких полях, были изобретены Вольфгангом Паулем в 1953 году [43] и впоследствии названы в его честь. Заметим сразу, что локализация частиц статическими полями в принципе возможна, однако для этого требуется как электрическое, так и магнитное поле. Ловушки такого типа называются ловушками Пеннинга [44] и в рамках данной диссертации не рассматриваются в силу их малой применимости в квантовых вычислениях на ионах.

1.1.1. Пондеромоторная сила для одиночного иона

Рассмотрим движение одиночного иона в неоднородном осциллирующем электрическом поле вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cos\omega t. \tag{1.1}$$

Такое представление справедливо, если длина волны этого поля $\sim c/\omega$ много больше характерных размеров системы L:

$$\omega \ll c/L. \tag{1.2}$$

При этом частота поля должна быть достаточно высокой, чтобы период его осцилляций был много меньше характерного времени движения иона в ловушке. Позже это условие будет сформулировано более строго. Уравнение движения будет иметь следующий вид (в нерелятивистском случае):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}(\mathbf{r})\cos\omega t, \tag{1.3}$$

где m — масса иона, e — его заряд. Для разделения высокочастотного движения (заданного величиной ω) и низкочастотного (заданного зависимостью $\mathbf{E}(\mathbf{r})$), представим радиус-вектор $\mathbf{r}$ в виде суммы $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_0$, где $\mathbf{R}$ — низкочастотная часть, а $\mathbf{r}_0$ — высокочастотная, заданная уравнением

$$m\ddot{\mathbf{r}}_0 = e\mathbf{E}(\mathbf{R})\cos\omega t. \tag{1.4}$$

Поскольку предполагается, что величина $\mathbf{R}$ остаётся постоянной на периоде высокочастотных колебаний, это уравнение можно решить в явном виде:

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{e\mathbf{E}(\mathbf{R})}{m\omega^2}\cos\omega t. \tag{1.5}$$

В данном решении задана нулевая начальная скорость. Формально говоря, можно было в качестве определения величины $\mathbf{r}_0$ взять выражение (1.5). Тогда, как нетрудно заметить, вторая производная этой величины будет определяться уравнением (1.4), если $\mathbf{R}$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$|\dot{\mathbf{R}}| \ll \omega L, \quad |\ddot{\mathbf{R}}| \ll \omega^2 L. \tag{1.6}$$

Первое неравенство можно переписать как

$$\frac{2\pi}{\omega} \ll \frac{L}{|\dot{\mathbf{R}}|}, \tag{1.7}$$

что означает условие малости периода высокочастотных осцилляций, упомянутое ранее. Раскладывая $\mathbf{E}(\mathbf{R}+\mathbf{r}_0)$ в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{R}$, получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}+\mathbf{r}_0) = \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \sum_i \left.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r^i}\right|_{\mathbf{R}} \cdot r_0^i + \frac{1}{2}\sum_{ij} \left.\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^i\, \partial r^j}\right|_{\mathbf{R}} \cdot r_0^i r_0^j + \dots \tag{1.8}$$

При условии, что амплитуда $\mathbf{r}_0$ много меньше L, можно оставить только линейное слагаемое:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}+\mathbf{r}_0) \approx \mathbf{E}(\mathbf{R}) - \frac{e}{m\omega^2}\cos\omega t \sum_i \left.\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r^i}\right|_{\mathbf{R}} \cdot E^i(\mathbf{R}) = \mathbf{E}(\mathbf{R}) - \frac{e}{m\omega^2}\cos\omega t\ \left((\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E}\right)\big|_{\mathbf{R}}. \tag{1.9}$$

В дальнейшем для простоты опустим $\mathbf{R}$, подразумевая, что электрическое поле и его производные вычисляются в этой точке. Воспользуемся следующим тождеством из векторного анализа:

$$(\mathbf{E}\cdot\nabla)\mathbf{E} = \frac{1}{2}\nabla(|\mathbf{E}|^2) - \mathbf{E}\times \operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{1.10}$$

Из уравнения Гельмгольца для поля следует, что

$$|\operatorname{rot}\mathbf{E}| \sim \frac{E}{\lambda} \ll \frac{E}{L} \sim \left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r^i}\right|, \tag{1.11}$$

где λ — длина волны высокочастотного поля. Это означает, что ротором поля в (1.10) можно пренебречь по сравнению с производными поля по координатам. Подставляя (1.9), (1.10) в уравнение движения, получим

$$m\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{e^2}{2m\omega^2}\nabla(|\mathbf{E}|^2)\cos^2\omega t = -\frac{e^2}{4m\omega^2}\nabla(|\mathbf{E}|^2)(1+\cos 2\omega t). \tag{1.12}$$

Амплитуда осцилляций $\mathbf{R}$ с частотой 2ω по порядку равна

$$A_{2\omega} \sim \frac{e^2E^2}{m^2\omega^4 L}. \tag{1.13}$$

Отношение этой амплитуды к амплитуде $\mathbf{r}_0$ по порядку равно

$$\frac{A_{2\omega}}{A_\omega} \sim \frac{e^2E^2/(m^2\omega^4L)}{eE/(m\omega^2)} = \frac{eE/(m\omega^2)}{L} \sim \frac{A_\omega}{L}. \tag{1.14}$$

Таким образом, эта поправка следующего порядка малости после $\mathbf{r}_0$, и ей можно пренебречь. Оставшаяся часть (1.12) получила название *пондеромоторной силы*, обеспечивающей медленный (по сравнению с частотой поля) дрейф иона:

$$\mathbf{F}_p = -\frac{e^2}{4m\omega^2}\nabla(|\mathbf{E}|^2). \tag{1.15}$$

Поскольку пондеромоторная сила пропорциональна градиенту скалярной функции, можно ввести эффективный потенциал этой силы:

$$W_{\text{eff}} = \frac{e^2|\mathbf{E}|^2}{4m\omega^2}. \tag{1.16}$$

Отсюда следует, что высокочастотное поле, обладающее минимумом в центре ловушки, будет удерживать ионы в этом минимуме.

Выясним критерии применимости изложенной выше теории. Из рассуждений и приближений, приведённых выше, следуют такие неравенства:

$$\omega \ll c/L, \quad A_\omega \ll L, \quad |\dot{\mathbf{R}}| \ll \omega L, \quad |\ddot{\mathbf{R}}| \ll \omega^2 L. \tag{1.17}$$

Второе неравенство с подстановкой амплитуды может быть выражено в следующем виде:

$$\frac{eE}{m\omega^2} \ll L \Rightarrow \omega \gg \frac{c}{L}\sqrt{\frac{eV}{mc^2}}, \tag{1.18}$$

где $V = EL$ — характерная разность потенциалов между электродами. Величину $|\dot{\mathbf{R}}|$ можно оценить из закона сохранения энергии для иона, отпущенного с нулевой начальной скоростью с края ловушки, и разгоняющегося к её центру:

$$\frac{m|\dot{\mathbf{R}}|^2}{2} = W_{\text{eff}} \sim \frac{e^2V^2}{4m\omega^2L^2} \Rightarrow |\dot{\mathbf{R}}| \sim \frac{eV}{m\omega L}. \tag{1.19}$$

Тогда третье неравенство в (1.17) представится в виде

$$\frac{eV}{m\omega L} \ll \omega L \Rightarrow \omega \gg \frac{c}{L}\sqrt{\frac{eV}{mc^2}}. \tag{1.20}$$

Величина $|\ddot{\mathbf{R}}|$ оценивается из выражения для пондеромоторной силы:

$$m|\ddot{\mathbf{R}}| \sim \frac{e^2V^2}{m\omega^2L^3} \Rightarrow |\ddot{\mathbf{R}}| \sim \frac{e^2V^2}{m^2\omega^2L^3}. \tag{1.21}$$

Тогда последнее неравенство в (1.17) выразится в виде

$$\frac{e^2V^2}{m^2\omega^2L^3} \ll \omega^2 L \Rightarrow \omega \gg \frac{c}{L}\sqrt{\frac{eV}{mc^2}}. \tag{1.22}$$

Таким образом, теория пондеромоторной силы применима при выполнении следующей цепочки неравенств:

$$\frac{c}{L}\sqrt{\frac{eV}{mc^2}} \ll \omega \ll \frac{c}{L}. \tag{1.23}$$

Для характерных параметров ловушки $V \sim 200$ В, $L \sim 1$ мм в случае работы с ионом иттербия $^{171}\mathrm{Yb}^+$ частота должна удовлетворять неравенствам

$$2\pi \cdot 1.6 \text{ МГц} \ll \omega \ll 2\pi \cdot 48 \text{ ГГц}. \tag{1.24}$$

Типичные частоты ловушек Пауля попадают в радиодиапазон (РЧ, RF), т. е. при частоте порядка $\omega \sim 2\pi \cdot (10 \div 20)$ МГц критерии применимости выполняются.

1.1.2. Квадрупольная линейная ловушка, области устойчивости

Наиболее часто используемой в квантовых вычислениях разновидностью ловушки Пауля является квадрупольная ловушка. Потенциал вблизи её центра близок к квадрупольному потенциалу, квадратичному по координатам:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{U}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) + \frac{\widetilde{U}}{2}(\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2)\cos\omega_{\mathrm{rf}} t, \tag{1.25}$$

где ω_{rf} — частота поля, $U, \widetilde{U}$ — амплитуды постоянной и переменной составляющих потенциала. Поле такого потенциала будет, очевидно, линейным по координатам, а эффективный потенциал пондеромоторной силы (1.16) — квадратичным, т. е. эквивалентным трехмерному гармоническому осциллятору. В пределах упомянутого ранее приближения больших длин волн поле Φ должно удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$. Это верно при любых $U, \widetilde{U}, \omega_{\mathrm{rf}}$, если

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = 0. \tag{1.26}$$

От соотношения между этими коэффициентами зависит тип используемой ловушки. Для квантовых вычислений самой удобной геометрией является линейная, при которой нуль РЧ поля расположен вдоль прямой, называемой *осью* ловушки. Выбор этой конфигурации соответствует следующему соотношению между коэффициентами:

$$\begin{aligned} \alpha' = -\beta', \quad \gamma' = 0, \\ -(\alpha + \beta) = \gamma > 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

В такой ловушке аксиальное удержание (вдоль оси) будет осуществляться статическим полем, а в радиальном направлении (в плоскости, перпендикулярной оси) — РЧ полем.

В общем случае, когда критерии применимости теории пондеромоторной силы (1.23) не выполнены, необходимо рассматривать уравнения движения иона с учётом высокочастотной

компоненты. По осям x, y эти уравнения будут выглядеть следующим образом (для линейной конфигурации):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} + (a_x + 2q\cos(2\tau))x = 0, \\ \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\tau^2} + (a_y - 2q\cos(2\tau))y = 0, \end{aligned} \tag{1.28}$$

где

$$\tau = \frac{\omega_{\mathrm{rf}} t}{2}, \quad a_x = \frac{4eU\alpha}{m\omega_{\mathrm{rf}}^2}, \quad a_y = \frac{4eU\beta}{m\omega_{\mathrm{rf}}^2}, \quad q = \frac{2e\widetilde{U}\alpha'}{m\omega_{\mathrm{rf}}^2}. \tag{1.29}$$

Уравнения такого типа называются *уравнениями Матье* [45]. Рассмотрим первое из них. Для линейных уравнений с периодическими коэффициентами (каким является уравнение Матье) существует теорема Флоке [46], утверждающая наличие линейно независимых решений вида

$$\begin{aligned} x^{(1)}_{a_x,q}(\tau) = e^{i\beta\tau} P^{(1)}_{a_x,q}(\tau), \\ x^{(2)}_{a_x,q}(\tau) = e^{-i\beta\tau} P^{(2)}_{a_x,q}(\tau), \end{aligned} \tag{1.30}$$

где β — некое комплексное число, называемое *характеристической экспонентой* решения [47], а функции $P^{(1,2)}_{a_x,q}(\tau)$ периодичны с периодом π. Такие решения будут устойчивыми, если β действительно при заданных a_x, q. Множество точек (a_x, q), реализующих устойчивые решения уравнения Матье, называется *областью устойчивости*. На рис. 1.1, *а* изображена первая область устойчивости (ближайшая к началу координат). При сдвиге времени на $\pi/2$ устойчивость решения, очевидно, не изменится, поэтому область устойчивости симметрична относительно замены $q \to -q$. Для оси y в случае слабого аксиального удержания

$$\gamma \approx 0, \quad \beta \approx -\alpha, \quad a_y \approx -a_x \equiv a. \tag{1.31}$$

Следовательно, по этой оси область устойчивости будет получена отражением рис. 1.1, *а* относительно оси q. В стабильном режиме захвата ионов параметры a, q должны лежать в пересечении областей устойчивости по обеим осям. На рис. 1.1, *б* изображена общая область устойчивости, обладающая максимальной площадью среди всех, вследствие чего она используется в большинстве реальных ловушек.

Найдём связь между различными параметрами решения типа Флоке (1.30). Поскольку функции $P^{(1,2)}_{a,q}(\tau)$ (индекс x здесь и далее опущен для краткости) обладают периодом π, можно разложить общее решение в ряд Фурье:

$$x(\tau) = Ae^{i\beta\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2in\tau} + Be^{-i\beta\tau} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widetilde{C}_n e^{-2in\tau}, \tag{1.32}$$

где константы A, B заданы начальными условиями. Дифференцируя дважды по времени, подставляя в первое уравнение (1.28) и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспо-

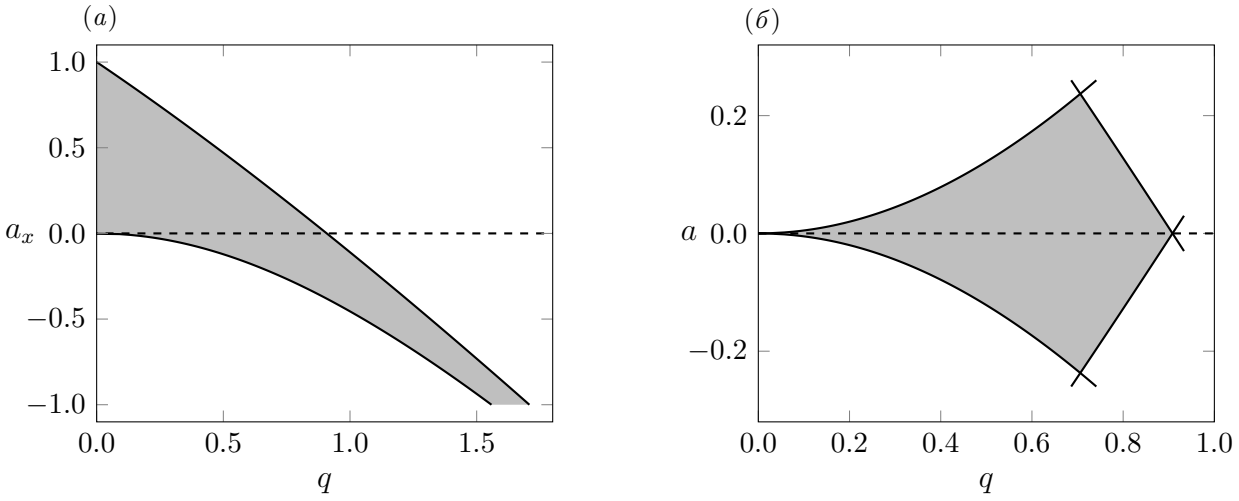


Рис. 1.1. Области устойчивости решения уравнения Матье: (*а*) — для движения по оси x, (*б*) — для движения по осям x и y в случае слабого аксиального удержания

нентах, получаем следующую систему рекуррентных соотношений между C_n:

$$C_{n+1} - D_n C_n + C_{n-1} = 0, \tag{1.33}$$

где

$$D_n = \frac{(2n+\beta)^2 - a}{q}. \tag{1.34}$$

На коэффициенты $\widetilde{C}_n$ система эквивалентна, поэтому здесь не приведена. Введём величину

$$K_n = \frac{C_{n+1}}{C_n}, \quad C_n \neq 0. \tag{1.35}$$

Уравнение (1.33) можно выразить через введённые переменные, подставив $n \to n+1$, разделив обе части на C_n и заметив, что $K_n K_{n+1} = C_{n+2}/C_n$:

$$K_n K_{n+1} - D_{n+1} K_n + 1 = 0, \tag{1.36}$$

отсюда

$$K_n = \frac{1}{D_{n+1} - K_{n+1}}. \tag{1.37}$$

Применяя последовательно это соотношение к $K_{n+1}, K_{n+2}, \ldots$, получим

$$K_n = \frac{1}{D_{n+1} - \dfrac{1}{D_{n+2} - K_{n+2}}} = \frac{1}{D_{n+1} - \dfrac{1}{D_{n+2} - \dfrac{1}{D_{n+3} - K_{n+3}}}} =$$

$$= \frac{1}{D_{n+1} - \dfrac{1}{D_{n+2} - \dfrac{1}{D_{n+3} - \dfrac{1}{\cdots}}}}. \tag{1.38}$$

Последнее выражение в уравнении выше называется *бесконечной цепной дробью*. В строгой форме данная дробь может быть определена следующим образом. Введём вспомогательную последовательность $K_n^{(k)}$, такую, что

$$K_n^{(1)} = \frac{1}{D_{n+1}}, \quad K_n^{(2)} = \frac{1}{D_{n+1} - \dfrac{1}{D_{n+2}}}, \quad K_n^{(3)} = \frac{1}{D_{n+1} - \dfrac{1}{D_{n+2} - \dfrac{1}{D_{n+3}}}}, \dots \tag{1.39}$$

Тогда величина K_n определяется как предел

$$K_n = \lim_{k\to\infty} K_n^{(k)}. \tag{1.40}$$

Несложно увидеть, что переход $K_n^{(k)} \to K_n^{(k+1)}$ производится путём замены $D_{n+k} \to D_{n+k} - 1/D_{n+k+1}$. Докажем, что

$$K_n^{(k)} = \frac{A_n^{(k)}}{B_n^{(k)}}, \tag{1.41}$$

где $A_n^{(k)}, B_n^{(k)}$ удовлетворяют уравнению типа (1.33)

$$C_n^{(k+1)} - D_{n+k+1} C_n^{(k)} + C_n^{(k-1)} = 0 \tag{1.42}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} A_n^{(-1)} &= -1, \qquad & A_n^{(0)} &= 0, \\ B_n^{(-1)} &= 0, \qquad & B_n^{(0)} &= 1. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Доказательство проведём по индукции. База $k = 1$ проверяется непосредственной подстановкой. Для $k+1$, используя (1.42) и ранее упомянутую замену $D_{n+k} \to D_{n+k} - 1/D_{n+k+1}$, запишем:

$$K_n^{(k+1)} = \frac{\left(D_{n+k} - \dfrac{1}{D_{n+k+1}}\right) A_n^{(k-1)} - A_n^{(k-2)}}{\left(D_{n+k} - \dfrac{1}{D_{n+k+1}}\right) B_n^{(k-1)} - B_n^{(k-2)}} =$$

$$= \frac{D_{n+k+1}\left(D_{n+k} A_n^{(k-1)} - A_n^{(k-2)}\right) - A_n^{(k-1)}}{D_{n+k+1}\left(D_{n+k} B_n^{(k-1)} - B_n^{(k-2)}\right) - B_n^{(k-1)}} =$$

$$= \frac{D_{n+k+1} A_n^{(k)} - A_n^{(k-1)}}{D_{n+k+1} B_n^{(k)} - B_n^{(k-1)}} = \frac{A_n^{(k+1)}}{B_n^{(k+1)}}, \tag{1.44}$$

что и требовалось доказать. Осталось убедиться в сходимости этой последовательности. Во-первых, заметим, что

$$\begin{aligned} \Delta_n^{(k)} \equiv A_n^{(k+1)} B_n^{(k)} - A_n^{(k)} B_n^{(k+1)} = \\ = (D_{n+k+1} A_n^{(k)} - A_n^{(k-1)}) B_n^{(k)} - A_n^{(k)} (D_{n+k+1} B_n^{(k)} - B_n^{(k-1)}) = \\ = A_n^{(k)} B_n^{(k-1)} - A_n^{(k-1)} B_n^{(k)} = \Delta_n^{(k-1)} = \dots = \Delta_n^{(0)} = A_n^{(1)} B_n^{(0)} - A_n^{(0)} B_n^{(1)} = 1, \end{aligned} \tag{1.45}$$

поэтому

$$\frac{A_n^{(k+1)}}{B_n^{(k+1)}} - \frac{A_n^{(k)}}{B_n^{(k)}} = \frac{A_n^{(k+1)}B_n^{(k)} - A_n^{(k)}B_n^{(k+1)}}{B_n^{(k)}B_n^{(k+1)}} = \frac{\Delta_n^{(k)}}{B_n^{(k)}B_n^{(k+1)}} = \frac{1}{B_n^{(k)}B_n^{(k+1)}}. \tag{1.46}$$

Во-вторых, из определения D_n (1.34) следует, что для любого набора (β, a, q) существует номер n_0, такой что

$$|D_n| \geqslant 2, \quad n \geqslant n_0. \tag{1.47}$$

Предположим для начала, что $n \geqslant n_0$. Тогда для любых $k \geqslant 0$ справедливо [48]

$$|B_n^{(k)}| \geqslant |B_n^{(k-1)}| + 1. \tag{1.48}$$

Докажем это утверждение также по индукции. База $k = 0$ очевидна. Теперь пусть (1.48) справедливо для некоторого $k \geqslant 0$. Для $k+1$ выполнено

$$|B_n^{(k+1)}| = |D_{n+k+1}B_n^{(k)} - B_n^{(k-1)}| \geqslant |D_{n+k+1}| \cdot |B_n^{(k)}| - |B_n^{(k-1)}| \geqslant$$
$$\geqslant 2|B_n^{(k)}| - (|B_n^{(k)}| - 1) = |B_n^{(k)}| + 1, \tag{1.49}$$

что и требовалось доказать. Из (1.48) следует (аналогично по индукции), что

$$|B_n^{(k)}| \geqslant k. \tag{1.50}$$

Тогда, используя (1.46), получаем

$$|K_n^{(k+1)} - K_n^{(k)}| \leqslant \frac{1}{k(k+1)}. \tag{1.51}$$

Коэффициент $K_n^{(k)}$ можно представить в виде частичной суммы ряда:

$$K_n^{(k)} = K_n^{(1)} + \sum_{j=1}^{k-1}(K_n^{(j+1)} - K_n^{(j)}). \tag{1.52}$$

Член ряда может быть оценён по модулю согласно (1.51), что, в свою очередь, член сходящегося ряда, поэтому предел (1.40) существует и конечен. В случае $n < n_0$ можно вычислить сначала K_{n_0} из цепной дроби, а затем $n_0 - n$ раз воспользоваться выражением (1.37). Таким образом, для любого n соседние коэффициенты Фурье решения уравнения Матье выражаются как

$$C_{n+1} = \cfrac{C_n}{D_{n+1} - \cfrac{1}{D_{n+2} - \cfrac{1}{D_{n+3} - \cfrac{1}{\dots}}}}. \tag{1.53}$$

Согласно [48], не существует двух линейно независимых ограниченных решений рекуррентного уравнения (1.33) (а коэффициенты Фурье должны быть ограниченными). При этом

выражение (1.53) задаёт соотношение между компонентами единственного ограниченного решения. Следовательно, (1.53) исчерпывает (с точностью до константы и комплексного сопряжения) все возможные траектории типа Флоке. Аналогичным образом можно выразить C_{n-1}:

$$C_{n-1} = \frac{C_n}{D_{n-1} - \dfrac{1}{D_{n-2} - \dfrac{1}{D_{n-3} - \dfrac{1}{\dots}}}}. \tag{1.54}$$

Подставляя (1.53) и (1.54) в (1.33) и принимая $n = 0$, получаем после преобразований уравнение, связывающее параметры β, a, q:

$$\beta^2 = a + q\left(\frac{1}{D_1 - \dfrac{1}{D_2 - \dfrac{1}{\dots}}} + \frac{1}{D_{-1} - \dfrac{1}{D_{-2} - \dfrac{1}{\dots}}}\right). \tag{1.55}$$

Это уравнение может быть использовано для численного нахождения характеристической экспоненты β при заданных параметрах ловушки (a, q).

Как видно из разложения (1.32), движение иона включает два параметра частоты. Первый, очевидно — частота поля ω_{rf}, фигурирующая в коэффициентах $2n\tau = n\omega_{\text{rf}}t$. Второй содержится в характеристической экспоненте: $\beta\tau = (\beta\omega_{\text{rf}}/2)t$. Частота

$$\omega_s = \frac{\beta\omega_{\text{rf}}}{2}, \tag{1.56}$$

характеризующая данную составляющую движения иона, называется *секулярной частотой*. Физический смысл этой частоты можно понять в случае малых параметров $|a|, q \ll 1$. Тогда в уравнении (1.55) пренебрежём всеми коэффициентами в цепной дроби, кроме $D_{\pm1}$, причём

$$\frac{1}{D_{\pm1}} = \frac{q}{(\beta \pm 2)^2 - a} \approx \frac{q}{4}. \tag{1.57}$$

Отсюда вытекают приближенные выражения для характеристической экспоненты и секулярной частоты:

$$\beta \approx \sqrt{\frac{q^2}{2} + a}, \quad \omega_s \approx \frac{\omega_{\text{rf}}}{2}\sqrt{\frac{q^2}{2} + a}. \tag{1.58}$$

В ряде Фурье (1.32) можно также пренебречь всеми коэффициентами, кроме $C_{0,\pm1}$, для получения приближенного закона движения (выбрано действительное решение):

$$x(t) \approx A\cos(\omega_s t)\left(1 + \frac{q}{2}\cos(\omega_{\text{rf}}t)\right). \tag{1.59}$$

пример такой траектории показан на рис. 1.2. Видно, что при малых параметрах a, q, во-первых, секулярная частота будет заметно меньше частоты РЧ поля (это следует и из (1.58)), а

во-вторых, амплитуда высокочастотных колебаний будет много меньше амплитуды секулярных. По этой причине эти малые высокочастотные осцилляции иона называют *микродвижением.*

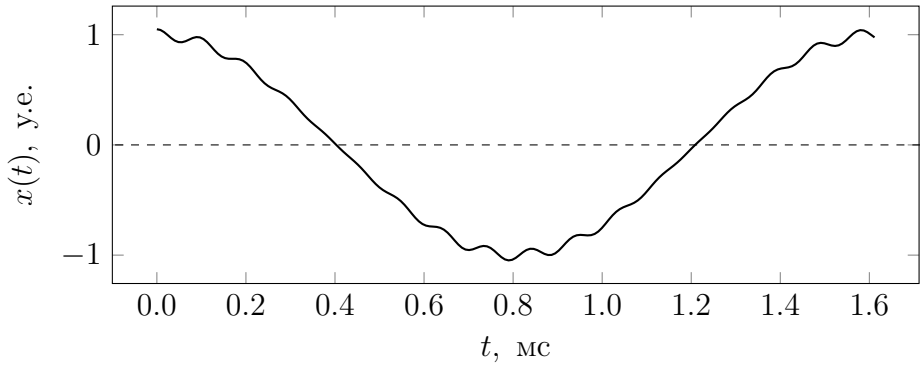


Рис. 1.2. Пример устойчивого решения уравнения Матье. Траектория вычислена при следующих параметрах: $\omega_{\text{rf}} = 2\pi \cdot 10$ МГц, $a = 0.01$, $q = 0.1$

Применим для сравнения теорию пондеромоторной силы в случае малых a, q. Постоянная часть потенциала (1.25) создаёт в направлении оси x потенциальную энергию

$$W_0 = \frac{eU\alpha x^2}{2} = \frac{m\omega_{\text{rf}}^2}{4}\,\frac{ax^2}{2}. \tag{1.60}$$

Переменная же часть создаёт эффективную энергию (1.16):

$$W_{\text{eff}} = \frac{e^2|\mathbf{E}|^2}{4m\omega_{\text{rf}}^2} = \frac{e^2\widetilde{U}^2}{4m\omega_{\text{rf}}^2}((\alpha' x)^2 + (\beta' y)^2 + (\gamma' z)^2). \tag{1.61}$$

По оси x движение будет зависеть от составляющей

$$W'_{\text{eff}} = \frac{(e\widetilde{U}\alpha' x)^2}{4m\omega_{\text{rf}}^2} = \frac{m\omega_{\text{rf}}^2}{4}\,\frac{q^2}{2}\,\frac{x^2}{2}. \tag{1.62}$$

Сумма постоянной и переменной эффективных энергий

$$W = W_0 + W'_{\text{eff}} = \frac{m\omega_{\text{rf}}^2}{4}\left(a + \frac{q^2}{2}\right)\frac{x^2}{2} \tag{1.63}$$

эквивалентна энергии гармонического осциллятора $W = m\omega_{\text{eff}}^2 x^2/2$ с частотой

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{\omega_{\text{rf}}}{2}\sqrt{\frac{q^2}{2} + a}, \tag{1.64}$$

что совпадает с формулой (1.58) для секулярной частоты. Таким образом, секулярная частота ловушки является одной из основных характеристик движения иона.

1.2. Квантовая механика одиночного иона в ловушке

Для квантовомеханического описания взаимодействия иона в ловушке Пауля с внешним полем (а именно такое рассмотрение корректно в ионных квантовых вычислениях) необ-

ходимо проанализировать поведение операторов наблюдаемых (например, координаты и импульса), в переменном потенциале. Рассмотрим общий случай классического уравнения движения иона вдоль одной координаты в переменном поле:

$$\ddot{q} + W(t)q = 0, \tag{1.65}$$

где функция $W(t)$ является произвольной гладкой функцией времени. Такая задача может быть переформулирована в терминах зависящего от времени гамильтониана

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{mW(t)q^2}{2}, \tag{1.66}$$

где $p = m\dot{q}$ — импульс иона. Отсюда видно, что $W(t)$ физически представляет собой переменный коэффициент жесткости пружины в осцилляторе, делённый на массу иона. В квантовом случае этот гамильтониан примет вид оператора, полученного путём канонического квантования:

$$\widehat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{mW(t)\hat{q}^2}{2}. \tag{1.67}$$

В представлении Гейзенберга зависимость от времени переносится с волновых функций на операторы согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}}(t) &= \frac{i}{\hbar}[\widehat{H}(t), \hat{q}(t)] = \frac{\hat{p}(t)}{m}, \\ \dot{\hat{p}}(t) &= \frac{i}{\hbar}[\widehat{H}(t), \hat{p}(t)] = -mW(t)\hat{q}(t). \end{aligned} \tag{1.68}$$

Отсюда получается уравнение на оператор $\hat{q}(t)$:

$$\ddot{\hat{q}} + W(t)\hat{q} = 0, \tag{1.69}$$

аналогично уравнению (1.65). Для любых двух решений $u_1(t), u_2(t)$ уравнения (1.65) выполняется тождество, следующее из теоремы Лиувилля-Остроградского:

$$u_1(t)\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)u_2(t) = \text{const} = u_1(0)\dot{u}_2(0) - \dot{u}_1(0)u_2(0). \tag{1.70}$$

Поскольку оператор $\hat{q}(t)$ удовлетворяет такому же уравнению, для него и для любого решения $u(t)$ справедливо такое же тождество:

$$u(t)\dot{\hat{q}}(t) - \dot{u}(t)\hat{q}(t) = u(0)\dot{\hat{q}}(0) - \dot{u}(0)\hat{q}(0) = \frac{u(0)\hat{p}}{m} - \dot{u}(0)\hat{q}. \tag{1.71}$$

В последнем равенстве применены уравнения Гейзенберга и очевидные начальные условия $\hat{q}(0) = \hat{q},\ \hat{p}(0) = \hat{p}$. Для удобства дальнейшего рассмотрения возьмём функцию $u(t)$ со следующими начальными условиями:

$$u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = i\omega, \tag{1.72}$$

где ω — произвольное действительное число. Тогда интегралом движения будет величина

$$\widehat{C}(t) = i\sqrt{\frac{m}{2\hbar\omega}}\,(u(t)\dot{\hat{q}}(t) - \dot{u}(t)\hat{q}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{q}}{\sqrt{\hbar/(m\omega)}} + i\,\frac{\hat{p}}{\sqrt{\hbar m\omega}}\right). \tag{1.73}$$

Заметим, что правая часть этого выражения — оператор уничтожения $\hat{a}$ для гармонического осциллятора с частотой ω. Назовём этот осциллятор *вспомогательным*. Очевидно, что $\widehat{C}^\dagger(t) \equiv a^\dagger$ также будет интегралом движения, причем $[\widehat{C}(t), \widehat{C}^\dagger(t)] = 1$, как и в случае осциллятора. Учтём, что функции $u(t), u^*(t)$ являются решениями (1.65), поэтому

$$u(t)\dot{u}^*(t) - \dot{u}(t)u^*(t) = u(0)\dot{u}^*(0) - \dot{u}(0)u^*(0) = -2i\omega. \tag{1.74}$$

Из операторов $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ можно получить решения уравнения Гейзенберга для координаты и импульса иона:

$$\begin{aligned}\hat{q}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\hat{a}u^*(t) + \hat{a}^\dagger u(t)),\\ \hat{p}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar m}{2\omega}}\,(\hat{a}\dot{u}^*(t) + \hat{a}^\dagger \dot{u}(t)).\end{aligned} \tag{1.75}$$

Таким образом, при описании эволюции колебательного состояния иона можно воспользоваться базисом состояний вспомогательного осциллятора $|n\rangle$, где n — его колебательное число, а в операторы взаимодействия с полем, зависящие от $\hat{q}, \hat{p}$, подставить выражения (1.75).

До сих пор относительно функций $W(t)$ и $u(t)$ не было сделано никаких предположений. Величина ω также была произвольной. Для применения теории, изложенной выше, положим в уравнении (1.65)

$$W(t) = \frac{\omega_{\text{rf}}^2}{4}(a + 2q\cos(\omega_{\text{rf}}t)), \tag{1.76}$$

что эквивалентно уравнению Матье (1.28). Для простоты дальнейшего анализа в качестве решения $u(t)$ примем одно из решений типа Флоке (1.30):

$$u(t) = e^{i\omega_s t}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_{\text{rf}}t}, \tag{1.77}$$

где подставлена секулярная частота ω_s. Начальными условиями фиксируются нормировка функции и частота вспомогательного осциллятора:

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n, \quad \omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\omega_s + n\omega_{\text{rf}}) = \omega_s + \omega_{\text{rf}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nC_n. \tag{1.78}$$

Для приближённого вычисления $u(t)$ оставим только коэффициенты $C_{0,\pm1}$:

$$u(t) \approx e^{i\omega_s t}\,\frac{1 + (q/2)\cos(\omega_{\text{rf}}t)}{1 + (q/2)}. \tag{1.79}$$

Аналогично для ω:

$$\omega \approx \omega_s + \omega_{\mathrm{rf}}(C_1 - C_{-1}) \approx \omega_s + \omega_{\mathrm{rf}} C_0 \left(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_{-1}}\right) \approx$$

$$\approx \omega_s + \frac{\omega_{\mathrm{rf}}}{1 + (q/2)} \left(\frac{q}{(\beta+2)^2 - a} - \frac{q}{(\beta-2)^2 - a}\right) \approx$$

$$\approx \omega_s + \frac{\omega_{\mathrm{rf}} q}{1 + (q/2)} \frac{(\beta-2)^2 - (\beta+2)^2}{16} =$$

$$\omega_s - \frac{\beta \omega_{\mathrm{rf}}}{2} \frac{q}{1 + (q/2)} = \omega_s \left(1 - \frac{q}{1 + (q/2)}\right) = \omega_s \frac{1 - (q/2)}{1 + (q/2)}. \quad (1.80)$$

Видно, что при малых a, q частота вспомогательного осциллятора ω близка к секулярной частоте ω_s, а решение $u(t)$ близко к $e^{i\omega_s t}$ — решению уравнения (1.65) для обычного гармонического осциллятора с $W(t) \equiv \omega_s^2$.

1.3. Нормальные моды ионной цепочки

В квантовом компьютере на ионах, как правило, захватываются ионные цепочки длиной от нескольких штук до десятков [13; 14; 49]. Необходимость работы с цепочками очевидна в силу требования наличия перепутывающих операций, то есть затрагивающих более одной частицы. При этом дальнодействие кулоновской силы позволяет заметно повысить связность квантового регистра, состоящего из большого количества ионов, давая возможность проводить двухкубитные операции напрямую между удалёнными ионами цепочки.

Основное преимущество линейных ловушек Пауля перед трехмерными в контексте квантовых вычислений состоит в том, что нуль РЧ поля расположен не в единственной точке, а вдоль оси ловушки. Как видно из (1.5), амплитуда микродвижения (в главном порядке) пропорциональна амплитуде РЧ поля в точке расположения иона. Если параметры ловушки подобраны так, чтобы ионный массив выстроился вдоль оси, то для каждого иона амплитуда его микродвижения будет минимальной. Обеспечение минимальности микродвижения ионов важно, поскольку оно смещает частоты переходов из-за эффекта Доплера второго порядка и из-за эффекта Штарка [50], а также увеличивает темпы нагрева ионной цепочки [51] и снижает эффективность лазерного охлаждения [52; 53].

Рассмотрим случай линейной ионной цепочки, выстроенной вдоль оси, описанный выше. Из физических соображений ясно, что такое положение ионов энергетически выгодно только тогда, когда аксиальное удержание, характеризуемое аксиальной частотой ловушки ω_z, будет достаточно слабым по сравнению с радиальным удержанием, характеризуемым радиальными секулярными частотами $\omega_{x,y}$. При этом также ясно, что при увеличении коли-

чества ионов в цепочке ограничение на аксиальную частоту будет более строгим. Условие линейности цепочки может быть выражено следующим приближённым неравенством [54; 55]

$$\frac{\omega_{x,y}}{\omega_z} > \frac{0.77N}{\sqrt{\ln N}}, \tag{1.81}$$

где N — количество ионов в цепочке. Если это условие выполнено, то положения равновесия ионов можно задать координатами $z_i^{(0)}$. Уравнения, определяющие эти положения равновесия, задаются равенством нулю результирующей силы, действующей на ион со стороны ловушки и остальных ионов:

$$-m\omega_z^2 z_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{e^2}{\left(z_i^{(0)} - z_j^{(0)}\right)^2} - \sum_{j=i+1}^{N} \frac{e^2}{\left(z_i^{(0)} - z_j^{(0)}\right)^2} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.82}$$

Характерной длиной в данном уравнении будет величина

$$l = \sqrt[3]{\frac{e^2}{m\omega_z^2}}. \tag{1.83}$$

Следовательно, можно переписать его в безразмерных координатах $u_i = z_i^{(0)}/l$ в виде, не зависящем от параметров ионов и ловушки:

$$u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{(u_i - u_j)^2} + \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{(u_i - u_j)^2} = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.84}$$

После определения положений равновесия ионов в линейной цепочке необходимо найти гамильтониан малых колебаний ионов. С точностью до второго порядка по координатам гамильтониан можно записать как

$$H_N = \sum_i \sum_\alpha \frac{(p_i^\alpha)^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} \left. \frac{\partial^2 V_q}{\partial r_i^\alpha \, \partial r_j^\beta} \right|_{\{\mathbf{R}\}} r_i^\alpha r_j^\beta + \\ + \sum_i \frac{m\omega_z^2 z_i^2}{2} + \sum_i \frac{mW_x(t) x_i^2}{2} + \sum_i \frac{mW_y(t) y_i^2}{2}, \tag{1.85}$$

где r_i^α, p_i^α — α-компонента (x, y, z) радиус-вектора и импульса i-го иона соответственно, а функция V_q — кулоновская потенциальная энергия

$$V_q = \sum_{k \neq p} \frac{e^2}{2|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_p|}, \tag{1.86}$$

вторая производная которой вычислена в точке равновесия $\{\mathbf{R}\}$ с радиус-векторами ионов

$$\mathbf{R}_i = \left(0, 0, z_i^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{1.87}$$

Координаты ионов отсчитываются от этих положений, поэтому первые производные потенциальной энергии отсутствуют. Последние три слагаемых выражают гамильтониан ловушки, статичный по оси z и переменный по остальным (см. (1.66)). Найдём сначала величину

$$\left.\frac{\partial^2 V_q}{\partial r_i^\alpha\,\partial r_j^\beta}\right|_{\{\mathbf{R}\}}. \tag{1.88}$$

Несложно убедиться, что

$$\frac{\partial^2}{\partial r_i^\alpha\,\partial r_j^\beta}\frac{1}{|\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_p|}=\frac{(\delta_{ik}-\delta_{ip})(\delta_{jk}-\delta_{jp})}{|\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_p|^3}\left(\frac{3(r_k^\alpha-r_p^\alpha)(r_k^\beta-r_p^\beta)}{|\mathbf{r}_k-\mathbf{r}_p|^2}-\delta_{\alpha\beta}\right). \tag{1.89}$$

Поскольку единственные ненулевые компоненты $\mathbf{R}_i$ — это компоненты по оси z, то справедливо следующее соотношение:

$$(R_k^\alpha-R_p^\alpha)(R_k^\beta-R_p^\beta)=\delta_{\alpha\beta}(R_k^\alpha-R_p^\alpha)^2. \tag{1.90}$$

Подставляя полученные выражения в (1.88), получаем

$$\left.\frac{\partial^2 V_q}{\partial r_i^\alpha\,\partial r_j^\beta}\right|_{\{\mathbf{R}\}}=\delta_{\alpha\beta}\frac{e^2}{2}\sum_{k\neq p}\frac{(\delta_{ik}-\delta_{ip})(\delta_{jk}-\delta_{jp})}{|\mathbf{R}_k-\mathbf{R}_p|^3}\left(\frac{3(R_k^\alpha-R_p^\alpha)^2}{|\mathbf{R}_k-\mathbf{R}_p|^2}-1\right)=$$

$$=\delta_{\alpha\beta}(3\delta_{\alpha z}-1)m\omega_z^2\sum_{k\neq p}\frac{(\delta_{ik}-\delta_{ip})(\delta_{jk}-\delta_{jp})}{2|u_k-u_p|^3}=\delta_{\alpha\beta}(3\delta_{\alpha z}-1)m\omega_z^2 M_{ij}, \tag{1.91}$$

где элементы матрицы M_{ij} вычисляются согласно

$$M_{ij}=\sum_{k\neq p}\frac{(\delta_{ik}-\delta_{ip})(\delta_{jk}-\delta_{jp})}{2|u_k-u_p|^3}=\begin{cases}\sum\limits_{k\neq i}\dfrac{1}{|u_i-u_k|^3}, & i=j,\\ -\dfrac{1}{|u_i-u_j|^3}, & i\neq j.\end{cases} \tag{1.92}$$

Коэффициент $\delta_{\alpha\beta}$ в (1.91) говорит о том, что аксиальные (вдоль z) и радиальные (вдоль x,y) колебания можно рассматривать независимо. Иными словами, полный гамильтониан раскладывается в сумму

$$H_N=H_N^x(x_i,p_i^x,t)+H_N^y(y_i,p_i^y,t)+H_N^z(z_i,p_i^z,t), \tag{1.93}$$

каждое слагаемое в которой зависит от соответствующих координат и импульсов ионов вдоль одной из координатных осей. Рассмотрим аксиальный гамильтониан

$$H_N^z=\sum_i\frac{(p_i^z)^2}{2m}+\frac{m\omega_z^2}{2}\sum_{i,j}2M_{ij}z_iz_j+\frac{m\omega_z^2}{2}\sum_i z_i^2. \tag{1.94}$$

Матрица M симметрична, поэтому существует ортонормированный базис собственных векторов $\mathbf{b}_l$:

$$\sum_j M_{ij}b_l^j=\lambda_l b_l^i,\quad \sum_i b_l^i b_{l'}^i=\delta_{ll'}, \tag{1.95}$$

где λ_l — (действительное) собственное значение. Сделаем следующую замену переменных:

$$z_i = \sum_l b_l^i Q_l^z, \quad p_i^z = \sum_l b_l^i P_l^z, \tag{1.96}$$

где Q_l^z, P_l^z — новые обобщённые координаты и импульсы. Обратное преобразование в силу ортонормированности $\mathbf{b}_l$ имеет вид

$$Q_l^z = \sum_i b_l^i z_i, \quad P_l^z = \sum_i b_l^i p_i^z. \tag{1.97}$$

Каноничность этой замены проверяется вычислением скобки Пуассона:

$$\{Q_l^z, P_{l'}^z\} = \sum_{ij} b_l^i b_{l'}^j \left\{z_i, p_j^z\right\} = \sum_{ij} b_l^i b_{l'}^j \delta_{ij} = \sum_i b_l^i b_{l'}^i = \delta_{ll'}. \tag{1.98}$$

Сумма квадратов координат $\sum_i z_i^2$ в новых координатах будет равна

$$\sum_i z_i^2 = \sum_i \sum_{ll'} b_l^i b_{l'}^i Q_l^z Q_{l'}^z = \sum_{ll'} \delta_{ll'} Q_l^z Q_{l'}^z = \sum_l (Q_l^z)^2. \tag{1.99}$$

Аналогично для $\sum_i (p_i^z)^2$. Вычислим вторую сумму в (1.94):

$$\sum_{i,j} 2M_{ij} z_i z_j = \sum_{ll'} \sum_{i,j} 2M_{ij} b_l^i b_{l'}^j \, Q_l^z Q_{l'}^z = \sum_{ll'} 2\lambda_{l'} \sum_i b_l^i b_{l'}^i \, Q_l^z Q_{l'}^z = \\ = \sum_{ll'} 2\lambda_{l'} \delta_{ll'} Q_l^z Q_{l'}^z = \sum_l 2\lambda_l (Q_l^z)^2. \tag{1.100}$$

Тогда гамильтониан (1.94) примет вид

$$H_N^z = \sum_l \left[\frac{(P_l^z)^2}{2m} + \frac{m\omega_z^2 (2\lambda_l + 1)(Q_l^z)^2}{2} \right]. \tag{1.101}$$

Имеем гамильтониан системы независимых осцилляторов с частотами

$$\omega_z^l = \omega_z \sqrt{2\lambda_l + 1}. \tag{1.102}$$

Каждый такой осциллятор представляет собой *нормальную моду* колебаний ионной цепочки. Частота ω_z^l называется частотой моды, а вектор $\mathbf{b}_l$ — её амплитудным вектором. Количество нормальных мод равно количеству степеней свободы вдоль выбранной оси, то есть N. Физический смысл амплитудного вектора моды состоит в следующем: если все ионы сместить из положения равновесия на величины, пропорциональные b_l^i и отпустить, то они будут колебаться синхронно с частотой ω_z^l, сохраняя соотношения между своими смещениями. Заметим, что

$$\sum_j M_{ij} = 0, \tag{1.103}$$

то есть столбцы матрицы M линейно зависимые. Следовательно, она вырожденная, и $\lambda_0 = 0$ является собственным значением, а частота $\omega_z^0 = \omega_z$ — частотой одной из нормальных мод. Амплитудный вектор этой моды имеет вид

$$\mathbf{b}_0 = (1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}/\sqrt{N}. \tag{1.104}$$

Из физического смысла амплитудного вектора ясно, что ионы в этой моде колеблются как единое целое, причём с той же частотой, с какой колебался бы одиночный ион. По данной причине эта мода носит название *моды центра масс* (COM). Ещё одну моду можно найти, вычислив следующую сумму:

$$\sum_j M_{ij} u_j = u_i \sum_{j\neq i} \frac{1}{|u_i - u_j|^3} - \sum_{j\neq i} \frac{u_j}{|u_i - u_j|^3} = \sum_{j\neq i} \frac{u_i - u_j}{|u_i - u_j|^3} = \\ = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{(u_i - u_j)^2} - \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{(u_i - u_j)^2}. \tag{1.105}$$

Последнее выражение можно упростить, использовав условия равновесия (1.84):

$$\sum_j M_{ij} u_j = u_i. \tag{1.106}$$

Таким образом, существует амплитудный вектор, пропорциональный координатам z ионов в цепочке в положении равновесия [56]. Собственное значение для такого амплитудного вектора, очевидно, равно единице. Отсюда получаем характеристики данной моды:

$$\omega_z^{\mathrm{br}} = \sqrt{3}\,\omega_z, \quad \mathbf{b}_{\mathrm{br}} = \frac{(u_1, u_2, \ldots, u_N)^{\mathrm{T}}}{\sqrt{\sum_i u_i^2}}. \tag{1.107}$$

На рис. 1.3 приведены картины колебаний для COM-моды и для моды, найденной выше. По виду осцилляций эта мода называется *дышащей (breathing)*: цепочка симметрично сжимается и растягивается, напоминая процесс дыхания.

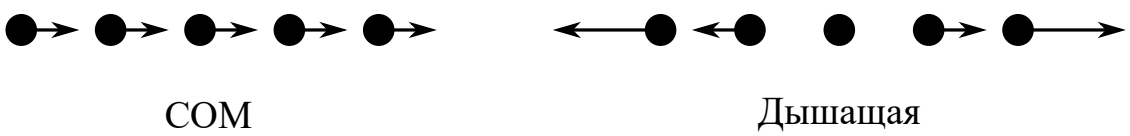


Рис. 1.3. Схематическое изображение колебаний цепочки из 5 ионов в COM-моде и в дышащей моде. Стрелки показывают направление колебаний, а их длина пропорциональна амплитуде осцилляций

В силу каноничности переменных мод Q_l^z, P_l^z гамильтониан (1.101) можно проквантовать аналогично разделу 1.2. Тогда можно сразу записать решения уравнений Гейзенберга

для координат и импульсов ионов по оси z (см. (1.75)):

$$\begin{aligned}\hat{z}_j(t) &= \sum_l b_l^j \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_z^l}} \left(\hat{a}_l^z e^{-i\omega_z^l t} + (\hat{a}_l^z)^\dagger e^{i\omega_z^l t}\right), \\ \hat{p}_j^z(t) &= \sum_l i b_l^j \sqrt{\frac{\hbar m\omega_z^l}{2}} \left(-\hat{a}_l^z e^{-i\omega_z^l t} + (\hat{a}_l^z)^\dagger e^{i\omega_z^l t}\right),\end{aligned} \tag{1.108}$$

где $\hat{a}_l^z$ — оператор уничтожения l-й нормальной моды колебаний вдоль оси z.

Теперь рассмотрим радиальный гамильтониан вдоль оси x (по оси y анализ аналогичный):

$$H_N^x = \sum_i \frac{(p_i^x)^2}{2m} - \frac{m\omega_z^2}{2}\sum_{i,j} M_{ij}x_i x_j + \frac{mW(t)}{2}\sum_i x_i^2. \tag{1.109}$$

Заменой, аналогичной (1.96), можно получить гамильтониан системы независимых осцилляторов в виде

$$H_N^x = \sum_l \left[\frac{(P_l^x)^2}{2m} + \frac{mW_l^x(t)(Q_l^x)^2}{2}\right], \tag{1.110}$$

где

$$W_l^x(t) = W_x(t) - \lambda_l\omega_z^2. \tag{1.111}$$

Для каждой радиальной нормальной моды, таким образом, справедливы те же рассуждения, что и для одиночного иона в переменном потенциале ловушки (раздел 1.2). Решения уравнений Гейзенберга для радиальных координат будут иметь вид

$$\begin{aligned}\hat{x}_j(t) &= \sum_l b_l^j \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_x^l}} \left(\hat{a}_l^x (u_l^x(t))^* + (\hat{a}_l^x)^\dagger u_l^x(t)\right), \\ \hat{p}_j^x(t) &= \sum_l b_l^j \sqrt{\frac{\hbar m}{2\omega_x^l}} \left(\hat{a}_l^x (\dot{u}_l^x(t))^* + (\hat{a}_l^x)^\dagger \dot{u}_l^x(t)\right),\end{aligned} \tag{1.112}$$

где функции $u_l^x(t)$ — решения уравнений

$$\ddot{u}_l^x + W_l^x(t)u_l^x = 0, \quad u_l^x(0) = 1, \quad \dot{u}_l^x(0) = i\omega_x^l. \tag{1.113}$$

Частоты вспомогательных осцилляторов ω_x^l фиксируются выбором решения типа Флоке (1.30) через уравнение (1.78).

В случае линейной ловушки Пауля уравнения на $u_l^x(t)$ сохраняют вид уравнений Матье с переменным коэффициентом

$$W_l^x(t) = \frac{\omega_{\text{rf}}^2}{4}(a_x + 2q\cos(\omega_{\text{rf}}t)) - \lambda_l\omega_z^2 = \frac{\omega_{\text{rf}}^2}{4}(a_l^x + 2q\cos(\omega_{\text{rf}}t)), \tag{1.114}$$

где эффективный параметр a_l^x вычисляется согласно

$$a_l^x = a_x - \frac{4\lambda_l\omega_z^2}{\omega_{\text{rf}}^2}. \tag{1.115}$$

Следовательно, для вычисления секулярной частоты l-й радиальной моды при малых a_x, q можно воспользоваться соотношением (1.58). При этом, как следует из (1.80), секулярная частота близка к частоте соответствующего вспомогательного осциллятора. Таким образом, получаем приближённое выражение для вычисления ω_x^l:

$$\omega_x^l \approx \frac{\omega_{\text{rf}}}{2}\sqrt{\frac{q^2}{2}+a_l^x} = \frac{\omega_{\text{rf}}}{2}\sqrt{\frac{q^2}{2}+a_x-\frac{4\lambda_l\omega_z^2}{\omega_{\text{rf}}^2}} \approx \sqrt{\omega_x^2-\lambda_l\omega_z^2}, \tag{1.116}$$

где ω_x — радиальная секулярная частота для одиночного иона. Из соотношений (1.102) и (1.116) можно установить связь l-й аксиальной и радиальной частот:

$$(\omega_z^l)^2-\omega_z^2 = 2(\omega_x^2-(\omega_x^l)^2). \tag{1.117}$$

Из этой связи следуют два важных вывода. Во-первых, учитывая, что аксиальные частоты ограничены снизу частотой COM-моды ω_z, частоты радиальных мод ограничены сверху частотой ω_x. Иными словами, при увеличении номера моды ω_z^l увеличивается, а ω_x^l уменьшается. Во-вторых, если цепочка достаточно длинная, то ω_z значительно меньше ω_x (см. (1.81)), поэтому относительная разность соседних радиальных частот будет мала. На рис. 1.4 изображён пример спектра аксиальных и радиальных мод цепочки из 5 ионов. Видно, что в силу большой разницы частот ω_z, ω_x радиальные частоты расположены весьма близко.

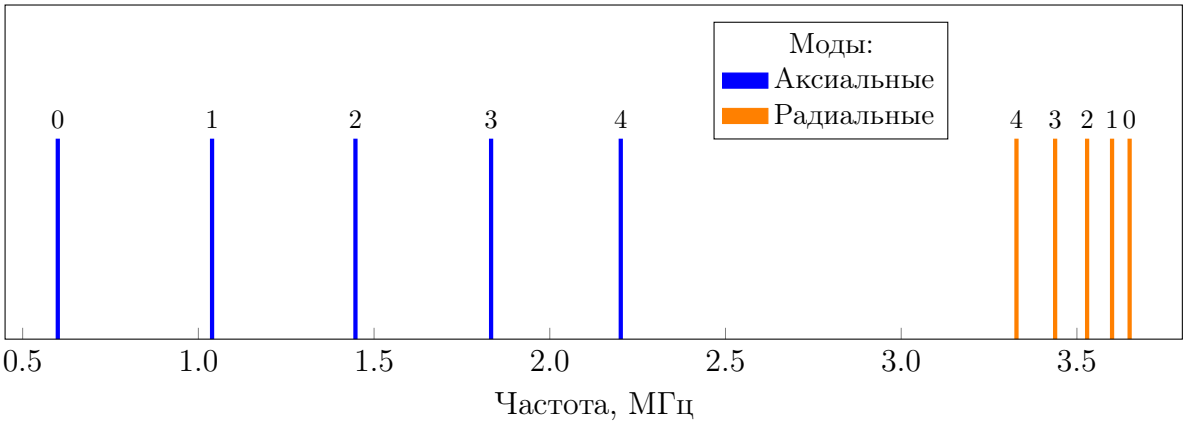


Рис. 1.4. Спектр колебательных мод цепочки из 5 ионов. Частоты для расчёта взяты следующие: $\omega_z = 2\pi\cdot 0.6$ МГц, $\omega_x = 2\pi\cdot 3.65$ МГц. Числа над линиями обозначают соответственные номера мод (0 — COM-мода)

В заключение отметим, что амплитудные векторы соответственных аксиальных и радиальных мод совпадают, поэтому картины колебаний будут выглядеть схожим образом. Например, дышащей аксиальной моде соответствует так называемая *мода качания (rocking)* (рис. 1.5). В этой моде ионная цепочка наклоняется, поворачиваясь вокруг своего центра.

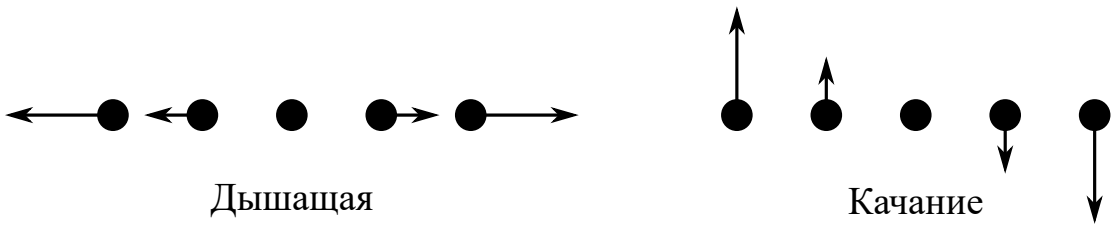


Рис. 1.5. Соответствие картин колебаний в дышащей моде и в моде качания

Основные результаты Главы 1

1. Найдено решение уравнения Матье для движения иона в переменном электрическом поле как сумма высокочастотного микродвижения и секулярных колебаний с меньшей частотой, зависящей от параметров ловушки;

2. Показано, что квантовое движение одиночного иона в ловушке может быть представлено в базисе вспомогательного гармонического осциллятора с частотой, близкой к секулярной;

3. Найдены аксиальные и радиальные нормальные моды колебаний линейной ионной цепочки в ловушке. Показано, что для длинных цепочек (5 ионов и больше) расстояние между соседними частотами радиальных мод существенно меньше, чем между частотами аксиальных.

Глава 2

Двухкубитные перепутывающие операции на оптическом переходе в ионах $^{171}Yb^{+}$

2.1. Оптический кубит на ионе $^{171}Yb^{+}$

Главным объектом исследования в диссертации является ион иттербия $^{171}Yb^{+}$. Изотоп иттербия-171 — единственный из стабильных, обладающий ненулевым спином ядра $I = 1/2$, в результате чего каждый терм тонкой структуры претерпевает сверхтонкое расщепление на две компоненты: $J \pm 1/2$. В частности, наибольшее расщепление имеет основное состояние $^2S_{1/2}$, для которого оно равно $\omega_{HF} = 12.6$ ГГц [22]. Большая величина расщепления у этого состояния даёт мотивацию использовать данные уровни в качестве кубита, который называется *микроволновым* по длине волны перехода между кубитными состояниями (рис. 2.1).

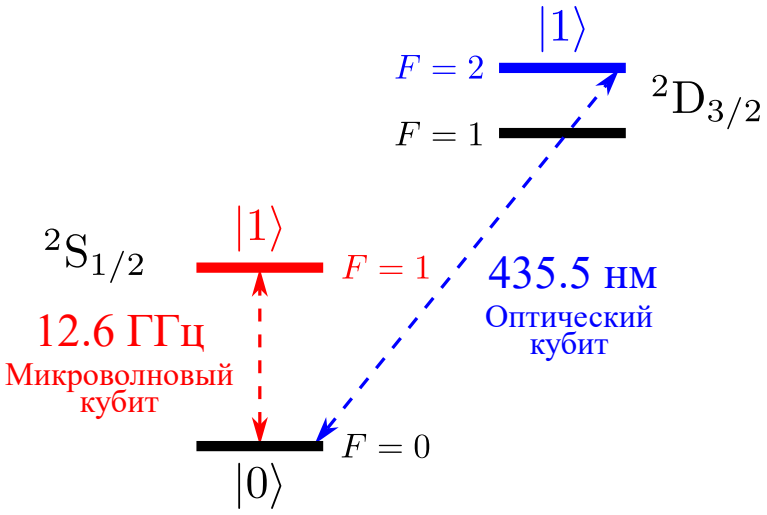


Рис. 2.1. Варианты задания кубита в ионе $^{171}Yb^{+}$

Очевидно, для полезного применения кубита нужно иметь способ возбудить кубитный переход. Это можно осуществить либо прямым воздействием микроволновым излучением, либо используя два рамановских лазерных пучка с разностью частот, равной частоте данного перехода [13; 49]. Второй способ имеет значительное преимущество перед первым в силу того, что микроволновое поле с частотой кубитного перехода имеет длину волны 24 мм, в то время как расстояние между соседними ионами в цепочке порядка нескольких микрон, что делает невозможным индивидуальное управление конкретным ионом при помощи такого поля. Лазерные же пучки, обладающие малой длиной волны, могут быть сфокусированы на

конкретном ионе, внося очень малую степень взаимодействия с соседними. Однако этот способ требует строгой когерентности между рамановскими пучками, что для такой большой разницы частот весьма затруднительно. Кроме того, эти пучки должны иметь разные направления в области нахождения иона, а значит, их необходимо пространственно разделить до захода в ловушку. Следовательно, эта система будет чувствительной к малейшим флуктуациям разницы оптических путей пучков, возникающим, например, вследствие колебаний давления воздуха в лаборатории. Обеспечение когерентности пучков, тем самым, сопряжено с техническими трудностями.

Альтернативным подходом к проблеме является другая кодировка кубита, а именно в электрическом квадрупольном переходе между уровнями

$$|0\rangle = \left|{}^2\mathrm{S}_{1/2}(F=0)\right\rangle, \quad |1\rangle = \left|{}^2\mathrm{D}_{3/2}(F=2, m_F=0)\right\rangle. \tag{2.1}$$

Для этого перехода выбирается нулевая зеемановская компонента для исключения линейных по магнитному полю флуктуаций частоты. Время жизни верхнего метастабильного уровня равно $\tau_D = 52.7$ мс [27], что соответствует естественной ширине линии $\gamma = 3.02$ Гц. Длина волны указанного перехода равна $\lambda = 435.5$ нм, что попадает в видимый диапазон, что позволяет назвать кубит *оптическим* (рис. 2.1). Отсюда явно следует преимущество выбора такого кубита: для его адресации можно использовать всего один лазерный пучок. В рамках данной диссертации будет рассматриваться именно этот узкий оптический переход в контексте проведения квантовых операций.

Процесс квантовых вычислений на ионах содержит несколько обязательных этапов. В их числе доплеровское охлаждение цепочки, подготовка и считывание состояния. Ион $^{171}\mathrm{Yb}^+$ обладает довольно компромиссной с технической точки зрения системой уровней, которая позволяет осуществить два упомянутых процесса небольшим количеством лазерных источников с доступной длиной волны. В частности, основной переход, используемый для доплеровского охлаждения — квазициклический переход ${}^2\mathrm{S}_{1/2} \leftrightarrow {}^2\mathrm{P}_{1/2}$ с длиной волны 369.5 нм (рис. 2.2). Квазициклическим он назван, потому что из верхнего состояния с малой вероятностью 0.5% [57] может произойти распад в уже упомянутое метастабильное состояние ${}^2\mathrm{D}_{3/2}$, что сильно замедлит процесс охлаждения. Чтобы решить эту проблему, применяется *перекачивающее* лазерное излучение на длине волны 935.2 нм, связывающее состояния ${}^2\mathrm{D}_{3/2}$ и ${}^3[3/2]_{1/2}$, из которого с вероятностью 98.2% [57] ион распадается обратно в ${}^2\mathrm{S}_{1/2}$, замыкая охлаждающий цикл. Для повышения эффективности охлаждения каждый из лазерных пучков дополнительно модулируется, создавая по две частотные компоненты (рис. 2.2), связывающие все задействованные в охлаждении сверхтонкие подуровни перечисленных уровней.

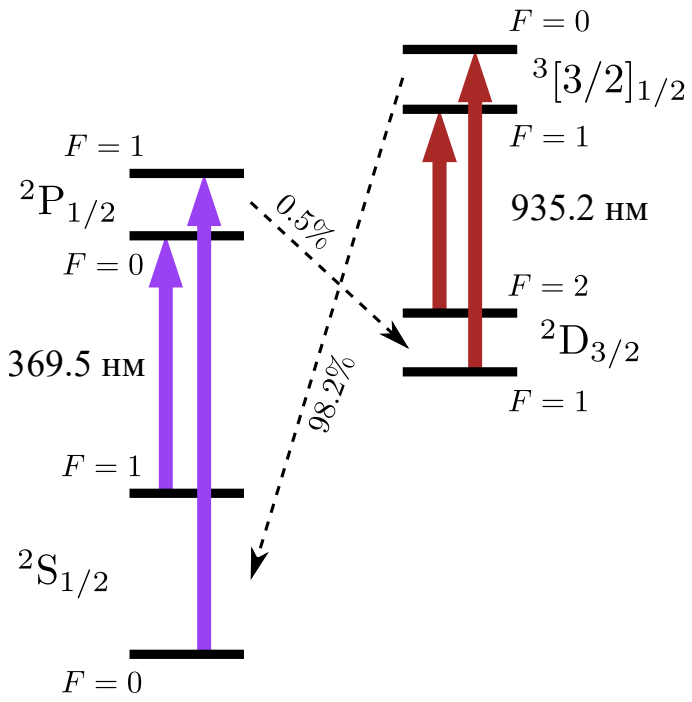


Рис. 2.2. Схема уровней для доплеровского охлаждения $^{171}Yb^+$ и необходимое лазерное излучение

Подготовка состояния осуществляется теми же полями, что и для охлаждения, но в другом режиме модуляции. Частотные компоненты охлаждающего лазера в этом режиме такие, что связывают следующие сверхтонкие подуровни (см. рис. 2.3):

$$^2S_{1/2}(F = 1) \leftrightarrow {}^2P_{1/2}(F = 0), \quad {}^2S_{1/2}(F = 1) \leftrightarrow {}^2P_{1/2}(F = 1). \tag{2.2}$$

Перекачивающее излучение остаётся таким же. Поскольку в этой конфигурации состояние $|0\rangle$ не связано с остальными, через малое время (порядка 2 мкс [58]) произойдёт накачка в это состояние. Для считывания состояния используется метод *квантовых скачков* [24]. На ион подаётся такое излучение, что в одном из кубитных состояний он активно рассеивает фотоны, а в другом нет. По количеству собранных за это время рассеянных фотонов можно судить о том, в каком из двух состояний он находится. В данном случае кубитный переход оптический, поэтому в качестве такого детектирующего излучения подойдёт охлаждающее. Ион в состоянии $|0\rangle$ будет резонансно флуоресцировать, в отличие от состояния $|1\rangle$, что даст необходимую разницу в количестве рассеянных фотонов, достаточную для эффективного считывания [59]. Чтобы повысить эффективность, можно добавить перекачивающее излучение небольшой мощности, связывающее сверхтонкие компоненты $^2D_{3/2}(F = 1)$ и $^3[3/2]_{1/2}(F = 0)$ (рис. 2.3), чтобы, как и в случае с охлаждением, замкнуть цикл распадов, при этом заметно не затрагивая верхний кубитный уровень $^2D_{3/2}(F = 2)$.

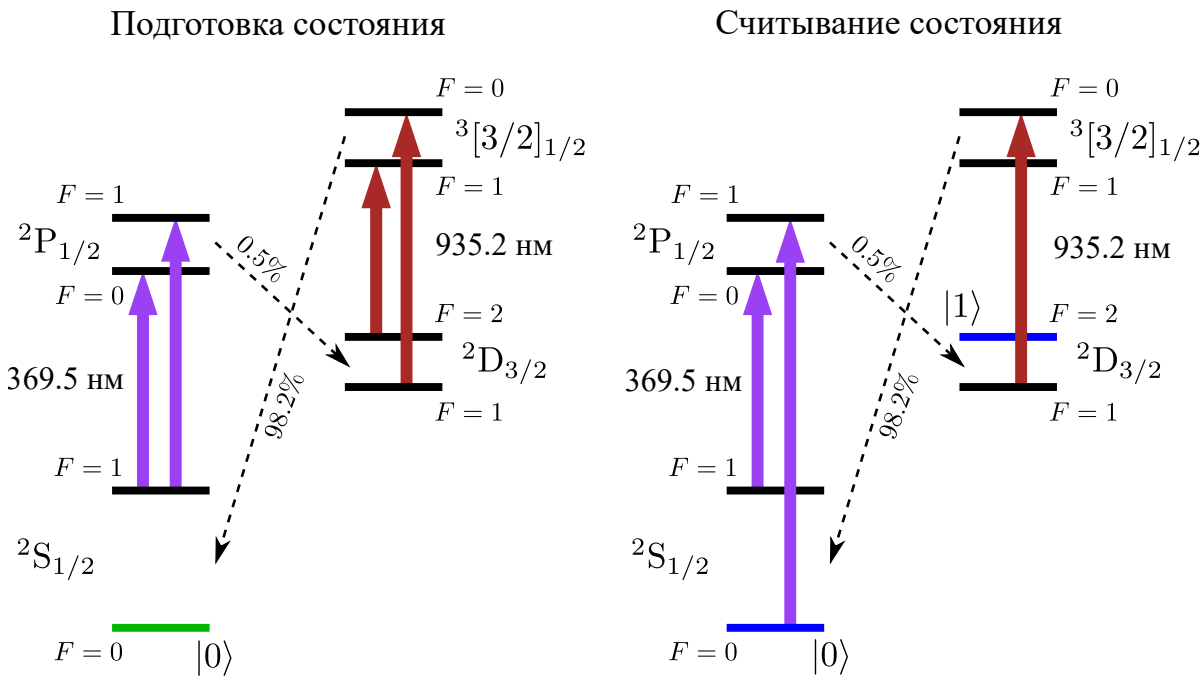


Рис. 2.3. Схема уровней и частотные компоненты лазеров для подготовки и считывания состояния $^{171}Yb^+$

2.2. Взаимодействие иона с лазерным полем

2.2.1. Гамильтониан квадрупольного взаимодействия, частота Раби

Рассмотрим взаимодействие электронно-колебательных состояний иона в цепочке с плоской электромагнитной волной

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{kr} - \omega t + \phi), \tag{2.3}$$

где $\mathbf{E}_0$ — амплитуда волны, ω — её частота, $\mathbf{r}$ — волновой вектор, ϕ — начальная фаза. Электронных состояний иона будем учитывать два: кубитные состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$, между которыми возможен электрический квадрупольный переход. Гамильтониан электрического квадрупольного взаимодействия атома с произвольным внешним полем $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ имеет вид [60]

$$H_Q = \frac{1}{2} \sum_i e_i (\mathbf{r}_i \cdot \nabla_E)(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}), \tag{2.4}$$

где e_i — заряд i-го электрона $(-e)$, $\mathbf{r}_i$ — его положение относительно ядра, а производные в операторе ∇_E подразумевается брать от поля в точке нахождения ядра. Перепишем это выражение в виде

$$H_Q = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \sum_i e_i r_{i,\alpha} r_{i,\beta} \, \partial_\alpha E_\beta, \tag{2.5}$$

где α, β — декартовы компоненты соответствующих векторов, ∂_α — производная вдоль соответствующей компоненты. Производная поля в случае плоской волны равна

$$\partial_\alpha(E_{0,\beta}\sin(\mathbf{kr}-\omega t+\phi)) = E_{0,\beta}\cos(\mathbf{kr}-\omega t+\phi)\,\partial_\alpha(\mathbf{kr}) = k_\alpha E_{0,\beta}\cos(\mathbf{kr}-\omega t+\phi). \tag{2.6}$$

Поскольку кубитные состояния иона обладают определёнными значениями углового момента, целесообразно привести данное выражение к виду неприводимых тензорных операторов [61]. Радиус-вектор r_α выражается через свои сферические компоненты как

$$r_\alpha = r\sum_m c_\alpha^{(m)}\mathcal{C}_m^1(\theta,\varphi), \tag{2.7}$$

где сферический базис $\mathbf{c}^{(m)}$ задан следующими соотношениями:

$$\mathbf{c}^{(0)} = (0,0,1)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{c}^{(\pm1)} = \mp(1,\mp i,0)^{\mathrm{T}}/\sqrt{2}, \tag{2.8}$$

а сферические функции $\mathcal{C}_m^l(\theta,\varphi)$, зависящие от углов сферической системы координат, отличаются от стандартных сферических функций $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ нормировкой [62]

$$\mathcal{C}_m^l(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_{lm}(\theta,\varphi). \tag{2.9}$$

Тогда можно преобразовать произведение координат в (2.5):

$$r_\alpha r_\beta = r^2\sum_{m_1 m_2} c_\alpha^{(m_1)}c_\beta^{(m_2)}\mathcal{C}_{m_1}^1(\theta,\varphi)\mathcal{C}_{m_2}^1(\theta,\varphi). \tag{2.10}$$

Произведение двух сферических функций, согласно [61; 62], равно

$$\mathcal{C}_{m_1}^{l_1}\mathcal{C}_{m_2}^{l_2} = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m(2l+1)\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l\\ m_1 & m_2 & -m\end{pmatrix}\mathcal{C}_m^l. \tag{2.11}$$

В нашем случае $l_1 = l_2 = 1$, поэтому $l = 0,1,2$. Среди всех слагаемых в сумме ненулевыми могут быть только слагаемые с $l \neq 1$, поскольку [62]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 0. \tag{2.12}$$

Рассмотрим сначала слагаемое с $l = 0$:

$$(\mathcal{C}_{m_1}^1\mathcal{C}_{m_2}^1)_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ m_1 & m_2 & 0\end{pmatrix}\mathcal{C}_0^0 = \frac{(-1)^{m_2}\delta_{m_1,-m_2}}{3}. \tag{2.13}$$

Тогда сумма (2.10) с учётом только этого слагаемого даст

$$(r_\alpha r_\beta)_0 = \frac{r^2}{3}\sum_{m_1 m_2} c_\alpha^{(m_1)}c_\beta^{(m_2)}(-1)^{m_2}\delta_{m_1,-m_2} = \frac{r^2}{3}\sum_m c_\alpha^{(m)}c_\beta^{(-m)}(-1)^m = \\ = \frac{r^2}{3}\sum_m c_\alpha^{(m)}\left(c_\beta^{(m)}\right)^* = \frac{r^2}{3}\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{2.14}$$

В последнем равенстве использована ортонормированность сферических базисных векторов. Следовательно, для части гамильтониана (2.5) с $l = 0$ можно записать

$$(H_Q)_0 \propto \sum_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}\, \partial_\alpha E_\beta \propto \sum_\alpha k_\alpha E_{0,\alpha} = 0, \tag{2.15}$$

потому что поле в плоской волне поперечное. Таким образом, можно считать, что взаимодействие определяется только слагаемыми с $l = 2$ и в произведении сферических функций учитывать только этот ранг:

$$(\mathcal{C}^1_{m_1}\mathcal{C}^1_{m_2})_2 = 5\sum_{m=-2}^{2}(-1)^m \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \mathcal{C}^2_m = \\ = \sqrt{\frac{10}{3}} \sum_{m=-2}^{2}(-1)^m \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \mathcal{C}^2_m. \tag{2.16}$$

Отсюда находим выражение для гамильтониана квадрупольного взаимодействия:

$$H_Q = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} \partial_\alpha E_\beta \sum_{m=-2}^{2} \left[\sum_i e_i r_i^2 \mathcal{C}^2_m(\theta_i, \varphi_i)\right] \times \\ \times \left[(-1)^m \sqrt{\frac{10}{3}} \sum_{m_1 m_2} c_\alpha^{(m_1)} c_\beta^{(m_2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}\right] = \\ = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\sum_{m=-2}^{2} Q_m c_{\alpha\beta}^{(m)} k_\alpha E_{0,\beta} \cos(\mathbf{kr} - \omega t + \phi), \tag{2.17}$$

где введён квадрупольный момент [62]

$$Q_m = \sum_i e_i r_i^2 \mathcal{C}^2_m(\theta_i, \varphi_i), \tag{2.18}$$

а также матрицы

$$c_{\alpha\beta}^{(m)} = (-1)^m \sqrt{\frac{10}{3}} \sum_{m_1 m_2} c_\alpha^{(m_1)} c_\beta^{(m_2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Явный вид данных матриц следующий [63]:

$$c_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; c_{\alpha\beta}^{(\pm 1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 0 & i \\ \mp 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \; c_{\alpha\beta}^{(\pm 2)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \mp i & 0 \\ \mp i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Квантовый гамильтониан получается из (2.17) заменой классических координат на операторы:

$$\widehat{H}_Q = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\sum_{m=-2}^{2} \widehat{Q}_m c_{\alpha\beta}^{(m)} k_\alpha E_{0,\beta} \cos(\mathbf{k\hat{r}} - \omega t + \phi), \tag{2.21}$$

где $\hat{\mathbf{r}}$ — положение иона, а оператор $\widehat{Q}_m$ вычисляется аналогично (2.18).

Найдём матричные элементы гамильтониана (2.21) по электронным кубитным состояниям иона. Сразу заметим, что диагональными матричными элементами можно пренебречь, поскольку они меняются с оптической частотой, осциллируя вокруг нулевого среднего значения, поэтому на динамику системы влияют слабо. Недиагональный матричный элемент можно выразить в виде

$$\langle 0|\widehat{H}_Q|1\rangle = \hbar\Omega\cos(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}} - \omega t + \phi) = \frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}-\omega t+\phi)} + e^{-i(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}-\omega t+\phi)}), \tag{2.22}$$

где введена *частота Раби*

$$\Omega = \sum_{\alpha\beta}\sum_{m=-2}^{2}\frac{\langle 0|\widehat{Q}_m|1\rangle c_{\alpha\beta}^{(m)} k_\alpha E_{0,\beta}}{2\hbar}. \tag{2.23}$$

В более общем случае состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ заданы своими значениями момента электронной оболочки J, полного момента F и проекциями последнего на ось квантования: $|0\rangle = |\gamma JFm_F\rangle$, $|1\rangle = |\gamma' J'F'm'_F\rangle$, где γ, γ' отвечают за остальные квантовые числа. По теореме Вигнера-Эккарта [62] можно вычислить матричный элемент как

$$\langle 0|\widehat{Q}_m|1\rangle = (-1)^{F-m_F}\langle \gamma JF||\widehat{Q}||\gamma' J'F'\rangle \begin{pmatrix} F & 2 & F' \\ -m_F & m & m'_F \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

где $\langle \gamma JF||\widehat{Q}||\gamma' J'F'\rangle$ — *приведённый матричный элемент*. Этот матричный элемент связан с вероятностью спонтанного электрического квадрупольного перехода $\Gamma_{F'\to F}$ соотношением [62]

$$\Gamma_{F'\to F} = \frac{k^5}{15\hbar(2F'+1)}\left|\langle \gamma JF||\widehat{Q}||\gamma' J'F'\rangle\right|^2. \tag{2.25}$$

В сумме по m в (2.23) из-за наличия $3j$-символа в матричном элементе $\langle 0|\widehat{Q}_m|1\rangle$ будут равны нулю слагаемые с $m \neq m_F - m'_F$. Дополнительно заметим, что фаза частоты Раби может быть выбрана произвольно путём изменения фаз кубитных состояний, поэтому можно величиной $(-1)^{F-m_F}$ пренебречь, а приведённый матричный элемент считать действительным и положительным. С учётом этого частота Раби будет равна

$$\Omega = E_0\sqrt{\frac{15\Gamma_{F'\to F}(2F'+1)}{4\hbar k^3}} \begin{pmatrix} F & 2 & F' \\ -m_F & m_F - m'_F & m'_F \end{pmatrix} \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^{(m)} n_\alpha \epsilon_\beta, \tag{2.26}$$

где $\mathbf{n}, \epsilon$ — единичные векторы направления пучка и поляризации волны соответственно. Вероятность распада $\Gamma_{F'\to F}$ связана с полной вероятностью распада $\Gamma_{J'\to J}$ между всеми сверхтонкими компонентами одного мультиплета соотношением [59]

$$\Gamma_{F'\to F} = (2F+1)(2J'+1)\begin{Bmatrix} J' & F' & I \\ F & J & 2 \end{Bmatrix}^2 \Gamma_{J'\to J}, \tag{2.27}$$

где I — спин ядра. В случае оптического кубита на ионе $^{171}\mathrm{Yb}^+$ имеем

$$\Gamma_{2\to 0} = \frac{2}{5}\Gamma_Q = 2\pi \cdot 1.21 \text{ Гц}. \tag{2.28}$$

Таким образом, гамильтониан взаимодействия иона с лазерным полем имеет вид

$$\widehat{H}_Q = \frac{\hbar\Omega}{2}(e^{i(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}-\omega t+\phi)} + e^{-i(\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}-\omega t+\phi)})(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|), \tag{2.29}$$

где частота Раби вычисляется по формуле (2.26).

2.2.2. Представление взаимодействия, режим Лэмба-Дике

Полный гамильтониан иона в цепочке с учётом найденного выше взаимодействия равен

$$\widehat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|) + \widehat{H}_N^x + \widehat{H}_N^y + \widehat{H}_N^z + \widehat{H}_Q^{(j)}, \tag{2.30}$$

где ω_0 — частота кубитного перехода, j — номер иона, с которым рассматривается взаимодействие, а $\widehat{H}_N^x, \widehat{H}_N^y, \widehat{H}_N^z$ вычисляются по формулам (1.110), (1.101) соответственно с заменой классических величин на операторы. Величина $\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_j$, входящая в $\widehat{H}_Q^{(j)}$, равна

$$\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_j = k_x\hat{x}_j + k_y\hat{y}_j + k_z\hat{z}_j. \tag{2.31}$$

В рамках данной диссертации рассматривается взаимодействие только с радиальными модами по одной из осей (например x), поэтому можно считать, что $\mathbf{k}\hat{\mathbf{r}}_j = k\hat{x}_j$. Легко видеть, что в этом случае $\widehat{H}_Q^{(j)}$ будет коммутировать с $\widehat{H}_N^y, \widehat{H}_N^z$, а значит, эти слагаемые в гамильтониане не влияют на динамику взаимодействия с полем, поэтому в дальнейшем не будем их учитывать и опустим индекс x, подразумевая, что пучок направлен вдоль этой оси.

Перейдем в представление взаимодействия относительно гамильтонианов кубита и ловушки. Эти гамильтонианы коммутируют, поэтому можно рассматривать их влияние независимо. Заметим, что

$$e^{i\omega_0 t/2(|1\rangle\langle 1|-|0\rangle\langle 0|)}|0\rangle\langle 1|e^{-i\omega_0 t/2(|1\rangle\langle 1|-|0\rangle\langle 0|)} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\omega_0 t)^n[|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|, |0\rangle\langle 1|]_n}{2^n n!} = |0\rangle\langle 1|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\omega_0 t)^n}{n!} = |0\rangle\langle 1|e^{-i\omega_0 t}, \tag{2.32}$$

где

$$[\widehat{A}, \widehat{B}]_n = [\underbrace{\widehat{A}, \dots, [\widehat{A}, [\widehat{A}}_{n}, \widehat{B}]] \dots]. \tag{2.33}$$

Аналогично для $|1\rangle\langle 0|$. В гамильтониане (2.29) после этого преобразования окажутся слагаемые, пропорциональные $e^{\pm i(\omega\pm\omega_0)t}$. Поскольку частота лазера считается близкой к частоте оптического перехода ($\omega \sim \omega_0$), экспоненты с суммарной частотой будут осциллировать быстро.

В таком случае справедливо *приближение вращающейся волны*, когда такими слагаемыми пренебрегают. Тогда для преобразованного гамильтониана получаем

$$e^{i\omega_0 t/2(|1\rangle\langle 1|-|0\rangle\langle 0|)}\,\widehat{H}_Q^{(j)}\,e^{-i\omega_0 t/2(|1\rangle\langle 1|-|0\rangle\langle 0|)} \approx \frac{\hbar\Omega}{2}(|1\rangle\langle 0|e^{i(k\hat{x}_j-\mu t+\phi)} + |0\rangle\langle 1|e^{-i(k\hat{x}_j-\mu t+\phi)}), \tag{2.34}$$

где $\mu = \omega - \omega_0$. Переход в представление взаимодействия относительно $\widehat{H}_N$ эквивалентен замене $\hat{x}_j$ на решения уравнений Гейзенберга (1.112) во всех функциях координат иона. В частности:

$$\exp(ik\hat{x}_j) \to \exp\left(ik\sum_l b_l^j\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_l}}\,(\hat{a}_l u_l^*(t) + \hat{a}_l^\dagger u_l(t))\right) = \\ = \exp\left(i\sum_l \eta_{lj}(\hat{a}_l u_l^*(t) + \hat{a}_l^\dagger u_l(t))\right), \tag{2.35}$$

где введены *параметры Лэмба-Дике*

$$\eta_{lj} = kb_l^j\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_l}}. \tag{2.36}$$

Ранее было отмечено (см. формулу (1.79)), что решение $u_l(t)$ близко к $e^{i\omega_l t}$ при малых a, q. Более того, при $\mu \sim \omega_l$, каковой случай и рассматривается в данной диссертации, члены с частотой порядка ω_{rf} имеют нерезонансный характер ввиду большой отстройки и поэтому могут быть отброшены. Дополнительно предположим, что выполняется *режим Лэмба-Дике* [24]

$$\sqrt{\sum_l \eta_{lj}^2(2\langle n_l\rangle + 1)} \ll 1, \tag{2.37}$$

где $\langle n_l\rangle$ — среднее по колебательному состоянию цепочки число заполнения l-й моды. Физический смысл этого условия понятен из следующих соображений. Квадрат смещения j-го иона равен

$$\hat{x}_j^2(t) = \sum_{ll'}\frac{\hbar b_l^j b_{l'}^j}{2m\sqrt{\omega_l\omega_{l'}}}\,(\hat{a}_l u_l^*(t) + \hat{a}_l^\dagger u_l(t))(\hat{a}_{l'} u_{l'}^*(t) + \hat{a}_{l'}^\dagger u_{l'}(t)). \tag{2.38}$$

При $l \neq l'$ с учётом $u_l(t) \approx e^{i\omega_l t}$ можно считать, что в среднем за время, много большее $|\omega_l - \omega_{l'}|^{-1}$, слагаемые, пропорциональные величинам $u_l u_{l'}^*, u_l^* u_{l'}$, равны нулю. При этом для любых l, l' аналогично положим равными нулю средние от величин $u_l u_{l'}, u_l^* u_{l'}^*$. Следовательно, в сумме выше справедливо принять $l = l'$. Учитывая тот факт, что среднее значение $|u_l(t)|^2$ близко к единице, получим следующее выражение:

$$\hat{x}_j^2 \approx \sum_l\left(b_l^j\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_l}}\right)^2(\hat{a}_l\hat{a}_l^\dagger + \hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l) = \sum_l\left(b_l^j\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_l}}\right)^2(2\hat{n}_l + 1)\,, \tag{2.39}$$

где $\hat{n}_l = \hat{a}_l^\dagger\hat{a}_l$ — оператор количества колебательных квантов во вспомогательном осцилляторе l-й моды. Домножая на k^2 и пользуясь определением параметров Лэмба-Дике (2.36),

приходим к выражению

$$(k\hat{x}_j)^2 \approx \sum_l \eta_{lj}^2 \left(2\hat{n}_l + 1\right). \tag{2.40}$$

Отсюда видно, что левая часть неравенства (2.37) есть среднеквадратичное значение оператора $k\hat{x}_j$. Можно тогда переписать это условие в виде

$$\sqrt{\langle \hat{x}_j^2 \rangle} \ll \lambda, \tag{2.41}$$

иными словами, в режиме Лэмба-Дике характерная «ширина» колебательной волновой функции иона много меньше длины волны λ возбуждающего излучения. Математически это условие выражается в «малости» показателя экспоненты $e^{ik\hat{x}_j}$, фигурирующей в гамильтониане взаимодействия. На практике режим Лэмба-Дике выполняется с высокой точностью, поскольку для характерных в экспериментальных установках секулярных частот порядка нескольких МГц значения параметров Лэмба-Дике не превышают нескольких сотых, а среднее колебательное число, как правило, много меньше единицы, если цепочка охлаждается близко к основному состоянию методами субдоплеровского охлаждения [64–68]. Принимая во внимание все сделанные выше приближения и допущения, подставим в выражение для гамильтониана (2.34) экспоненту (2.35), раскрытую до первого порядка по η_{lj}, получая итоговое выражение для гамильтониана в представлении взаимодействия:

$$\widehat{H}_I^{(j)} \approx \frac{\hbar\Omega_j}{2}\sigma_+^{(j)}\left[1 + i\sum_l \eta_{lj}(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t})\right] e^{i(\phi^{(j)} - \mu t)} + \text{h.c.}, \tag{2.42}$$

где $\sigma_+ = |1\rangle\langle 0|$, индекс j отвечает за номер рассматриваемого иона, а h.c. означает эрмитово сопряжение предыдущего слагаемого.

2.3. MS гейт, эволюция двухкубитного состояния, достоверность гейта

Выражение (2.42) содержит слагаемые, пропорциональные $\hat{\sigma}\hat{b}$, где $\hat{\sigma}$ — оператор, действующий в пространстве электронных кубитных состояний, а $\hat{b}$ — лестничный оператор некоторой моды всей цепочки. Поскольку последние операторы являются общими для всех ионов, нетрудно понять, что гамильтониан, состоящий из таких слагаемых, будет осуществлять перепутывание между внутренним состоянием одного иона и общим колебательным состоянием цепочки, а в случае облучения двух или более ионов — и перепутывание между их внутренними кубитными состояниями. Последнее утверждение даёт мотивацию использования общих колебательных мод в качестве некоторой «квантовой шины», позволяющей

передавать взаимодействие между любыми двумя ионами цепочки, а значит, и проводить двухкубитные перепутывающие операции.

Частный случай такой операции — Гейт Мёльмера-Зоренсена (MS гейт, по фамилиям Mølmer и Sørensen) [29; 39]. Это один из наиболее часто используемых двухкубитных гейтов на ионах. Устроен он следующим образом. К обоим перепутываемым ионам прикладывается так называемое *бихроматическое* излучение, то есть состоящее из двух спектральных компонент. Эти компоненты отстроены симметрично относительно кубитного перехода на величину $\pm\mu$ [29]. Компонента с большей частотой называется *синей (blue)*, с меньшей — *красной (red)*. Отстройка μ подобрана близкой к частоте некоторой моды ω_l. Для простоты дальнейших рассуждений предположим, что амплитуды поля обеих компонент бихроматического пучка одинаковы, а колебательная мода одна — COM-мода, для которой коэффициенты Лэмба-Дике всех ионов совпадают (более строгое рассмотрение изложено ниже). Описанная конфигурация излучения создаёт набор эффективных трёхуровневых рамановских схем типа «лестница» (рис. 2.4).

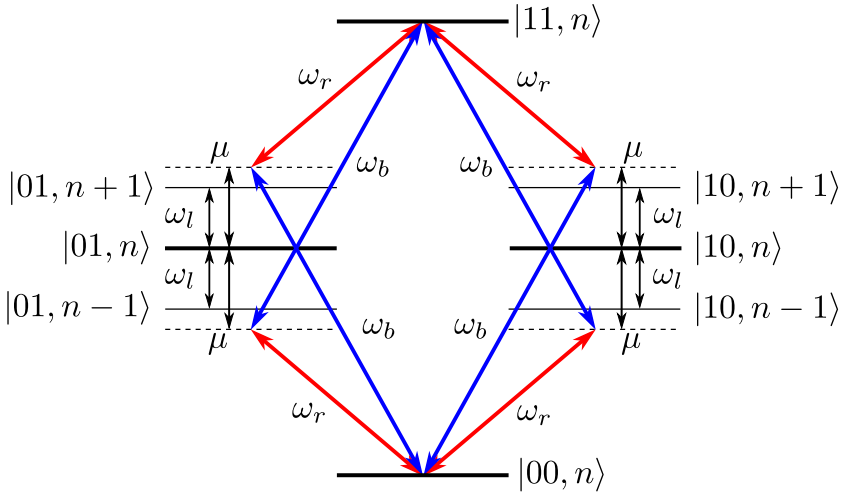


Рис. 2.4. Схема уровней, задействованных в MS гейте. Цветными стрелками обозначены бихроматические компоненты лазерного поля: синяя (ω_b) и красная (ω_r)

Промежуточными состояниями в таких схемах будут общие электронно-колебательные состояния объединённой системы двух кубитов и l-й моды цепочки $|01(10), n \pm 1\rangle$, где n — колебательное число, а начальными и конечными — соответственно $|00, n\rangle$ и $|11, n\rangle$ (предполагается, что кубитный регистр подготовлен в $|00\rangle$). Частоты Раби для каждого из переходов $n \to n \pm 1$, называемых *переходами на боковых частотах*, можно вычислить из формулы (2.42):

$$\begin{aligned} \Omega_{n\to n+1} &= \Omega\langle n+1|\eta_l \hat{a}_l^\dagger|n\rangle = \eta_l\Omega\sqrt{n+1}, \\ \Omega_{n\to n-1} &= \Omega\langle n-1|\eta_l \hat{a}_l|n\rangle = \eta_l\Omega\sqrt{n}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Эффективная частота Раби вынужденного рамановского перехода $|g\rangle \to |e\rangle$ через промежуточное состояние $|a\rangle$ равна [60]

$$\Omega_{\text{eff}} = \frac{\Omega_{ga}\Omega_{ae}}{2\Delta}, \tag{2.44}$$

где Δ — отстройка от промежуточного состояния с учётом знака. В нашем случае перехода $|00, n\rangle \to |11, n\rangle$ эта отстройка равна $\pm\delta \equiv \pm(\mu - \omega_l)$ в зависимости от выбранного пути, которых всего четыре (рис. 2.4). Полная эффективная частота Раби будет алгебраической суммой эффективных частот Раби по всем путям:

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{tot}} = \frac{\Omega_{00,n\to01,n+1}\Omega_{01,n+1\to11,n}}{2\delta} + \frac{\Omega_{00,n\to01,n-1}\Omega_{01,n-1\to11,n}}{-2\delta} + \\ + \frac{\Omega_{00,n\to10,n+1}\Omega_{10,n+1\to11,n}}{2\delta} + \frac{\Omega_{00,n\to10,n-1}\Omega_{10,n-1\to11,n}}{-2\delta} = \\ = \frac{(\Omega\eta_l)^2((n+1)-n)}{\delta} = \frac{(\Omega\eta_l)^2}{\delta}.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Таким образом, если пренебречь населённостью промежуточных состояний с колебательными числами $n \pm 1$, то эффективная частота Раби не будет зависеть от n. Это означает, что в таком рассмотрении гейт нечувствителен к колебательному состоянию цепочки (в частности, оно может быть смесью или суперпозицией базисных), а значит, требования к её охлаждению по крайней мере в главном порядке отпадают. Данное свойство слабой чувствительности к начальной температуре ионной цепочки и к её нагреву является основным преимуществом MS гейта перед другими гейтами на ионах. Дополнительным преимуществом является и то, что можно получить запутанное состояние сразу из базисного $|00\rangle$ без дополнительных однокубитных операций. Действительно, выше была найдена эффективная частота Раби осцилляций $|00\rangle \leftrightarrow |11\rangle$. Нетрудно видеть, что если остановить эти осцилляции «посередине», получим максимально перепутанное состояние Белла $|\psi\rangle_B = (|00\rangle + e^{i\varphi}|11\rangle)/\sqrt{2}$, где фаза φ зависит от фаз бихроматических компонент (см. ниже).

2.3.1. Гамильтониан MS гейта

Теперь рассмотрим эволюцию электронно-колебательных состояний ионов более подробно. Для простоты, как и ранее, положим равенство амплитуд компонент бихромата, а постоянную Планка примем равной единице. Полный гамильтониан в представлении взаимодействия будет суммой гамильтонианов (2.42) по обеим бихроматическим компонентам и

по всем ионам (в общем случае многокубитного MS гейта):

$$\widehat{H}_{\mathrm{MS}} = \sum_j \frac{\Omega_j}{2} \left\{ \left[\sigma_+^{(j)} \left(1 + i \sum_l \eta_{lj}^{(b)} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \right) e^{i(\phi_b^{(j)} - \mu t)} + \mathrm{h.c.} \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\sigma_+^{(j)} \left(1 + i \sum_l \eta_{lj}^{(r)} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \right) e^{i(\phi_r^{(j)} + \mu t)} + \mathrm{h.c.} \right] \right\}, \quad (2.46)$$

где индекс j пробегает по задействованным в гейте ионам, а знаки коэффициентов Лэмба-Дике зависят от того, сонаправлены ли бихроматические компоненты или противоположно направлены. В данной главе рассматривается случай сонаправленных пучков (так называемая *фазово-зависимая* конфигурация, см. раздел 4.1.1), поэтому знаки обоих коэффициентов положительные и индекс, обозначающий бихроматическую компоненту, можно опустить. После преобразований получим следующее выражение:

$$\widehat{H}_{\mathrm{MS}} = \sum_j \Omega_j \sigma_{\phi_\perp}^{(j)} \cos(\mu t + \phi_M^{(j)}) - \sum_{l,j} \eta_{lj}\, \Omega_j \sigma_\phi^{(j)} \cos(\mu t + \phi_M^{(j)}) (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}), \quad (2.47)$$

где «повернутые» матрицы Паули определяются согласно

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi_\perp}^{(j)} &= \sigma_x^{(j)} \cos\phi_S^{(j)} + \sigma_y^{(j)} \sin\phi_S^{(j)}, \\ \sigma_\phi^{(j)} &= \sigma_x^{(j)} \sin\phi_S^{(j)} - \sigma_y^{(j)} \cos\phi_S^{(j)}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

а соответственно колебательная и спиновая фазы $\phi_M^{(j)}, \phi_S^{(j)}$ заданы соотношением

$$\phi_{S,M}^{(j)} = (\phi_r^{(j)} \pm \phi_b^{(j)})/2. \quad (2.49)$$

При интегрировании первого слагаемого в гамильтониане (2.47) возникнут члены, пропорциональные Ω_j/μ. Как правило, частота Раби значительно меньше радиальных секулярных частот (близких к отстройке μ), поэтому этим слагаемым пренебрегают. Остаётся второе слагаемое, которое и принимают за гамильтониан MS гейта:

$$\widehat{H}_{\mathrm{MS}} \approx -\sum_{l,j} \eta_{lj}\, \Omega_j \sigma_\phi^{(j)} \cos(\mu t + \phi_M^{(j)}) (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}). \quad (2.50)$$

2.3.2. Оператор эволюции

Для вычисления оператора эволюции с гамильтонианом (2.50) воспользуемся разложением Магнуса [69]

$$\widehat{U}_{\mathrm{MS}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{\Omega}_k \right), \quad (2.51)$$

где первые несколько членов суммы равны

$$\begin{aligned}
\widehat{\Omega}_1 &= -i\int\limits_0^\tau \widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t)\,dt,\\
\widehat{\Omega}_2 &= -\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau dt_1\int\limits_0^{t_1} dt_2\,[\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_1),\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_2)],\\
\widehat{\Omega}_3 &= \frac{i}{6}\int\limits_0^\tau dt_1\int\limits_0^{t_1} dt_2\int\limits_0^{t_2} dt_3\,\Big([\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_1),[\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_2),\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_3)]]+\\
&\qquad +[\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_3),[\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_2),\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_1)]]\Big);
\end{aligned}\tag{2.52}$$

величина τ обозначает время гейта. Заметим, что $[\hat{a}_l,\hat{a}_{l'}^\dagger]=\delta_{ll'}$, поэтому все слагаемые в сумме, начиная с третьего, будут равны нулю, так как содержат коммутаторы операторов с константами.

Первое слагаемое в сумме (2.51) равно

$$\widehat{\Omega}_1 = i\sum_{l,j}\int\limits_0^\tau dt\,\eta_{lj}\,\Omega_j\sigma_\phi^{(j)}\cos(\mu t+\phi_M^{(j)})(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t}+\hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) = \sum_{l,j}\sigma_\phi^{(j)}(\alpha_{lj}\hat{a}_l^\dagger-\alpha_{lj}^*\hat{a}_l),\tag{2.53}$$

где

$$\alpha_{lj} = i\eta_{lj}\int\limits_0^\tau \Omega_j(t)\cos(\mu t+\phi_M^{(j)})e^{i\omega_l t}\,dt.\tag{2.54}$$

В выражении выше учтена возможная зависимость частоты Раби от времени. Если представить косинус как сумму экспонент, то интеграл будет состоять из слагаемых с суммарной и разностной частотами. Заметим, что для гейтов на радиальных модах, как правило, $(\mu+\omega_l)\gg 1/\tau$, иными словами, экспонента с суммарной частотой меняется на характерном масштабе времени, много меньшем времени гейта. Учитывая, что частота Раби меняется на масштабе $\sim\tau$, можно пренебречь интегралом с суммарной частотой. Приближённо тогда можно записать

$$\alpha_{lj}\approx\frac{i\eta_{lj}e^{-i\phi_M^{(j)}}}{2}\int\limits_0^\tau \Omega_j(t)e^{-i(\mu-\omega_l)t}\,dt.\tag{2.55}$$

Предположим дополнительно, что интенсивность пучков одинакова на всех ионах: $\Omega_j\equiv\Omega$. Тогда можно записать $\alpha_{lj}=\eta_{lj}e^{-i\phi_M^{(j)}}\alpha_l$, где α_l зависит только от моды цепочки. Последнее выражение в (2.53) совпадает (с точностью до оператора Паули) с показателем экспоненты в операторе смещения $\mathcal{D}$ для гармонического осциллятора:

$$\mathcal{D}(\alpha)=\exp(\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}).\tag{2.56}$$

Смысл оператора Паули в $\widehat{\Omega}_1$ состоит в следующем. Для простоты рассуждений рассмотрим один ион, фиксируя тем самым j и пренебрегая суммой по этому индексу. Собственные

значения оператора $\sigma_\phi^{(j)}$ равны ± 1, как и для обычных матриц Паули, а собственные состояния (которые обозначим $|\pm\rangle$) составляют базис, поэтому можно анализировать действие оператора в этом базисе вместо вычислительного $|0(1)\rangle$. Если ион находится в кубитном состоянии $|+\rangle$, то с точностью до коэффициента Лэмба-Дике колебательное состояние l-й моды получит сдвиг на фазовой плоскости α_l, а если в состоянии $|-\rangle$ — сдвиг $-\alpha_l$ (рис. 2.5).

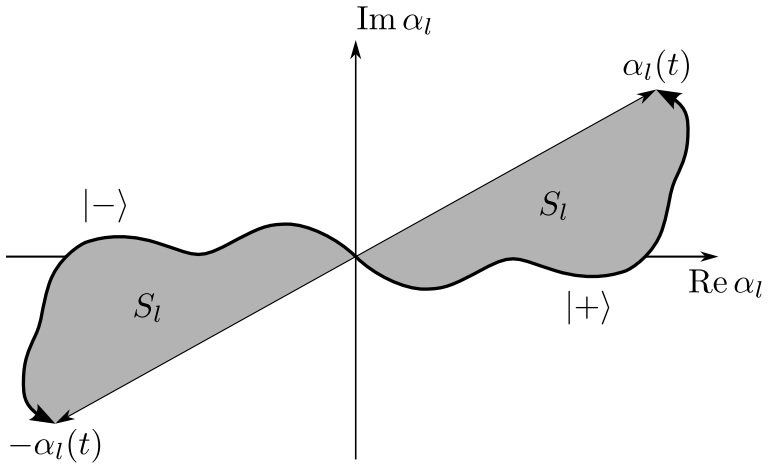


Рис. 2.5. Траектория колебательного состояния l-й моды на фазовой плоскости во время MS гейта. Противоположные знаки смещений для разных состояний иона создают спин-зависимую силу. S_l обозначает площадь, заметаемую радиус-вектором параметра смещения

Данный факт можно эквивалентно представить так, что на ион в зависимости от его внутренней степени свободы действует различная сила со стороны лазерного поля. По этой причине MS гейт называют гейтом на *спин-зависимой силе*. Наличие этой силы приводит к перепутыванию не только электронных состояний с колебательными, но и электронных друг с другом, что будет показано ниже.

Для вычисления второго слагаемого в сумме (2.51) представим гамильтониан MS гейта в виде

$$\widehat{H}_{\mathrm{MS}} = i \sum_{l,j} \sigma_\phi^{(j)} \left(\hat{a}_l^\dagger \frac{\mathrm{d}\alpha_{lj}}{\mathrm{d}t} - \hat{a}_l \frac{\mathrm{d}\alpha_{lj}^*}{\mathrm{d}t} \right), \tag{2.57}$$

где $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_{lj}$ есть производная функции (2.54), зависящей от верхнего предела интегрирования. Тогда для коммутатора $[\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_1), \widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_2)]$ можно записать

$$[\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_1), \widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t_2)] =$$
$$= -\sum_{ll'} \sum_{jk} \left[\sigma_\phi^{(j)} \left(\hat{a}_l^\dagger \left.\frac{\mathrm{d}\alpha_{lj}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_1} - \hat{a}_l \left.\frac{\mathrm{d}\alpha_{lj}^*}{\mathrm{d}t}\right|_{t_1} \right), \sigma_\phi^{(k)} \left(\hat{a}_{l'}^\dagger \left.\frac{\mathrm{d}\alpha_{l'k}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_2} - \hat{a}_{l'} \left.\frac{\mathrm{d}\alpha_{l'k}^*}{\mathrm{d}t}\right|_{t_2} \right) \right] =$$

$$= -\sum_{jk} \sigma_\phi^{(j)} \sigma_\phi^{(k)} \sum_{ll'} \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{lj}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha^*_{l'k}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_2} - \frac{\mathrm{d}\alpha^*_{lj}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha_{l'k}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_2} \right) \delta_{ll'} =$$

$$= -2i \sum_{jk} \sigma_\phi^{(j)} \sigma_\phi^{(k)} \sum_{l} \mathrm{Im} \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{lj}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha^*_{lk}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_2} \right). \quad (2.58)$$

Второй член суммы (2.51) будет равен

$$\widehat{\Omega}_2 = i \sum_{jk} \sigma_\phi^{(j)} \sigma_\phi^{(k)} \sum_{l} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ \mathrm{Im} \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_{lj}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_1} \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha^*_{lk}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_2} \right). \quad (2.59)$$

Поскольку $(\sigma_\phi^{(j)})^2 = 1$, слагаемые с $j = k$ дадут лишь глобальную фазу гейта, поэтому могут быть проигнорированы. В предположении идентичности интенсивностей пучков на ионах выражение упрощается к виду

$$\widehat{\Omega}_2 = 2i \sum_{j<k} \sigma_\phi^{(j)} \sigma_\phi^{(k)} \cos(\phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)}) \sum_l \eta_{lj}\eta_{lk} \int_0^\tau \mathrm{Im} \left(\alpha_l^*(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha_l}{\mathrm{d}t} \right) dt, \quad (2.60)$$

где учтена симметрия относительно замены $j \leftrightarrow k$. Заметим, что интеграл в выражении выше есть удвоенная ориентированная площадь, заметаемая радиус-вектором точки α_l на фазовой плоскости (обозначена на рис. 2.5 величиной S_l) в течение всего времени гейта. Тогда можно записать

$$\widehat{\Omega}_2 = i \sum_{j<k} \chi_{jk} \sigma_\phi^{(j)} \sigma_\phi^{(k)}, \quad (2.61)$$

где *фаза перепутывания* χ_{jk} определяется как

$$\chi_{jk} = 4 \cos(\phi_M^{(j)} - \phi_M^{(k)}) \sum_l \eta_{lj}\eta_{lk} S_l. \quad (2.62)$$

В общем случае

$$\widehat{\Omega}_2 = i \sum_{j\neq k} \chi_{jk} \sigma_\phi^{(j)} \sigma_\phi^{(k)}, \quad (2.63)$$

где

$$\chi_{jk} = \sum_l \eta_{lj}\eta_{lk} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \, \Omega_j(t_1)\Omega_k(t_2) \cos(\mu t_1 + \phi_M^{(j)}) \cos(\mu t_2 + \phi_M^{(k)}) \sin(\omega_l(t_1 - t_2)). \quad (2.64)$$

Операторы $\widehat{\Omega}_1$ и $\widehat{\Omega}_2$ коммутируют, поэтому можно выразить оператор эволюции в следующей форме, используя определение оператора смещения (2.56):

$$\widehat{U}_{\mathrm{MS}} = \exp\left(i \sum_{j\neq k} \chi_{jk} \sigma_\phi^{(j)} \sigma_\phi^{(k)} \right) \prod_l \mathcal{D}_l \left(\sum_j \sigma_\phi^{(j)} \alpha_{lj} \right), \quad (2.65)$$

где параметры смещения α_{lj} и фазы перепутывания χ_{jk} определяются выражениями (2.54) и (2.64) соответственно, а $\mathcal{D}_l$ — оператор смещения l-й моды. В частном случае двухкубитной

операции сумма по $j \neq k$ будет состоять из двух слагаемых, которые можно свести к одному: $\chi_{jk} + \chi_{kj} = \chi_{jk\,(j<k)}$. В дальнейшем будем выражать фазу перепутывания двух кубитов одним числом.

2.3.3. Достоверность MS гейта

Основной характеристикой качества проведённой квантовой операции является *достоверность*. Достоверность может характеризовать как состояния, так и операторы. В случае состояний, заданных матрицами плотности ρ_1, ρ_2, достоверность характеризует степень их близости в гильбертовом пространстве и определяется формулой [70]

$$F = \left(\mathrm{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}} \right)^2. \tag{2.66}$$

Например, состояние ρ_1 может обозначать целевое состояние двухкубитной системы после двухкубитного гейта, а ρ_2 — фактическое состояние, полученное на эксперименте. Тогда с помощью формулы (2.66) можно оценить достоверность данного двухкубитного гейта при условии, что начальное состояние также задано. Если целевое состояние чистое: $\rho_1 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, то формула упрощается до следующего вида:

$$F = \left(\mathrm{Tr} \sqrt{\sqrt{|\psi_0\rangle\langle\psi_0|}\rho_2\sqrt{|\psi_0\rangle\langle\psi_0|}} \right)^2 = \left(\mathrm{Tr} \sqrt{|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\rho_2|\psi_0\rangle\langle\psi_0|} \right)^2 =$$
$$= \langle\psi_0|\rho_2|\psi_0\rangle \left(\mathrm{Tr} \sqrt{|\psi_0\rangle\langle\psi_0|} \right)^2 = \langle\psi_0|\rho_2|\psi_0\rangle (\mathrm{Tr}(|\psi_0\rangle\langle\psi_0|))^2 = \langle\psi_0|\rho_2|\psi_0\rangle. \tag{2.67}$$

Поскольку колебательные степени свободы для вычислений не используются, для определения достоверности гейта, работающего в кубитном пространстве, необходимо предварительно взять частичный след полной матрицы плотности ρ (состоящей из подсистем «кубиты + колебательные моды») по колебательной подсистеме:

$$F = \langle\psi_0|\mathrm{Tr}_m\,\rho|\psi_0\rangle, \tag{2.68}$$

где Tr_m — частичный след по колебательным состояниям.

Достоверность MS гейта при начальном состоянии $|00\rangle$

Необходимое условие идеальности гейта, как нетрудно видеть из (2.65), состоит в равенстве нулю параметров смещения: $\alpha_{lj} = 0$. В таком случае оператор эволюции будет затрагивать только электронные состояния, не меняя колебательные. Рассмотрим действие такого идеального двухкубитного гейта на состояние $|00\rangle$. Для упрощения перейдём в базис собственных состояний оператора σ_ϕ:

$$|s\rangle = (ise^{-i\phi},\ 1)^{\mathrm{T}}/\sqrt{2}, \tag{2.69}$$

где $|s\rangle = |\pm\rangle$ ($s = \pm 1$). В этом базисе идеальный гейт имеет тривиальный вид:

$$\widehat{U}_0' = \sum_{s_1 s_2} e^{i\chi_0 s_1 s_2} |s_1 s_2\rangle\langle s_1 s_2| = \begin{pmatrix} e^{i\chi_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\chi_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\chi_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\chi_0} \end{pmatrix}, \tag{2.70}$$

где χ_0 — фаза перепутывания двух кубитов, обозначенных 1 и 2. Матрица перехода к этому базису следующая:

$$\widehat{S}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ie^{-i\phi_S^{(j)}} & -ie^{-i\phi_S^{(j)}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.71}$$

В вычислительном базисе гейт будет иметь матрицу

$$\widehat{U}_0 = (\widehat{S}_1 \otimes \widehat{S}_2)\widehat{U}_0'(\widehat{S}_1 \otimes \widehat{S}_2)^\dagger = \\ = \begin{pmatrix} \cos\chi_0 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi_+}\sin\chi_0 \\ 0 & \cos\chi_0 & ie^{-i\phi_-}\sin\chi_0 & 0 \\ 0 & ie^{i\phi_-}\sin\chi_0 & \cos\chi_0 & 0 \\ -ie^{i\phi_+}\sin\chi_0 & 0 & 0 & \cos\chi_0 \end{pmatrix}, \tag{2.72}$$

где $\phi_\pm = \phi_S^{(1)} \pm \phi_S^{(2)}$. Отсюда видно, что действие идеального MS гейта на состояние $|00\rangle$ будет давать состояние

$$\widehat{U}_0|00\rangle = \cos\chi_0|00\rangle - ie^{i\phi_+}\sin\chi_0|11\rangle. \tag{2.73}$$

В частном случае $\chi_0 = \pi/4$ получаем состояние Белла:

$$|\psi_B\rangle = \frac{|00\rangle - ie^{i\phi_+}|11\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{2.74}$$

Определим теперь достоверность гейта общего вида, заданного формулой (2.65) при целевом гейте $\widehat{U}_0$. Начальное состояние выберем таким:

$$\rho_i = |00\rangle\langle 00| \otimes \rho_t, \tag{2.75}$$

где ρ_t — матрица плотности колебательных состояний мод, которую примем соответствующей тепловому распределению в каждой моде со средними колебательными числами $\overline{n}_l$:

$$\rho_t = \bigotimes_l \left[\sum_{n_l=0}^{\infty} \frac{1}{1+\overline{n}_l} \left(\frac{\overline{n}_l}{1+\overline{n}_l} \right)^{n_l} |n_l\rangle\langle n_l| \right]. \tag{2.76}$$

Действие оператора $\widehat{U}_{\text{MS}}$ на начальное состояние будет задаваться преобразованием

$$\rho_f = \widehat{U}_{\text{MS}} \rho_i \widehat{U}_{\text{MS}}^\dagger. \tag{2.77}$$

Действие же идеального оператора на кубитное состояние $|00\rangle$ задаётся соотношением $|\psi_0\rangle = \widehat{U}_0|00\rangle$. Используя определение достоверности (2.68), получаем

$$F_{00} = \langle 00|\widehat{U}_0^\dagger \operatorname{Tr}_m\Big(\widehat{U}_{\rm MS}\rho_i\widehat{U}_{\rm MS}^\dagger\Big)\widehat{U}_0|00\rangle = \langle 00|\operatorname{Tr}_m\Big((\widehat{U}_0^\dagger\otimes\mathbb{I})\widehat{U}_{\rm MS}\rho_i\widehat{U}_{\rm MS}^\dagger(\widehat{U}_0\otimes\mathbb{I})\Big)|00\rangle, \tag{2.78}$$

где $\mathbb{I}$ — единичный оператор на колебательном подпространстве. Легко видеть, что произведение операторов в выражении выше равно

$$\widehat{U}' = (\widehat{U}_0^\dagger\otimes\mathbb{I})\widehat{U}_{\rm MS} = \exp(i(\chi_{12}-\chi_0)\sigma_\phi^{(1)}\sigma_\phi^{(2)})\prod_l \mathcal{D}_l\left(\sum_j \sigma_\phi^{(j)}\alpha_{lj}\right). \tag{2.79}$$

Этот оператор можно выразить, как и ранее, через базис собственных функций $\sigma_\phi^{(j)}$:

$$\widehat{U}' = \sum_{s_1s_2}|s_1s_2\rangle\langle s_1s_2|\exp(i(\chi_{12}-\chi_0)s_1s_2)\prod_l \mathcal{D}_l\left(\sum_j s_j\alpha_{lj}\right). \tag{2.80}$$

Выражение под частичным следом в (2.78) будет равно

$$\widehat{U}'\rho_i(\widehat{U}')^\dagger = \sum_{s_1s_2}\sum_{s_1's_2'}|s_1s_2\rangle\langle s_1's_2'|\exp(i(\chi_{12}-\chi_0)(s_1s_2-s_1's_2'))\times$$
$$\times\langle s_1s_2|00\rangle\langle 00|s_1's_2'\rangle\prod_l\mathcal{D}_l\left(\sum_j s_j\alpha_{lj}\right)\rho_t\prod_l\mathcal{D}_l\left(-\sum_j s_j'\alpha_{lj}\right). \tag{2.81}$$

Частичный след будет вычисляться по колебательной части этого оператора:

$$\operatorname{Tr}_m\left[\prod_l\mathcal{D}_l\left(\sum_j s_j\alpha_{lj}\right)\rho_t\prod_l\mathcal{D}_l\left(-\sum_j s_j'\alpha_{lj}\right)\right] =$$
$$= \operatorname{Tr}_m\left[\prod_l\mathcal{D}_l\left(-\sum_j s_j'\alpha_{lj}\right)\mathcal{D}_l\left(\sum_j s_j\alpha_{lj}\right)\rho_t\right] =$$
$$= \exp\left(i\sum_l\operatorname{Im}\sum_{jk}s_j\alpha_{lj}s_k'\alpha_{lk}^*\right)\operatorname{Tr}_m\left[\prod_l\mathcal{D}_l\left(\sum_j\alpha_{lj}(s_j-s_j')\right)\rho_t\right] =$$
$$= \exp\left(i\sum_{j\neq k}s_js_k'\operatorname{Im}\sum_l\alpha_{lj}\alpha_{lk}^*\right)\prod_l\sum_{n_l=0}^{\infty}\frac{1}{1+\overline{n}_l}\left(\frac{\overline{n}_l}{1+\overline{n}_l}\right)^{n_l}\langle n_l|\mathcal{D}_l\left(\sum_j\alpha_{lj}(s_j-s_j')\right)|n_l\rangle, \tag{2.82}$$

где использовано тождество

$$\mathcal{D}(\alpha)\mathcal{D}(\beta) = \exp(i\operatorname{Im}(\alpha\beta^*))\mathcal{D}(\alpha+\beta). \tag{2.83}$$

Диагональный матричный элемент оператора смещения равен [71]

$$\langle n_l|\mathcal{D}(\alpha)|n_l\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}L_n(|\alpha|^2), \tag{2.84}$$

где $L_n(x)$ — полином Лагерра. Сумму по n_l можно найти, используя производящую функцию полиномов Лагерра [72]

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}. \tag{2.85}$$

Подставляя $t = \overline{n}_l/(1+\overline{n}_l)$, $x = \left|\sum_j \alpha_{lj}(s_j - s'_j)\right|^2$, получаем

$$\prod_l \sum_{n_l=0}^{\infty} \frac{1}{1+\overline{n}_l}\left(\frac{\overline{n}_l}{1+\overline{n}_l}\right)^{n_l} \langle n_l|\mathcal{D}_l\left(\sum_j \alpha_{lj}(s_j - s'_j)\right)|n_l\rangle = \\ = \exp\left(-\sum_l \left(\overline{n}_l + \frac{1}{2}\right)\left|\sum_j \alpha_{lj}(s_j - s'_j)\right|^2\right). \quad (2.86)$$

Выражение для достоверности тогда примет вид

$$F_{00} = \sum_{s_1 s_2}\sum_{s'_1 s'_2} |\langle s_1 s_2|00\rangle|^2 \, |\langle s'_1 s'_2|00\rangle|^2 \exp(i(\chi_{12}-\chi_0)(s_1 s_2 - s'_1 s'_2))\times \\ \times \exp(i\varepsilon_{12}(s_1 s'_2 - s_2 s'_1)) \exp\left(-\sum_l \left(\overline{n}_l + \frac{1}{2}\right)\left|\sum_j \alpha_{lj}(s_j - s'_j)\right|^2\right), \quad (2.87)$$

где $\varepsilon_{12} = \operatorname{Im}\sum_l \alpha_{l1}\alpha^*_{l2}$ ($\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12}$). Учитывая, что $|\langle s_1 s_2|00\rangle|^2 = 1/4$ для любых s_1, s_2, после преобразований получим

$$F_{00} = \frac{1}{8}\left[2 + 2\cos(2(\chi_{12}-\chi_0) + 2\varepsilon_{12})\Gamma_1 + 2\cos(2(\chi_{12}-\chi_0) - 2\varepsilon_{12})\Gamma_2 + \Gamma_+ + \Gamma_-\right], \quad (2.88)$$

где

$$\Gamma_\pm = \exp\left(-4\sum_l \left(\overline{n}_l + \frac{1}{2}\right)|\alpha_{l1} \pm \alpha_{l2}|^2\right), \\ \Gamma_j = \exp\left(-4\sum_l \left(\overline{n}_l + \frac{1}{2}\right)|\alpha_{lj}|^2\right). \quad (2.89)$$

Усреднённая достоверность

Выражение (2.88) справедливо для конкретного начального состояния $|00\rangle$. Формально его нельзя использовать для определения достоверности гейта как такового, поскольку в универсальном квантовом компьютере гейт действует на произвольное двухкубитное состояние. В корректном определении достоверности должно быть проведено усреднение по начальным состояниям [73; 74]:

$$\overline{F} = \frac{\sum_p \operatorname{Tr}(\widehat{U}_0 \widehat{W}_p^\dagger \widehat{U}_0^\dagger \operatorname{Tr}_m[\widehat{U}\widehat{W}_p \otimes \rho_t \widehat{U}^\dagger]) + d^2}{d^2(d+1)}, \quad (2.90)$$

где $\widehat{U}_0, \widehat{U}$ — идеальный и фактический гейты соответственно, d — размерность кубитной системы (для двух кубитов $d = 4$), $\widehat{W}_p$ — ортогональный базис унитарных операторов в кубитном пространстве, то есть таких унитарных операторов, что $\operatorname{Tr}(\widehat{W}_p^\dagger \widehat{W}_q) = d\delta_{pq}$ (коэффициент задан нормировкой). Нетрудно видеть, что след под суммой в (2.90) представим в

виде

$$\mathrm{Tr}(\widehat{U}_0\widehat{W}_p^\dagger\widehat{U}_0^\dagger\,\mathrm{Tr}_m[\widehat{U}\widehat{W}_p\otimes\rho_t\widehat{U}^\dagger]) = \\ = \mathrm{Tr}(\widehat{W}_p^\dagger\,\mathrm{Tr}_m[(\widehat{U}_0^\dagger\otimes\mathbb{I})\widehat{U}\widehat{W}_p\otimes\rho_t\widehat{U}^\dagger(\widehat{U}_0\otimes\mathbb{I})]) = \\ = \mathrm{Tr}(\widehat{W}_p^\dagger\,\mathrm{Tr}_m[\widehat{U}'\widehat{W}_p\otimes\rho_t(\widehat{U}')^\dagger]), \quad (2.91)$$

где $\widehat{U}'$ определяется согласно (2.80). Учитывая, что частичный след по колебательным состояниям вычисляется так же, как и в случае с заданным состоянием, приходим к выражению

$$\mathrm{Tr}(\widehat{W}_p^\dagger\,\mathrm{Tr}_m[\widehat{U}'\widehat{W}_p\otimes\rho_t(\widehat{U}')^\dagger]) = \sum_{s_1s_2}\sum_{s_1's_2'}\left|\langle s_1s_2|\widehat{W}_p|s_1's_2'\rangle\right|^2\exp(i(\chi_{12}-\chi_0)(s_1s_2-s_1's_2'))\times \\ \times\exp(i\varepsilon_{12}(s_1s_2'-s_2s_1'))\exp\left(-\sum_l\left(\overline{n}_l+\frac{1}{2}\right)\left|\sum_j\alpha_{lj}(s_j-s_j')\right|^2\right). \quad (2.92)$$

В качестве $\widehat{W}_p$ выберем тензорные произведения матриц из «повёрнутого» базиса матриц Паули:

$$\left\{\widehat{W}_p\right\} = \left\{\widehat{V}_1\otimes\widehat{V}_2\middle|\widehat{V}_{1,2}=\mathbb{I},\sigma_\phi,\sigma_{\phi_\perp},\sigma_z\right\}. \quad (2.93)$$

С учётом сделанного выбора заметим, что

$$\begin{aligned}|\langle s|\mathbb{I}|s'\rangle|^2 &= |\langle s|\sigma_\phi|s'\rangle|^2 = \delta_{ss'},\\ |\langle s|\sigma_{\phi_\perp}|s'\rangle|^2 &= |\langle s|\sigma_z|s'\rangle|^2 = \delta_{s,-s'}.\end{aligned} \quad (2.94)$$

Это означает, что для заданных s_1, s_2, s_1', s_2' возможны всего четыре значения p, для которых член суммы (2.92) будет ненулевым, причем для всех таких p величина $\left|\langle s_1s_2|\widehat{W}_p|s_1's_2'\rangle\right|^2$ будет равна единице. Тогда суммирование будет производиться аналогично (2.87). После преобразований получим

$$\overline{F} = \frac{1}{5}(4F_{00}+1) = \frac{1}{10}\left[4+2\cos(2(\chi_{12}-\chi_0)+2\varepsilon_{12})\Gamma_1+\right. \\ \left.+2\cos(2(\chi_{12}-\chi_0)-2\varepsilon_{12})\Gamma_2+\Gamma_++\Gamma_-\right]. \quad (2.95)$$

Для дальнейших рассуждений полезно получить приближённые выражения для ошибки гейта ($\epsilon = 1-F$) в случае, когда она мала. Для простоты предположим одинаковые интенсивности пучков и относительные фазы бихромата на каждом ионе: $\Omega_1 = \Omega_2, \phi_M^{(1)} = \phi_M^{(2)}$, тогда $\varepsilon_{12} = 0$. Раскрывая выражения (2.88), (2.95) по малым параметрам $\alpha_{lj}, (\chi_{12}-\chi_0)$, получим

$$\begin{aligned}\epsilon_{00} &\approx (\chi_{12}-\chi_0)^2+\sum_{l,j}(2\overline{n}_l+1)|\alpha_{lj}|^2,\\ \overline{\epsilon} = \frac{4}{5}\epsilon_{00} &\approx \frac{4}{5}\left[(\chi_{12}-\chi_0)^2+\sum_{l,j}(2\overline{n}_l+1)|\alpha_{lj}|^2\right].\end{aligned} \quad (2.96)$$

Как было указано ранее, достоверность F_{00} формально не является метрикой, характеризующей MS гейт, так как она зависит от начального состояния. Однако, использование этой величины на практике оправдано несколькими причинами. Во-первых, как видно из (2.96), средняя ошибка выше, чем ошибка, вычисленная по состоянию $|00\rangle$, поэтому измерение последней даёт нижнюю оценку достоверности MS гейта без необходимости подготавливать различные начальные состояния. Во-вторых, коэффициент 4/5 близок к единице, следовательно, данные две ошибки будут достаточно близки друг к другу, чтобы пренебречь их относительной разницей в большинстве практических случаев. В-третьих, для экспериментального измерения средней достоверности $\overline{F}$ необходимо использовать сложную процедуру *рандомизированного бенчмаркинга* (Randomized Benchmarking, RB) [75–78], требующего проведения цепочек случайных гейтов с варьируемым количеством операций. Измерение средней достоверности RB-методом, следовательно, достаточно долгое и ресурсоёмкое. Оценка же F_{00}, напротив, занимает гораздо меньше времени и требует, помимо самого исследуемого MS гейта, лишь вспомогательные однокубитные операции, а также способ подготовки состояния $|00\rangle$, который в случае оптического кубита (2.1) тривиален и вполне надёжен. Метод измерения F_{00} описан ниже.

Экспериментальное измерение достоверности F_{00}

Состояние, получаемое из $|00\rangle$ на эксперименте, задаётся матрицей плотности ρ, в которой рассматриваются только электронные степени свободы, а по колебательным взят частичный след. Идеальное (целевое) состояние задано вектором $|\psi_0\rangle$. Тогда достоверность будет определяться по формуле (2.67). Учтём, что, согласно (2.73),

$$|\psi_0\rangle = \widehat{U}_0|00\rangle = \cos\chi_0|00\rangle - ie^{i\phi_+}\sin\chi_0|11\rangle. \tag{2.97}$$

Отсюда

$$F = \langle\psi_0|\rho|\psi_0\rangle = \cos^2\chi_0\,\rho_{00,00} + \sin^2\chi_0\,\rho_{11,11} + \sin\chi_0\cos\chi_0(ie^{-i\phi_+}\rho_{11,00} - ie^{i\phi_+}\rho_{00,11}) =$$
$$= \cos^2\chi_0\,\rho_{00,00} + \sin^2\chi_0\,\rho_{11,11} + \sin 2\chi_0\sin(\phi_+ + \phi_\rho)|\rho_{00,11}|, \tag{2.98}$$

где $\phi_\rho = \operatorname{Arg}\rho_{00,11}$. Величины $\rho_{00,00}$ и $\rho_{11,11}$ равны населённостям p_{00} и p_{11} соответственно, поэтому для их измерения достаточно считать состояние двухкубитной системы после MS гейта (разумеется, повторив это измерение большое количество раз для набора статистики). Недиагональный же элемент матрицы плотности $\rho_{00,11}$ измеряется в отдельном эксперименте. Для понимания метода измерения $\rho_{00,11}$ рассмотрим оператор

$$\widehat{O} = \bigotimes_j \sigma_z^{(j)}. \tag{2.99}$$

Наблюдаемая, соответствующая этому оператору, равна 1 для базисных состояний с чётным количеством ионов в $|1\rangle$, и -1 — для состояний с нечётным количеством. По этой причине этот оператор называется *оператором чётности*, а его среднее значение, измеряемое на эксперименте — *чётностью состояния* Π:

$$\Pi = \left\langle \widehat{O} \right\rangle = \mathrm{Tr}\left(\rho\widehat{O}\right) = \sum_x \langle x|\rho\widehat{O}|x\rangle = \sum_x (-1)^{\sum_j x_j}\langle x|\rho|x\rangle = \sum_x (-1)^{\sum_j x_j} p_x, \tag{2.100}$$

где $x = x_1 x_2 \ldots x_N$ — битовые строки, p_x — населённость состояния $|x\rangle$. Для определения $\rho_{00,11}$ к системе после MS гейта прикладывается так называемый *анализирующий* импульс. Этот импульс представляет собой однокубитный гейт, реализующий вращение на сфере Блоха на угол $\pi/2$ вокруг оси, лежащей в экваториальной плоскости под углом φ к оси x (рис. 2.6). Матрица этого гейта (для j-го иона) имеет вид [7]

$$\widehat{R}_j(\varphi) = \exp\left(-i\pi/4(\sigma_x^{(j)}\cos\varphi + \sigma_y^{(j)}\sin\varphi)\right) = \exp\left(-i\pi/4\,\sigma_{\varphi_\perp}^{(j)}\right), \tag{2.101}$$

где использованы обозначения, аналогичные (2.48).

Анализирующий импульс прикладывается ко всем ионам:

$$\widehat{U}_A(\varphi) = \bigotimes_j \widehat{R}_j(\varphi). \tag{2.102}$$

Матрица плотности после анализирующего импульса примет вид $\rho_A = \widehat{U}_A\rho\widehat{U}_A^\dagger$. Тогда чётность преобразованного состояния будет равна

$$\Pi_A = \mathrm{Tr}\left(\rho_A\widehat{O}\right) = \mathrm{Tr}\left(\widehat{U}_A\rho\widehat{U}_A^\dagger\widehat{O}\right) =$$
$$= \mathrm{Tr}\left(\rho\widehat{U}_A^\dagger\widehat{O}\widehat{U}_A\right) = \mathrm{Tr}\left(\rho\bigotimes_j(\widehat{R}_j^\dagger\sigma_z^{(j)}\widehat{R}_j)\right). \tag{2.103}$$

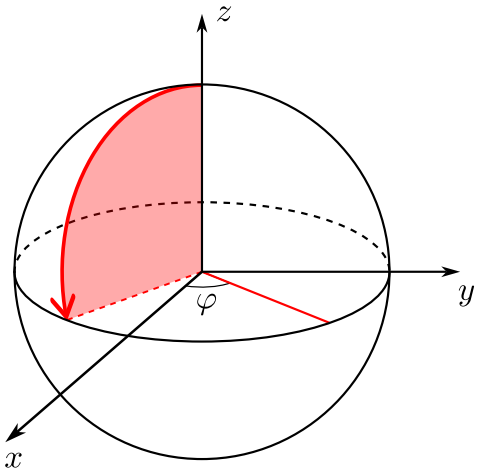


Рис. 2.6. Представление анализирующего однокубитного импульса на сфере Блоха

Вычислим значение члена тензорного произведения:

$$\widehat{R}^\dagger\sigma_z\widehat{R} = \exp(i\pi/4\,\sigma_{\varphi_\perp})\sigma_z\exp(-i\pi/4\,\sigma_{\varphi_\perp}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\pi/4)^n[\sigma_{\varphi_\perp},\sigma_z]_n}{n!}. \tag{2.104}$$

Из (2.48) следует

$$\begin{aligned}[\sigma_{\varphi_\perp},\sigma_z] &= 2i\sigma_\varphi,\\ [\sigma_{\varphi_\perp},\sigma_\varphi] &= -2i\sigma_z,\end{aligned} \tag{2.105}$$

поэтому, после преобразований, получим

$$\widehat{R}^\dagger\sigma_z\widehat{R} = \sigma_z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi/2)^{2k}}{(2k)!} - \sigma_\varphi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$
$$= \sigma_z\cos(\pi/2) - \sigma_\varphi\sin(\pi/2) = -\sigma_\varphi. \tag{2.106}$$

Тогда

$$\Pi_A(\varphi) = (-1)^N \sum_x \langle x|\rho \bigotimes_j \sigma_\varphi^{(j)}|x\rangle = (-1)^N \sum_{xy} \rho_{x,y} \prod_j \langle y_j|\sigma_\varphi^{(j)}|x_j\rangle. \tag{2.107}$$

Согласно (2.48),

$$\langle y_j|\sigma_\varphi^{(j)}|x_j\rangle = \exp((-1)^{x_j} i(\varphi - \pi/2))\delta_{x_j,\overline{y}_j}, \tag{2.108}$$

где $\overline{y}_j = 1 - y_j$ — операция инверсии бита y_j. Отсюда

$$\Pi_A(\varphi) = (-1)^N \sum_x \rho_{x,\overline{x}} \exp\left(i(\varphi - \pi/2) \sum_j (-1)^{x_j} \right). \tag{2.109}$$

Для двух кубитов

$$\Pi_A(\varphi) = \rho_{01,10} + \rho_{10,01} + \rho_{00,11} e^{i(2\varphi-\pi)} + \rho_{11,00} e^{-i(2\varphi-\pi)} = \\ = 2\,\mathrm{Re}\,\rho_{01,10} - 2|\rho_{00,11}|\cos(2\varphi + \phi_\rho). \tag{2.110}$$

Таким образом, измеряя чётность состояния после приложения анализирующего импульса по формуле (2.100) и сканируя фазу этого импульса φ, можно получить зависимость $\Pi_A(\varphi)$, которая будет представлять собой функцию косинуса с двойной частотой, амплитудой $2|\rho_{00,11}|$ и начальной фазой ϕ_ρ. Подбирая эти параметры по экспериментальным данным, можно вычислить $\rho_{00,11}$.

Заметим, что фаза ϕ_ρ зависит от глобальных фаз состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$ в обоих кубитах. Поскольку эти фазы можно задать произвольно (впоследствии зафиксировав их значение на протяжении всей эволюции системы), физически осмысленной величиной останется только модуль матричного элемента $|\rho_{00,11}|$. По этой причине в формуле (2.98) можно положить $\sin(\phi_+ + \phi_\rho)$ равным единице. Иными словами, можно зафиксировать такие фазы базисных состояний относительно оптических фаз лазерных пучков, что $\phi_+ + \phi_\rho = \pi/2$. Для $\chi_0 = \pi/4$ получим выражение для экспериментального измерения достоверности подготовки белловского состояния (без учёта фазы):

$$F = \frac{p_{00} + p_{11} + B}{2}, \tag{2.111}$$

где B — амплитуда осцилляции чётности состояния после анализирующего импульса.

2.4. Амплитудное шейпирование лазерных импульсов

Как было указано ранее и как видно из выражения для ошибок (2.96), необходимых условий для идеального проведения MS гейта два. Во-первых, все параметры смещения α_{lj}

должны быть равны нулю в конце гейта. В противном случае между электронными и колебательными состояниями цепочки будет остаточная запутанность, что негативно скажется на достоверности гейта. Поскольку наглядное представление параметров смещения на фазовой плоскости выглядит как некоторая траектория, задаваемая динамикой $\alpha_{lj}(t)$ (рис. 2.5), условие равенства этих параметров нулю в конце гейта равносильно замкнутости кривой $\alpha_{lj}(t)$. Следовательно, данное условие можно назвать *условием замыкания траекторий*. Второе условие, которое назовём *условием целевой фазы*, заключается в равенстве фазы перепутывания χ целевому значению χ_0. В совокупности эти два условия задают некоторую систему уравнений, определяющих требования к лазерному импульсу.

Для удовлетворения условий замыкания траекторий и целевой фазы импульс должен обладать достаточным количеством степеней свободы. Особенно критично требование наличия степеней свободы для гейтов на радиальных модах. Действительно, частоты этих мод расположены близко друг к другу (рис. 1.4), и возбуждение одной из них приведет к возбуждению всех остальных, так что требования замыкания траекторий для всех мод равносильны. В самом тривиальном случае постоянного сигнала с частотой Раби Ω и отстройкой μ степеней свободы оказывается недостаточно. Следовательно, для проведения MS гейта на радиальных модах необходима модуляция импульса, также называемая *шейпированием*. В данной работе рассмотрен частный случай амплитудного кусочно-постоянного шейпирования, описанный далее.

2.4.1. Кусочно-постоянный лазерный импульс

Один из наиболее простых и технически реализуемых методов шейпирования — кусочно-постоянная амплитудная модуляция. Огибающая импульса представляет собой последовательность из P сегментов одинаковой длительности τ/P, где τ — время гейта, на каждом из которых амплитуда лазерного поля постоянная. В рамках данной работы удобно выражать амплитуду в единицах частоты Раби Ω (в силу (2.26) эта частота пропорциональна амплитуде). Таким образом, имеем последовательность из P частот Раби Ω_p, где $p = 0, 1, \ldots, P-1$. Пример импульса, заданного таким образом, приведён на рис. 2.7.
Для простоты дальнейших выкладок положим идентичность импульсов на обоих адресуемых лазерным излучением ионов (это же предположение должно выполняться на эксперименте). Это означает, что

$$\phi_M^{(j)} = \text{const} \equiv \phi_M, \quad \phi_S^{(j)} = \text{const} \equiv \phi_S, \quad \Omega_j(t) \equiv \Omega(t). \tag{2.112}$$

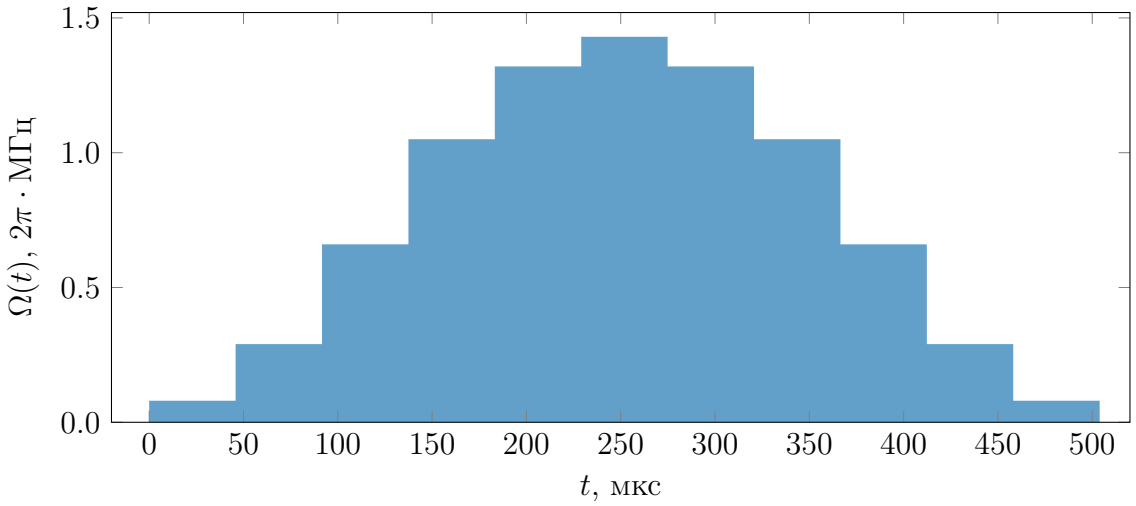


Рис. 2.7. Пример зависимости частоты Раби от времени для кусочно-постоянного импульса

Зависимость частоты Раби от времени может быть представлена в виде

$$\Omega(t) = \sum_{p=0}^{P-1} \Omega_p f_p(t), \tag{2.113}$$

где

$$f_p(t) = \begin{cases} 1, & t \in [p\tau/P, (p+1)\tau/P], \\ 0, & t \notin [p\tau/P, (p+1)\tau/P]. \end{cases} \tag{2.114}$$

Тогда можно выразить параметры смещения (2.54) через Ω_p следующим образом:

$$\alpha_{lj} = i\eta_{lj} \int_0^\tau \Omega(t) \cos(\mu t + \phi_M) e^{i\omega_l t}\, dt = i\eta_{lj} \sum_p A_{l,p}^{(0)} \Omega_p, \tag{2.115}$$

где

$$A_{l,p}^{(0)} = \int_{p\tau/P}^{(p+1)\tau/P} \cos(\mu t + \phi_M) e^{i\omega_l t}\, dt. \tag{2.116}$$

Смысл индекса (0) будет ясен в дальнейшем. Поскольку коэффициенты $A_{l,p}^{(0)}$ комплексные, условие $\alpha_{lj} = 0$ будет представлять собой по два уравнения на каждую моду: одно для действительной части α_{lj}, одно для мнимой. Таким образом, условие замыкания траекторий будет системой из $2N$ уравнений. Однако количество уравнений можно сократить в 2 раза, рассмотрев импульсы, симметричные относительно половины времени гейта (импульс на рис. 2.7 является примером симметричного импульса). Для таких импульсов справедливо

$$\Omega(t) = \Omega(\tau - t) \Leftrightarrow \Omega_p = \Omega_{P-p-1}. \tag{2.117}$$

Тогда для параметров смещения можно получить

$$\alpha_{lj} = i\eta_{lj} \left(\sum_{p=0}^{\lfloor P/2 \rfloor - 1} (A_{l,p}^{(0)} + A_{l,P-p-1}^{(0)}) \Omega_p \overset{\text{неч.}}{+} A_{l,\lfloor P/2 \rfloor}^{(0)} \Omega_{\lfloor P/2 \rfloor} \right), \tag{2.118}$$

где $\lfloor x \rfloor$ — целая часть x, а $\overset{\text{неч.}}{+}$ означает дополнительное слагаемое, возникающее в случае нечётного P. Используя (2.116), а также предполагая $|\mu - \omega_l| \ll \mu, \omega$, получим

$$A^{(0)}_{l,p} + A^{(0)}_{l,P-p-1} = \int\limits_{p\tau/P}^{(p+1)\tau/P} \cos(\mu t + \phi_M) e^{i\omega_l t}\, dt + \int\limits_{(P-p-1)\tau/P}^{(P-p)\tau/P} \cos(\mu t + \phi_M) e^{i\omega_l t}\, dt =$$

$$= \int\limits_{p\tau/P}^{(p+1)\tau/P} \left[\cos(\mu t + \phi_M) e^{i\omega_l t} + \cos(\mu(\tau - t) + \phi_M) e^{i\omega_l(\tau - t)}\right] dt \approx$$

$$\approx \frac{e^{-i\phi_M}}{2} \int\limits_{p\tau/P}^{(p+1)\tau/P} \left[e^{-i(\mu-\omega_l)t} + e^{-i(\mu-\omega_l)(\tau-t)}\right] dt = e^{-i(\delta_l\tau/2+\phi_M)} \int\limits_{p\tau/P}^{(p+1)\tau/P} \cos(\delta_l(t - \tau/2))\, dt, \quad (2.119)$$

где $\delta_l = \mu - \omega_l$. Для нечётных P верно

$$A^{(0)}_{l,\lfloor P/2 \rfloor} = \int\limits_{\tau/2-\tau/(2P)}^{\tau/2+\tau/(2P)} \cos(\mu t + \phi_M) e^{i\omega_l t}\, dt \approx \frac{e^{-i\phi_M}}{2} \int\limits_{\tau/2-\tau/(2P)}^{\tau/2+\tau/(2P)} e^{-i(\mu-\omega_l)t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i(\delta_l\tau/2+\phi_M)} \int\limits_{\tau/2-\tau/(2P)}^{\tau/2+\tau/(2P)} e^{-i\delta_l(t-\tau/2)}\, dt = \frac{1}{2} e^{-i(\delta_l\tau/2+\phi_M)} \int\limits_{\lfloor P/2 \rfloor\tau/P}^{(\lfloor P/2 \rfloor+1)\tau/P} \cos(\delta_l(t - \tau/2))\, dt, \quad (2.120)$$

где последнее равенство следует из того, что интеграл по мнимой части экспоненты обращается в ноль как интеграл от нечётной функции (синуса) по симметричному интервалу. Обратим внимание, что коэффициент, найденный в (2.120) в 2 раза меньше, чем найденный в (2.119). Это связано с тем, что для нечётных P лишь половина центрального сегмента расположена в первой половине гейта. Таким образом, можно получить общее выражение для α_{lj} в случае амплитудного шейпирования:

$$\alpha_{lj} = i\eta_{lj} e^{-i(\delta_l\tau/2+\phi_M)} \sum_{p=0}^{\lfloor (P-1)/2 \rfloor} M^{(0)}_{l,p} \Omega_p, \quad (2.121)$$

где

$$M^{(0)}_{l,p} = \int\limits_{p\tau/P}^{(p+1)\tau/P} \cos(\delta_l(t - \tau/2))\, dt \times \begin{cases} 1, & p < (P-1)/2, \\ 1/2, & p = (P-1)/2. \end{cases} \quad (2.122)$$

Заметим, что коэффициенты $M^{(0)}_{l,p}$ действительны, поэтому условие замыкания траекторий, которое можно выразить в виде

$$\sum_{p=0}^{\lfloor (P-1)/2 \rfloor} M^{(0)}_{l,p} \Omega_p = 0, \quad (2.123)$$

будет состоять из N уравнений вместо $2N$.

Выведем теперь условие целевой фазы $\chi = \chi_0$ через Ω_p. С учётом идентичности пучков выражение (2.64) примет вид

$$\chi = 2\sum_l \eta_{l1}\eta_{l2} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \sum_{p,q=0}^{P-1} \Omega_p \Omega_q f_p(t_1) f_q(t_2) \cos(\mu t_1 + \phi_M) \times$$
$$\times \cos(\mu t_2 + \phi_M) \sin(\omega_l (t_1 - t_2)). \quad (2.124)$$

Коэффициент 2 возник в силу соглашения $\chi = \chi_{12} + \chi_{21} = 2\chi_{12}$, принятого ранее. С учётом приближения $|\delta_l| \ll \mu, \omega$ получим

$$\cos(\mu t_1 + \phi_M) \cos(\mu t_2 + \phi_M) \sin(\omega_l (t_1 - t_2)) \approx -\frac{1}{4} \sin(\delta_l (t_1 - t_2)) \quad (2.125)$$

в смысле интеграла по t_1, t_2. Дополнительно учитывая, что $t_1 > t_2$ в интеграле, выражение для фазы перепутывания примет вид

$$\chi = \sum_{p,q=0}^{P-1} D_{pq} \Omega_p \Omega_q, \quad (2.126)$$

где

$$D_{pq} = -\frac{1}{2} \sum_l \eta_{l1}\eta_{l2} \times \begin{cases} 0, & p < q, \\ \int\limits_{p\tau/P}^{(p+1)\tau/P} dt_1 \int\limits_{p\tau/P}^{t_1} \sin(\delta_l (t_1 - t_2))\, dt_2, & p = q, \\ \int\limits_{p\tau/P}^{(p+1)\tau/P} dt_1 \int\limits_{q\tau/P}^{(q+1)\tau/P} \sin(\delta_l (t_1 - t_2))\, dt_2, & p > q. \end{cases} \quad (2.127)$$

Выражение (2.126) есть квадратичная форма относительно вектора амплитуд $\mathbf{\Omega}$, представленного через частоты Раби отдельных сегментов: $\mathbf{\Omega} = (\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{P-1})^{\mathrm{T}}$. Матрица $\mathbf{D}$ этой формы имеет нижнетреугольный вид. Для удобства дальнейших рассуждений введём симметричную матрицу $\mathbf{S} = (\mathbf{D} + \mathbf{D}^{\mathrm{T}})/2$. Тогда выражение для фазы сохраняет прежний вид

$$\chi = \sum_{p,q=0}^{P-1} S_{pq} \Omega_p \Omega_q, \quad (2.128)$$

но матрица квадратичной формы симметричная.

2.4.2. Задача поиска оптимальной формы импульса

В терминах вектора амплитуд $\mathbf{\Omega}$ условия замыкания траекторий и целевой фазы будут выражаться следующими соотношениями:

$$\begin{cases} \mathbf{M\Omega} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \mathbf{\Omega} = \chi_0, \end{cases} \quad (2.129)$$

где $\mathbf{M}$ — матрица, составленная из коэффициентов $M^{(0)}_{l,p}$ (см. уравнение (2.123)). Обратим внимание, что элементы обеих матриц вычисляются аналитически и выражаются в элементарных функциях. Чтобы учесть симметрию импульса, необходимо рассматривать «укороченную» версию вектора амплитуд $\mathbf{\Omega} = (\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{\lfloor (P-1)/2 \rfloor})^{\mathrm{T}}$ и соответствующим образом преобразовать матрицу $\mathbf{S}$. Тем не менее, вид уравнений при таком преобразовании, очевидно, сохранится, поэтому в дальнейшем будем подразумевать матрицы и векторы, преобразованные для симметричного импульса.

Помимо условий, изложенных выше, для корректной постановки задачи поиска импульса необходимо задать некоторую целевую функцию. Действительно, если количество сегментов больше, чем количество уравнений, то форма, удовлетворяющая этим уравнениям, не может быть определена однозначно. Одна из самых физически обоснованных и, как будет видно позже, математически простых целевых функций — суммарная световая энергия, затраченная на двухкубитную операцию. Мотивация введения такой метрики следует из двух основных соображений. Во-первых, световая мощность, доступная на эксперименте, ограничена сверху технически. Во-вторых, большая световая мощность увеличит влияние первого слагаемого в гамильтониане MS гейта (2.47), которое вызовет дополнительные переходы между состояниями, не задействованными в гейте, и ухудшит его достоверность. Кроме того, как будет показано в главе 4, ошибка MS гейта явно зависит от суммарной световой энергии импульса. Поскольку частота Раби пропорциональна амплитуде поля, эта энергия пропорциональна величине

$$\int_0^\tau E_0^2(t)\,dt \propto \int_0^\tau \Omega^2(t)\,dt = \frac{\tau}{P}\sum_p \Omega_p^2 \propto \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega}, \tag{2.130}$$

которую мы и примем за целевую функцию. Таким образом, в данной работе рассматривается следующая оптимизационная задача:

$$\begin{gathered} \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega} \to \min : \\ \begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{\Omega} = \chi_0, \end{cases} \end{gathered} \tag{2.131}$$

где остальные параметры импульса (μ, τ) считаются фиксированными.

Для решения задачи, сформулированной выше, исключим линейную систему $\mathbf{M}\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$ путём нахождения фундаментальной системы решений СЛАУ $\mathbf{\Phi}$, так что

$$\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}, \tag{2.132}$$

где $\mathbf{\Lambda}$ — вектор произвольных констант. Столбцы матрицы $\mathbf{\Phi}$ предполагаются ортонормированными, поэтому

$$\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi})\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}. \tag{2.133}$$

Подставляя $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Phi\Lambda}$ в изначальную постановку задачи, получим

$$\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda} \to \min : \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{\Lambda} = \chi_0, \tag{2.134}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{\Phi}$ (также симметричная матрица). Полученная задача является задачей поиска условного экстремума, которая решается при помощи функции Лагранжа:

$$L(\mathbf{\Lambda}, \lambda) = \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda} - \lambda(\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{\Lambda} - \chi_0). \tag{2.135}$$

В точке экстремума производная функции Лагранжа по вектору амплитуд должна равняться нулю:

$$\frac{\partial L(\mathbf{\Lambda}, \lambda)}{\partial \mathbf{\Lambda}} = 2\mathbf{\Lambda} - 2\lambda\mathbf{R}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}, \tag{2.136}$$

откуда следует, что $\mathbf{\Lambda}$ — собственный вектор $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{\Lambda} = r\mathbf{V}, \quad \mathbf{RV} = v\mathbf{V}, \tag{2.137}$$

где r — некоторый коэффициент, $\mathbf{V}$ — ортонормированный собственный вектор $\mathbf{R}$, v — соответствующее этому вектору собственное значение. Условие целевой фазы будет выглядеть так:

$$\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{\Lambda} = r^2\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{V} = r^2 v\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = r^2 v = \chi_0, \tag{2.138}$$

откуда

$$r^2 = \chi_0 / v. \tag{2.139}$$

В случае $\chi_0/v < 0$ не существует действительного коэффициента r, удовлетворяющего данному соотношению. Однако для данной задачи знак целевой фазы перепутывания χ_0 не имеет принципиального значения. Действительно, из определения σ_ϕ следует $\sigma_z\sigma_\phi\sigma_z = -\sigma_\phi$. Отсюда

$$(\sigma_z^{(1)} \otimes \mathbb{I})e^{i\chi\sigma_\phi^{(1)}\sigma_\phi^{(2)}}(\sigma_z^{(1)} \otimes \mathbb{I}) = e^{-i\chi\sigma_\phi^{(1)}\sigma_\phi^{(2)}}. \tag{2.140}$$

Следовательно, можно эффективно поменять знак фазы перепутывания χ, проведя однокубитные σ_z операции на одном из кубитов до и после MS гейта. Тогда в выражении для r можно учитывать только абсолютные величины параметров:

$$r^2 = |\chi_0 / v|. \tag{2.141}$$

В такой формулировке задача всегда будет иметь решение. Для целевой функции имеем

$$\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda} = r^2\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V} = r^2 = \left|\frac{\chi_0}{v}\right| \to \min\,. \tag{2.142}$$

Минимизация целевой функции, таким образом, сводится к максимизации модуля собственного значения матрицы $\mathbf{R}$. Отсюда можно получить алгоритм решения оптимизационной задачи (2.131):

1. Найти ядро $\mathbf{\Phi}$ матрицы $\mathbf{M}$;
2. Найти максимальное по модулю собственное значение $v_{\max}$ матрицы $\mathbf{R} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}\mathbf{\Phi}$ и соответствующий ему собственный вектор $\mathbf{V}_{\max}$;
3. Вычислить оптимальный вектор амплитуд: $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Phi}\mathbf{V}_{\max}\sqrt{\dfrac{|\chi_0|}{|v_{\max}|}}$.

Оптимизационная задача (2.134), возникающая в ходе решения изначальной задачи, имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Действительно, уравнение $\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{\Lambda} = \chi_0$ задаёт многомерную поверхность второго порядка (квадрику), а $\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda} = \mathrm{const}$ задаёт многомерную сферу. Тогда вопрос задачи можно сформулировать так: гиперсфера какого минимального радиуса имеет хотя бы одну общую точку с квадрикой, заданной фазой χ_0? Из геометрических соображений ясно (см. рис. 2.8), что искомая сфера должна касаться квадрики, так чтобы точка касания была расположена вдоль направления самой короткой главной оси.

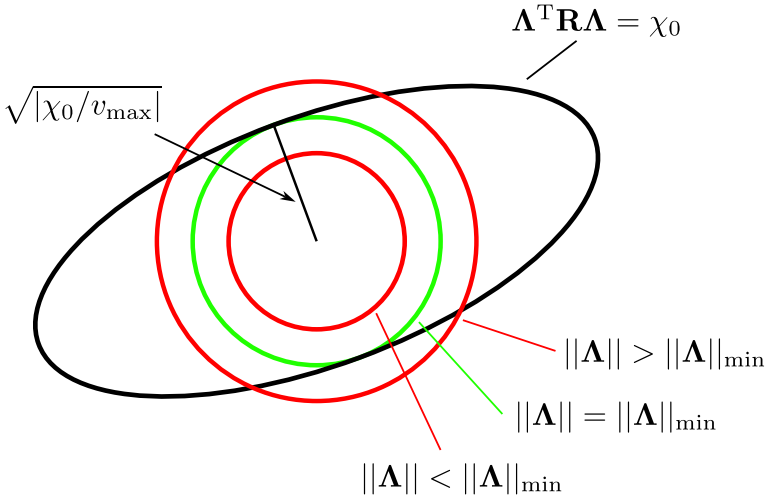


Рис. 2.8. Геометрическая интерпретация задачи поиска оптимальной формы импульса

Известно, что главные оси поверхности второго порядка сонаправлены с собственными векторами матрицы, задающей эту поверхность, причём длина оси обратно пропорциональна корню из модуля соответствующего собственного значения. Следовательно, радиус оптимальной сферы будет обратно пропорционален корню из модуля максимального по абсолютной

величине собственного значения, а сам вектор будет коллинеарен соответствующему собственному вектору матрицы $\mathbf{R}$, что и выражено в алгебраическом решении.

2.4.3. Стабилизация решений относительно дрейфов колебательных частот ионов

Формы импульсов, получаемые по алгоритму, изложенному выше, параметрически зависят от колебательных частот мод ионной цепочки. Естественно ожидать, что при изменении колебательного спектра (например, в результате дрейфов напряжений на электродах ловушки) оптимальный импульс может сильно измениться, а исходный импульс, в свою очередь, будет гораздо хуже удовлетворять условиям замыкания траектории и целевой фазы. Для решения данной проблемы в настоящей работе предложен метод стабилизации решений относительно дрейфов колебательных частот, оригинальная версия которого была рассмотрена в работе [31] для более общего случая амплитудно-частотной модуляции. Здесь этот метод переформулирован в терминах амплитудной кусочно-постоянной модуляции.

Идея метода заключается в наложении дополнительных требований на параметры смещения α_{lj}, а именно: равны нулю не только сами параметры, но и их производные по частотам мод ω_l вплоть до K-го порядка, который назовём *порядком стабилизации*:

$$\frac{\partial^n \alpha_{lj}}{\partial \omega_l^n} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, K. \tag{2.143}$$

Данное требование вытекает из достаточно простого соображения. В окрестности расчетного значения частоты можно разложить α_{lj} в ряд Тейлора:

$$\alpha_{lj}(\omega_l + \delta\omega_l) = \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{\partial^n \alpha_{lj}}{\partial \omega_l^n}\right|_{\omega_l} \frac{(\delta\omega_l)^n}{n!}. \tag{2.144}$$

Отсюда видно, что чем больше порядков производной равны нулю, тем более «плоская» зависимость параметра смещения от девиации частоты $\delta\omega_l$, и тем лучше выполняются условия замыкания траектории для большего диапазона частот. Для упрощения дальнейших рассуждений докажем следующее вспомогательное утверждение: для функции $u(x) = f(x)g(x)$, такой, что $f(x_0) \neq 0$ в некоторой точке x_0, для любого K выполнено

$$u^{(n)}(x_0) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, K \Leftrightarrow g^{(n)}(x_0) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, K. \tag{2.145}$$

Доказательство проведём по индукции. База $K = 0$ очевидна из условий. Для доказательства шага индукции воспользуемся формулой Лейбница:

$$u^{(n)}(x_0) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m f^{(n-m)}(x_0) g^{(m)}(x_0), \tag{2.146}$$

где C_n^m — число сочетаний. Предположим, что утверждение верно для порядка K. Для $K+1$:

$$u^{(K+1)}(x_0) = \sum_{m=0}^{K+1} C_{K+1}^m f^{(K+1-m)}(x_0) g^{(m)}(x_0). \tag{2.147}$$

Пусть

$$g^{(n)}(x_0) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, K, K+1. \tag{2.148}$$

Тогда утверждение очевидно следует из суммы выше. Теперь пусть

$$u^{(n)}(x_0) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, K, K+1. \tag{2.149}$$

Тогда из предположения следует, что в сумме останется только одно слагаемое $m = K+1$:

$$u^{(K+1)}(x_0) = f(x_0) g^{(K+1)}(x_0), \tag{2.150}$$

откуда с учётом $f(x_0) \neq 0$ следует доказываемое утверждение.

Применим доказанное утверждение к условиям стабилизации параметров смещения. Используя (2.121), определим

$$u = \alpha_{lj}(\omega_l), \quad f = i\eta_{lj} e^{-i(\delta_l \tau/2 + \phi_M)}, \quad g = \sum_{p=0}^{\lfloor (P-1)/2 \rfloor} M_{l,p}^{(0)} \Omega_p. \tag{2.151}$$

Тогда, пользуясь утверждением и учитывая $\partial/\partial\omega_l = -\partial/\partial\delta_l$, получим

$$\frac{\partial^n \alpha_{lj}}{\partial \omega_l^n} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, K \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{\lfloor (P-1)/2 \rfloor} M_{l,p}^{(n)} \Omega_p = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, K, \tag{2.152}$$

где

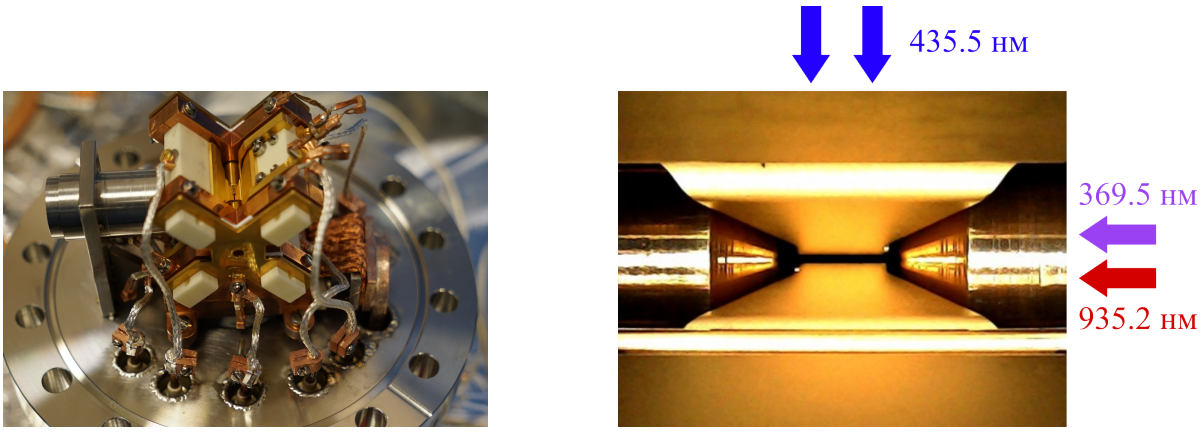
$$M_{l,p}^{(n)} = \frac{\partial^n M_{l,p}^{(0)}}{\partial \delta_l^n} = \int_{p\tau/P}^{(p+1)\tau/P} (t - \tau/2)^n \cos(\delta_l (t - \tau/2) + \pi n/2)\, dt \times \begin{cases} 1, & p < (P-1)/2, \\ 1/2, & p = (P-1)/2. \end{cases} \tag{2.153}$$

Отсюда виден смысл верхнего индекса в коэффициентах: он отвечает за порядок стабилизации решения. Описанный метод носит название *метода моментов* (по виду интегралов для $M_{l,p}^{(n)}$). Его основное преимущество заключается в том, что условия стабилизации линейны по вектору амплитуд $\mathbf{\Omega}$. Алгоритм поиска оптимального импульса с учётом дополнительных условий останется прежним, с тем отличием, что матрица СЛАУ $\mathbf{M}$ будет составлена из коэффициентов $M_{l,p}^{(n)}$ для $n = 0, 1, \ldots, K$.

2.5. Эксперимент по проведению MS-гейта в цепочке из 10 ионов

Описанный выше метод проведения двухкубитных операций был экспериментально реализован в квантовом компьютере на ионах иттербия, созданном в ФИАН. Ионная ловушка,

на которой основан компьютер, является линейной ловушкой Пауля и состоит из четырёх радиочастотных электродов в виде лезвий, а также двух торцевых электродов, на которые подаётся постоянный аксиальный удерживающий потенциал (рис. 2.9). Для охлаждения и



(*а*) (*б*)

Рис. 2.9. Фото ловушки Пауля, используемой в экспериментальной реализации MS гейта на ионах иттербия. (*а*) — фланец с прикреплёнными к нему ловушкой и внутривакуумным объективом индивидуальной адресации; (*б*) — геометрия охлаждающего и перекачивающего лазерных пучков, а также пучков индивидуальной адресации

подготовки состояния в торцевых электродах сделаны отверстия, через которые проходят охлаждающий пучок 369.5 нм и перекачивающий пучок 935.2 нм (рис. 2.9, *б*). Они проходят через ось ловушки, тем самым накрывая всю ионную цепочку. Индивидуальная адресация двух перепутываемых ионов в цепочке осуществляется двумя лазерными пучками на длине волны кубитного перехода 435.5 нм, проходящими между лезвиями в радиальном направлении (рис. 2.9, *б*). Для фокусировки каждого из этих пучков в области расположения адресуемых ионов используется внутривакуумный объектив, находящийся в непосредственной близости от ловушки (рис. 2.9, *а*). Управление амплитудой и фазой оптического поля производится при помощи двух акустооптических модуляторов (АОМов), через каждый из которых проходит по одному пучку. Сами АОМы, в свою очередь, управляются цифровыми генераторами сигналов, а амплитуда, фаза и длительность каждого сегмента гейта задаётся с компьютера и заблаговременно записывается в память.

Для целей настоящей работы в ловушку была загружена цепочка из 10 ионов $^{171}Yb^{+}$. Оптимальные параметры удерживающего потенциала в эксперименте были следующими:

- Частота радиальной COM-моды по оси x: $\omega_0 = 2\pi \cdot 3.7$ МГц;
- Частота аксиальной COM-моды: $\omega_z = 2\pi \cdot 130$ кГц.

Из геометрии адресующих пучков ясно, что MS гейт производится на радиальных модах, поэтому критическим является учёт взаимодействия поля со всеми колебательными модами. Здесь важно отметить, что главные радиальные оси ловушки (оси x и y, задающие двумерный гармонический осциллятор в радиальном направлении) сонаправлены с лезвиями, а адресующий пучок проходит между ними под углом 45 градусов. Следовательно, коэффициенты Лэмба-Дике для радиальных мод обеих осей x и y будут дополнительно домножены на $1/\sqrt{2}$, поскольку в формуле (2.36) для коэффициентов Лэмба-Дике фигурирует проекция волнового вектора лазерного пучка на главную ось ловушки (см. (2.31)). В общем случае нужно учитывать взаимодействие с модами как по оси x, так и по оси y, но для данной ловушки во избежание перекрытия спектров на пару лезвий, задающих ось y, было подано дополнительное постоянное напряжение. Это привело к смещению коэффициента a в уравнении Матье (1.28) и к соответствующему сдвигу секулярной частоты COM-моды (1.58) по этой оси приблизительно на 70 кГц относительно такой же частоты по оси x. Учитывая, что ширина колебательного спектра по оси x составляет примерно 48 кГц, два спектра оказываются гарантированно разнесёнными достаточно далеко. Кроме того, поскольку частотное расстояние $\delta_l = \mu - \omega_l$ между излучением и колебательной модой по оси x в эксперименте оказалось довольно малым (в пределах нескольких килогерц для ближайших мод), взаимодействием с модами по оси y можно было пренебречь.

Приведённых выше данных достаточно для нахождения оптимальных форм импульсов MS гейта, учитывающих влияние всех радиальных мод вдоль одной оси, формально для любых времён гейта τ и любых отстроек μ, а также для любого порядка стабилизации K. Однако не всякий произвольный выбор этих трёх параметров даёт достаточно качественный и реализуемый на практике гейт. Связано это с несколькими причинами. Во-первых, как уже упоминалось ранее, доступная оптическая мощность ограничена установкой. Слишком малое время гейта приведёт к более строгому требованию по мощности [31], поэтому допустимое время гейта ограничено снизу. Во-вторых, длина одного сегмента импульса не может быть меньше определённой величины (порядка 14 мкс), обусловленной временными задержками в оборудовании и другими техническими причинами. Увеличение порядка стабилизации K на единицу приводит к увеличению количества ограничений на импульс на N, а на минимальное количество сегментов — на $2N$, поскольку импульс симметричный, а количество сегментов не должно быть меньше общего количества ограничений. Следовательно, при малом времени гейта и большом порядке стабилизации длительность одного сегмента может оказаться меньше упомянутого выше значения. Кроме того, увеличение количества ограничений приводит к увеличению и минимальной мощности импульса в силу сужения пространства поиска

оптимального вектора амплитуд. В-третьих, экспериментально было установлено, что в среднем достоверность MS гейта выше для знакопостоянных импульсов (например, импульс на рис. 2.7). Решения, находимые описанным в работе алгоритмом, допускают знакопеременность амплитуд сегментов. Физически это означает, что фаза лазерного излучения должна меняться на π при переходе через границу этих сегментов. В таком случае траектория $\alpha_{lj}(t)$ на фазовой плоскости будет иметь в этом месте точку возврата. Следовательно, подобные импульсы приводят к резкому изменению направления движения колебательного состояния и, предположительно, тем самым более чувствительны к различным некогерентным эффектам, например, к нагреву цепочки во время гейта. Помимо этого, резкое изменение фазы на генераторе, питающем AOM, может привести к искажениям волнового фронта лазерного пучка в месте расположения ионов.

Учёт перечисленных выше обстоятельств, совмещённый с экспериментальным тестированием различных параметров импульса, приводит к следующим оптимальным значениям этих параметров:

- Время гейта $\tau \sim 1$ мс;
- Порядок стабилизации $K = 1$;
- Частота отстройки μ зависит от пары ионов в цепочке, но всегда внутри колебательного спектра.

Используя предложенный в работе метод генерации оптимальных импульсов, были проведены MS гейты на всех 45 парах ионов в 10-ионной цепочке. Примеры найденного лазерного импульса и динамики населённостей состояний для одной из пар приведены на рис. 2.10.

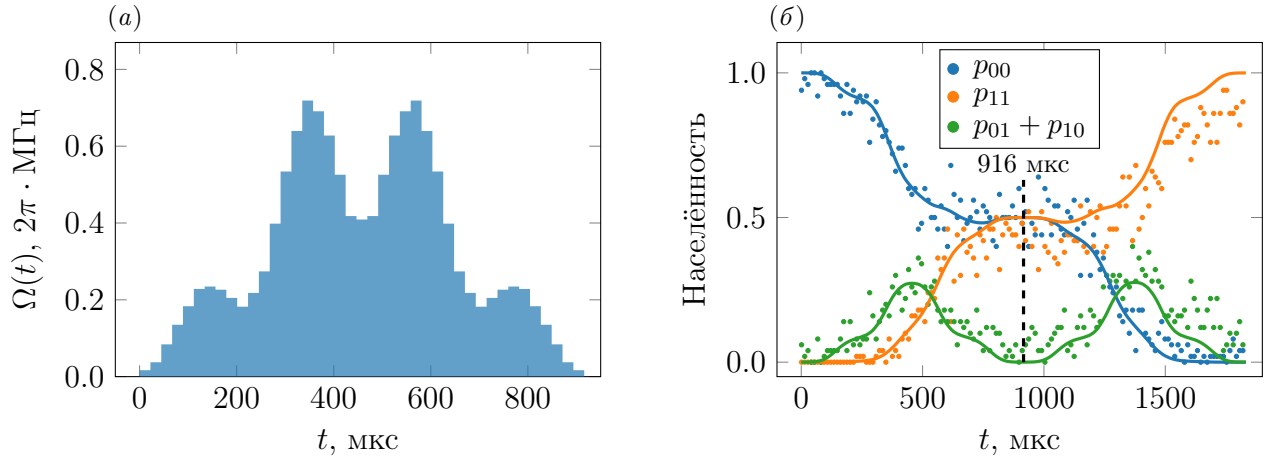


Рис. 2.10. (*а*) — форма лазерного импульса для ионов 2 и 10; (*б*) — зависимость населённостей различных двухкубитных состояний для той же пары. Пунктиром обозначено целевое время гейта 916 мкс. Точки — экспериментальные данные, сплошные линии — теоретические кривые

Для каждой пары была измерена достоверность подготовки белловского состояния, по методу, описанному в разделе 2.3.3. Результаты измерений приведены на рис. 2.11. Из данного рисунка видно, что разброс значений достоверности составляет примерно $94 \div 99\%$. Погрешность каждого значения зависит от самой достоверности, но в среднем равна нескольким десятым долям процента. Средняя достоверность по всем 45 парам ионов равна

$$\langle F \rangle_{10} = (96.3 \pm 0.3)\%. \tag{2.154}$$

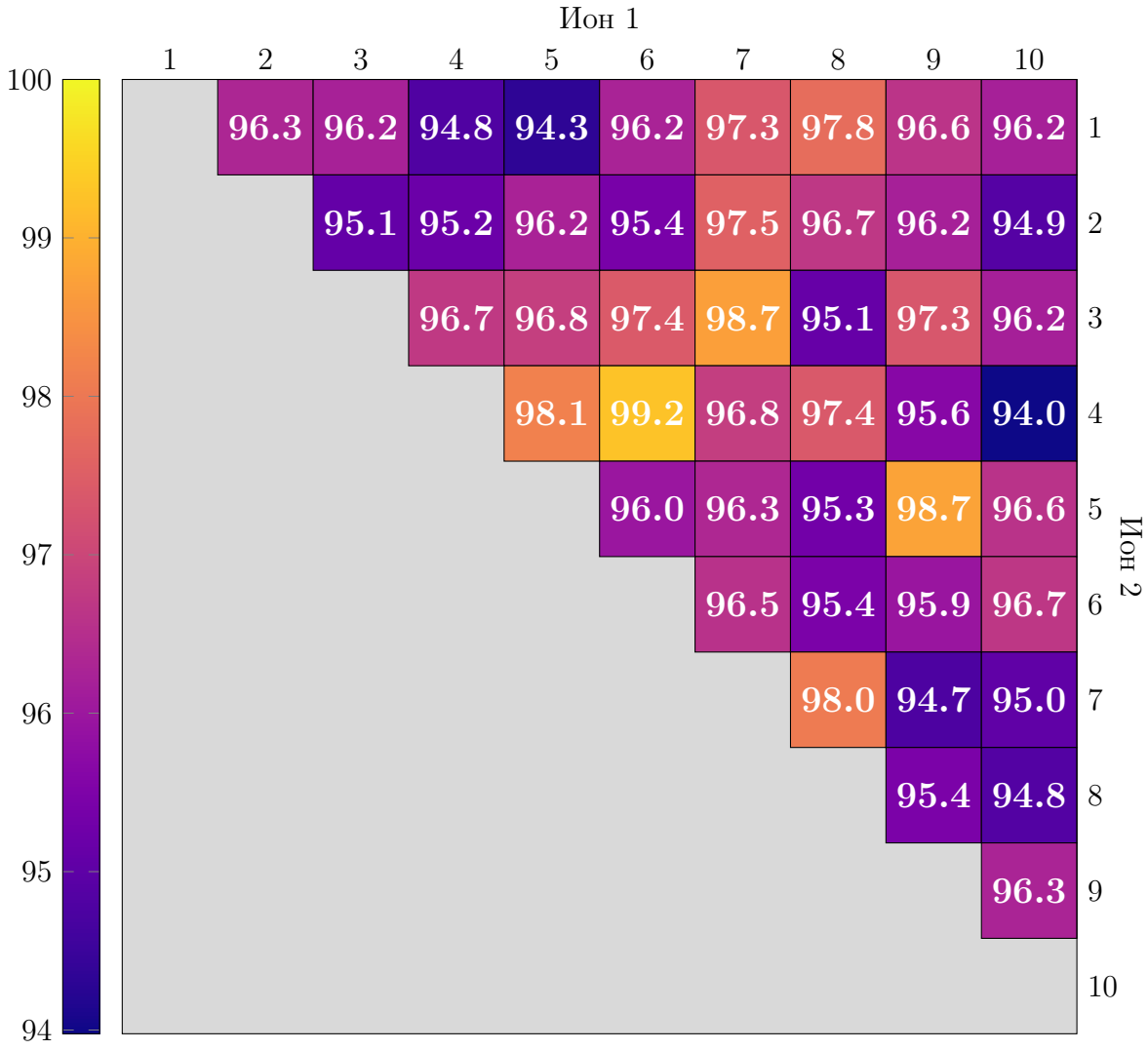


Рис. 2.11. Достоверности MS гейта на массиве из 10 ионов $^{171}Yb^{+}$ в процентах

2.6. Оценка бюджета ошибок MS гейта

Для корректной оценки эффективности метода шейпирования на эксперименте необходимо учесть источники ошибок квантовой операции, не зависящих напрямую от формы лазерного импульса. В данной работе были рассмотрены следующие источники ошибок:

1. *Конечное время спонтанного распада* T_1. Длительность гейта на всех парах, как уже было отмечено, примерно равно одной миллисекунде, а время жизни верхнего кубитного уровня составляет $T_1 = 53$ мс, что является не такой большой величиной по сравнению со временем гейта. Для оценки ошибки, связанной с распадом состояния, заметим, что распад хотя бы одного иона приводит к полному уничтожению когерентности между кубитными уровнями. Следовательно, ошибку операции можно положить равной вероятности распада как минимум одного иона за время гейта. Вероятность в единицу времени такого распада для одного иона равна

$$\Gamma_1 = \Gamma p_1, \tag{2.155}$$

Где $\Gamma = 1/T_1$, а p_1 — населённость верхнего уровня. Будем считать, что процесс распада медленный и не влияет на динамику населённости верхнего состояния. Тогда полную вероятность распада одного иона можно оценить как

$$P_d = \int_0^\tau \Gamma p_1(t)\, dt. \tag{2.156}$$

Вероятность распада хотя бы одного иона в силу независимости этих процессов для каждого из ионов равна

$$\epsilon_{T_1} = 1 - (1 - P_d^{(1)})(1 - P_d^{(2)}) \approx P_d^{(1)} + P_d^{(2)} = \Gamma\tau\langle p_1^{(1)} + p_1^{(2)}\rangle, \tag{2.157}$$

где $\langle p\rangle$ — среднее значение населённости за время гейта. Заметим, что

$$p_1^{(1)} + p_1^{(2)} = (p_{10} + p_{11}) + (p_{01} + p_{11}) = 2p_{11} + p_{01} + p_{10}. \tag{2.158}$$

Средние значения p_{11} и $p_{01} + p_{10}$ можно оценить из рисунка 2.10, *б* (для других пар эти значения примерно такие же):

$$\langle p_{11}\rangle \approx 0.18, \quad \langle p_{01} + p_{10}\rangle \approx 0.13. \tag{2.159}$$

Среднее время гейта составляет $\tau \approx 890$ мкс. Тогда ошибка из-за конечного времени жизни будет оцениваться как

$$\epsilon_{T_1} \approx 0.8\%. \tag{2.160}$$

2. *Конечное время декогеренции* T_2. Из-за различных шумовых процессов, происходящих в окрестности ионной цепочки, состояние кубита подвергается декогеренции, в результате которой теряется информация об относительной фазе между базисными

состояниями $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Этот процесс характеризуется временем затухания T_2. Смоделировать декогеренцию можно шумовым слагаемым, которое отвечает за флуктуации частоты кубитного перехода:

$$\delta\widehat{H}(t) = \sum_j \frac{\delta\omega(t)}{2}\,\sigma_z^{(j)}, \tag{2.161}$$

где $\delta\omega(t)$ — случайная функция отклонения частоты. Для оценки предположим, что шум соответствует случайным блужданиям фазы или белому шуму частоты. Для такого шума автокорреляционная функция равна

$$\langle\delta\omega(t')\delta\omega(t'')\rangle = \Delta\omega\,\delta(t'-t''), \tag{2.162}$$

где $\Delta\omega$ — характерная частота, равная величине белого шума. Средняя ошибка MS гейта, вызванная таким шумом, равна (см. (4.82))

$$\epsilon_{T_2} = \frac{2}{5}\Delta\omega\,\tau. \tag{2.163}$$

Связать $\Delta\omega$ и T_2 можно следующим образом. Недиагональный элемент матрицы плотности кубита пропорционален величине

$$\rho_{01} \propto \langle e^{i\Phi(t)}\rangle, \tag{2.164}$$

где $\Phi(t)$ — флуктуация фазы, набранная за время t:

$$\Phi(t) = \int_0^t \delta\omega(t')\,dt'. \tag{2.165}$$

В предположении гауссова шума (подчиняющегося нормальному распределению) усреднение по шумовым траекториям (в угловых скобках) приводит к соотношению [79]

$$\langle e^{i\Phi(t)}\rangle = e^{-\langle\Phi^2(t)\rangle/2}. \tag{2.166}$$

Средний квадрат фазы равен

$$\langle\Phi^2(t)\rangle = \int_0^t dt' \int_0^t \langle\delta\omega(t')\delta\omega(t'')\rangle\,dt'' = \Delta\omega\int_0^t dt' \int_0^t \delta(t'-t'')\,dt'' = \Delta\omega\,\tau. \tag{2.167}$$

Отсюда

$$\rho_{01} \propto e^{-\Delta\omega\,\tau/2} = e^{-\tau/T_2}, \tag{2.168}$$

поэтому $\Delta\omega = 2/T_2$. Подставляя в (2.163), получаем

$$\epsilon_{T_2} = \frac{4}{5}\frac{\tau}{T_2}. \tag{2.169}$$

Измеренное на эксперименте время когерентности было равно $T_2 = 30$ мс. Отсюда

$$\epsilon_{T_2} \approx 2.4\%. \tag{2.170}$$

Помимо перечисленных выше источников ошибки, существуют и другие, так или иначе зависящие от формы импульса. Сюда входит взаимодействие лазерного пучка с ионом, отличным от целевого (так называемое *перекрёстное* взаимодействие), флуктуации мощности лазера, шум лазерного источника и т.д. Следовательно, учёт только времени жизни и времени когерентности даст оценку сверху на остаточную ошибку, связанную с наличием многих мод и с дрейфом их частот при применении шейпирования. Поскольку средняя экспериментально измеренная ошибка MS гейта составила $\epsilon_{\text{MS}} = 3.7\%$, то ошибка метода шейпирования оценивается сверху величиной

$$\epsilon_{\text{shape}} \leqslant \epsilon_{\text{MS}} - \epsilon_{T_1} - \epsilon_{T_2} = 0.5\%. \tag{2.171}$$

Оценим теперь минимально достижимую ошибку MS гейта без шейпирования. В этом случае удобно использовать формулы, полученные в разделе 2.4, при $P = 1$. Отсюда

$$\alpha_{lj} = i\eta_{lj} e^{-i(\delta_l \tau/2 + \phi_M)} M_l \Omega^2, \quad \chi = D\Omega^2, \tag{2.172}$$

где

$$\begin{gathered} M_l = \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \cos(\delta_l(t-\tau/2))\,dt = \frac{\sin(\delta_l\tau/2)}{2\delta_l}, \\ D = -\frac{1}{2}\sum_l \eta_{l1}\eta_{l2}\int\limits_0^\tau dt_1 \int\limits_0^{t_1} \sin(\delta_l(t_1-t_2))\,dt_2 = -\frac{1}{2}\sum_l \eta_{l1}\eta_{l2}\,\frac{\delta_l\tau - \sin(\delta_l\tau)}{\delta_l^2}. \end{gathered} \tag{2.173}$$

В предположении, что без шейпирования ошибка всё еще остаётся малой, можно воспользоваться выражением (2.96). Для оценки положим также $\overline{n}_l = 0$:

$$\epsilon_{\text{n.shape}} \approx (D\Omega^2 - \chi_0)^2 + \Omega^2 \sum_{l,j} (\eta_{lj} M_l)^2 = (D\Omega^2 - \chi_0)^2 + \Omega^2 M, \tag{2.174}$$

где $M = \sum\limits_{l,j} (\eta_{lj} M_l)^2$. Чтобы корректно оценить влияние дрейфа колебательных частот, необходимо усреднить данную ошибку по некоторому характерному диапазону этого дрейфа. Здесь удобно воспользоваться следующими двумя наблюдениями. Во-первых, малый сдвиг частоты радиальной COM-моды приводит к почти такому же сдвигу всех остальных радиальных частот, в силу малости аксиальных частот относительно радиальных (см. (1.117)). Во-вторых, коэффициенты D, M зависят не от самих частот ω_l, а от разностей $\delta_l = \mu - \omega_l$, поэтому дрейф колебательных частот (одинаковый для всех мод в силу предыдущего наблюдения) эквивалентен такому же по величине сдвигу частоты отстройки μ. Таким образом, можно усреднить ошибку по μ:

$$\langle \epsilon_{\text{n.shape}} \rangle = \frac{1}{2\Delta\mu}\left[\int\limits_{\mu-\Delta\mu}^{\mu+\Delta\mu} (D'\Omega^2 - \chi_0)^2\,d\mu' + \Omega^2 \int\limits_{\mu-\Delta\mu}^{\mu+\Delta\mu} M'\,d\mu'\right], \tag{2.175}$$

где $D' = D(\tau, \mu')$, $M' = M(\tau, \mu')$. Нахождение оптимального набора параметров Ω, τ, μ сводится к задаче минимизации приведённого выше выражения. Эта задача решается путём приравнивания нулю частных производных средней ошибки по искомым параметрам. Таким образом, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_\Omega: &\quad 2\Omega^2 \int (D')^2 \, d\mu' - 2\chi_0 \int D' \, d\mu' + \int M' \, d\mu' = 0, \\ \partial_\tau: &\quad \Omega^2 \int \partial_\tau (D')^2 \, d\mu' - 2\chi_0 \int \partial_\tau D' \, d\mu' + \int \partial_\tau M' \, d\mu' = 0, \\ \partial_\mu: &\quad \Omega^2 (D_+^2 - D_-^2) - 2\chi_0 (D_+ - D_-) + (M_+ - M_-) = 0, \end{aligned} \tag{2.176}$$

где $D_\pm = D(\tau, \mu \pm \Delta\mu)$, $M_\pm = M(\tau, \mu \pm \Delta\mu)$. Каждый из приведённых выше интегралов может быть вычислен в терминах функций интегрального синуса и интегрального косинуса. Из первого уравнения может быть выражена величина Ω^2 и подставлена во второе и третье, сводя систему к двум уравнениям на τ, μ. Для облегчения поиска решений заметим, что, согласно выражению (2.173) для M_l, наибольший вклад в ошибку из-за нарушения условия замыкания траекторий дают ближайшие к лазерной линии моды (с наименьшими δ_l). Тогда, если расположить эту линию ровно посередине между двумя соседними модами ($\mu_0 = (\omega_l + \omega_{l+1})/2$ для некоторого l), то для этих двух ближайших мод можно удовлетворить условию замыкания, взяв $\tau_0 = 2\pi n/\delta_0$, где $\delta_0 = |\omega_l - \omega_{l+1}|/2$, и n — натуральное число. Соответствующая частота Раби Ω_0 найдётся из первого уравнения системы (2.176). Из физических соображений ясно, что решение этой системы будет достаточно близко к $(\Omega_0, \tau_0, \mu_0)$, поэтому этот набор параметров можно использовать как начальное приближение численного метода поиска решения. При этом ошибка гейта будет уже достаточно малой за счёт подбора правильной амплитуды импульса и исключения влияния двух ближайших мод. Используя этот метод для каждой пары ионов и каждого из $N-1$ промежутков между соседними модами, были найдены минимальные ошибки MS гейта, усреднённые по диапазону дрейфа ± 200 Гц (рис. 2.12). Средняя величина ошибки из-за нарушения условий замыкания траекторий и целевой фазы (основного источника систематической ошибки, связанной с наличием нескольких колебательных мод) составляет

$$\epsilon_{\text{n.shape}} \approx 4.0\%. \tag{2.177}$$

Сравнивая это значение с ϵ_{shape}, приходим к выводу, что метод амплитудного кусочно-постоянного шейпирования позволяет минимум на порядок снизить ошибку, связанную с наличием многих колебательных мод и с дрейфом частот этих мод.

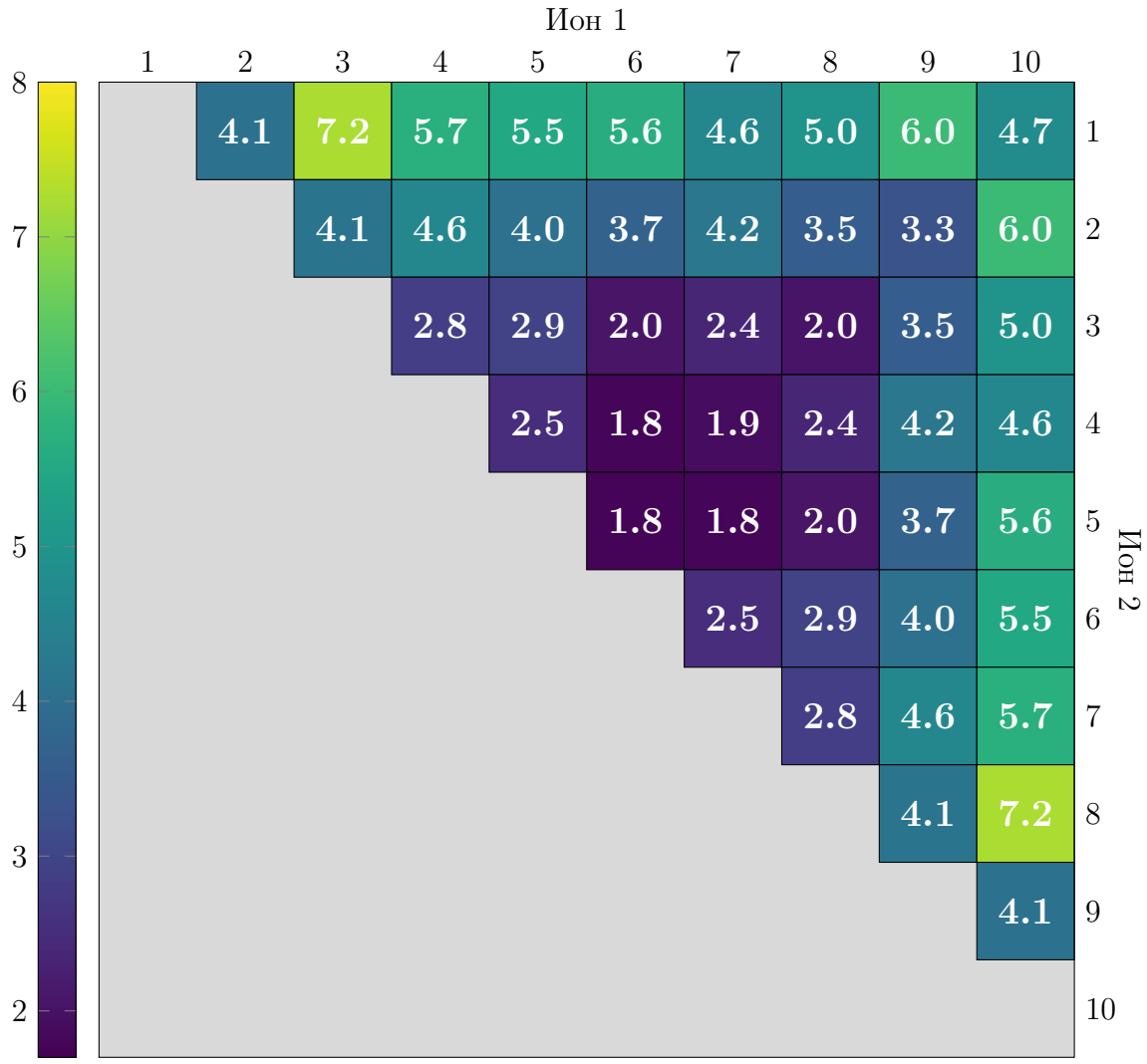


Рис. 2.12. Ошибки MS гейта без шейпирования на массиве из 10 ионов $^{171}Yb^{+}$ в процентах, усреднённые по диапазону отстроек $\pm\Delta\mu = \pm 2\pi \cdot 200$ Гц от расчётной

Основные результаты Главы 2

1. Найден оператор эволюции MS гейта в виде произведения электронной части и операторов смещения колебательных состояний на фазовой плоскости. Получены условия замыкания траекторий и целевой фазы для идеального гейта;

2. Предложен метод кусочно-постоянной амплитудной модуляции (шейпирования) лазерного импульса, позволяющий удовлетворить условиям на идеальный гейт и учесть дрейф частот колебательных мод;

3. Описанный метод шейпирования реализован экспериментально на цепочке из 10 ионов $^{171}Yb^{+}$. Измерена достоверность MS гейта для всех пар ионов, средняя достоверность составила 96.3(3)%;

4. Из экспериментальных данных оценена ошибка, связанная с нарушением условий на идеальный гейт и с дрейфом колебательных частот. Верхняя оценка ошибки составила 0.5%;

5. Найдена минимально достижимая средняя ошибка MS гейта в отсутствие шейпирования. Показано, что эта ошибка на порядок превышает экспериментальную оценку ошибки при наличии шейпирования.

Глава 3

Перепутывающие ионные гейты в кудитном пространстве

Одним из альтернативных вариантов решения проблемы масштабирования ионного квантового компьютера, как уже упоминалось во Введении, является использование кудитов — d-мерных обобщений кубитов. При $d \geqslant 4$ один кудит может содержать в себе больше одного виртуального, или *вложенного*, кубита [80; 81], что повышает эффективный размер кубитного регистра. Однако это не единственное преимущество кудитов. Дополнительные кудитные уровни могут быть использованы в качестве вспомогательных уровней-*анцилл* в квантовой цепочке, позволяя уменьшить количество операций, необходимых для её реализации. Например, гейт Тоффоли [7], применяемый в алгоритме Гровера [1], может быть проведён на кудитах [82–85], что заметно снижает число требуемых гейтов. Квантовые вычисления на кудитах уже были продемонстрированы на нескольких физических платформах [26; 38; 58; 86], включая ионы, например ионы кальция $^{40}Ca^{+}$ [38], бария $^{137}Ba^{+}$ [87] и иттербия $^{171}Yb^{+}$ [88], в том числе в ФИАН [26; 58].

Для наиболее эффективного использования потенциальных преимуществ кудитов в вычислениях, важно иметь полный набор *нативных* (реализуемых непосредственно на квантовом компьютере) гейтов, аналогично кубитному случаю. Этот набор существенно влияет на итоговое количество гейтов, требуемых для конкретной квантовой цепочки, что, в свою очередь, определяет итоговое качество реализуемого алгоритма. Физические эффекты, которые могли быть относительно слабо проявлены в кубитах, становятся гораздо заметнее с повышением размерности кудита. Внешние поля (например, лазерное излучение) могут поразному воздействовать на разные кудитные уровни, тем самым повышая количество параметров, которыми описывается сам гейт, что затрудняет его калибровку и имплементацию в квантовой цепочке. Например, разобранный ранее MS гейт в кубитном случае соответствует взаимодействию типа $\sigma_{\phi}^{(1)}\sigma_{\phi}^{(2)}$. Оператор эволюции (2.65) содержит, вообще говоря, дополнительные члены, которые обычно игнорируются, поскольку представляют собой глобальный сдвиг фазы обоих кубитных уровней. В кудитном же случае этот сдвиг фазы проигнорирован быть не может, равно как и дополнительный сдвиг незадействованных в гейте уровней кудита из-за эффекта Штарка, индуцированного лазерным излучением.

Данная глава посвящена теоретическому анализу наиболее часто встречающихся перепутывающих ионных двухкубитных гейтов, расширенных на кудитное пространство. Среди них уже упомянутый MS гейт, а также так называемый *гейт на световом сдвиге* (Light

Shift, LS). Для обоих гейтов найдены дополнительные фазы, набегающие на кудитные состояния, а также предложены методы для их подавления и стабилизации относительно дрейфов колебательных частот ионов, где это возможно. Заметим, что более ранние публикации на данную тему [38; 89] учитывают лишь взаимодействие с одной COM-модой. В этой же главе рассмотрен более общий случай наличия многих мод, а также произвольная модуляция лазерного поля.

3.1. Общее описание кудитных гейтов

3.1.1. Кудитный MS гейт

Схема уровней кудитного MS гейта выглядит согласно рис. 3.1.

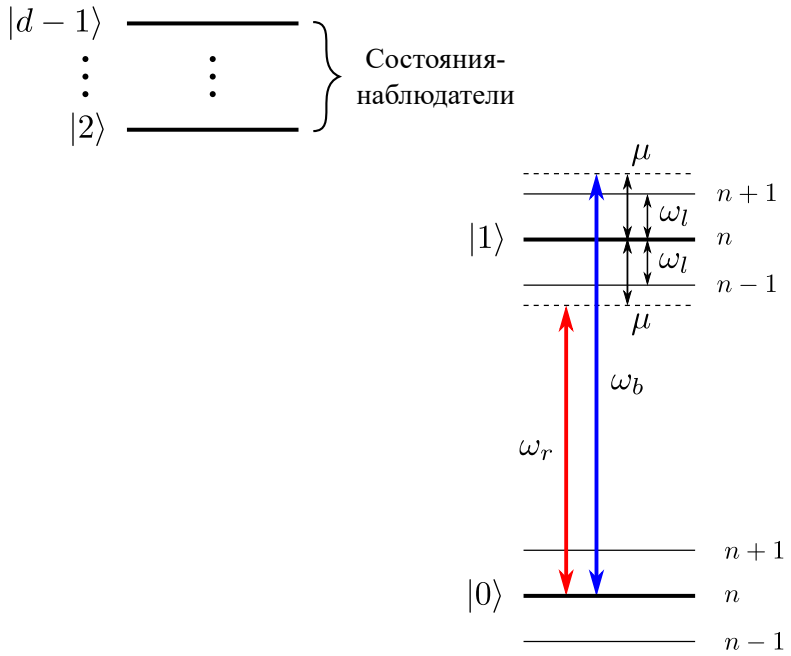


Рис. 3.1. Схема уровней в кудитном MS гейте

Помимо непосредственно адресуемых излучением уровней $|0\rangle$ и $|1\rangle$, к схеме добавляются так называемые *состояния-наблюдатели* $|2\rangle, \ldots, |d-1\rangle$. Гамильтониан MS гейта в описанном выше случае записывается следующим образом:

$$\widehat{H}_{\mathrm{MS}} = \sum_{l,j} \eta_{lj} g_j(t) (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \sigma_\phi^{(j)} + \sum_{s=0}^{d-1} \sum_j \delta_{j,s}^{\mathrm{AC}}(t) |s_j\rangle\langle s_j|, \tag{3.1}$$

где взяты обозначения из предыдущей главы, а матрицы Паули подразумеваются расширенными на кудитное пространство. Функция $g_j(t)$ является общим видом шейпированного лазерного импульса. Если амплитуда этого импульса задана частотой Раби $\Omega(t)$, а отстройка

равна $\mu(t)$, то функция импульса может быть записана как

$$g_j(t) = \Omega_j(t)\cos(\psi(t) + \phi_M^{(j)}), \tag{3.2}$$

где фаза импульса $\psi(t)$ равна

$$\psi(t) = \int_0^t \mu(t')\,dt'. \tag{3.3}$$

Второе слагаемое отвечает за штарковские сдвиги s-го уровня j-го иона $\delta_{j,s}^{\mathrm{AC}}(t)$. Эти сдвиги вызваны в основном нерезонансным взаимодействием с посторонними уровнями. На практике сдвиги нулевого и первого уровней обоих ионов делают одинаковыми: $\delta_{j,0}^{\mathrm{AC}}(t) \equiv \delta_{j,1}^{\mathrm{AC}}(t)$, иначе их различие приведёт к существенным ошибкам гейта [74]. Это можно осуществить либо добавлением еще одной спектральной компоненты излучения, отстроенной далеко от резонанса с любыми кудитными уровнями [90], либо внесением дисбаланса амплитуд бихроматических компонент [91]. В кудитном случае сдвигами $|0\rangle$ и $|1\rangle$, несмотря на их равенство, пренебречь нельзя, что усложняет нахождение оператора эволюции. Заметим, однако, что слагаемые в (3.1) коммутируют. Действительно, для этого достаточно показать, что

$$\left[\sigma_\phi^{(j)}, \sum_{s=0}^{d-1} \delta_{j,s}^{\mathrm{AC}}(t)|s_j\rangle\langle s_j|\right] = 0. \tag{3.4}$$

Поскольку операторы $\sigma_\phi^{(j)}$ затрагивают только состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$, этот коммутатор равен

$$\left[\sigma_\phi^{(j)}, \delta_{j,0}^{\mathrm{AC}}(t)|0_j\rangle\langle 0_j| + \delta_{j,1}^{\mathrm{AC}}(t)|1_j\rangle\langle 1_j|\right] = \\ = i(\delta_{j,1}^{\mathrm{AC}}(t) - \delta_{j,0}^{\mathrm{AC}}(t))\left(|0_j\rangle\langle 1_j|e^{-i\phi_S^{(j)}} + |1_j\rangle\langle 0_j|e^{i\phi_S^{(j)}}\right) = 0 \tag{3.5}$$

в силу $\delta_{j,0}^{\mathrm{AC}}(t) \equiv \delta_{j,1}^{\mathrm{AC}}(t)$. Из коммутации гамильтонианов следует, что общий оператор эволюции будет произведением операторов эволюции для каждого гамильтониана в отдельности. Рассмотрим сначала эволюцию, связанную с первым слагаемым. Аналогично (2.51), используем разложение Магнуса:

$$\widehat{U}_{\mathrm{MS}}^{(1)} = \exp\left(\widehat{\Omega}_1 + \widehat{\Omega}_2\right), \tag{3.6}$$

где

$$\widehat{\Omega}_1 = \sum_{l,j} \sigma_\phi^{(j)}(\alpha_{lj}\hat{a}_l^\dagger - \alpha_{lj}^*\hat{a}_l), \quad \alpha_{lj} = -i\eta_{lj}\int_0^\tau g_j(t)e^{i\omega_l t}\,dt, \tag{3.7}$$

$$\widehat{\Omega}_2 = i\sum_{jk}\chi_{jk}^{\mathrm{MS}}\sigma_\phi^{(j)}\sigma_\phi^{(k)}, \quad \chi_{jk}^{\mathrm{MS}} = \sum_l \eta_{lj}\eta_{lk}\int_0^\tau dt_1\int_0^{t_1} dt_2\, g_j(t_1)g_k(t_2)\sin(\omega_l(t_1 - t_2)). \tag{3.8}$$

Оператор $\widehat{\Omega}_2$ может быть представлен в следующем виде:

$$\widehat{\Omega}_2 = i\left[\chi_{11}^{\mathrm{MS}}(\sigma_\phi^{(1)})^2 \otimes \mathbb{I}_2 + \chi_{22}^{\mathrm{MS}}\mathbb{I}_1 \otimes (\sigma_\phi^{(2)})^2\right] + i(\chi_{12}^{\mathrm{MS}} + \chi_{21}^{\mathrm{MS}})\sigma_\phi^{(1)}\sigma_\phi^{(2)}. \tag{3.9}$$

Выражение $(\sigma_\phi^{(j)})^2 = |0_j\rangle\langle 0_j| + |1_j\rangle\langle 1_j|$ есть проектор на подпространство первых двух уровней. Для кудитов, в отличие от кубитов, этот оператор не является единичным из-за наличия дополнительных состояний вычислительного базиса. Оператор эволюции из-за штарковских сдвигов равен

$$\widehat{U}_{\mathrm{MS}}^{(2)} = \exp\left(i \sum_j \sum_{s=0}^{d-1} \phi_{j,s}^{\mathrm{AC}} |s_j\rangle\langle s_j| \right), \tag{3.10}$$

где

$$\phi_{j,s}^{\mathrm{AC}} = -\int_0^\tau \delta_{j,s}^{\mathrm{AC}}(t)\, dt. \tag{3.11}$$

Для простоты здесь и далее предположим, что условие замыкания траекторий $\alpha_{lj} = 0$ соблюдено (например, шейпированием импульса, аналогично кубитному случаю). Итоговый оператор эволюции тогда представляется в виде

$$\widehat{U}_{\mathrm{MS}} = \exp\left(i\chi_{12}^{\mathrm{MS}} \sigma_\phi^{(1)} \sigma_\phi^{(2)} + i \sum_j \left[\chi_{jj}^{\mathrm{MS}} (|0_j\rangle\langle 0_j| + |1_j\rangle\langle 1_j|) + \sum_{s=0}^{d-1} \phi_{j,s}^{\mathrm{AC}} |s_j\rangle\langle s_j| \right] \right), \tag{3.12}$$

где сделана замена $\chi_{12}^{\mathrm{MS}} + \chi_{21}^{\mathrm{MS}} \to \chi_{12}^{\mathrm{MS}}$. Сравнивая с формулой (2.65), находим, что, с точностью до оператора смещения (который мы положили единичным в силу условия замыкания траекторий), расширение MS гейта на кудитное пространство содержит дополнительные *локальные* фазы $\chi_{11}^{\mathrm{MS}}, \chi_{22}^{\mathrm{MS}}$, то есть фазы, набирающиеся на кудитные состояния $|0\rangle$ и $|1\rangle$ каждого из ионов по отдельности.

3.1.2. Кудитный LS гейт

Второй распространённый гейт на ионах — так называемый *гейт на световом сдвиге*, или LS гейт. Он также реализуется при помощи бихроматического излучения, но в другой геометрии. Направления синей и красной компонент не совпадают, образуя *идущую волну* — интерференционную картину, которая движется с малой скоростью (на рис. 3.2 идущая волна образована антипараллельными пучками).

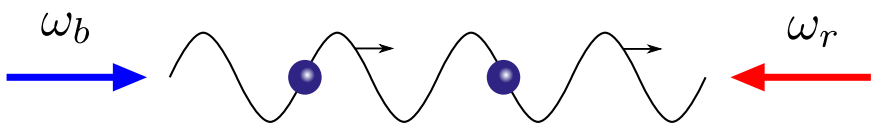


Рис. 3.2. Создание идущей волны бихроматическим лазерным полем

Эта волна создаёт штарковский сдвиг энергии уровня в ионе, а градиент этого сдвига, в свою очередь — силу. Если частота изменения этой силы (равная разности частот бихромата) близка к частоте моды, то будут возбуждаться колебания ионной цепочки на этой моде.

А поскольку сам штарковский сдвиг, а значит и сила, зависит от электронного состояния иона, имеем спин-зависимую силу, аналогичную MS гейту, которая и осуществляет перепутывание ионов. Данный гейт был впервые продемонстрирован в работе [92]. В дополнение к оригинальной схеме LS гейта, существуют и модифицированные версии [93–95], которые отличаются в конкретной физической реализации, но дают качественно один и тот же гамильтониан, поэтому рассмотрим наиболее общий случай.

В общем случае одна или несколько пар лазерных пучков с разницей частот $\mu(t)$ каждая создаёт идущую волну в месте нахождения ионов. Принцип работы гейта может быть проиллюстрирован в простейшей конфигурации, когда каждое кудитное состояние связано нерезонансным образом посредством бихромата с некоторым ближайшим незадействованным промежуточным уровнем иона $|e\rangle$ (рис. 3.3).

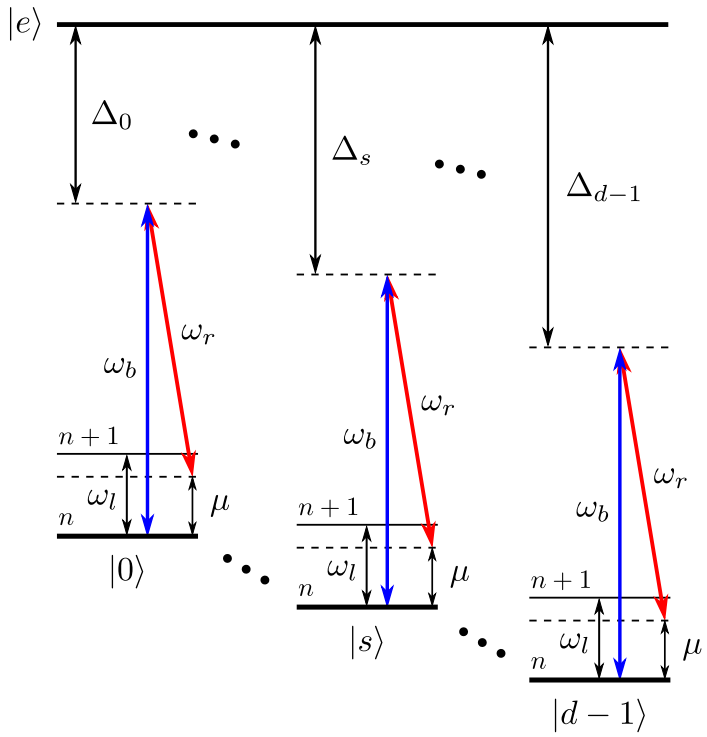


Рис. 3.3. Структура уровней кудитного LS гейта. Промежуточное состояние $|e\rangle$ выбрано одинаковым для всех кудитных состояний

Формально говоря, ближайший уровень $|e\rangle$ может зависеть от конкретного состояния, однако сделанное допущение не ограничивает общность рассмотрения. Если отстройка от $|e\rangle$ достаточно большая, то это состояние можно адиабатически исключить [94] и получить эффективный гамильтониан, затрагивающий только кудитные уровни:

$$\widehat{H}_{\mathrm{LS}}(t) = \sum_{s=0}^{d-1} \sum_{l,j} \eta_{lj} g_{j,s}(t) \left(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t} \right) |s_j\rangle\langle s_j| + \sum_{s=0}^{d-1} \sum_{j} \delta_{j,s}^{\mathrm{AC}}(t) |s_j\rangle\langle s_j|, \tag{3.13}$$

где второе слагаемое соответствует остаточным штарковским сдвигам, не зависящим от коле-

бательного состояния, а первое похоже на первое слагаемое в гамильтониане кудитного MS гейта (3.1), с двумя важными отличиями. Во-первых, электронные операторы здесь являются проекторами на состояния. Во-вторых, функция импульса $g_{s,j}(t)$ в общем случае зависит от уровня $|s\rangle$. В MS гейте этой зависимости не было в силу того, что лазерное поле связывало только $|0\rangle$ и $|1\rangle$, будучи нерезонансным для остальных уровней. Функция импульса представима в виде

$$g_{j,s}(t) = \Omega_{j,s}(t)\cos(\psi(t) + \phi_M^{(j)}), \tag{3.14}$$

где $\psi(t)$ задана через отстройку $\mu(t)$ аналогично MS гейту. Частота $\Omega_{j,s}(t)$ имеет физический смысл амплитуды светового штарковского сдвига состояния $|s\rangle$. Для сопоставления с MS гейтом будем также называть её частотой Раби, несмотря на то, что никаких осцилляций Раби в данной системе не наблюдается. Заметим, что в простейшем случае, когда идущая волна создана всего двумя пучками, функции импульса для разных состояний одного иона пропорциональны друг другу:

$$g_{j,s}(t) = \theta_s g_j(t), \tag{3.15}$$

где θ_s — некоторый коэффициент, не зависящий от времени. Для удобства предположим, что состояния кудита пронумерованы по убыванию величины θ_s:

$$1 = |\theta_0| \geqslant |\theta_1| \geqslant \cdots \geqslant |\theta_{d-1}|, \tag{3.16}$$

где принята нормировка θ_0 на единицу.

Поскольку оба слагаемых в (3.13) диагональны в вычислительном базисе, они коммутируют, и, соответственно, также могут быть рассмотрены отдельно в терминах эволюции. Разложение Магнуса даст для первого слагаемого (при выполнении условия замыкания траекторий)

$$\widehat{U}_{\mathrm{LS}}^{(1)} = \exp\left(i\sum_{s,s'=0}^{d-1}\sum_{jk}\chi_{jk;ss'}^{\mathrm{LS}}|s_j\rangle\langle s_j| \times |s'_k\rangle\langle s'_k|\right), \tag{3.17}$$

где фаза $\chi_{jk;ss'}^{\mathrm{LS}}$ имеет вид

$$\chi_{jk;ss'}^{\mathrm{LS}} = \sum_l \eta_{lj}\eta_{lk}\int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, g_{j,s}(t_1)g_{k,s'}(t_2)\sin(\omega_l(t_1 - t_2)). \tag{3.18}$$

Оператор эволюции для штарковских сдвигов $\widehat{U}_{\mathrm{LS}}^{(2)}$ вычисляется аналогично MS гейту. Выделяя в (3.17) локальные фазы с учётом (3.15), получаем

$$\widehat{U}_{\mathrm{LS}} = \exp\left(i\chi_{12}^{\mathrm{LS}}\sum_{s,s'=0}^{d-1}\theta_s\theta_{s'}|ss'\rangle\langle ss'| + i\sum_j\left[\sum_{s=0}^{d-1}(\chi_{jj}^{\mathrm{LS}}\theta_s^2 + \phi_{j,s}^{\mathrm{AC}})|s_j\rangle\langle s_j|\right]\right), \tag{3.19}$$

где фаза перепутывания χ_{12}^{LS} и локальные фазы χ_{jj}^{LS} равны

$$\begin{aligned}\chi_{12}^{\mathrm{LS}} &= \sum_l \eta_{l1}\eta_{l2} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \left(g_1(t_1)g_2(t_2) + g_2(t_1)g_1(t_2)\right)\sin(\omega_l(t_1-t_2)),\\ \chi_{jj}^{\mathrm{LS}} &= \sum_l \eta_{lj}^2 \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2\, g_j(t_1)g_j(t_2)\sin(\omega_l(t_1-t_2)).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Несмотря на сходство операторов эволюции для MS и LS гейтов, существенное отличие заключается в том, что в кудитном MS гейте перепутывающая часть содержит только одну фазу перепутывания χ_{jk}^{MS}, в то время как для LS гейта каждое двухкудитное состояние $|ss'\rangle$ получает, в общем случае, свой фазовый сдвиг $\chi_{jk;ss'}^{\mathrm{LS}}$.

Важным частным случаем LS гейта на кудитах является случай $|\theta_{s\geq 1}| \ll 1$. Иными словами, только одно состояние достаточно сильно взаимодействует с излучением. Такая ситуация может возникнуть, например, если частота лазера гораздо ближе к частоте перехода между $|0\rangle$ и $|e\rangle$, чем к частотам переходов из других кудитных уровней [89], а также если поляризация излучения такова, что условие $\theta_{s\geq 1} = 0$ обеспечивается правилами отбора. Такой гейт назовём *LS гейтом нулевого порядка*. В рамках данного приближения, оператор эволюции примет вид

$$\widehat{U}_{\mathrm{LS}}^{(0)} = \exp\left(i\chi_{12}^{\mathrm{LS}}|00\rangle\langle 00| + i\sum_j(\chi_{jj}^{\mathrm{LS}} + \phi_{j,0}^{\mathrm{AC}})|0_j\rangle\langle 0_j|\right). \tag{3.21}$$

В кубитном случае выражение $|00\rangle\langle 00|$ может быть преобразовано как

$$|00\rangle\langle 00| = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + \sigma_z^{(1)}\otimes\mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1\otimes\sigma_z^{(2)} + +\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}), \tag{3.22}$$

что с точностью до глобальной фазы и однокубитных операций даёт двухкубитный гейт

$$\widehat{U}_{\mathrm{LS}}^{(0)} \sim \exp\left(i\chi_{12}^{\mathrm{LS}}\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\right). \tag{3.23}$$

Тогда, заметив, что $H\sigma_z H = \sigma_x$, где H — гейт Адамара [7]

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

Находим, что

$$(H\otimes H)\widehat{U}_{\mathrm{LS}}^{(0)}(H\otimes H) \sim \exp\left(i\chi_{12}^{\mathrm{LS}}\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\right), \tag{3.25}$$

что совпадает с кубитным MS гейтом с точностью до фазы ϕ_S в операторе σ_ϕ, которая не имеет принципиального значения. Таким образом, для кубитов MS гейт и LS гейт нулевого

порядка *локально эквивалентны*, то есть могут быть сведены друг к другу про помощи однокубитных операций (в данном случае, гейтов Адамара). Для кудитов же ситуация усложняется. В частности, можно показать [96], что при размерности кудита $d > 2$, эти гейты локально эквивалентны только при одновременном выполнении условий

$$d = 3, \quad \chi_{12}^{\mathrm{MS}} = \chi_{12}^{\mathrm{LS}} = \pi. \tag{3.26}$$

Это означает, что даже самый тривиальный случай LS гейта не сводится, вообще говоря, к MS гейту, что говорит об их фундаментальном различии.

3.2. Чувствительность кудитных гейтов к флуктуациям экспериментальных параметров

Среди самых распространённых эффектов, уменьшающих достоверность гейта, помимо систематической ошибки, связанной с нарушением условий замыкания траекторий и целевых фаз — флуктуации мощности лазерного пучка и его фазы, конечная температура ионной цепочки и её нагрев, а также дрейфы колебательных частот. Флуктуации фазы и температура одинаковым образом влияют на кубитные и кудитные гейты. В частности, как MS гейт, так и LS гейт в главном порядке нечувствительны к температуре ионов, а MS гейт гораздо чувствительнее к флуктуациям фазы, чем LS гейт, в силу резонансного взаимодействия излучения с уровнями системы.

Нарушение условий замыкания траекторий для кудитного MS гейта даст такую же ошибку, как и для кубитного MS гейта, поскольку состояния-наблюдатели не задействованы в гейте и не влияют на параметры смещения α_{lj}. Для LS гейта, формально говоря, на каждое кудитное состояние $|s\rangle$ приходится отдельный параметр смещения, заданный функцией импульса $g_{j,s}$, что повышает чувствительность кудитов к этому эффекту по сравнению с кубитами. Однако, как было отмечено выше в формуле (3.15), в простейшем случае двух пучков (который и реализуется на практике чаще всего) функции импульса, а значит, и параметры смещения пропорциональны друг другу и, следовательно, могут быть обращены в ноль одновременно подходящим методом шейпирования. Более того, для кубитов и для кудитов эти функции будут задаваться одинаковыми уравнениями, отличаясь лишь амплитудой. В LS гейте нулевого порядка количество параметров смещения не увеличивается с ростом d, поэтому для этого гейта кубитная и кудитная ситуации эквивалентны в терминах рассматриваемой ошибки.

Важно заметить, что гамильтонианы (3.1) и (3.13) были получены в режиме Лэмба-Дике, в котором были оставлены только члены, линейные по η_{lj}, пренебрегая членами более

высоких порядков, а также взаимодействием с несущей (см. первое слагаемое в (2.47)). Влияние этих слагаемых на ошибку было исследовано в работе [97] в применении к кубитному MS гейту, но анализ может быть очевидным образом распространен и на LS гейт. Конкретнее, слагаемое, отвечающее за взаимодействие с несущей, вызывает спин-зависимый фазовый сдвиг состояний, адресуемых лазерным излучением, в то время как члены высшего порядка по η_{lj} вызывают ряд спин-зависимых связей различных колебательных мод, что приводит к дополнительному перепутыванию электронных и колебательных степеней свободы. Для MS гейта ситуации в кубитном и кудитном случаях совпадают, поскольку, как и ранее, этот эффект затрагивает только задействованные в гейте уровни $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Для LS гейта случай аналогичен рассмотренному выше незамыканию траекторий, а именно: влияние упомянутых эффектов на разные кудитные состояния $|s\rangle$ пропорционально. Следовательно, выбрав подходящую форму импульса, подавляющего эти ошибки [97], можно обеспечить практически одинаковую чувствительность кубитов и кудитов к данному источнику ошибок при проведении LS гейта.

Наиболее заметные отличия между кубитами и кудитами проявляются в случае флуктуации колебательных частот и мощности лазера. Причина этого в большем количестве зависящих от этих параметров фаз, определяющих оператор эволюции в кудитах. Кудитный MS гейт содержит, как было указано ранее, одну *нелокальную* (перепутывающую) фазу χ_{12}^{MS} и две локальные χ_{11}^{MS}, χ_{22}^{MS}, последние две из которых игнорировались в кубитах. Общий случай кудитного LS гейта содержит $d(d-1)/2$ нелокальных и $d-1$ локальных фаз (здесь учтено, что одна из локальных фаз может быть исключена как глобальная). Некоторые из локальных фаз (например, от штарковских сдвигов) могут быть компенсированы так же, как и в кубитах, например, приложением дополнительных спектральных компонент лазера или внесением дисбаланса мощности в изначальные бихроматические компоненты. Однако в общем чувствительность кудитных гейтов к упомянутым флуктуациям менее очевидная.

Особый интерес в данном контексте представляют те локальные фазы, которые происходят из взаимодействия колебательных и электронных степеней свободы, а именно фазы χ_{jj}^{MS}, $\chi_{jj;ss}^{\mathrm{LS}}$ для MS и LS гейтов соответственно. Они, равно как и нелокальные фазы χ_{jk}^{MS}, $\chi_{jk;ss'}^{\mathrm{LS}}$, зависят явным образом как от мощности лазера, так и от колебательных частот. Дрейфы частот влияют также и на условие замыкания траекторий, однако стабилизация параметров смещения относительно этих дрейфов может быть проведена шейпированием при помощи таких же методов, что и для кубитов.

Для уменьшения чувствительности локальных и нелокальных фаз к дрейфам частот можно рассмотреть похожие методы шейпирования, с расширением на стабилизацию не толь-

ко параметров смещения, но и фаз. Такое расширение возможно для кудитного MS гейта, поскольку к уравнениям, задающим форму импульса, добавятся уравнения всего для двух фаз: χ_{11}^{MS} и χ_{22}^{MS}. Заметим, что наиболее обоснованно не только стабилизировать эти фазы относительно дрейфов частот, но и потребовать равенство нулю самих фаз. Это не повлияет на перепутывающие свойства гейта, поскольку данные фазы локальные, но существенно упростит его калибровку, а также автоматически понизит чувствительность этих фаз к флуктуациям мощности лазера.

Для кудитного LS гейта такое прямое расширение в общем случае не представляется возможным в силу большого количества нелокальных фаз (растущее квадратичным образом по d). Данная ситуация крайне нежелательна и в эксперименте, поскольку заметно усложняет калибровку, контроль и стабилизацию квантовой операции. Более того, даже если предположить, что все эти фазы можно идеально проконтролировать, использование такого «сырого» нативного гейта вынудит тратить большие вычислительные ресурсы на *транспиляцию* (процесс разложения произвольного гейта в алгоритме на нативные) квантовых цепочек. Наконец, LS гейт с произвольным набором нелокальных фаз, вообще говоря, обеспечит перепутывание всех кудитных уровней одного иона со всеми кудитными уровнями другого. Для некоторых приложений необходимо обеспечить максимальную степень такой запутанности, например, в терминах ранга Шмидта [89; 98]. Однако, если отталкиваться от наиболее часто встречающейся кубитной логики, то рассмотрение кудита в качестве набора вложенных кубитов [80; 81] является более естественным. В таком случае большая степень кудитной запутанности становится не преимуществом, а недостатком.

Наиболее желательной постановкой задачи о контроле кудитных фаз в LS гейте будет, таким образом, во-первых, уменьшить количество параметров, задающих оператор эволюции гейта, а во-вторых, ограничить действие этого гейта на два вложенных кубита в разных кудитах, а состояния остальных вложенных кубитов оставить без изменения. В такой постановке можно будет не только облегчить последующее шейпирование импульсов для стабилизации гейта, но и транспиляцию кубитной цепочки на кудитный регистр.

3.3. Компенсация и стабилизация кудитных фаз в MS гейте

В данном разделе рассматривается расширение метода шейпирования импульсов для описанных выше компенсации и стабилизации локальных и нелокальной фаз кудитного MS гейта. Здесь предполагается случай шейпирования, более общий, чем в главе 2 — амплитудно-частотный [31; 99–101]. Дополнительно для простоты положим также, что импульсы

идентичны на обоих ионах, как было в шейпировании кубитного MS гейта, и опустим далее индекс, отвечающий за номер иона в функции g_j. Как правило, в такой задаче рассматриваются импульсы, равные нулю в начале и в конце гейта, для более плавного нарастания и спадания поля, воздействующего на ион. Тогда функцию импульса можно представить в виде ряда Фурье:

$$g(t) = \sum_{p=1}^{P} \Omega_p \sin\left(\frac{2\pi p t}{\tau}\right), \tag{3.27}$$

где Ω_p — действительная амплитуда p-й фурье-гармоники, P — их количество, взятое для данного импульса. Такой импульс можно реализовать при помощи генератора сигналов произвольной формы (AWG, Arbitrary Waveform Generator) [31]. Аналогично амплитудному шейпированию введём вектор амплитуд $\mathbf{\Omega} = (\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{P-1})^{\mathrm{T}}$. Можно показать (см. Приложение А), что уравнения, задающие параметры смещения α_{lj}, а также фазы χ_{jk}^{MS}, имеют такой же вид, что и для амплитудного шейпирования. В частности, условие замыкания траекторий имеет вид $\mathbf{M\Omega} = \mathbf{0}$, где матрица $\mathbf{M}$ также вычисляется аналитически. Фазы, как локальные, так и нелокальная, записываются в виде

$$\chi_{jk}^{\mathrm{MS}} = \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \mathbf{S}_{jk} \mathbf{\Omega} \tag{3.28}$$

с симметричной матрицей $\mathbf{S}_{jk}$. Стабилизация параметров смещения производится аналогично разделу 2.4 при помощи метода моментов, в результате чего в матрицу $\mathbf{M}$ добавятся дополнительные строки, не нарушая линейности. Стабилизация же фаз χ_{jk}^{MS} не может быть реализована таким же способом. Дело в том, что эти фазы, а значит, их производные по колебательным частотам, квадратичны по вектору $\mathbf{\Omega}$. Равенство производной квадратичной формы нулю требует отсутствия знакоопределённости матрицы производной этой формы $\partial \mathbf{S}_{jk}/\partial\omega_l$. Однако такая матрица всегда знакоопределённая [31], что делает невозможной полную стабилизацию. Несмотря на это, возможно существенно снизить чувствительность фаз относительно дрейфов частот, используя линейный по $\mathbf{\Omega}$ *метод проекций* [31]. Данный метод заключается в исключении из пространства поиска таких векторов, которые обеспечивают наибольшую чувствительность к дрейфам. Степень этой чувствительности оценивается величиной $\partial\chi_{jk}^{\mathrm{MS}}/\partial\omega_l$, которая будет квадратичной формой от вектора амплитуд. Ясно, что собственные векторы этой формы, обладающие наибольшими по модулю собственными значениями, отвечают соответственно за наибольшую чувствительность к дрейфам, поскольку для таких векторов величина $|\,\partial\chi_{jk}^{\mathrm{MS}}/\partial\omega_l\,|$ будет наибольшей. Выбрав для каждой из N мод по M таких векторов

$$\mathbf{v}_m^{(l)}, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{3.29}$$

(первых M по убыванию модуля собственного значения), имеем дополнительную систему из MN уравнений

$$(\mathbf{v}_m^{(l)})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \quad l = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.30}$$

которая также будет линейной по Ω и может быть добавлена к изначальной матрице СЛАУ $\mathbf{M}$.

Выбирая, как и в разделе 2.4, в качестве целевой функции среднюю мощность лазера (которая в силу равенства Парсеваля пропорциональна $\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega}$), а также полагая $\chi_{jj}^{\mathrm{MS}} = 0$ согласно указанному ранее, имеем следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{gathered}\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega} \to \min : \\ \begin{cases} \mathbf{Q}\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{jj}\mathbf{\Omega} = 0, \quad j = 1, 2 \\ \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{12}\mathbf{\Omega} = \chi_0, \end{cases}\end{gathered} \tag{3.31}$$

где матрица $\mathbf{Q}$ включает условия замыкания траекторий, стабилизации параметров смещения методом моментов и кудитных фаз методом проекций (см. Приложение Б). В отличие от задачи (2.131), эта задача уже не может быть решена аналитически, поскольку в ней три квадратных уравнения вместо одного. В данной работе решения искались численно при помощи метода SLSQP библиотеки SciPy [102]. Для оценки эффективности метода проекций были найдены оптимальные импульсы для $M = 0$ (без стабилизации фаз) и для $M = 5$. Здесь важно отметить следующее обстоятельство. Стабилизация методом проекций каждой из трёх фаз χ_{12}^{MS}, χ_{11}^{MS}, χ_{22}^{MS} требует исключения $3MN$ векторов, что для $M = 5$ и $N = 10$ составляет 150 дополнительных ограничений. Такое количество может существенно затруднить задачу поиска оптимального импульса. Однако, как можно заметить из (3.8), упомянутые фазы не являются полностью независимыми, а связанными друг с другом через параметры Лэмба-Дике. Учитывая эту связь, можно ожидать, что стабилизация только одной из этих фаз (например фазы перепутывания χ_{12}^{MS}) автоматически улучшит устойчивость остальных двух, уменьшив количество дополнительных ограничений в 3 раза. Для проверки данной гипотезы были также найдены оптимальные импульсы для $M = 5$ со стабилизацией только фазы χ_{12}^{MS}.

Оптимизационная задача (3.31) имеет три квадратных уравнения, соответственно, не всегда является совместной, особенно при большом количестве ограничений, заданных методом проекций. Тем не менее, путём подбора начальных точек численной аппроксимации решений удалось проверить, что оптимальные импульсы существуют для следующего диапазона встречающихся в реальных системах параметров:

1. Произвольная пара ионов в цепочке от 3 до 20;

2. Колебательные частоты:

   - Радиальная $\omega_0 \in [2\pi \cdot 2\ \text{МГц}, 2\pi \cdot 5\ \text{МГц}]$;
   - Аксиальная $\omega_z \in [2\pi \cdot 200\ \text{кГц}, 2\pi \cdot 700\ \text{кГц}]$.

На рис. 3.4 показаны вычисленные для оптимальных импульсов отклонения фаз от своих расчётных значений $|\Delta\chi_{jk}^{\text{MS}}| = |\chi_{jk}^{\text{MS}} - (\chi_{jk}^{\text{MS}})_0|$ в зависимости от величины дрейфа радиальных колебательных частот в пределах 500 Гц.

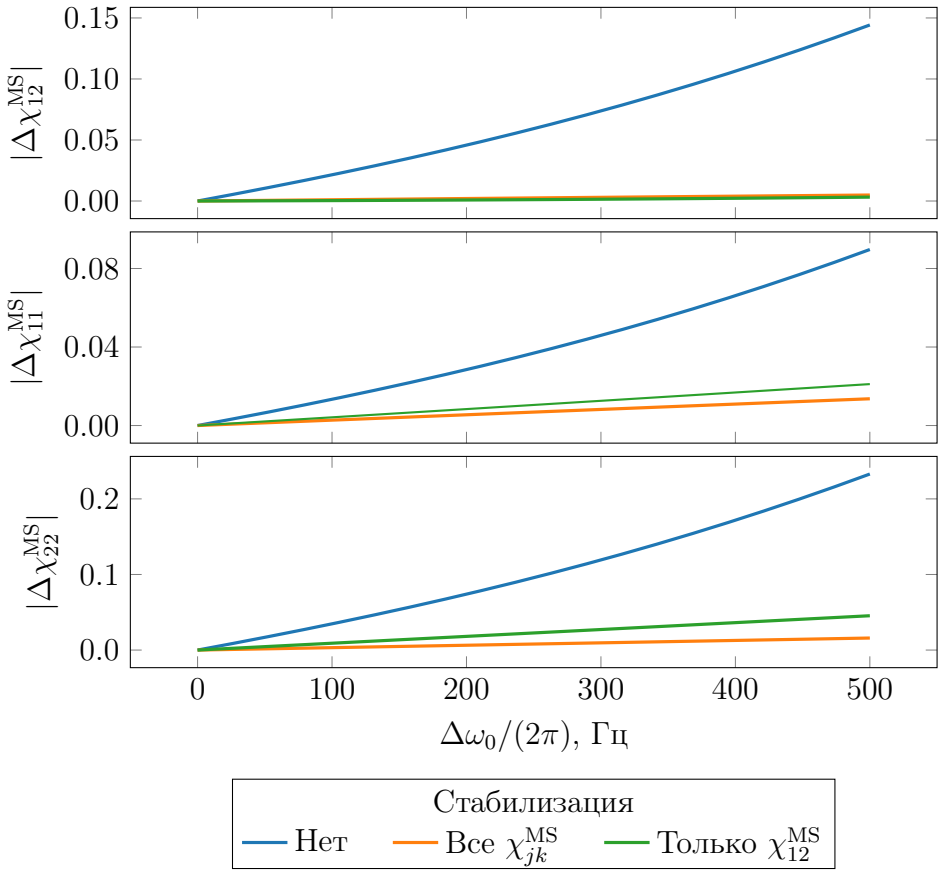


Рис. 3.4. Чувствительность фаз χ_{jk}^{MS} к дрейфам колебательной частоты ω_0

Гейт предполагался проводимым на радиальных модах. Использовались следующие параметры:

- Частоты $\omega_0 = 2\pi \cdot 3.7$ МГц и $\omega_z = 2\pi \cdot 400$ кГц;
- Номера ионов: 4 и 6 в цепочке из 10 ионов;
- Длительность гейта: 500 μs;
- Целевая фаза перепутывания: $\chi_0 = \pi/4$;

- Число Фурье-гармоник: $P = 512$;
- Порядок стабилизации методом моментов $K = 1$.

Как видно из зелёных кривых на рис. 3.4, стабилизация только фазы перепутывания позволяет добиться существенного подавления чувствительности к дрейфам частот: отклонение фаз от расчётного значения в диапазоне дрейфов до 500 Гц как минимум в 4 раза меньше, чем без стабилизации. Это соответствует уменьшению ошибки из-за нарушения условия целевой фазы минимум в 16 раз (см. формулу (2.96)).

Для оценки требовательности метода проекций в терминах амплитуды поля были вычислены максимальные значения $|\Omega(t)|$ во время гейта. Результаты приведены в табл. 3.1.

Стабилизируемые фазы χ_{jk}^{MS}	$\Omega_{\max}/(2\pi)$, кГц
Нет	121
χ_{12}^{MS}, χ_{11}^{MS}, χ_{22}^{MS}	431
χ_{12}^{MS}	322

Таблица 3.1. Максимальные амплитуды поля лазерного импульса для различных случаев стабилизации кудитных фаз MS гейта

Видно, что стабилизация одной фазы вместо трёх позволяет снизить требование по амплитуде поля в 1.3 раз, а по мощности, соответственно, в 1.8 раз.

3.4. Редукция кудитного LS гейта при помощи спинового эха

Оператор эволюции (3.19) содержит два множителя: нелокальный (содержащий нелокальные фазы)

$$\widehat{U}_{\mathrm{LS}}^{\mathrm{ent}} = \exp\left(i \sum_{s,s'=0}^{d-1} \phi_{ss'}^{\mathrm{LS}} |ss'\rangle\langle ss'| \right), \tag{3.32}$$

где $\phi_{ss'}^{\mathrm{LS}} = \chi_{12}^{\mathrm{LS}} \theta_s \theta_{s'}$, и локальный

$$\widehat{U}_{\mathrm{LS}}^{\mathrm{single}} = \exp\left(i \sum_{j} \left[\sum_{s=0}^{d-1} (\chi_{jj}^{\mathrm{LS}} \theta_s^2 + \phi_{j,s}^{\mathrm{AC}}) |s_j\rangle\langle s_j| \right] \right). \tag{3.33}$$

Как было указано ранее, большое количество нелокальных фаз в общем виде LS гейта вызывает ряд как вычислительных, так и технических трудностей. В данном разделе предложен

метод, сокращающий количество этих фаз, а также позволяющий представить кудитный LS гейт как гейт, перепутывающий два вложенных кубита. В связи с этим здесь рассмотрен только нелокальный множитель (3.32), влияние же метода на локальные фазы в (3.33) разобрано в конце раздела.

Предлагаемый метод основан на *спиновом эхе* — методе, активно применяющемся в LS гейтах [94; 103]. Его принцип заключается в разделении всего гейта на последовательность более коротких гейтов с меньшей фазой перепутывания, таких, что в сумме они обеспечивают целевую фазу. В конце каждого из этих коротких гейтов колебательное и электронное состояния ионной цепочки являются распутанными, т.е. выполняется условие замыкания траектории, в связи с чем эти гейты называются *циклами*. Между циклами затем вставляются однокубитные (однокудитные) операции, меняющие местами населённости двух адресованных уровней в каждом кубите (кудите). Например, для кубита такой операцией будет пи-импульс между уровнями $|0\rangle$ и $|1\rangle$. В результате этой смены населённостей паразитные сдвиги фазы, накопившиеся между адресованными уровнями во время текущего цикла из-за различных ошибок, скомпенсируются в следующем цикле. Такое восстановление относительной фазы похоже на эффект спинового эха в ядерной физике, чем и обусловлено название метода. Данный метод в своей изначальной постановке позволяет подавить остаточные систематические ошибки, а также медленные шумы в системе [103].

В контексте LS гейта на кудитах, спиновое эхо может быть применено для упрощения структуры оператора эволюции. Понять действие спинового эха можно, проследив за эволюцией конкретного двухкудитного базисного состояния $|ss'\rangle$. В первом цикле на это состояние накладывается фазовый сдвиг, определяемый величиной $\phi^{\mathrm{LS}}_{ss'}$. Затем импульс спинового эха переносит амплитуду вероятности этого состояния в некоторое другое $|pp'\rangle$, также базисное, с сохранением набранной фазы. В следующем цикле к набранной фазе добавится ещё одна, определяемая $\phi^{\mathrm{LS}}_{pp'}$ уже для нового состояния, и так далее (рис 3.5).

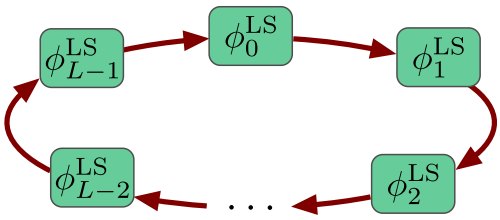


Рис. 3.5. Общее действие последовательности спинового эха длины L. Зелёные прямоугольники изображают базисные состояния, а красные стрелки — эхо-импульсы

В конце последовательности базисное состояние возвращается в изначальное, и его итоговая фаза после полного LS гейта будет суммой фаз тех базисных состояний, в которых оно успело

«побывать».

В данной работе ставилась задача создать такую последовательность эхо-импульсов, чтобы суммарная фаза, набранная $|ss'\rangle$, принимала как можно меньшее количество различных значений среди всех пар s, s'. В этом случае такой гейт будем называть *редуцированным*. Максимально редуцированный нетривиальный LS гейт содержит всего две фазы, которые обозначим φ_0 и φ_1. Для такого гейта введём соответственно разбиение полного гильбертова пространства состояний $\mathbf{H}$ на прямую сумму двух подпространств:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \oplus \mathbf{H}_1. \tag{3.34}$$

Эти подпространства являются линейными оболочками базисных векторов, получающих в результате одну из двух фаз:

$$\phi^{\mathrm{LS}}_{ss'} = \begin{cases} \varphi_0, & |ss'\rangle \in \mathbf{H}_0, \\ \varphi_1, & |ss'\rangle \in \mathbf{H}_1. \end{cases} \tag{3.35}$$

Очевидно, что фаза, полученная любой линейной комбинацией базисных векторов из одного подпространства, будет такой же. Заметим, что, несмотря на то, что фаз всего две, подходящим выбором $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_1$ и соответствующей ему последовательности эхо-импульсов можно добиться максимального перепутывания двух кудитов (в терминах ранга Шмидта) [89].

Далее использованы стандартные обозначения однокудитных гейтов на ионах [26; 38]. Первый тип таких гейтов осуществляет поворот состояния в линейной оболочке базисных состояний $|j\rangle$ и $|k\rangle$ на угол θ вокруг оси, расположенной под углом ϕ в экваториальной плоскости сферы Блоха (см. рис. 2.6):

$$\widehat{R}^{jk}_{\phi}(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma^{jk}_{\phi}\right). \tag{3.36}$$

Здесь σ^{jk}_{ϕ} есть кудитная матрица Паули в подпространстве, натянутом на $|j\rangle$ и $|k\rangle$. Для поворотов вокруг оси x используем следующие обозначения:

$$\widehat{R}^{jk}_{x}(\theta) := \widehat{R}^{jk}_{\phi=0}(\theta), \quad \widehat{R}^{jk}_{-x}(\theta) := \widehat{R}^{jk}_{\phi=\pi}(\theta). \tag{3.37}$$

Второй тип гейтов — вращение вокруг оси z. Поскольку такое вращение есть просто дополнительный фазовый сдвиг состояния $|j\rangle$, имеем

$$\widehat{R}^{j}_{z}(\theta) = \exp(i\theta|j\rangle\langle j|). \tag{3.38}$$

3.4.1. Последовательность типа (a) для LS гейта нулевого порядка

Начнём с анализа последовательности спинового эха, предложенной ранее в работе [89], которую назовём последовательностью типа (a). Она показана на рис. 3.6.

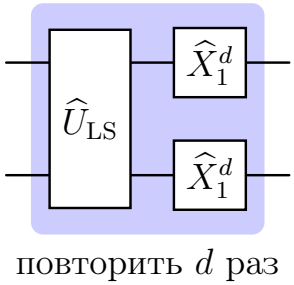


Рис. 3.6. Последовательность гейтов спинового эха типа (a)

Эта последовательность состоит из d циклов, каждый из которых имеет вид

$$(\widehat{X}_1^d \otimes \widehat{X}_1^d) \cdot \widehat{U}_{\mathrm{LS}}, \tag{3.39}$$

где $\widehat{X}_1^d$ — оператор, осуществляющий циклическую перестановку состояний кудита на единицу:

$$\begin{gathered} \widehat{X}_1^d = \prod_{j=1}^{d-1} \widehat{R}_x^{0j}(\pi), \\ \widehat{X}_1^d |j\rangle \propto |(j+1) \bmod d\rangle. \end{gathered} \tag{3.40}$$

Обратим внимание, что оператор $\widehat{X}_1^d$ составлен только из однокудитных гейтов между состоянием $|0\rangle$ и любым другим. Такое строение оператора обусловлено чисто физически тем, что в кудите, как правило, одно из состояний (в данном случае $|0\rangle$) заметно отделено от остальных, например, оптическим переходом, поэтому наиболее удобно реализовывать именно такие гейты. Заметим дополнительно, что в более общем виде оператор $\widehat{X}_m^d$, циклически сдвигающий состояния на m, может быть реализован также при помощи $O(d)$ нативных однокудитных гейтов (см. Приложение B). Для удобства определим следующие подпространства:

$$\mathbf{G}_l^d = \mathrm{span}(\{|ss'\rangle : (s - s') \bmod d = l\}). \tag{3.41}$$

Заметим, что оператор $\widehat{X}_m^d \otimes \widehat{X}_m^d$, действующий на $|ss'\rangle$, сохраняет величину $(s - s') \bmod d$. Следовательно, введённые подпространства инвариантны относительно эхо-импульсов. Более того, поскольку все циклы в последовательности идентичны, каждое базисное состояние $|ss'\rangle \in \mathbf{G}_l^d$ проводит одинаковое время во всех базисных состояниях $\mathbf{G}_l^d$, включая само себя. Отсюда получаем, что все состояния в $\mathbf{G}_l^d$ получат одну и ту же фазу, определяемую числом l:

$$\phi_{ss'}^{(a)} = \phi_l^{\mathrm{echo}}, \quad |ss'\rangle \in \mathbf{G}_l^d, \tag{3.42}$$

где $\phi_{ss'}^{(a)}$ есть итоговая фаза, набранная состоянием $|ss'\rangle$ после проведения последовательности типа (a). Фаза ϕ_l^{echo} равна

$$\phi_l^{\mathrm{echo}} = \sum_s \phi_{s,\,(s+l) \bmod d}^{\mathrm{LS}}. \tag{3.43}$$

Из соображений симметрии $\phi^{\mathrm{LS}}_{ss'} = \phi^{\mathrm{LS}}_{s's}$, поэтому $\phi^{\mathrm{echo}}_{d-l} = \phi^{\mathrm{echo}}_{l}$ для всех $l > 0$. Следовательно, число различных нелокальных фаз LS гейта типа (a) равно $\lfloor d/2 \rfloor + 1$ в общем случае. Этих фаз при $d > 3$ больше двух, поэтому такая последовательность не может максимально редуцировать LS гейт (см. рис. 3.7 в качестве примера для куквартов).

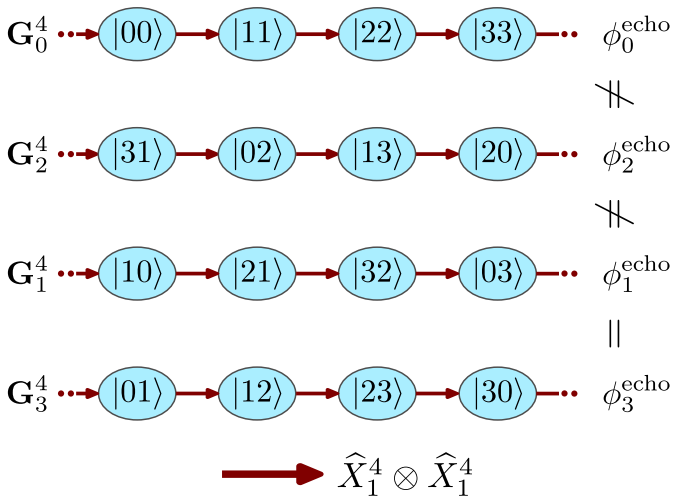


Рис. 3.7. Диаграмма, показывающая, какие фазы LS гейта набирают различные двухкудитные базисные состояния в последовательности типа (a) для куквартов ($d = 4$)

Однако, в случае LS гейта нулевого порядка, каковой имел место в оригинальной работе [89], только фаза ϕ^{LS}_{00} имеет ненулевую величину, остальными фазами можно пренебречь:

$$\phi_{ss'} = \begin{cases} \phi^{\mathrm{LS}}_{00}, & s = s' = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.44}$$

Отсюда, используя (3.43), получаем

$$\phi^{\mathrm{echo}}_{l} = \begin{cases} \phi^{\mathrm{LS}}_{00}, & l = 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.45}$$

Определяя $\mathbf{H}_0 = \mathbf{G}_0,\ \mathbf{H}_1 = \bigoplus_{l \neq 0} \mathbf{G}_l$, получаем требую редукцию гейта.

3.4.2. Последовательность типа (b) для LS гейта нулевого порядка

Последовательность типа (a) требует $d(d-1) = O(d^2)$ нативных однокудитных гейтов. Действительно, на каждый из d циклов приходится по $(d-1)$ поворотов, составляющих оператор $\widehat{X}_1^d$. Однако, это не минимально возможное число гейтов, способное реализовать эквивалентную схему спинового эха для LS гейта нулевого порядка. Для этого в настоящей работе предложена схема типа (b), имеющая следующее операторное представление:

$$\widehat{U}^{(b)}_{\mathrm{LS}} = \prod_{s=0}^{d-1} \Big(\widehat{R}^{0s}_{-x}(\pi) \otimes \widehat{R}^{0s}_{-x}(\pi) \Big) \widehat{U}^{(0)}_{\mathrm{LS}} \Big(\widehat{R}^{0s}_{x}(\pi) \otimes \widehat{R}^{0s}_{x}(\pi) \Big), \tag{3.46}$$

где $\widehat{R}_x^{00}(\pi) = \mathbb{I}$. Данная последовательность показана на рис. 3.8.

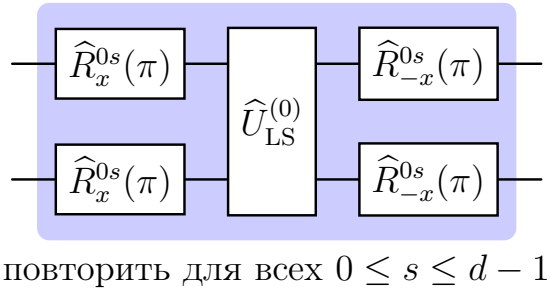


Рис. 3.8. Последовательность гейтов спинового эха типа (b)

Она также состоит из d циклов, но вместо циклической перестановки всех уровней проводится замена населённостей только s-го состояния и нулевого до и после очередного цикла LS гейта. В результате каждое состояние $|ss\rangle$ получает одинаковый сдвиг фазы, равный ϕ_{00}^{LS}. Очевидно, что такая последовательность будет полностью эквивалентна схеме типа (a) для LS гейта нулевого порядка, но количество однокудитных гейтов будет равным $2(d-1) = O(d)$.

3.4.3. Последовательность типа (c) в общем случае для чётных d

Если LS гейт не удаётся свести к гейту нулевого порядка, но размерность кудита d чётная, то, как будет показано далее, его можно редуцировать до двух фаз. Предлагаемая последовательность представляет собой $d/2$ повторений цепочки

$$\left(\widehat{X}_1^d \otimes \widehat{X}_{-1}^d\right) \widehat{U}_{\mathrm{LS}} \left(\left(\widehat{X}_1^d \otimes \widehat{X}_1^d\right) \widehat{U}_{\mathrm{LS}}\right)^{d-1}. \tag{3.47}$$

Данная схема приведена на рис. 3.9.

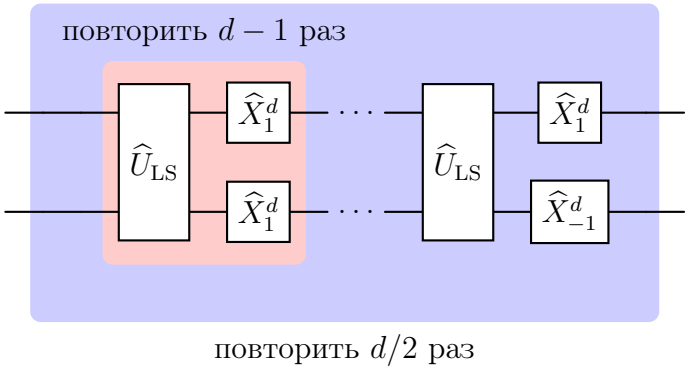


Рис. 3.9. Последовательность гейтов спинового эха типа (c) для чётных d

Искомые подпространства, отвечающие двум фазам редуцированного LS гейта, выглядят следующим образом:

$$\mathbf{H}_0 = \bigoplus_{l-\text{чётное}} \mathbf{G}_l^d, \quad \mathbf{H}_1 = \bigoplus_{l-\text{нечётное}} \mathbf{G}_l^d. \tag{3.48}$$

Чтобы понять принцип работы этой схемы, можно проанализировать пример для куквартов, показанный на рис. 3.10. В каждом из $d/2$ повторений первые $d-1$ подциклов являются

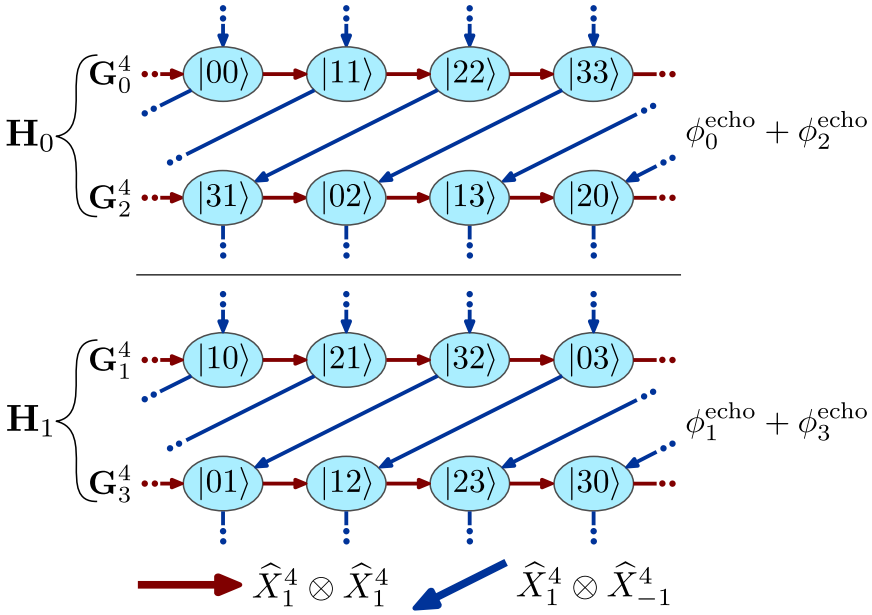


Рис. 3.10. Последовательность набора фазы двухкуквартными базисными состояниями ($d = 4$) во время LS гейта по схеме типа (c)

точной копией схема типа (a). Как было показано ранее, эта операция «сдвигает» каждое базисное состояние «вдоль» соответствующего инвариантного подпространства $\mathbf{G}_l^d$, причём количество таких подциклов такое, что покрывается весь базис этого подпространства без повторений. Последний оператор $\widehat{X}_1^d \otimes \widehat{X}_{-1}^d$ преобразует $\mathbf{G}_l^d$, «сдвигая» их в новое значение l:

$$\mathbf{G}_l^d \to \mathbf{G}_{(l+2) \bmod d}^d. \tag{3.49}$$

Отсюда видно, что чётность l от такого преобразования не меняется, поэтому состояние не выходит из соответствующего объемлющего подпространства $\mathbf{H}_0$ или $\mathbf{H}_1$. В конце гейта каждое базисное состояние обоих подпространств будет задействовано ровно один раз. Тогда фаза, набираемая произвольным состоянием из одного из подпространств, будет иметь два различных значения:

$$\phi^{(c)}(\psi) = \begin{cases} \sum\limits_{l-\text{чётное}} \phi_l^{\text{echo}}, & |\psi\rangle \in \mathbf{H}_0, \\ \sum\limits_{l-\text{нечётное}} \phi_l^{\text{echo}}, & |\psi\rangle \in \mathbf{H}_1, \end{cases} \tag{3.50}$$

где ϕ_l^{echo} определяется по формуле (3.43). Таким образом, предложенная схема действительно редуцирует LS гейт, причем размерности подпространств, относящихся к каждой из двух фаз, равны. Заметим, что эквивалентную схему можно реализовать путём замены операто-

ра $\widehat{X}_1^d \otimes \widehat{X}_{-1}^d$ на любой оператор из набора

$$\widehat{X}_{(n+2) \bmod d}^d \otimes \widehat{X}_n^d \tag{3.51}$$

для любого n. В данной работе был выбран конкретный вид оператора по причине относительной простоты циклического сдвига на единицу по сравнению со сдвигом на произвольный шаг (см. Приложение В), а также по причине симметричности операции для двух кудитов, что подавляет накопление ошибок на одном из них.

Схема типа (c) принципиально работает только при чётных d. Это связано с тем, что для нечётных d подпространства $\mathbf{H}_i$ не инвариантны относительно упомянутого выше «сдвига» (3.51). Частичную редукцию LS гейта, однако, можно провести похожим образом при помощи замены оператора «сдвига» на

$$\widehat{X}_{(n+p) \bmod d}^d \otimes \widehat{X}_n^d, \tag{3.52}$$

где p — наименьший простой делитель d (для чётных d этот делитель равен двойке). Тогда $\mathbf{G}_l^d$ можно объединить в p инвариантных подпространств $\mathbf{H}_i$ по остаткам от деления l на p, получая тем самым p различных фаз. Тем не менее, частный случай чётных d довольно полезен для вложенных кубитов, поскольку для такой вложенности необходимо, чтобы размерность кудита была степенью двойки. Более того, можно показать (см. Приложение Г), что LS гейт, реализованный предложенным способом, напрямую осуществляет операцию типа $\sigma_z \otimes \sigma_z$ между двумя вложенными кубитами (рис. 3.11), что является дополнительным преимуществом данного метода.

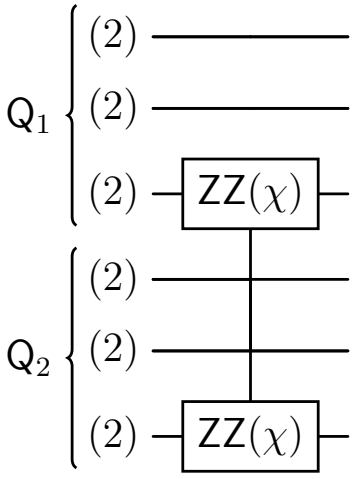


Рис. 3.11. Гейт типа $\mathsf{ZZ}(\chi) = \exp(i\chi\sigma_z \otimes \sigma_z)$ на последних кубитах, вложенных в куокт ($d = 8$), эквивалентный схеме спинового эха типа (c)

«Напрямую» означает, что для этой операции не нужны однокудитные гейты.

Полное число циклов LS гейта в предложенной схеме равно $d^2/2$, а однокудитных нативных гейтов — $d^3/2$. Несмотря на то, что этот метод гораздо более требователен по сравнению со схемой типа (a), которая требует всего $O(d)$ циклов LS гейта, не существует последовательности, редуцирующей число фаз до фиксированного количества, не зависящего от d, и обеспечивающей лучшее масштабирование числа гейтов с ростом d в общем случае. Причина этого в следующем. Редукция гейта может быть представлена как задача о распределении фаз $\phi_{ss'}^{\mathrm{LS}}$ (и соответствующих им базисных состояний) по некоторому фиксированному количеству «контейнеров», так что сумма фаз в каждом контейнере равна итоговой фазе, набираемой любым начальным состоянием из этого контейнера. Контейнеры в таком случае представляют собой подпространства $\mathbf{H}_i$. «Сырой» LS гейт характеризуется $O(d^2)$ различными фазами, а число контейнеров фиксированное, поэтому доля базисных состояний в каждом контейнере тоже фиксированная, следовательно, растёт квадратично с ростом d. Чтобы провести последовательность спинового эха, необходимо «перенести» произвольное базисное состояние через все другие состояния из того же контейнера. На каждую такую операцию нужно затратить как минимум один цикл LS гейта, поэтому общее число таких циклов растёт как $O(d^2)$. Этот аргумент дополнительно подтверждается работой [36], в которой показано, что для реализации CZ гейта между двумя вложенными кубитами количество двухкудитных гейтов растёт как $O(d^2)$. Что касается однокудитных гейтов, то любая циклическая перестановка кудитных уровней требует $O(d)$ нативных гейтов, а общее количество таких перестановок не может быть меньшим, чем число циклов LS гейта, то есть $O(d^2)$. Таким образом, получаем, что кубический рост числа нативных однокудитных гейтов с размерностью кудита также является оптимальной оценкой.

3.4.4. Компенсация локальных фаз спиновым эхом

Рассмотрим теперь локальный множитель в операторе эволюции (3.33) в контексте влияния на него схем спинового эха, рассмотренных выше. Нетрудно видеть, что в схемах типа (a) и типа (c) суммарные фазы $\chi_{jj}^{\mathrm{LS}}\theta_s^2$, набранные за всю последовательность, одинаковы для любых s, поскольку каждый ион проводит одинаковое время в каждом из своих базисных кудитных состояниях. Следовательно, эти фазы в указанных схемах полностью компенсируются и могут быть проигнорированы как глобальные. В схеме типа (b) для LS гейта нулевого порядка локальная фаза набирается только на состояние $|0\rangle$, в котором каждое другое однокудитное состояние проводит одно и то же время, соответственно, эти фазы также одинаковы для всех s. Аналогичный аргумент может быть приведён для сдвигов фаз, обусловленных штарковскими сдвигами $\phi_{j,s}^{\mathrm{AC}}$. Таким образом, находим, что описанные выше

схемы редукции LS гейта при помощи спинового эха **автоматически** компенсируют локальные фазы кудитов.

Основные результаты Главы 3

1. Проведёно теоретическое исследование физических эффектов, возникающих при расширении стандартных кубитных гейтов на ионах на кудитное пространство. Показано, что в кудитном MS гейте задействованные состояния получают дополнительную локальную фазу, зависящую от иона. В кудитном LS гейте в общем случае каждое двухкудитное состояние получает некоторую нелокальную фазу;

2. Предложен метод амплитудно-частотного шейпирования для компенсации и стабилизации локальных и нелокальной кудитных фаз MS гейта. Метод позволяет не только обратить локальные фазы в ноль, но и снизить чувствительность всех фаз к дрейфу колебательных частот минимум в 4 раза при максимальной величине дрейфа 500 Гц. Соответствующая ошибка MS гейта снижается при этом не менее чем на порядок;

3. Найден алгоритм редукции кудитного LS гейта общего вида до двух фаз методом спинового эха для чётных размерностей кудита. Данный алгоритм позволяет привести гейт к эквивалентному двухкубитному гейту типа $\sigma_z \otimes \sigma_z$ между вложенными кубитами внутри разных кудитов. Показано, что квадратичный рост сложности алгоритма с ростом размерности кудита является оптимальным в условиях максимальной редукции гейта.

Глава 4

Влияние фазового шума лазера на достоверность MS гейта

По построению MS гейта ясно, что его достоверность будет зависеть от фазовых флуктуаций лазерных полей. Эти поля, как правило, создаются одним общим лазерным источником, излучение которого затем расщепляется на несколько пучков и модулируется различными оптоэлектронными системами. Следовательно, флуктуации фазы, присутствующие в источнике, переносятся на все поля, фигурирующие в гейте. Это приводит к тому, что бихроматические компоненты будут обладать некоторым спектром $S_E(\omega)$, изображенным на рис. 4.1, в терминах спектральной плотности мощности (СПМ), которая имеет пик несущей на соответствующих частотах и связана, в свою очередь, со спектром фазового шума [79]. Этот спектр в общем случае будет перекрываться с ближайшими к центральному пику уровнями системы, вызывая паразитные переходы между этими состояниями. Этот процесс похож на переход между дискретными состояниями, вызванный малым возмущением с непрерывным спектром, вероятность которого вычисляется при помощи золотого правила Ферми.

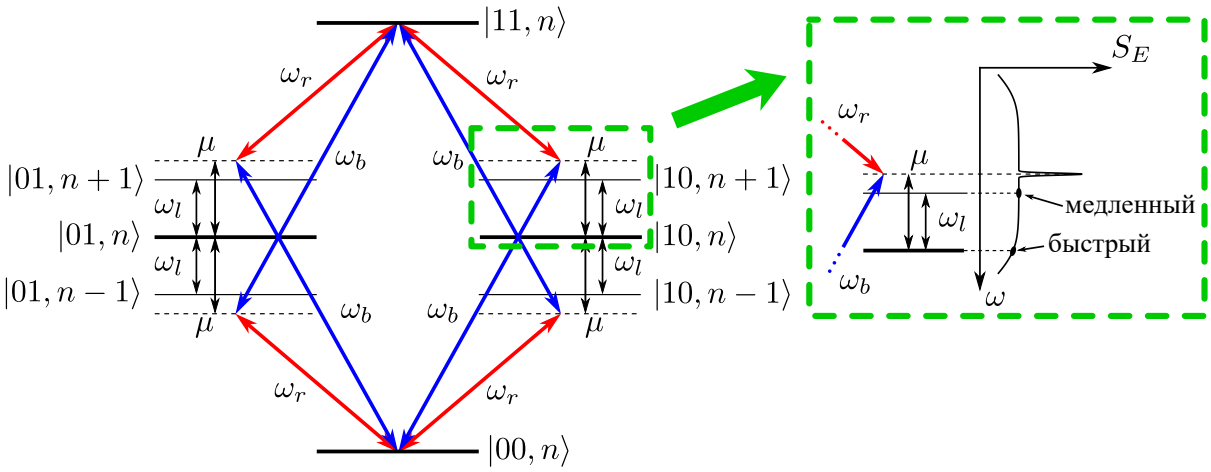


Рис. 4.1. Влияние фазового шума бихроматических компонент MS гейта на его достоверность. Паразитные переходы возникают из-за перекрытия СПМ лазерного поля $S_E(\omega)$ с ближайшими уровнями системы, обозначая «быструю» и «медленную» компоненты шума

Всего существует, как несложно увидеть из рис. 4.1, два значимых эффекта, влияющих на ошибку MS гейта определяющим образом. Первый из них — взаимодействие с основным кубитным переходом $|0,n\rangle \rightarrow |1,n\rangle$. Он связан с наличием спектральных компонент шума,

имеющих частоту Фурье вблизи отстройки μ. Поскольку эта отстройка близка к колебательным частотам (сотни кГц до единиц МГц), масштабы времени, на которых проявляется данный шум, порядка периода осцилляций ионов в ловушке (~ 1 мкс и меньше). На таких больших частотах основной источник шума — петля обратной связи для привязки лазерной частоты к некоторому стабильному реперу, например, резонатору Фабри-Перо [104–107]. На частотах, близких к ширине полосы привязки (которая лежит в том же диапазоне порядка МГц [40; 108]), шум свободного лазерного источника усиливается, а не уменьшается, вызывая появление так называемых сервопиков [40]. Эти сервопики, следовательно, имеют ощутимый эффект на достоверность MS гейта, если их спектральное перекрытие с переходом достаточно большое. Дополнительным источником высокочастотных шумов могут быть релаксационные осцилляции усиливающей среды. Для твердотельных лазеров пик этих осцилляций приходится на частоты несколько меньше 1 МГц [108–111], поэтому он тоже способен повлиять на ошибку гейта. В связи с малостью характерного времени описанного взаимодействия, назовём этот шум *быстрым*, в силу того, что время гейта обычно много больше периода колебаний ионов.

Второй эффект — взаимодействие с колебательными модами, вызывающее переходы $|0, n\rangle \to |1, n \pm 1\rangle$. Характерные спектральные компоненты такого взаимодействия порядка $\mu - \omega_l$ и лежат в области единиц-десятков кГц. Эта частота приблизительно равна обратному времени гейта, поэтому временной масштаб данного шума $0.1 \div 1$ мс. Кроме того, флуктуации лазерной частоты, которые медленнее упомянутого масштаба, но имеют большую величину ($\lesssim \mu - \omega_l$) тоже могут приводить к значительным ошибкам из-за близости бихроматических компонент к одному из колебательных переходов. Этот шум (который назовём *медленным* в противопоставление быстрому) может быть вызван акустическими или температурными эффектами. В случае лазера, стабилизированного по резонатору, эти эффекты связаны с механическими свойствами самого резонатора из-за большого усиления петли обратной связи на таких частотах. Механический шум имеет спектр $1/f$ [112; 113]. Еще один эффект, дающий такой же спектр — фликкер-шум, присутствующий в любых электрических приборах, в том числе в тех, что составляют части петли привязки лазера. Упомянутые шумы преобладают в частотной области $10 \div 100$ Гц, а выше этих частот основной вклад даёт белый шум частоты с постоянной СПМ [108; 114; 115].

В литературе довольно мало внимания уделено описанному шуму. Несмотря на существование различных методов уменьшения влияния фазового шума, таких как использование подпространств, устойчивых к декогеренции [116–120], а также техник динамической развязки [121–124], эти методы учитывают только декогеренцию самих состояний. Шумы

же, упомянутые выше, вызывают паразитные переходы, что перечисленные методы учесть не могут. Быстрый шум был проанализирован в работе [40], однако ошибка, индуцированная этим шумом, оценивалась из численных симуляций без аналитического вывода. Фазовые флуктуации лазера были также исследованы в работе [125], но анализ был ограничен одной геометрической конфигурацией лазерных пучков, а также рассматривались только флуктуации оптического пути, а не внутренние шумы самого источника.

Данная глава содержит общий теоретический анализ фазового шума лазера в контексте его влияния на ошибку MS гейта. Аналитически выведена ошибка, вызванная как быстрым, так и медленным шумами в двух часто используемых в эксперименте конфигурациях лазерных пучков. Результаты данной главы дополняют и обобщают результаты, полученные в упомянутых ранее опубликованных работах.

4.1. Гамильтониан MS гейта с фазовым лазерным шумом

4.1.1. Гамильтонианы для фазово-чувствительной и фазово-нечувствительной конфигураций

Обратимся к выражению (2.46) для общего вида гамильтониана MS гейта:

$$\widehat{H}_{\mathrm{MS}} = \sum_j \frac{\Omega_j}{2} \left\{ \left[\sigma_+^{(j)} \left(1 + i \sum_l \eta_{lj}^{(b)} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \right) e^{i(\phi_b^{(j)} - \mu t)} + \mathrm{h.c.} \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\sigma_+^{(j)} \left(1 + i \sum_l \eta_{lj}^{(r)} (\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}_l^\dagger e^{i\omega_l t}) \right) e^{i(\phi_r^{(j)} + \mu t)} + \mathrm{h.c.} \right] \right\}. \quad (4.1)$$

Две распространённые геометрии лазерных полей — так называемые *фазово-чувствительная* и *фазово-нечувствительная*. В фазово-чувствительной конфигурации бихроматические компоненты параллельны, а в фазово-нечувствительной — антипараллельные (рис. 4.2).

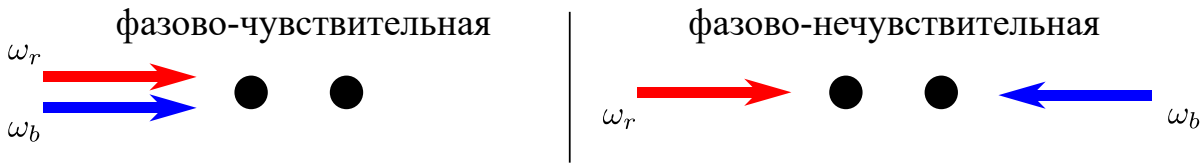


Рис. 4.2. Фазово-чувствительная и фазово-нечувствительная геометрии лазерных пучков. В этом примере возбуждаются радиальные колебания

Названия этих конфигураций происходят от различной чувствительности каждой из них к флуктуациям оптических путей [25]. От выбранной геометрии, соответственно, зависит, какой знак будут иметь коэффициенты Лэмба-Дике $\eta_{lj}^{(b)}$ и $\eta_{lj}^{(r)}$. В первом случае знаки совпадают

(аналогично случаю, рассмотренному в главе 2), во втором противоположны. В частности, для фазово-чувствительной геометрии:

$$\widehat{H}^{(\mathrm{S})}_{\mathrm{MS}}(t) \approx \sum_j \Omega_j \sigma^{(j)}_{\phi_\perp} \cos(\mu t + \phi^{(j)}_M) - \sum_{l,j} \eta_{lj}\, \Omega_j \sigma^{(j)}_{\phi} \cos(\mu t + \phi^{(j)}_M)(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}^\dagger_l e^{i\omega_l t}), \tag{4.2}$$

а для фазово-нечувствительной:

$$\widehat{H}^{(\mathrm{I})}_{\mathrm{MS}}(t) \approx \sum_j \Omega_j \sigma^{(j)}_{\phi_\perp} \cos(\mu t + \phi^{(j)}_M) + \sum_{l,j} \eta_{lj}\, \Omega_j \sigma^{(j)}_{\phi_\perp} \sin(\mu t + \phi^{(j)}_M)(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}^\dagger_l e^{i\omega_l t}), \tag{4.3}$$

где взяты обозначения главы 2.

4.1.2. Шумовые слагаемые в гамильтониане

В гамильтониане (4.1) фазовый шум проявляется во флуктуациях $\phi^{(j)}_r$ и $\phi^{(j)}_b$. Если обе бихроматические компоненты происходят от одного лазерного источника, что обычно имеет место [26; 58; 126; 127], то их флуктуации совпадают с флуктуациями последнего. Тогда, учитывая определения спиновой и колебательной фаз (2.49), получаем

$$\delta\phi^{(j)}_S(t) = \delta\phi(t), \quad \delta\phi^{(j)}_M(t) = 0, \tag{4.4}$$

где $\delta\phi(t)$ есть флуктуация фазы источника. Эти флуктуации, в свою очередь, приводят к шуму сигма-матриц, раскрытому до линейных членов:

$$\begin{aligned} \sigma^{(j)}_{\phi}(t) &\approx \sigma^{(j)}_{\phi} + \sigma^{(j)}_{\phi_\perp}\delta\phi(t), \\ \sigma^{(j)}_{\phi_\perp}(t) &\approx \sigma^{(j)}_{\phi_\perp} - \sigma^{(j)}_{\phi}\delta\phi(t). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Подставляя эти выражения в (4.2) и (4.3), имеем шумовые слагаемые в обеих конфигурациях: в фазово-чувствительной

$$\widehat{V}^{(\mathrm{S})}(t) = -\delta\phi(t) \left[\sum_j \Omega_j \sigma^{(j)}_{\phi} \cos(\mu t + \phi^{(j)}_M) + \right.$$
$$\left. + \sum_{l,j} \eta_{lj}\, \Omega_j \sigma^{(j)}_{\phi_\perp} \cos(\mu t + \phi^{(j)}_M)(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}^\dagger_l e^{i\omega_l t}) \right], \tag{4.6}$$

и в фазово-нечувствительной

$$\widehat{V}^{(\mathrm{I})}(t) = -\delta\phi(t) \left[\sum_j \Omega_j \sigma^{(j)}_{\phi} \cos(\mu t + \phi^{(j)}_M) + \right.$$
$$\left. + \sum_{l,j} \eta_{lj}\, \Omega_j \sigma^{(j)}_{\phi} \sin(\mu t + \phi^{(j)}_M)(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t} + \hat{a}^\dagger_l e^{i\omega_l t}) \right]. \tag{4.7}$$

Две отдельные суммы в квадратных скобках в каждом случае соответствуют быстрому и медленному шуму, в силу аргументов, изложенных ранее. Заметим, что спектральные диапазоны этих видов шума заметно отличаются, поэтому далее можно их рассматривать независимо.

4.2. Ошибка MS гейта, наведённая фазовым шумом

4.2.1. Средняя достоверность шумного гейта

Для общей кубитной системы, гамильтониан шумного гейта записывается в виде

$$\widehat{H}(t) = \widehat{H}_0(t) + \widehat{V}(t), \tag{4.8}$$

где $\widehat{H}_0(t)$ есть идеальный (без шума) гамильтониан, $\widehat{V}(t)$ есть шумовое возмущение. Полный оператор эволюции с учётом шума представляется в виде

$$\widehat{U} = \widehat{U}_0(1 - i\widehat{T}), \tag{4.9}$$

где $\widehat{U}_0$ — оператор эволюции с учётом только $\widehat{H}_0$ (идеальная эволюция), оператор $\widehat{T}$ — некоторая шумовая добавка. Достоверность шумного гейта для определённого начального состояния $|\psi_0\rangle$ равна

$$F = \left|\langle\psi_0|\widehat{U}_0^\dagger\widehat{U}|\psi_0\rangle\right|^2. \tag{4.10}$$

Ошибка гейта тогда вычисляется как [128]

$$\epsilon(\psi_0) = 1 - F = \langle\psi_0|\widehat{T}^\dagger\widehat{T}|\psi_0\rangle - \left|\langle\psi_0|\widehat{T}|\psi_0\rangle\right|^2. \tag{4.11}$$

Шумовая поправка $\widehat{T}$ может быть приближена первым членом ряда Дайсона:

$$\widehat{T} \approx \int_0^\tau \widehat{U}_0^\dagger(t')\widehat{V}(t')\widehat{U}_0(t')\,dt', \tag{4.12}$$

где τ — время гейта. В более общем случае имеет интерес достоверность, усреднённая по начальным состояниям. Эти состояния будем считать разделимыми на чистое кубитное состояние и колебательное, которое полагаем представимым в виде диагональной матрицы плотности (например, тепловое состояние):

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \otimes \sum_n p_n|n\rangle\langle n|, \tag{4.13}$$

где $|\psi\rangle$ — случайное двухкубитное состояние, $|n\rangle$ — фоковское базисное состояние в пространстве состояний всех мод, p_n — вероятность нахождения в этом состоянии. В данном случае n можно считать мультииндексом, пробегающим все моды и все возможные их числа заполнения. Можно показать (см. Приложение Д), что средняя ошибка вычисляется следующим образом:

$$\epsilon = \frac{1}{5}\sum_n p_n\left[\mathrm{Tr}(\widehat{T}^\dagger\widehat{T})\right]_{nn} - \frac{1}{20}\sum_{mn} p_n\left|(\mathrm{Tr}\,\widehat{T})_{mn}\right|^2, \tag{4.14}$$

Где $\widehat{T}_{mn} = \langle m|\widehat{T}|n\rangle$, и след берется по пространству двух кубитов.

Для вычисления идеального оператора эволюции, как было сделано в главе 2, можно пренебречь первой суммой, отвечающей за взаимодействие с основным кубитным переходом, в обоих гамильтонианах (4.2) и (4.3). Тогда идеальный оператор эволюции равен

$$\widehat{U}_0(t) = e^{i\chi(t)\sigma_\varphi^{(1)}\sigma_\varphi^{(2)}} \prod_l \mathcal{D}_l \left(\sum_j \alpha_{lj}(t)\sigma_\varphi^{(j)} \right), \tag{4.15}$$

где $\chi(t), \alpha_{lj}(t)$ — соответственно фаза перепутывания и параметры смещения, зависящие от времени, величиной φ обозначена либо ϕ, либо $\phi_\perp$, в зависимости от геометрии пучков, и $\mathcal{D}_l(\alpha)$ — введённый в главе 2 оператор смещения. Более удобный вид этот оператор принимает в базисе собственных состояний оператора $\sigma_\varphi^{(j)}$. Обозначим $|s_j\rangle$ собственный вектор с собственным значением $s_j = \pm 1$. В этом базисе оператор эволюции примет вид

$$\widehat{U}_0(t) = \sum_s |s\rangle\langle s|\, e^{i\chi(t)s_1 s_2} \prod_l \mathcal{D}_l \left(\sum_j \alpha_{lj}(t)s_j \right), \tag{4.16}$$

где $|s\rangle = |s_1 s_2\rangle$ — двухкубитное собственное состояние (ср. с выражением (2.70)). Оператор $\widehat{T}$ в этом представлении запишется с использованием (4.12) следующим образом:

$$\widehat{T} \approx \sum_{ss'} |s\rangle\langle s'| \int_0^\tau e^{-i\chi'(s_1 s_2 - s_1' s_2')} \prod_l \mathcal{D}_l \left(-\sum_j \alpha'_{lj} s_j \right) \widehat{V}'_{ss'} \prod_l \mathcal{D}_l \left(\sum_j \alpha'_{lj} s'_j \right) dt', \tag{4.17}$$

где $\alpha'_{lj} = \alpha_{lj}(t'), \chi' = \chi(t'), \widehat{V}' = \widehat{V}(t')$. Поскольку след не зависит от базиса, можно сразу применить (4.17) для нахождения необходимых величин в (4.14):

$$\operatorname{Tr}\widehat{T} \approx \sum_s \int_0^\tau \prod_l \mathcal{D}_l \left(-\sum_j \alpha'_{lj} s_j \right) \widehat{V}'_{ss} \prod_l \mathcal{D}_l \left(\sum_j \alpha'_{lj} s_j \right) dt', \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(\widehat{T}^\dagger \widehat{T}) \approx \sum_{ss'} \iint e^{i(\chi'-\chi'')(s_1 s_2 - s_1' s_2') - i\varepsilon(t',t'')} \prod_l \mathcal{D}_l \left(-\sum_j \alpha'_{lj} s'_j \right) \widehat{V}'_{s's} \times \\ \times \prod_l \mathcal{D}_l \left(\sum_j (\alpha'_{lj} - \alpha''_{lj}) s_j \right) \widehat{V}''_{ss'} \prod_l \mathcal{D}_l \left(\sum_j \alpha''_{lj} s'_j \right) dt' dt'', \end{aligned} \tag{4.19}$$

где

$$\varepsilon(t', t'') = \sum_{jj'} s_j s_{j'} \sum_l \operatorname{Im}(\alpha'_{lj} \alpha''^*_{lj'}). \tag{4.20}$$

Пределы в повторном интеграле (4.19) здесь и далее опущены для краткости.

4.2.2. Быстрый шум

Заметим, что шумовые слагаемые в (4.6) и (4.7), отвечающие за быстрый шум, коммутируют с операторами смещения $\mathcal{D}_l$, поскольку не содержат колебательных операторов. С

учётом этого выражения (4.18) и (4.19) будут существенно упрощены:

$$\operatorname{Tr}\widehat{T} \approx \sum_s \int_0^\tau \widehat{V}'_{ss}\,dt', \tag{4.21}$$

$$\operatorname{Tr}(\widehat{T}^\dagger\widehat{T}) \approx \sum_{ss'} \iint \exp[i(\chi'-\chi'')(s_1s_2 - s'_1s'_2) + i(\varepsilon'-\varepsilon'')(s_1s'_2 - s'_1s_2) - i\theta_{ss'}(t',t'')]\times \\ \times \widehat{V}'_{s's}\widehat{V}''_{ss'} \prod_l \mathcal{D}_l\left(\sum_j(\alpha'_{lj}-\alpha''_{lj})(s_j-s'_j)\right) dt'dt'', \tag{4.22}$$

где

$$\varepsilon' = \operatorname{Im}\sum_l \alpha'_{l1}\alpha'^*_{l2}, \quad \varepsilon'' = \operatorname{Im}\sum_l \alpha''_{l1}\alpha''^*_{l2}, \\ \theta_{ss'}(t',t'') = \sum_{jj'}(s_j - s'_j)(s_{j'} - s'_{j'}) \operatorname{Im}\sum_l \alpha'_{lj}\alpha''^*_{lj'}. \tag{4.23}$$

Фазово-чувствительная конфигурация

В этой геометрии имеем

$$\widehat{V}^{(\mathrm{S})}_{ss'} = -\delta\phi(t)\delta_{ss'}\sum_j \Omega_j s_j \cos(\mu t + \phi^{(j)}_M). \tag{4.24}$$

Заметим, что

$$\sum_s \widehat{V}^{(\mathrm{S})}_{ss} = -\delta\phi(t)\sum_j \Omega_j \cos(\mu t + \phi^{(j)}_M)\sum_s s_j = 0, \tag{4.25}$$

поэтому $\operatorname{Tr}\widehat{T} = 0$. Для $\operatorname{Tr}(\widehat{T}^\dagger\widehat{T})$ получаем

$$\operatorname{Tr}(\widehat{T}^\dagger\widehat{T}) = \sum_s \iint \delta\phi(t')\delta\phi(t'')\sum_{jj'} s_j s_{j'}\Omega'_j\Omega''_{j'}\cos(\mu t' + \phi^{(j)}_M)\cos(\mu t'' + \phi^{(j')}_M)\,dt'dt''. \tag{4.26}$$

Заметим также, что

$$\sum_s s_j s_{j'} = 4\delta_{jj'}. \tag{4.27}$$

В предположении, что шум $\delta\phi(t)$ стационарный, используем теорему Винера-Хинчина:

$$\langle\delta\phi(t')\delta\phi(t'')\rangle = \int_0^{+\infty} S^{(1)}_\phi(f)\cos(2\pi f(t'-t''))\,df, \tag{4.28}$$

где $S^{(1)}_\phi(f)$ — односторонняя СПМ фазового шума, и угловые скобки обозначают усреднение по траекториям. Подставляя (4.27) и (4.28) в (4.14), получаем выражение для усреднённой по шумам ошибки:

$$\epsilon^{(\mathrm{S})}_{\mathrm{fast}} = \int_0^{+\infty} S^{(1)}_\phi(f)\mathcal{F}^{(\mathrm{S})}_{\mathrm{fast}}(f)\,df, \tag{4.29}$$

где введена так называемая *фильтр-функция* $\mathcal{F}^{(\mathrm{S})}(f)$ (в Гц/Гц):

$$\mathcal{F}^{(\mathrm{S})}_{\mathrm{fast}}(f) = \frac{4}{5}\sum_j \left| \int_0^\tau e^{2\pi i f t'} \Omega'_j \cos(\mu t' + \phi_M^{(j)})\, dt' \right|^2 . \tag{4.30}$$

В простейшем случае постоянной мощности ($\Omega_j = \mathrm{const}$) интеграл может быть вычислен аналитически. Из вида фильтр-функции $\mathcal{F}^{(\mathrm{S})}(f)$ ясно, что она будет иметь пик на частоте $\mu/2\pi$. В окрестности этого пика, в предположении $\mu\tau \gg 1$, а также полагая одинаковую мощность на обоих ионах: $\Omega_j = \Omega = \mathrm{const}$, приходим к формуле для фильтр-функции:

$$\mathcal{F}^{(\mathrm{S})}_{\mathrm{fast}}(f) = \frac{2(\Omega\tau)^2}{5}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{(2\pi f - \mu)\tau}{2}\right). \tag{4.31}$$

Этот результат может быть обобщен для более ясного понимания его физического смысла. Если ввести общую функцию импульса $g_j(t)$, как это было сделано в главе 3, то в выражении для фильтр-функции необходимо сделать замену

$$\Omega_j(t)\cos(\mu t + \phi_M^{(j)}) \to g_j(t). \tag{4.32}$$

В этом случае видно, что формула (4.30), с точностью до суммирования по ионам и постоянного множителя, равна квадрату модуля преобразования Фурье функции импульса, ограниченного интервалом времени τ. Для постоянной амплитуды (прямоугольного импульса), преобразование Фурье, как известно, представляет собой функцию sinc с центром на частоте импульса $\mu/(2\pi)$, что и показано формулой (4.31). В чуть более сложном случае амплитудной модуляции [33; 126] фильтр-функция будет иметь пик на «несущей» частоте импульса $\mu/(2\pi)$, а боковые Фурье-компоненты будут расположены вблизи этого пика на расстояниях порядка $\sim 1/\tau$ от него. Дополнительно, эти компоненты будут «размазаны» на величину приблизительно $1/\tau$ из-за ограничения времени интегрирования временем гейта τ. Для амплитудно-частотной модуляции также можно ожидать, что фильтр-функция будет локализована вблизи колебательного спектра, и Фурье-компоненты импульса таким же образом будут «размазаны» на ширину $\sim 1/\tau$.

Фазово-нечувствительная конфигурация

Для этой конфигурации необходимо вычислить матричные элементы $\sigma_\phi^{(j)}$ между собственными состояниями $\sigma_{\phi_\perp}^{(1)}\sigma_{\phi_\perp}^{(2)}$:

$$(\sigma_\phi^{(j)})_{ss'} = i s'_j\, \delta_{s_k,s'_k}\delta_{s_j,-s'_j} = -i s_j\, \delta_{s_k,s'_k}\delta_{s_j,-s'_j}, \tag{4.33}$$

где k обозначает индекс другого иона (не j-го). Это означает, что $\widehat{V}_{ss} = 0$, поэтому $\operatorname{Tr}\widehat{T} = 0$. Кроме того, можно упростить (4.22), используя

$$\begin{aligned}\widehat{V}'_{s's}\widehat{V}''_{ss'} \propto \sum_{jj'} \Omega'_j\Omega''_{j'}\cos(\mu t' + \phi_M^{(j)})\cos(\mu t'' + \phi_M^{(j')})s_j s_{j'}\delta_{s_k,s'_k}\delta_{s_j,-s'_j}\delta_{s_{k'},s'_{k'}}\delta_{s_{j'},-s'_{j'}} = \\ = \sum_{jj'} \Omega'_j\Omega''_{j'}\cos(\mu t' + \phi_M^{(j)})\cos(\mu t'' + \phi_M^{(j')})s_j s_{j'}\delta_{jj'}\delta_{s_k,s'_k}\delta_{s_j,-s'_j} = \\ = \sum_{j} \Omega'_j\Omega''_{j}\cos(\mu t' + \phi_M^{(j)})\cos(\mu t'' + \phi_M^{(j)})\delta_{s_k,s'_k}\delta_{s_j,-s'_j}. \quad (4.34)\end{aligned}$$

Это выражение означает, что фиксация s и j фиксирует s', поэтому сумма по s' в (4.22) может быть опущена. Используя выражение выше, можно получить (для фиксированных s, j)

$$\begin{gathered}s_1 s_2 - s'_1 s'_2 = 2s_1 s_2, \quad s_1 s'_2 - s'_1 s_2 = 2s_1 s'_2, \\ \theta_{ss'} = 4\operatorname{Im}\sum_l \alpha'_{lj}\alpha''^{*}_{lj}, \\ \sum_j (\alpha'_{lj} - \alpha''_{lj})(s_j - s'_j) = 2s_j(\alpha'_{lj} - \alpha''_{lj}).\end{gathered} \quad (4.35)$$

Подставляя в (4.22), имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\widehat{T}^\dagger\widehat{T}) \approx \sum_{s,j}\iint \exp\left[2is_1s_2(\chi' - \chi'') + 2is_1s'_2(\varepsilon' - \varepsilon'') - 4i\operatorname{Im}\sum_l \alpha'_{lj}\alpha''^{*}_{lj}\right]\times \\ \times \delta\phi(t')\delta\phi(t'')\Omega'_j\Omega''_j\cos(\mu t' + \phi_M^{(j)})\cos(\mu t'' + \phi_M^{(j)})\prod_l \mathcal{D}_l\left(2s_j(\alpha'_{lj} - \alpha''_{lj})\right)\, dt'dt'', \quad (4.36)\end{aligned}$$

где s' предполагается функцией s, j, задаваемой соотношением

$$s'_j(s,j) = -s_j, \quad s'_k(s,j) = s_k. \quad (4.37)$$

Аргументы (s, j) этой функции опущены для краткости. Для получения ошибки гейта необходимо вычислить сумму по колебательным состояниям в (4.14)

$$\sum_{n_l=0}^{\infty} p_{n_l}\langle n_l|\mathcal{D}_l(\alpha))|n_l\rangle. \quad (4.38)$$

Для теплового колебательного состояния эта сумма была получена в главе 2 (см. формулу (2.86)). Снова используя теорему Винера-Хинчина, приходим к выражению, аналогичному (4.29), но с другой фильтр-функцией:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(\mathrm{I})}_{\mathrm{fast}}(f) = \frac{1}{5}\sum_{s,j}\iint \exp\left[2is_1s_2(\chi' - \chi'') + 2is_1s'_2(\varepsilon' - \varepsilon'') - 4i\operatorname{Im}\sum_l \alpha'_{lj}\alpha''^{*}_{lj} - \right. \\ \left. -4\sum_l\left(\overline{n}_l + \frac{1}{2}\right)|\alpha'_{lj} - \alpha''_{lj}|^2\right]\cos(2\pi f(t' - t''))\Omega'_j\Omega''_j\cos(\mu t' + \phi_M^{(j)})\cos(\mu t'' + \phi_M^{(j)})\, dt'dt''. \quad (4.39)\end{aligned}$$

Для этого интеграла не существует замкнутой формы, поскольку он зависит от динамики самого гейта, заданной параметрами смещения $\alpha_{lj}(t)$ и фазой $\chi(t)$. Однако, качественный анализ вида фильтр-функции возможен. Заметим, что фильтр-функция действительная, поэтому интеграл представляется в виде

$$\iint h(t',t'')\cos(2\pi f(t'-t''))g_j(t')g_j(t'')\,dt'dt'' = \\ = \operatorname{Re}\iint h(t',t'')e^{2\pi i f(t'-t'')}g_j(t')g_j(t'')\,dt'dt'', \quad (4.40)$$

где

$$h(t',t'') = \cos\left[2s_1s_2(\chi'-\chi'') + 2s_1s_2'(\varepsilon'-\varepsilon'') - 4\operatorname{Im}\sum_l \alpha_{lj}'\alpha_{lj}''^*\right]\times \\ \times \exp\left[-4\sum_l\left(\overline{n}_l+\frac{1}{2}\right)|\alpha_{lj}'-\alpha_{lj}''|^2\right], \quad (4.41)$$

и взята общая функция шейпированного импульса $g_j(t)$. Функция h непрерывна и симметрична: $h(t',t'') = h(t'',t')$, следовательно, внутри области интегрирования она может быть разложена на собственные функции по теореме Гильберта-Шмидта:

$$h(t',t'') = \sum_n c_n\varphi_n(t')\varphi_n(t''), \quad (4.42)$$

где c_n и $\varphi_n(t)$ действительные. Тогда интеграл превратится в

$$\sum_n c_n \operatorname{Re}\int_0^\tau e^{2\pi i f t'}\varphi_n(t')g_j(t')\,dt' \int_0^\tau e^{-2\pi i f t''}\varphi_n(t'')g_j(t'')\,dt'' = \\ = \sum_n c_n\left|\int_0^\tau e^{2\pi i f t}\varphi_n(t)g_j(t)\,dt\right|^2. \quad (4.43)$$

Это выражение имеет такой же вид квадрата модуля ограниченного временем τ преобразования Фурье, как и в фазово-чувствительной геометрии. Функции $\varphi_n(t)$ зависят от $\alpha_{lj}(t), \chi(t)$, которые, в свою очередь, меняются с характерным временем порядка времени гейта. Значит, Фурье-компоненты $\varphi_n(t)$ будут локализованы в интервале примерно $1/\tau$, а «несущая» частота преобразования Фурье будет близка к колебательному спектру, поскольку вблизи этих частот расположены Фурье-компоненты функции импульса $g_j(t)$. Таким образом, вид фильтр-функции для данной геометрии пучков будет похожей: локализованной около частоты отстройки μ и обладающей шириной $\sim 1/\tau$.

Сравнение фильтр-функций обеих конфигураций

Основываясь на качественных рассуждениях, приведённых выше, положения пиков фильтр-функций в обеих конфигурациях не должны сильно отличаться. Это предположение подтверждается численно (рис. 4.3).

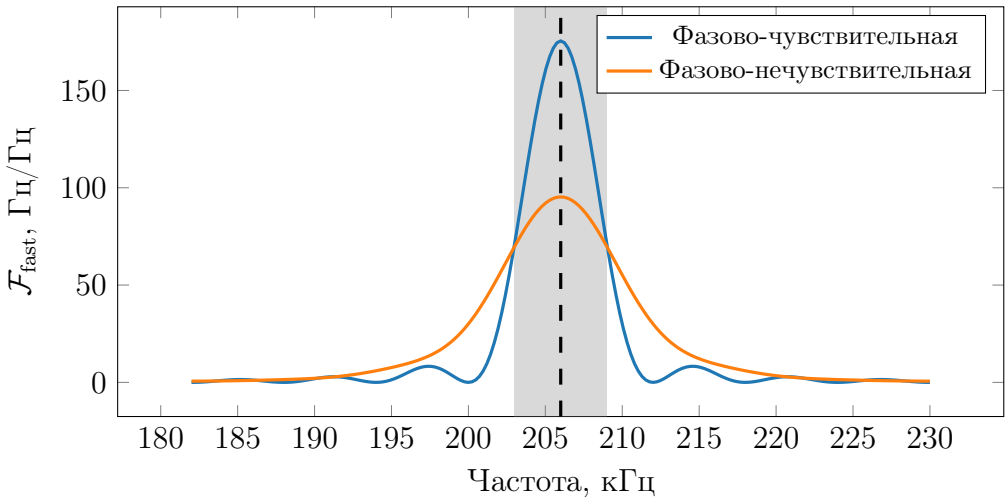


Рис. 4.3. Фильтр-функции для быстрого шума в обеих геометриях лазерных пучков. Пунктирная линия обозначает величину $\mu/2\pi$. Ширина выделенной области равна $1/\tau$

Для расчёта фильтр-функций были взяты те же параметры, что и для симуляций в работе [40]:

- Одна колебательная COM-мода $\omega_l = 2\pi \cdot 200$ кГц;
- Параметр Лэмба-Дике для этой моды $\eta = 0.15$;
- Частота Раби (одинаковая для обоих ионов) $\Omega = 2\pi \cdot 20$ кГц;
- Колебательные фазы $\phi_M^{(j)} = 0$;
- Целевая фаза перепутывания $\chi_0 = \pi/4$;
- Время гейта $\tau = \dfrac{2\pi}{\Omega\eta}\sqrt{\dfrac{\chi_0}{\pi}} \approx 167$ мкс;
- Отстройка $\mu = \omega_l + 2\pi/\tau = 2\pi \cdot 206$ кГц.

Видно, что положения пиков обеих функций совпадают с отстройкой, а ширины порядка обратного времени гейта. Для фазово-нечувствительной конфигурации фильтр-функция немного шире, что может быть связано с наличием дополнительных Фурье-компонент, расположенных рядом с μ.

Полная ошибка из-за быстрого шума

Можно получить оценку полной ошибки гейта для обеих конфигураций, полагая, что СПМ фазового шума меняется медленно по сравнению с фильтр-функцией. В этом слу-

чае $S_\phi^{(1)}(f)$ может быть вынесена за интеграл:

$$\epsilon \approx S_\phi^{(1)}(f_0) \int_0^{+\infty} \mathcal{F}(f)\, df, \tag{4.44}$$

где f_0 — положение пика $\mathcal{F}(f)$. Для фазово-чувствительной конфигурации, в предположении $\mu\tau \gg 1$:

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_{\text{fast}}^{(\text{S})}(f)\, df \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_{\text{fast}}^{(\text{S})}(f)\, df = \frac{2}{5}\Omega^2\tau, \tag{4.45}$$

следовательно,

$$\epsilon_{\text{fast}}^{(\text{S})} = \frac{4}{5} S_\phi(\mu/2\pi)\Omega^2\tau, \tag{4.46}$$

где $S_\phi(f) = S_\phi^{(1)}(f)/2$ — двухсторонняя СПМ фазового шума. Для фазово-нечувствительной геометрии изменим порядок интегрирования (интегрируя сначала по частоте) и используем тождество

$$\int_0^{+\infty} \cos(2\pi f(t' - t''))\, df = \frac{1}{2}\delta(t' - t''). \tag{4.47}$$

Полагая постоянную мощность лазера, идентичную для обоих ионов, получим

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{F}_{\text{fast}}^{(\text{I})}(f)\, df = \frac{4}{5}\Omega^2 \int_0^{\tau} \cos^2(\mu t + \phi_M^{(j)})\, dt. \tag{4.48}$$

В силу предположения $\mu\tau \gg 1$ квадрат косинуса может быть приближен своим средним значением $1/2$. Для ошибки гейта тогда имеем

$$\epsilon_{\text{fast}}^{(\text{I})} = \frac{4}{5} S_\phi(\mu/2\pi)\Omega^2\tau, \tag{4.49}$$

что в точности совпадает с выражением (4.46) для фазово-чувствительной конфигурации. Следовательно, для обеих геометрий полная ошибка гейта, связанная с быстрым шумом, одинакова. В общем случае амплитудно-частотной модуляции импульса:

$$\epsilon_{\text{fast}}^{(\text{S})} = \epsilon_{\text{fast}}^{(\text{I})} \approx \frac{4}{5} S_\phi(\mu/2\pi) \int_0^{\tau} \Omega^2(t)\, dt, \tag{4.50}$$

где $\Omega(t)$ — огибающая $g(t)$ (идентичная для обоих ионов). Отсюда находим, что выражения (4.46) и (4.49) применимы и в этом случае, с тем отличием, что Ω должна пониматься как среднеквадратичная частота Раби за время гейта.

Полезно сравнить полученную формулу с результатом работы [40]. В этой статье авторы привели эмпирическую формулу для вычисления ошибки:

$$1 - F = T \cdot \text{RPSD}(f_l), \tag{4.51}$$

где T — время гейта, f_l — колебательная частота (в упомянутой работе рассматривалась одна мода), а RPSD(f) называется СПМ Раби (Rabi Power Spectral Density), что по определению равно СПМ электрического поля лазера, нормированной таким образом, что интеграл от этой величины по всем частотам равен квадрату частоты Раби Ω^2. Для сравнения (4.46) (или (4.49)) с приведённой формулой заметим несколько вещей. Во-первых, начальное состояние в работе [40] было выбрано $|00\rangle$. Можно показать (см. формулу (2.96)), что в этом случае множитель 4/5 в (4.46) и (4.49) станет равным единице. Во-вторых, отстройка μ предполагается близкой к колебательной частоте, поэтому $S_\phi(f_l) \approx S_\phi(\mu/2\pi)$. В-третьих, для малых фазовых флуктуаций СПМ поля лазера на частотах, далеких от центрального пика несущей, пропорциональна СПМ фазового шума [79]. Следовательно, $S_\phi(f)\Omega^2 \approx \mathrm{RPSD}(f)$, согласно определению RPSD(f). Суммируя вышесказанное, приходим к выводу, что результаты, полученные здесь, находятся в согласии с численными симуляциями, проведёнными в работе [40].

Шумовые слагаемые в (4.6) и (4.7), связанные с быстрым шумом, произошли из первых слагаемых в исходных гамильтонианах (4.2) and (4.3), которые игнорировались при оценке ошибки, при этом сами шумовые поправки были оставлены. Несмотря на кажущуюся некорректность такого подхода, ошибки, связанные с каждым из этих эффектов, не влияют друг на друга и могут быть вычислены независимо. Пусть $\widehat{R}$ — поправка к оператору эволюции, возникающая вследствие учёта первого слагаемого в исходном гамильтониане. Тогда достоверность гейта для начального состояния $|\psi_0\rangle$ равна

$$F = \left|\langle\psi_0|(1 - i\widehat{R})(1 - i\widehat{T})|\psi_0\rangle\right|^2. \tag{4.52}$$

Ошибка тогда выразится как

$$\begin{aligned}\epsilon(\psi_0) = \langle\psi_0|\widehat{R}^\dagger\widehat{R}|\psi_0\rangle - \left|\langle\psi_0|\widehat{R}|\psi_0\rangle\right|^2 + \langle\psi_0|\widehat{T}^\dagger\widehat{T}|\psi_0\rangle - \left|\langle\psi_0|\widehat{T}|\psi_0\rangle\right|^2 + \\ + \langle\psi_0|(\widehat{R}\widehat{T} + \widehat{T}^\dagger\widehat{R}^\dagger)|\psi_0\rangle - \Big(\langle\psi_0|\widehat{T}|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\widehat{R}^\dagger|\psi_0\rangle + \langle\psi_0|\widehat{T}^\dagger|\psi_0\rangle\langle\psi_0|\widehat{R}|\psi_0\rangle\Big)\end{aligned} \tag{4.53}$$

с точностью до квадратичных слагаемых по $\widehat{T}, \widehat{R}$. Перекрёстные слагаемые в этой формуле линейны по $\widehat{T}$, а значит, и по фазовым флуктуациям. Следовательно, при усреднении по шумовым траекториям они сократятся, оставив только отдельные ошибки от каждого из источников, вычисляемые по формуле (4.11). Заметим, что приведённые рассуждения справедливы не только для сочетания случайной и систематической ошибок, но и для двух нескоррелированных случайных ошибок. Систематическая ошибка может быть вызвана также нарушением условия замыкания траекторий и целевой фазы, и ошибка (2.96), вызванная этим источником, останется неизменной при наличии шума (в главном порядке).

4.2.3. Медленный шум

Сравним гамильтонианы медленного шума для обеих конфигураций пучков. Для фазово-чувствительной:

$$\begin{aligned}\widehat{H}^{(\mathrm{S})}_{\mathrm{MS}}(t) &\approx -\sum_{l,j}\eta_{lj}\,\Omega_j\sigma^{(j)}_{\phi}\cos(\mu t+\phi^{(j)}_M)(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t}+\hat{a}^\dagger_l e^{i\omega_l t}),\\ \widehat{V}^{(\mathrm{S})}(t) &= -\delta\phi(t)\sum_{l,j}\eta_{lj}\,\Omega_j\sigma^{(j)}_{\phi_\perp}\cos(\mu t+\phi^{(j)}_M)(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t}+\hat{a}^\dagger_l e^{i\omega_l t}).\end{aligned} \tag{4.54}$$

Для фазово-нечувствительной:

$$\begin{aligned}\widehat{H}^{(\mathrm{I})}_{\mathrm{MS}}(t) &\approx \sum_{l,j}\eta_{lj}\,\Omega_j\sigma^{(j)}_{\phi_\perp}\sin(\mu t+\phi^{(j)}_M)(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t}+\hat{a}^\dagger_l e^{i\omega_l t}),\\ \widehat{V}^{(\mathrm{I})}(t) &= -\delta\phi(t)\sum_{l,j}\eta_{lj}\,\Omega_j\sigma^{(j)}_{\phi}\sin(\mu t+\phi^{(j)}_M)(\hat{a}_l e^{-i\omega_l t}+\hat{a}^\dagger_l e^{i\omega_l t}).\end{aligned} \tag{4.55}$$

Видно, что, с точностью до несущественной замены знака и до переопределения фаз $\phi^{(j)}_M, \phi^{(j)}_S$, выражения для обеих конфигураций одинаковые. Следовательно, можно рассмотреть только одну из них и соответствующим образом переопределить параметры для другой. В дальнейшем будем считать, что конфигурация фазово-зависимая, и использовать формулы (4.54), опустив индекс (S).

Вращающаяся система отсчёта

Для удобства дальнейшего анализа применим к системе унитарное преобразование следующего вида:

$$\widehat{U}_R(t) = \exp\left(-i\frac{\delta\phi(t)}{2}\sum_j \sigma^{(j)}_z\right). \tag{4.56}$$

В новой системе отсчёта, заданной $\widehat{U}_R$, полный эффективный гамильтониан будет равен

$$\widehat{H}_R = \widehat{U}_R\widehat{H}_{\mathrm{MS}}\widehat{U}^\dagger_R + \widehat{U}_R\widehat{V}\widehat{U}^\dagger_R + i\frac{\partial\widehat{U}_R}{\partial t}\widehat{U}^\dagger_R. \tag{4.57}$$

Чтобы понять, почему данное преобразование упрощает задачу, запишем (4.54) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{\mathrm{MS}}(t) &= \sum_j \sigma^{(j)}_{\phi}\widehat{W}_j(t),\\ \widehat{V}(t) &= \delta\phi(t)\sum_j \sigma^{(j)}_{\phi_\perp}\widehat{W}_j(t),\end{aligned} \tag{4.58}$$

где $\widehat{W}_j(t)$ есть колебательная часть оператора, одинаковая в обоих членах. Используя коммутационные соотношения между матрицами Паули, можно показать, что

$$\begin{aligned}\widehat{U}_R\sigma^{(j)}_{\phi}\widehat{U}^\dagger_R &= \sigma^{(j)}_{\phi}\cos\delta\phi - \sigma^{(j)}_{\phi_\perp}\sin\delta\phi \approx \sigma^{(j)}_{\phi} - \sigma^{(j)}_{\phi_\perp}\delta\phi,\\ \widehat{U}_R\sigma^{(j)}_{\phi_\perp}\widehat{U}^\dagger_R &= \sigma^{(j)}_{\phi_\perp}\cos\delta\phi + \sigma^{(j)}_{\phi}\sin\delta\phi \approx \sigma^{(j)}_{\phi_\perp} + \sigma^{(j)}_{\phi}\delta\phi\end{aligned} \tag{4.59}$$

с точностью до линейных членов по $\delta\phi$. Отсюда, пренебрегая $(\delta\phi)^2$, получаем первые два слагаемых в (4.57):

$$\widehat{U}_R\widehat{H}_{\text{MS}}\widehat{U}_R^\dagger + \widehat{U}_R\widehat{V}\widehat{U}_R^\dagger \approx \sum_j(\sigma_\phi^{(j)} - \sigma_{\phi_\perp}^{(j)}\delta\phi(t))\widehat{W}_j(t) + \\ + \delta\phi(t)\sum_j(\sigma_{\phi_\perp}^{(j)} + \sigma_\phi^{(j)}\delta\phi(t))\widehat{W}_j(t) \approx \sum_j \sigma_\phi^{(j)}\widehat{W}_j(t) = \widehat{H}_{\text{MS}}(t). \quad (4.60)$$

Последнее слагаемое в (4.57) равно

$$i\frac{\partial\widehat{U}_R}{\partial t}\widehat{U}_R^\dagger = \frac{\delta\dot{\phi}(t)}{2}\sum_j\sigma_z^{(j)} = \frac{\delta\omega(t)}{2}\sum_j\sigma_z^{(j)}, \quad (4.61)$$

где $\delta\omega(t) = \delta\dot{\phi}(t)$ — флуктуация частоты. Полный эффективный гамильтониан состоит из гамильтониана в лабораторной системе отсчёта $\widehat{H}_{\text{MS}}$ и дополнительного слагаемого (4.61), которое может быть интерпретировано как шум в новой («вращающейся») системе отсчёта. Заметим, что в этой системе отсчёта шумовой гамильтониан не содержит колебательных операторов, поэтому выражения для быстрого шума (4.21) и (4.22) могут быть применены и здесь. Кроме того, матричные элементы $\sigma_z^{(j)}$ между собственными состояниями $\sigma_\phi^{(1)}\sigma_\phi^{(2)}$ равны

$$(\sigma_z^{(j)})_{ss'} = -\delta_{s_k,s'_k}\delta_{s_j,-s'_j}, \quad (4.62)$$

что совпадает с (4.33) с точностью до постоянного множителя единичной величины. Следовательно, все вычисления, проделанные в 4.2.2, могут быть перенесены на медленный шум, с заменой

$$\delta\phi(t)\Omega_j\cos(\mu t + \phi_M^{(j)}) \to \frac{\delta\omega(t)}{2}. \quad (4.63)$$

Ошибка гейта будет иметь вид (4.29), но с СПМ частотного шума $S_\omega(f)$ вместо фазового $S_\phi(f)$:

$$\epsilon_{\text{slow}} = \int_0^{+\infty} S_\omega^{(1)}(f)\mathcal{F}_{\text{slow}}(f)\,df, \quad (4.64)$$

где фильтр-функция $\mathcal{F}_{\text{slow}}(f)$ (в $(\text{рад/с})^{-2}$) находится из (4.39) с вышеупомянутой заменой:

$$\mathcal{F}_{\text{slow}}^{(\text{rot})}(f) = \frac{1}{20}\sum_{s,j}\iint\exp\Bigg[2is_1s_2(\chi'-\chi'') + 2is_1s'_2(\varepsilon'-\varepsilon'') - \\ -4i\,\text{Im}\sum_l\alpha'_{lj}\alpha''^*_{lj} - 4\sum_l\left(\overline{n}_l+\frac{1}{2}\right)|\alpha'_{lj}-\alpha''_{lj}|^2\Bigg]\cos(2\pi f(t'-t''))\,dt'dt''. \quad (4.65)$$

Лабораторная система отсчёта

Выражение, полученное выше, справедливо во вращающейся системе отсчёта, где оператор эволюции без шума (без учёта слагаемого (4.61)) совпадает с идеальным оператором

эволюции $\widehat{U}_0$ из (4.15). Однако, в лабораторной системе отсчёта полный оператор эволюции равен

$$\widehat{U}' = \widehat{U}_R^\dagger(\tau)\widehat{U}, \tag{4.66}$$

где $\widehat{U}$ и $\widehat{U}'$ — соответственно полные операторы эволюции во вращающейся и лабораторной системах отсчёта, а идеальный оператор эволюции по-прежнему $\widehat{U}_0$. Если шумовая поправка, наведённая (4.61), равна $\widehat{T}$, то достоверность для заданного начального состояния будет равна

$$F = \left|\langle\psi_0|\widehat{U}_0^\dagger\widehat{U}_R^\dagger(\tau)\widehat{U}_0(1 - i\widehat{T})|\psi_0\rangle\right|^2. \tag{4.67}$$

Чтобы найти фильтр-функцию в этом случае, вычислим $\widehat{U}_0^\dagger\widehat{U}_R^\dagger(\tau)\widehat{U}_0$. Подставляя (4.15) и (4.56) и раскрывая до линейных членов по $\delta\phi$, получим

$$\widehat{U}_0^\dagger\widehat{U}_R^\dagger(\tau)\widehat{U}_0 \approx 1 - i\widehat{Q}, \tag{4.68}$$

где

$$\widehat{Q} = \frac{\delta\phi(\tau)}{2}\sum_{ss'}|s\rangle\langle s'|e^{-2is_1s_2\chi}\sum_j \delta_{s_k,s'_k}\delta_{s_j,-s'_j} \tag{4.69}$$

и $\chi = \chi(\tau)$. Фазовая флуктуация $\delta\phi$ может быть представлена как интеграл от девиации частоты:

$$\delta\phi(\tau) = \int_0^\tau \delta\omega(t')\,dt', \tag{4.70}$$

поэтому поправка, связанная с вращением системы отсчёта, равна

$$\widehat{Q} = \frac{1}{2}\sum_{ss'}|s\rangle\langle s'|\int_0^\tau \delta\omega(t')e^{-2is_1s_2\chi}\sum_j \delta_{s_k,s'_k}\delta_{s_j,-s'_j}\,dt'. \tag{4.71}$$

Подставляя в (4.67), получаем

$$F = \left|\langle\psi_0|(1 - i\widehat{Q})(1 - i\widehat{T})|\psi_0\rangle\right|^2, \tag{4.72}$$

что с точностью до линейных по $\delta\omega$ (или $\delta\phi$) слагаемых равно

$$F = \left|\langle\psi_0|(1 - i(\widehat{Q} + \widehat{T}))|\psi_0\rangle\right|^2. \tag{4.73}$$

Таким образом, эффективная шумовая поправка будет равна $\widehat{Q} + \widehat{T}$. Для такой поправки, учитывая $\operatorname{Tr}\widehat{Q} = \operatorname{Tr}\widehat{T} = 0$, ошибка гейта (4.14) вычисляется как

$$\epsilon_{\text{slow}}^{(\text{lab})} = \frac{1}{5}\sum_n p_n\left[\operatorname{Tr}(\widehat{T}^\dagger\widehat{T} + \widehat{Q}^\dagger\widehat{Q} + \widehat{T}^\dagger\widehat{Q} + \widehat{Q}^\dagger\widehat{T})\right]_{nn}. \tag{4.74}$$

Член $\widehat{T}^\dagger\widehat{T}$ даст фильтр-функцию (4.65). Остальные находятся аналогично:

$$\begin{aligned}
\sum_n p_n \left[\mathrm{Tr}(\widehat{Q}^\dagger\widehat{Q})\right]_{nn} &= 2\iint \delta\omega(t')\delta\omega(t'')\,dt'dt'', \\
\sum_n p_n \left[\mathrm{Tr}(\widehat{T}^\dagger\widehat{Q} + \widehat{Q}^\dagger\widehat{T})\right]_{nn} &= -\frac{1}{2}\sum_{s,j}\iint \delta\omega(t')\delta\omega(t'')\times \\
&\times \cos\left(2s_1s_2(\chi-\chi') - 2s_1s_2'\varepsilon'\right)\exp\left[-4\sum_l\left(\overline{n}_l+\frac{1}{2}\right)|\alpha'_{lj}|^2\right]dt'dt'',
\end{aligned} \tag{4.75}$$

что приводит к следующей фильтр-функции:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(\mathrm{lab})}_{\mathrm{slow}}(f) = \frac{1}{20}\iint\Bigg\{8 + \sum_{s,j}\Bigg(&\exp\Bigg[2is_1s_2(\chi'-\chi'') + 2is_1s_2'(\varepsilon'-\varepsilon'') - \\
&-4i\,\mathrm{Im}\sum_l \alpha'_{lj}\alpha''^{*}_{lj} - 4\sum_l\left(\overline{n}_l+\frac{1}{2}\right)|\alpha'_{lj}-\alpha''_{lj}|^2\Bigg] - \\
&-2\cos(2s_1s_2(\chi-\chi') - 2s_1s_2'\varepsilon')\exp\left[-4\sum_l\left(\overline{n}_l+\frac{1}{2}\right)|\alpha'_{lj}|^2\right]\Bigg)\Bigg\}\times \\
&\times\cos(2\pi f(t'-t''))\,dt'dt''.
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Сравнение фильтр-функций в разных системах отсчёта

Характерный вид фильтр-функций для медленного шума можно установить такими же качественными рассуждениями, что и для быстрого шума. В частности, учитывая, что в данном случае «несущая» частота импульса отсутствует (функция импульса вообще явно не фигурирует в выражении), стоит ожидать, что пик фильтр-функции медленного шума будет около нуля, а её ширина $\sim 1/\tau$ в обеих системах отсчёта. Пример этих функций, найденных численно, приведён на рис. 4.4.

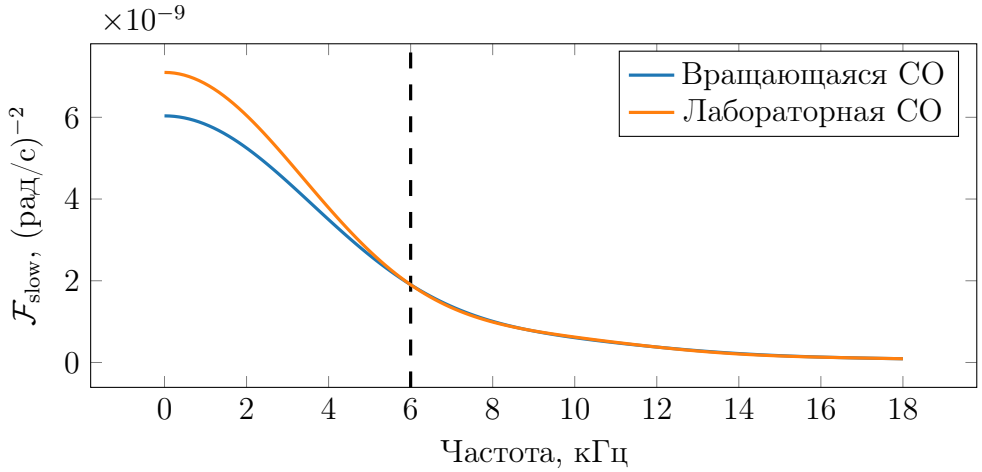


Рис. 4.4. Фильтр-функции для медленного шума в обеих системах отсчёта. Пунктирная линия обозначает величину $1/\tau$

Параметры, использованные при построении графиков взяты теми же, что и для рис. 4.3. Фильтр-функции действительно локализованы около нуля и имеют ширину, близкую к обратному времени гейта, что оказывается примерно равным тому значению частоты, начиная с которого функции обеих систем отсчёта практически совпадают. Таким образом, отличие систем отсчёта проявлено только на частотах ниже $1/\tau$.

Это отличие может быть пояснено следующим образом. Во вращающейся системе отсчёта, которая всегда в фазе с лазерным полем (примером которой служит $\widehat{U}_R$), идеальный гамильтониан, как было показано выше, совпадает с идеальным гамильтонианом лабораторной системы отсчёта. Фазовый шум фигурирует только в качестве члена σ_z. Аналогичное утверждение верно и для любых однокубитных операций. Следовательно, если все гейты проводятся одним лазерным источником, то вращающаяся система отсчёта будет одной и той же на протяжении всего времени выполнения квантовой цепочки. Тогда удобно перейти в эту систему в начале цепочки и выйти из нее обратно в лабораторную систему после последнего гейта. На языке операторов данное утверждение выглядит так: если операторы эволюции во вращающейся системе $\widehat{U}_1, \widehat{U}_2, \ldots, \widehat{U}_N$, то соответствующий полный оператор эволюции в конце цепочки равен

$$\widehat{U}_{\text{lab}} = \widehat{U}_R^\dagger(T_N)\widehat{U}_N\widehat{U}_{N-1}\ldots\widehat{U}_1, \tag{4.77}$$

где T_N есть полное время эволюции после N гейтов в предположении, что $\widehat{U}_R(0)$ является единичным оператором. Иными словами, дополнительная ошибка, возникающая вследствие флуктуаций угла поворота системы отсчёта, не привязана к конкретному гейту, а эффективно проявляется только в конце всей цепочки, поэтому её можно игнорировать и использовать фильтр-функцию (4.65) для оценки ошибки MS гейта. Обратим внимание, что та же фильтр-функция применима и для описания других шумов типа σ_z, не относящихся к флуктуациям фазы лазера. Например, флуктуации магнитного поля, которые меняют частоту кубитного перехода напрямую вместо фиктивного слагаемого (4.61).

Иной случай будет иметь место, если каждый гейт проводится отдельным источником, не скоррелированным с остальными. Здесь необходимо использовать представление (4.77) в виде произведения отдельных операторов эволюции в лабораторной системе:

$$\widehat{U}_{\text{lab}} = \left[\widehat{U}_R^\dagger(T_N)\widehat{U}_N\widehat{U}_R(T_{N-1})\right]\left[\widehat{U}_R^\dagger(T_{N-1})\widehat{U}_{N-1}\widehat{U}_R(T_{N-2})\right]\ldots \\ \ldots\left[\widehat{U}_R^\dagger(T_1)\widehat{U}_1\widehat{U}_R(0)\right] = \widehat{U}_N^{(\text{lab})}\widehat{U}_{N-1}^{(\text{lab})}\ldots\widehat{U}_1^{(\text{lab})}, \tag{4.78}$$

где

$$\widehat{U}_n^{(\text{lab})} = \widehat{U}_R^\dagger(T_n)\widehat{U}_n\widehat{U}_R(T_{n-1}). \tag{4.79}$$

В этом представлении, каждый оператор даёт свою эволюцию и свою ошибку. В частности, ошибка из-за вращения каждой из систем отсчёта должна учитываться неотрывно от соответствующего гейта, поэтому корректная фильтр-функция будет определяться выражением (4.76). Если цепочка состоит из одиночного MS гейта (например, для измерения его достоверности), то ошибка из-за вращения не может быть отделена от ошибки, накопленной самим гейтом, поэтому функция (4.76) будет правильной и в этом случае.

Подводя итог, приведём список основных случаев для применения фильтр-функций в разных системах отсчёта:

- Вращающаяся
    1. Оценка ошибки MS гейта в цепочке гейтов, проводимых общим лазерным источником;
    2. Исследование других шумов типа σ_z, например, флуктуации магнитного поля;
- Лабораторная
    1. Оценка ошибки одиночного MS гейта;
    2. Оценка ошибки MS гейта в цепочке гейтов, проводимых нескоррелированными источниками.

Полная ошибка из-за медленного шума

Оценка полной ошибки, связанной с медленным шумом, может быть сделана тем же методом, что и для быстрого шума, путём вынесения СПМ из-под интеграла (4.64). Как было указано ранее, лазер, выполняющий квантовые операции, обычно привязан к стабильному реперу, в результате чего СПМ частотного шума в низкочастотной области является плоской (белый шум частоты), вплоть до ширины полосы петли обратной связи [108]. Тогда можно положить $S_\omega^{(1)}(f)$ константой:

$$S_\omega^{(1)}(f) = h_0. \tag{4.80}$$

Величина h_0 связана с шириной лазерной линии $\Delta\omega$ (FWHM, полная ширина на полувысоте) следующим соотношением [129]:

$$h_0 = 2\Delta\omega. \tag{4.81}$$

Интеграл $\int \mathcal{F}(f)\,df$ вычисляется с использованием тождества (4.47). С учётом (4.81) получаем для обеих систем отсчёта следующие приближенные формулы:

$$\epsilon_{\text{slow}}^{(\text{rot})} \approx \frac{2}{5}\Delta\omega\tau, \tag{4.82}$$

$$\epsilon_{\text{slow}}^{(\text{lab})} \approx \frac{\Delta\omega}{20}\int\limits_0^\tau \left\{8 + \sum_{s,j}\left(1 - 2\cos\left(2s_1s_2(\chi-\chi') - 2s_1s_2'\varepsilon'\right)\times \right.\right. \\ \left.\left. \times \exp\left[-4\sum_l\left(\overline{n}_l + \frac{1}{2}\right)|\alpha'_{lj}|^2\right]\right)\right\} dt' \tag{4.83}$$

Выражение (4.83) зависит от параметров гейта. Однако эту ошибку можно оценить сверху, получив величину, которая от этих параметров не зависит:

$$\epsilon_{\text{slow}}^{(\text{lab})} \leq \frac{\Delta\omega}{20}\int\limits_0^\tau \left\{8 + \sum_{s,j}(1+2)\right\} = \frac{8}{5}\Delta\omega\tau. \tag{4.84}$$

Эта оценка того же порядка, что и (4.82).

Приближение белого шума частоты, сделанное при получении формул выше, содержит важную деталь. Как было указано ранее, на достаточно низких частотах (100 Гц и ниже) преобладает $1/f$ компонента шума. Строго говоря, интеграл (4.64) при таком шуме расходится. Однако, этот интеграл расходится только при бесконечном времени измерений. Для конечного времени наблюдений T_0 ошибка равна

$$\epsilon_T = \int\limits_{1/T_0}^{+\infty} S_\omega(f)\mathcal{F}(f)\,df. \tag{4.85}$$

Учтём, что для современных стабильных лазерных систем частота f_0 перехода белого шума в шум $1/f$ лежит в диапазоне $10 \div 100$ Гц [114; 115], что много меньше ширины фильтр-функции $\sim 1/\tau$. Следовательно, интеграл можно разделить на два интервала, до и после f_0:

$$\epsilon_T = \int\limits_{1/T_0}^{f_0} S_\omega(f)\mathcal{F}(f)\,df + \int\limits_{f_0}^{+\infty} S_\omega(f)\mathcal{F}(f)\,df \approx \mathcal{F}(0)\int\limits_{1/T_0}^{f_0} S_\omega(f)\,df + h_0\int\limits_0^{+\infty}\mathcal{F}(f)\,df. \tag{4.86}$$

Второе слагаемое в этой формуле — ошибка, вычисленная в приближении белого шума. Интеграл в первом слагаемом — средний квадрат ухода частоты за время T_0 [79]. Следовательно, для ошибки, наведённой низкочастотной $1/f$-компонентой шума, получаем

$$\epsilon_{\text{low}} \approx \mathcal{F}_{\text{slow}}(0)\langle\delta\omega^2\rangle, \tag{4.87}$$

где $\delta\omega^2$ — средний квадрат отклонения частоты. Физический смысл этого выражения понятен из следующих рассуждений. Низкочастотная компонента шума превалирует на больших

временах наблюдения, много больших времени гейта. Следовательно, на протяжении самого гейта спектр лазера будет представлять собой узкую линию шириной $\Delta\omega$ и сдвинутой на константу $\delta\omega$. Поэтому можно рассматривать этот постоянный сдвиг как шум со спектром $S_\omega(f) = \delta\omega^2\,\delta(f)$. Тогда, как следует из определения дельта-функции $\delta(f)$, свёртка с фильтр-функцией гейта даст формулу выше. Время усреднения T_0 зависит от конкретной постановки эксперимента и должно выбираться исходя из наиболее подходящего масштаба времени, на котором предполагается оценить ошибку MS гейта. Например, это время может быть полным временем непрерывного многократного вычисления одной и той же квантовой цепочки, в течение которого не производится перекалибровка частоты лазера.

Основные результаты Главы 4

1. Найдены два частотных диапазона, в которых влияние шумового спектра на ошибку MS гейта наиболее существенно: быстрый (в окрестности колебательного спектра ионов) и медленный (ограниченный приблизительно обратным временем гейта). Определены члены гамильтониана, отвечающие за каждый из диапазонов;

2. Показано, что ошибка MS гейта из-за фазовых флуктуаций лазера равна свёртке спектральной плотности мощности фазового шума с фильтр-функцией гейта, определяемой только его параметрами. Найдены общие выражения для фильтр-функций в обоих частотных диапазонах в различных геометриях лазерных пучков;

3. При медленно меняющемся спектре шума получены упрощённые формулы для вычисления ошибки MS гейта.

Глава 5

Фильтрация лазерного излучения при помощи оптического резонатора средней резкости

Спектральные характеристики лазерного источника, проводящего квантовые операции, как было показано в предыдущей главе, чрезвычайно важны, поскольку в явном виде влияют на достоверность этих операций. Во-первых, центральная частота излучения должна обладать достаточно большой долговременной стабильностью. Это ясно из выражений (4.82) и (4.83) для ошибки, вызванной медленным шумом, то есть шумом, определяемого низкочастотными компонентами спектра, формирующими ширину линии [129]. Девиация частоты должна быть много меньше как ширины самого кубитного перехода, так и характерной разности колебательных частот соседних мод. В контексте оптических кубитов на ионах, ширина лазера в 100 Гц и меньше является вполне достаточной для современных экспериментальных установок [130; 131]. Такая ширина может быть достигнута путём привязки лазера к высокостабильному реперу, в качестве которого выступает резонатор Фабри-Перо, при помощи метода Паунда-Дривера-Холла (ПДХ) [41].

Во-вторых, необходимо уменьшить фазовый шума лазера на частотах, близких к колебательному спектру, что следует из выражения (4.46) для ошибки, вызванной быстрым шумом. Для количественного понимания требований на уровень высокочастотного шума рассмотрим типичные значения параметров двухкубитной операции на ионных цепочках не очень большой длины (до ∼5 ионов): $\Omega \approx 2\pi \cdot 200$ кГц, $\tau \approx 300$ мкс. Для получения ошибки MS гейта 10^{-3}, формула (4.46) даёт верхнюю оценку на уровень шума на частоте отстройки в -116 дБн/Гц. Если предположить, что шум на этой частоте вызван сервопиком шириной 100 кГц, то не более $5 \cdot 10^{-7}$ от общей мощности лазера должно быть внутри этого пика, чего достаточно трудно достичь традиционными техниками.

Существует несколько способов преодолеть данную проблему. Например, можно использовать лазеры с низким пределом Шавлова-Таунса [132; 133], такие как твердотельные или волоконные лазеры [134; 135]. Относительно небольшое усиление в сочетании с большой длиной резонатора даёт очень низкий уровень шума на частотах порядка единиц МГц. В свою очередь, диодные лазеры с внешним резонатором (ECDL, External Cavity Diode Laser), часто применяющиеся в квантовых вычислениях на атомах и ионах, имеют довольно большую ширину в свободном режиме, от сотен кГц до нескольких МГц. Традиционный подход для диодных лазеров заключается в том, чтобы использовать обычный ECDL (с длиной

внешнего резонатора примерно 2 см) в паре со стабильным более длинным резонатором с резкостью более 100 000 [105]. Это позволяет уменьшить спектральную ширину выходного излучения до 1 Гц, а линейный дрейф частоты до величин, меньших 1 Гц/с. Подобные техники популярны в оптических часах, где критическим моментом является измерение абсолютной частоты часового перехода [136–139].

Как неоднократно упоминалось ранее, петля обратной связи, осуществляющая привязку свободного источника к реперу, имеет ограниченную ширину полосы [79; 140], которая может достигать единиц МГц. В этом диапазоне в спектре излучения появляются сервопики, доля мощности излучения в которых может достигать нескольких процентов, что на 5 порядков выше указанного выше предела $5 \cdot 10^{-7}$. Несмотря на возможность уменьшить высоту пиков путём увеличения длины внешнего резонатора ECDL до десятков сантиметров [104], такой подход технически довольно сложный. Альтернативный вариант очищения спектра лазера — использовать стабильный реперный резонатор в качестве фильтрующего. В силу малости ширины линии пропускания (до 10 кГц), весь высокочастотный шум будет подавлен. Если коэффициент пропускания резонатора выше некоторого порога, то прошедший свет может быть задающим для инжекционной привязки излучения второго идентичного лазерного диода [42; 141]. Как правило, выходной мощности чуть меньше 1 мВт для этой цели оказывается достаточно. Однако, если требуется получить ещё больше мощности, например, для последующей генерации второй гармоники, необходимо использовать другие усилители, такие как рупорные. Минимальная рабочая мощность задающего излучения для рупорного усилителя лежит уже в диапазоне десятков мВт. Чтобы достигнуть такой большой мощности, выходящей из резонатора, можно повысить входную мощность. Однако при таком повышении станет больше и циркулирующая мощность внутри резонатора (световая энергия, проходящая через поперечное сечение в единицу времени в одну сторону). Эта мощность достигает величин порядка десятков кВт и выше, что вызывает, в свою очередь, нежелательные тепловые сдвиги длины оптического пути, а также ускоряет деградацию зеркал.

В настоящей главе предложен оригинальный метод фильтрации высокочастотного фазового шума лазера при помощи двух резонаторов в схеме двухэтапной привязки, показанной на рис. 5.1. Первый этап — привязка излучения «рабочего» лазера с длиной волны 871 нм к фильтрующему резонатору средней резкости (порядка 30 000) методом ПДХ, а также привязка этим же методом аналогичного «опорного» лазера к ультрастабильному резонатору. Излучение рабочего лазера, прошедшее через фильтрующий резонатор, проходит затем через рупорный усилитель и через генератор второй гармоники, давая пучок на требуемой длине волны 435.5 нм, который заводится в ионную ловушку для проведения операций.

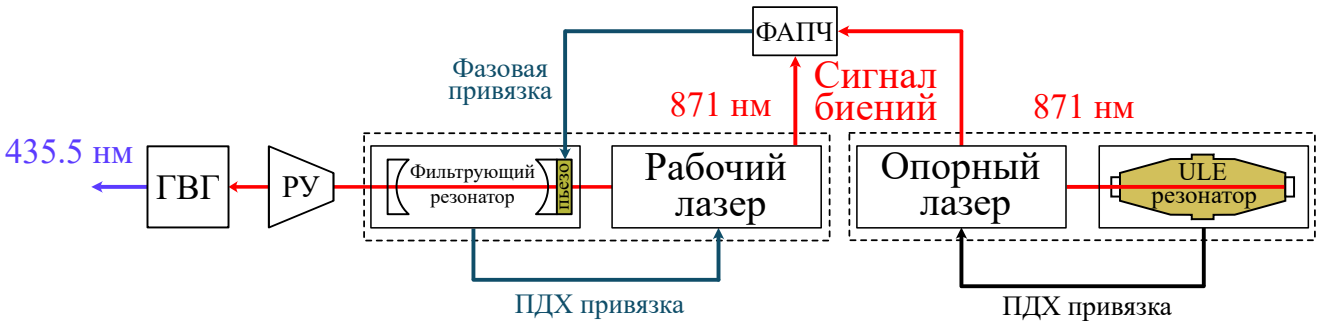


Рис. 5.1. Качественная диаграмма предлагаемого метода фильтрации лазерного излучения. РУ — рупорный усилитель, ГВГ — генератор второй гармоники. Фазовая привязка ФАПЧ (фазовой автоподстройки частоты) обеспечивается сигналом биений двух лазерных систем

Опорный лазер, в свою очередь, нужен для обеспечения долговременной стабильности центральной частоты. Для привязки рабочего лазера к этой центральной частоте используется второй этап — фазовая привязка по биениям между двумя лазерными системами. Сигнал обратной связи подаётся на пьезоэлемент, установленный на одно из зеркал фильтрующего резонатора для изменения его длины и соответствующего сдвига линии его пропускания. Таким образом, метод позволяет одновременно добиться долговременной стабильности частоты лазера при его спектральной чистоте в требуемом диапазоне частот. Предложенный подход физически разделяет этапы фильтрации и стабилизации, а значит, допускает независимую оптимизацию обоих процессов.

5.1. Описание эксперимента

5.1.1. Опорный и рабочий лазеры

Схема экспериментальной установки показана на рис. 5.2 и состоит из двух обособленных частей, одной для опорного лазера и другой для рабочего. Каждая система находилась в отдельной изолирующей коробке для пассивной защиты от внешних акустических воздействий. Опорный лазер является ECDL-лазером на длине волны 871 нм, работающим по схеме Литтрова. Он привязан к ультрастабильному резонатору Фабри-Перо с резкостью $1.2 \cdot 10^5$, изготовленному, как упоминалось ранее, изготовленному из стекла ULE (Ultra Low Expansion) с низким коэффициентом теплового расширения. Этот резонатор обеспечивает стабильность центральной частоты на уровне 10 Гц при времени усреднения 1 с [107]. Рабочий лазер основан на коммерческой лазерной системе, включающей исходный лазерный диод с длиной волны излучения 871 нм, рупорный усилитель, а также генератор второй гармоники, дающий выходную длину волны 435.5 нм.

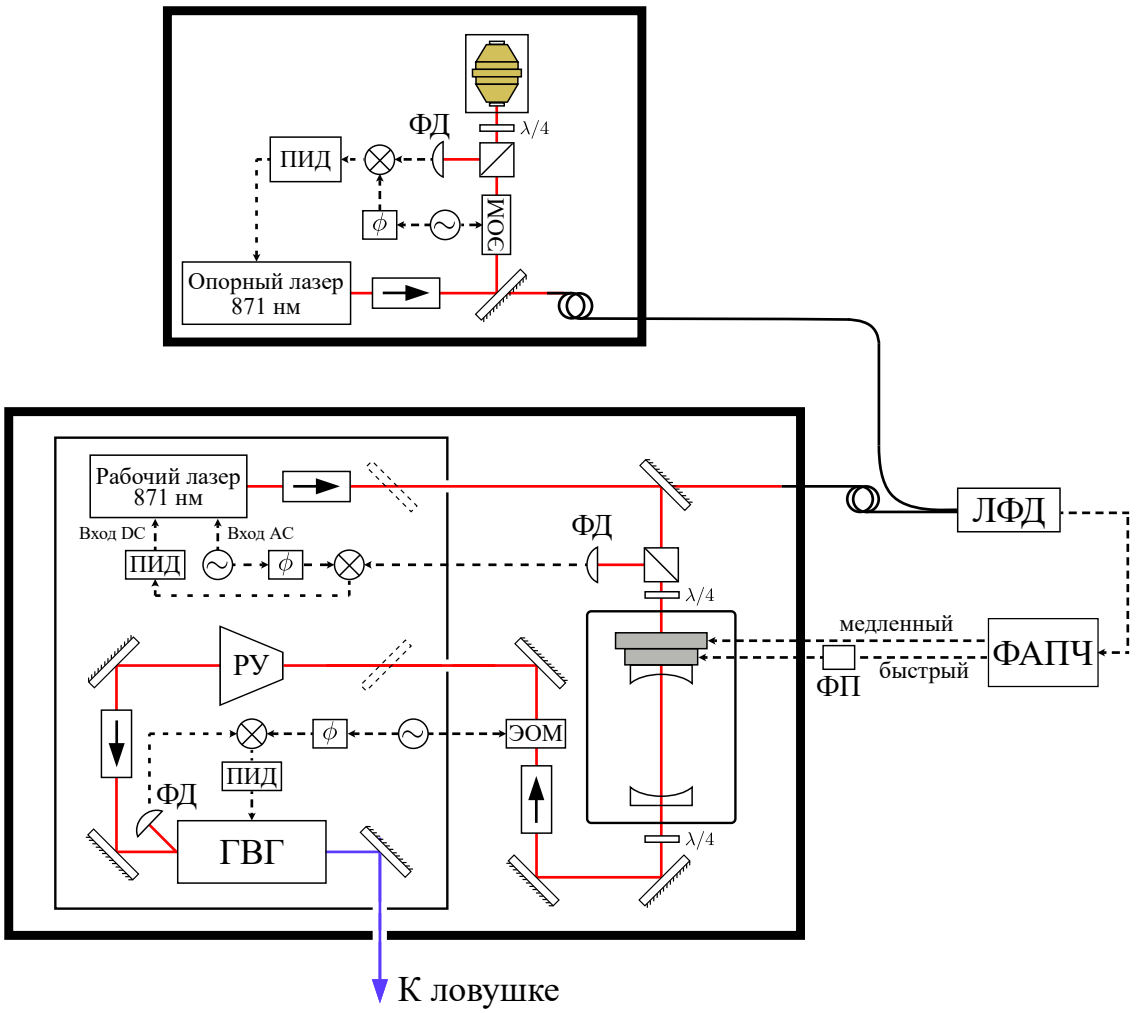


Рис. 5.2. Схема установки для фильтрации. ФД — фотодиод, "ϕ" — фазовращатель, "$\sim$" — генератор, ЛФД — лавинный фотодиод, ФП — фильтр-пробка. Прямоугольники со стрелками обозначают оптические изоляторы. Дополнительная пластинка $\lambda/4$ была установлена после фильтрующего резонатора для получения линейной поляризации перед РУ

Для реализации описываемого метода излучение диода было выведено из оригинального корпуса и направлено через фильтрующий резонатор. Данный резонатор был изготовлен из алюминия, имел длину 150 мм и резкость $3 \cdot 10^4$, что соответствовало ширине линии пропускания 30 кГц. Одно из зеркал было закреплено на пьезоэлектрическом элементе, состоящем из двух кристаллов разного размера (рис. 5.3). Больший из двух кристаллов обеспечивал медленное движение зеркала, но на большое расстояние, меньший — быстрое движение на малое расстояние. Использование двух кристаллов позволяет разделить сигнал обратной связи на быструю и медленную компоненты для улучшения привязки. Затем прошедший пучок заводился обратно в оригинальную систему, проходя через РУ и ГВГ, после которых направлялся в ионную ловушку. Привязка лазера к фильтрующему резонатору осуществлялась аналогично опорному методом ПДХ.

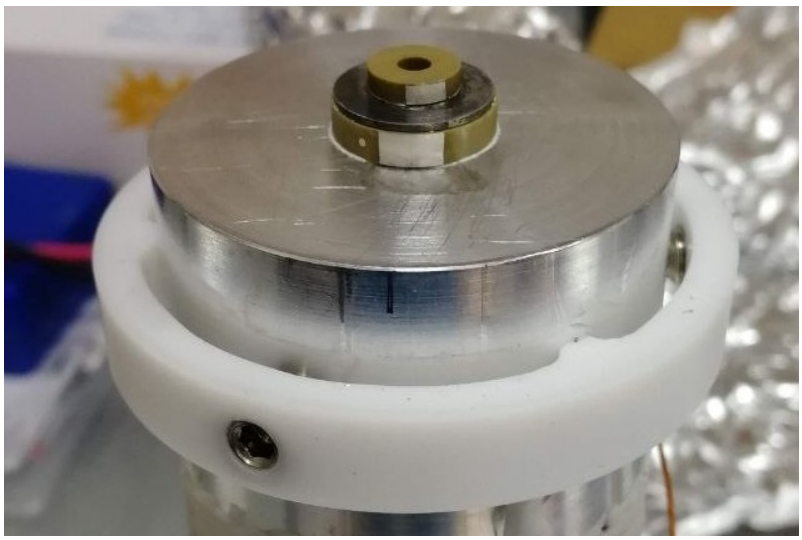


Рис. 5.3. Фотография пьезоэлемента фильтрующего резонатора

Боковые частоты в излучении, нужные для формирования сигнала ошибки, создавались модуляцией тока диода. Сигнал обратной связи подавался также на модуляционный вход тока питания диода.

Коэффициент пропускания фильтрующего резонатора в привязанном состоянии составляет около 60%, что достаточно для насыщения РУ (минимальная световая мощность для нормальной работы РУ составляет 20 мВт). Дополнительный электрооптический модулятор (ЭОМ) был установлен между фильтрующим резонатором и РУ для привязки ГВГ к усиленному световому пучку с целью обеспечения стабильной мощности второй гармоники 435.5 нм. Для совмещения мод рабочего лазера, фильтрующего резонатора, РУ и ГВГ были дополнительно установлены два цилиндрических телескопа, один перед резонатором, другой после него.

5.1.2. Фазовая привязка двух лазеров

Чтобы осуществить второй этап описанного метода, от каждого из лазеров отделялась небольшая часть излучения и совмещалась на лавинном фотодиоде, создавая сигнал биений. Этот сигнал подавался на вход петли ФАПЧ, состоящей из модуля Red Pitaya [142] с установленным на нём программным обеспечением цифровой фазовой привязки [143]. Программа разделяет выходной сигнал на быструю и медленную компоненты, которые соответственно подаются на два кристалла пьезоэлемента в фильтрующем резонаторе.

Частотная зависимость отклика пьезоэлемента ограничивает возможную ширину полосы привязки из-за наличия акустических резонансов, которые в зависимости от массы самого элемента могут достигать величин от единиц кГц до сотни кГц. Чтобы исключить влияние

этих резонансов и увеличить полосу привязки, можно применить фильтр-пробку [144], который «вырежет» резонанс на указанной частоте. В данной работе был применён цифровой фильтр [145], параметры которого можно задавать в широком диапазоне и который реализован на дополнительном модуле Red Pitaya. Этот фильтр поставлен в быструю компоненту выходного сигнала (обозначен ФП на рис. 5.2).

Для определения оптимальных параметров фильтра проводилось измерение диаграммы Боде всей системы в привязанном состоянии. Это делалось путём добавления слабого синусоидального сигнала к выходу петли обратной связи и последующего синхронного детектирования этого сигнала с сигналом ошибки, давая амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики петли. Для получения отклика только пьезоэлемента вместе с фильтром необходимо исключить из этой диаграммы отклик электроники, составляющей остальную петлю обратной связи. Этот отклик, в свою очередь, можно вычислить, используя известные коэффициенты ПИД (пропорционально-интегрально-дифференциального) регулятора. Полученная картина свидетельствует о качестве подбора параметров фильтра. Основные характеристики этого качества — высота резонансного пика, а также величина поворота фазы при переходе через этот резонанс. На рис. 5.4 показаны диаграммы Боде пьезоэлемента до и после установки фильтра.

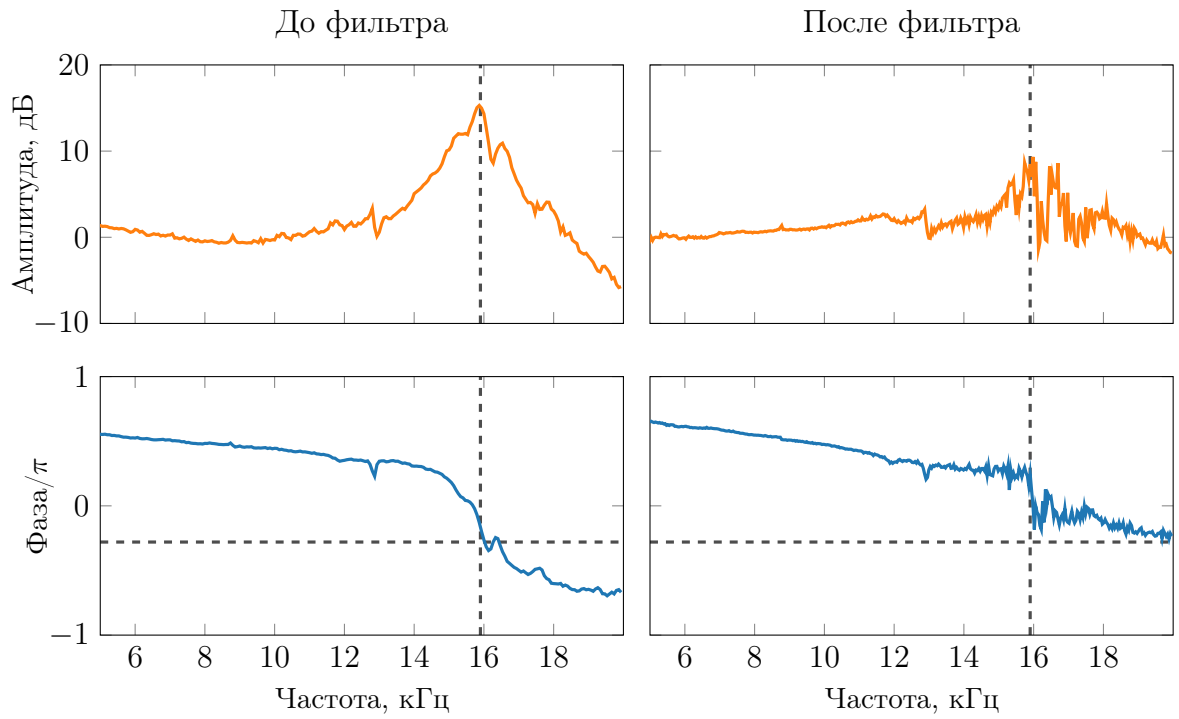


Рис. 5.4. Диаграмма Боде пьезоэлемента до и после установки фильтра-пробки. Вертикальная линия обозначает резонансную частоту, горизонтальная на фазовой диаграмме — характерное значение точки поворота

Видно, что внесение фильтра позволяет не только существенно снизить величину резонанса, но и сгладить фазовый отклик, поднимая минимальное значение фазы выше характерной точки поворота (горизонтальная пунктирная линия на рис. 5.4).

5.1.3. Спектроскопия одиночного иона

Характерные частоты оптических переходов в ионе в ловушке, как ясно следует из предыдущих глав данной диссертации, равны как частоте непосредственно кубитного перехода $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, так и колебательных переходов $|0, n\rangle \leftrightarrow |1, n \pm 1\rangle$, где n — колебательное число в некоторой моде. Помимо этого, при достаточно большой световой мощности возможны переходы с изменением колебательного числа больше, чем на единицу: $n \pm 2, n \pm 3$ и т.д. Ясно, что частоты переходов с изменением колебательного числа на k будут равны $\omega_0 + k\omega_l$, где величина ω_0 — частота кубитного перехода, ω_l — колебательная частота l-й моды. Следовательно, если облучить ион монохроматическим излучением на одной из этих частот, в спектре возбуждения иона появятся соответствующие пики. Если же излучение обладает широким спектром, его перекрытие с основным переходом $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ будет вызывать паразитные возбуждения (см. главу 4), что ухудшит разрешение упомянутых пиков.

По этой причине картина спектроскопии одиночного иона является довольно значимым качественным показателем эффективности фильтрации излучения. В данной работе эта спектроскопия проводилась на ионе иттербия $^{171}Yb^+$ в линейной ловушке Пауля. Возбуждался кубитный переход $^2S_{1/2} \leftrightarrow {}^2D_{3/2}$ на центральной длине волны 435.5 нм, частота лазера сканировалась в диапазоне до ± 1.5 МГц от основного перехода. Спектр иона снимался в двух конфигурациях: без фильтрации и с фильтрацией. Время взаимодействия в обоих случаях выбиралось одинаковым и равным 400 мкс. Мощность также сохранялась в обоих экспериментах, так что время резонансного пи-импульса на основном переходе было равно 11 мкс.

5.2. Результаты

5.2.1. Стабильность выходной мощности

Качество привязки по предложенному методу, а также механическая и температурная устойчивость системы может быть интегрально охарактеризована наблюдением за выходной мощностью отфильтрованного излучения 871 нм в зависимости от времени. График этой зависимости приведён на рис. 5.5.

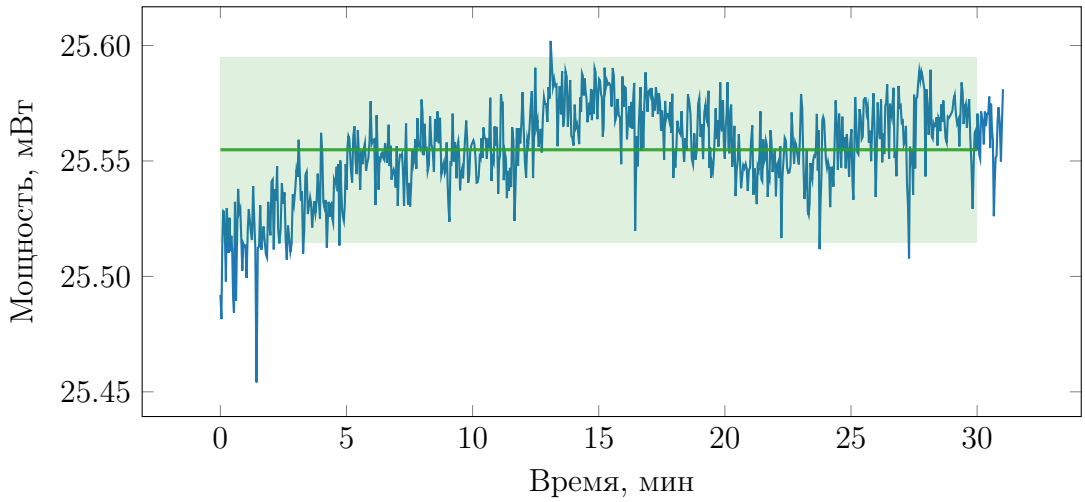


Рис. 5.5. Зависимость мощности излучения, выходящего из фильтрующего резонатора, от времени. Выделенная область соответствует значениям в пределах средней мощности ± два стандартных отклонения

Средняя мощность и её погрешность (оценённая как два стандартных отклонения) равны соответственно $P_{\text{filtered}} = 25.55 \pm 0.04$ мВт, а относительная погрешность равна $1.6 \cdot 10^{-3}$.

5.2.2. Спектроскопия без фильтрации и с фильтрацией

Спектры иона без фильтрации и с фильтрацией представлены на рис. 5.6.

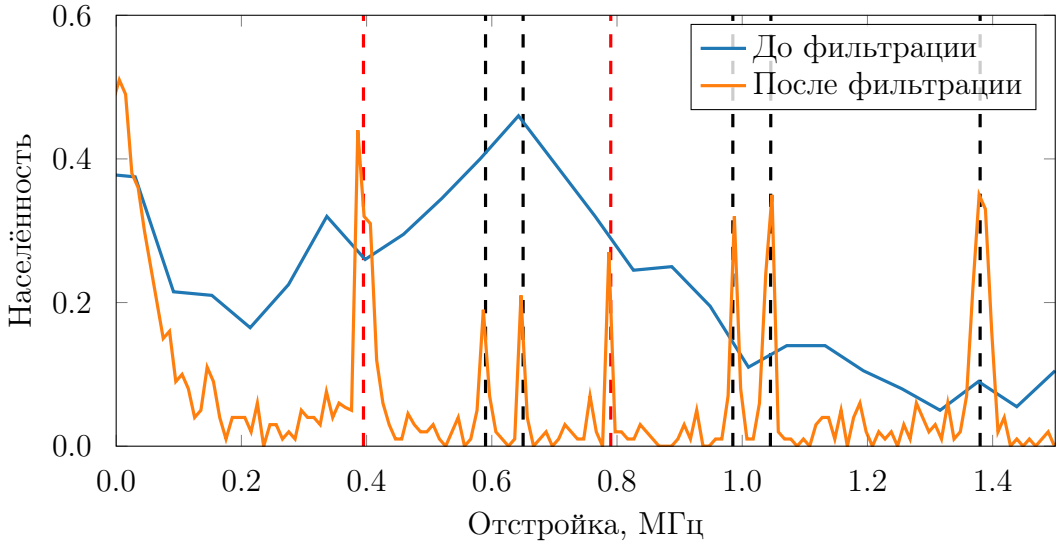


Рис. 5.6. Вероятность возбуждения иона $^{171}\text{Yb}^{+}$ в зависимости от отстройки от кубитного перехода до и после фильтрации резонатором. Красными линиями обозначены пики взаимодействия с колебательными состояниями аксиальной моды с частотой 395 кГц, чёрные линии отвечают за другие резонансные взаимодействия (см. текст)

Первый и второй пики, обозначенные красным цветом на спектре после фильтрации, отвечают за возбуждение первого и второго колебательных переходов на аксиальной моде с частотой 395 кГц. Пики, обозначенные чёрным цветом, происходят от взаимодействия с зеемановскими подуровнями верхнего состояния $^2\mathrm{D}_{3/2}(F=2)$. В частности, поскольку зеемановское расщепление в эксперименте составляло 5 МГц, а радиальная секулярная частота была равна 3.6 МГц, разность этих частот даёт пик на 1.4 МГц. Таким образом, этот пик отвечает за взаимодействие с радиальной колебательной модой и соседним зеемановским подуровнем одновременно. Пары пиков около 0.6 МГц и 1.0 МГц отстоят друг от друга, а также от пика на 1.4 МГц на расстояние 395 кГц, в точности равное частоте аксиальной моды. Наличие этих пиков объясняется ангармоничностью ловушки, в результате которой появляется взаимодействие между аксиальной и радиальной модами, дающее в спектре пики на суммарной частоте. Расщепление же самих пиков на величину примерно 55 кГц может быть объяснено анизотропией ловушки, из-за которой секулярные частоты по разным осям немного отличаются (в данном случае на 55 кГц). На спектре, снятом нефильтрованным излучением, явно заметен пик на 600 кГц, который соответствует положению сервопика в спектре самого лазера, причём остальные пики, которые разрешаются в спектре с фильтрацией, отсутствуют. Это объясняется перекрытием спектра с основным переходом, влияние которого было упомянуто ранее, так что такой переход становится определяющим в формировании картины спектра иона. Заметим, что высота пика почти достигает насыщения в 0.5. Это происходит потому, что время взаимодействия много больше времени пи-импульса, так что этого времени достаточно, чтобы шумовые компоненты на данной частоте смогли за это время возбудить ион, аналогично возбуждению при нулевой отстройке (в резонансе).

5.2.3. Оценка достижимой достоверности MS гейта

Имея спектр, снятый лазерной системой без фильтрации, а также зная параметры фильтрующего резонатора, можно оценить достижимую достоверность MS гейта. Для начала получим соотношение между СПМ фазового шума $S_\phi(f)$ и вероятностью возбуждения иона. Гамильтониан взаимодействия двухуровневой системы с полем, обладающим фазовым шумом, равен (см. формулу (2.34))

$$\widehat{H}_I = \frac{\Omega}{2}(|1\rangle\langle 0|e^{i(-\mu t+\phi(t))} + |0\rangle\langle 1|e^{-i(-\mu t+\phi(t))}), \tag{5.1}$$

где $\phi(t)$ — фазовый шум. Частоту Раби положим постоянной. Уравнения Шрёдингера для амплитуд вероятности $a_{0,1}$ примут вид

$$\begin{aligned} i\dot{a}_0 &= a_1 \frac{\Omega}{2} e^{-i\mu t + i\phi(t)}, \\ i\dot{a}_1 &= a_0 \frac{\Omega}{2} e^{i\mu t - i\phi(t)}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Интегрируя второе уравнение с учётом начального условия $a_1(0) = 0$ (вся населённость находится на нижнем уровне), получим

$$a_1 = -i\frac{\Omega}{2} \int\limits_0^t a_0(t') e^{i\mu t' - i\phi(t')}\, dt'. \tag{5.3}$$

Предполагая в рамках теории возмущений, что $a_0 = \text{const} \approx 1$, находим

$$a_1 \approx -i\frac{\Omega}{2} \int\limits_0^t e^{i\mu t' - i\phi(t')}\, dt'. \tag{5.4}$$

Вероятность нахождения иона в верхнем состоянии равна

$$P_1 = |a_1|^2 = \frac{\Omega^2}{4} \int\limits_0^t dt' \int\limits_0^t e^{i\mu(t'-t'') - i(\phi(t') - \phi(t''))}\, dt''. \tag{5.5}$$

Дополнительно предположим малость шума, что позволяет раскрыть экспоненту до второго порядка:

$$e^{-i(\phi(t') - \phi(t''))} \approx 1 - i(\phi(t') - \phi(t'')) - \frac{1}{2}(\phi(t') - \phi(t''))^2. \tag{5.6}$$

При усреднении по шумовым траекториям линейный член даст нулевую поправку. Среднее же от квадратичного равно

$$\frac{1}{2}\langle(\phi(t') - \phi(t''))^2\rangle = R(0) - R(t' - t''), \tag{5.7}$$

где $R(\tau) = \langle\phi(t+\tau)\phi(t)\rangle$ — автокорреляционная функция. Подставляя в (5.5), получаем усреднённую населённость верхнего уровня:

$$P_1 = \frac{\Omega^2}{4} \int\limits_0^t dt' \int\limits_0^t e^{i\mu(t'-t'')}(1 - R(0) + R(t' - t''))\, dt'' \tag{5.8}$$

Интеграл от первых двух слагаемых в скобках равен

$$\frac{\Omega^2 \sin^2(\mu t/2)(1 - R(0))}{\mu^2}. \tag{5.9}$$

Здесь возник фактор, пропорциональный $(\Omega/\mu)^2$. Этот фактор будет мал на отстройках, далеких от резонанса $\mu \gg \Omega$. В нашем случае область отстроек, представляющая интерес,

расположена в окрестности сервопика на частоте около 600 кГц, в то время как частота Раби равна 45 кГц (при пи-импульсе в 11 мкс), поэтому описанным фактором можно пренебречь. Интеграл от последнего слагаемого в (5.8) можно выразить через СПМ фазового шума $S_\phi(f)$, используя теорему Винера-Хинчина:

$$R(t'-t'') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i f(t'-t'')} S_\phi(f)\, df. \tag{5.10}$$

Подставляя в (5.8) с учётом сделанных приближений и меняя порядок интегрирования, приходим к

$$P_1 = \frac{\Omega^2}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} df\, S_\phi(f) \int\limits_0^t dt' \int\limits_0^t dt''\, e^{i(\mu-2\pi f)(t'-t'')}. \tag{5.11}$$

Повторный интеграл по времени равен

$$\int\limits_0^t dt' \int\limits_0^t dt'' e^{i(\mu-2\pi f)(t'-t'')} = \frac{4\sin^2((\mu-2\pi f)t/2)}{(\mu-2\pi f)^2}. \tag{5.12}$$

Это выражение при больших временах стремится к $2\pi t\delta(\mu-2\pi f)$. Подставляя в (5.11) и интегрируя, получим

$$P_1 = \frac{\Omega^2}{4} S_\phi(\mu/2\pi)t. \tag{5.13}$$

Тогда вероятность в единицу времени, или же скорость накачки, будет равна

$$\Gamma = \frac{P_1}{t} = \frac{\Omega^2}{4} S_\phi(\mu/2\pi). \tag{5.14}$$

Это выражение можно использовать для оценки спектра шума из спектра возбуждения иона за время τ. Скоростные уравнения для населённостей запишутся в виде

$$\dot{P}_0 = \Gamma(P_1 - P_0), \quad \dot{P}_1 = -\Gamma(P_1 - P_0). \tag{5.15}$$

Введя переменную $w = P_1 - P_0$, получим уравнение

$$\dot{w} = -2\Gamma w, \tag{5.16}$$

решение которого при начальном условии $w(0) = -1$ следующее: $w(t) = -e^{-2\Gamma\tau}$, а населённость верхнего уровня

$$P_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\Gamma t}). \tag{5.17}$$

Из этой формулы можно найти скорость накачки при каждой отстройке μ, а из неё по формуле (5.14) — величину спектра шума.

Чтобы проверить корректность описанной модели, кривую спектра шумов можно получить аналитически. Для этого сделаем несколько упрощающих предположений. Во-первых,

будем считать, что спектр шумов частоты свободного (без петли обратной связи) лазера является постоянным, т.е. отвечает белому шуму. Во-вторых, в интересующем частотном диапазоне функция отклика петли определяется в основном характеристиками сервоэлектроники, а именно коэффициентами ПИД. Тогда для спектра привязанного лазера можно записать [146]

$$S_\nu(f) = \frac{h_0}{|1 + G(f)|^2}, \tag{5.18}$$

где h_0 — величина белого шума, а $G(f)$ — функция отклика ПИД

$$G(f) = K_P\left(1 - i\frac{f_I}{f} + i\frac{f}{f_D}\right) \tag{5.19}$$

с коэффициентами K_P пропорционального усиления и частотами среза f_I, f_D интегральной и дифференциальной частей соответственно. Подставляя в формулу для спектра, получим

$$S_\nu(f) = \frac{h_0}{(K_P + 1)^2 + K_P(f/f_D - f_I/f)^2}. \tag{5.20}$$

СПМ фазового шума тогда будет равна

$$S_\phi(f) = \frac{S_\nu(f)}{f^2} = \frac{h_0}{(K_P + 1)^2 f^2 + K_P(f^2/f_D - f_I)^2}. \tag{5.21}$$

Эту функцию можно рассматривать как аппроксимирующую, зависящую от параметров h_0, K_P, f_I, f_D. Если их подбором удаётся добиться удовлетворительного совпадения с экспериментальными данными, то описанная модель накачки от перекрытия спектра с основным кубитным переходом корректна в рамках сделанных допущений. Графики экспериментального и теоретического спектров приведены на рис. 5.7. Видно, что зависимости совпадают с достаточной точностью, а значит, принятая модель адекватно объясняет наблюдения.

Оценим достижимую ошибку MS гейта в данной системе с использованием предложенного метода фильтрации. Из теоретической кривой находим СПМ на частоте радиальной COM-моды ловушки $f_0 = 3.6$ МГц:

$$S_\phi(f_0) = -105 \text{ дБн/Гц}. \tag{5.22}$$

Уровень шума на этой частоте после фильтрации будет равен исходному, домноженному на функцию пропускания фильтрующего резонатора:

$$S'_\phi(f_0) = \frac{S_\phi(f_0)}{1 + (2f_0/\Delta f)^2} = -153 \text{ дБн/Гц}, \tag{5.23}$$

где $\Delta f = 30$ кГц — ширина линии пропускания. Типичные значения параметров в эксперименте главы 2 равны

$$\Omega \approx 2\pi \cdot 62 \text{ кГц}, \quad \tau \approx 890 \text{ мкс}. \tag{5.24}$$

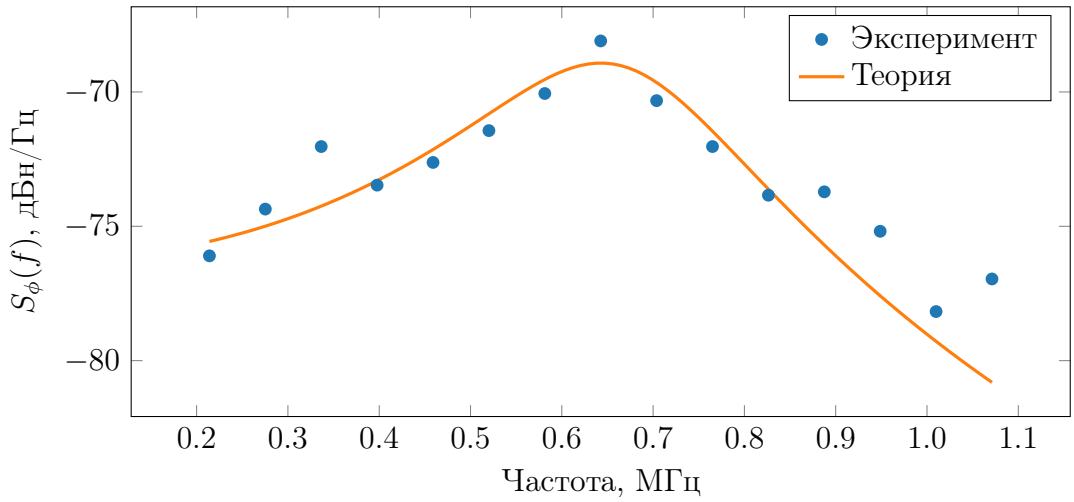


Рис. 5.7. Спектр фазового шума лазера без фильтрации в окрестности сервопика. Точки соответствуют экспериментальным данным, сплошная линия — теоретической кривой

Воспользовавшись формулой (4.46), получим верхнюю оценку на ошибку MS гейта, индуцированную быстрым шумом:

$$\epsilon_{\text{fast}} \leqslant \frac{4}{5} S'_\phi(f_0)\Omega^2\tau = 5.7 \cdot 10^{-8}. \tag{5.25}$$

В конце данной главы проведём сравнение предложенного метода с альтернативными. Во-первых, в отличие от стандартного метода привязки опорного лазера к стабильному резонатору и пропусканию его же излучения через фильтрующий, метод, рассмотренный здесь, гораздо устойчивее к внешним воздействиям. Самая уязвимая часть классической схемы — привязка фильтрующего резонатора к опорному. Она чувствительна к акустическим шумам, а диапазон привязки ограничен шириной полосы отклика пьезоэлемента. Если резкость фильтрующего резонатора достаточно высокая, то диапазоны захвата и привязки, как правило, не больше 1 МГц. В сочетании с гистерезисом пьезоэлектрического кристалла и требованием использования элементов с большим ходом для покрытия как минимум одной области свободной дисперсии, этот метод делает привязку нестабильной, а переприязку долгой. В данной же работе процесс осуществляется «наоборот», путём привязки рабочего лазера к фильтрующему резонатору методом ПДХ, который уже обладает гораздо большим диапазоном захвата и привязки. Более того, использование цифрового фазового детектора во втором этапе также позволяет расширить общий диапазон захвата до 10-20 МГц. Если центральная частота линии пропускания фильтрующего резонатора сдвинется за этот диапазон, процедура переприязки упрощается из-за возможности следить за частотой рабочего лазера с помощью измерителя длин волн. Это обходит проблему гистерезиса пьезокристалла и требование большого динамического диапазона для электроники, управляющей этим

кристаллом.

Во-вторых, по сравнению с методом инжекции, упомянутом ранее, предложенный метод разделяет процессы стабилизации и фильтрации, т.е. они могут быть проведены независимо. Из-за фототермического эффекта в зеркалах [147] долговременная стабильность частоты лазера, привязанного к резонатору высокой резкости, портится с ростом циркулирующей в нём энергии. Наилучшие свойства таких резонаторов проявляются для входных мощностей до нескольких десятков мкВт. Для типичного коэффициента пропускания 20% выходная мощность в таком случае будет равна единицам мкВт, чего недостаточно для последующего усиления. Описанный же здесь метод позволяет повысить выходную мощность, при этом не ухудшая свойства высокостабильного резонатора.

Основные результаты Главы 5

1. Разработан и экспериментально реализован оригинальный метод фильтрации лазерного излучения при помощи резонатора средней резкости (порядка 10^4), основанный на двухэтапной привязке двух независимых лазерных систем;

2. Проведено сравнение спектров одиночного иона $^{171}Yb^+$ в ловушке Пауля до и после фильтрации. Теоретически показано, что основная причина паразитного возбуждения иона до фильтрации — взаимодействие с шумовыми компонентами на частоте, равной частоте отстройки;

3. Из теоретической модели получена оценка достижимой ошибки MS гейта, вызванной быстрым шумом, с применением предложенного метода, равная $5.7 \cdot 10^{-8}$.

Заключение

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Разработан метод амплитудного шейпирования лазерных импульсов для проведения MS гейта со стабилизацией относительно дрейфов колебательных частот ионной цепочки;

2. Метод шейпирования применён для MS гейта на оптическом переходе иона $^{171}Yb^{+}$ в массиве из 10 ионов. Средняя экспериментально измеренная достоверность гейта по всем парам ионов составила 96.3(3)%;

3. Проведено общее теоретическое исследование двухкубитных операций на ионах в кудитном пространстве. Предложены методы компенсации и стабилизации дополнительных фаз, возникающих в кудитном случае, позволяющие снизить чувствительность этих фаз к дрейфам колебательных частот минимум в 4 раза на диапазоне дрейфа 500 Гц, а соответствующую ошибку гейта — минимум на порядок;

4. Теоретически проанализировано влияние фазовых шумов лазера на достоверность MS гейта, найдены два основных частотных диапазона в спектре шума, формирующих ошибку. Для спектра шума, медленно меняющегося относительно обратной длительности гейта, получены явные выражения для ошибки в каждом из диапазонов;

5. Экспериментально реализована фильтрация лазерного излучения с использованием фильтрующего резонатора Фабри-Перо с резкостью $3 \cdot 10^4$ методом двухэтапной привязки. Получена оценка достижимой этим методом ошибки MS гейта, вызванной быстрым фазовым шумом лазера, величиной, меньшей 10^{-7}.

В заключение я хочу поблагодарить людей, без которых не смог бы написать эту диссертацию. В первую очередь своего научного руководителя, Ксению Юрьевну Хабарову, за чуткое наставничество на всем протяжении аспирантуры и до неё, а также за ценный научный и жизненный опыт. Стоит отдельно упомянуть Николая Николаевича Колачевского, проявившего личную инициативу и пригласившего меня в лабораторию оптики сложных квантовых систем ФИАН на 4 курсе бакалавриата, с чего и началась моя научная карьера. Я безмерно признателен своим преподавателям кафедры квантовой радиофизики МФТИ, которые дали мне качественное образование в области квантовой и атомной оптики и лазерной спектроскопии. Я благодарю своих коллег и товарищей по ионной группе: Илью Заливако, Илью Семерикова, Александра Борисенко, Михаила Аксёнова, Павла Сидорова, Андрея Королькова,

Кристину Галстян, Илью Герасина, Павла Каменских, Василия Смирнова, Никиту Жаднова, Алексея Русских и Романа Сафонова — за создание приятной атмосферы в команде и неоценимый вклад в мою работу. Также выражаю благодарность всему коллективу лаборатории оптики сложных квантовых систем за сплочённость, готовность прийти на помощь и за хорошее настроение.

Наконец, я благодарю своих друзей, родных и близких за поддержку, терпение и любовь. Пусть эта работа служит подтверждением, что вы самые лучшие и самые дорогие люди в моей жизни ♡

Список сокращений и условных обозначений

AWG — Генератор сигналов произвольной формы (Arbitrary Waveform Generator)

COM — Колебательная мода центра масс (Center Of Mass)

ECDL — Диодный лазер с внешним резонатором (External Cavity Diode Laser)

FWHM — Полная ширина на полувысоте (Full Width at Half Maximum)

LS гейт — Гейт на световом сдвиге (Light Shift)

MS гейт — Гейт Мёльмера-Зоренсена (Mølmer-Sørensen)

RB — Рандомизированный бенчмаркинг (Randomized Benchmarking)

ULE — Ultra Low Expansion, стекло с низким коэффициентом теплового расширения

АОМ — Акустооптический модулятор

ГВГ — Генератор второй гармоники

ЛФД — Лавинный фотодиод

ПДХ — Метод Паунда-Дривера-Холла

ПИД — Пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор

РУ — Рупорный усилитель

РЧ (RF) — Радиочастота

СПМ — Спектральная плотность мощности

ФАПЧ — Фазовая автоподстройка частоты

ФД — Фотодиод

ФП — Фильтр-пробка

ЭОМ — Электрооптический модулятор

Список литературы

1. *Grover L. K.* A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search // Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. — New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, 1996. — С. 212–219. — (STOC '96).
2. *Buonaiuto G.*, *Gargiulo F.*, *De Pietro G.* [и др.]. Best Practices for Portfolio Optimization by Quantum Computing, Experimented on Real Quantum Devices // Scientific Reports. — 2023. — Т. 13, № 1. — С. 19434.
3. *Li W.*, *Lu Z.-d.*, *Deng D.-L.* Quantum Neural Network Classifiers: A Tutorial // SciPost Physics Lecture Notes. — 2022. — С. 061.
4. *Micheletti C.*, *Hauke P.*, *Faccioli P.* Polymer Physics by Quantum Computing // Physical Review Letters. — 2021. — Т. 127, № 8. — С. 080501.
5. *Mulligan V. K.*, *Melo H.*, *Merritt H. I.* [и др.]. Designing Peptides on a Quantum Computer. — 2020.
6. *Kitai K.*, *Guo J.*, *Ju S.* [и др.]. Designing Metamaterials with Quantum Annealing and Factorization Machines // Physical Review Research. — 2020. — Т. 2, № 1. — С. 013319.
7. *Nielsen M. A.*, *Chuang I. L.* Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. — Cambridge University Press, 2010.
8. *Aharonov D.*, *Ben-Or M.* Fault-Tolerant Quantum Computation with Constant Error Rate // SIAM Journal on Computing. — 2008. — Т. 38, № 4. — С. 1207–1282.
9. *AbuGhanem M.* Google Quantum AI's Quest for Error-Corrected Quantum Computers. — 2024. — arXiv: 2410.00917.
10. *AbuGhanem M.* IBM Quantum Computers: Evolution, Performance, and Future Directions // The Journal of Supercomputing. — 2025. — Т. 81, № 5. — С. 687.
11. *Levine H.*, *Keesling A.*, *Semeghini G.* [и др.]. Parallel Implementation of High-Fidelity Multiqubit Gates with Neutral Atoms // Physical Review Letters. — 2019. — Т. 123, № 17. — С. 170503.
12. *Graham T. M.*, *Song Y.*, *Scott J.* [и др.]. Multi-Qubit Entanglement and Algorithms on a Neutral-Atom Quantum Computer // Nature. — 2022. — Т. 604, № 7906. — С. 457–462.
13. *Chen J.-S.*, *Nielsen E.*, *Ebert M.* [и др.]. Benchmarking a Trapped-Ion Quantum Computer with 30 Qubits // Quantum. — 2024. — Т. 8. — С. 1516.

14. *Ransford A.*, *Allman M. S.*, *Arkinstall J.* [и др.]. A 98-Qubit Trapped-Ion Quantum Computer with All-to-All Connectivity // Nature. — 2026. — Т. 655, № 8121. — С. 81–86.

15. *Yu S.*, *Sun J.*, *Chen K.-C.* [и др.]. Extensible Universal Photonic Quantum Computing with Nonlinearity // Nature Photonics. — 2026. — С. 1–8.

16. *Liu H.-L.*, *Su H.*, *Deng Y.-H.* [и др.]. Gaussian Boson Sampling with 1,024 Squeezed States in 8,176 Modes // Nature. — 2026. — Т. 653, № 8115. — С. 687–692.

17. *Wang P.*, *Luan C.-Y.*, *Qiao M.* [и др.]. Single Ion Qubit with Estimated Coherence Time Exceeding One Hour // Nature Communications. — 2021. — Т. 12, № 1. — С. 233.

18. *Smith M. C.*, *Leu A. D.*, *Miyanishi K.* [и др.]. Single-Qubit Gates with Errors at the 10^{-7} Level // Physical Review Letters. — 2025. — Т. 134, № 23. — С. 230601.

19. *Hughes A. C.*, *Srinivas R.*, *Löschnauer C. M.* [и др.]. Trapped-Ion Two-Qubit Gates with >99.99% Fidelity without Ground-State Cooling. — 2025. — arXiv: 2510.17286.

20. Quantinuum System H2-2 Benchmarks. — URL: docs.quantinuum.com/systems/user_guide/hardware_user_guide/benchmarks/system_benchmarks.html.

21. *Butt F.*, *Pogorelov I.*, *Freund R.* [и др.]. Demonstration of Measurement-Free Universal Logical Quantum Computation // Nature Communications. — 2026. — Т. 17, № 1. — С. 995.

22. *Fisk P.*, *Sellars M.*, *Lawn M.* [и др.]. Accurate Measurement of the 12.6 GHz "Clock" Transition in Trapped $^{171}Yb^{+}$ Ions // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. — 1997. — Т. 44, № 2. — С. 344–354.

23. *DiVincenzo D. P.* The Physical Implementation of Quantum Computation // Fortschritte der Physik: Progress of Physics. — 2000. — Т. 48, № 9–11. — С. 771–783.

24. *Leibfried D.*, *Blatt R.*, *Monroe C.* [и др.]. Quantum Dynamics of Single Trapped Ions // Reviews of Modern Physics. — 2003. — Т. 75, № 1. — С. 281–324.

25. *Lee P. J.*, *Brickman K.-A.*, *Deslauriers L.* [и др.]. Phase Control of Trapped Ion Quantum Gates // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. — 2005. — Т. 7, № 10. — S371.

26. *Aksenov M. A.*, *Zalivako I. V.*, *Semerikov I. A.* [и др.]. Realizing Quantum Gates with Optically Addressable $^{171}Yb^{+}$ Ion Qudits // Physical Review A. — 2023. — Т. 107, № 5. — С. 052612.

27. *Yu N.*, *Maleki L.* Lifetime Measurements of the $4f^{14}5d$ Metastable States in Single Ytterbium Ions // Physical Review A. — 2000. — Т. 61, № 2. — С. 022507.

28. *Cirac J. I.*, *Zoller P.* Quantum Computations with Cold Trapped Ions // Physical Review Letters. — 1995. — Т. 74, № 20. — С. 4091–4094.

29. *Sørensen A.*, *Mølmer K.* Quantum Computation with Ions in Thermal Motion // Physical Review Letters. — 1999. — Т. 82, № 9. — С. 1971–1974.

30. *Leung P. H.*, *Landsman K. A.*, *Figgatt C.* [и др.]. Robust 2-Qubit Gates in a Linear Ion Crystal Using a Frequency-Modulated Driving Force // Physical Review Letters. — 2018. — Т. 120, № 2. — С. 020501.

31. *Blümel R.*, *Grzesiak N.*, *Pisenti N.* [и др.]. Power-Optimal, Stabilized Entangling Gate between Trapped-Ion Qubits // npj Quantum Information. — 2021. — Т. 7, № 1. — С. 1–8.

32. *Choi T.*, *Debnath S.*, *Manning T. A.* [и др.]. Optimal Quantum Control of Multimode Couplings between Trapped Ion Qubits for Scalable Entanglement // Physical Review Letters. — 2014. — Т. 112, № 19. — С. 190502.

33. *Zhu S.-L.*, *Monroe C.*, *Duan L.-M.* Arbitrary-Speed Quantum Gates within Large Ion Crystals through Minimum Control of Laser Beams // Europhysics Letters. — 2006. — Т. 73, № 4. — С. 485.

34. *Wang Y.*, *Hu Z.*, *Sanders B. C.* [и др.]. Qudits and High-Dimensional Quantum Computing // Frontiers in Physics. — 2020. — Т. 8.

35. *Kessel' A. R.*, *Ermakov V. L.* Multiqubit Spin // Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. — 1999. — Т. 70, № 1. — С. 61–65.

36. *Nikolaeva A. S.*, *Kiktenko E. O.*, *Fedorov A. K.* Efficient Realization of Quantum Algorithms with Qudits // EPJ Quantum Technology. — 2024. — Т. 11, № 1. — С. 43.

37. *Nikolaeva A. S.*, *Kiktenko E. O.*, *Fedorov A. K.* Universal Quantum Computing with Qubits Embedded in Trapped-Ion Qudits // Physical Review A. — 2024. — Т. 109, № 2. — С. 022615.

38. *Ringbauer M.*, *Meth M.*, *Postler L.* [и др.]. A Universal Qudit Quantum Processor with Trapped Ions // Nature Physics. — 2022. — Т. 18, № 9. — С. 1053–1057.

39. *Sørensen A.*, *Mølmer K.* Entanglement and Quantum Computation with Ions in Thermal Motion // Physical Review A. — 2000. — Т. 62, № 2. — С. 022311.

40. *Nakav H.*, *Finkelstein R.*, *Peleg L.* [и др.]. Effect of Fast Noise on the Fidelity of Trapped-Ion Quantum Gates // Physical Review A. — 2023. — Т. 107, № 4. — С. 042622.

41. *Drever R. W. P.*, *Hall J. L.*, *Kowalski F. V.* [и др.]. Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator // Applied Physics B. — 1983. — Т. 31, № 2. — С. 97–105.

42. *Galstyan K. P.*, *Zalivako I. V.*, *Kryuchkov D. S.* [и др.]. Injection Locking for Spectral Filtering of the Addressing Laser for Optical Qubits in $^{171}Yb^{+}$ Ions // Radiophysics and Quantum Electronics. — 2024. — Т. 67, № 1. — С. 13–22.

43. *Paul W.*, *Steinwedel H.* Notizen: Ein Neues Massenspektrometer Ohne Magnetfeld // Zeitschrift für Naturforschung A. — 1953. — Т. 8, № 7. — С. 448–450.

44. *Penning F. M.* Ein Neues Manometer Für Niedrige Gasdrucke, Insbesondere Zwischen 10^{-3} und 10^{-5} mm // Physica. — 1937. — Т. 4, № 2. — С. 71–75.

45. *Mathieu É.* Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. — 1868. — Т. 13. — С. 137–203.

46. *Floquet G.* Sur Les Équations Différentielles Linéaires à Coefficients Périodiques // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. — 1883. — Т. 12. — С. 47–88.

47. *Tamir T.* Characteristic Exponents of Mathieu Functions // Mathematics of Computation. — 1962. — Т. 16, № 77. — С. 100–106.

48. *Meixner J.*, *Schäfke F. W.* Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen: Mit Anwendungen auf Physikalische und Technische Probleme. — Springer-Verlag, 2013.

49. *Moses S. A.*, *Baldwin C. H.*, *Allman M. S.* [и др.]. A Race-Track Trapped-Ion Quantum Processor // Physical Review X. — 2023. — Т. 13, № 4. — С. 041052.

50. *Berkeland D. J.*, *Miller J. D.*, *Bergquist J. C.* [и др.]. Minimization of Ion Micromotion in a Paul Trap // Journal of Applied Physics. — 1998. — Т. 83, № 10. — С. 5025–5033.

51. *Brouard S.*, *Plata J.* Heating of a Trapped Ion by Random Fields: The Influence of the Micromotion // Physical Review A. — 2001. — Т. 63, № 4. — С. 043402.

52. *DeVoe R. G.* Role of Laser Damping in Trapped Ion Crystals // Physical Review A. — 1989. — Т. 39, № 9. — С. 4362–4365.

53. *Blümel R.*, *Kappler C.*, *Quint W.* [и др.]. Chaos and Order of Laser-Cooled Ions in a Paul Trap // Physical Review A. — 1989. — Т. 40, № 2. — С. 808–823.

54. *Dubin D. H. E.* Theory of Structural Phase Transitions in a Trapped Coulomb Crystal // Physical Review Letters. — 1993. — Т. 71, № 17. — С. 2753–2756.

55. *Schiffer J. P.* Phase Transitions in Anisotropically Confined Ionic Crystals // Physical Review Letters. — 1993. — Т. 70, № 6. — С. 818–821.

56. *Dubin D. H. E.*, *Schiffer J. P.* Normal Modes of Cold Confined One-Component Plasmas // Physical Review E. — 1996. — Т. 53, № 5. — С. 5249–5267.

57. *Olmschenk S.*, *Younge K. C.*, *Moehring D. L.* [и др.]. Manipulation and Detection of a Trapped $^{171}Yb^{+}$ Hyperfine Qubit // Physical Review A. — 2007. — Т. 76, № 5. — С. 052314.

58. *Zalivako I. V.*, *Nikolaeva A. S.*, *Borisenko A. S.* [и др.]. Towards a Multiqudit Quantum Processor Based on a $^{171}Yb^{+}$ Ion String: Realizing Basic Quantum Algorithms // Quantum Reports. — 2025. — Т. 7, № 2. — С. 19.

59. *Semenin N. V.*, *Borisenko A. S.*, *Zalivako I. V.* [и др.]. Optimization of the Readout Fidelity of the Quantum State of an Optical Qubit in the $^{171}Yb^{+}$ Ion // JETP Letters. — 2021. — Т. 114, № 8. — С. 486–492.

60. *Steck D. A.* Quantum and Atom Optics. — 2023.

61. *Edmonds A. R.* Angular Momentum in Quantum Mechanics. — Princeton University Press, 1957.

62. *Собельман И.* Введение в теорию атомных спектров. — Москва : Физматгиз, 1963.

63. *James D.* Quantum Dynamics of Cold Trapped Ions with Application to Quantum Computation // Applied Physics B. — 1998. — Т. 66, № 2. — С. 181–190.

64. *Peik E.*, *Abel J.*, *Becker T.* [и др.]. Sideband Cooling of Ions in Radio-Frequency Traps // Physical Review A. — 1999. — Т. 60, № 1. — С. 439–449.

65. *Diedrich F.*, *Bergquist J. C.*, *Itano W. M.* [и др.]. Laser Cooling to the Zero-Point Energy of Motion // Physical Review Letters. — 1989. — Т. 62, № 4. — С. 403–406.

66. *Lechner R.*, *Maier C.* [и др.]. Electromagnetically-Induced-Transparency Ground-State Cooling of Long Ion Strings // Physical Review A. — 2016. — Т. 93, № 5. — С. 053401.

67. *Feng L.*, *Tan W. L.*, *De A.* [и др.]. Efficient Ground-State Cooling of Large Trapped-Ion Chains with an Electromagnetically-Induced-Transparency Tripod Scheme // Physical Review Letters. — 2020. — Т. 125, № 5. — С. 053001.

68. *Morigi G.*, *Eschner J.*, *Keitel C. H.* Ground State Laser Cooling Using Electromagnetically Induced Transparency // Physical Review Letters. — 2000. — Т. 85, № 21. — С. 4458–4461.

69. *Magnus W.* On the Exponential Solution of Differential Equations for a Linear Operator // Communications on Pure and Applied Mathematics. — 1954. — Т. 7, № 4. — С. 649–673.

70. *Jozsa R.* Fidelity for Mixed Quantum States // Journal of Modern Optics. — 1994. — Т. 41, № 12. — С. 2315–2323.

71. *Cahill K. E.*, *Glauber R. J.* Ordered Expansions in Boson Amplitude Operators // Physical Review. — 1969. — Т. 177, № 5. — С. 1857–1881.

72. *Abramowitz M.*, *Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — Courier Corporation, 1965.

73. *Nielsen M. A.* A Simple Formula for the Average Gate Fidelity of a Quantum Dynamical Operation // Physics Letters A. — 2002. — Т. 303, № 4. — С. 249–252.

74. *Wu Y.* Noise Analysis for High-Fidelity Quantum Entangling Gates in an Anharmonic Linear Paul Trap // Physical Review A. — 2018. — Т. 97, № 6.

75. *Emerson J.*, *Alicki R.*, *Życzkowski K.* Scalable Noise Estimation with Random Unitary Operators // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. — 2005. — Т. 7, № 10. — S347.

76. *Dankert C.*, *Cleve R.*, *Emerson J.* [и др.]. Exact and Approximate Unitary 2-Designs and Their Application to Fidelity Estimation // Physical Review A. — 2009. — Т. 80, № 1. — С. 012304.

77. *Knill E.*, *Leibfried D.*, *Reichle R.* [и др.]. Randomized Benchmarking of Quantum Gates // Physical Review A. — 2008. — Т. 77, № 1. — С. 012307.

78. *Magesan E.*, *Gambetta J. M.*, *Emerson J.* Characterizing Quantum Gates via Randomized Benchmarking // Physical Review A. — 2012. — Т. 85, № 4. — С. 042311.

79. *Riehle F.* Frequency Standards: Basics and Applications. — John Wiley & Sons, 2006.

80. *Fedorov A. K.*, *Gisin N.*, *Beloussov S. M.* [и др.]. Quantum Computing at the Quantum Advantage Threshold: A down-to-Business Review. — 2022. — arXiv: 2203.17181.

81. *Kiktenko E. O.*, *Nikolaeva A. S.*, *Fedorov A. K.* Colloquium: Qudits for Decomposing Multiqubit Gates and Realizing Quantum Algorithms // Reviews of Modern Physics. — 2025. — Т. 97, № 2. — С. 021003.

82. *Ralph T. C.*, *Resch K. J.*, *Gilchrist A.* Efficient Toffoli Gates Using Qudits // Physical Review A. — 2007. — Т. 75, № 2. — С. 022313.

83. *Fedorov A.*, *Steffen L.*, *Baur M.* [и др.]. Implementation of a Toffoli Gate with Superconducting Circuits // Nature. — 2012. — Т. 481, № 7380. — С. 170–172.

84. *Nikolaeva A. S.*, *Kiktenko E. O.*, *Fedorov A. K.* Decomposing the Generalized Toffoli Gate with Qutrits // Physical Review A. — 2022. — Т. 105, № 3. — С. 032621.

85. *Nikolaeva A. S.*, *Zalivako I. V.*, *Borisenko A. S.* [и др.]. Scalable Improvement of the Generalized Toffoli Gate Realization Using Trapped-Ion-Based Qutrits // Physical Review Letters. — 2025. — Т. 135, № 6. — С. 060601.

86. *Kazmina A. S.*, *Zalivako I. V.*, *Borisenko A. S.* [и др.]. Demonstration of a Parity-Time-Symmetry-Breaking Phase Transition Using Superconducting and Trapped-Ion Qutrits // Physical Review A. — 2024. — Т. 109, № 3. — С. 032619.

87. *Low P. J.*, *White B.*, *Senko C.* Control and Readout of a 13-Level Trapped Ion Qudit // npj Quantum Information. — 2025. — Т. 11, № 1. — С. 85.

88. *Bian J.*, *Liu T.*, *Ding M.* [и др.]. Architecture of a Scalable Universal Quantum Processor by Encoding Two Qubits on Electron and Nuclear Spins in a Trapped Ion // New Journal of Physics. — 2026. — Т. 28, № 1. — С. 014509.

89. *Hrmo P.*, *Wilhelm B.*, *Gerster L.* [и др.]. Native Qudit Entanglement in a Trapped Ion Quantum Processor // Nature Communications. — 2023. — Т. 14, № 1. — С. 2242.

90. *Franke J.*, *Muleady S. R.*, *Kaubruegger R.* [и др.]. Quantum-Enhanced Sensing on Optical Transitions through Finite-Range Interactions // Nature. — 2023. — Т. 621, № 7980. — С. 740–745.

91. *Kirchmair G.*, *Benhelm J.*, *Zähringer F.* [и др.]. Deterministic Entanglement of Ions in Thermal States of Motion // New Journal of Physics. — 2009. — Т. 11, № 2. — С. 023002.

92. *Leibfried D.*, *DeMarco B.*, *Meyer V.* [и др.]. Experimental Demonstration of a Robust, High-Fidelity Geometric Two Ion-Qubit Phase Gate // Nature. — 2003. — Т. 422, № 6930. — С. 412–415.

93. *Aolita L.*, *Kim K.*, *Benhelm J.* [и др.]. High-Fidelity Ion-Trap Quantum Computing with Hyperfine Clock States // Physical Review A. — 2007. — Т. 76, № 4. — С. 040303.

94. *Baldwin C. H.*, *Bjork B. J.*, *Foss-Feig M.* [и др.]. High-Fidelity Light-Shift Gate for Clock-State Qubits // Physical Review A. — 2021. — Т. 103, № 1. — С. 012603.

95. *Guo S.-A.*, *Wu Y.-K.*, *Ye J.* [и др.]. A Site-Resolved Two-Dimensional Quantum Simulator with Hundreds of Trapped Ions // Nature. — 2024. — Т. 630, № 8017. — С. 613–618.

96. *Semenin N. V.*, *Kamenskikh P. A.*, *Zalivako I. V.* [и др.]. On the Local Equivalence of Trapped-Ion Two-Qudit Gates. — 2026. — arXiv: 2606.03643.

97. *Wang K.*, *Yu J.-F.*, *Wang P.* [и др.]. Fast Multi-Qubit Global-Entangling Gates without Individual Addressing of Trapped Ions // Quantum Science and Technology. — 2022. — Т. 7, № 4. — С. 044005.

98. *Brennen G. K.*, *Bullock S. S.*, *O'Leary D. P.* Efficient Circuits for Exact-Universal Computation with Qudits // Quantum Information and Computation. — 2006. — Т. 6, № 4/5. — С. 436–454.

99. *Haddadfarshi F.*, *Mintert F.* High Fidelity Quantum Gates of Trapped Ions in the Presence of Motional Heating // New Journal of Physics. — 2016. — Т. 18, № 12. — С. 123007.

100. *Shapira Y.*, *Shaniv R.*, *Manovitz T.* [и др.]. Theory of Robust Multiqubit Nonadiabatic Gates for Trapped Ions // Physical Review A. — 2020. — Т. 101, № 3. — С. 032330.

101. *Webb A. E.*, *Webster S. C.*, *Collingbourne S.* [и др.]. Resilient Entangling Gates for Trapped Ions // Physical Review Letters. — 2018. — Т. 121, № 18. — С. 180501.

102. *Virtanen P.*, *Gommers R.*, *Oliphant T. E.* [и др.]. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python // Nature Methods. — 2020. — Т. 17, № 3. — С. 261–272.

103. *Roos C. F.* Ion Trap Quantum Gates with Amplitude-Modulated Laser Beams // New Journal of Physics. — 2008. — Т. 10, № 1. — С. 013002.

104. *Kolachevsky N.*, *Alnis J.*, *Parthey C. G.* [и др.]. Low Phase Noise Diode Laser Oscillator for 1S–2S Spectroscopy in Atomic Hydrogen // Optics Letters. — 2011. — Т. 36, № 21. — С. 4299–4301.

105. *Alnis J.*, *Matveev A.*, *Kolachevsky N.* [и др.]. Subhertz Linewidth Diode Lasers by Stabilization to Vibrationally and Thermally Compensated Ultralow-Expansion Glass Fabry-Pérot Cavities // Physical Review A. — 2008. — Т. 77, № 5. — С. 053809.

106. *Schmid F.*, *Weitenberg J.*, *Hänsch T. W.* [и др.]. Simple Phase Noise Measurement Scheme for Cavity-Stabilized Laser Systems // Optics Letters. — 2019. — Т. 44, № 11. — С. 2709.

107. *Zalivako I. V.*, *Semerikov I. A.*, *Borisenko A. S.* [и др.]. Compact Ultrastable Laser System for Spectroscopy of $^2S_{1/2} \rightarrow {}^2D_{3/2}$ Quadrupole Transition in $^{171}Yb^+$ Ion // Quantum Electronics. — 2020. — Т. 50, № 9. — С. 850.

108. *Day M. L.*, *Low P. J.*, *White B.* [и др.]. Limits on Atomic Qubit Control from Laser Noise // npj Quantum Information. — 2022. — Т. 8, № 1. — С. 72.

109. *Lu H.*, *Su J.*, *Xie C.* [и др.]. Experimental Investigation about Influences of Longitudinal-Mode Structure of Pumping Source on a Ti:Sapphire Laser // Optics Express. — 2011. — Т. 19, № 2. — С. 1344–1353.

110. *Zhang W.-N.*, *Li C.*, *Mo S.-P.* [и др.]. A Compact Low Noise Single Frequency Linearly Polarized DBR Fiber Laser at 1550 Nm // Chinese Physics Letters. — 2012. — Т. 29, № 8. — С. 084205.

111. *Galzerano G.*, *Laporta P.*, *Bonelli L.* [и др.]. Single-Frequency Diode-Pumped Yb:KYF_4 Laser around 1030 Nm // Optics Express. — 2007. — Т. 15, № 6. — С. 3257–3264.

112. *Numata K.*, *Kemery A.*, *Camp J.* Thermal-Noise Limit in the Frequency Stabilization of Lasers with Rigid Cavities // Physical Review Letters. — 2004. — Т. 93, № 25. — С. 250602.

113. *Kessler T.*, *Legero T.*, *Sterr U.* Thermal Noise in Optical Cavities Revisited // JOSA B. — 2012. — Т. 29, № 1. — С. 178–184.

114. *Milani G.*, *Rauf B.*, *Barbieri P.* [и др.]. Multiple Wavelength Stabilization on a Single Optical Cavity Using the Offset Sideband Locking Technique // Optics Letters. — 2017. — Т. 42, № 10. — С. 1970–1973.

115. *Westergaard P. G.* Strontium Optical Lattice Clock: In Quest of the Ultimate Performance : тех. отч. / Laboratoire des Systemes de Reference Temps-Espace du Lab. National de Metrologie et d'Essais, 75 - Paris (France). — 2010. — FRNC-TH–8042.

116. *Lidar D. A.*, *Chuang I. L.*, *Whaley K. B.* Decoherence-Free Subspaces for Quantum Computation // Physical Review Letters. — 1998. — Т. 81, № 12. — С. 2594–2597.

117. *Barenco A.*, *Berthiaume A.*, *Deutsch D.* [и др.]. Stabilization of Quantum Computations by Symmetrization // SIAM Journal on Computing. — 1997. — Т. 26, № 5. — С. 1541–1557.

118. *Zanardi P.*, *Rasetti M.* Noiseless Quantum Codes // Physical Review Letters. — 1997. — Т. 79, № 17. — С. 3306–3309.

119. *Zanardi P.* Stabilizing Quantum Information // Physical Review A. — 2000. — Т. 63, № 1.

120. *Duan L.-M.*, *Guo G.-C.* Preserving Coherence in Quantum Computation by Pairing Quantum Bits // Physical Review Letters. — 1997. — Т. 79, № 10. — С. 1953–1956.

121. *Ban M.* Photon-Echo Technique for Reducing the Decoherence of a Quantum Bit // Journal of Modern Optics. — 1998. — Т. 45, № 11. — С. 2315–2325.

122. *Viola L.*, *Knill E.*, *Lloyd S.* Dynamical Decoupling of Open Quantum Systems // Physical Review Letters. — 1999. — Т. 82, № 12. — С. 2417–2421.

123. *Manovitz T.*, *Rotem A.*, *Shaniv R.* [и др.]. Fast Dynamical Decoupling of the Mølmer-Sørensen Entangling Gate // Physical Review Letters. — 2017. — Т. 119, № 22. — С. 220505.

124. *Zalivako I. V.*, *Borisenko A. S.*, *Semerikov I. A.* [и др.]. Continuous Dynamical Decoupling of Optical $^{171}Yb^{+}$ Qudits with Radiofrequency Fields // Frontiers in Quantum Science and Technology. — 2023. — Т. 2.

125. *Kang M.*, *Wang Y.*, *Fang C.* [и др.]. Designing Filter Functions of Frequency-Modulated Pulses for High-Fidelity Two-Qubit Gates in Ion Chains // Physical Review Applied. — 2023. — Т. 19, № 1. — С. 014014.

126. *Debnath S.*, *Linke N. M.*, *Figgatt C.* [и др.]. Demonstration of a Small Programmable Quantum Computer with Atomic Qubits // Nature. — 2016. — Т. 536, № 7614. — С. 63–66.

127. *Löschnauer C.*, *Mosca Toba J.*, *Hughes A.* [и др.]. Scalable, High-Fidelity All-Electronic Control of Trapped-Ion Qubits // PRX Quantum. — 2025. — Т. 6, № 4. — С. 040313.

128. *Anikin E.*, *Chuchalin A.*, *Morozov N.* [и др.]. Fast Mølmer-Sørensen Gates in Trapped-Ion Quantum Processors with Compensated Carrier Transition // Physical Review Applied. — 2025. — Т. 24, № 1. — С. 014044.

129. *Di Domenico G.*, *Schilt S.*, *Thomann P.* Simple Approach to the Relation between Laser Frequency Noise and Laser Line Shape // Applied Optics. — 2010. — Т. 49, № 25. — С. 4801–4807.

130. *Schindler P.*, *Nigg D.*, *Monz T.* [и др.]. A Quantum Information Processor with Trapped Ions // New Journal of Physics. — 2013. — Т. 15, № 12. — С. 123012.

131. *Akerman N.*, *Navon N.*, *Kotler S.* [и др.]. Universal Gate-Set for Trapped-Ion Qubits Using a Narrow Linewidth Diode Laser // New Journal of Physics. — 2015. — Т. 17, № 11. — С. 113060.

132. *Schawlow A. L.*, *Townes C. H.* Infrared and Optical Masers // Physical Review. — 1958. — Т. 112, № 6. — С. 1940–1949.

133. *Henry C.* Theory of the Linewidth of Semiconductor Lasers // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 1982. — Т. 18, № 2. — С. 259–264.

134. *van der Ziel A.* Noise in Solid-State Devices and Lasers // Proceedings of the IEEE. — 1970. — Т. 58, № 8. — С. 1178–1206.

135. *Tsunekane M.*, *Taguchi N.*, *Inaba H.* High-Power, Efficient, Low-Noise, Continuous-Wave All-Solid-State Ti:Sapphire Laser // Optics Letters. — 1996. — Т. 21, № 23. — С. 1912–1914.

136. *Huntemann N.*, *Sanner C.*, *Lipphardt B.* [и др.]. Single-Ion Atomic Clock with 3×10^{-18} Systematic Uncertainty // Physical Review Letters. — 2016. — Т. 116, № 6. — С. 063001.

137. *Chou C. W.*, *Hume D. B.*, *Koelemeij J. C. J.* [и др.]. Frequency Comparison of Two High-Accuracy Al^+ Optical Clocks // Physical Review Letters. — 2010. — Т. 104, № 7. — С. 070802.

138. *Le Targat R.*, *Lorini L.*, *Le Coq Y.* [и др.]. Experimental Realization of an Optical Second with Strontium Lattice Clocks // Nature Communications. — 2013. — Т. 4, № 1. — С. 2109.

139. *Hinkley N.*, *Sherman J. A.*, *Phillips N. B.* [и др.]. An Atomic Clock with 10^{-18} Instability // Science. — 2013. — Т. 341, № 6151. — С. 1215–1218.

140. *Åström K. J.*, *Murray R. M.* Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers, Second Edition. — Princeton University Press, 2021.

141. *Farinas A. D.*, *Gustafson E. K.*, *Byer R. L.* Frequency and Intensity Noise in an Injection-Locked, Solid-State Laser // JOSA B. — 1995. — Т. 12, № 2. — С. 328–334.

142. Red Pitaya Website. — URL: `redpitaya.com`.

143. Digital Phase-locked-loop for Locking a Frequency Comb Using a Red Pitaya. — URL: `github.com/jddes/Frequency-comb-DPLL`.

144. *Paldus B. A.*, *Harb C. C.*, *Spence T. G.* [и др.]. Cavity-Locked Ring-down Spectroscopy // Journal of Applied Physics. — 1998. — Т. 83, № 8. — С. 3991–3997.

145. *Ryou A.*, *Simon J.* Active Cancellation of Acoustical Resonances with an FPGA FIR Filter // Review of Scientific Instruments. — 2017. — Т. 88, № 1. — С. 013101.

146. *Wang W.*, *Subhankar S.*, *Britton J. W.* A Practical Guide to Feedback Control for Pound–Drever–Hall Laser Linewidth Narrowing // Applied Physics B. — 2025. — Т. 131, № 7. — С. 146.

147. *Farsi A.*, *Siciliani de Cumis M.*, *Marino F.* [и др.]. Photothermal and Thermo-Refractive Effects in High Reflectivity Mirrors at Room and Cryogenic Temperature // Journal of Applied Physics. — 2012. — Т. 111, № 4. — С. 043101.

Приложение А

Амплитудно-частотное шейпирование импульсов в кудитном MS гейте

Для общего случая амплитудно-частотного шейпирования кудитного MS гейта функция импульса имеет вид разложения в ряд Фурье:

$$g(t) = \sum_{p=1}^{P} \Omega_p \sin\left(\frac{2\pi p t}{\tau}\right), \tag{A.1}$$

где Ω_p — действительная амплитуда p-й Фурье-гармоники, P — их количество, взятое для данного импульса. Параметр смещения α_{lj} определяется уравнением (3.7):

$$\alpha_{lj} = -i\eta_{lj} \int_0^\tau g(t) e^{i\omega_l t}\, dt. \tag{A.2}$$

Уравнение $\alpha_{lj} = 0$ при фиксированном l представляет собой два независимых уравнения: одно для действительной части и одно для мнимой. Однако можно уменьшить количество уравнений в два раза, воспользовавшись видом функции $g(t)$. Введём следующие вспомогательные функции:

$$\begin{aligned} h_l^+(t) &= \cos(\omega_l t)\cos(\omega_l \tau/2) + \sin(\omega_l t)\sin(\omega_l \tau/2) = \cos(\omega_l(t-\tau/2)), \\ h_l^-(t) &= \sin(\omega_l t)\cos(\omega_l \tau/2) - \cos(\omega_l t)\sin(\omega_l \tau/2) = \sin(\omega_l(t-\tau/2)). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Интеграл в (A.2) представляется в виде

$$\int_0^\tau g(t) e^{i\omega_l t}\, dt = \int_0^\tau g(t)\cos(\omega_l t)\, dt + i\int_0^\tau g(t)\sin(\omega_l t)\, dt. \tag{A.4}$$

Заметим, что, как следует из определения функций $h_l^\pm$:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_l t) &= h_l^+(t)\cos(\omega_l \tau/2) - h_l^-(t)\sin(\omega_l \tau/2), \\ \sin(\omega_l t) &= h_l^+(t)\sin(\omega_l \tau/2) + h_l^-(t)\cos(\omega_l \tau/2), \end{aligned} \tag{A.5}$$

следовательно, интеграл можно привести к виду

$$\int_0^\tau g(t) e^{i\omega_l t}\, dt = e^{i\omega_l \tau/2}\left[\int_0^\tau g(t) h_l^+(t)\, dt + i\int_0^\tau g(t) h_l^-(t)\, dt\right]. \tag{A.6}$$

Функция $h_l^+(t)$ чётная относительно $\tau/2$, а функция импульса нечётная (это следует из соотношения $g(\tau - t) = -g(t)$), поэтому первый интеграл в (A.6) равен нулю как интеграл от

нечётной функции по симметричному интервалу. Следовательно, для параметров смещения имеем

$$\alpha_{lj} = \eta_{lj} e^{i\omega_l \tau/2} \int\limits_0^\tau g(t) h_l^-(t)\, dt = \eta_{lj} e^{i\omega_l \tau/2} \sum_{p=1}^{P} M_{l,p}^{(0)} \Omega_p, \tag{A.7}$$

где

$$M_{l,p}^{(0)} = \int\limits_0^\tau \sin(2\pi p t/\tau) \sin(\omega_l (t - \tau/2))\, dt. \tag{A.8}$$

Таким образом, комплексное уравнение $\alpha_{lj} = 0$ теперь сводится к одному действительному. Чтобы обеспечить стабилизацию этих параметров относительно дрейфов частот, используются рассуждения, аналогичные разделу 2.4.3. Отсюда сразу получаем условия стабилизации порядка K методом моментов (включая условие замыкания траекторий):

$$\sum_{p=1}^{P} M_{l,p}^{(n)} \Omega_p = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, N,\ n = 0, 1, \ldots, K, \tag{A.9}$$

где

$$M_{l,p}^{(n)} = \frac{\partial^n M_{l,p}^{(0)}}{\partial \omega_l^n} = \int\limits_0^\tau (t - \tau/2)^n \sin(2\pi p t/\tau) \sin(\omega_l (t - \tau/2) + \pi n/2)\, dt. \tag{A.10}$$

При введении вектора амплитуд $\mathbf{\Omega} = (\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{P-1})^{\mathrm{T}}$ данная система записывается в виде СЛАУ $\mathbf{M\Omega} = \mathbf{0}$, где матрица $\mathbf{M}$ составлена из коэффициентов $M_{l,p}^{(n)}$. Фазы χ_{jk}^{MS} вычисляются аналогично подстановкой (A.1):

$$\chi_{jk}^{\mathrm{MS}} = \sum_{p,q=1}^{P} (S_{jk})_{pq} \Omega_p \Omega_q = \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}} \mathbf{S}_{jk} \mathbf{\Omega}, \tag{A.11}$$

где элементы симметричной матрицы $\mathbf{S}_{jk}$ равны

$$\begin{aligned}
(S_{12})_{pq} &= \sum_l \eta_{l1}\eta_{l2} \int\limits_0^\tau dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \,[\sin(2\pi p t_1/\tau) \sin(2\pi q t_2/\tau) + \\
&\qquad + \sin(2\pi q t_1/\tau) \sin(2\pi p t_2/\tau)] \sin(\omega_l (t_1 - t_2)), \\
(S_{jj})_{pq} &= \frac{1}{2} \sum_l \eta_{lj}^2 \int\limits_0^\tau dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \,[\sin(2\pi p t_1/\tau) \sin(2\pi q t_2/\tau) + \\
&\qquad + \sin(2\pi q t_1/\tau) \sin(2\pi p t_2/\tau)] \sin(\omega_l (t_1 - t_2)).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Приложение Б

Стабилизация локальных и нелокальных фаз в кудитном MS гейте методом проекций

Для подавления чувствительности фаз χ_{jk}^{MS} к дрейфам частот используется метод проекций, заключающийся в следующем. Находится решение СЛАУ, заданной условием замыкания траекторий и стабилизацией методом моментов:

$$\mathbf{M}\mathbf{\Phi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}, \tag{Б.1}$$

где $\mathbf{\Phi}$ — фундаментальная система решений, $\mathbf{\Lambda}$ — вектор произвольных констант. В пространстве решений СЛАУ фаза χ_{jk}^{MS} вычисляется как

$$\chi_{jk}^{\mathrm{MS}} = \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{jk}\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}(\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{jk}\mathbf{\Phi})\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{jk}\mathbf{\Lambda}, \tag{Б.2}$$

где $\mathbf{R}_{jk} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_{jk}\mathbf{\Phi}$. Чувствительность этой фазы к дрейфу частоты определённой моды ω_l при фиксированном векторе амплитуд $\mathbf{\Omega}$ задаётся производной

$$\frac{\partial\chi_{jk}^{\mathrm{MS}}}{\partial\omega_l} = \mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{S}_{jk}}{\partial\omega_l}\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{S}_{jk}}{\partial\omega_l}\mathbf{\Phi}\right)\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_{jk}^{(l)}\mathbf{\Lambda}, \tag{Б.3}$$

где $\mathbf{R}_{jk}^{(l)} = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(\partial\mathbf{S}_{jk}/\partial\omega_l)\mathbf{\Phi}$. Это выражение также является симметричной квадратичной формой от $\mathbf{\Lambda}$. Следовательно, её можно диагонализовать:

$$\mathbf{R}_{jk}^{(l)} = \sum_i \lambda_i^{(l)}\mathbf{v}_i^{(l)}(\mathbf{v}_i^{(l)})^{\mathrm{T}}, \tag{Б.4}$$

где $(\lambda_i^{(l)}, \mathbf{v}_i^{(l)})$ — собственное значение и соответствующий ему ортонормированный собственный вектор $\mathbf{R}_{jk}^{(l)}$. Тогда

$$\frac{\partial\chi_{jk}^{\mathrm{MS}}}{\partial\omega_l} = \sum_i \lambda_i^{(l)}|(\mathbf{v}_i^{(l)})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}|^2. \tag{Б.5}$$

При фиксированной длине вектора $\mathbf{\Lambda}$ (напомним, что минимизируемая целевая функция равна $\mathbf{\Omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda}$, т.е. квадрату длины вектора амплитуд) максимальное значение $|\,\partial\chi_{jk}^{\mathrm{MS}}/\partial\omega_l\,|$ будет достигаться на собственном векторе с максимальной абсолютной величиной собственного значения. Метод проекций состоит в том, чтобы уменьшить эту чувствительность, исключив данный вектор из пространства поиска. В более общем случае исключается не один, а M собственных векторов, первых по убыванию $|\lambda_i^{(l)}|$. Исключение вектора из пространства решений проводится ортогональным дополнением (отсюда и название метода):

$$(\mathbf{v}_i^{(l)})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, M,\ l = 1, 2, \ldots, N. \tag{Б.6}$$

Для удобства воспользуемся тождеством $\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi} = \mathbb{I}$:

$$(\mathbf{v}_i^{(l)})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{v}_i^{(l)})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Phi}\mathbf{v}_i^{(l)})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega} = 0. \tag{Б.7}$$

Таким образом, метод проекций добавляет линейную систему к уже имеющейся в оригинальной задаче. Тогда СЛАУ с учётом этого метода будет выглядеть так:

$$\mathbf{Q}\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ (\mathbf{\Phi}\mathbf{v}_i^{(l)})^{\mathrm{T}}\Big|_{i=1,\ldots,M}^{l=1,\ldots,N} \end{pmatrix}. \tag{Б.8}$$

При стабилизации более одной фазы χ_{jk}^{MS} этим методом матрица $\mathbf{Q}$ дополняется аналогично соответствующими строками.

Приложение B

Представление произвольного циклического сдвига кудитных состояний через нативные гейты

Любая перестановка кудитных базисных состояний может быть произведена рядом резонансных пи-импульсов между парой состояний, поскольку эта операция меняет местами их амплитуды вероятности (и, соответственно, населённости). Поэтому для задания определённой перестановки достаточно указать последовательность пар, на которых проводятся импульсы. Однако в реальных системах, как правило, для этих импульсов можно использовать только одно фиксированное состояние, поскольку оно спектрально отделено от остальных (определим это состояние как $|0\rangle$ или просто 0 для краткости). Тогда постановка задачи о циклическом сдвиге на произвольный шаг m формулируется следующим образом: составить список индексов из $1, 2, \ldots, d-1$ в массиве $[0, 1, \ldots, d-1]$, такой, что в результате последовательного обмена с индексом 0 каждого элемента этого списка весь массив оказался бы циклически сдвинутым на m.

Для решения задачи положим $-d/2 < m \leq d/2$. Если нет, тогда переопределим сдвиг: $m \to (m \bmod d) - d \cdot \theta\left((m \bmod d) - d/2\right)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Такая замена является эквивалентной, поскольку, во-первых, оператор, реализующий сдвиг на m, равен $\widehat{X}^d_m = \widehat{X}^d_{m-d} = \widehat{X}^d_{-(d-m)}$, а во-вторых, любой сдвиг $\widehat{X}^d_m$ с $m < 0$ может быть реализован простым разворотом последовательности нативных гейтов для $\widehat{X}^d_{|m|}$ в обратную сторону, поскольку нативные попарные обмены амплитудами состояний являются обратными самим себе. Заметим, что список $1, 2, \ldots, d-1$ реализует оператор $\widehat{X}^d_1$ за $d-1 = O(d)$ нативных гейтов. Формально можно было бы решить исходную задачу, повторив этот список m раз, в силу $\widehat{X}^d_m = \left(\widehat{X}^d_1\right)^m$, но такое решение будет содержать $O(md)$ нативных гейтов, что нежелательно в случае больших $m \lesssim d/2$: рост числа гейтов в этом случае будет $O(d^2)$.

Ниже изложен алгоритм, позволяющий осуществить $\widehat{X}^d_m$ не более чем за $3d/2-2 = O(d)$ нативных гейтов, так что рост их числа линейный с ростом d и не зависит от m. Для изложения алгоритма введём понятие *цикла* (это понятие не имеет ничего общего с понятием цикла LS гейта, введённым в разделе 3.4 и фигурирует только в пределах настоящего Приложения). Циклом называется последовательность неповторяющихся индексов вида

$$a_n = (a_0 + mn) \bmod d, \tag{B.1}$$

заданная начальным элементом a_0 и шагом m. Иными словами, цикл есть замкнутая по-

следовательность индексов массива, разнесённых расстоянием m между соседними своими элементами. Легко видеть, что циклическая перестановка массива на m сдвинет каждый цикл на единицу. Отсюда несложно получить искомый алгоритм: сначала определить все циклы в массиве для заданного m, затем циклически сдвинуть каждый массив на единицу, пользуясь уже известным разложением $\widehat{X}_1^d$ (рис. B.1).

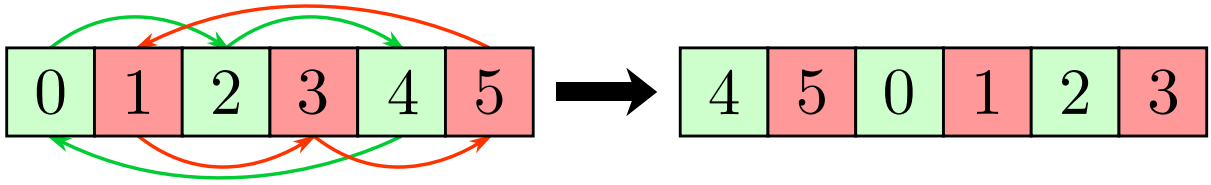


Рис. B.1. Пример работы алгоритма при $d = 6, m = 2$. Цветные стрелки показывают сдвиги в каждом цикле

В нашем случае есть ограничение на обязательное использование индекса 0 для попарных обменов. Поэтому только для цикла вида $0, m, 2m, \ldots$ индексы $m, 2m, \ldots, d - m$ могут быть использованы напрямую. Для всех остальных циклов состояние 0 фигурирует в качестве буфера, который фиктивно можно добавить к началу цикла. Для такого дополненного цикла можно провести операцию $\widehat{X}_1^d$ напрямую, уже с включённым индексом 0. После сдвига на единицу производится дополнительный обмен состояний 0 и 1 для возвращения буфера на исходное положение, что в результате приводит к требуемому сдвигу цикла (рис. B.2). Для определения всех циклов заметим, что длина одного цикла (число уникальных индексов) может быть вычислено как

$$L = \frac{\text{НОК}(m, d)}{m} = \frac{d}{\text{НОД}(m, d)}, \tag{B.2}$$

и эта длина одинаковая для всех циклов. Тогда их количество равно $g = d/L = \text{НОД}(m, d)$.

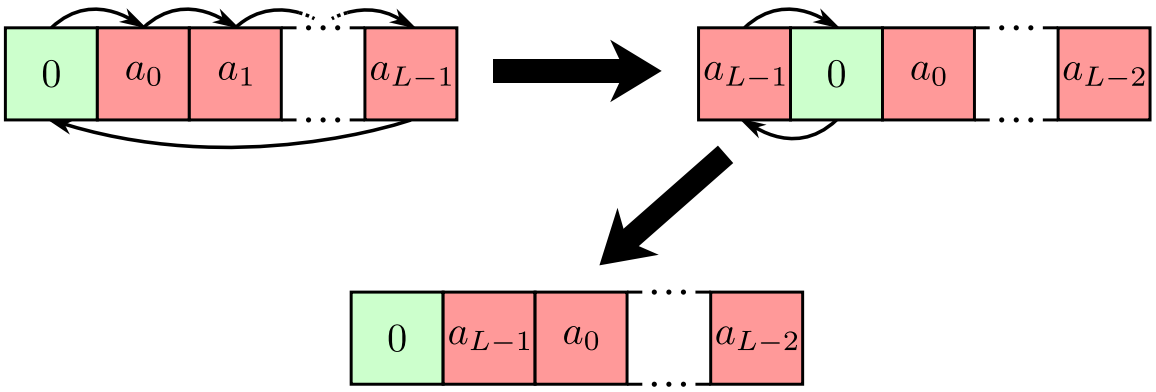


Рис. B.2. Сдвиг произвольного цикла (не включающего 0) на единицу с использованием 0 как буфера. Стрелки показывают соответствующие сдвиги отдельных состояний

Каждый из элементов $0, 1, \ldots, g-1$ принадлежит различному циклу, поскольку расстояние между двумя элементами одного цикла должно делиться на g. Таким образом, получаем, что все g циклов генерируются первыми g элементами массива. Тогда можно записать решение задачи (список индексов последовательных обменов с 0) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&m, 2m, \ldots, d-m,\\
&1, m+1, 2m+1, \ldots, d-m+1, 1,\\
&2, m+2, 2m+2, \ldots, d-m+2, 2,\\
&\ldots,\\
&g-1, m+(g-1), 2m+(g-1), \ldots, d-m+(g-1), g-1.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Количество гейтов в этом списке может быть вычислено так: первый цикл требует $L-1$ гейтов, каждый последующий требует $L+1$ гейтов из-за наличия буферного элемента 0. Тогда суммарное число гейтов равно

$$N = (L-1) + (g-1)(L+1) = d + \text{НОД}(m,d) - 2. \tag{B.4}$$

Максимальное значение $\text{НОД}(m,d)$ при фиксированном d есть $d/2$, поэтому в худшем случае количество гейтов для реализации алгоритма равно $3d/2 - 2 = O(d)$.

Приложение Г

Эквивалентность редуцированного кудитного LS гейта и ZZ гейта на вложенных кубитах

Гейт типа ZZ на двух кубитах задаётся соотношением

$$\mathsf{ZZ}(\chi) = \exp(i\chi\sigma_z \otimes \sigma_z). \tag{Г.1}$$

В интересующем нас контексте каждый кубит вложен в отдельный кудит размерностью $d = 2^n$. Базисное состояние одного кудита соответствует базисному состоянию вложенной кубитной подсистемы:

$$|s\rangle = |x_1 x_2 \dots x_n\rangle, \quad |s'\rangle = |y_1 y_2 \dots y_n\rangle \tag{Г.2}$$

где $x_1 x_2 \dots x_n$ — двоичная запись числа s, а $y_1 y_2 \dots y_n$ — числа s'. Общее состояние всего кубитного регистра записывается в виде

$$|ss'\rangle = |x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_n\rangle. \tag{Г.3}$$

ZZ гейт, действующий на i-й кубит первого кудита и на j-й кубит второго кудита, диагонален в пространстве этих кубитов и не затрагивает состояния остальных. Значит, он диагонален в полном пространстве, и его действие на базисное кубитное состояние равно

$$\mathsf{ZZ}(\chi)|x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_n\rangle = \exp\bigl(i\chi(-1)^{x_i - y_j}\bigr)|x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_n\rangle. \tag{Г.4}$$

В частности, для последних кубитов каждого кудита операция запишется в виде

$$\mathsf{ZZ}(\chi)|x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_n\rangle = \exp\bigl(i\chi(-1)^{x_n - y_n}\bigr)|x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_n\rangle. \tag{Г.5}$$

Но $x_n = s \bmod 2$, $y_n = s' \bmod 2$. Тогда действие гейта можно записать так:

$$\mathsf{ZZ}(\chi)|ss'\rangle = \exp\Bigl(i\chi(-1)^{(s-s') \bmod 2}\Bigr)|ss'\rangle. \tag{Г.6}$$

Таким образом, получаем, что на каждое двухкудитное состояние $|ss'\rangle$ в результате ZZ гейта набирается фаза, причём

$$\mathsf{ZZ}(\chi)|ss'\rangle = \begin{cases} e^{i\chi}|ss'\rangle, & s - s' \text{ чётное}, \\ e^{-i\chi}|ss'\rangle, & s - s' \text{ нечётное}. \end{cases} \tag{Г.7}$$

Сравнивая с выражением (3.50), находим, что с точностью до глобальной фазы рассмотренный гейт эквивалентен кудитному LS гейту, редуцированному последовательностью спинового эха типа (c).

Приложение Д

Средняя ошибка шумного гейта

В терминах главы 4 идеальный оператор гейта равен $\widehat{U}_0$, а фактический выражается как $\widehat{U} = \widehat{U}_0(1 - i\widehat{T})$. Для вычисления средней ошибки воспользуемся формулой (2.90):

$$F = \frac{\sum\limits_p \operatorname{Tr}\left(\widehat{U}_0\widehat{W}_p^\dagger\widehat{U}_0^\dagger \operatorname{Tr}_m\left[\widehat{U}\widehat{W}_p \otimes \rho_m \widehat{U}^\dagger\right]\right) + d^2}{d^2(d+1)} = \\ = \frac{\sum\limits_p \operatorname{Tr}\left(\widehat{W}_p^\dagger \operatorname{Tr}_m\left[(1 - i\widehat{T})\widehat{W}_p \otimes \rho_m(1 + i\widehat{T}^\dagger)\right]\right) + d^2}{d^2(d+1)}, \quad \text{(Д.1)}$$

где взяты определения главы 2. Возьмём следующий базис $\widehat{W}_p$:

$$\widehat{W}_p = X^k Z^l, \quad \text{(Д.2)}$$

где $p = (k, l)$ — мультииндекс с $k, l = 0, \ldots, d-1$, а X и Z — обобщённые операторы Паули для d-мерной системы:

$$\begin{aligned} X|n\rangle &= |n \oplus 1\rangle, \\ Z|n\rangle &= e^{2\pi i n/d}|n\rangle, \end{aligned} \quad \text{(Д.3)}$$

где $\oplus$ есть сложение по модулю d. Рассмотрим сначала сумму

$$\sum_p \widehat{W}_p^\dagger \widehat{W}_q \widehat{W}_p. \quad \text{(Д.4)}$$

Подставляя (Д.2) с $p = (k, l), q = (k', l')$ и используя легко проверяемое тождество

$$Z^l X^k = e^{\frac{2\pi i}{d}kl} X^k Z^l, \quad \text{(Д.5)}$$

получим

$$\widehat{W}_p^\dagger \widehat{W}_q \widehat{W}_p = e^{\frac{2\pi i}{d}(kl' - lk')}\widehat{W}_q. \quad \text{(Д.6)}$$

Следовательно, сумма равна

$$\sum_p \widehat{W}_p^\dagger \widehat{W}_q \widehat{W}_p = \sum_k e^{\frac{2\pi i}{d}kl'} \sum_l e^{-\frac{2\pi i}{d}lk'}\widehat{W}_q = d^2\delta_{q,0}\widehat{W}_q = d^2\delta_{m,0}\mathbb{I}. \quad \text{(Д.7)}$$

Частичный след по колебательным состояниям (Д.1) раскроем как

$$\widehat{W}_p - i\operatorname{Tr}_m[\widehat{T}\widehat{W}_p \otimes \rho_m] + i\operatorname{Tr}_m[\widehat{W}_p \otimes \rho_m \widehat{T}^\dagger] + \operatorname{Tr}_m[\widehat{T}\widehat{W}_p \otimes \rho_m \widehat{T}^\dagger]. \quad \text{(Д.8)}$$

Первый член даст следующий вклад в сумму в (Д.1):

$$\sum_p \operatorname{Tr}(\widehat{W}_p^\dagger \widehat{W}_p) = d^3. \quad \text{(Д.9)}$$

След по второму слагаемому представляется в виде

$$\mathrm{Tr}_m[\widehat{T}\widehat{W}_p \otimes \rho_m] = \mathrm{Tr}_m[\widehat{T}\rho_m]\widehat{W}_p = \widehat{A}\widehat{W}_p, \tag{Д.10}$$

где $\widehat{A}$ — оператор в кубитном (кудитном для произвольного d) пространстве, следовательно, он может быть разложен по базису $\widehat{W}_k$:

$$\widehat{A} = \sum_k \frac{\mathrm{Tr}(\widehat{W}_k^\dagger \widehat{A})}{\mathrm{Tr}(\widehat{W}_k^\dagger \widehat{W}_k)}\widehat{W}_k = \frac{1}{d}\sum_k \mathrm{Tr}(\widehat{W}_k^\dagger \widehat{A})\widehat{W}_k. \tag{Д.11}$$

После умножения на $\widehat{W}_p^\dagger$ и суммирования по p, выражение (Д.10) будет равно

$$\sum_p \mathrm{Tr}(\widehat{W}_p^\dagger \widehat{A}\widehat{W}_p) = \frac{1}{d}\sum_p\sum_k \mathrm{Tr}(\widehat{W}_k^\dagger \widehat{A})\,\mathrm{Tr}(\widehat{W}_p^\dagger \widehat{W}_k \widehat{W}_p) =$$

$$= d\sum_k \mathrm{Tr}(\widehat{W}_k^\dagger \widehat{A})\delta_{k,0}\,\mathrm{Tr}\,\mathbb{I} = d^2\,\mathrm{Tr}\,\widehat{A} = d^2\,\mathrm{Tr}^{(0)}[\widehat{T}\rho_m], \tag{Д.12}$$

где $\mathrm{Tr}^{(0)}$ — полный след (по всем переменным). Для такого следа операторы в аргументе можно циклически переставить: $\mathrm{Tr}^{(0)}[\widehat{T}\rho_m] = \mathrm{Tr}^{(0)}[\rho_m\widehat{T}]$. Третье слагаемое в (Д.8) упрощается аналогично. Следовательно, они дадут следующий вклад в (Д.1):

$$-id^2\,\mathrm{Tr}^{(0)}[\rho_m\widehat{T}] + id^2\,\mathrm{Tr}^{(0)}[\rho_m\widehat{T}^\dagger] = d^2\,\mathrm{Tr}^{(0)}[\rho_m i(\widehat{T}^\dagger - \widehat{T})]. \tag{Д.13}$$

Поскольку $\widehat{U} = \widehat{U}_0(1 - i\widehat{T})$ унитарная, можно показать, что

$$i(\widehat{T}^\dagger - \widehat{T}) = -\widehat{T}^\dagger\widehat{T}. \tag{Д.14}$$

Поэтому вклад в сумму (Д.1) будет равен

$$d^2\,\mathrm{Tr}^{(0)}[\rho_m i(\widehat{T}^\dagger - \widehat{T})] = -d^2\,\mathrm{Tr}^{(0)}[\rho_m(\widehat{T}^\dagger\widehat{T})] = -d^2\sum_n p_n\left[\mathrm{Tr}(\widehat{T}^\dagger\widehat{T})\right]_{nn}, \tag{Д.15}$$

в силу диагональности ρ_m. Последнее слагаемое в (Д.8) равно

$$\mathrm{Tr}_m[\widehat{T}\widehat{W}_p \otimes \rho_m\widehat{T}^\dagger] = \sum_{mn} p_n\widehat{T}_{mn}\widehat{W}_p\widehat{T}^\dagger_{nm}. \tag{Д.16}$$

Умножая на $\widehat{W}_p^\dagger$, беря след и суммируя по p, получим, аналогично (Д.12):

$$\sum_{mn} p_n\,\mathrm{Tr}\left(\sum_p \widehat{W}_p^\dagger\widehat{T}_{mn}\widehat{W}_p\widehat{T}^\dagger_{nm}\right) = d\sum_{mn} p_n\,\mathrm{Tr}\left(\left(\mathrm{Tr}\,\widehat{T}_{mn}\right)\widehat{T}^\dagger_{nm}\right) =$$

$$= d\sum_{mn} p_n\left(\mathrm{Tr}\,\widehat{T}_{mn}\right)\mathrm{Tr}\left(\widehat{T}^\dagger_{nm}\right) = d\sum_{mn} p_n\left|\mathrm{Tr}\,\widehat{T}_{mn}\right|^2. \tag{Д.17}$$

Совмещая (Д.9), (Д.12), (Д.17) и подставляя в (Д.1), находим среднюю ошибку гейта:

$$\epsilon = 1 - F = \frac{1}{d+1}\sum_n p_n\left[\mathrm{Tr}(\widehat{T}^\dagger\widehat{T})\right]_{nn} - \frac{1}{d(d+1)}\sum_{mn} p_n\left|(\mathrm{Tr}\,\widehat{T})_{mn}\right|^2. \tag{Д.18}$$

Для двух кубитов $d = 4$, и

$$\epsilon = \frac{1}{5}\sum_n p_n\left[\mathrm{Tr}(\widehat{T}^\dagger\widehat{T})\right]_{nn} - \frac{1}{20}\sum_{mn} p_n\left|(\mathrm{Tr}\,\widehat{T})_{mn}\right|^2. \tag{Д.19}$$