

На правах рукописи

Фатеев Илья Сергеевич

**Состояния частичной синхронизации в системах
осцилляторов с супердиффузионным типом взаимодействия**

Специальность 1.3.3. —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Полежаев Андрей Александрович

Официальные оппоненты: **Горский Александр Сергеевич**,
доктор физико-математических наук,
ФГБУН Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук
(ИППИ РАН),
Ведущий научный сотрудник

Осипов Григорий Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им.
Н. И. Лобачевского» (ННГУ),
Заведующий кафедрой теории управления и дина-
мики систем, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследо-
вательский государственный университет имени Н.
Г. Чернышевского» (СГУ)

Защита состоится 28 сентября 2026 г. в 12:00 на заседании диссертационного
совета 24.1.262.04 при Федеральном государственном бюджетном учреждении
науки «Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук» по
адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте ин-
ститута <https://www.lebedev.ru>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения,
просьба направлять по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53,
ученому секретарю диссертационного совета 24.1.262.04.

Автореферат разослан _____ 2026 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.262.04,
доктор физ.-мат. наук
Чернышов Дмитрий Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность исследуемой проблемы

Состояния частичной синхронизации представляют собой яркий пример сложного коллективного поведения, возникающего в распределенных нелинейных динамических системах. Их частный случай — *химерные состояния*¹, являются примером интригующего и контринтуитивного коллективного свойства распределенной системы с однородной конфигурацией, в которой пространственная синхронизация сосуществует с пространственно некогерентной областью. Данные коллективные динамические режимы могут быть обнаружены на базе ансамблей осцилляторов различной природы. К основным можно отнести множественные конфигурации фазовых, механических, химических, оптических и биологических осцилляторов. Общие представления о данных контринтуитивных динамических режимах можно получить в следующих монографиях². Особое внимание стоит уделить возникновению химерных состояний на базе систем взаимодействующих нейронов, с различными нелинейными функциями активации точечных элементов. Среди основных можно выделить нелинейные модели: *Hindmarsh-Rose*³, *FitzHugh-Nagumo*⁴ и *Hodgkin-Huxley*⁵.

Важность состояний частичной синхронизации в общем и химерных состояний в частности, в контексте задач нейронаук связана с важностью процессов синхронизации и рассинхронизации в контексте широкого множества когнитивных процессов. Среди основных можно выделить процессы передачи информации, обработки первичных сенсорных стимулов, консолидации памяти и удержания внимания, формирования функциональной и эффективной связности различными участками нового кортекса и иными комбинациями взаимодействующих функциональных зон⁶. Более того, имеющиеся представления убедительно демонстрируют, что химерные состояния могут ассоциироваться с пространственно локализованной формой нейронной активности, называемой *бамповыми режимами* и однополушарным сном, встречающимся у различных видов вторично-водных млекопитающих и птиц⁷. Многочисленные исследования убедительно демонстрируют, что химерные состояния могут быть связаны с

¹Abrams, D. M. Chimera states for coupled oscillators / D. M. Abrams, S. H. Strogatz // Physical Review Letters. 2004. T. 93, № 17. С. 174102.

²Chimeras / F. Parastesh [и др.] // Physics Reports. 2021. Т. 898. С. 1—114; Zakharova, A. Chimera patterns in networks / A. Zakharova. Springer, 2020.

³Bera, B. K. Chimera states in bursting neurons / B. K. Bera, D. Ghosh, M. Lakshmanan // Physical Review E. 2016. Т. 93, № 1. С. 012205.

⁴Chimera states in brain networks: Empirical neural vs. modular fractal connectivity / T. Chouzouris [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2018. Т. 28, № 4. С. 045112.

⁵Chimera state in complex networks of bistable Hodgkin-Huxley neurons / A. Andreev [и др.] // Physical Review E. 2019. Т. 100, № 2. С. 022224.

⁶Cognitive chimera states in human brain networks / K. Bansal [и др.] // Science Advances. 2019. Т. 5, № 4. eaau8535; Tognoli, E. The metastable brain / E. Tognoli, J. S. Kelso // Neuron. 2014. Т. 81, № 1. С. 35—48.

⁷Chimera states in neuronal networks: A review / S. Majhi [и др.] // Physics of Life Reviews. 2019. Т. 28. С. 100—121.

динамическими особенностями нейронной активации и когнитивными процессами, а также метастабильной активностью головного мозга. Не менее важными с фундаментальной точки зрения являются исследования, подтверждающие возникновение состояний частичной синхронизации в сетях, организованных на основе эмпирических конфигураций определенного типа⁸. В качестве дополнения к вышеизложенному можно представить исследования, отождествляющие динамику состояний частичной синхронизации с фундаментальными процессами передачи информации⁹.

Объективные сложности, связанные с многогранной и крайне комплексной структурой нейронных сетей головного мозга, являются большим вызовом для фундаментального понимания процессов обработки информации. Одним из возможных способов в получении представления об их функционировании является анализ математических моделей распределенных динамических систем с понятным образом организованным типом взаимодействия между соответствующими осциллирующими элементами. В частности, можно отметить исследования сетей, основанных на модульной топологии¹⁰, систем с перекрестным типом взаимодействия¹¹, симплициальные комплексы¹², иерархические структуры¹³, а также системы с переменной¹⁴ и адаптивной¹⁵ топологиями связи.

В данной перспективе исследования, рассматривающие математические модели различных сетевых конфигураций, имеют ключевое значение для понимания состояний частичной синхронизации в системах взаимодействующих нейронов и, как следствие, привносят зерно фундаментального представления в общее понимание работы сложной коллективной динамики кортикальных структур. Всестороннее осмысление различных форм задания связи, предопределяющих динамическую реализацию систем, позволяют получить важное представление, связывающее свойства активации точечных элементов с характеристиками форм их взаимодействия. Полученная информация может способствовать лучшему пониманию динамической природы вышеописанных

⁸Spatial multi-scaled chimera states of cerebral cortex network and its inherent structure-dynamics relationship in human brain / S. Huo [и др.] // *National Science Review*. 2021. Т. 8, № 1. nwaal25.

⁹Directed flow of information in chimera states / N. Deschle [и др.] // *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. 2019. Т. 5. С. 28.

¹⁰Chimera-like states in modular neural networks / J. Hizanidis [и др.] // *Scientific Reports*. 2016. Т. 6, № 1. С. 19845.

¹¹Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements / N. Semenova [и др.] // *Physical Review Letters*. 2016. Т. 117, № 1. С. 014102.

¹²Kundu, S. Higher-order interactions promote chimera states / S. Kundu, D. Ghosh // *Physical Review E*. 2022. Т. 105, № 4. С. L042202.

¹³Multi-chimera states and transitions in the leaky integrate-and-fire model with nonlocal and hierarchical connectivity / N. D. Tsikri-DeSmedt [и др.] // *The European Physical Journal Special Topics*. 2016. Т. 225, № 6. С. 1149–1164.

¹⁴Chimera states in time-varying complex networks / A. Buscarino [и др.] // *Physical Review E*. 2015. Т. 91, № 2. С. 022817.

¹⁵Chimera states of neuron networks with adaptive coupling / S. Huo [и др.] // *Nonlinear Dynamics*. 2019. Т. 96, № 1. С. 75–86.

эмпирических явлений, наблюдаемых как в рамках широкого спектра нейронаучных, так и естественнонаучных направлений в целом.

Цель диссертационного исследования

Цель диссертационного исследования заключается в формировании и развитии дробно-дифференциального подхода к определению сложно организованных сетей взаимодействующих осциллирующих элементов, в частности нейронов, а также в выявлении фундаментальных закономерностей образования и развития широкого спектра состояний частичной синхронизации на базе данной топологии взаимодействия.

Для достижения этой цели были поставлены **основные задачи диссертационного исследования**:

1. Представить описание континуальной системы с позиции реакционно-супердиффузионного подхода. Выявить ключевые параллели данной постановки с актуальными направлениями исследований состояний частичной синхронизации.
2. Сформулировать подход к построению связанной дискретной системы с супердиффузионной конфигурацией, основанный на использовании явной разностной схемы аппроксимации дробного оператора Лапласа. Организовать супердиффузионные топологии, основанные как на одномерном, так и на двумерном континуальном приближении.
3. Исследовать возможность формирования различных состояний частичной синхронизации на базе систем с супердиффузионной конфигурацией.
4. Ввести новое параметрическое пространство показателей дробного оператора Лапласа, определяющее топологии супердиффузионного взаимодействия. Продемонстрировать уместность его использования в контексте всестороннего изучения состояний частичной синхронизации, воспроизводимых на базе различных форм супердиффузионного взаимодействия. Модифицировать классическую меру пространственной корреляции на случай спектра дробных мер пространственной корреляции для более детализированного представления параметрического пространства показателей дробного оператора Лапласа.
5. Произвести аналитическое исследование реакционно-супердиффузионной системы с нелинейными функциями модели Hindmarsh-Rose. Предопределить связь между дискретными реализациями супердиффузионных систем нейронов с аналитическими свойствами реакционно-супердиффузионной системы в континуальном приближении.

Научная новизна результатов диссертационного исследования

Диссертационная работа представляет, систематизирует и обосновывает новый подход к описанию систем супердиффузионно-взаимодействующих нейронов, основанный на реакционно-супердиффузионном представлении. В частности, в работе делается акцент на возможности формирования различных состояний как полной, так и частичной синхронизации, а также развитой

некогерентности на базе систем с различной топологией супердиффузионного взаимодействия. Среди важных результатов можно выделить:

1. Впервые представлено описание сети взаимодействующих нейронов с супердиффузионной схемой связи, организованной на основе явной разностной схемы аппроксимации дробного оператора Лапласа. Выделены идейные параллели супердиффузионной схемы взаимодействия а также лежащих в ее основе степенных функций, с различными биологическими аспектами организации нервной ткани.
2. Установлена возможность развития в системе с супердиффузионной топологией взаимодействия различных состояний частичной синхронизации, а также развитой некогерентности. Предопределен универсальный метод изучения нелинейно-динамических свойств развития состояний частичной синхронизации в многокомпонентной распределенной системе с супердиффузионной конфигурацией, основанный на исследовании параметрического пространства показателей дробного оператора Лапласа.
3. Впервые выявлены супердиффузионные конфигурации, для которых возможно формирование конкретных реализаций состояний частичной синхронизации. В частности, определены такие конфигурации, которые допускают возможность развития химерных и уединенных состояний, фазовых волн различных масштабов, а также их совместных реализаций для широкого набора однородно распределенных случайных начальных условий.
4. Определены параметрические области однородного и неоднородного синхронизационного перехода в параметрическом пространстве показателей дробного оператора Лапласа. Полученные результаты отражают сложное влияние изменения супердиффузионных конфигураций по отношению к процессам формирования и развития различных состояний полной и частичной синхронизации, а также развитой некогерентности. Для решения задачи разделения параметрических областей была модифицирована классическая мера пространственной корреляции на случай спектра дробных мер пространственной корреляции. В результате появилась дополнительная возможность различать химерные состояния с когерентной частью, организованной в виде крупномасштабной фазовой волны с различными характерными масштабами. Модифицированный подход применим не только к супердиффузионным конфигурациям, но и позволяет анализировать широкий спектр состояний частичной синхронизации в распределенных динамических системах с произвольной топологией связей между элементами.
5. Произведен расширенный линейный анализ реакционно-супердиффузионной системы с Hindmarsh-Rose нелинейностью. Впервые определено соответствие между типами устойчивости пространственных мод в линейном приближении и развитием различных состояний частичной

синхронизации, воспроизведенных на базе допустимых конфигураций супердиффузионных сетей. Введено понятие несогласованной дробной Тьюринговской неустойчивости – динамического явления, которое может наблюдаться в многокомпонентных распределенных нелинейных динамических системах с несогласованным типом дробных пространственных производных для соответствующих компонент.

Фундаментальная и прикладная значимость

Изучение процессов полной и частичной синхронизации, а также развитой некогерентности является крайне перспективным направлением для широкого класса естественных наук. Особенную значимость они приобрели в контексте изучения коллективных режимов, возникающих в системах биологических нейронных сетей. Принципиальная значимость исследования данной тематики в контексте задач нейронаук связана с их возможным отождествлением с процессами формирования функциональной связи и, как следствие, с обработкой информации различными участками как неокортекса, так и другими взаимодействующими функциональными зонами головного мозга.

Данные суждения определяют важность составления в биологическом смысле адекватных, в математическом смысле лаконичных и, наконец, в фундаментальном смысле аналитически исследуемых математических моделей для всестороннего осмысления распределенных динамических нелинейных систем, основанных на конкретном типе конфигураций.

Предложенный подход к исследованию различных состояний частичной синхронизации, основанный на построении дискретных моделей с супердиффузионной конфигурацией взаимодействия, является идейно-актуальным, в широкой степени вариативным и определяет новые возможности для формирования конфигураций взаимодействия различных кортикальных структур. При этом континуальный предел данных уравнений, приводящих к реакционно-супердиффузионной постановке, способен преподнести ряд аналитических суждений, позволяющих более полно осмыслить сложные коллективные свойства, воспроизводимые на базе сетей с супердиффузионной топологией взаимодействия. Этим обеспечивается как фундаментальная, так и прикладная значимость такого подхода.

Новизна и значимость полученных результатов также подтверждается их публикацией в отечественных и зарубежных тематических научных журналах с высоким импакт-фактором, входящих в состав систем научного цитирования, таких как РИНЦ, Web of Science и Scopus.

Учитывая основной акцент работы на представлении распределенной нелинейной модели; обосновании ее структуры; изучении потенциальных динамических режимов, которые могут быть воспроизведены на базе различных конфигураций ее реализаций; а также на формировании аналитических представлений о полученных результатах, содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.3.3 — «Теоретическая физика» и затрагивает сразу

несколько направлений, отраженных в паспорте данной специальности. В частности, постановка задачи с Hindmarsh-Rose нелинейностью, связанной с динамикой точечного нейрона; сопоставление конфигураций систем, определенных на базе показателей дробного оператора Лапласа, с актуальными нейронаучными представлениями; связь состояний частичной синхронизации с различными когнитивными процессами; идейное соответствие между динамикой распределенной системы и откликом сети нейронов на внешний стимул – определяют, что работа выполнена в рамках исследований по созданию физических моделей когнитивных процессов (п.12). Исследование континуального предела дискретной системы, анализ реализованных динамических явлений и определение подходов к классификации состояний частичной синхронизации, в частности, химерных состояний, характеризующихся гиперхаотической динамикой, отсылают к задачам теории неравновесных систем и теории хаоса (п.10). Наконец, для решения поставленных задач проведено моделирование физических процессов на решетке (п.8) на основе реализации нелокального итерационного отображения, соответствующего разностной схеме аппроксимации дробного оператора Лапласа для уравнений с супердиффузионной связью.

Основные положения, выносимые на защиту

1. На основе разностной схемы аппроксимации дробного оператора Лапласа возможно построить сеть связанных осцилляторов с супердиффузионной топологией.
2. В распределенных системах нейронов, заданных на основе нелинейной модели Hindmarsh–Rose, с супердиффузионной топологией взаимодействия существуют и поддаются классификации различные состояния частичной синхронизации, включая химерные и уединенные состояния, фазовые волны, их различные комбинации, а также состояния развитой некогерентности.
3. Параметрическое пространство показателей дробного оператора Лапласа предопределяет разнообразие сетей с супердиффузионной топологией взаимодействия. На основе данного параметрического пространства возможно структурировать нелинейно-динамические свойства сетей с супердиффузионной топологией, связанные с развитием состояний частичной синхронизации.
4. Карты динамических режимов в параметрическом пространстве показателей дробного оператора Лапласа могут быть глобально разделены на зоны однородных и неоднородных синхронизационных переходов, идейно соответствующих суперкритическому и субкритическому типам бифуркаций. С использованием спектра дробных мер пространственной корреляции можно выявлять более специфичные параметрические области, для которых характерно образование химерных состояний с когерентной частью в виде крупномасштабной фазовой волны.
5. Имеется соответствие между типами неустойчивости пространственных мод, установленными с помощью линейного анализа

двухкомпонентной реакционно-супердиффузионной системы, и развитием конкретных режимов как полной, так и частичной синхронизации в сетях с различными конфигурациями супердиффузионного взаимодействия.

Достоверность результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается тщательным тестированием используемых вычислительных программ, реализацией состояний частичной синхронизации, уже зарекомендовавших свое проявление в системах с ярковыраженным нелокальным взаимодействием, предельным схождением результатов супердиффузионной модели к хорошо изученной классической диффузионной модели, а также согласованием результатов для сети с теоретическими осмыслениями на основе расширенного линейного анализа супердиффузионной системы.

Личный вклад

Результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, получены соискателем лично. Автором были разработаны комплексы программ, в которых производился расчет и анализ состояний частичной синхронизации, воспроизводимых на базе супердиффузионной топологии, произведено аналитическое осмысление результатов с позиции линейного анализа, а также расширена одна из метрик классификации состояний частичной синхронизации.

Апробация работы

Основные результаты исследований, представленных в диссертации, были доложены на следующих всероссийских и международных конференциях, а также семинарах:

1. XXXIII международная конференция «Математика, Компьютер, Образование», 26 – 31 января 2026 г., Дубна.
2. Всероссийская конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», 26 – 30 мая 2025 г., Саратов.
3. XXXII международная конференция «Математика, Компьютер, Образование», 27 – 31 января 2025 г., Пущино.
4. IX Всероссийский молодежный научный форум «Наука будущего – наука молодых», 29 октября – 1 ноября 2024 г., Самара.
5. XXI научная школа «Нелинейные волны», 5 – 11 ноября 2024 г., Нижний Новгород.
6. International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, 28 июня – 3 июля 2024 г., Суздаль.
7. Всероссийская научная молодежная школа-конференция «Химия, физика, биология: пути интеграции», 22 – 24 апреля 2024 г., Москва.
8. XXXI международная конференция «Математика, Компьютер, Образование», 22 – 27 января 2024 г., Дубна.
9. Всероссийская конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», 15 – 19 мая 2023 г., Саратов.

Результаты исследований обсуждались на большом семинаре Отделения теоретической физики (ОТФ) имени И.Е. Тамма, а также на внутренних семинарах лаборатории нелинейной динамики и теоретической биофизики.

Гранты и награды

Данная работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (с 2024 г.). Опубликованные результаты были поддержаны Премией им. И.Е. Тамма по теоретической физике в рамках конкурса молодежных научных работ в Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук (2024 г.). На основе обсуждаемых в тексте диссертации публикаций был получен грант РФФИ, направленный на дальнейшее развитие данной тематики (с 2026 г.).

Публикации по теме диссертационного исследования

По результатам диссертационной работы было опубликовано семь статей в журналах из Белого списка, пять из которых относятся к первому уровню.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 125 страниц, включая 21 рисунок. Список литературы содержит 238 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, отраженных в диссертационной работе. В частности, в данной части формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается и обосновывается научная новизна и практическая значимость исследований, которые легли в основу диссертации, приводятся сведения о достоверности и апробации результатов.

В **первой главе** приводится систематизированный обзор научной литературы, связанный с нелинейно-динамическим подходом к определению коллективных реализаций систем взаимодействующих осцилляторов. Обсуждается контекст, связанный с распределенными нелинейными диссипативными системами и дробными производными. Производится обсуждение научных источников, связанных с прикладными аспектами состояний частичной синхронизации, а также эмпирическими свидетельствами коллективной динамики систем взаимодействующих нейронов, включающих множественные параллели с задачами нейронаук. Особое внимание также уделено обсуждению актуальных подходов к определению математических моделей сетей и распределенных систем, на базе которых возможно возникновение и систематическое изучение широкого спектра состояний частичной синхронизации, а также внедрено обоснование и возможное позиционирование супердиффузионной постановки в данном контексте.

Вторая глава посвящена построению и описанию супердиффузионной конфигурации связи с позиции непрерывного приближения. Вводится четкое

обоснование ее релевантности в контексте актуальных задач исследования широкого класса сложных систем, включающих системы взаимодействующих нейронов, а также очерчиваются ограничения данной модели. Начиная с базовых принципов определения дробного оператора Лапласа:

$$\begin{aligned}
 -(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) &= -\hat{\mathbb{F}}^{-1} \left\{ |\xi|^\alpha \hat{\mathbb{F}} \{f(x)\}(\xi) \right\} = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} |\xi|^\alpha \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{i\xi\eta} d\eta \right] d\xi, \quad (1)
 \end{aligned}$$

планомерно в системе выделяются наборы управляющих параметров, связанных с супердиффузионной постановкой. В контексте непрерывного приближения происходит описание их влияния на кинетические особенности модели. В качестве примера, производится обсуждение супердиффузионной постановки при определении функции Грина системы с супердиффузией, а также вводится отождествление тяжелых хвостов в решении с нелокальным типом взаимодействия.

В данной главе также определяются конкретные нелинейные двух- и трехкомпонентные Hindmarsh-Rose [HRm], $m = 2, 3$ модели осциллятора, ответственные за динамику активации точечного нейрона. Определяются одномерные двух- и трехкомпонентные [nDmC] системы с [HRm] нелинейностью $n = 1$; $m = 2, 3$ в непрерывном пределе:

$$\begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t = -D_u(-\Delta_x)^{\alpha_u/2} u(x,t) + v - au^3 + bu^2 + I_{ext}, \\ \partial v(x,t)/\partial t = -D_v(-\Delta_x)^{\alpha_v/2} v(x,t) + c - du^2 - v, \end{cases} \quad (2)$$

и

$$\begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t = -D_u(-\Delta_x)^{\alpha_u/2} u(x,t) + v - au^3 + bu^2 - m + I_{ext}, \\ \partial v(x,t)/\partial t = -D_v(-\Delta_x)^{\alpha_v/2} v(x,t) + c - du^2 - v, \\ \partial m(x,t)/\partial t = r \left[s(u - u_0) - m \right]. \end{cases} \quad (3)$$

За исключением случаев, оговоренных отдельно, значения параметров, фигурирующих в данных и последующих выражениях, определены как: $(D_u; D_v) = (10^{-4}; 10^{-6})$ для [nDmC] систем, а также $(a; b; c; d; I_{ext}) = (1; 3; 1; 5; 1.6)$ для [HRm], $m = 2, 3$ и $(u_0; s) = (-1.6; 4)$ для [HRm], $m = 3$ моделей. Дополнительная информация отражена в тексте диссертации.

На основе сопоставлений дробных производных Капуто (${}^C D_{a+}$ и ${}^C D_{b-}$), Римана — Лиувилля (${}^{RL} D_{a+}$ и ${}^{RL} D_{b-}$) и Грюнвальда — Летникова (${}^{GL} D_{a+}^\alpha$ и ${}^{GL} D_{b-}^\alpha$) вводится в рассмотрение дискретное нелокальное итерационное отображение, организованное на основе [1DmC] систем с [HRm] нелинейностью

($[f_u, f_v]$ и $[f_u, f_v, f_m]$ нелинейные функции [HR2] и [HR3] моделей соответственно):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{t+1} = u_i^t + \left[D_u r_u^{(1)} \sum_{j=0}^{l_1(i)} g_u^{(j)} u_{i-j+1}^t + \right. \\ \left. + D_u r_u^{(2)} \sum_{j=0}^{l_2(i)} g_u^{(j)} u_{i+j-1}^t \right] + dt f_u(u_i^t, v_i^t), \\ v_i^{t+1} = v_i^t + \left[D_v r_v^{(1)} \sum_{j=0}^{l_1(i)} g_v^{(j)} v_{i-j+1}^t + \right. \\ \left. + D_v r_v^{(2)} \sum_{j=0}^{l_2(i)} g_v^{(j)} v_{i+j-1}^t \right] + dt f_v(u_i^t, v_i^t), \end{array} \right. \quad (4)$$

и

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{t+1} = u_i^t + \left[D_u r_u^{(1)} \sum_{j=0}^{l_1(i)} g_u^{(j)} u_{i-j+1}^t + \right. \\ \left. + D_u r_u^{(2)} \sum_{j=0}^{l_2(i)} g_u^{(j)} u_{i+j-1}^t \right] + dt f_u(u_i^t, v_i^t, m_i^t), \\ v_i^{t+1} = v_i^t + \left[D_v r_v^{(1)} \sum_{j=0}^{l_1(i)} g_v^{(j)} v_{i-j+1}^t + \right. \\ \left. + D_v r_v^{(2)} \sum_{j=0}^{l_2(i)} g_v^{(j)} v_{i+j-1}^t \right] + dt f_v(u_i^t, v_i^t, m_i^t), \\ m_i^{t+1} = m_i^t + dt f_m(u_i^t, v_i^t, m_i^t), \end{array} \right. \quad (5)$$

с следующими параметрами:

$$r_q^{(1)} = r_q^{(2)} = -\frac{\sec(\pi\alpha_q/2)}{2} dt(dx)^{-\alpha_q}, \quad q = \{u, v\}, \quad (6)$$

и весовыми коэффициентами:

$$g_q^{(j)} = (-1)^j \binom{\alpha_q}{j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha_q + 1)}{\Gamma(\alpha_q - j + 1) \Gamma(j + 1)}, \quad q = \{u, v\}. \quad (7)$$

Обсуждаются особенности реализации данного нелокального итерационного отображения, а также условия сходимости к задаче, определенной в непрерывном пределе. Выделяется дискретная постановка задачи для систем связанных нейронов. В контексте более широкой постановки результаты отражены в работе [1]. Таким образом, в системе естественным образом выделяются наборы параметров (α_u, α_v) , которые определяют конфигурации супердиффузионного взаимодействия.

Для организации всесторонней оценки состояний частичной синхронизации, которые возникают на базе различных конфигураций супердиффузионных архитектур, в рассмотрение также вводятся соответствующие метрики. В рамках исследования полной пространственно-временной реализации используются

Фактор синхронизации (здесь и далее N обозначает количество осцилляторов в системе):

$$R = \frac{\langle [F^t]^2 \rangle_t - \langle F^t \rangle_t^2}{1/N \sum_i (\langle [u_i^t]^2 \rangle_t - \langle u_i^t \rangle_t^2)}, \quad (8)$$

где

$$F^t = \frac{1}{N} \sum_i u_i^t, \quad (9)$$

а также *Сила некогерентности*:

$$SI = 1 - \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M S(p), \quad (10)$$

в которой:

$$S(p) = H\left(\delta_{SI} - \sigma(p)\right), \quad (11)$$

и

$$\sigma(p) = \left\langle \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=\Omega(n,p)}^{\Gamma(n,p)} [W_i^t - \langle W \rangle_r^t]^2} \right\rangle_t. \quad (12)$$

В данном выражении $W_i^t = u_i^t - u_{i+1}^t$, $H(x)$ — функция Хевисайда, δ_{SI} — пороговый параметр. Разбиение исходной системы осуществляется на M подобластей, с учетом $n = N/M$ и, следовательно $\Omega(n,p) = n(p-1)$. Индекс $p = 1, 2, \dots, M$. Модифицированное значение верхнего предела $\Gamma(n,p) = pn - 2$ оператора суммирования использовалось для создания полностью непересекающихся ячеек, что позволило более точно проявить особенности развития состояний частичной синхронизации в системах с малыми линейными размерами. В выражениях (8) и (12) операции $\langle \cdot \rangle_t$ и $\langle \cdot \rangle_r$ характеризуют усреднение по временной и пространственной компонентам соответственно.

Для понимания локальных (область Ω_i включает данный осциллятор и двух его ближайших соседей, параметр d связан с пространственной размерностью) особенностей развития некогерентности для определенных областей распределенной системы введен *Параметр локального порядка*:

$$L_i^t = \left| \frac{1}{2d+1} \sum_{i' \in \Omega_i} e^{\sqrt{-1} \Phi_{i'}^t} \right|, \quad (13)$$

с локальной переменной, определенной через отношение амплитуд компонент:

$$\Phi_i^t = \arctan\left(\frac{v_i^t}{u_i^t}\right). \quad (14)$$

Двумерные варианты данных метрик представлены в тексте диссертации.

Наконец, *Мера пространственной корреляции*¹⁶ введена для более точной оценки параметрического пространства в конкретные временные такты на основе следующего выражения:

$$g_0(t) = \sum_{|\hat{D}f|=0}^{\delta} g(t; |\hat{D}f|), \quad (15)$$

в котором:

$$|\hat{D}f| = |f_{i+1}^t - 2f_i^t + f_{i-1}^t|. \quad (16)$$

В зависимости от непрерывной или дискретной постановки $g(t; |\hat{D}f|)$ обозначает либо плотность вероятности, либо саму вероятность нахождения второй разности $|\hat{D}f|$ в динамической реализации в временной такт t . Для задач исследования параметрического пространства (α_u, α_v) , с целью определения набора $g(t; |\hat{D}f|)$, сегментация производилась с использованием интервалов шириной $\Delta|\hat{D}f| = 10^{-2}$. Значение пороговой величины $\delta = 0.01 \times |\hat{D}f|_{\max}$, а учет полностью когерентной реализации обуславливался внедрением слабого смещения $\Delta|\hat{D}f|$.

Для исследования параметрического пространства показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) использовались несколько из представленных выше метрик, а также в качестве дополнительной проверки оценивались реализации системы для конкретных топологий. В контексте представленных исследований совпадение информации о структуре параметрического пространства, полученной с помощью нескольких оценок, является дополнительным актом верификации результатов.

В **третьей главе** представлена оценка развития состояний полной и частичной синхронизации, а также развитой некогерентности для различных $[nDmC]$ $n = 1, 2$; $m = 2, 3$ систем с супердиффузионной топологией связи и $[HRm]$ нелинейностью в параметрическом пространстве показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) . Для достижения этой цели, в дополнении к $[1DmC]$ системам с супердиффузионной топологией связи, введена в рассмотрение $[2DmC]$, $m = 2, 3$ анизотропная конфигурация на основе следующего нелокального дискретного отображения (в случае $[2D2C]$ конфигурации):

¹⁶A classification scheme for chimera states / F. P. Kemeth [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2016. Т. 26, № 9. С. 094815.

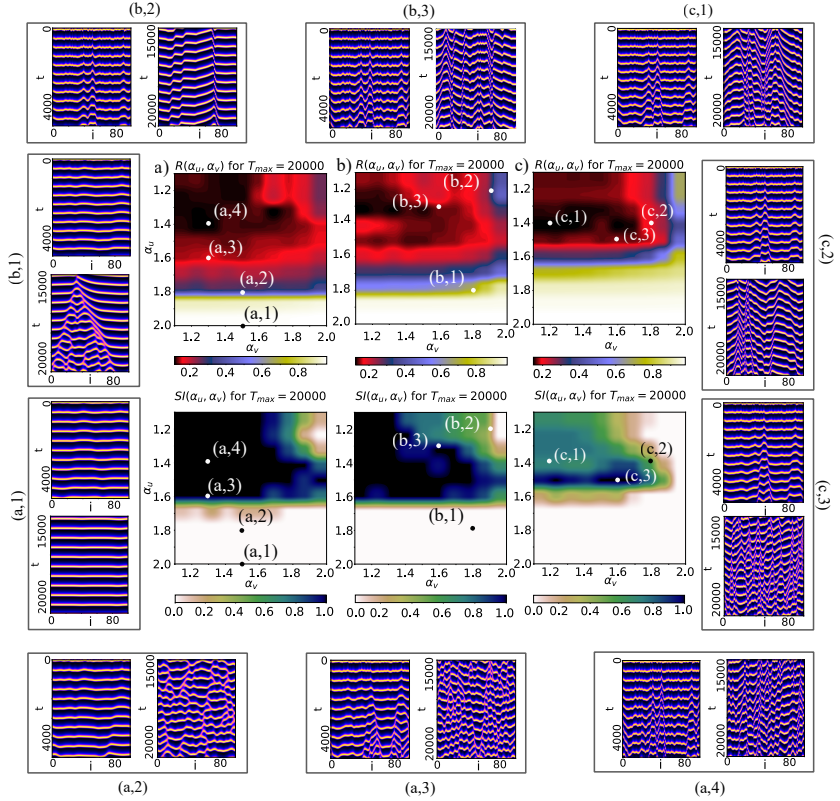


Рис. 1 — Значения фактора синхронизации $R(\alpha_u, \alpha_v)$ (8) и силы некогерентности $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (10) для возможных комбинаций параметров (α_u, α_v) [1D2C] системы с [HR2] нелинейностью. (а) $I_{ext} = 1.6$, (б) $I_{ext} = 1.8$, (в) $I_{ext} = 2.0$. $R = 1$ и $SI = 0$ соответствуют режиму полной синхронизации (белая область). В свою очередь, $R = 0$ и $SI = 1$ характеризуют режим полной некогерентности (черная область). Крупномасштабные структуры наблюдаются при $0.3 < R < 1$ и $SI = 0$. Различные виды химерных состояний формируются в диапазоне $0.2 < R < 0.3$ и $0 < SI < 1$. Переходный режим от химер к развитой некогерентности (или состояниям с изначально развитой некогерентностью) наблюдается при $R < 0.2$ и $SI \rightarrow 1$. На рисунке показано анизотропное развитие области некогерентности в пространстве параметров (α_u, α_v) , ответственных за конфигурации [1D2C] системы.

$$\begin{cases}
u_{i,n}^{t+1} = u_{i,n}^t + \\
+ \left[D_u r_u^{(x+)} \sum_{j=0}^{l^{(x+)}(i)} g_u^{(j)} u_{i-j+1,n}^t + D_u r_u^{(x-)} \sum_{j=0}^{l^{(x-)}(i)} g_u^{(j)} u_{i+j-1,n}^t \right] + \\
+ \left[D_u r_u^{(y+)} \sum_{j=0}^{l^{(y+)}(n)} g_u^{(j)} u_{i,n-j+1}^t + D_u r_u^{(y-)} \sum_{j=0}^{l^{(y-)}(n)} g_u^{(j)} u_{i,n+j-1}^t \right] + \\
+ dt f_u(u_{i,n}^t, v_{i,n}^t), \\
v_{i,n}^{t+1} = v_{i,n}^t + \\
+ \left[D_v r_v^{(x+)} \sum_{j=0}^{l^{(x+)}(i)} g_v^{(j)} v_{i-j+1,n}^t + D_v r_v^{(x-)} \sum_{j=0}^{l^{(x-)}(i)} g_v^{(j)} v_{i+j-1,n}^t \right] + \\
+ \left[D_v r_v^{(y+)} \sum_{j=0}^{l^{(y+)}(n)} g_v^{(j)} v_{i,n-j+1}^t + D_v r_v^{(y-)} \sum_{j=0}^{l^{(y-)}(n)} g_v^{(j)} v_{i,n+j-1}^t \right] + \\
+ dt f_v(u_{i,n}^t, v_{i,n}^t).
\end{cases} \quad (17)$$

Постановка, соответствующая случаю [2D3C] системы разобрана в тексте диссертации. Пространственные индексы обозначены как i и n . Индекс, соответствующий дискретному временному такту, обозначен как t . Параметры, связанные с дискретизацией, имеют следующую форму:

$$r_q^{(x+)} = r_q^{(x-)} = -\frac{1}{2} \sec(\pi\alpha_q/2) dt (dx)^{-\alpha_q}, \quad (18)$$

$$r_q^{(y+)} = r_q^{(y-)} = -\frac{1}{2} \sec(\pi\alpha_q/2) dt (dy)^{-\alpha_q}. \quad (19)$$

Весовые коэффициенты определены в соответствии с (7). Анизотропная структура нелокального отображения в таком случае соответствует двумерному оператору:

$$(-\Delta_{x,y})^{\alpha_q/2} := (-\Delta_x)^{\alpha_q/2} + (-\Delta_y)^{\alpha_q/2}, \quad q = \{u, v\}. \quad (20)$$

Для однородно распределенных на интервале $(-1,1)$ случайных начальных условий [Uniformly Distributed Random Initial Conditions, **UDRIC**], соответствующих границе притяжения предельного цикла для каждого осциллятора, в контексте [1D2C] систем были получены карты динамических режимов в параметрическом пространстве (α_u, α_v) супердиффузионных конфигураций, изображенные на Рис.1 для $dt = 0.01$ и $dx = 0.005$. При этом здесь и далее нелинейная часть вычислялась с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Значения параметров, связанных с радиусом взаимодействия: $l_1 = l_2 = l - 1$ и $l = 10$. Количество рассматриваемых нейронов $N = 100$. Результаты отражены в работе [2]. Значения параметров для SI : $\delta_{SI} = 0.4$ и $M = 20$. С целью лаконичности дальнейшего изложения без ущерба общности дополнительная информация представлена в описании к рисункам.

Для систем с [2D2C] конфигурацией отображение реализуемой динамики на плоскость параметров (α_u, α_v) представлено на Рис. 2 при $l^{(x+)} = l^{(y+)} =$

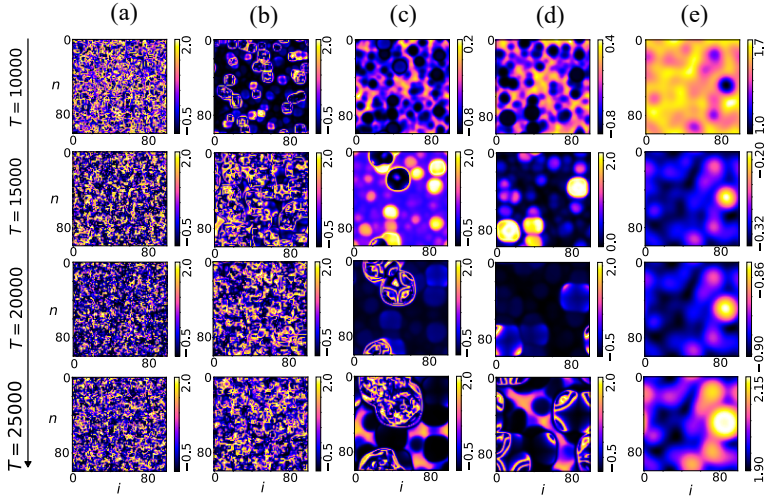
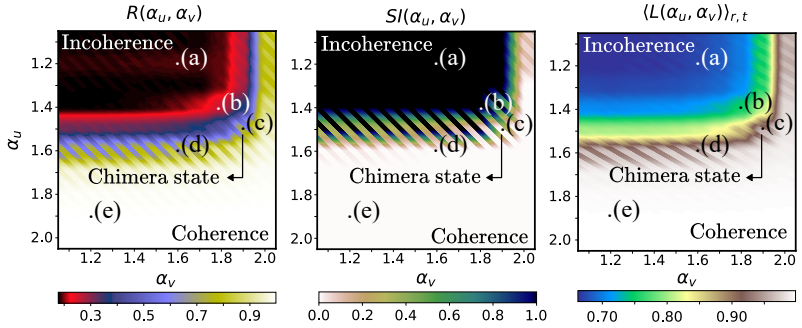


Рис. 2 — Верхняя часть: зависимости $R(\alpha_u, \alpha_v)$, $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ и $\langle L(\alpha_u, \alpha_v) \rangle_{r,t}$ для дробных показателей оператора Лапласа (α_u, α_v) , ответственных за тип конфигурации сетевой структуры, организованной на базе [2D2C] системы. Представлены интерполированные данные соответствующих метрик для двух наборов [UDRIC], при $I_{ext} = 1.9$. Заштрихованная область демонстрирует разницу в динамике в зависимости от начальных условий. Нижняя часть: примеры пространственно-временной динамики, организованной на базе начальных условий первого образца, относящиеся к определенным точкам в параметрическом пространстве конфигураций (α_u, α_v) .

$l(x_-) = l(y_-) = l - 1$ и $l = 10$. Значения параметров дискретизации: $dt = dx = dy = 0.005$. Количество рассматриваемых нейронов составляет $N \times N = 100 \times 100$. Значения параметров для SI : $\delta_{SI} = 0.35$ и $M = 20$. Основные результаты отражены в статье [3]. На указанных рисунках также были представлены примеры динамических реализаций, соответствующие определенным супердиффузионным конфигурациям. Продемонстрировано, что структурные свойства параметрического пространства (α_u, α_v) для $[nD2C]$, $n = 1, 2$ систем характеризуются высокой степенью эквивалентности. Результаты, связанные с $[nDmC]$, $n = 1, 2$ и $m = 3$ постановками отражены в тексте диссертации. Утверждается, что без потери значительной общности относительно зарождения и развития

состояний частичной синхронизации, дальнейшие исследования можно производить основываясь на $[1DmC]$, $m = 2$ системах. Обобщение результатов, основанных на одномерных и двумерных представлениях, отражено в работе [4].

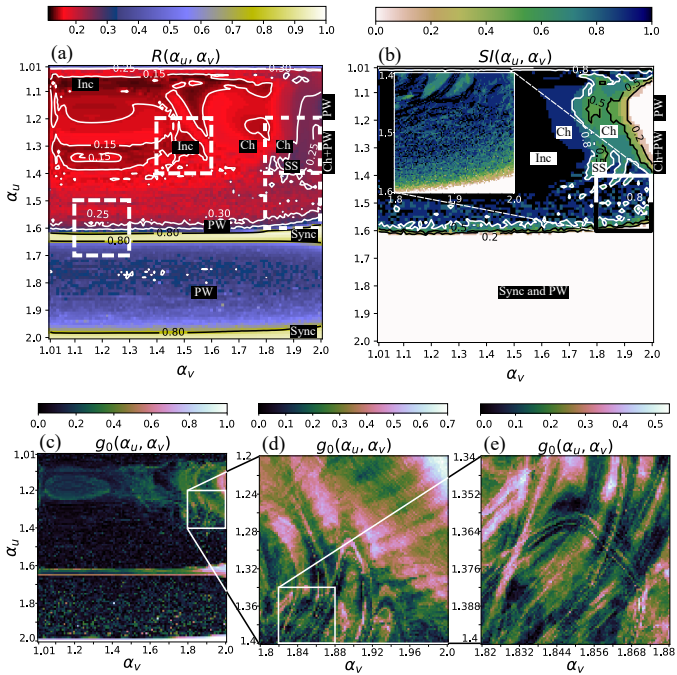


Рис. 3 — Динамические режимы, возникающие в параметрическом пространстве дробных показателей оператора Лапласа (α_u, α_v), ответственных за особенности конфигурации сети для $N = 50$ нейронов. В качестве индикаторов развития состояний с различной степенью синхронизации, используются три метрики: *Фактор синхронизации* $R(\alpha_u, \alpha_v)$ (a), *Сила некогерентности* $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (b) и *Мера пространственной корреляции* $g_0(\alpha_u, \alpha_v)$ (c)–(e). Пунктирные прямоугольники на фрагменте (a) обозначают области, которые будут исследованы более подробно на Рис.4. Обозначения связывают конкретные конфигурации сетей (α_u, α_v) с формированием динамических режимов синхронизации (Sync), фазовых волн (PW), химер и фазовых волн (Ch+PW), уединенных состояний (SS) и химер (Ch). Вставка на фрагменте (b) демонстрирует область неоднородного синхронизационного перехода для указанного диапазона параметров ($1.4 \leq \alpha_u \leq 1.6$, $1.8 \leq \alpha_v \leq 2$). Фрагменты (c)–(e) демонстрируют значения $g_0(\alpha_u, \alpha_v)$ для финального момента времени $T = 29999$ эволюции системы. Фрагменты (d) и (e) проявляют нитевидные структуры в параметрическом пространстве, характерные для диапазона параметров между областью однородного и неоднородного синхронизационного перехода, и связанные с развитием уровня некогерентности для конкретных конфигураций (α_u, α_v) в финальный момент времени.

Четвертая глава посвящена более детальному описанию параметрического пространства показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) в контексте образования различных комбинаций динамических режимов частичной синхронизации, а также синхронизационных переходов. Основные результаты отражены в статье [5]. Связь параметрических областей однородных ($1.1 \leq \alpha_u \leq$

1.3, $1.8 \leq \alpha_v \leq 2$) и неоднородных ($1.4 \leq \alpha_u \leq 1.6$, $1.8 \leq \alpha_v \leq 2$) синхронизационных переходов для [1D2C] системы с различными комбинациями состояний частичной синхронизации представлена на Рис.3 на основе трех различных метрик: $R(\alpha_u, \alpha_v)$ (a), $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (b) и $g_0(\alpha_u, \alpha_v)$ (c) – (e). Количество рассматриваемых нейронов $N = 50$. Здесь и далее значения параметров дискретизации: $dt = dx = 0.005$. Значения параметров для SI : $\delta_{SI} = 0.4$ и $M = 10$. На Рис.4 проявлены более детальные фрагменты параметрического пространства, указанные на Рис.3 (a). Наконец, точки на фрагментах (b) и (c) Рис.4 отображают динамику в областях конфигураций, находящихся в однородных и неоднородных участках параметрического пространства (α_u, α_v) соответственно. Указанные динамические репрезентации системы представлены на Рис.5.

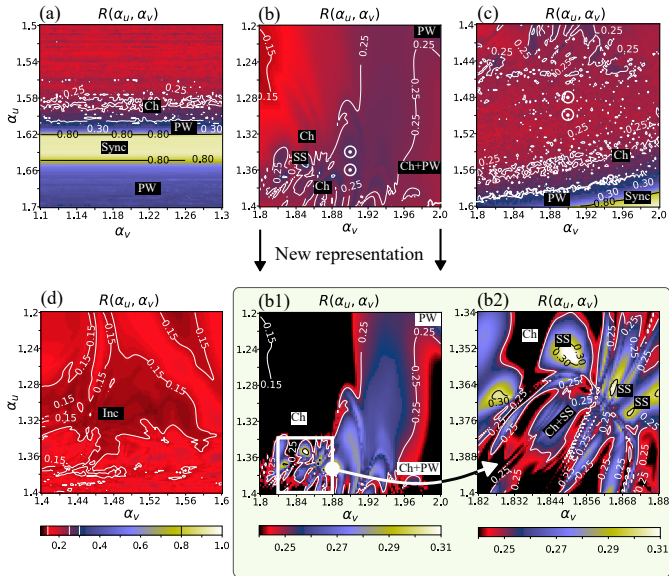


Рис. 4 — Бифуркационные диаграммы конкретных областей, продемонстрированных на Рис.3 (a), на основе фактора синхронизации $R(\alpha_u, \alpha_v)$. На фрагменте (a) [снизу вверх] продемонстрирован переход от фазовых волн (PW) к развитию пространственного когерентного режима (Sync) с дальнейшим развитием химерных состояний (Ch) и некогерентных режимов (Inc). Фрагмент (b) иллюстрирует область, включающую области химер (Ch) и фазовых волн (PW), а также режимы, сочетающие химеры и крупномасштабные фазовые волны (Ch+PW). Фрагмент (b1) — это дополнительное представление, демонстрирующее небольшие вариации в метрике $R(\alpha_u, \alpha_v)$. Фрагмент (b2) отображает отмеченную область из (b1) и выявляет неоднородную структуру параметрического пространства при малых изменениях конфигураций супердиффузионных сетей. Фрагмент (c) соответствует области, которая аналогична вставке на Рис.3 (b), с неоднородным синхронизационным переходом. Фрагмент (d) иллюстрирует область, соответствующую различным скоростям развития некогерентного режима. Обозначения: (Sync) — синхронизация, (PW) — фазовые волны, (Ch) — химерное состояние, (SS) — одиночные состояния, (Ch+PW) — сосуществование химер и фазовых волн, (Inc) — развитие некогерентного состояния, (Ch+SS) — неидеальное химерное состояние (сосуществование химер и уединенных состояний).

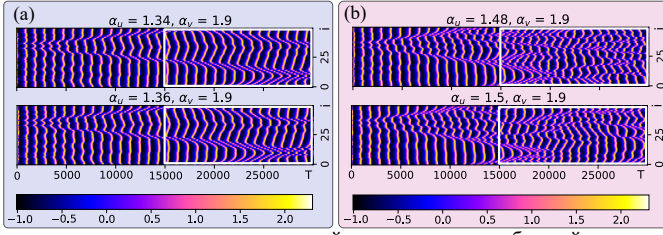


Рис. 5 — Динамика развития химерных состояний для двух разных областей параметрического пространства (α_u, α_v) . Шаг по параметру между соответствующими значениями показателя $\delta\alpha_u = 0.02$ дробного оператора Лапласа (для каждой области) одинаков. Как видно из участков, обозначенных белыми прямоугольниками, конфигурации сети, организованные на основе $(\alpha_u = 1.34, \alpha_v = 1.9)$ и $(\alpha_u = 1.36, \alpha_v = 1.9)$ (a), показывают схожую динамику. В то же время конфигурации с $(\alpha_u = 1.48, \alpha_v = 1.9)$ и $(\alpha_u = 1.5, \alpha_v = 1.9)$ (b) демонстрируют развитие различных режимов. Точки в пространстве параметров дробных показателей оператора Лапласа (α_u, α_v) , соответствующие данным конфигурациям, дополнительно помечены на Рис.4 (b, c).

Важной частью данной главы является модификация классической меры пространственной корреляции $g_0(t)$ на случай спектра дробных мер пространственной корреляции $g_0(\alpha, t)$. На основе внедренных в работе [6] соотношений:

$$-(dx)^\alpha (-\Delta)^{\alpha/2} f \rightarrow -\frac{1}{2\cos(\pi\alpha/2)} \left(\sum_{j=0}^{i+1} J_\alpha^{(j)} f_{i+1-j}^t + \sum_{j=0}^{N-i+1} J_\alpha^{(j)} f_{i-1+j}^t \right), \quad \alpha \in (1, 2], \quad (21)$$

$$\hat{D}_\alpha f = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{R_1(i)} J_\alpha^{(j)} f_{i+1-j}^t + \sum_{j=0}^{R_2(i)} J_\alpha^{(j)} f_{i-1+j}^t \right), \quad (22)$$

с $R_1(i) = R_2(i) = N - 1$ и весовыми коэффициентами, заданными в форме итерационных соотношений:

$$J_\alpha^{(0)} = 1 \text{ и } J_\alpha^{(j)} = -\frac{\alpha - j + 1}{j} J_\alpha^{(j-1)} \text{ для } j = 1, 2, \dots, \quad (23)$$

оказывается возможно определить спектр дробных мер пространственной корреляции $g_0(\alpha, t)$. В случае непрерывной системы, имеющей пространственную размерность:

$$g_0(\alpha, t) = \int_0^{\delta_\alpha} g(t; |\hat{D}_\alpha f|) d|\hat{D}_\alpha f|, \quad (24)$$

а также для дискретных систем:

$$g_0(\alpha, t) = \sum_{|\hat{D}_\alpha f|=0}^{\delta_\alpha} g(t; |\hat{D}_\alpha f|). \quad (25)$$

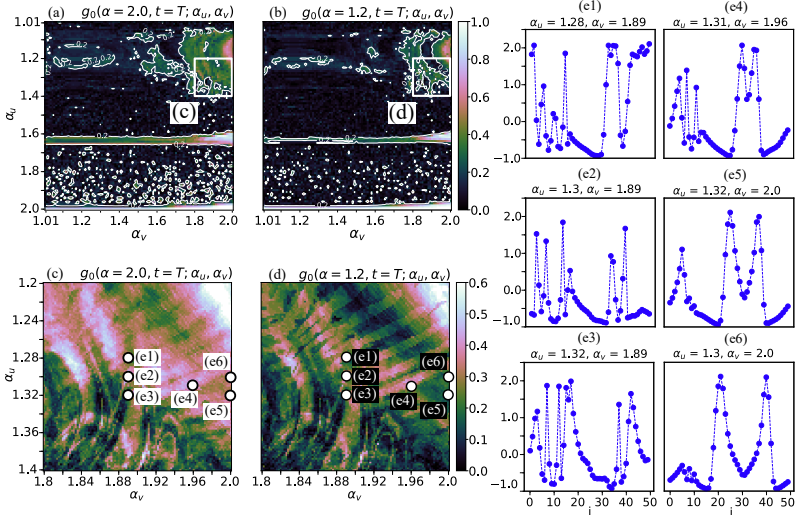


Рис. 6 — Пример параметрического пространства (α_u, α_v) с демонстрацией состояний частичной синхронизации, организованных на основе классической [$\alpha = 2$] (а,с) и дробной [согласно (22) $\alpha = 1.2$] (b,d) мер пространственной корреляции. Данные основаны на дискретном временном такте $T = 29000$. Фрагменты (с) и (d) соответствуют выделенным областям на фрагментах (а) и (b). На рисунке показаны различия для определенных областей параметрического пространства. Фрагменты (e1) – (e6) представляют состояния системы в заданный момент времени для конфигураций, отмеченных на (с) и (d).

Реализация спектра дробных мер пространственной корреляции производилась с использованием соответствующего обобщения классического подхода. Подробное обсуждение метрики, а также исследование ее отклика на синтетические реализации отражены в тексте диссертации. В частности, демонстрируется, что на основе модифицированного спектра метрик $g_0(\alpha, t)$ удастся конкретным временным фрагментам t динамической реализации сопоставить более детальную карту параметрического пространства, отражающую особенности совместного существования некогерентных доменов химерного состояния с фазовыми волнами. Результаты представлены на Рис.6 и демонстрируют высокую организацию участка, находящегося между областями однородного и неоднородного синхронизационных переходов (d).

Пятая глава посвящена аналитическому осмыслению полученных результатов, основанному на расширенном линейном анализе распределенной многокомпонентной реакционно-супердиффузионной системы с [HR2] нелинейностью. Результаты отражены в работе [7]. Для достижения поставленной задачи были определены стационарные состояния (u^*, v^*) исследуемой распределенной [1D2C] системы (2) и внедрены слабые возмущения относительно них:

$$\begin{cases} u(x,t) = u^* + \eta_u(x,t), \\ v(x,t) = v^* + \eta_v(x,t). \end{cases} \quad (26)$$

Данный подход позволяет произвести линеаризацию и выделить пространственные k моды, устойчивые / неустойчивые в линейном приближении для широкого множества конфигураций (α_u, α_v) . В нашем случае, удалось получить уравнения на предельно малую компоненту возмущения:

$$\begin{cases} \partial_t \eta_u = -D_u(-\Delta)^{\alpha_u/2} \eta_u + a_{uu} \eta_u + a_{uv} \eta_v, \\ \partial_t \eta_v = -D_v(-\Delta)^{\alpha_v/2} \eta_v + a_{vu} \eta_u + a_{vv} \eta_v, \end{cases} \quad (27)$$

с

$$a_{ij} = \partial_j f_i(u, v) \Big|_{u=u^*, v=v^*}, \text{ где } i, j = \{u, v\}. \quad (28)$$

Применяя интегральное преобразование Фурье по пространственной компоненте $\hat{\mathbb{F}}\{f(x)\}(k)$ и Лапласа по временной $\hat{\mathbb{L}}\{f(t)\}(p)$, возможно прийти к алгебраическому уравнению для двойной трансформанты $(\tilde{\eta}_u, \tilde{\eta}_v)$:

$$\begin{pmatrix} a_{uu} & a_{uv} \\ a_{vu} & a_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_u \\ \tilde{\eta}_v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -D_u |k|^{\alpha_u} & 0 \\ 0 & -D_v |k|^{\alpha_v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_u \\ \tilde{\eta}_v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_u \\ \tilde{\eta}_v \end{pmatrix} = 0. \quad (29)$$

Учитывая малость возмущений (η_u, η_v) , ненулевое значение двойной трансформанты достигается путем выполнения условия:

$$\det \begin{vmatrix} a_{uu} - p - D_u |k|^{\alpha_u} & a_{uv} \\ a_{vu} & a_{vv} - p - D_v |k|^{\alpha_v} \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

и приводит к характеристическому уравнению, записанному в форме:

$$p^2 + \sigma(\alpha_u, \alpha_v; k)p + d(\alpha_u, \alpha_v; k) = 0, \quad (31)$$

с решениями в виде:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\sigma(\alpha_u, \alpha_v; k) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha_u, \alpha_v; k) - 4d(\alpha_u, \alpha_v; k)} \right). \quad (32)$$

В соответствующих выражениях для $\sigma(\alpha_u, \alpha_v; k)$ и $d(\alpha_u, \alpha_v; k)$:

$$\sigma(\alpha_u, \alpha_v; k) = D_u |k|^{\alpha_u} + D_v |k|^{\alpha_v} - a_{uu} - a_{vv}, \quad (33)$$

$$d(\alpha_u, \alpha_v; k) = D_u D_v |k|^{\alpha_u + \alpha_v} - a_{vv} D_u |k|^{\alpha_u} - a_{uu} D_v |k|^{\alpha_v} + a_{uu} a_{vv} - a_{uv} a_{vu}, \quad (34)$$

явно выделяется зависимость не только от k (соответствующих конкретным пространственным модам), но еще и от показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) , относящихся к конфигурационным особенностям организации

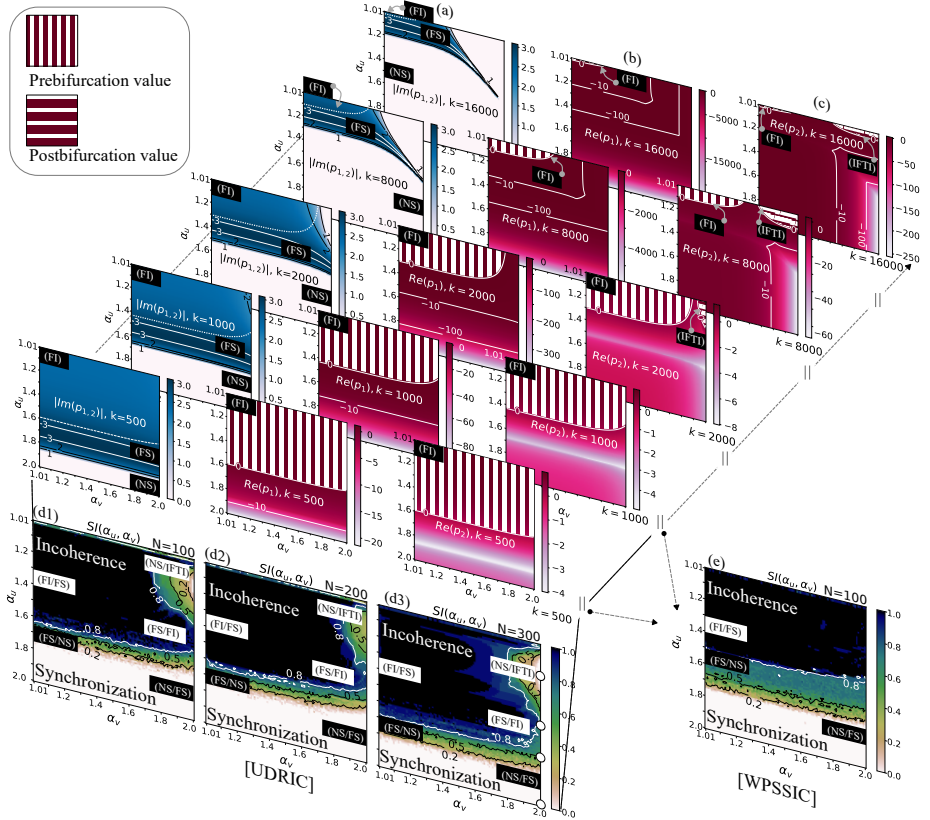


Рис. 7 — Решения характеристического уравнения (31) $p(\alpha_u, \alpha_v; k)$, а также представление динамических проявлений структуры сети, основанных на силе некогерентности $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ (10). В столбцах (a), (b) и (c) показаны значения $|Im(p_{1,2})|$, $Re(p_1)$ и $Re(p_2)$ для всех допустимых конфигураций (α_u, α_v) . На рисунках дополнительно показаны типы устойчивости / неустойчивости для конкретных пространственных мод k , реализованных в рамках различных супердиффузионных конфигураций (α_u, α_v) . В частности, (FI) - неустойчивость фокусного типа, (IFTI) - несогласованная дробная Тьюринговская неустойчивость, (FS) - устойчивость фокусного типа, (NS) - узловый тип устойчивости. Фрагменты (d1), (d2) и (d3) иллюстрируют силу некогерентности $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ для систем, состоящих из $N = 100$, $N = 200$ и $N = 300$ нейронов соответственно. Был использован единый набор начальных условий [UDRIC]. Белыми точками на (d3) обозначены конфигурации сети, состояния которых представлены в тексте диссертации. Сила некогерентности $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ для различных конфигураций сети (α_u, α_v) с начальными условиями, соответствующими слабому возмущению относительно стационарного состояния [WPPSSIC], представлена на фрагменте (e). На диаграммах SI также указан вклад различных типов устойчивости / неустойчивости (в порядке их формальной значимости) в формирование режимов синхронизации, некогерентности и частичной синхронизации.

супердиффузионных сетей. Результаты формального разделения конфигураций, основанного на расширенном линейном анализе супердиффузионной системы представлены на Рис.7. На фрагментах дополнительно отображены типы устойчивости / неустойчивости, основанные на мнимых (а) и действительных (б), (с) компонентах решения характеристического уравнения (32), реализованных в рамках различных супердиффузионных конфигураций (α_u, α_v) , для конкретных пространственных k -мод. В частности, **(FI)** — Focus-type Instability, неустойчивость фокусного типа, **(IFTI)** — Inconsistent Fractional Turing Instability, несогласованная дробная Тьюринговская неустойчивость, **(FS)** — Focus-type Stability, устойчивость фокусного типа и **(NS)** — Node-type Stability, узловой тип устойчивости. Подробное обсуждение данных областей, а также аналитические зависимости показателей дробного оператора Лапласа, определяющие конкретный тип устойчивости / неустойчивости могут быть обнаружены в тексте диссертации. Для сопоставления, на рисунке также продемонстрированы значения метрики $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ для систем, состоящих из $N = 100, 200, 300$ нейронов (d1) – (d3) с [UDRIC] начальными условиями, а также для системы из $N = 100$ нейронов с начальными условиями, соответствующими слабому возмущению относительно стационарного состояния [**Weak Perturbation Stationary State Initial Conditions, WPSSIC**] (e). Значения параметров для SI : $\delta_{SI} = 0.3$ и $M = 20$. С учётом соответствующих нелинейных эффектов, особенно эффектов взаимодействия между k модами, аналитические данные (а) – (с) демонстрируют общее согласие с развитием состояний частичной синхронизации, воспроизведенных на базе нелокальных итерационных отображений для супердиффузионных сетей Hindmarsh-Rose нейронов (d1) – (d3) и (e). Дополнительная информация представлена в описании к рисунку.

Заключение

Данная работа посвящена исследованию развития состояний частичной синхронизации в системах нейронов (осцилляторов Hindmarsh-Rose) с супердиффузионным типом взаимодействия.

1. Впервые определена супердиффузионная схема взаимодействия между осцилляторами, точечная динамика которых задана на основе как двухкомпонентной [HR2], так и трехкомпонентной [HR3] нелинейной модели Hindmarsh-Rose. Данная схема взаимодействия организована на основе разностной схемы аппроксимации дробного оператора Лапласа и предопределяет удобный и универсальный способ задания нелокального типа взаимодействия, основанного на регулярной топологии специального вида. В частности, были введены схемы взаимодействия, основанные на одномерном двухкомпонентном [1D2C], двумерном двухкомпонентном [2D2C], одномерном трехкомпонентном [1D3C] и двумерном трехкомпонентном [2D3C] представлении. Проведены идейные параллели супердиффузионной схемы взаимодействия, а также лежащих в ее основе степенных функций, с различными биологическими аспектами организации нервной ткани. Организовано

позиционирование данной модели в рамках общего контекста актуальных как теоретических, так и прикладных моделей сложных систем взаимодействующих осцилляторов различной природы, в том числе ансамблей связанных нейронов.

2. Установлена возможность возникновения и развития различных состояний как полной и частичной синхронизации, а также развитой некогерентности на базе супердиффузионных конфигураций. В частности, определены процессы развития химерных и уединенных состояний, а также состояний, подразумевающих совместное существование химер и фазовых волн для широкого спектра однородно распределенных случайных начальных условий [UDRIC] и конфигураций супердиффузионных сетей $[nDmC]$, $n = 1, 2$; $m = 2, 3$. Предопределен универсальный метод изучения нелинейно-динамических свойств многокомпонентной распределенной системы с супердиффузионной конфигурацией в широком смысле, основанный на исследовании параметрического пространства показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) .
3. Выявлены области параметрического пространства (α_u, α_v) , определяющие конфигурацию взаимодействия супердиффузионного типа, в рамках которых возможно формирование конкретных реализаций состояний частичной синхронизации. В частности, определены такие конфигурации $[nDmC]$, $n = 1, 2$; $m = 2, 3$ систем с супердиффузионной связью, которые допускают возможность развития химерных и уединенных состояний, фазовых волн различных масштабов, а также их совместных реализаций для широкого множества однородно распределенных случайных начальных условий [UDRIC]. Установлено сходство организации параметрического пространства для классов $[1DmC]$ и $[2DmC]$, $m = 2$ систем с супердиффузионной конфигурацией.
4. Определены параметрические области однородного и неоднородного синхронизационных переходов, отражающих сложное влияние изменения супердиффузионных конфигураций по отношению к процессам формирования и развития различных состояний полной и частичной синхронизации, а также некогерентности. Модифицирована широко используемая классическая мера пространственной корреляции $g(t)$ на случай спектра дробных мер пространственной корреляции $g(\alpha; t)$. В результате применения модифицированного подхода были определены более сложные различимые динамические процессы в параметрическом пространстве. В частности, появилась дополнительная возможность определять химерные состояния с когерентной частью, организованной в виде крупномасштабной фазовой волны с различными характерными масштабами. Данная модифицированная метрика не ограничена исключительно применением к супердиффузионным конфигурациям и может быть использована для анализа широкого спектра состояний частичной

- синхронизации, возникающих на базе распределенных динамических систем с произвольной топологией взаимодействия между элементами.
5. Произведен расширенный линейный анализ рассматриваемой системы с супердиффузионной конфигурацией связи. Определено соответствие между типами устойчивости пространственных k -мод в линейном приближении и развитием различных динамических режимов, воспроизведенных на базе допустимых (α_u, α_v) конфигураций супердиффузионных сетей. Установлена взаимная связь между неустойчивостями пространственных k -мод в линейном приближении, а также участками параметрического пространства показателей дробного оператора Лапласа, ограничивающими области однородного и неоднородного синхронизационных переходов. Введено понятие нового динамического явления — несогласованной дробной Тьюринговской неустойчивости (IFTI), которое потенциально может наблюдаться в распределенных динамических системах с дробно-несогласованным типом взаимодействия элементов соответствующих компонент.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Fateev, I. S.* Dynamics of a chain of interacting neurons with nonlocal coupling, given by Laplace operator of fractional and variable orders with nonlinear Hindmarsh–Rose model functions / I. S. Fateev, A. A. Polezhaev // Bulletin of the Lebedev Physics Institute. — 2023. — Vol. 50, no. 6. — P. 243–252.
2. *Fateev, I.* Chimera states in a chain of superdiffusively coupled neurons / I. Fateev, A. Polezhaev // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2023. — Vol. 33, no. 10. — P. 103110.
3. *Fateev, I.* Chimera states in a lattice of superdiffusively coupled neurons / I. Fateev, A. Polezhaev // Chaos, Solitons & Fractals. — 2024. — Vol. 181. — P. 114722.
4. *Фатеев, И. С.* Химерные состояния в системах супердиффузионно связанных нейронов / И. С. Фатеев, А. А. Полежаев // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. — 2024. — Т. 24, № 4. — С. 328–339.
5. *Fateev, I.* Synchronization transitions in a system of superdiffusively coupled neurons: Interplay of chimeras, solitary states, and phase waves / I. Fateev, A. Polezhaev // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2024. — Vol. 34, no. 9. — P. 093131.
6. *Fateev, I.* Fractional Correlation Measure for Spatial Coherence / I. Fateev, A. Polezhaev // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2026. — Vol. 36, no. 7. — P. 2650078.
7. *Fateev, I.* Analytical study of neural networks with superdiffusive coupling supporting chimera states / I. Fateev, A. Polezhaev // Physical Review E. — 2025. — Vol. 112, no. 1. — P. 014214.

Фатеев Илья Сергеевич

Состояния частичной синхронизации в системах осцилляторов с супердиффузионным
типом взаимодействия

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____