

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
(МФТИ, Физтех)

На правах рукописи

Садеков Дамир Ильдарович

# Квантовая теория поля в неинвариантных состояниях

Специальность: 1.3.3. Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Долгопрудный — 2026

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Аспекты квантовой теории поля в нестационарном пространстве-времени</b>	<b>14</b>
1.1 Квантование скалярного поля . . . . .	14
1.2 Формализм Швингера-Келдыша . . . . .	16
<b>2 Электрический ток в сильном внешнем электрическом поле</b>	<b>21</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	22
2.2 Моды во внешнем электрическом поле . . . . .	23
2.2.1 Решения уравнения Дирака . . . . .	23
2.2.2 Разложение оператора фермионного поля . . . . .	27
2.3 Дреvesный ток . . . . .	30
2.3.1 Ток фермионов . . . . .	30
2.3.2 Комментарий о теории с бозонами во внешнем поле . . . . .	31
<b>3 Глобальный квенч в искривленном пространстве-времени</b>	<b>35</b>
3.1 Квенч в плоском пространстве-времени . . . . .	39
3.2 Глобальный квенч в Пуанкаре-регионе пространства де Ситтера . . . . .	42
3.3 Комментарий о негауссовом глобальном квенче . . . . .	46
<b>4 Секулярный рост в пространстве де Ситтера</b>	<b>51</b>
4.1 Однопетлевые поправки к пропагаторам . . . . .	54
4.2 Многопетлевые вклады в двухточечные функции . . . . .	57
4.3 Поправки к многоточечным корреляционным функциям . . . . .	58
4.4 Пересуммирование . . . . .	59
4.5 Комментарий о ситуации в сжимающемся регионе Пуанкаре . . . . .	62

<b>5</b>	<b>Эффективная масса гравитона в пространстве де Ситтера</b>	<b>65</b>
5.1	Предварительные сведения и определения . . . . .	68
5.1.1	Следствия изометрий де Ситтера . . . . .	72
5.2	Эффективное действие . . . . .	74
5.3	Эффективная масса тензорной моды . . . . .	76
5.4	Обсуждение скалярного сектора гравитации . . . . .	79
5.4.1	Общие замечания . . . . .	79
5.4.2	Двумерное пространство-время . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>84</b>
<b>A</b>	<b>Асимптотики мод</b>	<b>86</b>
<b>B</b>	<b>Вывод выражения для тока</b>	<b>88</b>
<b>C</b>	<b>Квенч в искривленном пространстве-времени</b>	<b>91</b>
<b>D</b>	<b>Комментарий о главной серии в расширяющемся регионе Пуанкаре</b>	<b>95</b>
<b>E</b>	<b>Детали петлевого вычисления</b>	<b>98</b>
<b>F</b>	<b>Пузырьковая диаграмма</b>	<b>101</b>
<b>G</b>	<b>Калибровочная инвариантность эффективного действия</b>	<b>103</b>
<b>H</b>	<b>Интегральное соотношение для функций Грина</b>	<b>105</b>
<b>I</b>	<b>Соотношения для тензора энергии-импульса</b>	<b>106</b>
<b>J</b>	<b>Масса фотона в <math>AdS_4</math></b>	<b>108</b>

# Введение

В течение большей части XX века после создания квантовой механики учёные развивали формализм и методы квантовой теории поля, которая на данный момент является основным инструментом для предсказания явлений на субатомном уровне. Так, Стандартная модель — продукт квантовой теории поля — даёт достаточно точные предсказания, подтверждённые экспериментами на Большом адронном коллайдере (ЦЕРН) вплоть до энергий порядка 13 ТэВ. До запуска коллайдера многие физики ожидали, что он выявит существенные отклонения от теории, однако этого не произошло. Несмотря на то, что в последние годы и наблюдались небольшие аномалии, считается, что принципиально новая физика проявляется лишь на планковских масштабах  $l_P \sim 10^{-35}$  м, недоступных для современных экспериментальных исследований. На этих масштабах взаимодействия, описываемые квантовой теорией поля, должны объединяться с гравитацией в единую теорию. Это открывает простор для современной теоретической физики и мотивирует развитие различных подходов к объединению квантовой теории и гравитации, таких как теория струн [1], бран [2], голографическое соответствие [3] и т. п.

Одним из возможных путей к объединению квантовой теории поля с гравитацией является прямое квантование гравитационного поля. Однако попытки построить последовательную квантовую теорию гравитации сталкиваются с серьёзными концептуальными и техническими трудностями, включая неперенормируемые ультрафиолетовые расходимости и проблемы с сохранением унитарности [4,5]. В связи с этим важную роль играет более ограниченный, квазиклассический подход, в рамках которого гравитационное поле рассматривается как классическое, тогда как динамика материи описывается методами квантовой теории поля. Такой подход, известный как квантовая теория поля на внешнем гравитационном фоне, не является полноценной альтернативой квантовой гравитации, однако представляет собой естественный промежуточный шаг в её направлении. В частности, он позволяет последовательно исследовать влияние искривлённого или динамического пространства-времени на квантовые поля и широко применяется при описании физических процессов в ранней Вселенной, где кривизна и нестационарность фона играют существенную роль. Важным концептуальным

результатом, полученным в рамках этого подхода, стало осознание того, что в нестационарных искривлённых пространствах отсутствует единственное каноническое вакуумное состояние, аналогичное состоянию минимальной энергии в плоском пространстве Минковского. Как подробно обсуждается, например, в монографиях [6, 7], отсутствие симметрии относительно сдвигов времени приводит к неоднозначности понятий вакуума и частицы в квантовой теории поля. Это обстоятельство находит наглядное проявление в ряде фундаментальных физических эффектов. Так, в работах Швингера было показано, что сильное внешнее электрическое поле способно приводить к спонтанному рождению пар частица–античастица [8]. В гравитационном контексте аналогичные идеи проявляются, в частности, в том, что равномерно ускоренный наблюдатель в плоском пространстве-времени воспринимает вакуумное состояние как тепловое распределение частиц [9]. Ещё более глубоким результатом стало предсказание того, что чёрные дыры должны испускать тепловое излучение за счёт квантовых эффектов вблизи горизонта событий, как было показано в работах Хокинга [10, 11]. Эти примеры наглядно демонстрируют, что квантовые флуктуации поля в присутствии сильных внешних полей или кривизны пространства-времени могут приводить к наблюдаемым физическим эффектам, отсутствующим в стационарных ситуациях.

Аналогичные квантовые эффекты проявляются и в космологическом контексте. Расширяющаяся Вселенная способна рождать частицы из вакуума за счёт гравитационного поля, изменяющегося во времени. Впервые такой эффект был продемонстрирован в работе [12], показавшей, что в фридмановской Вселенной возникают пары частиц, рождающиеся на стадии быстрого расширения. Последующие исследования (например, работы Я. Б. Зельдовича и А. А. Старобинского [13]) подтвердили, что рождение частиц может происходить в различных моделях ранней Вселенной. Эти идеи сыграли важную роль в формировании современной теории космологической инфляции, согласно которой в ранней Вселенной имела место короткая эпоха стремительного экспоненциального расширения [14, 15]. Квантовые флуктуации поля в эту инфляционную эпоху рассматриваются как источник первичных возмущений, породивших крупномасштабную структуру Вселенной [16].

При анализе квантовых флуктуаций на динамическом фоне возникает вопрос о выборе начального квантового состояния поля. Чаще всего в моделях инфляции предполагается особое инвариантное вакуумное состояние — вакуум Банча–Дэвиса [17], которое обладает большой симметрией и даёт регулярное поведение корреляционных функций. Однако вакуум Банча–Дэвиса является лишь частным случаем начального состояния. В принципе можно рассматривать и другие, более общие начальные состояния, неинвариантные относительно изометрий фонового пространства — в конечном счёте очевидным представляется предпо-

ложение, что реальное начальное состояние полей во Вселенной на старте инфляционного расширения было крайне неравновесным. В свою очередь, это может приводить к отличающимся предсказаниям для наблюдаемых величин. Подобные модификации начального состояния активно обсуждались в литературе в контексте возможных наблюдательных последствий [18, 19]. Кроме того, исследование квантовых полей за пределами инвариантного вакуума важно и с теоретической точки зрения: в нестационарных моделях часто возникают секулярные (возрастающие со временем) эффекты от квантовых петлевых поправок. Например, расчёты петлевых вкладов в пространстве де Ситтера показывают, что квантовые средние могут неограниченно расти во времени [20–22], указывая на необходимость учёта обратной реакции квантовых флуктуаций на эволюцию самой Вселенной. В то же время более детальный анализ показывает, что влияние выбора начального состояния может существенно сказываться на результате пересуммирования растущих петлевых вкладов [23].

Таким образом, ряд открытых вопросов неравновесной квантовой теории поля во внешних фоновых полях, включая неоднозначность определения частиц и вакуума, зависимость физических величин от выбора начального состояния и секулярных эффектов, мотивирует дальнейшее развитие этой области. Настоящая диссертация посвящена изучению квантовой теории поля в неинвариантных начальных состояниях. Это позволит углубить понимание указанных концептуальных проблем и заложить основу для их разрешения.

## Цели и задачи диссертационного исследования

Настоящая диссертация ставит своей целью исследование квантовой теории поля в нестационарных ситуациях на фоне сильных внешних полей. Для этого решаются следующие задачи:

- Исследование тока фермионов на фоне сильного постоянного электрического поля для различных начальных состояний квантовой материи.
- Изучение динамики корреляторов в свободной скалярной теории поля в плоском пространстве и пространстве де Ситтера после возмущения равновесной матрицы плотности оператором квенча.
- Вычисление и суммирование петлевых поправок, содержащих секулярный рост в теории с кубическим самодействием в пространстве де Ситтера.
- Исследование массивного слагаемого в эффективной теории для космологических возмущений метрики в тензорном секторе гравитации, индуцированного взаимодействием

со скалярным квантовым полем на фоне пространства де Ситтера.

### **Основные положения, выносимые на защиту диссертации**

- Вакуумный ток фермионов на фоне постоянного внешнего электрического поля зависит от начального состояния из определенного класса фоковских вакуумов. В этом классе существует состояние, для которого ток равен нулю, тогда как для остальных состояний ток расходится пропорционально длительности действия электрического поля.
- Динамика корреляторов после глобального квенча, определяемого как действие унитарного оператора на вакуумную матрицу плотности, может быть определена на основе разработанной техники. В плоском пространстве для гауссового возмущения начального состояния релаксация двух-точечных функций безмассовых полей отсутствует. В пространстве де Ситтера степень релаксации определяется массой скалярного поля.
- Для легких полей в Пуанкаре-регионе пространства де Ситтера при начальном состоянии Банча–Дэвиса в поправке к пропагатору Келдыша доминируют лестничные диаграммы, содержащие секулярный рост. Суммирование таких диаграмм приводит к уравнениям на их полную сумму, допускающим частные решения.
- Динамика гравитационных возмущений, взаимодействующих с квантовым скалярным полем, определяется однопетлевым эффективным действием Швингера-Келдыша на фоне пуанкаре-региона пространства де Ситтера. В тензорном секторе гравитации эффективная масса равна нулю, а в скалярном секторе для легких полей возникают нетривиальные вклады.

### **Актуальность**

Квантовая теория поля в нестационарных условиях и на фоне внешних полей является одной из ключевых областей современной теоретической физики и играет важную роль в изучении процессов, происходящих как в космологии ранней Вселенной, так и в системах с сильными электромагнитными и гравитационными полями [12, 23, 24]. В таких ситуациях существенное значение имеют эффекты, связанные с неравновесной динамикой, выбором начального квантового состояния и ростом квантовых поправок во времени, которые не описываются в рамках стандартных равновесных подходов. Особый интерес в этом контексте представляют расширяющиеся пространства, в частности пространство де Ситтера, а также

модели сильных внешних электрических полей, служащие естественными моделями для исследования инфракрасных эффектов, петлевых поправок и их влияния на наблюдаемые физические величины. Изучение этих явлений является важным этапом в развитии квантовой теории поля вне равновесия и в искривлённом пространстве-времени, а также в уточнении её пределов применимости при описании фундаментальных физических процессов.

## **Научная новизна**

Все основные результаты диссертации являются оригинальными и впервые получены в ходе научной работы автора диссертации. В частности, установлена зависимость вакуумного тока фермионов в постоянном сильном электрическом поле от выбора начального состояния в определенном классе фоковских вакуумов и найдено состояние с нулевым индуцированным током. Разработан метод вычисления неравновесной динамики корреляторов после глобального квенча, задаваемого унитарным преобразованием равновесной матрицы плотности и показано отсутствие релаксации двухточечных функций безмассового скалярного поля в плоском пространстве. В пространстве де Ситтера установлена зависимость релаксации от массы поля. Показано, что для лёгких скалярных полей в Пуанкаре-регионе пространства де Ситтера при начальном состоянии Банча–Дэвиса в петлевых поправках к пропагатору Келдыша доминируют лестничные диаграммы с секулярным ростом и получено частное решение уравнения, суммирующего данный класс диаграмм. Вычислено однопетлевое эффективное действие Швингера–Келдыша для космологических возмущений метрики, индуцированное взаимодействием со скалярным квантовым полем в пространстве де Ситтера, на основе которого показано отсутствие генерации эффективной массы в тензорном секторе и продемонстрировано наличие нетривиальных вкладов в скалярном секторе для лёгких полей.

## **Методология и методы исследования**

В диссертационной работе используются методы квантовой теории поля в нестационарных условиях и искривлённом пространстве-времени. Основным инструментом является формализм Келдыша–Швингера, в рамках которого вычисляются корреляционные функции и квантовые поправки с использованием соответствующей диаграммной техники. Для анализа и пересуммирования ведущих петлевых вкладов применяются уравнения Дайсона–Швингера.

## Практическая и научная ценность

Исследования, представленные в диссертационной работе, носят теоретический характер. Полученные результаты имеют значение для развития квантовой теории поля в нестационарных условиях и на фоне сильных внешних полей. Выводы работы могут быть использованы в исследованиях по космологии ранней Вселенной, теории инфляции, физике квантовых полей в искривлённом пространстве-времени, включая гравитационные поля вблизи чёрных дыр и других пространств с горизонтами, а также при анализе квантовых эффектов в сильных электрических и гравитационных полях. Развитые в диссертации подходы расширяют возможности описания неравновесных квантовых процессов и систематического учёта квантовых поправок в нестационарных пространствах, включая инфляционные космологические сценарии и ситуации с сильными внешними гравитационными полями. Полученные результаты способствуют более глубокому пониманию поведения квантовых полей в экстремальных условиях и могут служить основой для дальнейших исследований в области квантовой теории поля и космологии.

## Степень достоверности и апробация работы

Результаты исследований вошедших в диссертацию многократно представлялись соискателем на отечественных и международных конференциях и семинарах. В частности, на **семинарах** отделения теоретической физики ФИАН им. П.Н. Лебедева (г. Москва), отделения теоретической физики ИЯИ (г. Москва), кафедры теоретической физики МФТИ (г. Долгопрудный), лаборатории физики высоких энергий МФТИ (г. Долгопрудный), а также на следующих **международных конференциях**: VII International Conference “Models in Quantum Field Theory” (Санкт-Петербург, 2022), International Conference on “Particle Physics and Cosmology” dedicated to Prof. V. Rubakov memory (Ереван, Армения, 2023), “Fields and Strings 2024” (Москва, 2024), “QUARKS-2024” (Переславль-Залесский, 2024), 18th RUSSIAN GRAVITATIONAL CONFERENCE (Казань, 2024), VIII International Conference "Models in Quantum Field Theory (Санкт-Петербург, 2025) — и **отечественных конференциях**: “Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике” (Москва, ИТЭФ, 2021), 63-, 64-, 65-я “Всероссийская научная конференция МФТИ” (Долгопрудный, МФТИ, 2020, 2021, 2023). Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

По материалам диссертации опубликовано 4 статьи в международных реферируемых журналах, индексируемых базами данных Web of Science и Scopus.

## Личный вклад автора

Результаты, представленные в диссертации, были получены диссертантом лично, либо при его непосредственном участии. Во всех опубликованных работах диссертант совместно с соавторами участвовал в постановке исследовательских задач, выборе методов их решения, интерпретации результатов и формулировке выводов. В работе [II] диссертант был единственным автором.

## Содержание диссертации

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **Главе 1** приведен краткий обзор необходимых основ из квантовой теории поля в нестационарном пространстве-времени.

В **разделе 1.1** обсуждается квантование скалярного поля на фоне Пуанкаре-региона пространства де Ситтера, определяется состояние Банча-Дэвиса и приводятся асимптотики при больших и маленьких импульсах для мод квантового поля.

В **разделе 1.2** описывается формализм Келдыша-Швингера для вычисления корреляционных функций. Вводится представление для корреляционных функций через функциональный интеграл Келдыша-Швингера и определяется функционал Вигнера, который задает начальное состояние теории.

В **Главе 2** рассматривается задача о фермионах на фоне постоянного электрического поля.

В **разделе 2.1** вводятся основные обозначения и формулируется действие рассматриваемой теории.

В **разделе 2.2** решаются уравнения движения и проводится квантование фермионного поля в соответствии с требованием корректного адамарова поведения.

В **разделе 2.3** вычисляется ток на древесном уровне для произвольного решения уравнений движения. Проводится сравнение с соответствующими результатами для бозонного поля в постоянном внешнем электрическом поле.

В **Главе 3** разрабатывается и применяется техника для вычисления эволюции корреляторов после возмущения вакуумной матрицы плотности посредством действия оператора глобального кванча в гауссовой теории скалярного поля, минимально взаимодействующего

с гравитацией.

В разделе 3.1 вычисляется зависимость от времени двух-точечной корреляционной функции после глобального квенча в плоском пространстве времени для массивного и безмассового свободного скалярного поля.

В разделе 3.2 проводится анализ динамики одновременного двух-точечного коррелятора после глобального квенча для скалярного поля на фоне Пуанкаре-региона пространства де Ситтера. Показано, что при определенном значении массы скалярного поля меняется характерное поведение корреляционной функции.

В разделе 3.3 обсуждается построение негауссова начального состояния, как действие соответствующего оператора квенча на начальную матрицу плотности. В качестве примера посчитано поведение двух-точечного коррелятора в плоском двумерном пространстве времени после такого возмущения начального состояния.

В Главе 4 исследуются секулярные эффекты в пространстве де Ситтера в теории скалярного поля с кубическим самодействием.

В разделе 4.1 вычислена однопетлевая поправка к пропагатору Келдыша и показано, что она содержит секулярно растущий вклад в пределе больших времен.

В разделе 4.2 показано, что многопетлевые диаграммы типа «пузырь внутри пузыря» являются подавленными.

В разделе 4.3 рассмотрена петлевая поправка к вершине взаимодействия и показано, что при построении системы уравнений типа Дайсона-Швингера, которое суммирует лидирующие петлевые вклады на больших временах, можно пренебречь поправками к вершинам.

В разделе 4.4 получено уравнение Дайсона-Швингера, которое пересуммирует ведущие поправки от всех петель в рассматриваемом пределе в Пуанкаре-регионе пространства де Ситтера, получено частное решение этого уравнения, которое модифицирует древесный пропагатор Келдыша.

В разделе 4.4 обсуждаются особенности ведущих вкладов в однопетлевых поправках для лёгких полей в сжимающемся регионе Пуанкаре. Показано, что в этом случае соответствующие уравнения Дайсона-Швингера будут нелинейными интегральными уравнениями.

В Главе 5 изучается эффективное действие для космологических возмущений на фоне пространства де Ситтера. Вычисляется эффективное массивное слагаемое в этом действии в тензорном секторе.

В разделе 5.1 выводится структура однопетлевого эффективного действия для космологических возмущений на основе вычисления функционального интеграла Келдыша-Швингера по скалярному полю. Обсуждается, какую форму должно иметь эффективное

уравнение движения, если удовлетворяются калибровочная симметрия и изометрии пространства де Ситтера.

В разделе 5.2 приводится конкретное выражение для эффективного действия через интегралы по петлевому импульсу. Обсуждается его калибровочная инвариантность и необходимые перенормировки.

В разделе 5.3 на основе полученного эффективного действия вычисляется коэффициент, отвечающий эффективной массе тензорной моды возмущений метрики. Показано, что она равна нулю для состояния Банча-Дэвиса скалярного поля.

В разделе 5.4 обсуждается вычисление коэффициентов, отвечающих эффективной массе в скалярном секторе космологических возмущений. Показано, что в общем случае требуется более аккуратное устранение ультрафиолетовых особенностей в эффективном действии. В случае двумерного пространства времени получена эффективная масса вейлевской моды гравитации с помощью численного расчета.

В Приложении А приведены асимптотики для мод фермионного поля на фоне постоянного внешнего электрического поля.

В Приложении В выражение для тока фермионов сводится к интегралу от полной производной по физическому импульсу в постоянном внешнем электрическом поле.

В Приложении С приводится вывод выражения для двух-точечной корреляционной функции после глобального квенча, реализованного как действие унитарного оператора на равновесную матрицу плотности.

В Приложении D приводится уравнение типа Дайсона-Швингера для тяжелых полей в Пуанкаре-регионе пространства де Ситтера и получено их частное решение в случае, когда начальное состояние является состоянием Банча-Дэвиса. Показано, что для очень тяжелых полей петлевые поправки подавлены дополнительным экспоненциально малым фактором.

В Приложении E приведены детали вычисления однопетлевой поправки к пропагатору Келдыша для легких полей в Пуанкаре-регионе пространства де Ситтера.

В Приложении F приведены выражения для компонент поляризованного оператора, возникающего в диаграмме типа “пузырь” в выражении эффективного действия для возмущений метрики, через интегралы по петлевому импульсу.

В Приложении G обсуждается инвариантность эффективного действия Келдыша-Швингера для возмущений метрики относительно действия диффеоморфизмов.

В Приложении F выводятся интегральные соотношения между функцией Келдыша в совпадающих по времени точках и спектральной функцией, возникающей в запаздывающем

и опережающем пропагаторах.

В **Приложении I** выводятся соотношения для интегралов от коммутаторов тензора энергии-импульса скалярного поля, упрощающие запись эффективного действия для возмущений метрики.

В **Приложении J** приводится вывод эффективной массы фотона в пространстве анти-де Ситтера в рамках равновесной квантовой теории поля, следуя подходу Поррати.

### Содержание диссертации

Диссертация состоит из введения (Введение), пяти глав основного текста (Главы 1–5), заключения (Глава 6) и десяти приложений (A–J). Общий объем диссертации составляет 123 страницы, включая 11 рисунков. Список литературы содержит 163 ссылки.

### Публикации автора по теме диссертации

1. E. T. Akhmedov, A. V. Anokhin, D. I. Sadekov. Currents of created pairs in strong electric fields // [International Journal of Modern Physics A, Vol. 36, No. 19, 2150134 \(2021\)](#).
2. Damir Sadekov. Effective graviton mass in de Sitter space // [Phys. Rev. D 109, 085001 \(2024\)](#).
3. E. T. Akhmedov, V. I. Lapushkin, D. I. Sadekov. Light fields in various patches of de Sitter spacetime // [Phys. Rev. D 111, 125015 \(2025\)](#).
4. Ivan A. Belkovich, Damir Sadekov, Gleb S. Zverev. Global quenches and correlator dynamics in de Sitter space // [Phys. Rev. D 113, 065027 \(2026\)](#).

## Глава 1

# Аспекты квантовой теории поля в нестационарном пространстве-времени

В данной диссертации центральным примером для исследования квантовой теории поля в нестационарной ситуации является пространство де Ситтера (dS), а точнее расширяющийся Пуанкаре-регион (expanding Poincaré patch, EPP) пространства-времени де Ситтера, который определяется метрикой:

$$ds^2 = \frac{1}{\eta^2} (d\eta^2 - d\mathbf{x}^2), \quad (1.1)$$

где мы принимаем параметр Хаббла за условную единицу  $H = 1$  (за исключением Главы 5, где мы в явном виде восстановили зависимость от этого параметра), а  $\eta = e^{-t}$  – конформное время. В EPP оно пробегает значения от  $+\infty$  в прошлой бесконечности,  $t \rightarrow -\infty$ , до 0 в будущей,  $t \rightarrow +\infty$ . Ниже мы обсудим квантование свободного скалярного поля, минимально связанного с гравитацией, на этом нестационарном гравитационном фоне.

### 1.1 Квантование скалярного поля

Рассмотрим действие свободного скалярного поля:

$$S[\phi] = \int d^D x \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right], \quad (1.2)$$

где  $D = d + 1$  – размерность пространства-времени. Оператор поля  $\hat{\phi}(t, \mathbf{x})$  в представлении Гейзенберга должен решать уравнение Клейна Гордона

$$\left[ \partial_\eta^2 - \frac{D-2}{\eta} \partial_\eta + \left( p^2 + \frac{m^2}{\eta^2} \right) \right] \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.3)$$

а также иметь канонические коммутационные соотношения с каноническим импульсом

$$\pi(t, \mathbf{x}) = \sqrt{|g|}g^{00}\partial_0\phi(t, \mathbf{x})$$

$$\left[\widehat{\phi}(t, \mathbf{x}), \widehat{\pi}(t, \mathbf{y})\right] = i\delta^{(D-1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (1.4)$$

Тогда, в виду однородности по пространственным координатам, разложим скалярное поле стандартным образом, используя операторы рождения и уничтожения с каноническими коммутационными соотношениями

$$\phi(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^{D-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{D-1}} \left[ \widehat{a}_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}(\eta) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + \widehat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger f_{\mathbf{p}}^*(\eta) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right], \quad [\widehat{a}_{\mathbf{p}}, \widehat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^{D-1} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (1.5)$$

$$f_{\mathbf{p}}(\eta) = \eta^{\frac{D-1}{2}} h_\nu(p\eta), \quad p \equiv |\mathbf{p}|,$$

так, что моды  $f_{\mathbf{p}}(\eta)$  удовлетворяют тому же уравнению Клейна-Гордона (1.3), которое мы запишем с помощью дополнительного обозначения для будущего удобства в Главе 5:

$$\nabla_\eta \partial_\eta f_{\mathbf{p}}(\eta) + \left( p^2 + \frac{m^2}{\eta^2} \right) f_{\mathbf{p}}(\eta) = 0, \quad \nabla_\eta \equiv \partial_\eta - \frac{D-2}{\eta}. \quad (1.6)$$

Стандартным выбором мод в ЕРР является выбор таких решений, что функции  $h_\nu(p\eta)$  выражаются через функции Ханкеля первого рода  $H_\nu^{(1)}(z)$  для легких ( $m < \frac{D-1}{2}$ ) и тяжелых ( $m > \frac{D-1}{2}$ ) полей следующим образом:

$$h_\nu(p\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi}{2}\nu} H_{i\nu}^{(1)}(p\eta), \quad \nu = \sqrt{m^2 - \frac{(D-1)^2}{4}} \quad (\text{тяжелые поля, principal series}), \quad (1.7)$$

$$h_\nu(p\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H_\nu^{(1)}(p\eta), \quad \nu = \sqrt{\frac{(D-1)^2}{4} - m^2} \quad (\text{легкие поля, complementary series}),$$

Дело в том, что при больших импульсах для любых значений массы поля  $H_\nu^{(1)}(p\eta) \sim e^{ip\eta}$  такие гармоники ведут себя как обыкновенные плоские волны. Такое поведение мод называется корректным адамаровым поведением, так как в этом случае лидирующие ультра-фиолетовые (УФ) особенности корреляционных функций совпадают с таковыми в плоском пространстве из-за универсальности поведения мод с большим импульсом. Как правило, в данной работе и мы будем ограничиваться таким выбором мод. Соответствующий фоковский вакуум для такого выбора мод называется состоянием Банча-Дэвиса  $|\text{BD}\rangle$ :

$$\widehat{a}_{\mathbf{p}} |\text{BD}\rangle = 0. \quad (1.8)$$

Однако, стоит подчеркнуть, что это далеко не единственный выбор — для построения

мод можно использовать зависящие от импульса коэффициенты Боголюбова:

$$h_\nu(p\eta) \propto \alpha_p H_\nu^{(1)}(p\eta) + \beta_p H_\nu^{(2)}(p\eta). \quad (1.9)$$

В этом случае необходимо предположить, что коэффициент  $\beta_p$  достаточно быстро стремится к нулю при больших импульсах, чтобы получить пропагаторы (для основного состояния пространства Фока) с корректным адамаровским поведением (см. обсуждение еще более общего выбора гармоник в заключительной части Главы 2). Более того, мы считаем, что с физической точки зрения для решения реальных задач в контексте ранней Вселенной нужно рассматривать различные варианты квантования поля по типу (1.9). Это позволяет изучать более широкий диапазон начальных состояний квантовой теории поля. Помимо этого, для определения начального состояния можно рассматривать разные регионы dS с поверхностями Коши разной геометрии.

В данной диссертации мы сосредоточимся на наиболее интересном случае легких полей (complementary series)  $m < \frac{D-1}{2}$  (за исключением некоторых частных вопросов, обсуждающихся в Главах 4 и 5). В таком случае, для последующей оценки интегралов удобно иметь в виду следующие асимптотические разложения функций Ганкеля:

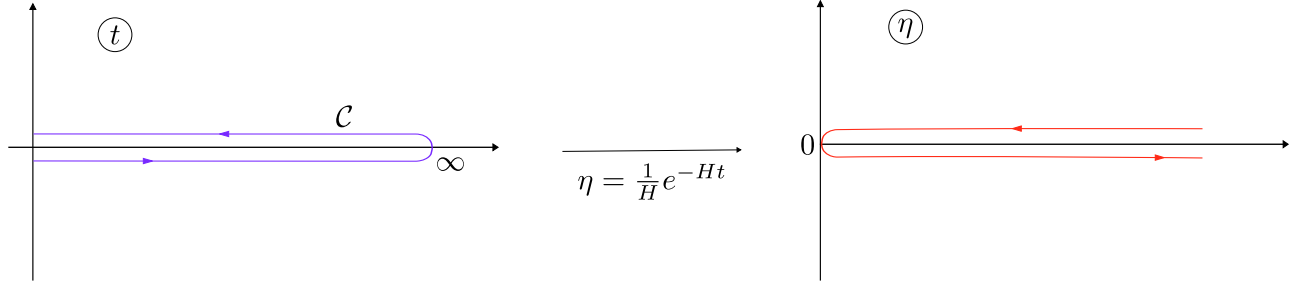
$$\begin{aligned} h_\nu(k\eta) &\simeq \frac{1}{\sqrt{2k\eta}} e^{ik\eta} e^{-i\frac{\pi}{2}(\nu+\frac{1}{2})}, \quad \text{при } k\eta \gg |\nu|; \\ h_\nu(k\eta) &\simeq iA_- \frac{1}{(k\eta)^\nu} + iA_+(k\eta)^\nu + iB(k\eta)^{-\nu+2} + \dots, \quad \text{в пределе } k\eta \ll |\nu|; \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $A_- = -\frac{\Gamma(\nu)}{2\sqrt{\pi}} 2^\nu$ ,  $A_+ = \frac{\sqrt{\pi} e^{-i\pi\nu}}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu+1) \sin(\pi\nu)}$ ,  $B = \frac{2^\nu}{8\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\nu)}{2-\nu}$ .

## 1.2 Формализм Швингера-Келдыша

Хорошо известно, причем в том числе в контексте квантовой теории поля, что в нестационарных ситуациях и в неравновесных начальных состояниях нельзя пользоваться диаграммной техникой Фейнмана, а вместо нее следует использовать технику Швингера-Келдыша [25]. Это касается как пертурбативных так и непертурбативных расчетов. Действительно, зафиксируем начальный момент времени  $t_0$ :

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} dt \int d^{D-1} \mathbf{x} \sqrt{|g(t, \mathbf{x})|} \left[ \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 \right]. \quad (1.11)$$

Рис. 1.1: Келдышевский контур на  $t$ - и  $\eta$ -плоскостях.

Теперь рассмотрим, например, эволюцию квантового среднего некоторого составного оператора  $\widehat{O}[\widehat{\phi}(\mathbf{x})]$ <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{O}[\widehat{\phi}(\mathbf{x})] \rangle_t &\equiv \text{tr} \{ \widehat{\rho}(t) \widehat{O} \} = \text{tr} \{ \widehat{\rho} \widehat{U}^\dagger(t, t_0) \widehat{O} \widehat{U}(t, t_0) \} \equiv \\ &\equiv \text{tr} \{ \widehat{\rho} \cdot \widehat{U}^\dagger(t, t_0) \widehat{O} \widehat{U}^\dagger(+\infty, t) \cdot \widehat{U}(+\infty, t_0) \}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $\widehat{\rho}$  – начальная матрица плотности, а  $\widehat{U}(t, t')$  – оператор эволюции. Дело в том, что в равновесных ситуациях оказывается, что множитель  $\widehat{U}(+\infty, t_0)$  в (1.12) факторизуется (теорема Гелл-Манна-Лоу), и мы можем прийти к обычной технике Фейнмана. В общей ситуации так сделать нельзя, и тогда на выражение (1.12) можно смотреть следующим образом: эволюция состояния идет по замкнутому контуру Келдыша  $\mathcal{C}$  (см. Рис. 1.1) от  $t_0$  до будущей бесконечности и обратно со вставкой оператора  $\widehat{O}$  в момент  $t$ .

Далее, расписывая след как интеграл по базису состояний  $|\xi_1\rangle$ , собственных для оператора поля, а также вставляя разложение единичного оператора по этим состояниям в местах, где мы поставили точку в формуле (1.12), и следуя стандартной процедуре перехода от оператора эволюции к функциональному интегралу, запишем среднее (1.12) в форме:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{O}[\widehat{\phi}(\mathbf{x})] \rangle_t &= \int \mathcal{D}\chi(\mathbf{x}) \mathcal{D}\xi_1(\mathbf{x}) \mathcal{D}\xi_2(\mathbf{x}) \langle \xi_1 | \widehat{\rho} | \xi_2 \rangle \times \\ &\times \int_{\phi_+(t_0)=\xi_1}^{\phi_+(+\infty)=\chi} \mathcal{D}\phi_+ \int_{\phi_-(t_0)=\xi_2}^{\phi_-(+\infty)=\chi} \mathcal{D}\phi_- e^{iS[\phi_+] - iS[\phi_-]} \cdot O[\phi_-(t, \mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Тут динамические переменные со знаком “+” относятся к полям, которые сидят в операторе  $\widehat{U}(+\infty, t_0)$  в (1.12), а поля со знаком “–” относятся к остальным операторам в этом выражении. Кроме того, из формулы (1.13) видно, что для вычислений по теории возмущений необходимо ввести несколько типов пропагаторов, которые можно связать со средними

<sup>1</sup>Для простоты, мы тут считаем, что оператор содержит все поля в один момент времени. Однако те же выводы легко проделать, если взять, например, операторы в представлении Гейзенберга в разные моменты времени  $\widehat{O} = \widehat{\phi}(t_1, \mathbf{x}_1) \dots \widehat{\phi}(t_N, \mathbf{x}_N)$ .

от произведения полей, проделывая приведенную выше процедуру перехода от среднего к функциональному интегралу:

$$\begin{aligned}
iG^{--}(t_1, \mathbf{x}_1 | t_2, \mathbf{x}_2) &\equiv \left\langle \text{in} \left| \mathcal{T} \widehat{\phi}(t_1, \mathbf{x}_1) \widehat{\phi}(t_2, \mathbf{x}_2) \right| \text{in} \right\rangle = \overline{\phi_+(t_1, \mathbf{x}_1) \phi_+(t_2, \mathbf{x}_2)}, \\
iG^{++}(t_1, \mathbf{x}_1 | t_2, \mathbf{x}_2) &\equiv \left\langle \text{in} \left| \widetilde{\mathcal{T}} \widehat{\phi}(t_1, \mathbf{x}_1) \widehat{\phi}(t_2, \mathbf{x}_2) \right| \text{in} \right\rangle = \overline{\phi_-(t_1, \mathbf{x}_1) \phi_-(t_2, \mathbf{x}_2)}, \\
iG^{+-}(t_1, \mathbf{x}_1 | t_2, \mathbf{x}_2) &\equiv \left\langle \text{in} \left| \widehat{\phi}(t_1, \mathbf{x}_1) \widehat{\phi}(t_2, \mathbf{x}_2) \right| \text{in} \right\rangle = \overline{\phi_+(t_1, \mathbf{x}_1) \phi_-(t_2, \mathbf{x}_2)}, \\
iG^{-+}(t_1, \mathbf{x}_1 | t_2, \mathbf{x}_2) &\equiv \left\langle \text{in} \left| \widehat{\phi}(t_2, \mathbf{x}_2) \widehat{\phi}(t_1, \mathbf{x}_1) \right| \text{in} \right\rangle = \overline{\phi_-(t_1, \mathbf{x}_1) \phi_+(t_2, \mathbf{x}_2)},
\end{aligned} \tag{1.14}$$

где  $|\text{in}\rangle$  – начальное состояние, если  $\widehat{\rho} = |\text{in}\rangle\langle\text{in}|$  (ниже мы в основном будем рассматривать чистые состояния);  $\mathcal{T}$  и  $\widetilde{\mathcal{T}}$  – операторы упорядочения и антиупорядочения по времени соответственно, а знак свертки над полями  $\phi_{\pm}$  предполагает усреднение в смысле функционального интеграла как в (1.13).

Нетрудно видеть, что четыре пропагатора в (1.14) на самом деле линейно зависимы, поскольку удовлетворяют соотношению  $G^{--} + G^{++} = G^{+-} + G^{-+}$ . Поэтому, как правило, намного удобнее перейти к трем линейно независимым пропагаторам. Чтобы увидеть, как они появляются явно, в формализме функционального интеграла Келдыша-Швингера удобно перейти к переменным

$$\phi_{cl} = \frac{\phi_+ + \phi_-}{2}, \quad \phi_q = \phi_+ - \phi_- . \tag{1.15}$$

В этих переменных, действие на временном контуре Келдыша, стоящее в экспоненте в выражении (1.13), после интегрирования по частям с учетом начальных условий  $\phi_+(t_0, \mathbf{x}) = \xi_1(\mathbf{x})$ ,  $\phi_-(t_0, \mathbf{x}) = \xi_2(\mathbf{x})$  в выражении (1.13), принимает вид

$$\begin{aligned}
S_K[\phi_{cl}, \phi_q] &= S[\phi_+] - S[\phi_-] = \int_{t_0}^{\infty} dt \int d^{D-1} \mathbf{x} \sqrt{|g|} \left[ g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi_q \partial_{\nu} \phi_{cl} + m^2 \phi_q \phi_{cl} \right] = \\
&= - \int d^{D-1} \mathbf{x} \cdot \left( \xi_1(\mathbf{x}) - \xi_2(\mathbf{x}) \right) \cdot \underbrace{\sqrt{|g|} g^{00} \partial_0 \phi_{cl}(t_0, \mathbf{x})}_{\pi(t_0, \mathbf{x})} - \\
&\quad - \int d^D x \sqrt{|g|} \phi_q \left[ \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_{\nu} + m^2 \right] \phi_{cl},
\end{aligned} \tag{1.16}$$

где в переходе ко второй строке мы проинтегрировали по частям и учли наличие граничных условий, определенных внутри функционального интеграла в (1.13), в начальный момент времени. Заметим, что пропагатор “квантовых” частей поля отсутствует:  $\overline{\phi_q \phi_q} \equiv 0$ . Для остальных

пропагаторов получаем:

$$\begin{aligned}
iG_0^K(t_1, \mathbf{x}_1|t_2, \mathbf{x}_2) &= \overbrace{\phi_{cl}(t_1, \mathbf{x}_1)\phi_{cl}(t_2, \mathbf{x}_2)} = \frac{1}{2} \left\langle \text{in} \left| \left\{ \widehat{\phi}(t_1, \mathbf{x}_1), \widehat{\phi}(t_2, \mathbf{x}_2) \right\} \right| \text{in} \right\rangle, \\
iG_0^R(t_1, \mathbf{x}_1|t_2, \mathbf{x}_2) &= \overbrace{\phi_{cl}(t_1, \mathbf{x}_1)\phi_q(t_2, \mathbf{x}_2)} = \theta(t_1 - t_2)\rho(t_1, \mathbf{x}_1|t_2, \mathbf{x}_2), \\
iG_0^A(t_1, \mathbf{x}_1|t_2, \mathbf{x}_2) &= \overbrace{\phi_q(t_1, \mathbf{x}_1)\phi_{cl}(t_2, \mathbf{x}_2)} = -\theta(t_2 - t_1)\rho(t_1, \mathbf{x}_1|t_2, \mathbf{x}_2), \\
\text{где } \rho(t_1, \mathbf{x}_1|t_2, \mathbf{x}_2) &= \left[ \widehat{\phi}(t_1, \mathbf{x}_1), \widehat{\phi}(t_2, \mathbf{x}_2) \right],
\end{aligned} \tag{1.17}$$

и не зависит от состояния, так как коммутатор является  $c$ -числом. Здесь мы ввели индекс “0”, который обозначает древесный (tree-level) уровень соответствующих двухточечных функций. Для пространственно однородных состояний удобно выполнить пространственное преобразование Фурье пропагаторов. После такого преобразования получаем:

$$\begin{aligned}
iG_0^K(\mathbf{p}|t_1, t_2) &= \int d^d \mathbf{x} G_0^K(t_1, t_2, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \text{Re} \{ f_{\mathbf{p}}(t_1) f_{\mathbf{p}}^*(t_2) \}, \\
\rho(\mathbf{p}|t_1, t_2) &= \int d^d \mathbf{x} \rho(t_1, t_2, |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = -2\text{Im} \{ f_{\mathbf{p}}(t_1) f_{\mathbf{p}}^*(t_2) \},
\end{aligned} \tag{1.18}$$

где мы выражаем пропагаторы через моды, которые мы ввели при квантовании поля (1.5). Отметим, что в регионе Пуанкаре пространства де Ситтера коммутационное соотношение  $[\phi(x), \pi(y)] = i\delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  с каноническим импульсом  $\pi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{|g|}g^{00}(t)\partial_t\phi(\mathbf{x}, t)$  влечёт за собой следующее свойство спектральной функции:

$$\left. \partial_\eta \rho(\mathbf{k}|\eta, \eta') \right|_{\eta=\eta'} = -\eta^{D-2}, \quad \left. \partial_{\eta'} \rho(\mathbf{k}|\eta, \eta') \right|_{\eta=\eta'} = \eta^{D-2}, \tag{1.19}$$

в то время как причинность требует  $\rho(\mathbf{k}|\eta, \eta) = \left. \partial_\eta \partial_{\eta'} \rho(\mathbf{k}|\eta, \eta') \right|_{\eta=\eta'} = 0$ . Эти свойства понадобятся нам при расчетах в Главе 5.

Заметим также, что запаздывающий и опережающий пропагаторы,  $G_0^{R,A}$ , чувствительны к спектру теории, но не зависят от её состояния на древесном уровне, так как коммутатор операторов поля является  $c$ -числом. В то же время пропагатор Келдыша,  $G_0^K$ , чувствителен к состоянию теории. Более того, как правило, в пределе больших времен  $t = \frac{t_1+t_2}{2} \rightarrow +\infty$ ,  $|t_1 - t_2| \sim \text{const}$ , пропагатор Келдыша с учетом петлевых поправок принимает вид [23]:

$$G^K(\mathbf{p}|t_1, t_2) \simeq \left( \frac{1}{2} + n_p(t) \right) f_p(t_1) f_p^*(t_2) + \varkappa_p(t) f_p(t_1) f_p(t_2) + \text{c.c.}, \tag{1.20}$$

где в общем случае  $n_p(t)$  и  $\varkappa_p(t)$  (умноженные на функции мод, как в (4.1), в совпадающих

$$\Delta G_K = \left\{ \begin{array}{c} \text{cl} \text{---} \text{q} \text{---} \text{cl} \\ \text{q} \text{---} \text{cl} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{cl} \text{---} \text{cl} \\ \text{q} \text{---} \text{q} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{cl} \text{---} \text{cl} \\ \text{cl} \text{---} \text{q} \end{array} \right\}$$

Рис. 1.2: Однопетлевая поправка к пропагатору Келдыша.

точках) можно интерпретировать как, соответственно, заселённости уровней и аномальные квантовые средние.

Наконец, имея в виду замену переменных (1.15)–(1.16), можно обобщить выражение для среднего (1.13), написав функционал с источниками для вычисления корреляторов:

$$Z[J_{cl}, J_q | \hat{\rho}] = \int \mathcal{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathcal{D}\Pi(\mathbf{x}) W[\Phi, \Pi] \cdot \int_{\text{н.у.}} \mathcal{D}\phi_{cl} \mathcal{D}\phi_q e^{iS_K[\phi_{cl}, \phi_q] - i \int (J_{cl}\phi_{cl} + J_q\phi_q)}, \quad (1.21)$$

где под н.у. надо иметь в виду начальные условия  $\phi_{cl}(t_0, \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$ ,  $\pi(t_0, \mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{x})$ . Также мы ввели функционал Вигнера:

$$W[\Phi, \Pi] = \int \mathcal{D}\beta(\mathbf{x}) \exp \left\{ -i \int d^{D-1}\mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) \right\} \left\langle \Phi + \frac{\beta}{2} \left| \hat{\rho} \right| \Phi - \frac{\beta}{2} \right\rangle, \quad (1.22)$$

описывающий начальное состояние.

Например, в теории массивного вещественного скалярного поля с самодействием

$$S[\phi] = \int d^D x \sqrt{|g|} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{6} \phi^3 \right], \quad (1.23)$$

член с взаимодействием в действии Келдыша в (1.21) будет иметь вид:

$$S_{\text{int}}[\phi_{cl}, \phi_q] = S_{\text{int}}[\phi_+] - S_{\text{int}}[\phi_-] = \int d^D x \sqrt{|g|} \left[ \frac{\lambda}{24} \phi_q^3 + \frac{\lambda}{2} \phi_{cl}^2 \phi_q \right]. \quad (1.24)$$

Далее, раскладывая в пертурбативный ряд (1.21) по  $\lambda$  с учетом этой добавки в действие, можем получить петлевые поправки к пропагатору Келдыша (см. Рис. 1.2). Мы изучим эти вклады более подробно в Главе 4.

## Глава 2

# Электрический ток в сильном внешнем электрическом поле

Известно, что в квантовой теории поля наличие сильных фоновых полей может приводить к формированию неравновесного состояния системы в тех случаях, когда допускается рождение частиц. Подобные эффекты проявляются в различных физических ситуациях, включая квантовую теорию поля в расширяющемся пространстве-времени де Ситтера [26,27], теорию на фоне внешнего электрического поля [28,29], а также ряд других нестационарных сценариев [30,31]. В рамках таких задач особый интерес представляет исследование динамики состояния системы, в частности эволюции заселённости энергетических уровней и аномальных квантовых средних. Существенно, что для описания подобных неравновесных процессов необходимо использовать диаграммную технику Швингера–Келдыша, поскольку стандартная фейнмановская диаграммная техника оказывается неприменимой в нестационарных ситуациях [27, 32].

Наряду с анализом временной эволюции квантовой системы во внешнем фоне возникает более фундаментальная проблема, связанная с выбором начального состояния квантовой теории поля. В отсутствие внешних полей при квантовании, как правило, выбирают моды, соответствующие положительно- и отрицательно-частотным решениям уравнений движения [32, 33]. Такой выбор приводит к тому, что функции Уайтмана оказываются инвариантными относительно преобразований группы Пуанкаре. Использование же в качестве базиса линейных комбинаций разночастотных решений приводит к тому, что соответствующие функции Уайтмана перестают зависеть только от геодезического расстояния, вследствие чего выбранное основное состояние теории нарушает пуанкаре-инвариантность [23, 32].

В присутствии внешнего классического фона понятия положительно- и отрицательно-частотных мод, так же как и пуанкаре-инвариантность, в общем случае теряют чёткий

смысл. В подобной ситуации возникает необходимость сформулировать дополнительное условие, опирающееся на физические соображения. В частности предполагается, что в области достаточно больших энергий влияние внешнего фона становится пренебрежимо малым, и соответствующие моды должны переходить в стандартные положительно- и отрицательно-частотные решения в ультрафиолетовом пределе. Данное условие известно как требование корректного адамарова поведения мод [30, 34]. В отсутствие внешних полей физически ожидается, что неинвариантные состояния в процессе взаимодействия эволюционируют в термально возбужденные состояния над вакуумом. В ряде простых моделей такая динамика была явно продемонстрирована, например, в [32]. В случае же наличия внешнего поля подобное поведение уже не является очевидным и требует отдельного исследования.

В настоящей главе исследуются последствия неоднозначности выбора основного состояния теории на примере древесного тока фермионного поля в постоянном внешнем электрическом поле. Возникновение ненулевого тока непосредственно связано с процессом рождения частиц во внешнем поле. В классических работах Швингера, а также в ряде последующих исследований [35, 36], было получено выражение для числа частиц, рождающихся в единицу объёма за единицу времени:

$$I = \frac{e^2 E^2}{4\pi^3} e^{-\pi \frac{m^2}{eE}},$$

так что наличие данного экспоненциального фактора в наших результатах неудивительно.

## 2.1 Постановка задачи

Будем рассматривать теорию с фермионами на фоне внешнего электрического поля в (3+1) пространстве-времени

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - j^{\mu,cl} A_\mu \right], \quad (2.1)$$

где  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ,  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ . Далее будут использоваться гамма-матрицы в стандартном представлении:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \hat{\mathbf{1}}, \quad g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Чтобы изучать фермионы во внешнем электрическом поле, мы разделяем поле на “классическую” часть  $A_\mu^{cl}$ , которая удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^{cl} = j_\nu^{cl},$$

и “квантовую” часть  $a_\mu$ :  $A_\mu = A_\mu^{cl} + a_\mu$ . Тогда действие для фермионов, взаимодействующих с квантовым полем  $a_\mu(x)$  принимает вид

$$S = S_{cl} + \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu^{cl} - m) \psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu a_\mu\psi \right], \quad (2.3)$$

где  $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ ,  $D_\mu^{cl} = \partial_\mu + ieA_\mu^{cl}$ .

В качестве модельного примера сильного внешнего фонового поля мы рассмотрим случай постоянного электрического поля в темпоральной калибровке:

$$A_\mu^{cl} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = eEt,$$

причём во всех вычислениях без ограничения общности будем считать  $eE > 0$ .

## 2.2 Моды во внешнем электрическом поле

### 2.2.1 Решения уравнения Дирака

Уравнение движения для  $\psi$  с классическим фоновым полем  $A_\mu^{cl}$  имеет вид

$$(i\gamma^\mu D_\mu^{cl} - m) \psi = (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu^{cl} - m) \psi = 0. \quad (2.4)$$

Рассмотрим анзац  $\psi(t, \mathbf{x}) = \psi_{\mathbf{p}}(t)e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$  и запишем

$$(i\gamma^0 \partial_t - (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P}) - m) \psi_{\mathbf{p}} = 0, \quad (2.5)$$

где мы обозначили  $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P} = \gamma^i P^i$  и  $\mathbf{P}^i = \mathbf{p}^i - eA^i = (p_1, p_2, p_3 + eEt)^T$  – физический импульс для данного фонового поля. Далее, используя подстановку  $\psi_{\mathbf{p}}(t) = (\gamma^0 \partial_t - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P} + m) \chi_{\mathbf{p}}(t)$ , запишем

$$(\partial_t^2 + P_3^2 + |p_\perp|^2 + m^2 + ieE\gamma^0\gamma^3) \chi_{\mathbf{p}}(t) = 0, \quad (2.6)$$

где пользуемся обозначениями:  $p_{\perp} = p_1 + ip_2$ ,  $P_3 = p_3 + eEt$ .

Чтобы найти четыре независимых решения уравнения Дирака (2.4), найдём такие векторы  $\chi_{\mathbf{p}}(t) = f_{\mathbf{p}}(t)\chi_{1,2}$ ,  $\chi_{\mathbf{p}}(t) = \varphi_{\mathbf{p}}(t)\chi_{3,4}$ , что

$$\gamma^0\gamma^3\chi_{1,2} = \chi_{1,2}, \quad \gamma^0\gamma^3\chi_{3,4} = -\chi_{3,4}. \quad (2.7)$$

Нетрудно найти их форму в явном виде:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \chi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Подставляя эти векторы в соотношения  $\psi_{\mathbf{p}}^{(+)}(t) = (i\gamma^0\partial_t - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P} + m)\chi_{\mathbf{p}}(t)$ ,  $\chi_{\mathbf{p}}(t) = f_{\mathbf{p}}(t)\chi_{1,2}$ , получаем следующие спиноры:

$$\psi_{\mathbf{p},1}^{(+)}(t) = \begin{pmatrix} i\partial_t f_{\mathbf{p}}(t) + (m - P_3)f_{\mathbf{p}}(t) \\ -p_{\perp}f_{\mathbf{p}}(t) \\ -i\partial_t f_{\mathbf{p}}(t) + (m + P_3)f_{\mathbf{p}}(t) \\ p_{\perp}f_{\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix}, \quad \psi_{\mathbf{p},2}^{(+)}(t) = \begin{pmatrix} p_{\perp}^*f_{\mathbf{p}}(t) \\ i\partial_t f_{\mathbf{p}}(t) + (m - P_3)f_{\mathbf{p}}(t) \\ p_{\perp}^*f_{\mathbf{p}}(t) \\ i\partial_t f_{\mathbf{p}}(t) - (m + P_3)f_{\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Аналогично, для  $\chi_{\mathbf{p}}(t) = \varphi_{\mathbf{p}}(t)\chi_{3,4}$  имеем:

$$\psi_{\mathbf{p},1}^{(-)}(t) = \begin{pmatrix} -p_{\perp}^*\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ i\partial_t\varphi_{\mathbf{p}}(t) + (m + P_3)\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ p_{\perp}^*\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ -i\partial_t\varphi_{\mathbf{p}}(t) + (m - P_3)\varphi_{\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix}, \quad \psi_{\mathbf{p},2}^{(-)}(t) = \begin{pmatrix} i\partial_t\varphi_{\mathbf{p}}(t) + (m + P_3)\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ p_{\perp}\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ i\partial_t\varphi_{\mathbf{p}}(t) - (m - P_3)\varphi_{\mathbf{p}}(t) \\ p_{\perp}\varphi_{\mathbf{p}}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Выражения (2.9)-(2.10) представляют собой общую форму записи решений уравнения Дирака для произвольного внешнего электрического поля. Их связь с хорошо известными спинорами

$$u_{\mathbf{p},s} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}+m}}{2\omega_{\mathbf{p}}}}\xi^s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}(\omega_{\mathbf{p}+m})}}\xi^s \end{pmatrix} \text{ и } v_{s,-\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}(\omega_{\mathbf{p}+m})}}\xi^s \\ \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}+m}}{2\omega_{\mathbf{p}}}}\xi^s \end{pmatrix}, \quad \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

приведена в [37]. Подставляя (2.7) в (2.6) получаем для случая постоянного внешнего поля:

$$\left[ \partial_z^2 + \left( \nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) \right] f_{\mathbf{p}}(t) = 0, \quad \left[ \partial_z^2 + \left( \nu - \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) \right] \varphi_{\mathbf{p}}(t) = 0, \quad (2.11)$$

где  $\nu = -i \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{2eE}$ ,  $z = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{2eE} (t + \frac{p_3}{eE}) = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{eE}} P_3$ . Решениями уравнения (2.11) являются функции параболического цилиндра  $D_{\nu}(z)$ ,  $D_{\nu}(-z)$ ,  $D_{-\nu-1}(-iz)$ ,  $D_{-\nu-1}(iz)$ , любая пара которых линейно независима, поэтому можно записать

$$\begin{cases} f_{\mathbf{p}}(t) = \alpha D_{\nu}(z) + \beta D_{\nu}(-z), \\ \varphi_{\mathbf{p}}(t) = \tilde{\alpha} D_{-\nu}(-iz) + \tilde{\beta} D_{-\nu}(iz) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f_{\mathbf{p}}(t) = \alpha D_{-\nu-1}(-iz) + \beta D_{-\nu-1}(iz), \\ \varphi_{\mathbf{p}}(t) = \tilde{\alpha} D_{\nu-1}(z) + \tilde{\beta} D_{\nu-1}(-z). \end{cases} \quad (2.12)$$

Достаточно первой пары решений, так что, используя свойство  $D_{\nu}^*(z) = D_{\nu^*}(z^*)$ , можно записать

$$\psi_{\mathbf{p},s}^{(+)}(t) = \alpha u_{\mathbf{p},s}^{(+)}(t) + \beta v_{\mathbf{p},s}^{(+)}(t), \quad (2.13)$$

$$\psi_{\mathbf{p},s}^{(-)}(t) = \tilde{\alpha} u_{\mathbf{p},s}^{(-)}(t) + \tilde{\beta} v_{\mathbf{p},s}^{(-)}(t), \quad (2.14)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{p},1}^{(+)} &= \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(z) + m D_{\nu}(z) \\ -p_{\perp} D_{\nu}(z) \\ -\frac{1+i}{2} \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(z) + m D_{\nu}(z) \\ p_{\perp} D_{\nu}(z) \end{pmatrix}, \quad u_{\mathbf{p},1}^{(-)} = \begin{pmatrix} -p_{\perp}^* D_{\nu}^*(z) \\ -\frac{1-i}{2} \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(z) + m D_{\nu}^*(z) \\ p_{\perp}^* D_{\nu}^*(z) \\ \frac{1-i}{2} \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(z) + m D_{\nu}^*(z) \end{pmatrix}, \\ u_{\mathbf{p},2}^{(+)} &= \begin{pmatrix} p_{\perp}^* D_{\nu}(z) \\ \frac{1+i}{2} \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(z) + m D_{\nu}(z) \\ p_{\perp}^* D_{\nu}(z) \\ \frac{1+i}{2} \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(z) - m D_{\nu}(z) \end{pmatrix}, \quad u_{\mathbf{p},2}^{(-)} = \begin{pmatrix} -\frac{1-i}{2} \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(z) + m D_{\nu}^*(z) \\ p_{\perp} D_{\nu}^*(z) \\ -\frac{1-i}{2} \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(z) - m D_{\nu}^*(z) \\ p_{\perp} D_{\nu}^*(z) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
v_{\mathbf{p},1}^{(+)} &= \begin{pmatrix} -\frac{1+i}{2} \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(-z) + m D_{\nu}(-z) \\ -p_{\perp} D_{\nu}(-z) \\ \frac{1+i}{2} \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(-z) + m D_{\nu}(-z) \\ p_{\perp} D_{\nu}(-z) \end{pmatrix}, \quad v_{\mathbf{p},1}^{(-)} = \begin{pmatrix} -p_{\perp}^* D_{\nu}^*(-z) \\ \frac{1-i}{2} \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(-z) + m D_{\nu}^*(-z) \\ p_{\perp}^* D_{\nu}^*(-z) \\ -\frac{1-i}{2} \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(-z) + m D_{\nu}^*(-z) \end{pmatrix}, \\
v_{\mathbf{p},2}^{(+)} &= \begin{pmatrix} p_{\perp}^* D_{\nu}(-z) \\ -\frac{1+i}{2} \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(-z) + m D_{\nu}(-z) \\ p_{\perp}^* D_{\nu}(-z) \\ -\frac{1+i}{2} \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(-z) - m D_{\nu}(-z) \end{pmatrix}, \quad v_{\mathbf{p},2}^{(-)} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(-z) + m D_{\nu}^*(-z) \\ p_{\perp} D_{\nu}^*(-z) \\ \frac{1-i}{2} \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(-z) - m D_{\nu}^*(-z) \\ p_{\perp} D_{\nu}^*(-z) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Мы также использовали свойство  $\partial_z D_{\nu}(z) = -\frac{1}{2}z D_{\nu}(z) + \nu D_{\nu-1}(z)$  для функций параболического цилиндра, так что, например:

$$\begin{aligned}
i\partial_t D_{\nu}(z) - P_3 D_{\nu}(z) &= i\sqrt{2eE} e^{i\frac{\pi}{4}} \left( -\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2}{eE}} P_3 D_{\nu}(z) + \nu D_{\nu-1}(z) \right) - P_3 D_{\nu}(z) = \\
&= i\sqrt{2eE} e^{i\frac{\pi}{4}} \nu D_{\nu-1}(z) = \sqrt{2eE} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{2eE} D_{\nu-1}(z) = \frac{1+i}{2} \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{\sqrt{eE}} D_{\nu-1}(z).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

На самом деле, один из наборов решений (2.15) или (2.16) можно взять за базис в пространстве всех решений уравнения (2.4). Приведём линейные комбинации, связывающие спиноры (2.9)–(2.10) с решениями уравнения (2.12):

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{p},1}^{(+)}(t) &= \left( \alpha + \beta e^{-\pi \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{2eE}} \right) u_{\mathbf{p},1}^{(+)} + \beta \frac{\sqrt{eE} p_{\perp}}{m^2 + |p_{\perp}|^2} \frac{2\sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{4eE}} u_{\mathbf{p},1}^{(-)} - \\
&\quad - \beta \frac{\sqrt{eE} m}{m^2 + |p_{\perp}|^2} \frac{2\sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{4eE}} u_{\mathbf{p},2}^{(-)},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{p},2}^{(+)}(t) &= \left( \alpha + \beta e^{-\pi \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{2eE}} \right) u_{\mathbf{p},2}^{(+)} - \beta \frac{\sqrt{eE} m}{m^2 + |p_{\perp}|^2} \frac{2\sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{4eE}} u_{\mathbf{p},1}^{(-)} - \\
&\quad - \beta \frac{\sqrt{eE} p_{\perp}^*}{m^2 + |p_{\perp}|^2} \frac{2\sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2+|p_{\perp}|^2}{4eE}} u_{\mathbf{p},2}^{(-)},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p},1}^{(-)}(t) = & \left( \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} \right) u_{\mathbf{p},1}^{(-)} - \tilde{\beta} \frac{\sqrt{eE} p_\perp^*}{m^2 + |p_\perp|^2} \frac{2\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(-i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} u_{\mathbf{p},1}^{(+)} + \\ & + \tilde{\beta} \frac{\sqrt{eE} m}{m^2 + |p_\perp|^2} \frac{2\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(-i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} u_{\mathbf{p},2}^{(+)} , \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p},2}^{(-)}(t) = & \left( \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} \right) u_{\mathbf{p},2}^{(-)} + \tilde{\beta} \frac{\sqrt{eE} m}{m^2 + |p_\perp|^2} \frac{2\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(-i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} u_{\mathbf{p},1}^{(+)} + \\ & + \tilde{\beta} \frac{\sqrt{eE} p_\perp}{m^2 + |p_\perp|^2} \frac{2\sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(-i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} u_{\mathbf{p},2}^{(+)} , \end{aligned} \quad (2.21)$$

где мы используем решения (2.15) в качестве базиса. Соотношения (2.18)–(2.21) можно об- ратить, например,

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{p},1}^{(+)}(t) = & \frac{\alpha^* + \beta^* e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^* \beta) e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}}} \psi_{\mathbf{p},1}^{(+)} - \\ & - \frac{\beta^* e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^* \beta) e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}}} \frac{\sqrt{eE} p_\perp}{m^2 + |p_\perp|^2} \frac{2\sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}\right)} \psi_{\mathbf{p},1}^{(-)} + \\ & + \frac{\beta^* e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^* \beta) e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}}} \frac{\sqrt{eE} m}{m^2 + |p_\perp|^2} \frac{2\sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\Gamma\left(i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}\right)} \psi_{\mathbf{p},2}^{(-)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

и аналогично для остальных спинов.

Заметим, что дифференциальный оператор уравнения (2.5) уважает трансляционную инвариантность:  $p_3 \rightarrow p_3 - eE\tau$ ,  $t \rightarrow t + \tau$ . Будем считать, что коэффициенты в (2.12) зависят только от перпендикулярной части импульса, так что решения можно представить в виде:  $f_{\mathbf{p}}(t) = f_{p_\perp}(P_3)$ ,  $\varphi_{\mathbf{p}}(t) = \varphi_{p_\perp}(P_3)$  и  $\psi_{\mathbf{p}s}^{(\pm)}(t) \equiv \psi_{p_\perp s}^{(\pm)}(P_3)$ . Также заметим, что выполнено соотно- шение “зарядового сопряжения”  $\psi_{\mathbf{p}s}^{(-)}(t) = -i\gamma^0 \gamma^2 (\psi_{\mathbf{p}s}^{(+)}(t))^*$ , которое следует из симметрии уравнения (2.5).

### 2.2.2 Разложение оператора фермионного поля

В ультрафиолетовом пределе  $|\mathbf{p}| \rightarrow +\infty$  при фиксированном моменте времени  $t$  урав- нение (2.6) сводится к

$$(\partial_t^2 + |\mathbf{p}|^2) f_{\mathbf{p}}(t) = 0. \quad (2.23)$$

Поэтому  $f_{\mathbf{p}}(t)$  имеет следующее асимптотическое поведение:  $f_{\mathbf{p}}(t) \simeq A e^{-i|\mathbf{p}|t} + B e^{i|\mathbf{p}|t}$ . Потребу- ем условие правильного адамарова поведения мод:  $f_{\mathbf{p}} \propto e^{-i|\mathbf{p}|t}$  в ультрафиолетовом пределе.

Для того чтобы найти соответствующее решение, необходимо проанализировать асимптотики функций параболического цилиндра. В пределе  $|\mathbf{p}| \rightarrow +\infty$ , когда  $|p_\perp|$  достаточно велик, следуя [30, 38], получаем следующую асимптотику:

$$D_\nu(z) \simeq \frac{e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{P_3}{\sqrt{m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2}}} e^{i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} - i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(\frac{(|\mathbf{p}| + P_3)^2}{2eE}\right) - i \frac{P_3 |\mathbf{p}|}{2eE}} e^{-i|\mathbf{p}|t} +$$

$$+ e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} \frac{e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{P_3}{\sqrt{m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2}}} e^{i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} - i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(\frac{(|\mathbf{p}| - P_3)^2}{2eE}\right) + i \frac{P_3 |\mathbf{p}|}{2eE}} e^{i|\mathbf{p}|t}. \quad (2.24)$$

Второе слагаемое в (2.24) подавлено множителем  $e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}}$ , но отвечает за отрицательно-частотный вклад. Анализируя также асимптотики при  $|\mathbf{p}| \rightarrow +\infty$ , когда  $|p_\perp|$  фиксирован (A7)–(A8), находим моды с требуемым поведением:

$$f_{\mathbf{p}}^{(+)}(t) = A_{\mathbf{p}}^{(+)} \left( D_\nu(z) - e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} D_\nu(-z) \right), \quad (2.25)$$

$$\varphi_{\mathbf{p}}^{(-)}(t) = A_{\mathbf{p}}^{(-)} \left( D_{-\nu}(-iz) - e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} D_{-\nu}(iz) \right) = A_{\mathbf{p}}^{(-)} \left( D_\nu^*(z) - e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} D_\nu^*(-z) \right), \quad (2.26)$$

отвечающие положительно- и отрицательно-частотным решениям в рассматриваемом пределе.

Итак, мы разлагаем оператор фермионного поля по модам следующим образом:

$$\widehat{\Psi}(t, \mathbf{x})_a = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^2 \left[ \widehat{a}_{\mathbf{p},s} \psi_{\mathbf{p},s,a}^{(+)}(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + \widehat{b}_{\mathbf{p},s}^\dagger \psi_{-\mathbf{p},s,a}^{(-)}(t) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right], \quad (2.27)$$

где используются функции (2.25)–(2.26) в выражениях (2.9)–(2.10). Теперь определим условия на коэффициенты, исходя из стандартных антикоммутиционных соотношений:

$$\left\{ \widehat{a}_{\mathbf{p},s}, \widehat{a}_{\mathbf{k},r}^\dagger \right\} = \left\{ \widehat{b}_{\mathbf{p},s}, \widehat{b}_{\mathbf{k},r}^\dagger \right\} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \delta_s^r, \quad (2.28)$$

$$\left\{ \widehat{\Psi}(t, \mathbf{x})_a, \widehat{\Psi}(t, \mathbf{y})_b \right\} = \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \delta_a^b. \quad (2.29)$$

Используя (2.27):

$$\begin{aligned} & \left\{ \widehat{\Psi}(t, \mathbf{x})_a, \widehat{\Psi}(t, \mathbf{y})_b^\dagger \right\} = \\ & = \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{dP_3}{2\pi} \sum_{s=1}^2 \left[ \psi_{p_\perp s, a}^{(+)}(P_3) \psi_{p_\perp s, b}^{(+)*}(P_3) + \psi_{p_\perp s, a}^{(-)}(P_3) \psi_{p_\perp s, b}^{(-)*}(P_3) \right] e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \delta_a^b. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Отсюда получаем следующие ограничения на коэффициенты из (2.12)–(2.14):

$$\begin{cases} \alpha\beta^* - \tilde{\alpha}^*\tilde{\beta} = 0, \\ |\alpha|^2 = |\tilde{\alpha}|^2, \quad |\beta|^2 = |\tilde{\beta}|^2, \\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^*\beta) e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} = \frac{e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}}}{2(m^2 + |p_\perp|^2)}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Заметим, что при выполнении условий (2.31) стандартные антикоммутиационные соотношения (2.30) выполнены тождественно в любой момент времени: с помощью уравнений движения и соотношения  $\psi_{\mathbf{p}s}^{(-)}(t) = -i\gamma^0\gamma^2(\psi_{\mathbf{p}s}^{(+)}(t))^*$ , либо явно используя свойства функций параболического цилиндра можно показать, что

$$\partial_t \left\{ \sum_{s=1}^2 \left[ \psi_{p_\perp s, a}^{(+)}(P_3) \psi_{p_\perp s, b}^{(+)*}(P_3) + \psi_{p_\perp s, a}^{(-)}(P_3) \psi_{p_\perp s, b}^{(-)*}(P_3) \right] \right\} = 0.$$

Для выбранных мод (2.25)–(2.26) полученные условия дают

$$|A_{\mathbf{p}}^{(+)}|^2 = |A_{\mathbf{p}}^{(-)}|^2 = \frac{1}{2(m^2 + |p_\perp|^2)} \frac{e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}}}{1 - e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{eE}}}. \quad (2.32)$$

Также удобно переписать условия нормировки через функции  $f_{\mathbf{p}}(t)$  и  $\varphi_{\mathbf{p}}(t)$ :

$$\left| \partial_t f_{\mathbf{p}} \right|^2 + \left( m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2 \right) \left| f_{\mathbf{p}} \right|^2 + iP_3 \left( f_{\mathbf{p}} \partial_t f_{\mathbf{p}}^* - \partial_t f_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}^* \right) = \frac{1}{2}, \quad (2.33)$$

$$\left| \partial_t \varphi_{\mathbf{p}} \right|^2 + \left( m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2 \right) \left| \varphi_{\mathbf{p}} \right|^2 - iP_3 \left( \varphi_{\mathbf{p}} \partial_t \varphi_{\mathbf{p}}^* - \partial_t \varphi_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}^* \right) = \frac{1}{2}. \quad (2.34)$$

## 2.3 Древетный ток

### 2.3.1 Ток фермионов

В терминах общей формы решений (2.9)–(2.10) можно найти:

$$\begin{aligned} \langle J^3 \rangle_{\text{tree}} &= \langle \bar{\Psi} \gamma^3 \Psi \rangle = -4 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ (m^2 + |p_\perp|^2 - P_3^2) |f_{\mathbf{p}}|^2 - |\partial_t f_{\mathbf{p}}|^2 - iP_3 (f_{\mathbf{p}} \partial_t f_{\mathbf{p}}^* - \partial_t f_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}^*) \right] = \\ &= 2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ 1 - 4 (m^2 + |p_\perp|^2) |f_{\mathbf{p}}|^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В приложении В мы показываем, что подынтегральное выражение в (2.35) является полной производной по  $P_3$ . Заметим, что это возможно только при наличии трансляционной инвариантности, так как в этом случае  $f_{\mathbf{p}}(t) = f_{p_\perp}(P_3)$ . Из формул (B11)–(B12) получаем:

$$\begin{aligned} \langle J^3 \rangle_{\text{tree}} &= \\ &= 2 \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \left[ \frac{m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2}{P_3} - \frac{2(m^2 + |p_\perp|^2)}{P_3} [(m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2) |f|^2 + |\partial_t f|^2] \right] \Big|_{-\Lambda}^{\Lambda}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где  $\Lambda$  играет роль параметра обрезания физического импульса  $P_3$ . Используя формулы для производных функций параболического цилиндра (2.17) и их асимптотики (A2)–(A4), вычисляем для подынтегрального выражения в (2.36):

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2}{P_3} - \frac{2(m^2 + |p_\perp|^2)}{P_3} [(m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2) |f|^2 + |\partial_t f|^2] \right] \Big|_{-\Lambda}^{\Lambda} = \\ &= -2\Lambda e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{eE}} \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^* \beta) e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^* \beta) e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}}} + \dots, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где многоточие означает вклады, стремящиеся к нулю в пределе  $\Lambda \rightarrow +\infty$ . Заметим, что конечный вклад в ток отсутствует в итоговом выражении. Окончательно имеем для древетного тока:

$$\begin{aligned} \langle J^3 \rangle_{\text{tree}} &= -4 \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \Lambda \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \left[ e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{eE}} \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^* \beta) e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^* \beta) e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}}} \right] = \\ &= -8 \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \Lambda \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \left[ e^{-3\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} (m^2 + |p_\perp|^2) \left( |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^* \beta) e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Для мод с правильным адамаровым поведением получаем:

$$\langle J^3 \rangle_{\text{tree}} = \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\pi \frac{m^2}{eE}}}{2\pi^3} eE\Lambda. \quad (2.39)$$

Сравним этот результат с током для выбора  $f_{\mathbf{p}}(t) = AD_{\nu}(z)$ :

$$\langle J^3 \rangle_{\text{tree}} = - \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\pi \frac{m^2}{eE}}}{2\pi^3} eE\Lambda. \quad (2.40)$$

Так что подавленный вклад в формулах для мод (2.25) и (2.26) влечёт существенное различие для тока в этих двух случаях. Видно, что ток (2.38) либо равен нулю, либо линейно расходится. Он зануляется, когда выполнено следующее соотношение:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^* \beta) e^{\pi \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{2eE}} = 0. \quad (2.41)$$

Делая замену  $\alpha = A \cos(\varphi)$ ,  $\beta = Ae^{i\theta} \sin(\varphi)$ , найдём из (2.31), (2.41) моды с зануляющимся древесным током:

$$f_{\mathbf{p}}(t) = A \left( D_{\nu}(z) \cos(\varphi) - D_{\nu}(-z) \sin(\varphi) \right), \quad (2.42)$$

$$|A|^2 = \frac{1}{2(m^2 + |p_{\perp}|^2)} \frac{e^{-\pi \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{4eE}}}{1 - e^{-\pi \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{eE}}}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \arcsin \left( e^{-\pi \frac{m^2 + |p_{\perp}|^2}{2eE}} \right).$$

Стоит заметить, что эти моды нарушают условие правильного адамарового поведения. Тем не менее, мы рассмотрели их, чтобы обсудить ситуацию, когда ток всё же обращается в нуль. В литературе эти моды часто обсуждаются без акцента на том, что они нарушают условие корректного адамаровского поведения.

Чтобы лучше понять ситуацию, далее мы сравним положение дел в КЭД с фермионами с током в скалярной КЭД на фоне постоянного электрического поля.

### 2.3.2 Комментарий о теории с бозонами во внешнем поле

Рассмотрим теорию массивного комплексного скалярного поля [26, 32, 39, 40]

$$S = \int d^4x \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |D_{\mu}\phi|^2 - m^2 \phi^2 - j_{\mu}^{cl} A^{\mu} \right] \quad (2.43)$$

с темпоральной калибровкой классического внешнего поля [28, 29, 32] как и выше. Скалярное поле может быть разложено следующим образом:

$$\widehat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \left[ \widehat{a}_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}(t) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + \widehat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger f_{-\mathbf{p}}^*(t) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \right], \quad (2.44)$$

где моды удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \omega_{\mathbf{p}}^2(t) \right] f_{\mathbf{p}}(t) = 0, \quad \omega_{\mathbf{p}}^2 = m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2 \quad (2.45)$$

с решениями (в тех же обозначениях)

$$f_{\mathbf{p}}(t) = \alpha D_{\nu-\frac{1}{2}}(z) + \beta D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z). \quad (2.46)$$

Стандартное коммутационное соотношение  $[\widehat{\phi}(\mathbf{x}, t), \partial_t \widehat{\phi}^*(\mathbf{y}, t)] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  накладывает следующее ограничение:

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 2\text{Im}(\alpha^* \beta) e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} = \frac{e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}}}{\sqrt{2eE}}. \quad (2.47)$$

Оператор тока в этой теории имеет вид

$$\hat{J}_\mu^{\text{scalar}} = i \left( \phi^* D_\mu^{\text{cl}} \phi - \phi D_\mu^{\text{cl}} \phi^* \right). \quad (2.48)$$

На древесном уровне запишем [32]:

$$\langle J_3^{\text{scalar}} \rangle_{\text{tree}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} P_3 |f_{\mathbf{p}}(t)|^2 = \int \frac{d^2 p_\perp}{2(2\pi)^3} \int dP_3 \partial_{P_3} \left\{ (m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2) |f_{\mathbf{p}}(t)|^2 + |\partial_t f_{\mathbf{p}}(t)|^2 \right\}. \quad (2.49)$$

Тогда таким же образом, как и в случае фермионов, получаем:

$$\langle J_3^{\text{scalar}} \rangle_{\text{tree}} = - \lim_{\Lambda \rightarrow +\infty} \sqrt{2eE} \Lambda \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \left[ e^{-3\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} \left( |\alpha|^2 - |\beta|^2 + 2\text{Im}(\alpha^* \beta) e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} \right) \right]. \quad (2.50)$$

Снова видим, что ток либо равен нулю, либо линейно расходится по  $\Lambda$ . В этом случае условие зануления имеет вид

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 + 2\text{Im}(\alpha^* \beta) e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} = 0. \quad (2.51)$$

Во-первых, это условие выполнено для  $\alpha = 1, \beta = 1$  и  $\alpha = 1, \beta = -1$ . Эти коэффициенты отвечают так называемым фундаментальным вещественным решениям уравнения (2.45) [39,

41]:

$$f_{p_\perp}^{(0)} = 2^{-\frac{\nu}{2} - \frac{3}{4}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}} \left[ D_{\nu-\frac{1}{2}}(z) + D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z) \right], \quad (2.52)$$

$$f_{p_\perp}^{(1)} = 2^{-\frac{\nu}{2} - \frac{5}{4}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\pi}} \left[ -D_{\nu-\frac{1}{2}}(z) + D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z) \right]. \quad (2.53)$$

Однако, данные функции не удовлетворяют условию нормировки (2.47). Во-вторых, условие (2.51) можно разрешить, рассматривая коэффициенты следующей формы:

$$\alpha = A \left( 1 - k e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} + i k e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} \right), \quad (2.54)$$

$$\beta = A \left( 1 + k e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} - i k e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} \right), \quad (2.55)$$

где  $k \in \mathbb{R}$ . Этот выбор соответствует модам, отвечающих когерентному состоянию положительно- и отрицательно-частотных решений в пределе  $|z| \rightarrow +\infty$  [39]:

$$v_{p_\perp}(P_3) = \frac{1}{\sqrt[4]{4(m^2 + |p_\perp|^2)}} \left[ f_{p_\perp}^{(0)} - i \sqrt{\frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} f_{p_\perp}^{(1)} \right]. \quad (2.56)$$

Это решение удовлетворяет условиям (2.47), (2.51) и имеет свойство  $v_{p_\perp}(-P_3) = v_{p_\perp}^*(P_3)$ . Данное решение можно сразу угадать из выражения (2.49), но его можно проанализировать и другим способом:

$$\begin{aligned} \langle J_3^{\text{scalar}} \rangle_{\text{tree}} &= \int \frac{d^3 \mathbf{P}}{(2\pi)^3} P_3 |f_{\mathbf{P}}(t)|^2 = \\ &= \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \int dP_3 P_3 \left[ |\alpha|^2 |D_{\nu-\frac{1}{2}}(z)|^2 + |\beta|^2 |D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z)|^2 + 2\text{Re} \left( \alpha^* \beta D_{\nu-\frac{1}{2}}^*(z) D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z) \right) \right] = \\ &= \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \int dP_3 P_3 \left[ (|\alpha|^2 - |\beta|^2) |D_{\nu-\frac{1}{2}}(z)|^2 + 2\text{Re} \left( \alpha^* \beta D_{\nu-\frac{1}{2}}^*(z) D_{\nu-\frac{1}{2}}(-z) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Воспользуемся точными свойствами функций параболического цилиндра [41]

$$\begin{aligned} D_\nu(z) &= e^{-\nu\pi i} D_\nu(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{-\frac{(\nu+1)\pi i}{2}} D_{-\nu-1}(iz) = \\ &= e^{\nu\pi i} D_\nu(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\frac{(\nu+1)\pi i}{2}} D_{-\nu-1}(-iz) \end{aligned} \quad (2.58)$$

и перепишем (2.49) в форме

$$\langle J_3^{\text{scalar}} \rangle_{\text{tree}} = \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^3} \int dP_3 P_3 \left[ |\alpha|^2 - |\beta|^2 + 2\text{Im}(\alpha^* \beta) e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} \right] |D_{\nu-\frac{1}{2}}(z)|^2. \quad (2.59)$$

Мы обнаружили, что условие зануления (2.51) возникает без использования асимптотических разложений. Возвращаясь к фермионам, получаем таким же способом:

$$\begin{aligned} & \langle J^3 \rangle_{\text{tree}} = \\ & = 4 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} (m^2 + |p_\perp|^2) \left( |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}(\alpha^* \beta) e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} \right) \left[ 1 - 2|D_\nu(z)|^2 e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} \right] e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

и видим, что ограничение (2.41) является естественным условием зануления древесного тока для поля фермионов. Помимо этого отметим, что из нашего анализа выше следует, что на древесном уровне нет конечных вкладов в ток: могут присутствовать только члены порядка  $\sim \Lambda$ ,  $\sim 1/\Lambda$  и более подавленные.

Несмотря на то, что вечное во времени постоянное электрическое поле не является физической ситуацией, этот случай можно рассматривать как модельный пример, аналогичный квантовой теории поля в пространстве-времени де Ситтера [23, 26, 39, 40]. Тем не менее, мы вывели выражение (2.38), которое устанавливает зависимость древесного тока от выбора вакуумного состояния Фока, параметризованного коэффициентами  $\alpha$ ,  $\beta$  и получили, что ток в этом случае либо равен нулю, либо расходится.

Однако здесь уместно сделать важное замечание. А именно, существует гораздо более широкое пространство возможных мод, по которым можно раскладывать оператор поля, и соответствующих им фоковских вакуумов. Фактически, вместо  $\alpha, \beta$  можно ввести обобщённые коэффициенты Боголюбова и построить моды следующим образом:

$$\xi_{\mathbf{p},s}(t, \mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{k} \sum_{r=1}^2 \left[ \alpha_{\mathbf{kpr}}^s \psi_{\mathbf{k},s}^{(+)}(t) e^{i\mathbf{kx}} + \beta_{-\mathbf{kpr}}^s \psi_{-\mathbf{k},s}^{(-)}(t) e^{-i\mathbf{kx}} \right], \quad (2.61)$$

$$\eta_{\mathbf{p},s}(t, \mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{k} \sum_{r=1}^2 \left[ \gamma_{\mathbf{kpr}}^s \psi_{\mathbf{k},s}^{(+)}(t) e^{i\mathbf{kx}} + \omega_{-\mathbf{kpr}}^s \psi_{-\mathbf{k},s}^{(-)}(t) e^{-i\mathbf{kx}} \right]. \quad (2.62)$$

Единственное физическое ограничение, которое следует здесь наложить, заключается в том, что  $\beta$  и  $\gamma$  должны стремиться к нулю, а  $\alpha$  и  $\omega$  — к дельта-функциям, когда модуль любого из их аргументов  $\mathbf{p}$  или  $\mathbf{k}$  стремится к бесконечности. Это необходимо для того, чтобы пропагаторы на древесном уровне имели правильное ультрафиолетовое поведение.

В любом случае, такой выбор мод расширяет пространство возможных состояний для рассмотрения. То же справедливо и для других внешних фоновых полей, включая гравитационные.

## Глава 3

# Глобальный квенч в искривленном пространстве-времени

Неравновесные процессы в квантовых системах привлекают значительное внимание как в физике конденсированного состояния, так и в контексте квантовой теории поля и голографии. Одним из наиболее универсальных и теоретически контролируемых способов вывести систему из равновесия является квантовый квенч — внезапное изменение параметра гамильтониана, например массы или константы связи. Изучение последующей релаксации позволяет исследовать фундаментальные вопросы термализации, интегрируемости и распространения квантовых корреляций.

При этом обычно различают либо так называемый локальный квенч, при котором система возмущается локализованным образом в некоторой точке пространства, либо глобальный квенч, соответствующий, как правило, однородному по пространству внезапному изменению параметров системы. Локальные квенчи активно изучаются в физике конденсированного состояния [42–44], а также в контексте исследования хаотических и интегрируемых режимов в различных системах, включая голографические модели [45–51].

Глобальный квенч обычно изучается в контексте релаксации системы к некоторому равновесному состоянию, что часто называют “термализацией подсистем” [52–57]. Он также является стандартным методом анализа динамики фазовых переходов [56, 58, 59] и эволюции квантовой запутанности после резкого возмущения [57, 60].

В простейшем случае глобальный квенч реализуется через так называемый протокол квенча с массой, зависящей от времени  $m(t)$ , причем как правило рассматривается “резкий” режим [53, 54], при котором масса мгновенно меняется от одного значения к другому  $m \rightarrow M$ . В случае плоского пространства для гауссовых теорий, а также для некоторых взаимодействующих и конформных теорий, динамика таких систем хорошо изучена, когда в качестве

начального состояния выбирается либо вакуум теории до квенча, либо специальные гауссовы “сжатые состояния” (squeezed states). В этом случае начальное состояние теории после квенча можно записать в виде так называемого обобщенного состояния Карди-Калабрезе (gCC), а система релаксирует в обобщённый ансамбль Гиббса (gGE), причём скорость “релаксации” зависит от размерности пространства-времени [53, 54].

В последние десятилетия было обнаружено, что механизмы, аналогичные глобальному квенчу, могли играть роль и в эволюции ранней Вселенной. В этом контексте глобальный квантовый квенч может эффективно описывать процессы, происходящие с полями после каких-либо быстрых переходных феноменов — например фазовых переходов, вызванных резким изменением температуры, или скачков формы инфлатонного потенциала [61–67].

Как правило, работы на эту тему касаются именно ситуаций с изменением фазы системы [61–63]. Однако представляет интерес также неравновесная динамика после возмущений без фазового перехода [64, 67]. Более общо, квенч можно рассматривать как модель перестройки начальных квантовых состояний, происходящей во время инфляции или сразу после неё. В частности,  $m(t)$  протокол квенча с внезапным изменением массы для инфлатонного потенциала использовался в работе [65] для описания наблюдаемых особенностей в спектре скалярных первичных возмущений.

В работе [64] квенч анализировался в  $O(N)$ -модели в пространстве де Ситтера. Было показано, что после резкого изменения массы эффективная масса динамически восстанавливается к некоторому асимптотическому значению, хотя на промежуточных стадиях её квадрат может становиться отрицательным, что локально приводит к временному спонтанному нарушению симметрии. Интересный подход предложен в [67], где обобщение модели Кальдейры–Леггета на искривлённое пространство-время приводит к появлению  $m(t)$ -протокола как эффективного описания после интегрирования по степеням свободы “среды”. В этом случае предел “скачкообразного” изменения массы возникает естественным образом, а в качестве начальных состояний рассматриваются как основное состояние, так и гауссовы “сжатые” состояния. Было показано, что после релаксации состояние системы стремится к gCC-состоянию в де Ситтере, а анализ двухточечных корреляторов позволяет описать соответствующие изменения спектра возмущений.

В работе [68] рассматривалась близкая постановка задачи, в которой плоское пространство внезапно переходит в де Ситтеровское. В ней было продемонстрировано, что эволюция тензора энергии-импульса (ТЭИ), даже при начальном состоянии, нарушающем симметрии де Ситтера, на поздних стадиях стремится к состоянию Банча–Дэвиса, что позволяет рассматривать его как универсальный аттрактор. Это поднимает вопрос о том, насколько

память о начальном состоянии сохраняется при квантовой динамике в расширяющемся пространстве и каков характер релаксации в искривлённой геометрии.

Стоит отметить, что состояния типа gCC всегда являются гауссовыми и неунитарными конструкциями, которые, тем не менее, позволяют провести аналитический анализ корреляторов для системы, глобально выведенной из равновесия. В настоящей работе мы предлагаем другой класс начальных состояний, позволяющий описывать динамику после квенча в квантовой теории поля в искривлённом пространстве-времени. Мы используем формализм функционального интеграла Келдыша [23, 69–71] для вывода явных выражений для двухточечных корреляционных функций после глобального (по пространству) возмущения, реализованного как унитарное преобразование равновесной матрицы плотности (см. Приложение C). Идея этого метода была предложена в [72], и в случае локального квенча в плоском пространстве он приводит к тем же результатам [72, 73].

Мы покажем, что для гауссовых возмущений полученные результаты качественно воспроизводят поведение, известное для  $m(t)$ -протокола квенча в случае массивных полей (см. Приложение 3.1). При этом для безмассовых полей в плоском пространстве-времени наблюдается отсутствие релаксации даже в случае  $D = 4$ , что является особенностью динамики в размерностях  $D = 2, 3$  для квенча в  $m(t)$ -протоколе.

Итак, мы рассматриваем теорию со скалярным полем  $\phi$  и возмущаем матрицу плотности чистого вакуумного состояния  $\hat{\rho}_0$  следующим образом:

$$\hat{\rho} = \hat{Q}\hat{\rho}_0\hat{Q}^\dagger, \quad \hat{Q} = \exp \left\{ i\alpha \int d^{D-1}\mathbf{x} \sqrt{|g|} \hat{\phi}^2(\mathbf{x}) \right\},$$

где  $\alpha$  — произвольный параметр размерности массы,  $[\alpha] = [m]$ .

Тогда для эволюции двухточечной функции Келдыша  $G_K^Q$  в гауссовой теории скалярного поля после квенча можно получить выражение через интегралы от Келдышевской  $G_K$  и запаздывающей  $G_R$  функций Грина в равновесном состоянии (см. Приложение C, [72]):

$$\begin{aligned} iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) &= iG_K(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) - \\ &- 2\alpha \int d^{D-1}\boldsymbol{\xi} \sqrt{|g(t_0, \boldsymbol{\xi})|} \left[ iG_K(t, \mathbf{x}|t_0, \boldsymbol{\xi})G_R(t, \mathbf{y}|t_0, \boldsymbol{\xi}) + iG_K(t, \mathbf{y}|t_0, \boldsymbol{\xi})G_R(t, \mathbf{x}|t_0, \boldsymbol{\xi}) \right] \\ &+ 4\alpha^2 \int d^{D-1}\boldsymbol{\xi}_1 d^{D-1}\boldsymbol{\xi}_2 \sqrt{|g(t_0, \boldsymbol{\xi}_1)|} \sqrt{|g(t_0, \boldsymbol{\xi}_2)|} iG_K(t_0, \boldsymbol{\xi}_1|t_0, \boldsymbol{\xi}_2)G_R(t, \mathbf{x}|t_0, \boldsymbol{\xi}_1)G_R(t, \mathbf{x}|t_0, \boldsymbol{\xi}_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

или, в импульсном пространстве (в предположении, что  $g_{\mu\nu}$  зависит только от времени и пространственные срезы однородны)

$$\begin{aligned}
iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) &= \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ iG_K(\mathbf{k}|t, t) - 4\alpha\sqrt{|g(t_0)|} iG_K(\mathbf{k}|t, t_0)G_R(\mathbf{k}|t, t_0) + \right. \\
&\quad \left. + 4\alpha^2\sqrt{|g(t_0)|}\sqrt{|g(t_0)|} iG_K(\mathbf{k}|t_0, t_0)G_R(\mathbf{k}|t, t_0)G_R(\mathbf{k}|t, t_0) \right\} = \quad (3.2) \\
&= iG_K(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) - 4\alpha I_1(t, t_0, r) + 4\alpha^2 I_2(t, t_0, r),
\end{aligned}$$

где мы ввели обозначения  $I_1, I_2$  для интегралов, которые дают соответствующие поправки к двухточечному коррелятору. Мы также предполагаем, что равновесное состояние является изотропным и однородным, так что корреляторы зависят только от расстояния  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ .

В случае наиболее интересного для нас случая  $D = 4$  пространства-времени, для массивных полей в пространстве Минковского при больших временах  $mt \gg 1$  получаем релаксацию двухточечного коррелятора:

$$\begin{aligned}
iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) &\simeq iG_K^{\text{post-quench}}(r) + \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 + m^2}}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(mt)^{\frac{3}{2}}} \cos(2mt + \delta), \\
\delta &= \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{\alpha}{m}\right), \quad (3.3)
\end{aligned}$$

где  $iG_K^{\text{post-quench}}(r)$  является модифицированным двухточечным коррелятором после квенча, а скорость релаксации качественно совпадает с результатом в случае  $m(t)$ -протокола [53, 54].

Однако для безмассовых полей  $m = 0$  в пространстве Минковского при больших временах  $t \gg r$  мы получаем отсутствие релаксации даже в четырёхмерном случае:

$$iG_K^Q \sim \alpha^2 \log\left[\frac{2t}{r}\right]. \quad (3.4)$$

В случае массивного квенча такое поведение наблюдается в более низких размерностях, но не в четырёхмерии. Поэтому более подробный анализ “критической” динамики после квенча в рамках предложенного подхода мы оставляем для будущего исследования.

В пространстве де Ситтера ситуация иная: даже равновесные функции Грина свободной теории убывают со временем как степень конформного времени  $\eta = e^{-t}$  (параметр Хаббла полагается равным единице,  $H = 1$ ). В связи с этим возникает, во-первых, вопрос о скорости затухания локальных операторов в неравновесной ситуации по сравнению с вакуумом Банча–Дэвиса. Во-вторых, с учётом известного явления секулярного роста петлевых поправок даже для состояния Банча–Дэвиса [23, 26, 27, 74, 75], представляет интерес влияние контролируемого вывода системы из равновесия на дальнейшую динамику с учётом растущих во времени петлевых вкладов.

Во всех этих вопросах ключевую роль играет поведение двухточечного коррелятора, и основной нашей целью на данный момент является демонстрация применения нашего подхода в искривлённом пространстве-времени. В разделе 3.2 мы анализируем поведение Келдышевской функции Грина в совпадающих по времени точках после квенча в расширяющемся регионе Пуанкаре пространства де Ситтера. Мы обнаружили, что качественное поведение пропагатора при малых пространственных расстояниях  $r \lesssim \eta$  существенно меняется при массах выше и ниже критической массы  $m_{cr} = \sqrt{2}$ , которая отвечает поведению пропагаторов для конформной связи скалярного поля. Мы предполагаем, что это может нетривиально повлиять на поведение локальных операторов, таких как тензор энергии-импульса, однако окончательный вывод требует отдельного анализа, который мы оставляем для будущих исследований.

Предложенный подход также открывает возможность систематического изучения релаксации при негауссовых и анизотропных начальных состояниях в произвольных геометриях, где известны функции Грина. В частности, вывод, приведённый в Приложении С, практически без изменений применим в случае замены параметра  $\alpha$  на произвольную анизотропную функцию пространственных координат  $\alpha(\mathbf{x})$ . Кроме того, в дальнейших исследованиях петлевых поправок мы планируем обобщить метод на вычисление модифицированных функций Грина в разные моменты времени  $t_1 \neq t_2$ . Мы надеемся, что предложенный класс состояний позволит расширить исследования неравновесных процессов как в контексте физики ранней Вселенной, так и, возможно, в задачах, связанных с хаосом, голографическими моделями и другими квантовыми системами.

### 3.1 Квенч в плоском пространстве-времени

С целью проверить наш подход к описанию неравновесного начального состояния на согласованность с общей картиной динамики после глобального квенча, исследованной в литературе, мы начнем с простейшего случая свободной теории в плоском пространстве-времени Минковского. Каноническое квантование поля в данном случае имеет вид:

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(t) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger f_{\mathbf{k}}^*(t) \right], \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] &= (2\pi)^{D-1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \\ f_{\mathbf{k}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{k^2 + m^2}}} e^{-i\sqrt{k^2 + m^2}t}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Соответствующие пропагаторы для вакуумного начального состояния:

$$\begin{aligned}
iG_K(\mathbf{k}|t, t_0) &= \operatorname{Re}\left\{f_k(t)f_k^*(t_0)\right\} = \frac{1}{2\sqrt{k^2+m^2}} \cos\left(\sqrt{k^2+m^2}(t-t_0)\right), \\
G_R(\mathbf{k}|t, t_0) &= -2\theta(t-t_0) \operatorname{Im}\left\{f_k(t)f_k^*(t_0)\right\} = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{k^2+m^2}} \sin\left(\sqrt{k^2+m^2}(t-t_0)\right) \theta(t-t_0).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

В дальнейшем мы будем обозначать  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  и предполагать, что  $t > t_0$ . Тогда в плоском пространстве-времени мы можем записать уравнение (3.2) в виде

$$\begin{aligned}
iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) &= iG_K(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) - 4\alpha I_1^{\text{flat}}(t, t_0, r) + 4\alpha^2 I_2^{\text{flat}}(t, t_0, r), \\
I_1^{\text{flat}}(t, t_0, r) &= -\frac{1}{4} \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{1}{k^2+m^2} \sin\left(2\sqrt{k^2+m^2}(t-t_0)\right), \\
I_2^{\text{flat}}(t, t_0, r) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \frac{1}{(k^2+m^2)^{\frac{3}{2}}} \sin^2\left(\sqrt{k^2+m^2}(t-t_0)\right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Используя формулу

$$\int \frac{d^{D-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{D-1}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} f(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}} r^{\frac{D-3}{2}}} \int_0^{+\infty} dp p^{\frac{D-1}{2}} J_{\frac{D-3}{2}}(pr) f(p), \tag{3.9}$$

для размерности  $D = 4$  и полагая  $t_0 = 0$  благодаря симметрии трансляции во времени, можем переписать интегралы в (3.8) так:

$$\begin{aligned}
I_{1,4D}^{\text{flat}}(t, t_0, r) &= -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^\infty d\xi \frac{\xi}{\xi^2+1} \sin\left(mr \cdot \xi\right) \sin\left(2mt \cdot \sqrt{\xi^2+1}\right) \\
I_{2,4D}^{\text{flat}} &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{mr} \int_0^\infty d\xi \frac{\xi}{(\xi^2+1)^{\frac{3}{2}}} \sin\left(mr \cdot \xi\right) \left[1 - \cos\left(2mt \cdot \sqrt{\xi^2+1}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Нас интересует как система релаксирует на больших временах, при которых  $t - t_0 \gg \frac{1}{m}$  и  $r \ll t - t_0$ . В этом пределе вклад  $I_1$  и второго члена в квадратных скобках в  $I_2$  в (3.10) подавлен из-за осцилляций и может быть оценён методом стационарной фазы, тогда как первый член в квадратных скобках в  $I_2$  не исчезает при больших временах и даёт поправку

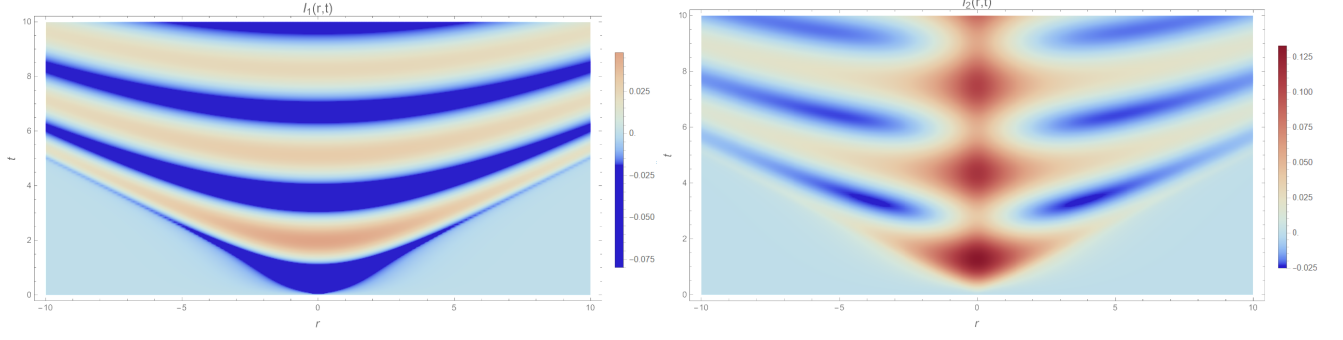


Рис. 3.1: На графике показаны численные значения интегралов  $I_1(t, r)$  и  $I_2(t, r)$  в случае  $D = 2$ . Хорошо виден “эффект горизонта” при  $|r| < 2t$ .

к функции Келдыша для состояния скалярного поля после глобального квенча:

$$\begin{aligned}
 iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) &= iG_K^{\text{post-quench}}(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) + \text{tail}(t, r), \\
 iG_K^{\text{post-quench}}(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{m}{r} K_1(mr) + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} K_0(mr), \\
 \text{tail}(t, r) &\simeq \frac{\alpha m}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(mt)^{\frac{3}{2}}} \cos\left(2mt + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\alpha^2}{8\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(mt)^{\frac{3}{2}}} \sin\left(2mt + \frac{\pi}{4}\right) \sim \\
 &\sim \frac{1}{(mt)^{\frac{3}{2}}} \cos(2mt + \delta),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

с некоторой фазой  $\delta$ , введенной в (3.3). Мы находим, что скорость релаксации качественно совпадает с хорошо изученным поведением в плоском пространстве-времени [53, 54] для  $m(t)$ -протокола квенча. То же самое можно получить и в двух измерениях ( $D = 2$ ):

$$\begin{aligned}
 I_{1,2D}^{\text{flat}}(t, t_0, r) &= -\frac{1}{4\pi m} \int_0^\infty d\xi \frac{1}{\xi^2 + 1} \cos(mr \cdot \xi) \sin(2mt \cdot \sqrt{\xi^2 + 1}), \\
 I_{2,2D}^{\text{flat}} &= \frac{1}{4\pi m^2} \int_0^\infty d\xi \frac{1}{(\xi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \cos(mr \cdot \xi) \left[1 - \cos(2mt \cdot \sqrt{\xi^2 + 1})\right], \quad r = x - y.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

В этом случае “скорость релаксации” равна  $\text{tail}(t) \sim \frac{1}{\sqrt{mt}} \cos(2mt + \delta_{2d})$ , что соответствует общим ожиданиям в чётных размерностях. Кроме этого, в двумерном случае отсутствуют сублидирующие ультрафиолетовые расходимости, и хотя интегралы нельзя взять аналитически в точности, их легко вычислить численно, см. Рис. 3.1. Как и следовало ожидать, результат для массивных полей количественно совпадает с результатом в  $m(t)$ -протоколе, включая “эффект горизонта” при  $|r| > 2t$  [53]. Рассмотрение, однако, принципиально меняется в случае безмассового поля  $m = 0$ , когда у нас отсутствует предел больших времен. Тем

не менее, этот случай позволяет вычислить динамику коррелятора (3.8) точно в ( $D = 4$ ):

$$iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi^2 r^2} + \frac{\alpha}{4\pi^2 r} \log \left[ \frac{2t+r}{2t-r} \right] + \frac{\alpha^2}{2\pi^2} \left\{ \log \left[ \frac{\sqrt{4t^2 - r^2}}{r} \right] + \frac{t}{r} \log \left[ \frac{2t+r}{2t-r} \right] \right\}, \quad (3.13)$$

откуда видно, что он вообще не релаксирует при  $t/r \rightarrow \infty$  из-за роста первого члена в фигурных скобках в этом выражении (при этом второй член в фигурных скобках стремится к константе в данном пределе). Такое поведение для безмассовых полей проявляется в размерностях  $D = 2$  и  $D = 3$  [53, 54], но не в более высоких размерностях. Нетрудно понять качественную предпосылку для того, почему коррелятор безмассового поля не релаксирует на больших временах. Действительно, о квенче можно думать как о наличии возмущений в виде волновых пакетов в начальном состоянии теории с некоторым распределением. Поскольку в случае массивного поля групповая скорость  $v_{\text{гр}}(k) = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}}$  разная для разных мод  $k$ , то происходит расплывание волновых пакетов и их деструктивная интерференция, в результате чего корреляторы стремятся к некоторому равновесному значению. Однако для безмассовых полей групповая скорость  $v_{\text{гр}} = 1$  одинаковая для всех мод, поэтому деструктивная интерференция разных мод не происходит и корреляторы не обязаны релаксировать. Тем не менее, мы оставляем более детальный анализ подобной “критической” динамики после квенча для дальнейших исследований, а на данный момент сосредоточимся на случае массивных полей.

### 3.2 Глобальный квенч в Пуанкаре-регионе пространства де Ситтера

В этой секции мы изучим поведение двух-точечного коррелятора свободного скалярного поля (1.2), минимально связанного с гравитацией (метрикой  $g_{\mu\nu}$ ), после гауссового квенча (см. Приложение C) в Пуанкаре-регионе (ЕРР) 4-мерного пространства де Ситтера. Для эволюции двух-точечного коррелятора после возмущения равновесного вакуумного состояния  $|\text{BD}\rangle$  посредством действия гауссового оператора (C.5), (C.10) получаем выражение в ЕРР<sup>1</sup>:

$$iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) = iG_K(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) - 4\alpha I_1^{\text{ЕРР}}(t, t_0, r) + 4\alpha^2 I_2^{\text{ЕРР}}(t, t_0, r), \quad (3.14)$$

<sup>1</sup>Поскольку в данной главе мы не обсуждаем петлевые поправки, мы обозначаем как  $G_K$  древесный пропагатор Келдыша.

где

$$\begin{aligned}
I_1^{\text{EPP}} &= - \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \eta^{D-1} \text{Im} \left\{ h_\nu^2(k\eta) h_\nu^{*2}(k\eta_0) \right\} = \\
&= - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{D-1}{2}} r^{\frac{D-3}{2}}} \int_0^\infty dk k^{\frac{D-1}{2}} J_{\frac{D-3}{2}}(kr) \eta^{D-1} \text{Im} \left\{ h_\nu^2(k\eta) h_\nu^{*2}(k\eta_0) \right\} = \\
&= - \frac{1}{2\pi^2} \frac{\eta}{r} \int_0^\infty d\xi \xi \cdot \sin\left(\xi \frac{r}{\eta}\right) \text{Im} \left\{ h_\nu^2(\xi) \cdot h_\nu^{*2}\left(\xi \frac{\eta_0}{\eta}\right) \right\},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$I_2^{\text{EPP}} = \frac{2}{\pi^2} \frac{\eta}{r} \int_0^\infty d\xi \xi \cdot \sin\left(\xi \frac{r}{\eta}\right) \left| h_\nu\left(\xi \frac{\eta_0}{\eta}\right) \right|^2 \text{Im}^2 \left\{ h_\nu(\xi) \cdot h_\nu^*\left(\xi \frac{\eta_0}{\eta}\right) \right\}. \tag{3.16}$$

В последней строке уравнения (3.15) мы положили  $D = 4$ . Мы оценим поведение двухточечного коррелятора на поздних временах  $\eta \ll 1$  в пределе, когда квенч произошел в довольно ранний момент времени  $\eta_0 \gg 1$ , и также будем считать что пространственное расстояние между точками невелико  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll \eta_0$ . Сразу стоит отметить, что с данными выражениями можно работать и в других пределах, в частности для исследования петлевых поправок, в которых интегралы по внутренним вершинам будут идти по всевозможным пространственно-временным разделениям точек. Однако на данный момент нашей главной задачей является демонстрация метода контролируемого вывода системы из равновесного состояния, поэтому мы посмотрим на коррелятор в простейшем для оценки случае, а более продвинутый анализ оставим на будущее. Тогда интегралы (3.15)–(3.16) можно оценить при помощи асимптотик (1.10), разбив интегрирование по  $\xi$  на области от 0 до  $\nu \frac{\eta}{\eta_0}$ , от  $\nu \frac{\eta}{\eta_0}$  до  $\nu$  и от  $\nu$  до  $\infty$ . Заменяя гармоники в этих областях на соответствующие асимптотики, получаем оценки для интегралов:

$$I_1^{\text{EPP}} \simeq a(r) \cdot \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{3-2\nu} + \text{подавленные вклады}, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
I_2^{\text{EPP}} \simeq \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{3-2\nu} \cdot \left[ b + \frac{A_-^2}{4\pi^2} \frac{\eta_0}{r} \int_\nu^{\nu \frac{\eta_0}{\eta}} \frac{d\ell}{\ell^{1+2\nu}} \sin\left(\ell \frac{r}{\eta_0}\right) \cdot \left(1 + \sin(2\ell - \pi\nu)\right) \right] - \\
- \frac{1}{8\pi^2} \frac{\eta^2}{\eta_0^2} \text{Ci}\left(\nu \frac{r}{\eta}\right) + \text{подавленные вклады},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

где  $\text{Ci}$  это интегральный косинус и

$$\begin{aligned}
a(r) \simeq \frac{A_+^3 \text{Im}\{A_+\}}{\pi^2} \frac{\nu^{3-2\nu}}{3-2\nu} + \frac{A_-^2}{4\pi^2} \frac{\eta_0}{r} \int_\nu^\infty \frac{d\ell}{\ell^{2\nu}} \sin\left(\ell \frac{r}{\eta_0}\right) \cos(2\ell - \pi\nu), \\
b = \frac{2A_-^4 \text{Im}^2\{A_+\}}{\pi^2} \frac{\nu^{3-2\nu}}{3-2\nu}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Тут равенство для коэффициента  $a$  является приближенным, потому что мы заменили предел в интеграле на бесконечность вместо  $\nu \frac{\eta_0}{\eta} \gg 1$ , а интеграл всегда является сходящимся из-за осцилляций. Также здесь важно заметить, что вклад с интегральным косинусом  $\text{Ci}$  в (3.18) также подавлен в пределе  $\eta \ll r$  как  $\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^3$ , однако мы его выписали, так как в случае  $r \rightarrow 0$  он содержит сублидирующую расходимость  $\text{Ci}\left(\nu \frac{r}{\eta}\right) \sim \log\left(\frac{r}{\eta}\right)$ . В то время как древесный двух-точечный коррелятор расходится квадратично  $iG_K \sim \eta^2/r^2$ , дальнейшее изучение эволюции средних от локальных операторов, таких как ТЭИ  $\langle T_{\mu\nu} \rangle^Q \sim \widehat{\mathcal{D}}_{\mu\nu} iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) \Big|_{r \rightarrow 0}$  (с некоторым дифференциальным оператором  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mu\nu}$ ) будет требовать аккуратной ультрафиолетовой регуляризации и вычитания расходимостей.

Интересной особенностью результата для модифицированной функции Келдыша (3.14) является то, что при  $m < m_{cr} = \sqrt{2}$  ( $\nu > \nu_{cr} = \frac{1}{2}$ ) затухание происходит со степенью  $3 - 2\nu$ , однако при  $m > m_{cr}$  лидирующая степень затухания будет равна  $2 < 3 - 2\nu$  для времен  $t \lesssim -\log(r)$  (ог  $\eta \gtrsim r$ ). Это можно увидеть из (3.18), поскольку в этом случае можно приближенно заменить  $\sin\left(\ell \frac{r}{\eta_0}\right)$  на аргумент синуса на всем промежутке интегрирования. Для таких достаточно тяжелых полей это может быть важной особенностью для эволюции локальных операторов в пределе  $r \rightarrow 0$  после вычитания УФ расходимостей, так как степень затухания поправки медленнее, чем степень затухания коррелятора по состоянию Банча-Дэвиса  $iG_K \sim \left(\frac{\eta}{r}\right)^{3-2\nu}$ , которая выходит на эту асимптотику достаточно быстро даже при  $r < \eta$ . Это обстоятельство может нарушать его свойство состояния-“аттрактора” в такой ситуации. Несмотря на то, что такие тяжелые поля  $m > \sqrt{2}$  малоинтересны практически с точки зрения описания физики инфляции, это представляет академический интерес; к тому же полная картина первичного состава полей не является до конца ясной. Данное наблюдение для асимптотического поведения интеграла  $I_2^{\text{EPP}}$  можно проверить с помощью численного расчета точной формулы (3.16) для  $m < m_{cr}$  и  $m > m_{cr}$  (см. Рис. 3.2 и Рис. 3.3).

В случае  $m = \sqrt{2}$  мы имеем равенство  $2 = 3 - 2\nu$  и интегралы для неравновесного пропагатора Келдыша берутся точно:

$$iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\eta^2}{r^2} + \frac{1}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2 \cdot \left\{ -\alpha \frac{\eta_0}{2r} \log \left[ \frac{2(\eta_0 - \eta) + r}{2(\eta_0 - \eta) - r} \right] + \alpha^2 \log \left[ \frac{\sqrt{4(\eta_0 - \eta)^2 - r^2}}{r} \right] + \alpha^2 \frac{\eta_0 - \eta}{r} \log \left[ \frac{2(\eta_0 - \eta) + r}{2(\eta_0 - \eta) - r} \right] \right\}. \quad (3.20)$$

Видно, что по форме данный результат похож на ответ для безмассового поля в плоском пространстве (3.13). Это связано с тем, что корреляционные функции скалярного поля при  $m = \sqrt{2}$  совпадают с таковыми в случае конформной связи скалярного поля с гравитацией

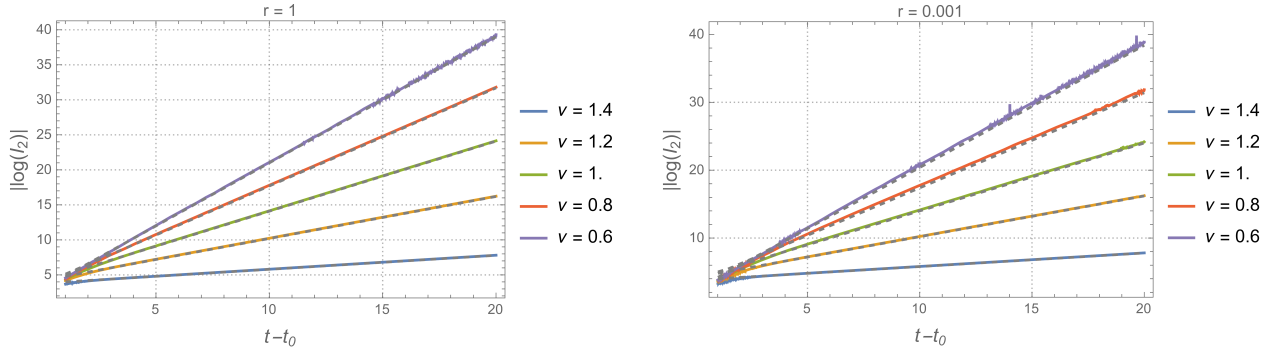


Рис. 3.2: Численные графики  $|\log(I_2)|$  как функции времени  $t - t_0$  для масс  $m < \sqrt{2}$ ,  $r = 1$  (левый рисунок) и  $r = 0.001$  (правый). Пунктирными линиями отображена аналитическая оценка. Взят параметр  $-t_0 = \log(102) \simeq 4.6$ .

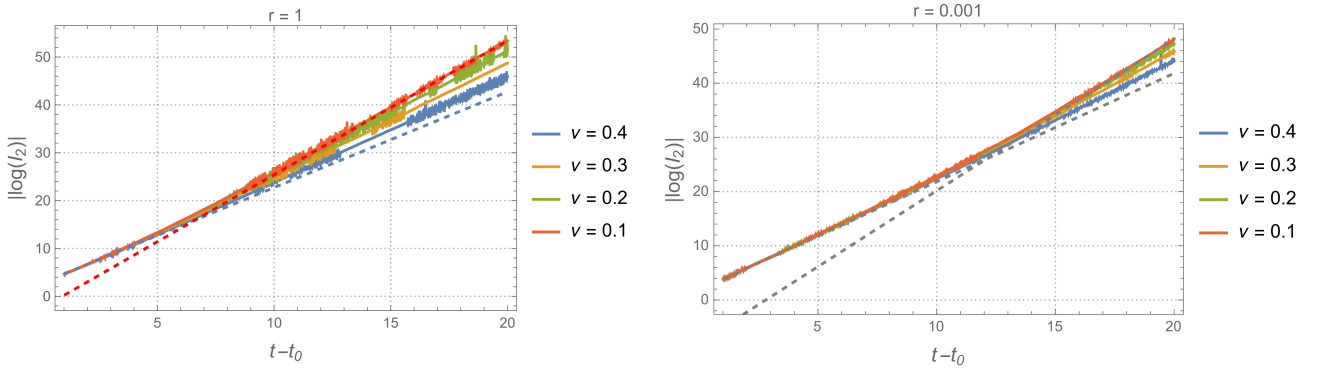


Рис. 3.3: Численные графики  $|\log(I_2)|$  как функции времени  $t - t_0$  для масс  $m > \sqrt{2}$ . Здесь видно что до момента времени  $t \lesssim -\log(r)$  наклон графиков равен  $2 < 3 - 2\nu$  (синяя пунктирная линия) независимо от масс полей, а для времен  $t > -\log(r)$  наклон совпадает с  $3 - 2\nu$  (красная пунктирная линия для  $\nu = 0.1$ ).

на фоне dS. Тем не менее, двух-точечный коррелятор (3.20) не расходится в пределе больших времен.

Одним из других возможных применений неравновесной динамики на фоне пространства де Ситтера, имеющих отношение к космологии ранней Вселенной, является изучение скалярного спектра возмущений. Если вообразить, например, что наше скалярное поле описывает возмущения поля инфлатона, то для скалярного спектра возмущений  $\mathcal{P}_s(k)$  и спектрального индекса  $n_s(k)$  имеем следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_s(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} iG_K^Q(\mathbf{k}|t, t), \quad n_s(k) - 1 = \frac{d \log \mathcal{P}_s}{d \log k}, \quad (3.21)$$

где  $iG_K^Q(\mathbf{k}|t, t)$  это просто фурье-образ двух-точечного коррелятора (3.14). В нашем случае гауссового квенча графики для  $\alpha = 1$  для маленькой массы ( $\nu = 1.4$ ) выглядят как на

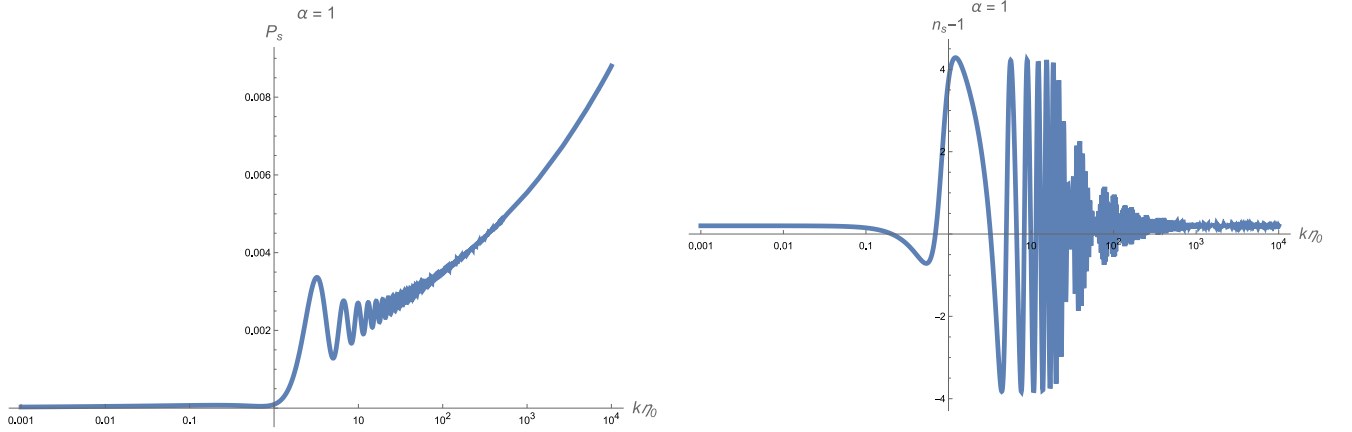


Рис. 3.4: Скалярный спектр возмущений  $\mathcal{P}_s$  и спектральный индекс  $n_s - 1$  как функции масштаба  $k\eta_0$  для  $\alpha = 1$ . Мы взяли параметры  $\eta_0 = 1$  и  $\eta = 10^{-6}$ , так чтобы все отображенные масштабы выходят за горизонт.

Рис. 3.4.

Как видно из этого графика, спектральный индекс характеризуется резким и более широким первым пиком, а затем более частыми и спадающими по амплитуде осцилляциями. Похожая ситуация наблюдается для  $m_{\text{eff}}(t)$ -протокола в потенциале инфлатона [65,66] и  $O(N)$  модели в де Ситтере [64]. Мы вернемся к исследованию вопросов о космологических наблюдаемых для негауссовых возмущений начального состояния, а также для систем с большим количеством  $N$  полей в будущих работах. На данный момент можно лишь зафиксировать, что предложенный подход может давать схожие особенности в поведении космологических наблюдаемых и это стоит иметь в виду для их более детального исследования в будущем.

### 3.3 Комментарий о негауссовом глобальном квенче

Одним из главных отличий нашего подхода к описанию релаксации системы в неравновесном начальном состоянии это то, что аналитическим вычислениям поддаются не только гауссовы распределения в начальной матрице плотности, но также можно включить в рассмотрение и негауссовы. В данном разделе мы продемонстрируем, как правильно определить такое начальное состояние и рассмотрим его в двумерном случае  $D = 2$  для двух-точечного коррелятора в плоском пространстве-времени. В дальнейших работах с помощью этого подхода можно изучать влияние начальных корреляций на динамику во взаимодействующих теориях, негауссово поведение в контексте инфляции в много-точечных корреляторах, а также квенч с мгновенным включением или выключением взаимодействующих слагаемых гамильтониана.

Рассмотрим, например, случай со вставкой кубического оператора (с “константой связи”  $\lambda$ ):

$$\widehat{V}[\widehat{\phi}] = \int d^{D-1} \mathbf{x} \sqrt{|g(t_0, \mathbf{x})|} : \widehat{\phi}^3 : (\mathbf{x}), \quad (3.22)$$

$$Q \left[ \Phi, -\frac{\delta}{\delta \Pi} \right] = \exp \left\{ \lambda \int d^{D-1} \mathbf{x} \sqrt{|g(t_0, \mathbf{x})|} \left[ 3 : \Phi^2 : (\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \Pi(\mathbf{x})} - \frac{1}{4} \frac{\delta^3}{\delta \Pi^3(\mathbf{x})} \right] \right\}.$$

В данном случае под нормальным упорядочением<sup>2</sup> операторов мы понимаем вычитание из композитного оператора полей “контрчленов”, содержащие величину  $\Delta(x, x) = iG_K(x, x)$  – двух-точечный коррелятор полей в совпадающих пространственно-временных точках в некоторой схеме ультрафиолетовой регуляризации:

$$\begin{aligned} : \phi^2 : (x) &= \phi(x)^2 - \Delta(x, x), \\ : \phi^3 : (x) &= \phi(x)^3 - 3 \Delta(x, x) \phi(x). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Тогда следуя процедуре из Приложения С получим выражение для двух-точечного коррелятора после такого негауссового возмущения:

$$\begin{aligned} iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) &= \left\langle \widehat{\phi}(\mathbf{x}) \widehat{\phi}(\mathbf{y}) \right\rangle_t^Q = iG_K(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) - \\ &- 9\lambda^2 \int d^{D-1} \boldsymbol{\xi}_1 d^{D-1} \boldsymbol{\xi}_2 \sqrt{|g(t_0, \boldsymbol{\xi}_1)|} \sqrt{|g(t_0, \boldsymbol{\xi}_2)|} \cdot G_R(t, \mathbf{x}|t_0, \boldsymbol{\xi}_1) G_R(t, \mathbf{y}|t_0, \boldsymbol{\xi}_2) G_K^2(t_0, \boldsymbol{\xi}_1|t_0, \boldsymbol{\xi}_2), \end{aligned} \quad (3.24)$$

или, в импульсном представлении для поправки  $i\Delta G_K$  к древесному пропагатору Келдыша  $iG_K$ :

$$\begin{aligned} i\Delta G_K(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) &= -18\lambda^2 \int \frac{d^{D-1} \mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \int \frac{d^{D-1} \mathbf{q}}{(2\pi)^{D-1}} \sqrt{|g(t_0)|} \sqrt{|g(t_0)|} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \times \\ &\times G_R(\mathbf{k}|t, t_0) G_R(-\mathbf{k}|t, t_0) G_K \left( \frac{\mathbf{k} + \mathbf{q}}{2} \middle| t, t_0 \right) G_K \left( \frac{\mathbf{k} - \mathbf{q}}{2} \middle| t, t_0 \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Нетрудно видеть, что полученное выражение, по существу, является петлевым интегралом по импульсу  $\mathbf{q}$  и, в частности, содержит соответствующие петлевые ультрафиолетовые расходимости. Поэтому в общем случае следует добавлять мгновенные взаимодействия с перенормированными константами связи на поверхности Коши. На данный момент мы отложим этот вопрос и посмотрим, что будет в двумерной ситуации  $D = 2$ , когда входящий в уравнение

<sup>2</sup>Вообще говоря, все добавки в гамильтониан следует обкладывать нормальным упорядочиванием  $\delta \widehat{H} \sim \lambda : \widehat{V}[\widehat{\phi}] : .$  В случае гауссового квенча результат от этого не зависит, поэтому мы не делали это ранее.

(3.25) интеграл конечен. В плоском пространстве-времени он выглядит так:

$$i\Delta G_K(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) = \frac{18\lambda^2}{m^2} \int \frac{d\xi}{2\pi} \int \frac{d\zeta}{2\pi} e^{i\xi m(x-y)} \frac{1 - \cos\left(2\sqrt{\xi^2 + 1} mt\right)}{\xi^2 + 1} \frac{1}{\sqrt{(\xi^2 - \zeta^2)^2 + 8(\xi + \zeta) + 16}}. \quad (3.26)$$

Как и в случае с гауссовым квенчем в плоском пространстве, этот интеграл содержит явно независящее от времени слагаемое, и явно зависящий от времени “хвост” в виде слагаемого с косинусом под интегралом в (3.26). Интеграл по переменной  $\zeta$  можно взять точно, а зависимость хвоста от времени можно оценить при помощи метода перевала для  $mt \gg 1$ , тогда получится:

$$i\Delta G_K(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) \approx I - \frac{9\lambda^2 \sqrt{\pi}}{2m^{5/2} \sqrt{t}} \cos\left(2mt + \frac{\pi}{4}\right), \quad (3.27)$$

$$I = \frac{36\lambda^2}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{2\pi} \frac{e^{i\xi m(x-y)}}{|\xi| + 2} \frac{1}{\xi^2 + 1} K\left(\frac{4\sqrt{|\xi|}}{|\xi| + 2}\right),$$

где  $K(z)$  – эллиптический интеграл первого рода. Как видно, “степень” релаксации на больших временах для массивной теории такая же, как и в гауссовом случае (см. также раздел 3.1), и, по всей видимости, в принципе не зависит от типа квенча в массивной теории в случае двух-точечного коррелятора.

Тем не менее, из выражений (3.22) явно следует, что такой тип начального состояния влияет нетривиально на поведение много-точечных корреляторов. В частности, можно ставить вопрос об эволюции и релаксации системы с нетривиальными начальными корреляциями в исходной матрице плотности в различных ситуациях. В том числе интерес вызывает не до конца исследованный вопрос о том, как начальные корреляции могут оставить отпечаток на выходе из периода инфляции Вселенной, что также можно понять изучая много-точечные корреляторы первичных флуктуаций.

Резюмируя, в данной главе исследована динамика квантовых полей в специальном классе неравновесных начальных состояний на искривлённых фоновых пространствах. Развивая подход [72], мы выразили двухточечный коррелятор после квенча через функционал Вигнера начальной матрицы плотности, реализуя квенч как унитарное преобразование начального состояния:  $\hat{\rho}_Q = \hat{Q}\hat{\rho}_0\hat{Q}^\dagger$ . Анализ среднего значения оператора, основанный на функциональном интеграле Келдыша–Швингера, позволяет явно отделить модификацию начального состояния от последующей унитарной эволюции и применить результат к произвольной геометрии искривлённого пространства-времени. Тем самым метод оказывается удобным в задачах, где стандартное описание через внезапное изменение гамильтониана или явную эволюцию мод становится технически громоздким.

В качестве базового примера мы подробно рассмотрели гауссов (квадратичный) квенч, соответствующий возмущению начального состояния вида (С.10). В этой постановке квенч изменяет не сам гамильтониан, а начальное распределение, причем вся динамика после квенча выражается через невозмущенные функции Грина. В частности, функция Келдыша после квенча  $G_K^Q$  допускает компактную запись (3.1) и (3.2), так что эффект глобального квенча сводится к конечному числу поправок к стандартным корреляторам.

Далее мы проиллюстрировали метод на примере плоского пространства-времени (см. раздел 3.1). Для массивных полей получена релаксация коррелятора к модифицированному значению с осциллирующим степенным “хвостом” при больших временах, см. (3.11). Это поведение совпадает с известными результатами для  $m(t)$ -протокола и служит проверкой согласованности метода. В то же время для безмассовых полей при  $D = 4$  обнаружена качественно иная динамика: коррелятор не релаксирует даже при  $t \rightarrow \infty$ , см. (3.13). Этот факт показывает, что рассматриваемый класс неравновесных состояний в общем случае не сводится к стандартному сценарию. Более подробный анализ такой “критической” динамики мы оставляем для будущей работы.

Основной интерес настоящей главы связан с динамикой в пространстве де Ситтера (см. раздел 3.2). Для гауссова квенча нами исследованы асимптотики двухточечной функции на больших временах и показано, что затухание поправок к пропагатору существенно зависит от массы поля: для лёгких полей ( $m < \sqrt{2}$ , или эквивалентно  $\nu > 1/2$ ) поправки убывают как  $(\eta/\eta_0)^{3-2\nu}$ , тогда как для более тяжёлых полей в пределе близких пространственных точек реализуется более медленный режим затухания. Это указывает на то, что динамика локальных наблюдаемых типа ТЭИ после квенча может нетривиально зависеть от спектра масс, что важно в контексте устойчивости состояния Банча–Дэвиса, а также может сыграть роль в исследовании секулярных (растущих со временем) квантовых поправок в де Ситтере (см. также [76]).

Кроме того, мы обсудили возможные следствия такого описания эволюции для космологических наблюдаемых в расширяющемся регионе Пуанкаре. В частности, были вычислены спектр мощности  $\mathcal{P}_s(k)$  и спектральный индекс  $n_s(k)$  согласно (3.21). Полученные спектры демонстрируют выраженный начальный пик с последующими затухающими осцилляциями (см. Рис. 3.4). Подобные особенности качественно близки эффектам, возникающим в моделях с зависящей от времени эффективной массой  $m_{\text{eff}}(t)$  [65, 66] и в  $O(N)$ -моделях в де Ситтере [64]. При этом наш подход не следует рассматривать как замену этим сценариям. Скорее он подчёркивает, что нетривиальные распределения начальных состояний также должны быть последовательно включены в полное описание физической картины.

Наконец, в разделе 3.3 показано, что метод естественным образом обобщается на негауссовы начальные состояния, порождённые операторами более высокого порядка. В качестве примера рассмотрено кубическое возмущение  $\hat{V} \sim \int : \phi^3 :$ . В простейшем случае  $D = 2$  в пространстве Минковского мы получили вклады, также затухающие при больших временах по степенному закону. Это демонстрирует применимость подхода к систематическому исследованию негауссовости и корреляторов высших порядков, в том числе в космологических сценариях, где первичная негауссовость может играть роль.

## Глава 4

# Секулярный рост в пространстве де Ситтера

Проблеме петлевых поправок в различных расширяющихся пространствах уделено значительное внимание в течение последних двух десятилетий [26, 27, 77–87]. Это связано с несколькими предпосылками. Во-первых, считается, что квантовые флуктуации в самой ранней Вселенной определили её современную крупномасштабную структуру [88–94]. Во-вторых, решение проблемы космологической постоянной может быть связано с большими инфракрасными (IR) вкладами от петлевых поправок, поскольку такие поправки могут приводить к экранированию космологической постоянной [22, 23, 95–98]. В-третьих, результат обратного влияния квантовой материи на сильные гравитационные поля является неполным без учёта петлевых поправок (см., например, обзоры [23], [76]). Эти вопросы остаются нерешёнными даже в случае пространства-времени де Ситтера (dS), которое обладает наибольшей степенью изометрий. Трудности возникают из-за вакуумной нестабильности dS [98], сингулярного поведения лёгких полей [78], а также нарушения глобальных изометрий dS на петлевом уровне [98], [23].

Существует несколько типов инфракрасных петлевых эффектов в пространстве dS. Секулярные вклады часто изучаются в контексте квантовых эффектов в инфляционной космологии [99–103]. В этом контексте обычно рассматриваются безмассовые неконформные поля, такие как гравитоны и безмассовые минимально связанные скалярные поля. Для таких полей секулярно растущие вклады возникают даже в локальных диаграммах типа “головастик” [103], тогда как инфракрасные и ультрафиолетовые расходимости в пространстве dS могут быть учтены самосогласованным образом с помощью перенормировки констант связи [104].

Отдельно отметим, что секулярный рост петлевых поправок может иметь место даже в пространстве Минковского, если взаимодействия полей включаются и выключаются адиабатически. В работе [105] утверждается, что такой секулярный рост является артефак-

том пертурбативного приближения в квантовой теории поля и им можно пренебречь для равновесных состояний. Тот факт, что для стационарных состояний секулярные эффекты отсутствуют, является вполне очевидным и известен уже давно. Между тем секулярные эффекты в пространстве Минковского действительно появляются для неравновесных начальных состояний (даже для пространственно неоднородных случаев и для массивных полей), что обсуждается в учебниках начиная с 1960-х годов. Эта тематика связана с процессом термализации (см., например, [106]). Однако интересным наблюдением работы [105] является то, что для пространственно неоднородных взаимодействий секулярными эффектами иногда можно пренебречь.

В данном разделе мы изучаем инфракрасные эффекты, которые несколько отличаются от стандартных эффектов, обычно рассматриваемых в пространстве dS для безмассовых неконформных полей. Наличие интересующих нас секулярно растущих со временем петлевых поправок обусловлено нестационарностью рассматриваемой ситуации и присутствуют в том числе для массивных полей. Рассматриваемые эффекты *не* возникают из диаграмм типа “головастик”. Они следуют из петлевых диаграмм (например, диаграмм типа “заходящее солнце”), которые не сводятся к локальным вкладам в инфракрасном пределе. В связи с этими наблюдениями важно отметить, что вопрос о термализации (возвращении к равновесию) в различных областях пространства dS в целом является дискуссионным и открытым. Мы продолжаем исследование этих вопросов, следуя подходу работ [23, 27, 86, 87, 96]. В основном мы сосредотачиваемся на случае массивных вещественных скалярных полей из серии легких полей ( $m < \frac{D-1}{2}$  в единицах постоянной Хаббла) в расширяющемся регионе Пуанкаре (ERP), за исключением некоторых обсуждений в разделе 4.5 и в Приложении D.

Наша цель — определить эволюцию состояния теории в пределе будущей бесконечности. Именно поэтому нас интересует поведение петлевых поправок к пропагатору Келдыша в пределе больших внешних времён  $\eta = \sqrt{\eta_1 \eta_2} \rightarrow 0$  при  $\eta_1/\eta_2 = \text{const}$ , в единицах постоянной Хаббла. В импульсном пространстве (для каждой моды по отдельности) этот предел соответствует  $p\eta \ll |\nu|$ . Как уже было отмечено в Главе 1, в этом пределе пропагатор Келдыша с учетом петлевых поправок принимает вид [23]:

$$G^K(\mathbf{p}|\eta_1, \eta_2) \simeq \left( \frac{1}{2} + n_p(\eta) \right) f_p(\eta_1) f_p^*(\eta_2) + \varkappa_p(\eta) f_p(\eta_1) f_p(\eta_2) + \text{c.c.}, \quad (4.1)$$

в котором отдельные вклады вносят заселенность уровней и аномальные квантовые средние. Однако, в рассматриваемом пределе будущей бесконечности,  $p\eta \rightarrow 0$ , для тяжелых полей ( $m > \frac{D-1}{2}$ ) в ERP ведущие вклады в такие произведения мод, как  $f_p(\eta_1) f_p^*(\eta_2)$  и  $f_p(\eta_1) f_p(\eta_2)$ ,

являются различными функциями от времен  $\eta_{1,2}$ , что следует из (1.10). В этом случае можно разделить инфракрасные петлевые вклады в  $n_p(\eta)$  и  $\varkappa_p(\eta)$ . В то же время, для легких полей в ЕРР произведения мод в инфракрасном пределе совпадают:  $f_p(\eta_1)f_p^*(\eta_2) \simeq -f_p(\eta_1)f_p(\eta_2)$ . В результате получаем

$$G^K(\mathbf{p}|\eta_1, \eta_2) \simeq \frac{A_-^2 \eta^{D-1}}{(p\eta)^{2\nu}} N_p(\eta), \quad (4.2)$$

где  $N_p(\eta) = 1 + 2n_p(\eta) - 2\text{Re}\{\varkappa_p(\eta)\}$ , и мы снова использовали асимптотическую форму мод (1.10). Более того, в этом случае ведущие однопетлевые вклады в  $n_p(\eta)$  и  $\varkappa_p(\eta)$  взаимно компенсируются внутри  $N_p(\eta)$ , как показано в [87].

В ряде работ [23, 26, 27, 86, 87, 107] продемонстрировано, что в пределе будущей бесконечности,  $p\eta \ll |\nu|$ , в ЕРР пропагатор Келдыша на однопетлевом уровне (в  $\phi^3$ -теории) получает секулярно растущие вклады вида  $\sim \lambda^2 \log(p\eta/|\nu|)$ . Они становятся сравнимыми по величине с древесным вкладом (1.18) при достаточно длительном времени эволюции системы. Это справедливо как для тяжёлых, так и для лёгких полей (см., однако, обсуждение в Приложении D ниже). В то же время однопетлевые поправки к запаздывающему и опережающему пропагаторам не растут при  $p\eta \rightarrow 0$  и просто подавлены фактором  $\lambda^2$ . Поскольку из-за быстрого роста со временем, секулярные вклады могут сильно исказить корреляторы на древесном уровне, необходимо пересуммирование по крайней мере ведущих многопетлевых поправок вида  $\sim (\lambda^2 \log(p\eta/|\nu|))^n$  (предполагая, что  $\lambda^2$  мало, тогда как  $\log(p\eta/|\nu|)$  велик).

Случай скалярного поля в сжимающемся регионе Пуанкаре пространства де Ситтера (contracting Poincaré patch, CPP) обсуждается здесь по трём причинам. Во-первых, рассмотрение CPP является весьма важным вопросом не только с академической, но и с наблюдательной точки зрения. Действительно, тот же тип секулярного роста, о котором мы только что упомянули выше, присутствует и в глобальном пространстве-времени dS. Это можно понять, например, из того, что глобальное пространство dS является объединением ЕРР и CPP. В то же время нам неизвестно, каково было начальное состояние нашей Вселенной в начале инфляции. Мы не знаем ни начального состояния в пространстве Фока, ни геометрии начальной поверхности Коши. Это состояние определённо не было состоянием Банч–Дэвиса на светоподобной начальной поверхности ЕРР. В противном случае даже галактики не могли бы существовать, поскольку ситуация была бы абсолютно симметричной. Естественный вопрос состоит в следующем: если начало инфляции происходило из несимметричного состояния, что произошло раньше — установление равновесия или сильное обратное влияние на фоновую геометрию dS [76]?

Во-вторых, в СРР мы сталкиваемся с эффектом «памяти» в dS [26] (см. также [23, 108]), проявляющимся в виде секулярной расходимости. Чтобы обрезать эту расходимость, необходимо ввести в выражениях для петлевых поправок зависимость от положения начальной поверхности Коши,  $\eta_0$ , тем самым нарушив симметрию древесной теории относительно группы изометрий dS. Это явление ранее рассматривалось в работах [23, 108] для главной серии в СРР и в глобальном dS в рамках кинетического приближения. Там было показано, что вопрос о восстановлении симметрии относительно изометрий dS в точных корреляционных функциях зависит от начальных условий.

Третья причина для рассмотрения ситуации в СРР заключается в следующем. В отличие от случая пересуммирования в ЕРР, соответствующие уравнения пересуммирования в СРР являются нелинейными. Причина состоит в следующем: вследствие секулярной расходимости ведущие вклады дают различные типы диаграмм. Из-за этого пересуммирование для лёгких полей в СРР и в глобальном dS является более сложной задачей – в частности, потому, что кинетическое приближение в данном контексте неприменимо. Более детальное исследование этого вопроса мы оставляем на будущее.

Кроме того, в Приложении D мы вновь рассматриваем пересуммирование ведущих логарифмов в ЕРР для тяжелых полей. Мы утверждаем, что в этом случае петлевые поправки испытывают дополнительное подавление вида  $e^{-\pi\nu}$  помимо  $\lambda^2$ , и, таким образом, ведут себя как  $\sim e^{-\pi\nu} \lambda^2 \log(p\eta/|\nu|)$ . Наконец, мы показываем, что при достаточно больших массах,  $\nu \gtrsim \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ , заселённости уровней и аномальные квантовые средние принимают малые значения на поздних временах, что приводит лишь к слабому возмущению начального состояния Банча–Дэвиса.

## 4.1 Однопетлевые поправки к пропагаторам

В этом разделе мы выделяем ведущий вклад в однопетлевую поправку к пропагатору Келдыша в пределе  $p\sqrt{\eta_1\eta_2} \equiv p\eta \rightarrow 0$  для начального состояния Банч–Дэвиса. Имея древесные вершины из (1.24) и пропагаторы из (1.17), мы можем выписать выражения для однопетлевых диаграмм, которые показаны на Рис. 1.2. Имея в виду, что нас интересуют секулярные эффекты в пределе, когда  $(t_1 + t_2)/2 \gg |t_1 - t_2|$ , где  $\eta_{1,2} = e^{-t_{1,2}}$ , в аргументах исправленного пропагатора [27], мы можем пренебречь разностью внешних временных координат. Тогда ведущая однопетлевая поправка в импульсном пространстве содержится в

следующем выражении:

$$\begin{aligned}
\Delta_{1\text{-loop}}G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) = & \lambda^2 \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d\eta_3}{\eta_3^D} \frac{d\eta_4}{\eta_4^D} \left[ -\frac{1}{2}\theta(\eta_3 - \eta)\theta(\eta_4 - \eta) \times \right. \\
& \times \rho(\mathbf{p}|\eta, \eta_3) \left( G_0^{K^2}(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4) - \frac{1}{4}\rho^2(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4) \right) \rho(\mathbf{p}|\eta_4, \eta) + \\
& + \theta(\eta_4 - \eta_3)\theta(\eta_3 - \eta)\rho(\mathbf{p}|\eta, \eta_3)\rho(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)G_0^K(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)G_0^K(\mathbf{p}|\eta_4, \eta) + \\
& \left. + \theta(\eta_3 - \eta_4)\theta(\eta_4 - \eta)G_0^K(\mathbf{p}|\eta, \eta_3)\rho(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)G_0^K(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)\rho(\mathbf{p}|\eta_4, \eta) \right]. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Во-первых, анализ выражения (4.3) показывает, что доминирующий вклад в рассматриваемом пределе приходит из области интегрирования по импульсам, где внешним импульсом  $\mathbf{p}$  можно пренебречь по сравнению с внутренним  $\mathbf{k}$  (см., например, [26] и Приложение E). Кроме того, чтобы выделить ведущую поправку, можно предположить, что внутренние конформные времена  $\eta_3, \eta_4$  таковы, что во внешних пропагаторах можно использовать ИК-асимптотику (1.10) для мод [26].

Во-вторых, члены в двух последних строках (4.3) на самом деле равны после замены переменных интегрирования  $\eta_3 \leftrightarrow \eta_4$ . Обозначим сумму этих двух членов через  $\Delta_1 G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta)$  и, используя выражения для пропагаторов через моды, запишем это выражение в обсуждаемом выше пределе в виде:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) \simeq & -\frac{4A_-^2}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1} \lambda^2 \int_1^\infty \frac{d\tau_4}{\tau_4} \int_{\tau_4}^\infty \frac{d\tau_3}{\tau_3} (\tau_3 \tau_4)^{\frac{D-1}{2}} \text{Im}\{h_\nu(p\eta\tau_3)\} \text{Re}\{h_\nu(p\eta\tau_4)\} \times \\
& \times \int \frac{d^{D-1}\mathbf{q}}{(2\pi)^{D-1}} \text{Im}\left\{ h_\nu(q\tau_3) h_\nu(|\mathbf{q} - \mathbf{p}\eta|\tau_3) h_\nu^*(q\tau_4) h_\nu^*(|\mathbf{q} - \mathbf{p}\eta|\tau_4) \right\}, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

где мы сделали следующую замену переменных интегрирования:  $\tau_3 = \frac{\eta_3}{\eta}$ ,  $\tau_4 = \frac{\eta_4}{\eta}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}\eta$ . Можно видеть, что под интегралом по  $\mathbf{q}$  мы можем сразу перейти к пределу  $p\eta \rightarrow 0$ , предполагая выполнение условия  $\nu < \frac{D-1}{4}$  для ИК-сходимости этих выражений при  $\mathbf{p}$ , положенном равным нулю<sup>1</sup>. Это согласуется с аналогичным пределом в [23, 26], и именно из этой области интегрирования по  $\mathbf{q}$  приходит ведущий секулярный вклад при  $p\eta \ll |\nu|$ . Теперь выполним дальнейшую замену переменных  $u = \sqrt{\tau_3\tau_4}$ ,  $v = \sqrt{\frac{\tau_3}{\tau_4}}$ ,  $\ell = \mathbf{q}u$ , чтобы получить

$$\begin{aligned}
\Delta_1 G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) \simeq & -\frac{8A_-^2}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1} \lambda^2 \int_1^\infty \frac{dv}{v} \int_v^\infty \frac{du}{u} u^{D-1} \cdot \text{Im}\{h_\nu(p\eta uv)\} \text{Re}\left\{ h_\nu\left(p\eta \frac{u}{v}\right) \right\} \times \\
& \times \int \frac{d^{D-1}\ell}{(2\pi)^{D-1}} \text{Im}\left\{ h_\nu^2(\ell v) h_\nu^{*2}\left(\frac{\ell}{v}\right) \right\}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>На самом деле, аккуратный расчёт показывает, что при  $\nu > \frac{D-1}{4}$  не происходит ничего существенно иного, однако коэффициенты в итоговых выражениях немного изменяются.

Подставляя асимптотики (1.10), можно увидеть, что в выражении (4.5) содержится большой вклад. Он велик в пределе  $p\eta \ll |\nu|$  и возникает из области, где функции Ханкеля разлагаются по малым аргументам  $p\eta v < |\nu|$ ,  $p\eta \frac{u}{v} < |\nu|$ , тогда как остальные вклады подавлены в пределе  $p\eta \rightarrow 0$ . Следовательно, мы используем разложение (1.10) для  $h_\nu(p\eta v)$  и  $h_\nu(p\eta \frac{u}{v})$ , и получаем

$$\begin{aligned} \Delta_1 G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) &\simeq \frac{8A_+^3 \text{Im}\{A_+\}}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1} \int_1^{\frac{\sqrt{|\nu|}}{\sqrt{p\eta}}} \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \int_v^{\frac{|\nu|}{p\eta v}} \frac{du}{u} \int \frac{d^{D-1}\ell}{(2\pi)^{D-1}} \text{Im} \left\{ h_\nu^2(\ell v) h_\nu^{*2}\left(\frac{\ell}{v}\right) \right\} \simeq \\ &\simeq \frac{A_+^2}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1} \left[ A \cdot \lambda^2 \log\left(\frac{p\eta}{|\nu|}\right) + B \cdot \lambda^2 \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$A \equiv -8A_- \text{Im}\{A_+\} \int_1^\infty \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \text{Im}\{F(v)\}, \quad F(v) \equiv \int \frac{d^{D-1}\ell}{(2\pi)^{D-1}} \text{Im} \left\{ h_\nu^2(\ell v) h_\nu^{*2}\left(\frac{\ell}{v}\right) \right\}, \quad (4.7)$$

а  $B$  — некоторая несущественная для дальнейшего обсуждения константа. Чтобы получить вторую строку в (4.6), мы вычислили интеграл по  $u$  и положили верхний предел интегрирования по  $v$  равным бесконечности вследствие быстрой сходимости этих интегралов.

Мы видим, что для достаточно больших времён (или, что эквивалентно, для достаточно малых конформных времён в ЕРР) логарифм в (4.6) становится большим, и поправка может доминировать даже над древесным пропагатором Келдыша, тогда как прочие вклады подавлены как  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  в этом пределе. Аналогичным образом можно показать, что другие члены в (4.3) не дают дополнительных больших или растущих со временем вкладов (см. также Приложение Е). Следовательно, в однопетлевом приближении доминирующая поправка к пропагатору Келдыша (4.3) имеет вид

$$\Delta_{1\text{-loop}} G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) \simeq G_0^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) \cdot A \lambda^2 \log\left(\frac{p\eta}{|\nu|}\right), \quad \text{в пределе } p\eta \rightarrow 0. \quad (4.8)$$

Это и есть секулярная поправка, о которой мы говорили ранее. При этом следует подчеркнуть, что запаздывающий и опережающий пропагаторы не получают вкладов, растущих со временем, в пределе  $\sqrt{\eta_1 \eta_2} \rightarrow 0$ ,  $\eta_1/\eta_2 = \text{const}$  [23]. Таким образом, только пропагатор Келдыша содержит секулярный вклад, который, следовательно, нельзя, например, поглотить в собственную энергию и/или сдвиг частоты мод.

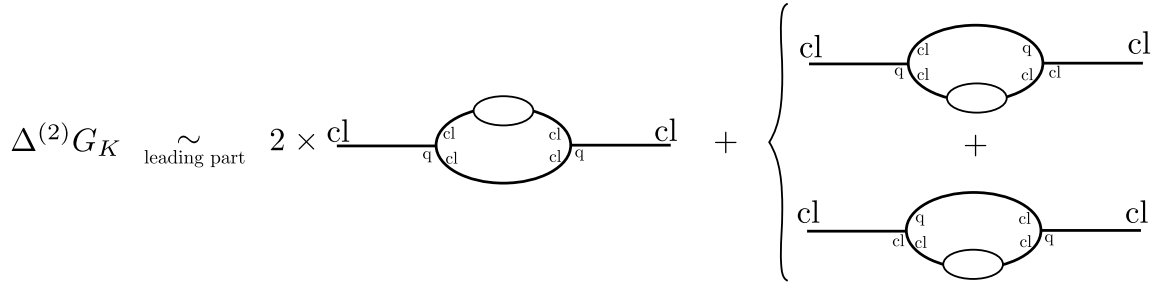


Рис. 4.1: Пузырь внутри пузыря.

## 4.2 Многопетлевые вклады в двухточечные функции

На поздних временах, когда  $\lambda^2 \log(p\eta) \sim 1$ , пертурбативное разложение перестаёт работать, и необходимо просуммировать по крайней мере ведущие секулярные поправки от всех петель. Чтобы записать систему соответствующих уравнений Дайсона–Швингера, осуществляющую суммирование ведущих поправок, нужно оценить, какие типы диаграмм следует учитывать. Очевидно, существуют лестничные диаграммы, которые дают степени вида  $[\lambda^2 \log(p\eta)]^n$ ,  $n \geq 2$ .

В этом разделе мы показываем, что диаграммы типа “пузырь внутри пузыря”, такие как показанные на Рис. 4.1, дают подавленные поправки. С учётом того, что однопетлевые поправки к запаздывающему и опережающему пропагаторам не содержат секулярного роста, один простой способ увидеть это состоит в том, чтобы подставить лидирующую поправку (4.8) во внутренние линии с пропагатором Келдыша в однопетлевых диаграммах, изображенных на Рис. 1.2 в первой Главе. Оценивая поправку во внутренней линии диаграмм как

$$\Delta G^K(\mathbf{q}|\eta_3, \eta_4) \sim \lambda^2 \log(q\sqrt{\eta_3\eta_4}) G^K(\mathbf{q}|\eta_3, \eta_4) = \lambda^2 \log(\ell) G^K(\mathbf{q}|\eta_3, \eta_4), \quad (4.9)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)}G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) &\sim \frac{\lambda^4}{(p\eta)^{2\nu}} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{p\eta}}} \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \int_v^{\frac{1}{p\eta v}} \frac{du}{u} \int d^{D-1} \ell \log(\ell) h_\nu^2(\ell v) h_\nu^{*2}\left(\frac{\ell}{v}\right) \sim \\ &\sim \frac{\lambda^4 \eta^{D-1}}{(p\eta)^{2\nu}} \log(p\eta) \sim \lambda^4 \log(p\eta) G_0^K(\mathbf{p}|\eta, \eta). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Таким образом, получившееся выражение (4.10) подавлено дополнительной степенью  $\lambda^2$ , которая не сопровождается дополнительной степенью логарифма. Это важное обстоятельство не было учтено в [23, 87]. Затем это было восполнено в [27], но без пересмотра уравнения

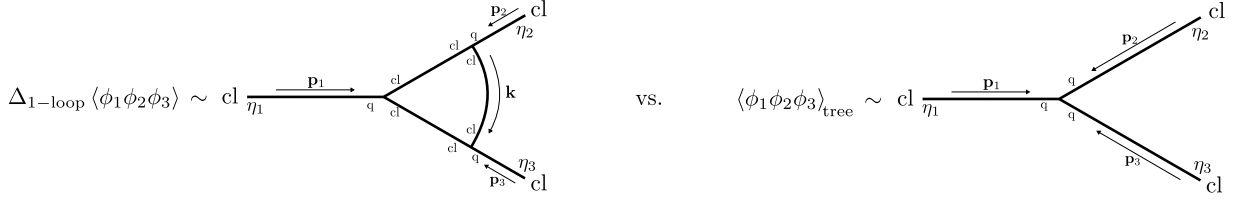


Рис. 4.2: Однопетлевая поправка к трёхточечной функции в сравнении с древесным значением в пределе  $p_{1,2,3}\eta_{1,2,3} \rightarrow 0$ . Нижние индексы у полей в корреляторах символически обозначают соответствующие временные координаты, а диаграммы записаны в импульсном представлении.

Дайсона–Швингера и его решений. Дело в том, что если диаграммы, показанные на Рис. 4.1, включать в ведущем приближении, то получающееся интегральное уравнение для исправленного пропагатора Келдыша оказывается нелинейным и имеет избыточные сингулярные решения [87]. Тем не менее, в [23] было показано, что нелинейные уравнения, пересуммирующие диаграммы, возникают в СРР и в глобальном dS. Это было показано для случая тяжелых полей, и ниже мы продемонстрируем то же самое для лёгких полей (complementary series).

### 4.3 Поправки к многоточечным корреляционным функциям

Система уравнений Дайсона–Швингера накладывается как на пропагаторы, так и на многоточечные корреляционные функции. Следовательно, чтобы выделить ведущие поправки, необходимо проверить наличие потенциально опасных (растущих со временем) петлевых вкладов и в корреляторах более высокого порядка. На однопетлевом уровне поправка к трёхточечной корреляционной функции состоит из диаграмм, показанных на Рис. 4.2.

Петлевые поправки из Рис. 4.2 имеют следующий вид с точностью до общего коэффициента:

$$\begin{aligned} \Delta_{1\text{-loop}} \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle &\sim \\ &\sim \delta^{(D-1)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \cdot \lambda^3 \cdot \int_{\eta_1}^{\infty} \frac{d\eta_4}{\eta_4^D} \int_{\eta_2}^{\infty} \frac{d\eta_5}{\eta_5^D} \int_{\eta_3}^{\infty} \frac{d\eta_6}{\eta_6^D} \rho(\mathbf{p}_1 | \eta_1, \eta_4) \rho(\mathbf{p}_2 | \eta_5, \eta_2) \rho(\mathbf{p}_3 | \eta_6, \eta_3) \times \\ &\quad \times \int \frac{d^{D-1} \mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} G_0^K(\mathbf{k} - \mathbf{p}_2 | \eta_4, \eta_5) G_0^K(\mathbf{k} | \eta_5, \eta_6) G_0^K(\mathbf{k} + \mathbf{p}_3 | \eta_6, \eta_4). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Потенциально большие ИК-вклады из интеграла по петлевому импульсу в (4.11) возникают в случае  $\nu > \frac{D-1}{6}$  с учётом асимптотического поведения (1.10). Для оценки этой поправки рассмотрим один из регионов интегрирования, где все пропагаторы данной диаграммы можно

разложить по малым аргументам:  $k < \min \left\{ \frac{1}{\eta_5}, \frac{1}{\eta_6}, p_2, p_3 \right\}$ ,  $\eta_4 < \frac{1}{\max\{p_1, p_2, p_3\}}$ ,  $\eta_5 < \frac{1}{p_2}$ ,  $\eta_6 < \frac{1}{p_3}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{1\text{-loop}} \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle &\sim A_-^9 \text{Im}^3 \{A_+\} \delta^{(D-1)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \cdot \lambda^3 \cdot \frac{(\eta_1 \eta_2 \eta_3)^{D-1-\nu}}{(p\eta_3)^\nu (p\eta_2)^\nu (p\eta_1)^\nu} \times \\ &\times \frac{p_1^\nu \min^{D-1-2\nu}\{p_2, p_3\}}{p_2^\nu p_1^\nu} \frac{1}{(\eta_1 \max\{p_1, p_2, p_3\})^{\frac{D-1}{2}-\nu}} \frac{1}{(p_2 \eta_2)^{\frac{D-1}{2}-\nu}} \frac{1}{(p_3 \eta_3)^{\frac{D-1}{2}-\nu}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В то же время типичный вклад в трёхточечную функцию на древесном уровне (вторая диаграмма на Рис. 4.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle_{\text{tree}} &\sim \delta^{(D-1)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \cdot \lambda \cdot \int \frac{d\eta_4}{\eta_4^D} G^A(\mathbf{p}_1 | \eta_1, \eta_4) G^R(\mathbf{p}_2 | \eta_4, \eta_3) G^R(\mathbf{p}_3 | \eta_4, \eta_3) \sim \\ &\sim \delta^{(D-1)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \cdot \lambda \cdot \frac{(\eta_1 \eta_2 \eta_3)^{\frac{D-1}{2}}}{(p_1 \eta_1)^\nu (p_2 \eta_2)^\nu (p_3 \eta_3)^\nu} \frac{(p_1 p_2 p_3)^\nu}{(\max\{p_1, p_2, p_3\})^{\frac{D-1}{2}+3\nu}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Теперь введём безразмерные переменные  $x_{1,2,3}$  и  $\tau_{1,2,3}$  посредством  $p_{1,2,3} = p x_{1,2,3}$ ,  $\eta_{1,2,3} = \eta \tau_{1,2,3}$ . Как и в случае пропагатора Келдыша, нас интересуют секулярные эффекты на поздних временах. Поэтому мы выбираем внешние параметры порядка  $x_{1,2,3} \sim 1$  и  $\tau_{1,2,3} \sim 1$  и переходим к пределу  $p\eta \rightarrow 0$ . Тогда очевидно, что однопетлевая поправка в этом пределе просто подавлена:

$$\frac{\Delta_{1\text{-loop}} \langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle}{\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \rangle_{\text{tree}}} \sim \lambda^2 \cdot \frac{\eta^{3(D-1-\nu)}}{(p\eta)^{3\nu}} \frac{p^{D-1-3\nu}}{(p\eta)^{3\frac{D-1}{2}-3\nu}} \Big/ \frac{\eta^{3\frac{D-1}{2}}}{(p\eta)^{3\nu}} \frac{p^{3\nu}}{p^{\frac{D-1}{2}+3\nu}} \sim \lambda^2, \quad (4.14)$$

Более точные оценки других поправок к трёхточечным функциям также не выявляют дополнительных вкладов, растущих со временем, в рассматриваемом пределе. Это происходит потому, что в многоточечных корреляционных функциях “объёмные” множители  $\eta^{\frac{D-1}{2}}$  в модах (1.5) и пропагаторах (1.18) подавляют специфическое ИК-поведение лёгких полей (1.10) после интегрирования по внутренним конформным временам диаграмм.

Таким образом, при суммировании ведущих секулярно растущих поправок вида (4.6) нам не требуется записывать уравнения Дайсона–Швингера для многоточечных корреляционных функций, и в уравнениях для пропагаторов можно оставить эти корреляционные функции в древесной форме.

## 4.4 Пересуммирование

Наблюдения, сделанные в предыдущих разделах, позволяют утверждать, что в ведущем приближении в EPP в пределе  $p\sqrt{\eta_1 \eta_2} \rightarrow 0$ ,  $\eta_1/\eta_2 = \text{const}$  необходимо просуммировать

лестничные диаграммы, построенные из диаграмм, изображённых на Рис. 1.2. Такое суммирование следует выполнять только для пропагатора Келдыша, тогда как запаздывающий и опережающий пропагаторы, а также вершины можно брать в древесной форме. Мы заботимся лишь о ведущих секулярных ИК-вкладах и предполагаем, что все константы теории принимают свои физические значения, то есть уже УФ-перенормированы.

Тогда соответствующее уравнение Дайсона–Швингера имеет вид

$$\begin{aligned}
G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) \simeq & G_0^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) + \lambda^2 \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d\eta_3}{\eta_3^D} \frac{d\eta_4}{\eta_4^D} \left[ -\frac{1}{2}\theta(\eta_3 - \eta)\theta(\eta_4 - \eta) \times \right. \\
& \times \rho(\mathbf{p}|\eta, \eta_3) \left( G_0^{K^2}(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4) - \frac{1}{4}\rho^2(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4) \right) \rho(\mathbf{p}|\eta_4, \eta) + \\
& + \theta(\eta_4 - \eta_3)\theta(\eta_3 - \eta)\rho(\mathbf{p}|\eta, \eta_3)\rho(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)G_0^K(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)G^K(\mathbf{p}|\eta_4, \eta) + \\
& \left. + \theta(\eta_3 - \eta_4)\theta(\eta_4 - \eta)G_0^K(\mathbf{p}|\eta, \eta_3)\rho(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)G_0^K(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)\rho(\mathbf{p}|\eta_4, \eta) \right].
\end{aligned} \tag{4.15}$$

В правой части этого уравнения точный пропагатор Келдыша стоит только в одном месте.

Для того чтобы решить это уравнение, мы будем использовать следующий анзац для точного пропагатора Келдыша:

$$G^K(\mathbf{p}|\eta_1, \eta_2) = A_-^2 \eta^{D-1} \frac{N(p\eta)}{(p\eta)^{2\nu}}, \quad \eta = \sqrt{\eta_1\eta_2}, \tag{4.16}$$

который решает это уравнение при некоторых условиях в рассматриваемом нами пределе, как мы сейчас увидим. В общем случае нас интересует решение уравнения (4.15) для различных начальных условий на пропагатор Келдыша, который несёт информацию о квантовом состоянии скалярного поля на поверхности<sup>2</sup>  $p\eta \sim |\nu|$ .

В данной работе мы пока что используем самый простой выбор. А именно, мы предполагаем некоторое начальное значение для  $N(p\eta)$  в (4.16),  $N_0 \equiv N(P_0) = 1 + 2n(P_0) - 2\text{Re}\{\varkappa(P_0)\}$ , которое задаётся при некотором начальном физическом импульсе  $P_0 = (p\eta)_0$ . Такой выбор сохраняет по крайней мере следующую часть изометрии  $dS^3$ :  $p \rightarrow \frac{1}{\alpha}p$ ,  $\eta \rightarrow \alpha\eta$  для некоторой постоянной  $\alpha$ . Поэтому результирующее уравнение для эволюции квантового

<sup>2</sup>Следует иметь в виду, что петлевые поправки сохраняют изометрию  $dS$  в ЕРР для состояния Банча–Дэвиса [109–112]. Однако более интересно проследить эволюцию возмущений (возможно, пространственно однородных) состояния Банча–Дэвиса, которые нарушают изометрию  $dS$  в начальный момент времени.

<sup>3</sup>Следует подчеркнуть, что с физической точки зрения это довольно специфический выбор начальных условий (см., например, [113] для обсуждения по этому поводу). Существует множество других способов задания начальных условий, и они, как правило, нарушают изометрию  $dS$ . Этот вопрос обсуждается несколько подробнее в заключительной части данной главы.

состояния принимает вид

$$N(p\eta) \simeq N_0 + 4 A_- \operatorname{Im}\{A_+\} N_0 \lambda^2 \int_1^{\frac{1}{\sqrt{p\eta}}} \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \int_v^{\frac{1}{p\eta v}} \frac{du}{u} \left[ N(p\eta\sqrt{uv}) + N_0 \right] \operatorname{Im}\{F(v)\} + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (4.17)$$

где  $A_{\pm}$  определены в (1.10), а  $F(v)$  определена в (4.7). Ещё раз подчеркнём, что это уравнение справедливо в приближениях, обсуждавшихся в разделе 4.1.

Уравнение (4.17) в принципе может иметь различные решения для разных начальных условий. Простейший анзац для решения можно взять в виде  $N(p\eta) = C(p\eta)^\alpha$ . Если  $\alpha > 0$ , то  $N(p\eta\sqrt{uv}) \ll N_0$  в уравнении (4.17) при  $p\eta \rightarrow 0$ , и, следовательно, такой анзац не подходит, поскольку он не решает рассматриваемое уравнение.

Напротив, если предположить, что  $\alpha < 0$ , то  $N(p\eta\sqrt{uv}) \gg N_0$ , и из (4.17) мы получаем уравнение, определяющее  $\alpha$ :

$$\alpha \simeq -4\lambda^2 N_0 A_- \operatorname{Im}\{A_+\} \int_1^\infty \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \operatorname{Im}\{F(v)\} v^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (4.18)$$

где мы положили верхний предел интегрирования по  $v$  равным бесконечности вследствие быстрой сходимости интеграла. В ведущем порядке решение для  $\alpha$  оказывается очень близким к нулю:

$$\alpha \simeq -4\lambda^2 N_0 A_- \operatorname{Im}\{A_+\} \int_1^\infty \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \operatorname{Im}\{F(v)\} + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad (4.19)$$

при условии, что начальное значение  $N_0$ , которое может иметь любой знак, таково, что  $\alpha < 0$ . В этом случае точный пропагатор Келдыша возрастает по сравнению со своим древесным значением:

$$\frac{G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta)}{G_0^K(\mathbf{p}|\eta, \eta)} \sim (p\eta)^{-|\alpha|}.$$

Тем не менее, этот степенной рост пропагатора Келдыша не превосходит объёмный множитель  $\eta^{D-1}$  в (1.5), (1.18) или (4.16) и в целом может рассматриваться как ИК-перенормировка массы, делая ситуацию в некотором смысле похожей на рассмотренную в [74, 114, 115] в моделях с большим  $N$  — различие в деталях нашего ответа по сравнению с результатами этих работ можно отнести к тому, что мы рассматриваем иной предел. В последующих исследованиях мы вернёмся к уравнению Дайсона–Швингера (4.15), чтобы рассмотреть более общие начальные состояния и типы взаимодействий.

## 4.5 Комментарий о ситуации в сжимающемся регионе Пуанкаре

Чтобы проиллюстрировать ситуацию, в которой изометрии dS неизбежно нарушаются на петлевом уровне (даже если на древесном уровне они имеют место), рассмотрим аналогичные вычисления в СРР для легких полей. Метрика в СРР, выраженная в терминах конформного времени, совпадает с метрикой в ЕРР, однако ключевое различие теперь состоит в соотношении между конформным и космологическим временем:  $\eta = e^t$  и оно пробегает значения от  $\eta = 0$  в прошлой бесконечности,  $t = -\infty$ , до  $\eta = +\infty$  в будущей бесконечности,  $t = +\infty$ .

В СРР мы рассматриваем то же начальное состояние Банча–Дэвиса и соответствующие моды (1.7), что и в ЕРР, то есть мы также рассматриваем пространственно однородное состояние, которое, разумеется, в СРР, в отличие от случая ЕРР, неустойчиво относительно пространственно неоднородных возмущений. Однако эффекты, которые мы рассматриваем ниже, не имеют никакого отношения к этой неустойчивости и присутствуют, например, в верхней части глобального пространства-времени dS.

Такой выбор мод и состояний в СРР соответствует пропагаторам, которые имеют корректное адамаровское поведение и уважают изометрию dS на древесном уровне. Однако это не единственный вариант начального состояния. На самом деле может быть уместно рассматривать in-моды в СРР, которые пропорциональны функции Бесселя  $h_\nu \sim Y_\nu(p\eta)$  (см., например, [23, 107]), а не функциям Ханкеля. Эта функция Бесселя является некоторой линейной комбинацией функций Ханкеля  $H_\nu^{(1)}$  и  $H_\nu^{(2)}$ . В случае главной серии эти моды ведут себя как одиночные осциллирующие экспоненты космологического времени в прошлой бесконечности. Тогда соответствующие (фоковскому основному состоянию) пропагаторы также уважают изометрию dS, однако не имеют корректного адамаровского поведения. Кроме того, следует иметь в виду, что для других так называемых  $\alpha$ -состояний (включая рассматриваемые in-состояния в СРР), отличных от состояния Банча–Дэвиса, которые уважают изометрию dS на древесном уровне, эта симметрия нарушается в петлях [112] даже в ЕРР. В некотором смысле этот факт связан с не-адамаровым поведением соответствующих пропагаторов.

В случае СРР мы сталкиваемся с секулярной расходимостью [26], [27], а не с секулярным ростом. Действительно, из (4.3) можно напрямую увидеть, что в ЕРР интегралы по  $\eta_{3,4}$  ограничены снизу внешним временем  $\eta$  вследствие причинности в технике Швингера–Келдыша. Тогда получающееся выражение для поправки в ЕРР (4.8) сингулярно в пределе  $\eta \rightarrow 0$ . Теперь, в СРР внешнее конформное время  $\eta = \sqrt{\eta_1 \eta_2}$  является верхним пределом

интегралов по  $\eta_{3,4}$ , а не нижним. Тогда аналоги интегралов в (4.3) для СРР оказываются расходящимися, поскольку их нижняя граница равна нулю. Чтобы обрезать расходимость, мы должны ввести нижнюю границу интегрирования по  $\eta_{3,4}$ , задав некоторое начальное конформное время  $\eta_0$ . Это положение начальной поверхности Коши, которое нельзя устремить к нулю (или  $t_0 = \log \eta_0$  — к прошлой бесконечности) из-за расходимости. Введение начальной поверхности Коши нарушает изометрию  $dS$  уже на однопетлевом уровне.

Тогда возникает естественный вопрос: восстанавливается ли эта симметрия после пересуммирования петлевых поправок или нет, то есть можно ли убрать  $\eta_0$  на прошлую бесконечность в точных корреляционных функциях или нет? В петлевых вычислениях в СРР для лёгких полей следует отдельно рассматривать две ситуации. Первая ситуация возникает для мод с импульсом  $p\sqrt{\eta_1\eta_2} = p\eta > |\nu|$ . Тогда во внешних ногах нельзя использовать для функций Ханкеля их приближённую форму при малых аргументах (1.10). Следовательно, можно различать квантовые заселённости уровней  $n_p$  и аномальное квантовое среднее  $\varkappa_p$  внутри полной поправки к пропагатору Келдыша, как в (4.1). Чтобы оценить ведущие поправки к  $n_p$  и  $\varkappa_p$  при  $p\eta_0 \rightarrow 0$ , можно использовать для функций Ханкеля внутри интегралов по  $\eta_{3,4}$  их асимптотическую форму при малых аргументах (1.10) при  $\eta_{3,4} \leq \frac{|\nu|}{p}$ . Тогда получающиеся вклады в эти величины на однопетлевом уровне имеют вид:

$$n_p(\eta) \simeq \frac{\lambda^2}{(p\eta_0)^{2\nu}} \cdot \frac{A_-^2}{\nu} \int_1^\infty \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \operatorname{Re} \{F(v)\} - 2\lambda^2 \log \left( \frac{p\eta_0}{|\nu|} \right) \cdot A_- \int_1^\infty \frac{dv}{v} \operatorname{Re} \left\{ A_+ v^{2\nu} + A_+^* \frac{1}{v^{2\nu}} F(v) \right\} + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (4.20)$$

$$\varkappa_p(\eta) \simeq \frac{\lambda^2}{(p\eta_0)^{2\nu}} \cdot \frac{A_-^2}{\nu} \int_1^\infty \frac{dv}{v^{2\nu+1}} F(v) - 2\lambda^2 \log \left( \frac{p\eta_0}{|\nu|} \right) \cdot A_- A_+^* \int_1^\infty \frac{dv}{v} \left[ v^{2\nu} + \frac{1}{v^{2\nu}} \right] F(v) + \mathcal{O}(\lambda^2). \quad (4.21)$$

Здесь мы видим не только логарифмическую, но и степенную расходимость в первых членах. Такие вклады в  $n_p$  и  $\varkappa_p$  также появляются и в ЕРР, однако в этом случае они в точности взаимно сокращаются в поправке к пропагатору Келдыша (4.1). Мы видим, что в СРР для мод с  $p\eta > |\nu|$  это сокращение не происходит.

Второй случай, который следует рассматривать в СРР, относится к модам с импульсом  $p\eta < |\nu|$ . В этом случае нельзя разделить поправки к  $n_p$  и  $\varkappa_p$ , как в (4.1), и следует рассматривать поправку ко всему пропагатору Келдыша, как в (4.2). Тогда однопетлевая

поправка выражается как

$$\Delta_{1\text{-loop}} G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) = -\frac{A^2}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1} \cdot \lambda^2 \log\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right) \cdot 8A_- \text{Im}\{A_+\} \int_1^\infty \frac{dv}{v} v^{2\nu} \text{Im}\{F(v)\} + \mathcal{O}(\lambda^2), \quad (4.22)$$

и ведущие нелогарифмические поправки взаимно сокращаются, как это было в ЕРР.

Подытожим и сравним наши наблюдения для СРР и ЕРР. В случае ЕРР интегралы в (4.3) сходятся, но дают большие вклады при таких внешних импульсах  $p$ , что  $p\eta \ll |\nu|$ . Для других импульсов поправки просто подавлены константой связи  $\lambda^2$ .

В то же время в СРР, независимо от величины импульса  $p$ , такие интегралы, как в (4.3), расходятся на нижней границе интегрирования по внутренним временам  $\eta_{3,4}$ , поскольку в СРР верхние и нижние пределы этих интегралов переставлены местами по сравнению со случаем ЕРР. Необходимо ввести конечное обрезание интеграла по времени  $\eta_0$  на нижней границе интегрирования независимо от значения  $p$ . Это положение начальной поверхности Коши. Далее, для таких  $p$ , что  $p\eta_0 < |\nu|$ , возникают большие поправки к пропагатору Келдыша. В то же время для таких  $p$ , что  $p\eta_0 > |\nu|$ , больших поправок нет. Особенность теперь в том, что для таких  $p$ , что  $p\eta_0 < |\nu|$ , но  $p\eta > |\nu|$  ( $\eta > \eta_0$ ), мы имеем большие степенные (по  $p\eta_0$ ), а не логарифмические поправки, которые по отдельности присутствуют в  $n_p(\eta)$  и  $\varkappa_p(\eta)$ . В то же время для таких  $p$ , что  $p\eta < |\nu|$ , мы имеем лишь большие логарифмические поправки, тогда как степенные поправки взаимно сокращаются в полном выражении для исправленного пропагатора Келдыша.

Кроме того, нетрудно видеть, что для случая<sup>4</sup>  $p\eta < |\nu|$  в СРР диаграммы типа изображённых на Рис. 4.1 будут вести себя как  $\lambda^4 \log^2\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)$ , как показано в [27]. Следовательно, в отличие от случая ЕРР, мы должны учитывать “петли внутри петель” в ведущем порядке по степеням параметра  $\lambda^2 \log\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)$ . Поэтому в соответствующем уравнении Дайсона–Швингера, которое суммирует ведущие петлевые поправки, необходимо использовать точный пропагатор Келдыша также и во внутренних линиях. Это приведёт к нелинейному интегральному уравнению для точного пропагатора Келдыша в СРР. Как показано для тяжелых полей в [23, 108], нелинейные интегральные уравнения могут приводить как к сингулярным решениям со “взрывным” поведением тензора энергии-импульса за конечное собственное время, так и к гладким решениям в зависимости от начальных условий. Сложность в случае легких полей состоит в неприменимости кинетического приближения, которое работает, когда функцию  $N(p\eta)$  (или  $n_p(\eta)$  и  $\varkappa_p(\eta)$ ) можно считать медленной по сравнению с модами.

<sup>4</sup>Случай  $p\eta > |\nu|$  следует рассматривать отдельно.

## Глава 5

# Эффективная масса гравитона в пространстве де Ситтера

Одним из способов исследовать поведение системы и отклик квантовой материи на внешние условия является нахождение эффективного действия для малых возмущений внешнего поля. Основной целью данной главы является исследование эффективного массового члена для гравитона, который он может приобретать в однопетлевом эффективном действии в пространстве де Ситтера ( $dS$ ). Мотивация для этого вопроса исходит из наличия естественной температуры Гиббонса–Хокинга в  $dS$  [24, 116], которая наводит на мысль, что фотон и гравитон могут приобретать ненулевую массу, как это происходит в физике плазмы. Наша работа является закономерным продолжением статьи [116], в которой показано, что несмотря на то, что наблюдатель обнаруживает некоторое подобие теплового равновесия с канонической температурой  $T_{dS} = \frac{H}{2\pi}$  (здесь  $H$  — постоянная Хаббла), для максимально симметричного состояния Банча–Дэвиса материи эффективная дебаевская масса фотона отсутствует. Мы продолжаем это исследование на случай гравитационной массы. Само гравитонное поле рассматривается на классическом уровне как возмущение метрики  $dS$ , а квантовую материю мы описываем свободной скалярной теорией поля. Следует отметить, что возмущение метрики во внешнем поле имеет несколько физических мод, которые могут демонстрировать различное поведение в эффективной теории. Рассмотрение этих космологических возмущений важно для понимания распространения гравитационных волн и флуктуаций плотности материи в ранней Вселенной [117]. Кроме того, важным моментом данной работы является то, что мы ограничиваемся только расширяющимся регионом Пуанкаре пространства  $dS$ .

Существует два хорошо изученных типа массивных членов [118, 119], которые могут

быть добавлены в действие гравитации:

$$S_{\text{mass}} = \int d^D x \sqrt{|g|} \left[ \epsilon_{\text{gh}} h^2 + m_g^2 (h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^2) \right], \quad h \equiv h_\mu^\mu, \quad (5.1)$$

которые нарушают инвариантность относительно диффеоморфизмов. Второй из них называется массивным членом Фирца–Паули и, как известно, не приводит к появлению духовых степеней свободы в линеаризованной гравитации, тогда как первый связан с так называемым «скалярным духом» и приводит к нестабильности Остроградского [119]. В нашей работе мы связываем появление массы с возникновением членов вида (5.1), если таковые имеются, в длинноволновом разложении эффективного действия, которое, в свою очередь, сохраняет калибровочную инвариантность. Например, на фоне пространства Минковского для скалярной кривизны Риччи  $R$  в линейном и втором порядках имеем:

$$\begin{aligned} R^{(1)} &\sim k^2 \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) h^{\mu\nu}, \\ \left( \sqrt{|g|} R \right)^{(2)} &\sim k^2 (h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - h^2) + 2k_\mu k_\nu g_{\alpha\beta} (h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} - h^{\mu\alpha} h^{\nu\beta}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Следовательно, малые и медленно меняющиеся возмущения метрики приобретают массу, если эффективное действие содержит, например, такие ковариантные вклады, как:

$$\Delta\Gamma_{\text{eff}} = \int d^D x \sqrt{|g|} \left[ \epsilon_{\text{gh}} R \frac{1}{\square^2} R + m_g^2 \frac{1}{\square} R \right]. \quad (5.3)$$

В целом ситуация значительно более сложна из-за ультрафиолетовых эффектов, перенормировки космологической постоянной, конформных аномалий и других факторов. Например, одним из основных вкладов в индуцированную гравитацию в двумерном пространстве является действие Мабучи [120, 121], которое возникает из интеграла функции Грина ковариантного лапласиана, взятой в совпадающих точках.

На данный момент нам не удалось разрешить все возникающие таким образом вопросы. Тем не менее, мы вводим и анализируем величину эффективной массы как меру обратного отклика квантовой материи, погружённой в сильный гравитационный фон, для простейшего случая состояния Банча–Дэвиса в регионе Пуанкаре. Поскольку мы рассматриваем гравитационный сектор на классическом уровне, понятие индуцированной массы не следует интерпретировать как массу частицы-гравитона, а необходимо рассматривать как характеристику поведения материи в данном состоянии. Например, в случае больших положительных масс гравитационное взаимодействие экранируется, а отрицательный квадрат массы соответ-

ствует распаду начального внешнего фона. В частности, при наличии классического тензора энергии-импульса отрицательный квадрат массы для теплового состояния материи приводит к хорошо известной джинсовской нестабильности [117, 122, 123]. В то же время, с учётом таких петлевых эффектов, как секулярно растущие поправки [23, 26, 29, 98, 107, 124], устойчивость dS является отдельным интересным вопросом со множеством нерешённых проблем, поскольку эти вклады могут радикально изменить поведение теории на древесном уровне для различных типов квантовых полей и различных начальных состояний. Именно поэтому мы считаем, что для рассмотрения этой проблемы необходимы дополнительные подходы.

Другим любопытным аспектом появления массы калибровочного поля является связь с механизмом Хиггса. Мы ожидаем, что поле со спином  $s$  «поглощает» бозон Голдстоуна со спином  $(s - 1)$ , чтобы приобрести массу. В пространстве Минковского с потенциалом  $\lambda\phi^4$  существуют две диаграммы, локальная и нелокальная, которые объединяются в поперечную структуру и сдвигают полюс пропагатора калибровочного поля (см. Рис. 5.1).

$$P_{\mu\nu} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \propto \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2} \right) M_{\text{ph}},$$

Рис. 5.1: Механизм Хиггса в Стандартной модели

На Рис. 5.1 кресты обозначают вакуумное среднее поля Хиггса, а полюс при  $k^2 = 0$  указывает на обмен безмассовым бозоном. Если потенциал со спонтанным нарушением симметрии отсутствует и наш фотон или гравитон взаимодействует со свободной теорией поля, то вместо вкладов на Рис. 5.1 возникают диаграммы типа “пузырь” “головастик”. Например, в случае гравитона аналог механизма Хиггса реализуется, если в нелокальной части собственной энергии гравитона появляется полюс, соответствующий голдстоуновскому вектору. Это имеет место, когда состояние, создаваемое тензором энергии-импульса материи  $T_{\mu\nu}(x)|0\rangle$ , имеет ненулевое перекрытие с состоянием голдстоуновского вектора, что легко увидеть, если вставить сумму по всем состояниям в нелокальную часть собственной энергии  $\Sigma_{\mu\nu|\alpha\beta} \sim \sum_{\text{state}} \langle 0|T_{\mu\nu}|\text{state}\rangle \langle \text{state}|T_{\alpha\beta}|0\rangle$ . Поскольку тензор энергии-импульса квадратичен по полям, механизм Хиггса требует появления голдстоуновского вектора в тензорном произведении состояний в спектре материи, который представляет собой сумму бесконечномерных унитарных неприводимых представлений с положительным весом группы изометрий рассматриваемого пространства [125–127]. Хотя трудно представить, что тензор энергии-

импульса свободной теории поля может создавать голдстоуновский вектор как связанное состояние, это действительно происходит при определённых условиях в AdS: например, наличие голдстоуновского вектора в диаграмме типа “пузырь” показано в [127, 128] с использованием разложения пропагаторов на больших расстояниях. Для иллюстрации, в Приложении J мы показываем наличие голдстоуновского скаляра и массы фотона в однопетлевой собственной энергии фотона в AdS<sub>4</sub>, следуя духу работы [127].

В dS спектр состояний иной [129], и мы не ожидаем возникновения тех же явлений. Более того, анализ в dS должен быть более аккуратным, поскольку это нестационарный фон, и поэтому необходимо использовать диаграммную технику Швингера–Келдыша. В частности, в [116] было показано, что дебаевская и магнитная массы фотона в dS равны нулю в максимально симметричном и аналитическом состоянии Банча–Дэвиса. В данной работе мы показываем, что эффективная масса тензорной моды гравитона также равна нулю с точностью до вычитания УФ-расходящихся контактных членов, которые присутствуют и в пространстве Минковского. Тем не менее, в разделе 5.4 мы обсуждаем некоторые особенности, возникающие в скалярном секторе гравитации в эффективном действии. Во-первых, при размерности пространства-времени  $D > 2$  петлевой интеграл для массы скалярной моды расходится, что требует более аккуратной процедуры регуляризации, сохраняющей симметрии задачи, для дальнейшего анализа. Во-вторых, в пространстве dS эта масса уже имеет ненулевое значение на классическом уровне, причём как массивный, так и кинетический члены входят в действие с неправильным знаком. Это не является проблемой в классической теории, поскольку скалярные моды в ней не распространяются. В-третьих, мы утверждаем, что в нестационарном гравитационном фоне появляются расходящиеся члены, отсутствующие в плоском случае. Затем отдельно рассмотрен случай двумерного пространства-времени, где интегралы сходятся, и мы обнаружили, что в dS эффективная масса скалярной моды существенно отличается от её формального значения в плоском пространстве для лёгких полей материи, что указывает на существенно иной отклик на внешний фон в этих двух ситуациях.

## 5.1 Предварительные сведения и определения

Рассмотрим действие для гравитации, связанной с вещественным массивным скалярным полем, в  $D = d + 1$  измерениях:

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = -\frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{|g|} [R + 2\Lambda] + \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{|g|} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - M^2 \phi^2], \quad (5.4)$$

$$\Gamma_{\text{eff}} = S_{\text{cl}} + \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} .$$

Рис. 5.2: Эффективное действие

где  $\Lambda$ -член определяется через постоянную Хаббла  $H$  как  $\Lambda = \frac{(D-1)(D-2)}{2}H^2$ ,  $G$  — ньютоновская гравитационная постоянная, а ниже мы используем безразмерный параметр массы  $m = \frac{M}{H}$ . Мы разложим метрику на фон в расширяющемся регионе Пуанкаре (ЕРР) пространства  $dS$  и малое возмущение  $h_{\mu\nu}$  над ним:

$$g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \hat{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{H^2\eta^2} \text{diag}(1, -1, \dots, -1), \quad (5.5)$$

где  $\eta$  — конформное время, связанное с координатой времени инерциального наблюдателя соотношением  $\eta = \frac{1}{H}e^{-Ht}$ . Ниже мы также будем использовать возмущение с поднятыми индексами  $h^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g}^{\mu\alpha}\hat{g}^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$  и перенормированное поле  $\mathcal{h}_{\mu\nu} = H^2\eta^2 h_{\mu\nu}$ , так что  $g_{\mu\nu} = \frac{1}{H^2\eta^2} [\gamma_{\mu\nu} + \mathcal{h}_{\mu\nu}]$ ,  $\gamma_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$ . Поле  $\mathcal{h}_{\mu\nu}$  является более подходящей переменной для рассматриваемой задачи — например, уравнения движения для наивной линеаризованной массивной гравитации принимают вид обычного уравнения Клейна–Гордона для полей, получаемых из компонент  $\mathcal{h}_{\mu\nu}$  посредством линейных операций [130]. Мы рассматриваем гравитацию как классическую и квантуем только скалярное поле. Более правильно сказать, что гравитация рассматривается квазиклассически, так как мы считаем, что квантовые флуктуации поля материи влияют на метрику, а уравнение, которое описывает это влияние есть по существу уравнение движения в квазиклассическом приближении. По этой причине мы также должны разделить динамические возмущения метрики на контуре Келдыша и перейти к переменным

$$h_{cl}^{\mu\nu} = \frac{h_+^{\mu\nu} + h_-^{\mu\nu}}{2}, \quad h_q^{\mu\nu} = h_+^{\mu\nu} - h_-^{\mu\nu}. \quad (5.6)$$

Пропагаторы (1.17) позволяют нам пертурбативно найти келдышевское эффективное действие  $\Gamma_{\text{eff}}[h_{cl}, h_q]$ , которое является удобным инструментом для изучения динамики неравновесных систем [69, 131–134]. Для этого мы продолжаем интегрирование в (5.4) на контур  $\mathcal{C}$  (Рис. 1.1), преобразуем поля согласно (1.15) и (5.6), раскладываем функциональный интеграл по полям материи по степеням  $h_{\mu\nu}$  и вычисляем петлевые интегралы, используя пропагаторы (1.17). Нас интересуют вклады, изображенные на Рис. 5.2.

Как мы увидим, все диаграммы на Рис. 5.2 ( $S_{cl}$  обозначает действие Эйнштейна-Гильберта) важны для того, чтобы эффективное действие было калибровочно инвариантным в рассматриваемом порядке. Также могут потребоваться дополнительные контрчлены  $\delta_{\text{ren}}\Gamma$  для устранения УФ-расходимостей в этих петлях — мы обсудим их в следующем разделе и покажем, что первую диаграмму на Рис. 5.2 можно вычестить с помощью члена  $\delta_\Lambda\Gamma_{\text{eff}}$ , который перенормирует космологическую постоянную.

Уравнение движения (ЕОМ) для гравитона следует из эффективного действия  $\Gamma_{\text{eff}}[h_{cl}, h_q]$  как

$$\frac{\delta}{\delta h_q} \Gamma_{\text{eff}}[h_{cl}, h_q] \Big|_{h_q=0} = 0. \quad (5.7)$$

Чтобы вывести эти уравнения в линейном порядке по возмущениям метрики, нам нужны следующие взаимодействующие части в действии (5.4):

$$\Delta S = - \int d^D x \sqrt{|\hat{g}|} h_{cl}^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{cl-q} - \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{|\hat{g}|} h_q^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^{cl-cl} + \int d^D x \sqrt{|\hat{g}|} h_{cl}^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu|\alpha\beta} h_q^{\alpha\beta}, \quad (5.8)$$

где

$$T_{\mu\nu}^{cl-q} = -\frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} (\hat{g}^{\lambda\omega} \partial_\lambda \phi^{cl} \partial_\omega \phi^q - m^2 \phi^{cl} \phi^q) + \partial_\mu \phi^{cl} \partial_\nu \phi^q, \quad (5.9)$$

$$\Gamma_{\mu\nu|\alpha\beta} = \frac{1}{8} (\hat{g}_{\alpha\beta} \hat{g}_{\mu\nu} - 2 \hat{g}_{\mu\alpha} \hat{g}_{\nu\beta}) [\hat{g}^{\lambda\omega} \partial_\lambda \phi^{cl} \partial_\omega \phi^{cl} - m^2 \phi^{cl}{}^2] - \frac{1}{2} \hat{g}_{\alpha\beta} \partial_\mu \phi^{cl} \partial_\nu \phi^{cl} + \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\alpha} \partial_\beta \phi^{cl} \partial_\nu \phi^{cl} \quad (5.10)$$

и то же самое для  $T_{\mu\nu}^{cl-cl}$  с заменой  $q \rightarrow cl$  в (5.9). Заметим, что «голые» корреляционные функции (1.17) содержат тета-функции, в то время как в диаграмме типа «пузырь» на Рис. 5.2 в вершинах присутствуют производные по времени, поскольку они содержатся в тензоре энергии-импульса (5.9). Следовательно, в этой диаграмме могут возникать дельта-функции по времени<sup>1</sup>, поэтому мы будем собирать эти локальные вклады  $\Delta\Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{loc}}$  в полный оператор поляризации вместе с диаграммой типа «головастик» (с двумя хвостами) в одно выражение  $\Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{loc}}$  ниже, тогда как через  $\Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{bub}}$  мы будем обозначать нелокальные вклады, где все производные в вершинах действуют только на келдышевскую и спектральную функции пропагаторов (1.17) в этой диаграмме. Тогда эффективное ЕОМ в импульсном пространстве

<sup>1</sup>Заметим, что в операторном формализме производные по времени не коммутируют с оператором упорядочения по времени:  $\langle \mathcal{T} \partial_t \hat{A}(t) \hat{B}(t') \rangle \neq \partial_t \langle \mathcal{T} \hat{A}(t) \hat{B}(t') \rangle$ . Однако, если производные по времени входят в вершины, то в гамильтониане взаимодействия возникают дополнительные нековариантные слагаемые, которые восстанавливают соответствие с подходом функционального интеграла, где можно протаскивать производные по времени через функциональный интеграл [135].

по  $d$  пространственным координатам имеет вид:

$$-\frac{1}{2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{H^D \eta'^D} \Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{bub}}(\mathbf{k}|\eta', \eta) h^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \eta') + \Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{loc}}(\eta) h^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \eta) = \frac{1}{2} \langle T_{\alpha\beta}^{\text{cl-cl}} \rangle, \quad (5.11)$$

где член с источником в правой части соответствует первой диаграмме (“головастик”) на Рис. 5.2, и

$$\Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{loc}}(\eta) = -\frac{1}{2} \Delta \Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{loc}}(\eta) + \Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{tad}}(\eta), \quad (5.12)$$

$$\Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{bub}} + \Delta \Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{loc}} = \left\langle \frac{T_{\mu\nu}^{\text{cl-q}} + T_{\nu\mu}^{\text{cl-q}}}{2} T_{\mu\nu}^{\text{cl-cl}} \right\rangle. \quad (5.13)$$

В (5.13) под средним значением мы подразумеваем функциональный интеграл с действием Келдыша (1.21). Оператор  $\widehat{EOM}_{\mu\nu|\alpha\beta}$  в уравнении (5.11) возникает из действия Эйнштейна–Гильберта в (5.4). А именно, следуя [117, 123], мы разлагаем возмущение метрики по компонентам спиральности:

$$\begin{aligned} \hbar_{00} &= 2\Phi, \\ \hbar_{0k} &= ik_k Z + Z_k^T, \\ \hbar_{kl} &= -2\Psi \delta_{kl} - 2k_k k_l E + i(k_k W_j^T + k_l W_i^T) + \hbar_{kl}^{TT}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где  $k_k Z_k^T = k_k W_k^T = k_k \hbar_{kl}^{TT} = 0$  и  $\hbar_{kk}^{TT} = 0$ . Мы будем работать в калибровке  $\hbar_{0k} = 0$ . В этой калибровке линеаризованный тензор Эйнштейна  $G_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \hat{g}_{\mu\nu} R^{(1)} + (D-1)H^2 h_{\mu\nu}$  в произвольной размерности имеет вид:

$$\begin{aligned} G_{00}^{(1)} &= -\frac{(D-1)(D-2)}{2\eta^2} \hbar_{00} + \frac{D-2}{2\eta} \partial_{\eta} \hbar_{kk} + \frac{1}{2} \partial_l^2 \hbar_{kk} - \frac{1}{2} \partial_l \partial_k \hbar_{kl}, \\ G_{0i}^{(1)} &= -\frac{D-2}{2\eta} \partial_i \hbar_{00} - \frac{1}{2} \partial_{\eta} \partial_k \hbar_{ki} + \frac{1}{2} \partial_{\eta} \partial_i \hbar_{kk}, \\ G_{ij}^{(1)} &= -\frac{1}{2} \partial_i \partial_j \hbar_{00} + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j \hbar_{kk} - \frac{1}{2} \partial_{\eta}^2 \hbar_{ij} + \frac{D-2}{2\eta} \partial_{\eta} \hbar_{ij} + \frac{1}{2} \partial_k^2 \hbar_{ij} - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\partial_i \partial_k \hbar_{kj} + \partial_j \partial_k \hbar_{ki}) + \delta_{ij} \left[ \frac{(D-1)(D-2)}{2\eta^2} \hbar_{00} - \frac{D-2}{2\eta} \partial_{\eta} \hbar_{00} + \frac{1}{2} \partial_k^2 \hbar_{00} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \partial_{\eta}^2 \hbar_{kk} - \frac{D-2}{2\eta} \partial_{\eta} \hbar_{kk} - \frac{1}{2} \partial_l^2 \hbar_{kk} + \frac{1}{2} \partial_l \partial_k \hbar_{kl} \right]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Заметим, что (5.15) можно записать как действие линейного дифференциального оператора на возмущение метрики  $h_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{H^2 \eta^2} \hbar_{\mu\nu}$ :  $G_{\alpha\beta}^{(1)} = \widehat{EOM}_{\mu\nu|\alpha\beta} h^{\mu\nu}$ . В импульсном пространстве пространственные производные  $\partial_i$  в (5.15) должны быть отождествлены с  $ik_i$ , что задаёт дей-

ствие оператора  $\widehat{EOM}_{\mu\nu|\alpha\beta}$  в первой строке (5.11). Мы будем использовать уравнения (5.11)–(5.15) для корректного определения понятия индуцированной массы в следующих разделах.

### 5.1.1 Следствия изометрий де Ситтера

Попробуем понять, какие ограничения есть на эффективное уравнение движения, если мы предполагаем, что изометрии де Ситтера не нарушаются в петлевых поправках. В состоянии Банча–Дэвиса, после вычитания контрчлена  $\delta_\Lambda \Gamma_{\text{eff}}$  из  $\Gamma_{\text{eff}}$ , перенормирующего константу  $\Lambda$ , мы приходим к уравнению движения вида (5.11), но без «источника» в правой части и с перенормированной локальной частью оператора поляризации. Это уравнение инвариантно относительно калибровочного преобразования в нулевом порядке по возмущениям метрики  $\delta_\xi h^{\mu\nu} = -\hat{g}^{\mu\lambda} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\nu - \hat{g}^{\nu\lambda} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\mu$ . Чтобы получить общий вид линейного уравнения  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mu\nu|\alpha\beta} h^{\alpha\beta} = 0$ , которое уважает как группу изометрий dS  $SO(1, D)$ , так и калибровочную инвариантность, используем оператор Лихнеровича  $\Delta_L$ . Он действует на тензорные, векторные и скалярные поля следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta_L h_{\mu\nu} &= -\hat{\square} h_{\mu\nu} - 2\hat{R}_{\mu\alpha\nu\beta} h^{\alpha\beta} + \hat{R}_\mu^\alpha h_{\nu\alpha} + \hat{R}_\nu^\alpha h_{\mu\alpha}, \\ \Delta_L V_\mu &= \left( -\hat{\square} - \frac{2\Lambda}{D-2} \right) V_\mu, \\ \Delta_L \varphi &= -\hat{\square} \varphi,\end{aligned}\tag{5.16}$$

где  $\hat{R}_{\mu\alpha\nu\beta}$ ,  $\hat{R}_{\mu\nu}$  и  $\hat{\square}$  — это, соответственно, тензор Римана, тензор Риччи и ковариантный лапласиан на фоне dS. Действие  $\Delta_L$  в dS коммутирует с ковариантными производными, как объясняется, например, в [127, 136, 137]. Тогда мы можем искать оператор  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mu\nu|\alpha\beta}$  в явно dS-инвариантной форме:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{D}}_{\mu\nu|\alpha\beta} h^{\alpha\beta} &= A(\Delta_L) h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} B(\Delta_L) \left[ \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\lambda h_{\nu\lambda} + \hat{\nabla}_\nu \hat{\nabla}^\lambda h_{\mu\lambda} \right] + \\ &+ C(\Delta_L) \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \hat{\nabla}^\alpha \hat{\nabla}^\beta h_{\alpha\beta} + D(\Delta_L) \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu h^\alpha_\alpha + E(\Delta_L) \hat{g}_{\mu\nu} h^\alpha_\alpha + F(\Delta_L) \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}^\alpha \hat{\nabla}^\beta h_{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{5.17}$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  — это интегро-дифференциальные операторы, которые могут быть выражены через  $\Delta_L$  и его функции Грина. Также мы сразу полагаем  $D = F$  из-за требуемой симметрии при перестановке пар индексов  $(\mu\nu) \leftrightarrow (\alpha\beta)$ .

Ниже мы покажем, что инвариантное линеаризованное эффективное уравнение движения может включать лишь два независимых оператора, которые мы обозначим как  $\widehat{\mathcal{P}}_{\mu\nu|\alpha\beta}^{tt}$ ,  $\widehat{\mathcal{P}}_{\mu\nu|\alpha\beta}^s$ . Они связаны, соответственно, с проекторами на поперечно-бесследовую часть гравитона и на скалярную моду гравитона. А именно, можно проверить, используя явные

выражения, приведённые ниже в (5.21) и (5.22), что оператор  $\widehat{EOM}_{\mu\nu|\alpha\beta}$  из (5.11) можно записать как

$$\begin{aligned} \widehat{EOM}_{\mu\nu|\alpha\beta} &= \\ &= \left( \Delta_L + 2(D-1)H^2 \right) \left[ \widehat{\mathcal{P}}_{\mu\nu|\alpha\beta}^{tt} - \frac{D-2}{D-1} \frac{(\Delta_L + (D-1)H^2)^2}{(\Delta_L + DH^2)(\Delta_L + 2(D-1)H^2)} \widehat{\mathcal{P}}_{\mu\nu|\alpha\beta}^s \right], \end{aligned} \quad (5.18)$$

так что эффективное линейное EOM вида  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mu\nu|\alpha\beta} h^{\alpha\beta} = 0$  имеет вид:

$$\widehat{EOM}_{\mu\nu|\alpha\beta} h^{\alpha\beta} + A(\Delta_L) \widehat{\mathcal{P}}_{\mu\nu|\alpha\beta}^{tt} h^{\alpha\beta} + E(\Delta_L) \widehat{\mathcal{P}}_{\mu\nu|\alpha\beta}^s h^{\alpha\beta} = 0. \quad (5.19)$$

Действительно, хотя в (5.17) у нас есть 5 независимых коэффициентов, требование калибровочной инвариантности накладывает ещё три ограничения:

$$\begin{cases} 2A - \left( \Delta_L + \frac{4\Lambda}{D-2} \right) B = 0, \\ B + 2D - 2C \left( \Delta_L + \frac{2\Lambda}{D-2} \right) = 0, \\ E - D \left( \Delta_L + \frac{2\Lambda}{D-2} \right) = 0, \end{cases} \quad (5.20)$$

так что остаётся 2 независимых коэффициента и, следовательно, две независимые dS-инвариантные и калибровочно-инвариантные тензорные структуры, действующие на  $h_{\mu\nu}$ . Первая структура, отвечающая проекции на поперечно-бесследовую часть гравитона  $h_{\mu\nu}^{tt} = \widehat{\mathcal{P}}_{\mu\nu|\alpha\beta}^{tt} h^{\alpha\beta}$ , может быть зафиксирована двумя дополнительными условиями  $A = 1$  и  $\hat{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{tt} = \hat{g}^{\mu\nu} \widehat{\mathcal{P}}_{\mu\nu|\alpha\beta}^{tt} h^{\alpha\beta} = 0$ . Эти дополнительные ограничения приводят к следующему набору коэффициентов для этого проектора (мы выражаем космологическую постоянную через параметр Хаббла):

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{\Delta_L + 2(D-1)H^2}, & C &= \frac{\frac{D-2}{D-1}}{(\Delta_L + DH^2)(\Delta_L + 2(D-1)H^2)}, \\ F &= -\frac{1}{D-1} \frac{1}{\Delta_L + DH^2}, & E &= -\frac{1}{D-1} \frac{\Delta_L + (D-1)H^2}{\Delta_L + DH^2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Второй независимый оператор  $\widehat{\mathcal{P}}_{\mu\nu|\alpha\beta}^s$  можно записать в следующем простом виде:

$$\widehat{\mathcal{P}}_{\mu\nu|\alpha\beta}^s = \left( \hat{g}_{\mu\nu} - \frac{\hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu}{-\Delta_L - (D-1)H^2} \right) \left( \hat{g}_{\alpha\beta} - \frac{\hat{\nabla}_\alpha \hat{\nabla}_\beta}{-\Delta_L - (D-1)H^2} \right). \quad (5.22)$$

Используя интуицию плоского пространства, где  $\Delta_L \sim k^2$ , мы можем заметить, что ИК-поведение  $A(\Delta_L)$  и  $E(\Delta_L)$  даёт нам эффективно коэффициенты  $m_g$  и  $\epsilon_{gh}$  в (5.1). Следовательно, когда все симметрии соблюдаются в ходе наших операций, достаточно вычислить

эффективную массу, например, только для сектора гравитационных возмущений  $\mathcal{H}_{\mu\nu}^{TT}$ , чтобы восстановить весь «член Фирца–Паули» в индуцированной гравитации на больших расстояниях. Наконец, еще раз подчеркнем, что утверждения этого раздела строго применимы исключительно для начального состояния Банча–Дэвиса и для расширяющегося региона Пуанкаре dS, поскольку в глобальном dS изометрии нарушаются на петлевом уровне [26, 108].

## 5.2 Эффективное действие

Найдём выражение для эффективного действия  $\Gamma_{\text{eff}}$ . Анализ нелокальной части  $\Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{bub}}$  приведён в Приложении F.

Чтобы получить выражение для диаграммы типа «головастик», мы усредняем член второго порядка (5.10) и получаем

$$\begin{aligned}
\Pi_{00|00}^{\text{tad}} &= \frac{1}{H^2\eta^2} \frac{1}{2} \int_p \partial_\eta \partial_{\eta'} F \Big|_{\eta'=\eta} - \frac{1}{8H^4\eta^4} \langle \mathcal{L}(\eta) \rangle =: \frac{1}{H^2\eta^2} \pi_1(\eta), \\
\Pi_{00|0k}^{\text{tad}} &= \Pi_{0i|kl}^{\text{tad}} = 0, \\
\Pi_{00|kl}^{\text{tad}} &= -\frac{1}{8H^4\eta^4} \langle \mathcal{L}(\eta) \rangle \delta_{kl} + \frac{1}{4H^2\eta^2} \int_p \left[ \partial_\eta \partial_{\eta'} F \Big|_{\eta'=\eta} - \frac{1}{D-1} p^2 F \right] \delta_{kl} =: \frac{1}{H^2\eta^2} \pi_2(\eta) \delta_{kl}, \\
\Pi_{0i|0l}^{\text{tad}} &= -\frac{1}{H^2\eta^2} \pi_2(\eta) \delta_{il}, \\
\Pi_{ij|kl}^{\text{tad}} &= \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{H^4\eta^4} \langle \mathcal{L}(\eta) \rangle + \frac{1}{H^2\eta^2} \frac{4}{D-1} \int_p p^2 F \right] \times (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) = \\
&=: \frac{1}{H^2\eta^2} \pi_3(\eta) (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}),
\end{aligned} \tag{5.23}$$

где  $\int_p = \int \frac{d^{D-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{D-1}}$ , а функция Келдыша  $F(\mathbf{p}|\eta, \eta')$  (мы вводим такое обозначение этого пропагатора в этой главе для краткости в записи выражений, а также опускаем аргументы в выражениях под интегралами выше) входит в (5.23) при совпадающих моментах времени  $\eta = \eta'$  поскольку в этой диаграмме есть лишь одна внутренняя точка — ниже мы прокомментируем УФ-расходимости в этих выражениях. Кроме того, мы ввели усреднённый лагранжиан

$$\langle \mathcal{L}(\eta) \rangle = H^2\eta^2 \int_p \left[ \partial_\eta \partial_{\eta'} F \Big|_{\eta'=\eta} - \left( p^2 + \frac{m^2}{\eta^2} \right) F(\mathbf{p}|\eta, \eta) \right]. \tag{5.24}$$

Теперь, рассматривая члены, возникающие из (5.13) когда производные по времени действу-

ют на тета-функции пропагаторов (1.17), мы получаем:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_{00|00}^{\text{loc}}(\eta) &= \frac{1}{2} \frac{1}{H^2\eta^2} \int_p \partial_\eta \partial_{\eta'} F \Big|_{\eta'=\eta}, \quad \Delta\Pi_{00|0k}^{\text{loc}}(\eta) = \Delta\Pi_{0i|kl}^{\text{loc}}(\eta) = 0, \\ \Delta\Pi_{0i|0k}^{\text{loc}}(\eta) &= \frac{1}{H^2\eta^2} \frac{1}{2(D-1)} \delta_{ik} \int_p p^2 F(\mathbf{p}|\eta, \eta), \quad \Delta\Pi_{00|kl}^{\text{loc}}(\eta) = \frac{1}{2} \frac{1}{H^2\eta^2} \delta_{kl} \int_p \partial_\eta \partial_{\eta'} F \Big|_{\eta'=\eta}, \\ \Delta\Pi_{ij|kl}^{\text{loc}}(\eta) &= \frac{1}{2} \frac{1}{H^2\eta^2} \delta_{ij} \delta_{kl} \int_p \partial_\eta \partial_{\eta'} F \Big|_{\eta'=\eta}.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Наконец, суммируя все локальные вклады (5.23) и (5.25), мы находим из (5.12):

$$\begin{aligned}\Pi_{00|00}^{\text{loc}}(\eta) &= \frac{1}{H^2\eta^2} \frac{1}{4} \langle T_{00}^{cl-cl} \rangle, \quad \Pi_{ij|00}^{\text{loc}}(\eta) = -\frac{1}{H^2\eta^2} \frac{1}{4} \langle T_{ij}^{cl-cl} \rangle, \quad \Pi_{0i|0l}^{\text{loc}}(\eta) = -\frac{1}{H^2\eta^2} \frac{1}{4} \langle T_{00}^{cl-cl} \rangle \delta_{il}, \\ \Pi_{ij|kl}^{\text{loc}}(\eta) &= \frac{1}{H^2\eta^2} \left\{ \pi_3(\eta) (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{4} \int_p \partial_\eta \partial_{\eta'} F \Big|_{\eta'=\eta} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\}.\end{aligned}\quad (5.26)$$

Имея явные выражения для всех интересующих нас частей эффективного действия, мы можем записать его следующим образом:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{eff}} &= S_{cl} - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{d^D x}{H^D \eta^D} h_q^{\alpha\beta} \langle T_{\alpha\beta}^{cl-cl} \rangle - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\eta}{H^D \eta^D} \int_\eta^\infty \frac{d\eta'}{H^D \eta'^D} \int_{\mathbf{k}} h_{cl}^{\mu\nu}(\eta', \mathbf{k}) \Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{bub}}(-\mathbf{k}|\eta', \eta) h_q^{\alpha\beta}(\eta, -\mathbf{k}) + \\ &+ \int_0^\infty \frac{d\eta}{H^D \eta^D} \int_{\mathbf{k}} h_{cl}^{\mu\nu}(\eta, \mathbf{k}) \Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{loc}}(\eta) h_q^{\alpha\beta}(\eta, -\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (5.27)$$

Подчеркнём, что все локальные вклады (5.12) и усреднённый лагранжиан (5.24) содержат функцию Келдыша в совпадающих пространственно-временных точках, которая является УФ-расходящейся величиной и требует аккуратной процедуры регуляризации. Хотя само-согласованное исследование эффективной теории требует зафиксировать все контрчлены, в конце этого раздела мы определяем лишь контрчлен к космологической постоянной, чего достаточно при вычислении эффективной массы. Тем не менее, все члены в (5.12) необходимы для калибровочной инвариантности. Действительно, можно проверить калибровочную симметрию этого действия, используя преобразование в нулевом и первом порядках по возмущению:

$$\delta_\xi h^{\mu\nu} = -\hat{g}^{\mu\lambda} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\nu - h^{\nu\beta} \hat{g}_{\alpha\beta} \hat{g}^{\mu\lambda} \hat{\nabla}_\lambda \xi^\alpha - \hat{g}^{\mu\lambda} \Gamma_{\lambda\omega}^{(1)\nu} \xi^\omega + \{\mu \leftrightarrow \nu\}, \quad (5.28)$$

где  $\Gamma_{\lambda\omega}^{(1)\nu}$  — это поправки первого порядка к точным символам Кристоффеля для метрики (5.5). Инвариантность в порядке  $\mathcal{O}(\xi)$  обеспечивается ковариантным сохранением тензора энергии-импульса. В Приложении G мы показываем, как удостовериться в калибровочной

инвариантности в порядке  $\mathcal{O}(\|h_q \cdot \xi\|)$ , используя выражения для операторов поляризации, приведённые в этом разделе.

В случае ВД-состояния мы должны иметь  $\langle T_{\mu\nu}^{cl-cl} \rangle = \delta\lambda \hat{g}_{\mu\nu}^2$ , так что первый член с “источником” в (5.27) относится к перенормировке космологической постоянной:  $\Lambda_{\text{gen}} = \Lambda + 8\pi G \delta\lambda$ . Более точно, вычтем следующий контрчлен из однопетлевого ответа (5.27), который мы также записываем через поля (5.6) после келдышевского поворота:

$$\begin{aligned} \delta\Lambda \Gamma_{\text{eff}} = & - \int d^D x \sqrt{g(x)} \delta\lambda = - \int d^D x \sqrt{\hat{g}} \delta\lambda - \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{\hat{g}(x)} \hat{g}_{\mu\nu} h_q^{\mu\nu} \times \delta\lambda - \\ & - \frac{1}{4} \int d^D x \sqrt{\hat{g}} (\hat{g}_{\mu\nu} \hat{g}_{\alpha\beta} - \hat{g}_{\mu\alpha} \hat{g}_{\nu\beta} - \hat{g}_{\mu\beta} \hat{g}_{\nu\alpha}) h_{cl}^{\mu\nu} h_{\alpha\beta}^q \times \delta\lambda. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Как мы видим, эта перенормировка затрагивает лишь локальные вклады из петель и, если положить

$$\delta\lambda = -\frac{1}{2} \langle \mathcal{L} \rangle - H^2 \eta^2 \frac{1}{D-1} \int_p p^2 F(\mathbf{p}|\eta, \eta), \quad (5.30)$$

то она устраняет «источник» и большую часть локальных частей в (5.26):

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{00|00}^{\text{loc}}(\eta) = 0, \quad \tilde{\Pi}_{ij|00}^{\text{loc}}(\eta) = 0, \quad \tilde{\Pi}_{0i|0l}^{\text{loc}}(\eta) = 0, \\ \tilde{\Pi}_{ij|kl}^{\text{loc}}(\eta) = \frac{1}{H^2 \eta^2} \left\{ \tilde{\pi}_3(\eta) (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{4} \int_p \partial_\eta \partial_{\eta'} F \Big|_{\eta'=\eta} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

где

$$\tilde{\pi}_3 = \frac{1}{4} \frac{1}{D-1} \int_p p^2 F(\mathbf{p}|\eta, \eta). \quad (5.32)$$

### 5.3 Эффективная масса тензорной моды

Имея выражения для квантовых поправок к индуцированному гравитационному действию в терминах конкретных интегралов, мы можем более детально исследовать эффективное уравнение движения. В случае тензорного сектора  $\mathcal{h}_{00} = \mathcal{h}_{0i} = 0$ ,  $\mathcal{h}_{ij} = \mathcal{h}_{ij}^{TT}$  единственная ненулевая компонента уравнения (5.11) имеет вид (обозначения в нелокальной части см. в Приложении F):

$$\nabla_\eta \partial_\eta \mathcal{h}_{ij}^{TT} + k^2 \mathcal{h}_{ij}^{TT} - 32\pi G \int_\eta^\infty \frac{d\eta'}{H^{D-2} \eta'^{D-2}} e_5(\mathbf{k}|\eta, \eta') \mathcal{h}_{ij}^{TT}(\mathbf{k}, \eta') + 64\pi G \tilde{\pi}_3(\eta) \mathcal{h}_{ij}^{TT}(\mathbf{k}, \eta) = 0. \quad (5.33)$$

<sup>2</sup>Это утверждение не является тривиальным и может быть явно показано лишь в схемах регуляризации, сохраняющих изометрии dS, таких как размерная регуляризация или метод расщепления точек [138–141]. Это отдельная интересная тема – даже в тепловом состоянии ситуация гораздо более тонкая для пространств с горизонтами [142].

Мы видим, что (5.33) является интегро-дифференциальным уравнением, поэтому определение понятия массы требует аккуратности. Следуя подходу [143], где была введена эффективная масса фотона в системах вне теплового равновесия, мы разложим интегральную часть уравнения (5.33) по производным по времени от  $\mathcal{h}_{ij}^{TT}$ . А именно, если обозначить

$$\begin{aligned}\Gamma^{\text{bub}}(\eta, \eta') &= -32\pi G \int_{\eta'}^{\infty} \frac{d\eta''}{H^{D-2}\eta''^{D-2}} e_5(\mathbf{k}|\eta, \eta''), \\ \partial_{\eta'} \Gamma^{\text{bub}}(\eta, \eta') &= 32\pi G \frac{1}{H^{D-2}\eta'^{D-2}} e_5(\mathbf{k}|\eta, \eta')\end{aligned}\quad (5.34)$$

и затем проинтегрировать (5.33) по частям, то мы приходим к

$$\begin{aligned}\left\{ \nabla_{\eta} \partial_{\eta} + k^2 - 32\pi G \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{H^{D-2}\eta'^{D-2}} e_5(\mathbf{k}|\eta, \eta') + 64\pi G \tilde{\pi}_3(\eta) \right\} \mathcal{h}_{ij}^{TT}(\mathbf{k}, \eta) - \\ + \int_{\eta}^{\infty} d\eta' \Gamma^{\text{bub}}(\eta, \eta') \partial_{\eta'} \mathcal{h}_{ij}^{TT}(\mathbf{k}, \eta') = 0.\end{aligned}\quad (5.35)$$

Можно продолжить эту процедуру и разложить нелокальную часть эффективного действия по многократным производным по времени от  $\mathcal{h}_{ij}^{TT}(\mathbf{k}, \eta)$ . Тогда для медленно меняющегося поля  $\mathcal{h}_{ij}^{TT}(\mathbf{k}, \eta)$  получаем уравнение Клейна–Гордона типа (1.6):

$$\nabla_{\eta} \partial_{\eta} \mathcal{h}_{ij}^{TT} + \left[ k^2 + \frac{m_{TT}^2(k, \eta)}{\eta^2} \right] \mathcal{h}_{ij}^{TT} \simeq 0. \quad (5.36)$$

Последнее уравнение позволяет нам определить эффективную массу гравитона так же, как это делают для неравновесных систем [143]:

$$m_{TT}^2 = -32\pi G \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \eta^2 \times \left[ \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{H^{D-2}\eta'^{D-2}} e_5(\mathbf{k}|\eta, \eta') - 2\tilde{\pi}_3(\eta) \right]. \quad (5.37)$$

В общем случае порядок пределов в (5.37) очень важен. В частности, в плоском пространстве другой порядок приводит к немедленному нулевому значению дебаевской массы [116, 144]. Мы определяем пределы так, как это обычно делается в физике конденсированного состояния [143, 145], где такой порядок также физически обоснован. Однако легко видеть, что в нашем случае величина  $m_{TT}^2(k, \eta)$  фактически зависит от dS-инвариантной переменной  $k\eta$ , так что единственный предел, который нам нужно взять, — это нулевой предел по физическому импульсу  $k\eta \rightarrow 0$ . Можно также сказать, что величина (5.37) определяет сдвиг полюса в пропагаторе соответствующей моды гравитона.

На первый взгляд может показаться, что интегрирование по временному интервалу от  $\eta$  до  $\infty$  может привести какие-то инфракрасные эффекты в массу  $m_{TT}^2$ , а локальная

поправка  $\tilde{\pi}_3$  лишь убирает некоторые ультрафиолетовые расходимости. Однако по теории возмущений (см. [116] и Приложение H) можно получить формулу

$$\partial_{p^2} F(\mathbf{p}|\eta, \eta) = -2 \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{H^{D-2}\eta'^{D-2}} F(\mathbf{p}|\eta, \eta') \rho(\mathbf{p}|\eta, \eta'), \quad (5.38)$$

которая сводит первый член в правой части (5.37) к аналогичному локальному вкладу, как и второй. Теперь мы используем, что  $\partial_{p^2} F(\mathbf{p}|\eta, \eta) = \frac{1}{2p} \partial_p F$ , и непосредственно находим в пределе  $k \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{H^{D-2}\eta'^{D-2}} e_5(\mathbf{k}|\eta, \eta') = \\ &= \frac{2}{D(D-2)} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{H^{D-2}\eta'^{D-2}} \int_p \left( p^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{p})^2}{k^2} \right)^2 F(\mathbf{p}|\eta, \eta') \rho(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta, \eta') = \\ & \stackrel{k \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{D(D-2)} \int_p \left( p^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{p})^2}{k^2} \right)^2 \partial_{p^2} F(\mathbf{p}|\eta, \eta) = \\ &= -\frac{1}{D(D-2)} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^{\infty} dp p^{D+2} \left[ 1 - \frac{2}{D-1} + \frac{3}{D^2-1} \right] \frac{1}{2p} \partial_p F = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d (D-1)} \int_0^{\infty} dp p^D F(\mathbf{p}|\eta, \eta) = \frac{1}{2} \frac{1}{D-1} \int_p p^2 F(\mathbf{p}|\eta, \eta), \end{aligned} \quad (5.39)$$

где в третьей строке мы проинтегрировали по углам, а затем по частям по модулю импульса. В итоге мы берём перенормированное значение  $\tilde{\pi}_3$  (5.32) и находим из определения (5.37), что масса тензорного возмущения метрики обращается в нуль:

$$m_{TT}^2 = 0. \quad (5.40)$$

Как было отмечено выше, мы полагаем, что существует особая причина, по которой в dS не происходит генерации массы для фотона [116] и гравитона, тогда как было доказано, что в AdS<sub>4</sub> может возникать масса гравитона [127, 128]<sup>3</sup>. А именно, масса калибровочных полей генерируется, если в нелокальной части собственной энергии появляется полюс, соответствующий голдстоуновскому бозону, как на Рис. 5.1. Необходимым условием для этого является присутствие данного бозона в тензорном произведении представлений вида  $D(E_1, 0) \otimes D(E_2, 0)$ , где  $D(E, 0)$  — бесконечномерное, неприводимое, унитарное представление положительного веса группы изометрий пространства вложения (UIR), соответствующее физическим состояниям скалярной КТП. Здесь  $E$  и  $s$  соответствуют минимальной

<sup>3</sup>Строго говоря, квантовая теория поля в глобальном AdS плохо определена и содержит нелокальные ультрафиолетовые расходимости [146, 147]. Однако она служит нам полезным примером для исследования свойств КТП в различных пространствах с большим числом симметрий.

энергии и угловому моменту (спину) данного представления, так что остальные состояния в нём получаются действием соответствующих операторов рождения [125]. В работах [127, 128] было показано, что в собственной энергии гравитона при определённых граничных условиях действительно присутствует вектор Голдстоуна и, следовательно, в  $\text{AdS}_4$  может генерироваться масса гравитона. Чтобы завершить рассмотрение массы фотона в [116] с этой точки зрения, в Приложении J мы исследуем скалярную КЭД в  $\text{AdS}_4$  с радиусом кривизны  $L$ , следуя духу работы [127], чтобы установить различия между теориями поля в AdS и dS. В отличие от AdS, для группы изометрий dS в тензорном произведении UIR [129] нет таких голдстоуновских бозонов, поэтому отсутствие массы фотона и гравитона является ожидаемым. Однако dS не является ни стационарным, ни устойчивым фоном, так что было бы довольно наивно рассуждать таким образом, и лучше использовать неравновесный подход, который мы применяем в этой статье. Более того, в dS имеется много ИК-особенностей в петлевых поправках [23, 39, 74, 148, 149], которые могут существенно повлиять на результат.

## 5.4 Обсуждение скалярного сектора гравитации

### 5.4.1 Общие замечания

Рассматривая задачу только в тензорном секторе гравитации, мы можем получить некоторую информацию лишь о коэффициенте  $A(\Delta_L)$  в (5.19). Чтобы сказать что-либо о  $E(\Delta_L)$ , необходимо включить в рассмотрение другие моды возмущения метрики (5.14). Например, если наивно положить  $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} \hat{g}_{\mu\nu}$ , то из (5.19) получаем:

$$\Gamma_{\text{eff}} \propto \int \left[ \sigma (\Delta_L + DH^2) \sigma + 32\pi G \frac{D-1}{D-2} \times \sigma \cdot \left( \frac{\Delta_L + DH^2}{\Delta_L + (D-1)H^2} \right)^2 E(\Delta_L) \cdot \sigma \right]. \quad (5.41)$$

Сделаем несколько наблюдений. Во-первых, мы видим, что  $E(\Delta_L)$  определяет сдвиг «массы»  $DH^2$ , которая у конформного параметра  $\sigma$  уже имеется. Во-вторых, принципиально важно, что и кинетический, и массовый члены входят в эффективное действие со знаком, соответствующим духовой степени свободы. На классическом уровне при наличии классической материи это приводит к джинсовской нестабильности [117, 123] — однако неудивительно, что без материи классические уравнения движения не имеют нетривиальных решений (не выполняются другие ограничения из (5.15)): в этом случае поле  $\sigma$  не является динамическим. С другой стороны, никто точно не знает, что происходит в гравитации, модифицированной петлевыми эффектами, поскольку, например, в наивной массивной гравитации [130] скалярные духовые степени свободы становятся динамическими. Чтобы ответить на эти вопросы,

необходимо более тщательное исследование  $\Gamma_{\text{eff}}$ .

Чтобы найти члены, которые дают вклад в  $E(\Delta_L)$ , удобно выразить диаграмму типа “пузырь” через коммутатор тензоров энергии-импульса в операторном формализме:

$$\Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{bub}}(\mathbf{k}|\eta, \eta') = -\frac{1}{8} \left\langle \text{BD} \left| [T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \eta), T_{\alpha\beta}(-\mathbf{k}, \eta')] \right| \text{BD} \right\rangle. \quad (5.42)$$

Тогда, используя соотношения, выведенные в Приложении I, можно записать поправку к “массивному” члену для  $\sigma$ , которая задаётся следом собственной энергии по индексам  $\mu = \nu$  и  $\alpha = \beta$  (до взятия предела  $k\eta \rightarrow 0$ ):

$$\delta m_\sigma^2 \propto \int_\eta^\infty \frac{d\eta'}{H^{D-2}\eta'^{D-2}} [D(D-2) \Pi_{00|00}(\mathbf{k}|\eta, \eta') + \Pi_{\Delta T|\Delta T}(\mathbf{k}|\eta, \eta')] - 2\Pi_{ii|kk}^{\text{loc}}, \quad (5.43)$$

где  $\Pi_{\Delta T|\Delta T}$  обозначает коммутатор вида (5.42) для  $\Delta T$ , определённого в Приложении I.1. Величина (5.43) УФ-расходится даже в плоском пространстве, не говоря уже о проблемах корректной перенормировки в  $dS^4$  [150–153]. Однако, ситуация в случае искривленного пространства еще более трудная – в выражении (5.43) присутствуют УФ-расходимости, которых нет в плоском пространстве. Появление таких особенностей видно, если внимательно рассмотреть первый член в (5.43) в пределе  $k \rightarrow 0$  в  $\mathbf{x}$ -пространстве:

$$\begin{aligned} & D(D-2) \int_\eta^\infty \frac{d\eta'}{H^{D-2}\eta'^{D-2}} \Pi_{00|00}(\mathbf{0}|\eta, \eta') \propto \\ & \propto \int_\eta^\infty \frac{d\eta'}{\eta'^{D-2}} \left\langle \text{BD} \left| \left[ T_{00}(\mathbf{0}, \eta), \int_{\mathbf{x}} T_{00}(\mathbf{x}, \eta') \right] \right| \text{BD} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Обычно интеграл от  $T_{00}$  является сохраняющимся зарядом (полной энергией), который коммутирует с любым оператором. Например, ковариантное сохранение электрического тока  $\hat{\nabla}_\mu J^\mu = \partial_\eta J_0 + \frac{D}{\eta} J^0 - \partial_i J_i = 0$  влечёт, что интеграл  $J_0$  по координатному пространству равен  $J_0 = \frac{1}{\eta^D} \times \text{const}$ . Следовательно, в любом коммутаторе вида (5.44) с электрическим зарядом зависимость заряда от времени выносится как постоянный множитель, и результат оказывается в точности равным нулю, что приводит к нулевой дебаевской массе в  $dS$  [116]. В отличие от этого, условие ковариантного сохранения для тензора энергии-импульса включает дополнительный член  $\Delta T$  (I.2), что делает аналогию с электрическим зарядом неприменимой. Это наблюдение связано с тем, что энергия (по крайней мере определяемая как интеграл от  $T_{00}$ )

<sup>4</sup>На самом деле, будучи локальным явлением на малых расстояниях, УФ-перенормировка должна быть одной и той же для любого гравитационного фона по крайней мере в ведущем порядке. Тем не менее, чтобы получить корректные значения для ИК-величин, следует сохранять симметрии теории на каждом шаге вычисления, что, например, запрещает наивную схему УФ-обрезания в де Ситтере.

не сохраняется в нестационарном фоне и нетривиально коммутирует с другими операторами. Поэтому, хотя в плоском пространстве вклад  $\Pi_{00|00}$  в  $\delta m_\sigma^2$  тождественно равен нулю, в dS мы получаем:

$$\begin{aligned} \delta m_\sigma^2 &\sim \int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} \int \frac{d^{D-1}\boldsymbol{\xi}}{(2\pi)^{D-1}} \text{Im} \{t_{00}(\xi) t_{00}(\xi\tau)\} + \dots, \\ t_{00}(\xi) &\equiv \left( \frac{D-1}{2} h_\nu(\xi) + \xi h'_\nu(\xi) \right)^2 + (\xi^2 + m^2) h_\nu^2(\xi), \\ \tau &= \frac{\eta'}{\eta}, \quad \boldsymbol{\xi} = \eta \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Используя моды (1.7), можно проверить, что при  $D > 2$  в УФ-области интегрирования возникают расходимости. Поэтому. Мы оставляем обсуждение вопросов, поднятых в этом подразделе, для будущей работы, а ниже исследуем простейший случай двумерного пространства-времени.

#### 5.4.2 Двумерное пространство-время

Хорошо известно, что в  $2D$  действие Эйнштейна–Гильберта является топологическим, и единственной независимой компонентой возмущения метрики является вейлевский параметр  $\sigma$ . Более того, кинетический член возникает из петель и также имеет «духовый» знак в эффективном действии, если учитывать лишь материальное поле с положительным центральным зарядом  $c$  [154, 155] — ниже мы добавим массовый член в действие также со знаком как у духа, таким, как он появляется в уравнении КГ для  $\sigma$  как стандартная масса, предполагая  $c > 0$ . Кроме того, можно видеть, что диаграмма типа “головастик” в  $2D$  даёт вклад только в перенормировку космологической постоянной, а петлевая диаграмма задаётся коммутатором вида (5.42) двух следов тензора энергии-импульса.

В плоском пространстве, при определении  $m_\sigma^2$  так же, как в предыдущем разделе, гармоник в виде для плоских волн  $f_{\mathbf{p}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^4} \sqrt{p^2 + M^2}} e^{-i\sqrt{p^2 + M^2}t}$  (массу здесь мы измеряем в единицах  $H$ ) получаем:

$$m_\sigma^2 = \frac{1}{H^2} \frac{4M^4}{\pi} \int_{-\infty}^t dt' \int_0^\infty dp \text{Im} \{f_{\mathbf{p}}(t') f_{\mathbf{p}}(t) f_{\mathbf{p}}^*(t) f_{\mathbf{p}}^*(t')\} = \frac{m^2}{2\pi}. \quad (5.46)$$

Такой вклад в плоском пространстве в квадратичную часть эффективного действия аналогичен вкладу так называемого действия Мабучи [121, 156] для римановых многообразий с

евклидовой сигнатурой:

$$\begin{aligned}
S_{\text{Mabuchi}} [g_{\mu\nu}, \hat{g}_{\mu\nu}] &= \int \sqrt{|\hat{g}|} \left( \frac{1}{\pi A} \sigma e^{2\sigma} + \dots \right), \\
S_{\text{grav}} [g_{\mu\nu}, \hat{g}_{\mu\nu}] &\equiv \frac{1}{2} \log \frac{\det(-\square + M^2)}{\det(-\hat{\square} + M^2)} = \\
&= \frac{c}{96\pi} \int R \frac{1}{\square} R + \frac{M^2 A}{4} S_{\text{Mabuchi}} [g_{\mu\nu}, \hat{g}_{\mu\nu}] + \mathcal{O}(M^4),
\end{aligned} \tag{5.47}$$

где  $A$  – площадь римановой поверхности, на которой определено это действие. Оно непертурбативно по  $\sigma$ , и имеет ненулевой квадратичный вклад при разложении. Однако, подходы, которые приводят к выражению (5.47) основаны на фейнмановском функциональном интеграле и не подходят для неконформных теорий в нестационарном гравитационном фоне.

Для dS имеем (здесь  $h(\xi)$  обозначает гармоническую функцию (1.7) в общем виде для тяжелых либо легких полей):

$$m_\sigma^2 = -\frac{4m^4}{\pi} \int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau} \int_0^\infty d\xi \text{Im} \{ h^2(\xi) h^{*2}(\xi\tau) \}. \tag{5.48}$$

Этот интеграл сходится и может быть вычислен численно (см. Рис. 5.3). Интересно, что в dS результат существенно отклоняется при малых массах скалярного поля. Это говорит о том, что ИК-поведение лёгкого скалярного поля в dS приводит к значительному отклику в длинноволновом разложении эффективного действия. Между тем, на Рис. 5.3 видно, что при большой массе скалярного поля значение  $m_\sigma^2$  стремится к плоскому значению, что неудивительно: очень тяжёлые поля отщепляются и не чувствуют эффектов внешнего фона.

Подытоживая, мы обсудили в данной главе концепцию массивных членов в эффективном гравитационном действии, которые индуцируются квантовыми полями материи на фоне dS. Хотя известно, что начальное состояние квантовой теории поля в dS должно распадаться из-за рождения частиц [144, 157]:  $\langle \text{Out} | \text{In} \rangle \neq 1$ , полноценное понимание физических последствий этого явления требует рассмотрения отклика конкретных систем на внешние воздействия. Более того, эволюция возмущений метрики в присутствии классического тензора энергии-импульса может многое сказать нам о физике ранней Вселенной [117, 123], при том что в физическом сообществе также хорошо известно, что петлевые поправки в dS могут приводить к резким модификациям древесных результатов [23, 27, 29, 87, 124]. Оказывается, что тензорная часть возмущений метрики, ассоциированная с гравитоном, не приобретает массу в однопетлевом эффективном действии. Было бы очень интересно обобщить наши на-

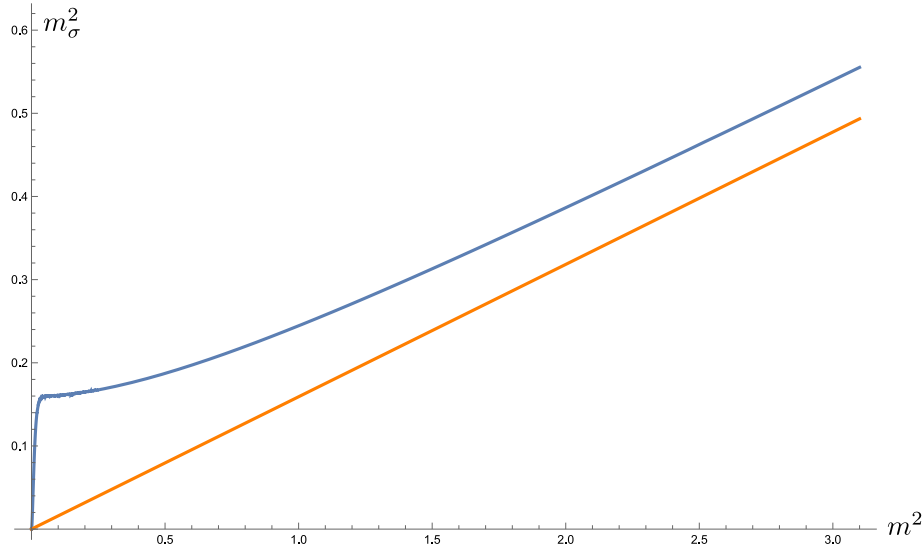


Рис. 5.3: Зависимость  $m_\sigma^2$  от квадрата массы скалярного поля. Оранжевая линия изображает значение в плоском пространстве-времени. Все массы измеряются в единицах параметра Хаббла.

блюдения на самодействующие теории, где необходимо учитывать петлевые поправки [23]. Кроме того, по физическим соображениям следует исследовать существенно более широкий класс различных начальных состояний. Действительно, вакуум Банча–Дэвиса сохраняет наибольшее число симметрий задачи, тогда как в любой реальной ситуации большинство симметрий нарушено. Например, в контексте ранней Вселенной можно рассмотреть термальное состояние с неканонической температурой [142, 158, 159]. В этом случае среднее значение тензора энергии-импульса не пропорционально метрике  $\langle : T_{\mu\nu} : \rangle \neq \delta\lambda g_{\mu\nu}$  [142, 158], поэтому следует ожидать дополнительных вкладов от локальных диаграмм на Рис. 5.2. Кроме того, мы полагаем, что наш анализ в разделах 5.1–5.3 может быть распространён на более общие геометрии, такие как FLRW и глобальный dS, поэтому мы также оставляем эти вопросы для дальнейших исследований.

Наконец, в разделе 5.4 мы обозначили проблемы, с которыми сталкиваемся при рассмотрении скалярного сектора гравитационных возмущений на однопетлевом уровне. Вопрос о «скалярном духе» в гравитации остаётся нерешённым [119, 160, 161], однако рассмотрение гравитации, модифицированной петлевыми поправками, на классическом уровне позволит улучшить предсказания о поведении материи во Вселенной на ранних стадиях, учитывая эволюцию скалярных возмущений метрики. В простейшем двумерном случае мы наблюдаем, что лёгкие поля материи демонстрируют заметный отклик на расширяющийся фон. Поэтому мы полагаем, что дальнейшее изучение этого вопроса с использованием различных подходов даст ответы о стабильности и поведении материи в расширяющихся гравитационных фонах.

## Глава 6

# Заключение

В диссертации исследованы свойства квантовой теории поля в нестационарных условиях на фоне сильных внешних полей. Основное внимание уделено зависимости физических наблюдаемых от начального состояния, неравновесной динамике квантовых корреляторов и квантовым поправкам в расширяющемся пространстве-времени. Полученные результаты углубляют понимание поведения квантовых полей в искривлённом пространстве-времени и при наличии сильных внешних полей.

Основные результаты работы:

- Установлена зависимость вакуумного тока фермионов в постоянном электрическом поле от выбора начального состояния в определенном классе фоковских вакуумов. Показано, что существует состояние с нулевым током, тогда как для других состояний ток растёт пропорционально длительности действия поля.
- Разработан метод вычисления неравновесной динамики корреляторов после глобального кванта. Показано, что в плоском пространстве двухточечные функции безмассового скалярного поля не демонстрируют релаксации после гауссового возмущения начального состояния, тогда как в пространстве де Ситтера характер релаксации определяется массой поля.
- Показано, что для лёгких скалярных полей в Пуанкаре-регионе пространства де Ситтера при начальном состоянии Банча–Дэвиса в петлевых поправках доминируют лестничные диаграммы, содержащие секулярный рост. Получено частное решение уравнения, описывающего пересуммирование данного класса диаграмм.
- Вычислено однопетлевое эффективное действие Швингера–Келдыша для космологических возмущений метрики, индуцированное взаимодействием со скалярным квантовым

полем. Показано отсутствие генерации эффективной массы в тензорном секторе гравитации и наличие нетривиальных вкладов в скалярном секторе для лёгких полей.

Таким образом, выполненная работа вносит вклад в развитие квантовой теории поля в нестационарных пространствах и сильных фоновых полях, а также расширяет возможности для описания неравновесной динамики при нетривиальных начальных состояниях квантовых полей.

## **Благодарности**

Прежде всего я хотел бы выразить искреннюю признательность и благодарность своему научному руководителю Ахмедову Эмилю Тофиковичу за отзывчивость, поддержку, плодотворные обсуждения и помощь в изучении множества вопросов науки, а также за постановку интересных научных задач.

Я выражаю благодарность своим коллегам по научной группе Дмитрию Дьяконову, Кириллу Базарову, Кириллу Казарновскому, Кириллу Губареву, Павлу Завгороднему, Марии Миловановой, Льву Астраханцеву, Владимиру Лапушкину, Ивану Бельковичу, Глебу Звереву за многочисленные обсуждения научных тем и вопросов. Кроме того, я выражаю признательность Федору Попову, Андрею Семенову, Алексею Михайленко, Эдварду Мусаеву, Дмитрию Агееву, Никите Колганову, Прокопию Анемподистову, Арине Штенниковой и Сергею Миронову за обсуждение научных вопросов по теме диссертации.

Также я безусловно благодарен своим родителям и семье за постоянную поддержку и помощь во время работы и на протяжении всей жизни.

## Приложение А

### Асимптотики мод

В пределе больших аргументов  $|z|$  и фиксированного  $\nu$  справедливо следующее приближение [41]:

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[ \sum_{n=0}^N \frac{(-\frac{\nu}{2})_n (\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2})_n}{n! (-\frac{z^2}{2})^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z^2|^{N+1}}\right) \right], \quad |\arg(z)| < \frac{3\pi}{4}, \quad (\text{A.1})$$

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[ \sum_{n=0}^N \frac{(-\frac{\nu}{2})_n (\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2})_n}{n! (-\frac{z^2}{2})^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z^2|^{N+1}}\right) \right] - \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\nu\pi i + \frac{z^2}{4}}}{\Gamma(-\nu)} z^{-\nu-1} \left[ \sum_{n=0}^N \frac{(\frac{\nu}{2})_n (\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2})_n}{n! (\frac{z^2}{2})^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z^2|^{N+1}}\right) \right], \quad -\frac{5\pi}{4} < \arg(z) < -\frac{\pi}{4}. \quad (\text{A.2})$$

Поэтому в случае  $P_3 \rightarrow +\infty$  имеем:

$$D_\nu(z) \simeq e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i \frac{P_3^2}{2eE} - i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2 \frac{P_3^2}{eE}\right)}, \quad (\text{A.3})$$

$$D_{\nu-1}(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{eE}} \frac{1}{P_3} e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i \frac{P_3^2}{2eE} - i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2 \frac{P_3^2}{eE}\right) - i \frac{\pi}{4}} \quad (\text{A.4})$$

и аналогично для  $P_3 \rightarrow -\infty$ :

$$D_\nu(z) \simeq e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i \frac{P_3^2}{2eE} - i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2 \frac{P_3^2}{eE}\right)} + \sqrt{\frac{eE}{2}} \frac{1}{|P_3|} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}} e^{i \frac{P_3^2}{2eE} + i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2 \frac{P_3^2}{eE}\right) - i \frac{\pi}{4}}, \quad (\text{A.5})$$

$$D_{\nu-1}(z) \simeq -\sqrt{\frac{2}{eE}} \frac{1}{|P_3|} e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i \frac{P_3^2}{2eE} - i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2 \frac{P_3^2}{eE}\right) - i \frac{\pi}{4}} - \frac{2ieE}{m^2 + |p_\perp|^2} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}} e^{i \frac{P_3^2}{2eE} + i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2 \frac{P_3^2}{eE}\right)}. \quad (\text{A.6})$$

В пределе  $|\mathbf{p}| \rightarrow +\infty$  при фиксированном моменте времени  $t$ , когда  $p_3 \rightarrow \pm\infty$  и  $|p_\perp|$  фиксирован, получаем:

$$D_\nu(z) \simeq e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i \frac{p_3^2}{2eE} - \frac{i}{2} eEt^2 - i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2 \frac{P_3^2}{eE}\right)} e^{-i|p_3|t}, \quad p_3 \rightarrow +\infty, \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} D_\nu(z) &\simeq e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}} e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}} e^{-i \frac{p_3^2}{2eE} - \frac{i}{2} eEt^2 - i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2 \frac{P_3^2}{eE}\right)} e^{i|p_3|t} + \\ &+ \sqrt{\frac{eE}{2}} \frac{1}{|P_3|} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{2eE}\right)} e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{8eE}} e^{i \frac{p_3^2}{2eE} + \frac{i}{2} eEt^2 + i \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE} \log\left(2 \frac{P_3^2}{eE}\right) - i \frac{\pi}{4}} e^{-i|p_3|t}, \quad p_3 \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Также для вычисления тока в разделе 2.3 мы пользуемся следующими свёртками спиноров (2.15):

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{p}_1}^{(-)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}_1}^{(-)} &= u_{\mathbf{p}_2}^{(-)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}_2}^{(-)} = -u_{\mathbf{p}_1}^{(+)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}_1}^{(+)} = -u_{\mathbf{p}_2}^{(+)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}_2}^{(+)} = \\ &= 2(m^2 + |p_\perp|^2) \left[ 1 - 2|D_\nu(z)|^2 e^{-\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}} \right] e^{\pi \frac{m^2 + |p_\perp|^2}{4eE}}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{p}_1}^{(+)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}_1}^{(-)} &= 4p_\perp^* \frac{1 - i m^2 + |p_\perp|^2}{2 \sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(z) D_\nu^*(z), \\ u_{\mathbf{p}_2}^{(+)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}_2}^{(-)} &= -4p_\perp \frac{1 - i m^2 + |p_\perp|^2}{2 \sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(z) D_\nu^*(z), \\ u_{\mathbf{p}_2}^{(+)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}_1}^{(-)} &= -4m \frac{1 - i m^2 + |p_\perp|^2}{2 \sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(z) D_\nu^*(z), \\ u_{\mathbf{p}_1}^{(+)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}_2}^{(-)} &= -4m \frac{1 - i m^2 + |p_\perp|^2}{2 \sqrt{eE}} D_{\nu-1}^*(z) D_\nu^*(z), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$u_{\mathbf{p}_1}^{(+)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}_2}^{(+)} = u_{\mathbf{p}_1}^{(-)\dagger} \gamma^0 \gamma^3 u_{\mathbf{p}_2}^{(-)} = 0. \quad (\text{A.11})$$

## Приложение В

### Вывод выражения для тока

С помощью условий нормировки в форме (2.33) перепишем выражение для тока (2.35) в виде

$$\langle J^3 \rangle_{\text{tree}} = 2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ 4 (P_3^2 |f_{\mathbf{p}}|^2 + |\partial_t f_{\mathbf{p}}|^2) - 1 \right] + 2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} 4iP_3 \left[ f_{\mathbf{p}} \partial_t f_{\mathbf{p}}^* - \partial_t f_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}^* \right]. \quad (\text{B.1})$$

Покажем, что  $\langle J^3 \rangle_{\text{tree}} = \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} \int \frac{dP_3}{2\pi} \partial_{P_3} \{ \mathcal{F}_{p_{\perp}}(P_3) \}$  для некоторой функции  $\mathcal{F}_{p_{\perp}}(P_3)$ .

1. Сначала получим полезные соотношения. Из уравнений движения, их первых производных по времени и сопряжённых к ним уравнений

$$[(eE)^2 \partial_{P_3}^2 + P_3^2 + |p_{\perp}|^2 + m^2 + ieE] f_{p_{\perp}}(P_3) = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$[(eE)^2 \partial_{P_3}^2 + P_3^2 + |p_{\perp}|^2 + m^2 - ieE] f_{p_{\perp}}^*(P_3) = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$(eE)^2 \partial_{P_3}^3 f_{p_{\perp}}(P_3) + 2P_3 f_{p_{\perp}}(P_3) + P_3^2 \partial_{P_3} f_{p_{\perp}}(P_3) + (m^2 + |p_{\perp}|^2) \partial_{P_3} f_{p_{\perp}}(P_3) + ieE \partial_{P_3} f_{p_{\perp}}(P_3) = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$(eE)^2 \partial_{P_3}^3 f_{p_{\perp}}^*(P_3) + 2P_3 f_{p_{\perp}}^*(P_3) + P_3^2 \partial_{P_3} f_{p_{\perp}}^*(P_3) + (m^2 + |p_{\perp}|^2) \partial_{P_3} f_{p_{\perp}}^*(P_3) - ieE \partial_{P_3} f_{p_{\perp}}^*(P_3) = 0 \quad (\text{B.5})$$

получаем следующие соотношения (мы временно обозначили  $f = f_{p_{\perp}}(P_3)$  для удобства):

$$2P_3^2 |f|^2 = -2 (m^2 + |p_{\perp}|^2) |f|^2 - (eE)^2 \left[ \partial_{P_3}^2 f f^* + f \partial_{P_3}^2 f^* \right], \quad (\text{B.6})$$

$$4P_3^3 \partial_{P_3} \left( |f|^2 \right) = 4P_3^3 \left[ \partial_{P_3} f f^* + f \partial_{P_3} f^* \right] =$$

$$= -4P_3 \left( (eE)^2 \left[ \partial_{P_3}^2 f^* \partial_{P_3} f + \partial_{P_3} f^* \partial_{P_3}^2 f \right] + (m^2 + |p_\perp|^2) \partial_{P_3} \left( |f|^2 \right) + \right. \\ \left. + ieE \left[ f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right] \right), \quad (\text{B.7})$$

$$2(eE)^2 |\partial_{P_3} f|^2 = i(eE)^3 \partial_{P_3} \left\{ \partial_{P_3}^2 f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f \partial_{P_3}^2 f^* \right\} + 2i(eE) P_3 \left[ f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right], \quad (\text{B.8})$$

$$(eE)^3 \left[ \partial_{P_3}^2 f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f \partial_{P_3}^2 f^* \right] = -eE (m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2) \left[ f \partial_{P_3} f^* - f^* \partial_{P_3} f \right] - \\ - i(eE)^2 \partial_{P_3} \left( |f|^2 \right). \quad (\text{B.9})$$

2. Преобразуем выражение для тока следующим образом

$$4 \left( P_3^2 |f|^2 + |\partial_t f|^2 \right) - 1 + 4iP_3 \left[ f \partial_t f^* - \partial_t f f^* \right] = \partial_{P_3} \left\{ 4P_3^3 |f|^2 + 4P_3 (eE)^2 |\partial_{P_3} f|^2 \right\} - 1 + \\ + 4iP_3 (eE) \left[ f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right] - 8P_3^2 |f|^2 - 4P_3^3 \left[ f \partial_{P_3} f^* + \partial_{P_3} f f^* \right] - \\ - 4P_3 (eE)^2 \left[ \partial_{P_3}^2 f \partial_{P_3} f^* + \partial_{P_3} f \partial_{P_3}^2 f^* \right] \equiv$$

Далее, используя (B6), (B7), упрощаем:

$$\equiv \partial_{P_3} \left\{ 4P_3^3 |f|^2 + 4P_3 (eE)^2 |\partial_{P_3} f|^2 \right\} - 1 + 4iP_3 (eE) \left[ f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right] + 8 (m^2 + |p_\perp|^2) |f|^2 + \\ + 4(eE)^2 \left[ \partial_{P_3}^2 f f^* + f \partial_{P_3}^2 f^* \right] + 4P_3 (eE)^2 \left[ \partial_{P_3}^2 f^* \partial_{P_3} f + \partial_{P_3} f^* \partial_{P_3}^2 f \right] + 4P_3 (m^2 + |p_\perp|^2) \partial_{P_3} \left( |f|^2 \right) + \\ + 4iP_3 (eE) \left[ f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right] - 4P_3 (eE)^2 \left[ \partial_{P_3}^2 f \partial_{P_3} f^* + \partial_{P_3} f \partial_{P_3}^2 f^* \right] = \\ = \partial_{P_3} \left\{ 4P_3^3 |f|^2 + 4P_3 (eE)^2 |\partial_{P_3} f|^2 \right\} - 1 + \\ + 8iP_3 (eE) \left[ f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right] + 8 (m^2 + |p_\perp|^2) |f|^2 + 4(eE)^2 \partial_{P_3} \left\{ \partial_{P_3} f f^* + f \partial_{P_3} f^* \right\} - 8(eE)^2 |\partial_{P_3} f|^2 + \\ + 4 (m^2 + |p_\perp|^2) \partial_{P_3} \left( P_3 |f|^2 \right) - 4 (m^2 + |p_\perp|^2) |f|^2 =$$

Тогда из (B8) получаем

$$= \partial_{P_3} \left\{ 4P_3^3 |f|^2 + 4P_3 (eE)^2 |\partial_{P_3} f|^2 \right\} - 1 + 8iP_3 (eE) \left[ f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f f^* \right] + 4(eE)^2 \partial_{P_3} \left[ \partial_{P_3} f f^* + f \partial_{P_3} f^* \right] + \\ + 4 (m^2 + |p_\perp|^2) \partial_{P_3} \left( P_3 |f|^2 \right) + 4 (m^2 + |p_\perp|^2) |f|^2 - 4i(eE)^3 \partial_{P_3} \left[ \partial_{P_3}^2 f \partial_{P_3} f^* - \partial_{P_3} f \partial_{P_3}^2 f^* \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -8i(eE)P_3 \left[ f\partial_{P_3}f^* - \partial_{P_3}ff^* \right] = \\
& = \partial_{P_3} \left\{ 4P_3(m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2)|f|^2 + 4P_3(eE)^2|\partial_{P_3}f|^2 + 4(eE)^2\partial_{P_3}(|f|^2) - 4i(eE)^3 \left[ \partial_{P_3}^2f\partial_{P_3}f^* - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \partial_{P_3}f\partial_{P_3}^2f^* \right] \right\} + 4(m^2 + |p_\perp|^2)|f|^2 - 1 \quad \square
\end{aligned}$$

Наконец, из (B9) следует

$$\begin{aligned}
& \square 4\partial_{P_3} \left\{ (m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2) \left( P_3|f|^2 + i(eE) \left[ f\partial_{P_3}f^* - f^*\partial_{P_3}f \right] \right) + P_3(eE)^2|\partial_{P_3}f|^2 \right\} + \\
& \quad + 4(m^2 + |p_\perp|^2)|f|^2 - 1.
\end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь (2.35), получаем

$$\langle J^3 \rangle_{\text{tree}} = -\langle J^3 \rangle_{\text{tree}} + 2 \int \frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{dP_3}{2\pi} \partial_{P_3} \left\{ \mathcal{F}_{p_\perp}(P_3) \right\} \quad (\text{B.10})$$

Окончательно:

$$\langle J^3 \rangle_{\text{tree}} = \int \frac{d^2p_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{dP_3}{2\pi} \partial_{P_3} \left\{ \mathcal{F}_{p_\perp}(P_3) \right\}, \quad (\text{B.11})$$

где  $\mathcal{F}_{p_\perp}(P_3) = 4\{(m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2)(P_3|f|^2 + i(eE)[f\partial_{P_3}f^* - f^*\partial_{P_3}f]) + P_3(eE)^2|\partial_{P_3}f|^2\}$ . Также можно переписать полученное выражение, снова используя условие нормировки:

$$\mathcal{F}_{p_\perp}(P_3) = 2 \left\{ \frac{m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2}{P_3} - \frac{2(m^2 + |p_\perp|^2)}{P_3} \left[ (m^2 + |p_\perp|^2 + P_3^2)|f|^2 + |\partial_t f|^2 \right] \right\}. \quad (\text{B.12})$$

## Приложение С

### Квенч в искривленном пространстве-времени

Рассмотрим свободное скалярное поле, минимально взаимодействующее с гравитацией и описываемое действием (1.11). Тогда эволюцию во времени среднего значения локального составного оператора  $\widehat{O}[\widehat{\phi}(\mathbf{x})]$  можно представить в виде функционального интеграла (1.13), что можно расписать более подробно после введения поворота Келдыша (1.16) и функционала Вигнера (1.22):

$$\begin{aligned}
& \langle \widehat{O}[\widehat{\phi}(\mathbf{x})] \rangle_t = \\
& = \int \mathcal{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathcal{D}\Pi(\mathbf{x}) W[\Phi, \Pi] \cdot \exp \left\{ i \int d^D x \sqrt{|g|} \phi_q \cdot \text{EOM}[\phi_{cl}] \right\} O \left[ \phi_{cl} - \frac{\phi_q}{2} \right] = \\
& = \int \mathcal{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathcal{D}\Pi(\mathbf{x}) W[\Phi, \Pi] \cdot \delta \left( \text{EOM}[\phi_{cl}] \right) \cdot O[\phi_{cl}] = \quad (\text{C.1}) \\
& = \int \mathcal{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathcal{D}\Pi(\mathbf{x}) W[\Phi, \Pi] \cdot O \left[ \phi \Big|_{\text{on-shell}} \right], \\
& \text{где } \text{EOM}[\phi_{cl}] \equiv \left[ \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu + m^2 \right] \phi_{cl}
\end{aligned}$$

и в третьей строке мы убрали  $\phi_q$  из составного оператора  $O$ , так как свертка  $\overline{\phi_q} \phi_q = 0$  в диаграммной технике Келдыша-Швингера, а свертки  $\overline{\phi_q} \phi_{cl}$  зануляются в совпадающих точках по времени из-за причинности. Также при переходе к третьей строке мы проинтегрировали по полю  $\phi_q$ , получив дельта-функцию на условии  $\text{EOM}[\phi_{cl}] = 0$ . Таким образом, мы получили в аргументе составного оператора значение поля  $\phi_{cl}$ , являющееся решением уравнений движения с заданными начальными условиями:

$$\text{EOM} \left[ \phi \Big|_{\text{on-shell}} \right] = 0, \quad \phi(t_0, \mathbf{x}) \Big|_{\text{on-shell}} = \Phi(\mathbf{x}), \quad \partial_t \phi(t_0, \mathbf{x}) \Big|_{\text{on-shell}} = \frac{1}{\sqrt{|g|} g^{00}} \Pi(\mathbf{x}). \quad (\text{C.2})$$

Если для данного гравитационного фона найти запаздывающую функцию Грина

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu + m^2 \right] G_R(t, \mathbf{x}|t', \mathbf{y}) = -\frac{\delta(t-t')\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\sqrt{|g|}}, \quad (\text{C.3})$$

то условия (C.2) можно разрешить явно:

$$\phi(t, \mathbf{x}) \Big|_{\text{on-shell}} = - \int d^{D-1} \mathbf{y} \left[ \sqrt{|g(t_0, \mathbf{y})|} g^{00}(t_0, \mathbf{y}) \partial_t G_R(t, \mathbf{x}|t_0, \mathbf{y}) \cdot \Phi(\mathbf{y}) + G_R(t, \mathbf{x}|t_0, \mathbf{y}) \cdot \Pi(\mathbf{y}) \right]. \quad (\text{C.4})$$

Теперь мы хотим найти динамику корреляторов локальных операторов после вывода системы из равновесного состояния, задаваемого, скажем, матрицей плотности  $\hat{\rho}_0$ . Если предположить, что в момент времени  $t_0$  Гамильтониан  $\hat{H}$  системы претерпел возмущение  $\delta\hat{H} = -\alpha\delta(t-t_0)\hat{V}[\hat{\phi}(\mathbf{x})]$ , то матрица плотности, описывающая дальнейшую эволюцию после момента  $t_0$  изменится так:

$$\hat{\rho}_Q(t_0) = \hat{Q}\hat{\rho}_0\hat{Q}^\dagger, \quad \hat{Q} = e^{i\alpha\hat{V}[\hat{\phi}(\mathbf{x})]}. \quad (\text{C.5})$$

Вообще говоря, мы можем не думать об этом как о резком изменении гамильтониана и говорить просто, что рассматриваем возмущенное начальное состояние квантовой теории поля в виде (C.5). Далее при помощи равенства

$$i\frac{\delta}{\delta\Pi(\mathbf{y})} \exp \left\{ -i \int d^{D-1} \mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \Pi(\mathbf{x}) \right\} = \beta(\mathbf{y}) \exp \left\{ -i \int d^{D-1} \mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \Pi(\mathbf{x}) \right\} \quad (\text{C.6})$$

мы можем переписать модифицированный функционал Вигнера (1.22) после кванча следующим образом:

$$\begin{aligned} W_Q[\Phi, \Pi] &= \int \mathcal{D}\beta(\mathbf{x}) \exp \left\{ -i \int d^{D-1} \mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}) \right\} \left\langle \Phi + \frac{\beta}{2} \left| \hat{Q} \hat{\rho}_0 \hat{Q}^\dagger \right| \Phi - \frac{\beta}{2} \right\rangle = \\ &= Q \left[ \Phi, \frac{\delta}{\delta\Pi} \right] W_0[\Phi, \Pi], \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

где  $W_0[\Phi, \Pi]$  определен по равновесной матрице плотности  $\hat{\rho}_0$  и мы ввели функциональный оператор

$$Q \left[ \Phi, \frac{\delta}{\delta\Pi} \right] = \exp \left\{ -i\alpha \left( V \left[ \Phi - \frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta\Pi} \right] - V \left[ \Phi + \frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta\Pi} \right] \right) \right\}. \quad (\text{C.8})$$

Теперь подставляя функционал Вигнера после кванча (C.7) в выражение (C.1) для эволюции оператора  $\hat{O}$  и интегрируя по частям функциональный интеграл по сопряженному импульсу

$\Pi(\mathbf{x})$ , получаем выражение для эволюции операторов после квенча:

$$\left\langle \widehat{O}[\widehat{\phi}(\mathbf{x})] \right\rangle_t^Q = \int \mathcal{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathcal{D}\Pi(\mathbf{x}) W_0[\Phi, \Pi] Q \left[ \Phi, -\frac{\delta}{\delta\Pi} \right] O \left[ \phi \Big|_{\text{on-shell}} \right]. \quad (\text{C.9})$$

Таким образом, задача об эволюции операторов после квенча сводится к эволюции с равновесной матрицей плотности, но с наблюдаемой, которая модифицирована действием функционального оператора  $Q$ .

В качестве простейшего примера глобального квенча рассмотрим гауссово начальное состояние, которое можно интерпретировать как мгновенное возмущение массивного члена в гамильтониане:

$$\begin{aligned} \widehat{V}[\widehat{\phi}] &= \int d^{D-1}\mathbf{x} \sqrt{|g(t_0, \mathbf{x})|} \widehat{\phi}^2(\mathbf{x}), \\ Q \left[ \Phi, -\frac{\delta}{\delta\Pi} \right] &= \exp \left\{ 2\alpha \int d^{D-1}\mathbf{x} \Phi(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta\Pi(\mathbf{x})} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Наконец, используя общее выражение (C.4) и представление пропагатора Келдыша через функциональный интеграл

$$\begin{aligned} iG_K(t, \mathbf{x}|t', \mathbf{y}) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left( \widehat{\rho} \cdot \left\{ \widehat{\phi}(t, \mathbf{x}), \widehat{\phi}(t', \mathbf{y}) \right\} \right) = \\ &= \int \mathcal{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathcal{D}\Pi(\mathbf{x}) W[\Phi, \Pi] \phi(t, \mathbf{x}) \Big|_{\text{on-shell}} \phi(t', \mathbf{y}) \Big|_{\text{on-shell}} \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

найдем эволюцию двухточечного одновременного коррелятора  $\widehat{O}[\widehat{\phi}] = \widehat{\phi}(\mathbf{x})\widehat{\phi}(\mathbf{y})$ :

$$\begin{aligned} iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) &= \left\langle \widehat{\phi}(\mathbf{x})\widehat{\phi}(\mathbf{y}) \right\rangle_t^Q = \int \mathcal{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathcal{D}\Pi(\mathbf{x}) W_0[\Phi, \Pi] \cdot \\ &\cdot \exp \left\{ 2\alpha \int d^{D-1}\boldsymbol{\xi} \sqrt{|g(t_0, \boldsymbol{\xi})|} \Phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\delta}{\delta\Pi(\boldsymbol{\xi})} \right\} \phi(t, \mathbf{x}) \Big|_{\text{on-shell}} \phi(t, \mathbf{y}) \Big|_{\text{on-shell}} = \\ &= iG_K(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) - 2\alpha \int d^{D-1}\boldsymbol{\xi} \sqrt{|g(t_0, \boldsymbol{\xi})|} \left[ iG_K(t, \mathbf{x}|t_0, \boldsymbol{\xi}) G_R(t, \mathbf{y}|t_0, \boldsymbol{\xi}) + \right. \\ &\quad \left. + iG_K(t, \mathbf{y}|t_0, \boldsymbol{\xi}) G_R(t, \mathbf{x}|t_0, \boldsymbol{\xi}) \right] + \\ &\quad + 4\alpha^2 \int d^{D-1}\boldsymbol{\xi}_1 d^{D-1}\boldsymbol{\xi}_2 \sqrt{|g(t_0, \boldsymbol{\xi}_1)|} \sqrt{|g(t_0, \boldsymbol{\xi}_2)|} \cdot \\ &\quad \cdot iG_K(t_0, \boldsymbol{\xi}_1|t_0, \boldsymbol{\xi}_2) G_R(t, \mathbf{x}|t_0, \boldsymbol{\xi}_1) G_R(t, \mathbf{x}|t_0, \boldsymbol{\xi}_2). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Часто будет удобно вычислять интегралы, входящие в это выражение, в импульсном пространстве. Если предположить, что фоновое пространство-время однородно и изотропно, причем метрика зависит только от времени, а также равновесное состояние  $\widehat{\rho}_0$  удовлетворя-

ет этим симметриям, то можем переписать ответ в фурье-пространстве:

$$iG_K^Q(t, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) = \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ iG_K(\mathbf{k}|t, t) - 4\alpha\sqrt{|g(t_0)|} iG_K(\mathbf{k}|t, t_0)G_R(\mathbf{k}|t, t_0) \right. \\ \left. + 4\alpha^2\sqrt{|g(t_0)|}\sqrt{|g(t_0)|}G_K(\mathbf{k}|t_0, t_0)G_R(\mathbf{k}|t, t_0)G_R(\mathbf{k}|t, t_0) \right\}. \quad (\text{C.13})$$

Отметим, что для средних от полиномиальных операторов мы всегда получим конечное число слагаемых, которые модифицируют ответ для невозмущенного начального состояния теории. Важно сказать, что формулы для динамики после кванта, подобные (C.12), мы можем получить для корреляторов более высокого порядка, а также можем рассматривать негауссовы (неквадратичные по полю) возмущения начального состояния и неоднородные возмущения начального состояния: действительно, все рассуждения будут работать также если заменить коэффициент  $\alpha$  на функцию  $\alpha(\mathbf{x})$ , которая в неоднородном случае будет входить внутрь интегралов.

## Приложение D

# Комментарий о главной серии в расширяющемся регионе Пуанкаре

Секулярные эффекты в ЕРР для тяжелых полей исследовались в [23, 26]. В данном приложении мы лишь заново рассматриваем вывод уравнения Дайсона–Швингера, и демонстрируем, что для очень тяжелых полей петлевые поправки подавлены дополнительным экспоненциально малым фактором.

При квантовании поля (1.5) для главной серии ( $m > (D - 1)/2$ ) моды имеют вид:

$$f_{\mathbf{p}}(\eta) = \eta^{\frac{D-1}{2}} h_{i\nu}(p\eta), \quad h_{i\nu}(p\eta) = H_{i\nu}^{(1)}(p\eta) \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi}{2}\nu}, \quad \nu = \sqrt{m^2 - \frac{D-1}{2}}. \quad (\text{D.1})$$

В этом случае поведение функций Ханкеля при малых аргументах является осциллирующим, а не степенным:

$$h_{i\nu}(p\eta) \simeq A_+(p\eta)^{i\nu} + A_-(p\eta)^{-i\nu}, \quad (\text{D.2})$$

$$A_+ = \frac{2^{-i\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\nu} \sqrt{\pi} (1 + \coth(\pi\nu))}{2\Gamma(1 + i\nu)}, \quad A_- = -\frac{i2^{i\nu}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\pi}{2}\nu} \Gamma(i\nu).$$

Тогда на однопетлевом уровне поправки к заселённости уровней и к аномальным квантовым средним имеют вид [23, 26]:

$$n_p(\eta) \simeq -\Gamma \cdot e^{-2\pi\nu} \lambda^2 \log(p\eta), \quad \text{Re} \{ \varkappa_p(\eta) \} \simeq \frac{\Gamma}{2} \cdot e^{-\pi\nu} \lambda^2 \log(p\eta),$$

$$\text{Im} \{ \varkappa_p(\eta) \} \simeq C \cdot e^{-\pi\nu} \lambda^2 \log(p\eta), \quad (\text{D.3})$$

$$\Gamma = \frac{S_{D-2}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2\nu} \left| \int_0^\infty dx x^{\frac{D-3}{2} - i\nu} h_{i\nu}^2(x) \right|^2,$$

$$C = \frac{2}{\nu} \int_1^\infty \frac{dv}{v} \cos(\nu \log(v)) \int \frac{d^{D-1}\ell}{(2\pi)^{D-1}} \text{Im} \left\{ h_{i\nu}^2(\ell n) h_{i\nu}^{*2} \left( \frac{\ell}{v} \right) \right\},$$

где  $S_{D-2}$  — объём единичной  $(D-2)$ -мерной сферы. Обратим внимание на наличие дополнительного подавляющего множителя  $e^{-\pi\nu}$ , который присутствует помимо константы связи  $\lambda^2$ . Более того, каждая следующая петля приносит дополнительную степень этого множителя. Тогда для больших масс, возможно, вообще нет необходимости пересуммировать петлевые поправки, поскольку для того, чтобы они стали сравнимыми с древесными вкладами в корреляционные функции, требуется слишком большое число е-фолдов.

Тем не менее, рассмотрим уравнение Дайсона–Швингера, которое пересуммирует ведущие поправки, поскольку при достаточно малых  $\nu$  множитель  $e^{-\pi\nu}$  практически отсутствует. Тогда в кинетическом приближении можно записать уравнение Дайсона–Швингера для ведущих логарифмов (D.3) [23]:

$$\begin{aligned}
G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) &= G_0^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) + \lambda^2 \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \frac{d\eta_3}{\eta_3^D} \frac{d\eta_4}{\eta_4^D} \left[ -\frac{1}{2}\theta(\eta_3 - \eta)\theta(\eta_4 - \eta) \times \right. \\
&\quad \times \rho(\mathbf{p}|\eta, \eta_3) \left( G_0^{K^2}(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4) - \frac{1}{4}\rho^2(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4) \right) \rho(\mathbf{p}|\eta_4, \eta) + \\
&+ \theta(\eta_4 - \eta_3)\theta(\eta_3 - \eta)\rho(\mathbf{p}|\eta, \eta_3)\rho(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)G_0^K(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)G^K(\mathbf{p}|\eta_4, \eta) + \\
&\left. + \theta(\eta_3 - \eta_4)\theta(\eta_4 - \eta)G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta_3)\rho(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)G_0^K(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3, \eta_4)\rho(\mathbf{p}|\eta_4, \eta) \right]. \tag{D.4}
\end{aligned}$$

Для того чтобы найти приближённое решение этого уравнения, мы используем анзац (4.1) для точного пропагатора Келдыша и для простоты выбираем вакуум Банч–Дэвиса в качестве начального состояния. Тогда мы получаем следующие уравнения для  $n_p(\eta) \equiv n(p\eta)$  и  $\varkappa_p(\eta) \equiv \varkappa(p\eta)$ :

$$\begin{aligned}
n(p\eta) &\simeq -\Gamma \cdot e^{-2\pi\nu} \lambda^2 \log(p\eta) + \\
&+ \lambda^2 \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_4}{\eta_4} \int_{\eta_4}^{\infty} \frac{d\eta_3}{\eta_3} (\eta_3\eta_4)^{\frac{D-1}{2}} \text{Im} \left\{ h_{i\nu}^*(p\eta_3)h_{i\nu}(p\eta_4)n(p\sqrt{\eta\eta_3}) + h_{i\nu}(p\eta_3)h_{i\nu}(p\eta_4)\varkappa(p\sqrt{\eta\eta_3}) \right\} \cdot \\
&\quad \cdot \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \text{Im} \left\{ h_{i\nu}(k\eta_3)h_{i\nu}(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3) h_{i\nu}^*(k\eta_4)h_{i\nu}^*(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_4) \right\} + \mathcal{O}(\lambda^2), \tag{D.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varkappa(p\eta) &\simeq \left[ \frac{\Gamma}{2} + iC \right] \cdot e^{-\pi\nu} \lambda^2 \log(p\eta) + \\
&+ i\lambda^2 \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta_4}{\eta_4} \int_{\eta_4}^{\infty} \frac{d\eta_3}{\eta_3} (\eta_3\eta_4)^{\frac{D-1}{2}} \left[ h_{i\nu}^*(p\eta_3)h_{i\nu}^*(p\eta_4)n(p\sqrt{\eta\eta_3}) + h_{i\nu}(p\eta_3)h_{i\nu}^*(p\eta_4)\varkappa(p\sqrt{\eta\eta_3}) \right] \cdot \\
&\quad \cdot \int \frac{d^{D-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{D-1}} \text{Im} \left\{ h_{i\nu}(k\eta_3)h_{i\nu}(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_3) h_{i\nu}^*(k\eta_4)h_{i\nu}^*(|\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta_4) \right\} + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{D.6}
\end{aligned}$$

Уравнения (D.5)–(D.6), в отличие от случая легких полей, обсуждавшегося в разделе 4.4,

имеют статическое решение  $n(p\eta) \simeq n_f$ ,  $\varkappa(p\eta) \simeq \varkappa_f$ , где

$$\begin{aligned} n_f &\simeq \frac{\Gamma^2 + 3C^2}{\Gamma^2 + C^2} \cdot e^{-2\pi\nu}, \\ \varkappa_f &\simeq 2 \frac{\Gamma^2 + 2C^2 - i\Gamma C}{\Gamma^2 + C^2} \cdot e^{-\pi\nu}. \end{aligned} \tag{D.7}$$

Это решение имеет смысл, если  $n_f \ll 1$  и  $\varkappa_f \ll 1$ , что, безусловно, выполняется при условии  $\nu \gtrsim \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ . Следовательно, в случае достаточно больших масс скалярного поля и вакуума Банч–Дэвиса в качестве начального состояния система лишь слабо перестраивает исходное состояние и в результате длительной эволюции в расширяющемся фоне переходит в состояние с некоторой плотностью энергии поверх out-вакуума.

## Приложение Е

### Детали петлевого вычисления

В этом приложении мы показываем, почему оправдано приближение, в котором внешний импульс полагается равным нулю в петлевом интеграле (4.4). Рассмотрим область интегрирования, в которой  $v \in [1, \sqrt{\frac{|\nu|}{p\eta}}]$ ,  $u \in [v, \frac{|\nu|}{p\eta v}]$ , где для «внешних» модовых функций можно использовать их асимптотику из (1.10):

$$\begin{aligned} \Delta G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) &\simeq \frac{8A_-^3 \text{Im}\{A_+\}}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1} \lambda^2 \int_1^{\sqrt{\frac{|\nu|}{p\eta}}} \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \int_v^{\frac{|\nu|}{p\eta v}} \frac{du}{u} \times \\ &\times \int \frac{d^{D-1}\boldsymbol{\ell}}{(2\pi)^{D-1}} \text{Im} \left\{ h_\nu(\ell v) h_\nu(|\boldsymbol{\ell} - \mathbf{p}\eta u|v) h_\nu^*\left(\frac{\ell}{v}\right) h_\nu^*\left(\frac{|\boldsymbol{\ell} - \mathbf{p}\eta u|}{v}\right) \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{8A_-^3 \text{Im}\{A_+\}}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1} \lambda^2 \int_1^{\sqrt{\frac{|\nu|}{p\eta}}} \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \int_v^{\frac{|\nu|}{p\eta v}} \frac{du}{u} \times \mathcal{F}(v, p\eta u). \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Здесь мы перешли к переменным  $u, v, \boldsymbol{\ell}$ , как это объяснено в основном тексте, но ещё не взяли предел  $p \rightarrow 0$  во внутреннем петлевом интеграле, обозначенном  $\mathcal{F}(v, p\eta u)$ . Интеграл в (E.1) сходится как в УФ-, так и в ИК-пределах. Его можно приблизительно оценить, оставив ведущие члены разложения по малым параметрам. А именно, в областях  $\ell < p\eta u$  и  $\ell > p\eta u$  можно считать, что  $|\boldsymbol{\ell} - \mathbf{p}\eta u| \simeq p\eta u$  и  $|\boldsymbol{\ell} - \mathbf{p}\eta u| \simeq \ell$  соответственно, выделяя наиболее сингулярную часть интеграла, тогда как поправки к этим ведущим членам будут подавлены.

Подчеркнём в этом месте, что нет проблемы в том, что при  $\ell \sim p\eta u$  соотношения  $|\boldsymbol{\ell} - \mathbf{p}\eta u| \simeq \ell$  оказываются нарушенными. В самом деле, можно далее разбить область интегрирования и оценить интеграл, когда  $\boldsymbol{\ell}$  находится в окрестности вектора  $\mathbf{p}\eta u$ , и убедиться, что эти вклады не меняют ведущий результат в пределе  $p\eta \rightarrow 0$ . Дело в том, что благодаря ИК-сходимости этого петлевого интеграла и подавлению соответствующей поправки к пропагатору из этой области интегрирования по сравнению с ведущим секулярно растущим членом, мы можем безопасно взять предел  $p\eta \rightarrow 0$  в этих выражениях. Таким образом, в

первой области  $\ell < p\eta u$  можно аппроксимировать:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I(v, p\eta u) &\simeq \frac{\Omega_{D-2}}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^{p\eta u} d\ell \ell^{D-2} \text{Im} \left\{ h_\nu(\ell v) h_\nu^* \left( \frac{\ell}{v} \right) h_\nu(p\eta u v) h_\nu^* \left( \frac{p\eta u}{v} \right) \right\} \simeq \\ &\simeq \frac{\Omega_{D-2}}{(2\pi)^{D-1}} A_-^3 \text{Im} \{A_+\} \cdot v^{2\nu} \cdot \int_0^{p\eta u} d\ell \ell^{D-2} \left[ \frac{1}{\ell^{2\nu}} + \frac{1}{(p\eta u)^{2\nu}} \right] = C_I \cdot v^{2\nu} \cdot (p\eta u)^{D-1-2\nu}, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

где  $C_I$  — некоторая численная константа. В последней строке (E.2) мы использовали соответствующие асимптотики (1.10) и пренебрегли  $\frac{1}{v^{2\nu}}$  по сравнению с  $v^{2\nu}$  при  $v > 1$ . Теперь можно далее взять интегралы по  $u$  и  $v$  и найти соответствующую поправку к пропагатору Келдыша:

$$\begin{aligned} \Delta_I G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) &\simeq \frac{8A_-^3 \text{Im}\{A_+\}}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1} \lambda^2 \int_1^{\sqrt{\frac{\nu}{p\eta}}} \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \int_v^{\frac{\nu}{p\eta v}} \frac{du}{u} \times C_I \cdot v^{2\nu} \cdot (p\eta u)^{D-1-2\nu} = \\ &= \text{const} \cdot \frac{\lambda}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1} \cdot (p\eta)^{\frac{D-1-2\nu}{2}} = \text{const} \cdot G_0^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) \cdot \lambda^2 \cdot (p\eta)^{\frac{D-1-2\nu}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Теперь видно, что поправка из этой области обращается в нуль в пределе  $p\eta \rightarrow 0$  по сравнению с секулярно растущим членом (4.8), поскольку  $D - 1 - 2\nu > 0$  для полей из дополнительной серии.

Аналогичным образом можно оценить вклад в интеграл, приходящий из области  $p\eta u < \ell < \frac{\nu}{v}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{II}(v, p\eta u) &\simeq \frac{\Omega_{D-2}}{(2\pi)^{D-1}} \int_{p\eta u}^{\frac{\nu}{v}} d\ell \ell^{D-2} \text{Im} \left\{ h_\nu^2(\ell v) h_\nu^{*2} \left( \frac{\ell}{v} \right) \right\} \simeq \\ &\simeq C_{II} \cdot v^{2\nu} \cdot \left[ \left( \frac{\nu}{v} \right)^{D-1-2\nu} - (p\eta u)^{D-1-2\nu} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Мы видим, что во втором слагаемом (E.4) зависимость от параметра  $p\eta$  такая же, как и в уравнении (E.2), что приводит к подавленному вкладу вида (E.3). В оставшейся области интегрирования  $\ell > \frac{\nu}{v}$  параметр  $p\eta$  в ведущем приближении интегралов не появляется. Более того, вследствие ИК-сходимости интегралов выше можно пренебречь вкладом (E.3) и положить  $p\eta u \rightarrow 0$  в (E.4) с той же точностью. Фактически это приводит к выражениям (4.5)–(4.7), где мы с самого начала опустили внешний импульс  $\mathbf{p}$  в петлевом интеграле по импульсу и положили  $\mathcal{F}(v, 0) \equiv F(v)$ . Аналогичный анализ различных областей интегрирования показывает, что на самом деле первый член во второй строке (E.4) даёт доминирующий вклад в петлевую поправку и определяет коэффициент  $A$  в (4.7):

$$A \simeq -8A_- \text{Im}\{A_+\} \int_1^\infty \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \cdot C_{II} \cdot \frac{\nu^{D-1-2\nu}}{v^{D-1-4\nu}} = -8A_- \text{Im}\{A_+\} \frac{\nu^{D-1-2\nu}}{D-1-2\nu} C_{II}. \quad (\text{E.5})$$

Стоит отдельно подчеркнуть, что здесь рассматриваются массивные поля  $m \neq 0$ . Следо-

вательно, все петлевые интегралы по импульсу ИК-сходятся. В чисто безмассовом случае  $m = 0$  в пространстве-времени де Ситтера имеются другие ИК-эффекты, которые выходят за рамки рассмотрения в этой работе [27].

Наконец, объясним, почему первые две строки уравнения (4.3) не дают вклада в секулярный рост. Рассмотрим произведение «внешних ног» этой диаграммы:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}|\eta, \eta_3)\rho(\mathbf{p}|\eta_4, \eta) &= 4 \cdot \text{Im} \{h_\nu(p\eta)h_\nu^*(p\eta\tau_3)\} \text{Im} \{h_\nu(p\eta\tau_4)h_\nu^*(p\eta)\} \simeq \\ &\simeq -\frac{4A_-^2}{(p\eta)^{2\nu}} \text{Re} \{h_\nu^*(p\eta\tau_3)\} \text{Re} \{h_\nu(p\eta\tau_4)\} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

где многоточие обозначает члены, подавленные множителем  $(p\eta)^{2\nu}$  в пределе  $p\eta \rightarrow 0$ . В ведущем приближении модовые функции  $h_\nu$  при малых аргументах являются чисто мнимыми (1.10), поэтому в этой области необходимо брать подавленный вклад в асимптотике для обеих внешних модовых функций. В результате, повторяя шаги между уравнениями (4.4) и (4.7), мы не получаем никаких секулярных логарифмов:

$$\begin{aligned} \Delta_2 G^K(\mathbf{p}|\eta, \eta) &\simeq \frac{4A_-^2}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1} \frac{\lambda^2}{2} \int_1^\infty \frac{d\tau_4}{\tau_4} \int_1^\infty \frac{d\tau_3}{\tau_3} (\tau_3\tau_4)^{\frac{D-1}{2}} \text{Re} \{h_\nu(p\eta\tau_3)\} \text{Re} \{h_\nu(p\eta\tau_4)\} \times \\ &\quad \times \int \frac{d^{D-1}\mathbf{q}}{(2\pi)^{D-1}} \text{Re} \left\{ h_\nu(q\tau_3) h_\nu(|\mathbf{q} - \mathbf{p}\eta|\tau_3) h_\nu^*(q\tau_4) h_\nu^*(|\mathbf{q} - \mathbf{p}\eta|\tau_4) \right\} \simeq \quad (\text{E.7}) \\ &\simeq \lambda^2 \cdot \frac{C}{(p\eta)^{2\nu}} \eta^{D-1}, \quad C = \frac{8A_-^2 \text{Im}^2 \{A_+\}}{2\nu} \int_1^\infty \frac{dv}{v^{2\nu+1}} \int \frac{d^{D-1}\boldsymbol{\ell}}{(2\pi)^{D-1}} \text{Re} \left\{ h_\nu^2(\ell v) h_\nu^{*2} \left( \frac{\ell}{v} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Выражение в последней строке корректно определено при условии  $\nu < \frac{D-1}{4}$ , которое мы для удобства накладываем в основном тексте. Однако даже в случае  $\nu > \frac{D-1}{4}$  всё равно не возникнет ни ИК-расходимости, ни секулярного роста от этого члена, как мы уже отмечали в сноске после уравнения (4.4): нужно лишь сохранить ненулевое  $p\eta$  в петлевом интеграле по импульсу, затем оценить все интегралы в первой и второй строках (E.7), и затем получить правильный коэффициент в последней строке этого уравнения.

## Приложение F

### Пузырьковая диаграмма

В этом Приложении мы анализируем выражение для нелокальной части  $\Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{bub}}$  пузырьковой диаграммы, которое дает вклад в эффективное действие для космологических возмущений. Прежде всего, реализуем  $O(D-1)$ -вращательную симметрию dS, вращательную симметрию выбранного квантового состояния и свойство  $\Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{bub}}(\mathbf{k}|\eta, \eta') = -\Pi_{\alpha\beta|\mu\nu}^{\text{bub}}(-\mathbf{k}|\eta', \eta)$ , чтобы записать общее выражение для оператора поляризации:

$$\begin{aligned}
\Pi_{00|00}^{\text{bub}} &= a, \quad \Pi_{00|0k}^{\text{bub}} = i \frac{k_k}{k^2} b, \\
\Pi_{00|kl}^{\text{bub}} &= f'_1 \delta_{kl}^\perp + f'_2 \frac{k_k k_l}{k^4} = f_1 \delta_{kl}^\perp + f_2 \frac{k_k k_l}{k^4} + f \left( \delta_{kl} - (D-1) \frac{k_k k_l}{k^2} \right), \\
\Pi_{0i|0k}^{\text{bub}} &= c_1 \delta_{ik}^\perp + c_2 \frac{k_i k_k}{k^4}, \\
\Pi_{0i|kl}^{\text{bub}} &= i \frac{k_i}{k^2} d'_1 \delta_{kl}^\perp + i d'_2 \frac{k_i k_k k_l}{k^6} + i d_3 \left[ \delta_{il}^\perp \frac{k_k}{k^2} + \delta_{ik}^\perp \frac{k_l}{k^2} \right] \equiv \\
&\equiv i \frac{k_i}{k^2} d_1 \delta_{kl}^\perp + i d_2 \frac{k_i k_k k_l}{k^6} + i d \left( \delta_{kl} - (D-1) \frac{k_k k_l}{k^2} \right) + i d_3 \left[ \delta_{il}^\perp \frac{k_k}{k^2} + \delta_{ik}^\perp \frac{k_l}{k^2} \right], \\
\Pi_{ij|kl}^{\text{bub}} &= e_1 \delta_{ij}^\perp \delta_{kl}^\perp + \left[ -\bar{e}_2 \frac{k_i k_j}{k^4} \delta_{kl}^\perp + e_2 \frac{k_k k_l}{k^4} \delta_{ij}^\perp \right] + e_3 \frac{k_i k_j k_k k_l}{k^8} + \\
&+ e_4 \left[ \delta_{ik}^\perp \frac{k_j k_l}{k^4} + \delta_{jk}^\perp \frac{k_i k_l}{k^4} + \delta_{il}^\perp \frac{k_j k_k}{k^4} + \delta_{jl}^\perp \frac{k_i k_k}{k^4} \right] + e_5 \left[ \delta_{ik}^\perp \delta_{jl}^\perp + \delta_{il}^\perp \delta_{jk}^\perp \right],
\end{aligned} \tag{F.1}$$

где все коэффициентные функции  $a, b, f$ 's,  $c$ 's,  $d$ 's,  $e$ 's зависят от  $\eta, \eta', \mathbf{k}$ , и мы также использовали черту для обозначения перестановки переменных, например,  $\bar{a}(\mathbf{k}|\eta, \eta') \stackrel{\text{def}}{=} a(\mathbf{k}|\eta', \eta)$ ;  $\delta_{kl}^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{kl} - \frac{k_k k_l}{k^2}$ . В (F.1) мы встречаем 14 коэффициентов, однако они не независимы из-за тождеств Уорда  $\hat{\nabla}_\alpha \Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{bub}} = 0$ , которые можно явно записать следующим образом:

$$\nabla_{\eta'} \Pi_{\mu\nu|00}^{\text{bub}} - (-ik_k) \Pi_{\mu\nu|0k}^{\text{bub}} + \frac{1}{\eta'} (\Pi_{\mu\nu|00}^{\text{bub}} - \Pi_{\mu\nu|kk}^{\text{bub}}) = 0, \quad \nabla_{\eta'} \Pi_{\mu\nu|0k}^{\text{bub}} - (-ik_l) \Pi_{\mu\nu|kl}^{\text{bub}} = 0. \tag{F.2}$$

Решение (F.2) можно выбрать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
a &= a_1 - a_2 + \frac{m^2}{\eta'^2} a_3, & b &= \nabla_{\eta'} a - \frac{D-2}{\eta'} \left( a_1 + a_2 - \frac{m^2}{\eta'^2} a_3 \right) + \frac{2}{\eta'} \frac{m^2}{\eta'^2} a_3, \\
c_2 &= -\nabla_{\eta'} \bar{b} + \frac{D-2}{\eta'} \bar{b} + \frac{D-1}{\eta'} b_1 + \frac{D-2}{\eta'} b_2, \\
f_1 &= a_1 + a_2 - \frac{m^2}{\eta'^2} a_3, & f_2 &= k^2 \left[ a_1 - a_2 - \frac{m^2}{\eta'^2} a_3 \right], \\
f &= \frac{1}{k^2} \frac{1}{D-2} \left( f_2 + \frac{1}{k^2} \nabla_{\eta'} b \right) \quad (\text{следовательно } f'_1 = f_1 + f, f'_2 = -\nabla_{\eta'} b), \\
d_1 &= \bar{b} + b_1 + b_2, & d_2 &= k^2 (\bar{b} + b_1), & d_3 &= \nabla_{\eta'} c_1, \\
d &= \frac{1}{k^2} \frac{1}{D-2} (d_2 - \nabla_{\eta'} c_2) \quad (\text{следовательно } d'_1 = d_1 + d, d'_2 = \nabla_{\eta'} c_2), \\
e_2 &= -\nabla_{\eta'} \bar{d}_1, & e_3 &= -\nabla_{\eta'} \bar{d}_2, & e_4 &= -\nabla_{\eta'} \bar{d}_3, \\
e_1 &= -\frac{2}{D-2} e_5 - \frac{1}{k^2} \frac{1}{D-2} e_2 - \frac{1}{D-2} \bar{f}'_1 - \eta' (\nabla_{\eta'} \bar{f}'_1 + \bar{d}'_1).
\end{aligned} \tag{F.3}$$

Тогда мы остаёмся с 7 независимыми коэффициентными функциями  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, e_5$ .

Прямой расчёт корреляторов тензора энергии-импульса (5.13) даёт следующие выражения:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} \int_p \left[ \partial_\eta \partial_{\eta'} F \partial_\eta \partial_{\eta'} \rho - \left( \mathbf{k}\mathbf{p} - p^2 - \frac{m^2}{\eta^2} \right) \partial_{\eta'} F \partial_{\eta'} \rho \right], \\
a_2 &= \frac{1}{2} \int_p (\mathbf{k}\mathbf{p} - p^2) \left[ \partial_\eta F \partial_\eta \rho - \left( \mathbf{k}\mathbf{p} - p^2 - \frac{m^2}{\eta^2} \right) F \rho \right], \\
a_3 &= \frac{1}{2} \int_p \left[ \partial_\eta F \partial_\eta \rho - \left( \mathbf{k}\mathbf{p} - p^2 - \frac{m^2}{\eta^2} \right) F \rho \right], \\
b_1 &= -2 \frac{m^2}{\eta'^2} \times \frac{1}{2} \int_p \left[ (k^2 - \mathbf{k}\mathbf{p}) \partial_\eta F \rho + \mathbf{k}\mathbf{p} F \partial_\eta \rho \right], \\
b_2 &= 2 \times \frac{1}{2} \int_p (\mathbf{k}\mathbf{p} - p^2) \left[ (k^2 - \mathbf{k}\mathbf{p}) \partial_\eta F \rho + \mathbf{k}\mathbf{p} F \partial_\eta \rho \right], \\
c_1 &= \frac{1}{D-2} \times \frac{1}{2} \int_p \left( p^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{p})^2}{k^2} \right) \left[ \partial_\eta \partial_{\eta'} F \rho + F \partial_\eta \partial_{\eta'} \rho - \partial_{\eta'} F \partial_\eta \rho - \partial_\eta F \partial_{\eta'} \rho \right], \\
e_5 &= \frac{4}{D(D-2)} \times \frac{1}{2} \int_p \left( p^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{p})^2}{k^2} \right)^2 F \rho,
\end{aligned} \tag{F.4}$$

где для краткости мы обозначили  $F = F(\mathbf{p}|\eta, \eta')$ ,  $\rho = \rho(\mathbf{k} - \mathbf{p}|\eta, \eta')$  и  $\int_p = \int \frac{d^{D-1}\mathbf{p}}{(2\pi)^{D-1}}$ . Таким образом, уравнения (F.1), (F.3), (F.4) задают полный вклад нелокальной части пузырьковой диаграммы через несколько петлевых интегралов.

## Приложение G

# Калибровочная инвариантность эффективного действия

Выберем только те вклады в  $\delta_\xi \Gamma_{\text{eff}}$ , которые содержат  $h_q^{00}$  в порядке  $\mathcal{O}(\|h_q \cdot \xi\|)$ . Для вклада, описывающего “внешний источник” в эффективном действии (5.27) возьмём вклады с  $h^{\alpha\beta}$  в (5.28) и получим:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\delta_\xi \left( h_q^{\alpha\beta} \langle T_{\alpha\beta}^{cl-cl} \rangle \right) &= \\ &= h_q^{00} \partial_\eta \xi^0 \langle T_{00}^{cl-cl} \rangle - \frac{2}{\eta} h_q^{00} \xi^0 \langle T_{00}^{cl-cl} \rangle + \frac{1}{2} \partial_\eta h_q^{00} \xi^0 \langle T_{00}^{cl-cl} \rangle + \frac{1}{2} \partial_i h_q^{00} \xi^i \langle T_{00}^{cl-cl} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

где мы также используем, что в состоянии, инвариантном относительно вращений, имеем  $\langle T_{0i}^{cl-cl} \rangle = 0$ ,  $\partial_i F(\underline{x}, \underline{x}) = 0$ , и т.д. Вариация локальных частей (5.27) в требуемом порядке равна

$$\delta_\xi \left( h_{cl}^{\mu\nu}(x) \Pi_{\mu\nu|\alpha\beta}^{\text{loc}}(\eta) h_q^{\alpha\beta}(x) \right) = -\frac{1}{2} \left[ \left( \partial_\eta \xi^0 - \frac{1}{\eta} \xi^0 \right) \langle T_{00}^{cl-cl} \rangle + \left( \partial_i \xi^j - \frac{1}{\eta} \delta_i^j \xi^0 \right) \langle T_{ij}^{cl-cl} \rangle \right] h_q^{00}. \quad (\text{G.2})$$

Наконец, мы должны учесть члены с производными от тета-функций в (5.27) после калибровочной вариации и интегрирования по частям, тогда как производные оператора поляризации в этом члене обращаются в нуль вследствие тождеств Уорда (F.2). Снова используя коммутационные соотношения (1.19), находим вклад пузырька в совпадающих точках и получаем в рассматриваемом порядке:

$$-\frac{1}{2}\delta_\xi \int h_q \Pi^{\text{bub}} h_{cl} = \frac{1}{2} \int \frac{d^D x}{H^D \eta^D} h_q^{00} \left[ \partial_i \xi^i \partial_\eta \partial_{\eta'} F(x, x) + \partial_i \xi^j \partial_{x^i} \partial_{y^j} F(x, x) \right], \quad (\text{G.3})$$

(где производные по  $\eta'$  и  $y^j$  относятся ко второму аргументу функции Келдыша). Следовательно, полная вариация в этом порядке обращается в нуль:

$$\delta_\xi \Gamma_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D x}{H^D \eta^D} h_q^{00}(x) \xi^0(x) \hat{\nabla}_\mu \langle T_{\mu 0}^{cl-cl} \rangle = 0. \quad (\text{G.4})$$

Аналогичным образом можно проверить, что все остальные компоненты  $\delta_\xi \Gamma_{\text{eff}}$  также обращаются в нуль.

## Приложение Н

### Интегральное соотношение для функций Грина

Рассмотрим действие для скалярного поля (5.4) и член взаимодействия вида:

$$\delta_{p^2} S_{\text{int}} = - \int_p \int \frac{d\eta}{H^{D-2}\eta^{D-2}} \delta p^2 \phi_{cl}(\mathbf{p}, \eta) \phi_q(-\mathbf{p}, \eta) = -\delta p^2 \int d^D x \sqrt{\hat{g}} \phi_{cl}(x) \phi_q(x). \quad (\text{H.1})$$

Тогда поправка первого порядка к точному келдышевскому пропагатору дается выражением

$$\begin{aligned} \delta_{p^2} F(\mathbf{p}|\eta, \eta) &= -i\delta p^2 \int d^{D-1}\mathbf{x} d^{D-1}\mathbf{z} \frac{d\eta'}{H^{D-2}\eta'^{D-2}} \langle \phi_{cl}(\mathbf{x}, \eta) \phi_{cl}(z) \phi_q(z) \phi_{cl}(\mathbf{y}, \eta) \rangle e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \\ &= -\delta p^2 2 \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{H^{D-2}\eta'^{D-2}} \rho(\mathbf{p}|\eta, \eta') F(\mathbf{p}|\eta, \eta'). \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

С другой стороны, по построению имеем  $\delta_{p^2} F(\mathbf{p}|\eta, \eta) = \delta p^2 \partial_{p^2} F(\mathbf{p}|\eta, \eta)$ , откуда сразу следует соотношение (5.38).

## Приложение I

### Соотношения для тензора энергии-импульса

Из определения (5.9) имеем соотношение

$$T_{ii} = -(D-1)T_{00} + (D-1)\partial_\eta\phi\partial_\eta\phi + \partial_i\phi\partial_i\phi \equiv -(D-1)T_{00} + \Delta T. \quad (\text{I.1})$$

Кроме того, условие ковариантного сохранения  $\hat{\nabla}^\mu T_{\mu\nu} = 0$  имеет вид

$$\hat{\nabla}^\mu T_{\mu\nu} = \partial_\eta T_{00} + \frac{2}{\eta}T_{00} + \partial^i T_{i0} - \frac{1}{\eta}\Delta T = 0. \quad (\text{I.2})$$

В импульсном пространстве в пределе  $k \rightarrow 0$  это уравнение даёт

$$\Delta T(\mathbf{k} = \mathbf{0}, \eta) = [\eta\partial_\eta + 2]T_{00}(\mathbf{0}|\eta). \quad (\text{I.3})$$

На языке  $\mathbf{x}$ -пространства предел  $k \rightarrow 0$  эквивалентен интегрированию по  $\mathbf{x}$ . Тогда, прежде всего, можно вывести равенство (ниже мы записываем тензор энергии-импульса в координатном представлении и используем трансляционную симметрию коррелятора):

$$\begin{aligned} & \int_\eta^\infty \frac{d\eta'}{\eta'^{D-2}} \left\langle BD \left| \left[ T_{00}(\mathbf{0}, \eta), \int_{\mathbf{x}} \Delta T(\mathbf{x}, \eta') \right] \right| BD \right\rangle = \\ &= \int_\eta^\infty \frac{d\eta'}{\eta'^{D-2}} (\eta'\partial_{\eta'} + 2) \left\langle BD \left| \left[ T_{00}(\mathbf{0}, \eta), \int_{\mathbf{x}} T_{00}(\mathbf{x}, \eta') \right] \right| BD \right\rangle = \\ &= (D-1) \int_\eta^\infty \frac{d\eta'}{\eta'^{D-2}} \left\langle BD \left| \left[ T_{00}(\mathbf{0}, \eta), \int_{\mathbf{x}} T_{00}(\mathbf{x}, \eta') \right] \right| BD \right\rangle = \\ &= (D-1) \int_\eta^\infty \frac{d\eta'}{\eta'^{D-2}} \Pi_{00|00}(\mathbf{0}|\eta, \eta'), \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

где в последней строке мы проинтегрировали по частям. Также можно использовать инвариантность корреляционных функций в  $\mathbf{x}$ -пространстве относительно преобразований  $\mathbf{x} \rightarrow a\mathbf{x}$ ,  $\eta \rightarrow a\eta$  (действительно, корреляторы зависят от dS-инвариантной переменной

$Z = \frac{\eta^2 + \eta'^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{2\eta\eta'}$  [157, 162]) и ввести новые переменные  $y = ax$ ,  $\omega = \frac{\eta^2}{\eta'}$ , и тогда получим:

$$\begin{aligned}
& \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{\eta'^{D-2}} \left\langle BD \left| \left[ \int_{\mathbf{x}} \Delta T(\mathbf{x}, \eta), T_{00}(\mathbf{0}, \eta') \right] \right| BD \right\rangle = \\
& = \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{\eta'^{D-2}} \frac{a^4}{a^{D-1}} \left\langle BD \left| \left[ \int_{\mathbf{y}} \Delta T(\mathbf{y}, a\eta), T_{00}(\mathbf{0}, a\eta') \right] \right| BD \right\rangle = \\
& = \frac{1}{\eta^D} \int_0^{\eta} \omega d\omega \left\langle BD \left| \left[ \int_{\mathbf{y}} \Delta T(\mathbf{y}, \omega), T_{00}(\mathbf{0}, \eta) \right] \right| BD \right\rangle = \\
& = \frac{1}{\eta^D} \int_0^{\eta} \omega d\omega (\omega \partial_{\omega} + 2) \left\langle BD \left| \left[ \int_{\mathbf{y}} T_{00}(\mathbf{y}, \omega), T_{00}(\mathbf{0}, \eta) \right] \right| BD \right\rangle \equiv 0,
\end{aligned} \tag{I.5}$$

где мы снова интегрируем по частям в последней строке, а во второй строке берём  $a = \frac{\eta}{\eta'}$ .

Используя полученные уравнения, находим

$$\int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{\eta'^{D-2}} \Pi_{00|ii}(\mathbf{0}|\eta, \eta') = 0, \quad \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{\eta'^{D-2}} \Pi_{ii|00}(\mathbf{0}|\eta, \eta') = -(D-1) \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\eta'}{\eta'^{D-2}} \Pi_{00|00}. \tag{I.6}$$

## Приложение J

### Масса фотона в AdS<sub>4</sub>

Удобно рассматривать AdS<sub>4</sub> как гиперboloид, вложенный в пятимерное псевдоевклидово пространство с координатами  $X^A$ :  $\eta_{AB}X^AX^B = L^2$ , где  $\eta_{AB} = \text{diag}(1, 1, -1, -1, -1)$ . Следуя подходу, разработанному в работах [147, 163], сначала запишем исходное действие в виде:

$$S[B^A, \phi] = \int d\mu_X \left[ -\frac{1}{4}F_{AB}F^{AB} + |(\partial_A^0 + ieB_A)\phi|^2 - m^2|\phi|^2 \right], \quad (\text{J.1})$$

где  $d\mu_X = 2L\delta(X^2 - L^2)d^5X$  — AdS-инвариантная мера,  $\partial_A^0 = \partial_A - \frac{1}{X^2}X_AX^I\partial_I$  — касательная производная,  $F_{AB} = (\partial_A^0 - X_A)B_B - (\partial_B^0 - X_B)B_A$ , а  $B^A$  — векторный потенциал, который считается касательным к гиперboloиду:  $X^AB_A = 0$ ,  $X^A \in \text{AdS}_4$ . Векторный потенциал в AdS<sub>4</sub> получается как pull-back поля  $B_A$ . Наложим дополнительное условие поперечности  $\partial_AB_t^A = 0$ , так что свободное уравнение движения для векторного потенциала упрощается до обычного волнового уравнения:

$$[X^2\partial^2 - (X \cdot \partial)^2 - 3(X \cdot \partial) - 2] B_t^A = 0. \quad (\text{J.2})$$

Это волновое уравнение для полей в так называемом безмассовом представлении  $D(2, 1)$ <sup>1</sup> [125, 126]. Соответствующая калибровочная вариация [126]  $\delta_\varphi B_A = X^2\partial_A\varphi - X_AX^I\partial_I\varphi$  определяется скаляром  $\varphi \in D(3, 0)$ . Мы можем построить проектор на поперечный векторный

---

<sup>1</sup>Тут  $D(E, s)$  обозначает бесконечномерное, неприводимое представление группы изометрии пространства вложения (неприводимым унитарным представлением, UIR), которое соответствует физическим состояниям теории скалярного поля. Здесь  $E$  и  $s$  соответствуют минимальной энергии и угловому моменту (спину) данного представления, так что остальные состояния в нём получаются действием соответствующих операторов рождения.

потенциал  $B_t^A$  с помощью следующего калибровочного преобразования:

$$\begin{aligned} B_t^A &= \hat{\mathcal{P}}_t^{AB} B_B = B^A - [X^2 \partial^A \varphi - X^A X^I \partial_I \varphi], \\ \varphi &= \frac{1}{X^2 \partial^2 - (X \cdot \partial)^2 - 3(X \cdot \partial)} \partial^C B_C. \end{aligned} \quad (\text{J.3})$$

Связывая обычный массовый член в (J.1) с параметром  $E$  в четырёхмерном случае  $m^2 L^2 = E(3 - E)$ , запишем уравнение для функции Уайтмана:

$$[(1 - Z^2) \partial_Z^2 - 4Z \partial_Z + E(3 - E)] W_E(Z) = 0, \quad (\text{J.4})$$

где  $Z(X, Y) = \frac{X^M Y_M}{L^2}$  — инвариантная переменная. Решение при  $E \neq 1, 2$  имеет вид [127, 162]:

$$W_E(Z) = \frac{1}{4\pi^2 L^2} \frac{\Gamma(E) \Gamma(E - 1)}{\Gamma(2E - 2)} \frac{1}{Z^E} {}_1F_2 \left( E, E - 1; 2E - 2; \frac{1}{Z} \right). \quad (\text{J.5})$$

Для конформно связанного скаляра  $E = 1, 2$  решение выглядит так:

$$W_c(Z) = \frac{1}{4\pi^2 L^2} \left( \alpha \frac{1}{Z^2 - 1} + \beta \frac{Z}{Z^2 - 1} \right), \quad (\text{J.6})$$

где выбор  $\alpha, \beta$  соответствует различным граничным условиям. Фейнмановский пропагатор можно получить введением  $i\epsilon$ -прескрипции:  $G_F(X, Y) = W(Z + i\epsilon)$ . Ядро обратного оператора в (J.3), умноженное на  $L^2$ , равно  $iW_3(Z + i\epsilon)$ .

Поскольку фон  $\text{AdS}_4$  является стационарным, в этом случае можно использовать обычную фейнмановскую диаграммную технику. Заметим, что в ИК-пределе большого геодезического расстояния имеем

$$W_3(Z) = \frac{1}{12\pi^2 L^2} \frac{1}{Z^3} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{Z^4} \right), \quad Z \rightarrow \infty. \quad (\text{J.7})$$

Следовательно, если индуцированная масса фотона действительно ненулевая, то в его собственной энергии мы найдём член, пропорциональный проектору (J.3), и, вместе с тем, следующий вклад в эффективное действие:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\text{eff}} &= \frac{m_{\text{ph}}^2}{2} \int d\mu_X B_A \hat{\mathcal{P}}_t^{AB} B_B = \\ &= \frac{m_{\text{ph}}^2}{2} \int d\mu_X \left[ B^A B_A + X^2 \partial^A B_A \frac{1}{X^2 \partial^2 - (X \cdot \partial)^2 - 3(X \cdot \partial)} \partial^C B_C \right] \sim \\ &\sim \frac{m_{\text{ph}}^2}{2} \int d\mu_X d\mu_Y \partial^A B_A(X) \frac{i}{12\pi^2 L^2} \frac{1}{Z^3} \partial^C B_C(Y), \end{aligned} \quad (\text{J.8})$$

где в последней строке мы оставили только нелокальную часть выражения в ИК-области. Теперь мы напрямую проинтегрируем по скалярным полям с конформной массой в (J.1) и опустим члены, пропорциональные  $B^A B_A$ , поскольку они не приводят к структуре, как у последнего слагаемого в уравнении (J.8):

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\text{eff}} &= -i\frac{e^2}{2} \int d\mu_X d\mu_Y B^A(X) B^C(Y) \frac{Y_A X_C}{L^4} \left[ 2W'_c W_c^{*'} - W_c W_c^{*''} - W_c'' W_c^* \right] = \\ &= -i\frac{e^2}{2} \int d\mu_X d\mu_Y \partial^A B_A(X) \partial^C B_C(Y) f(Z), \end{aligned} \quad (\text{J.9})$$

где мы использовали  $Y_A = L^2 \partial_A Z$ ,  $X_C = L^2 \partial_C Z$  и ввели функцию  $f(Z)$ , которая является решением уравнения  $f'' = 2W'_c W_c^{*'} - W_c W_c^{*''} - W_c'' W_c^*$ , убывающим на бесконечности. Решение этого дифференциального уравнения действительно содержит член, пропорциональный  $\frac{1}{Z^3}$ :

$$f(Z) \simeq -\frac{1}{16\pi^4 L^4} \frac{2}{3} \text{Re}(\alpha^* \beta) \frac{1}{Z^3} + \dots \quad (\text{J.10})$$

Подставляя этот результат в эффективное действие (J.9) и сравнивая коэффициенты с (J.8), находим

$$m_{\text{ph}}^2 = \frac{e^2}{2\pi^2 L^2} \text{Re}(\alpha^* \beta), \quad (\text{J.11})$$

что в действительности не обращается в нуль, когда  $\alpha$  и  $\beta$  одновременно ненулевые.

Этот результат в пространстве AdS на простом примере скалярной КЭД подтверждает выводы, сделанные в работах [127, 128], что такие особенности AdS, как дискретный спектр уровней, могут приводить к появлению голдстоуновских бозонов как связанных состояний, создаваемых электрическим током или тензором энергии-импульса даже в свободной теории поля. Действительно, в случае КЭД мы видим пропагатор бозона из представления  $D(3, 0)$  в уравнениях (J.8), (J.9), что является аналогом полюса при  $k^2 = 0$  в механизме Хиггса в Стандартной модели с обменом безмассовым полем на Рис. 5.1.

## Литература

- [1] J. Polchinski. *String Theory. Vol. 1: An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [2] L. Randall and R. Sundrum. A large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3370–3373, 1999.
- [3] J. M. Maldacena. The large n limit of superconformal field theories and supergravity. *Int. J. Theor. Phys.*, 38:1113–1133, 1999.
- [4] G. 't Hooft and M. Veltman. One-loop divergences in the theory of gravitation. *Ann. Inst. H. Poincaré A*, 20:69–94, 1974.
- [5] K. S. Stelle. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 16:953–969, 1977.
- [6] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982.
- [7] A. A. Grib, S. G. Mamaev, and V. M. Mostepanenko. *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*. Friedmann Laboratory Publishing, St. Petersburg, 1994.
- [8] Julian Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, 82:664–679, 1951.
- [9] W. G. Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, 14:870–892, 1976.
- [10] S. W. Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 248:30–31, 1974.
- [11] S. W. Hawking. Particle creation by black holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.
- [12] Leonard Parker. Particle creation in expanding universes. *Phys. Rev. Lett.*, 21:562–564, 1968.

- [13] Ya. B. Zel'dovich and A. A. Starobinsky. Particle production and vacuum polarization in an anisotropic gravitational field. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 61:2161–2175, 1971.
- [14] Alan H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, 1981.
- [15] A. A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys. Lett. B*, 91:99–102, 1980.
- [16] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov. Quantum fluctuations and a nonsingular universe. *JETP Lett.*, 33:532–535, 1981.
- [17] T. S. Bunch and P. C. W. Davies. Quantum field theory in de sitter space: Renormalization by point splitting. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 360:117–134, 1978.
- [18] Ulf H. Danielsson. A note on inflation and trans-planckian physics. *Phys. Rev. D*, 66:023511, 2002.
- [19] J. Martin and R. H. Brandenberger. The trans-planckian problem of inflationary cosmology. *Phys. Rev. D*, 63:123501, 2001.
- [20] A. A. Starobinsky and J. Yokoyama. Equilibrium state of a self-interacting scalar field in the de sitter background. *Phys. Rev. D*, 50:6357–6368, 1994.
- [21] N. C. Tsamis and R. P. Woodard. The quantum gravitational back-reaction on inflation. *Annals Phys.*, 253:1–54, 1997.
- [22] Emil T. Akhmedov and P. V. Buividovich. Interacting Field Theories in de Sitter Space are Non-Unitary. *Phys. Rev. D*, 78:104005, 2008.
- [23] E. T. Akhmedov. Lecture notes on interacting quantum fields in de Sitter space. *Int. J. Mod. Phys. D*, 23:1430001, 2014.
- [24] N. D. Birrell and P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2 1984.
- [25] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, and Л.П. Питаевский. *Теоретическая физика: В 10-ти т. : Учебное пособие для физ. спец. ун-тов*. Number т. 10. Физматлит, 2001.
- [26] Dmitry Krotov and Alexander M. Polyakov. Infrared Sensitivity of Unstable Vacua. *Nucl. Phys. B*, 849:410–432, 2011.

- [27] E. T. Akhmedov, U. Moschella, and F. K. Popov. Characters of different secular effects in various patches of de Sitter space. *Phys. Rev. D*, 99(8):086009, 2019.
- [28] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev, and F. K. Popov. Secularly growing loop corrections in strong electric fields. *JHEP*, 09:071, 2014.
- [29] E. T. Akhmedov and F. K. Popov. A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields. *JHEP*, 09:085, 2015.
- [30] E. T. Akhmedov, E. N. Lanina, and D. A. Trunin. Quantization in background scalar fields. *Phys. Rev. D*, 101(2):025005, 2020.
- [31] E. T. Akhmedov and S. O. Alexeev. Dynamical Casimir effect and loop corrections. *Phys. Rev. D*, 96(6):065001, 2017.
- [32] Ф. К. Попов. *Нестационарные явления во внешних сильных полях*. PhD thesis, Математический институт имени В. А. Стеклова РАН, М., 2016. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.02.
- [33] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1995.
- [34] E. T. Akhmedov, O. N. Diatlyk, and A. G. Semenov. Out-of-Equilibrium Two-Dimensional Yukawa Theory in a Strong Scalar Wave Background. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 309(1):12–30, 2020.
- [35] Julian S. Schwinger. On gauge invariance and vacuum polarization. *Phys. Rev.*, 82:664–679, 1951.
- [36] S. P. Gavrilov and Dmitry M. Gitman. One-loop energy-momentum tensor in QED with electric-like background. *Phys. Rev. D*, 78:045017, 2008.
- [37] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper, and E. Mottola. Fermion pair production in a strong electric field. *Phys. Rev. D*, 45:4659–4671, Jun 1992.
- [38] D. S. F. Crothers. Asymptotic expansions for parabolic cylinder functions of large order and argument. *J. Phys. A: Gen. Phys.*, 5:1680–1688, 1972.
- [39] Paul R. Anderson and Emil Mottola. Quantum vacuum instability of “eternal” de Sitter space. *Phys. Rev. D*, 89:104039, 2014.

- [40] Paul R. Anderson and Emil Mottola. Instability of global de Sitter space to particle creation. *Phys. Rev. D*, 89:104038, 2014.
- [41] Harry Bateman, Arthur Erdélyi, et al. *Higher transcendental functions. Vol. 2*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [42] Jean-Marie Stéphan and Jérôme Dubail. Local quantum quenches in critical one-dimensional systems: entanglement, the loschmidtecho, and light-cone effects. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011(08):P08019, 2011.
- [43] Martin Ganahl, Elias Rabel, Fabian H. L. Essler, and H. G. Evertz. Observation of complex bound states in the spin-1/2 heisenberg  $xxz$  chain using local quantum quenches. *Phys. Rev. Lett.*, 108:077206, Feb 2012.
- [44] Abolfazl Bayat, Bedoor Alkurtass, Pasquale Sodano, Henrik Johannesson, and Sougato Bose. Measurement quench in many-body systems. *Phys. Rev. Lett.*, 121:030601, Jul 2018.
- [45] Asmi Haldar, Krishnanand Mallayya, Markus Heyl, Frank Pollmann, Marcos Rigol, and Arnab Das. Signatures of quantum phase transitions after quenches in quantum chaotic one-dimensional systems. *Physical Review X*, 11(3):031062, 2021.
- [46] Kai He and Marcos Rigol. Initial-state dependence of the quench dynamics in integrable quantum systems. iii. chaotic states. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 87(4):043615, 2013.
- [47] Ranjan Modak, Vincenzo Alba, and Pasquale Calabrese. Entanglement revivals as a probe of scrambling in finite quantum systems. *J. Stat. Mech.*, 2008:083110, 2020.
- [48] Pasquale Calabrese and John Cardy. Entanglement and correlation functions following a local quench: a conformal field theory approach. *J. Stat. Mech.*, 0710(10):P10004, 2007.
- [49] Dmitry S. Ageev and Vladimir A. Bykov. From confinement to chaos in AdS/CFT correspondence via non-equilibrium local states. 7 2025.
- [50] Dmitry S. Ageev and Vasilii V. Pushkarev. Chaotic signatures in free field theory. 7 2025.
- [51] Dmitry S. Ageev, Irina Ya. Aref'eva, Andrey A. Bagrov, and Mikhail I. Katsnelson. Holographic local quench and effective complexity. *JHEP*, 08:071, 2018.
- [52] Pasquale Calabrese and John L. Cardy. Time-dependence of correlation functions following a quantum quench. *Phys. Rev. Lett.*, 96:136801, 2006.

- [53] Spyros Sotiriadis and John Cardy. Quantum quench in interacting field theory: A Self-consistent approximation. *Phys. Rev. B*, 81:134305, 2010.
- [54] Parijat Banerjee, Adwait Gaikwad, Anurag Kaushal, and Gautam Mandal. Quantum quench and thermalization to GGE in arbitrary dimensions and the odd-even effect. *JHEP*, 09:027, 2020.
- [55] Pasquale Calabrese and John Cardy. Quantum Quenches in Extended Systems. *J. Stat. Mech.*, 0706:P06008, 2007.
- [56] Sumit R. Das, Damián A. Galante, and Robert C. Myers. Universality in fast quantum quenches. *JHEP*, 02:167, 2015.
- [57] Pasquale Calabrese and John Cardy. Quantum quenches in  $1 + 1$  dimensional conformal field theories. *J. Stat. Mech.*, 1606(6):064003, 2016.
- [58] Ling-Yan Hung, Michael Smolkin, and Evgeny Sorkin. Modification of late time phase structure by quantum quenches. *Phys. Rev. Lett.*, 109:155702, 2012.
- [59] Anushya Chandran, Amir Erez, Steven S Gubser, and Shivaaji L Sondhi. Kibble-zurek problem: Universality and the scaling limit. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, 86(6):064304, 2012.
- [60] Mudassir Moosa. Evolution of Complexity Following a Global Quench. *JHEP*, 03:031, 2018.
- [61] D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, and R. Holman. Out-of-equilibrium dynamics of an inflationary phase transition. *Phys. Rev. D*, 55:3373–3388, 1997.
- [62] D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, R. Holman, and S. Prem Kumar. Nonperturbative quantum dynamics of a new inflation model. *Phys. Rev. D*, 57:2166–2185, 1998.
- [63] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, and D. J. Schwarz. Phase transitions in the early and the present universe. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 56:441–500, 2006.
- [64] Pedro Carrilho and Raquel H. Ribeiro. Quantum quenches during inflation. *Phys. Rev. D*, 95(4):043516, 2017.
- [65] Minu Joy, Varun Sahni, and Alexei A. Starobinsky. A New Universal Local Feature in the Inflationary Perturbation Spectrum. *Phys. Rev. D*, 77:023514, 2008.

- [66] Dhiraj Kumar Hazra, Moumita Aich, Rajeev Kumar Jain, L. Sriramkumar, and Tarun Souradeep. Primordial features due to a step in the inflaton potential. *JCAP*, 10:008, 2010.
- [67] Subhashish Banerjee, Sayantan Choudhury, Satyaki Chowdhury, Johannes Knaute, Sudhakar Panda, and K. Shirish. Thermalization in quenched open quantum cosmology. *Nucl. Phys. B*, 996:116368, 2023.
- [68] Andreas Albrecht, R. Holman, and Benoit J. Richard. Equilibration of a quantum field in de Sitter space-time. *Phys. Rev. D*, 91(4):043517, 2015.
- [69] Juergen Berges. Introduction to nonequilibrium quantum field theory. *AIP Conf. Proc.*, 739(1):3–62, 2004.
- [70] Alex Kamenev. *Field theory of non-equilibrium systems*. Cambridge University Press, 2023.
- [71] P. I. Arseev. On the nonequilibrium diagram technique: derivation, some features and applications. *Phys. Usp.*, 58(12):1159–1205, 2015.
- [72] A. A. Radovskaya and A. G. Semenov. Local Quench within the Keldysh Technique. *JETP Lett.*, 118(12):922–928, 2023.
- [73] Dmitry S. Ageev, Aleksandr I. Belokon, and Vasilii V. Pushkarev. From locality to irregularity: introducing local quenches in massive scalar field theory. *JHEP*, 05:188, 2023. [Erratum: JHEP 12, 184 (2023)].
- [74] Julien Serreau and Renaud Parentani. Nonperturbative resummation of de Sitter infrared logarithms in the large-N limit. *Phys. Rev. D*, 87:085012, 2013.
- [75] E. T. Akhmedov, V. I. Lapushkin, and D. I. Sadekov. Light fields in various patches of de Sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, 111(12):125015, 2025.
- [76] E. T. Akhmedov. Curved space equilibration versus flat space thermalization: A short review. *Mod. Phys. Lett. A*, 36(20):2130020, 2021.
- [77] Alexei A. Starobinsky and Junichi Yokoyama. Equilibrium state of a selfinteracting scalar field in the De Sitter background. *Phys. Rev. D*, 50:6357–6368, 1994.
- [78] N. C. Tsamis and R. P. Woodard. Stochastic quantum gravitational inflation. *Nucl. Phys. B*, 724:295–328, 2005.

- [79] Donald Marolf and Ian A. Morrison. The IR stability of de Sitter: Loop corrections to scalar propagators. *Phys. Rev. D*, 82:105032, 2010.
- [80] Donald Marolf and Ian A. Morrison. The IR stability of de Sitter QFT: results at all orders. *Phys. Rev. D*, 84:044040, 2011.
- [81] Atsushi Higuchi, Donald Marolf, and Ian A. Morrison. On the Equivalence between Euclidean and In-In Formalisms in de Sitter QFT. *Phys. Rev. D*, 83:084029, 2011.
- [82] G. Moreau and J. Serreau. Stability of de Sitter spacetime against infrared quantum scalar field fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, 122(1):011302, 2019.
- [83] Maxime Guilleux and Julien Serreau. Quantum scalar fields in de Sitter space from the nonperturbative renormalization group. *Phys. Rev. D*, 92(8):084010, 2015.
- [84] Stefan Hollands. Correlators, Feynman diagrams, and quantum no-hair in deSitter spacetime. *Commun. Math. Phys.*, 319:1–68, 2013.
- [85] Victor Gorbenko and Leonardo Senatore.  $\lambda\phi^4$  in dS. *Unknown*, 10 2019.
- [86] Emil T. Akhmedov and Philipp Burda. A Simple way to take into account back reaction on pair creation. *Phys. Lett. B*, 687:267–270, 2010.
- [87] E. T. Akhmedov, U. Moschella, K. E. Pavlenko, and F. K. Popov. Infrared dynamics of massive scalars from the complementary series in de Sitter space. *Phys. Rev. D*, 96(2):025002, 2017.
- [88] Alexei A. Starobinsky. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett. B*, 91:99–102, 1980.
- [89] Alexei A. Starobinsky. Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations. *Phys. Lett. B*, 117:175–178, 1982.
- [90] Andrei D. Linde. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett. B*, 108:389–393, 1982.
- [91] Andrei D. Linde. Chaotic Inflation. *Phys. Lett. B*, 129:177–181, 1983.
- [92] Alan H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, 1981.

- [93] Alan H. Guth and S. Y. Pi. Fluctuations in the New Inflationary Universe. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1110–1113, 1982.
- [94] Andreas Albrecht and Paul J. Steinhardt. Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1220–1223, 1982.
- [95] A. M. Polyakov. De Sitter space and eternity. *Nucl. Phys. B*, 797:199–217, 2008.
- [96] A. M. Polyakov. Decay of Vacuum Energy. *Nucl. Phys. B*, 834:316–329, 2010.
- [97] Emil T. Akhmedov, P. V. Buividovich, and Douglas A. Singleton. De Sitter space and perpetuum mobile. *Phys. Atom. Nucl.*, 75:525–529, 2012.
- [98] A. M. Polyakov. Infrared instability of the de Sitter space. *Unknown*, 9 2012.
- [99] R. P. Woodard. Resummations for Inflationary Quantum Gravity. *Unknown*, 1 2025.
- [100] S. P. Miao, N. C. Tsamis, and R. P. Woodard. Summing gravitational effects from loops of inflationary scalars. *Class. Quant. Grav.*, 41(21):215007, 2024.
- [101] D. Glavan, S. P. Miao, T. Prokopec, and R. P. Woodard. Large logarithms from quantum gravitational corrections to a massless, minimally coupled scalar on de Sitter. *JHEP*, 03:088, 2022.
- [102] Markus B. Fröb and Enric Verdaguer. Quantum corrections to the gravitational potentials of a point source due to conformal fields in de Sitter. *JCAP*, 03:015, 2016.
- [103] T. Brunier, V. K. Onemli, and R. P. Woodard. Two loop scalar self-mass during inflation. *Class. Quant. Grav.*, 22:59–84, 2005.
- [104] Javier Huenupi, Ellie Hughes, Gonzalo A. Palma, and Spyros Sypsas. Regularizing infrared divergences in de Sitter spacetime: Loops, dimensional regularization, and cutoffs. *Phys. Rev. D*, 110(12):123536, 2024.
- [105] Stefano Galanda, Nicola Pinamonti, and Leonardo Sangaletti. Secular growths and their relation to equilibrium states in perturbative qft. In *Annales Henri Poincaré*, pages 1–63. Springer, 2025.
- [106] Jurgen Berges. Nonequilibrium Quantum Fields: From Cold Atoms to Cosmology. *Unknown*, 3 2015.

- [107] E. T. Akhmedov, F. K. Popov, and V. M. Slepukhin. Infrared dynamics of the massive  $\phi^4$  theory on de Sitter space. *Phys. Rev. D*, 88:024021, 2013.
- [108] E. T. Akhmedov. Physical meaning and consequences of the loop infrared divergences in global de Sitter space. *Phys. Rev. D*, 87:044049, 2013.
- [109] A. M. Polyakov. Infrared instability of the de Sitter space, 2012.
- [110] Atsushi Higuchi, Donald Marolf, and Ian A. Morrison. Equivalence between euclidean and in-in formalisms in de Sitter qft. *Physical Review D*, 83(8), April 2011.
- [111] Stefan Hollands. Correlators, feynman diagrams, and quantum no-hair in de Sitter spacetime, 2010.
- [112] E. T. Akhmedov, I. V. Kochergin, and M. N. Milovanova. Isometry invariance of exact correlation functions in various charts of Minkowski and de Sitter spaces. *Phys. Rev. D*, 107(10):105015, 2023.
- [113] E. T. Akhmedov and K. A. Kazarnovskii. On two approaches to quantization in strong background fields. *Unknown*, 10 2024.
- [114] Florian Gautier and Julien Serreau. Infrared dynamics in de Sitter space from Schwinger-Dyson equations. *Phys. Lett. B*, 727:541–547, 2013.
- [115] Maxime Guilleux and Julien Serreau. Nonperturbative renormalization group for scalar fields in de Sitter space: beyond the local potential approximation. *Phys. Rev. D*, 95(4):045003, 2017.
- [116] Fedor K. Popov. Debye mass in de Sitter space. *JHEP*, 06:033, 2018.
- [117] Dmitry S Gorbunov and Valery A Rubakov. *Introduction to the theory of the early universe: cosmological perturbations and inflationary theory*. World Scientific, Singapore, 2011.
- [118] M. Fierz and W. Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 173:211–232, 1939.
- [119] Claudia de Rham. Massive Gravity. *Living Rev. Rel.*, 17:7, 2014.
- [120] Frank Ferrari, Semyon Klevtsov, and Steve Zelditch. Gravitational Actions in Two Dimensions and the Mabuchi Functional. *Nucl. Phys. B*, 859:341–369, 2012.

- [121] Corinne de Lacroix de Lavalette. *Two-dimensional quantum gravity coupled to non-conformal matter*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, September 2017.
- [122] J. H. Jeans. The stability of a spherical nebula. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 199:1–53, January 1902.
- [123] D.S. Gorbunov and V.A. Rubakov. *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory*. G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series. World Scientific, 2011.
- [124] E. T. Akhmedov and Ph. Burda. Solution of the Dyson–Schwinger equation on de Sitter background in IR limit. *Phys. Rev. D*, 86:044031, 2012.
- [125] H. Nicolai. REPRESENTATIONS OF SUPERSYMMETRY IN ANTI-DE SITTER SPACE. In *Spring School on Supergravity and Supersymmetry*, 4 1984.
- [126] Christian Fronsdal. Singletons and Massless, Integral Spin Fields on de Sitter Space (Elementary Particles in a Curved Space. 7. *Phys. Rev. D*, 20:848–856, 1979.
- [127] M. Porrati. Higgs phenomenon for 4-D gravity in anti-de Sitter space. *JHEP*, 04:058, 2002.
- [128] M. Porrati. Higgs phenomenon for the graviton in ADS space. *Mod. Phys. Lett. A*, 18:1793–1802, 2003.
- [129] Joao Penedones, Kamran Salehi Vaziri, and Zimo Sun. Hilbert space of Quantum Field Theory in de Sitter spacetime. 1 2023.
- [130] Maud Jaccard, Michele Maggiore, and Ermis Mitsou. Bardeen variables and hidden gauge symmetries in linearized massive gravity. *Phys. Rev. D*, 87(4):044017, 2013.
- [131] Zi-Liang Wang and Wen-Yuan Ai. Dissipation of oscillating scalar backgrounds in an FLRW universe. *JHEP*, 11:075, 2022.
- [132] Wen-Yuan Ai, Marco Drewes, Dražen Glavan, and Jan Hajer. Oscillating scalar dissipating in a medium. *JHEP*, 11:160, 2021.
- [133] Alex Kamenev. *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*. Cambridge University Press, 2011.
- [134] Alex Kamenev. Course 3 many-body theory of non-equilibrium systems. In *Les Houches*, volume 81, pages 177–246. Elsevier, 2005.

- [135] C. Itzykson and J.B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012.
- [136] André Lichnerowicz. Republication of: Propagators, commutators and anti-commutators in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 50:1–44, 2018.
- [137] G.W. Gibbons and M.J. Perry. Quantizing gravitational instantons. *Nuclear Physics B*, 146(1):90–108, 1978.
- [138] T. Prokopec, O. Tornkvist, and R. P. Woodard. One loop vacuum polarization in a locally de Sitter background. *Annals Phys.*, 303:251–274, 2003.
- [139] P. C. W. Davies and S. A. Fulling. Quantum vacuum energy in two dimensional space-times. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 354(1676):59–77, April 1977.
- [140] S. M. Christensen. Vacuum expectation value of the stress tensor in an arbitrary curved background: The covariant point-separation method. *Phys. Rev. D*, 14:2490–2501, Nov 1976.
- [141] T. S. Bunch and P. C. W. Davies. Quantum Field Theory in de Sitter Space: Renormalization by Point Splitting. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 360:117–134, 1978.
- [142] K. V. Bazarov. Notes on peculiarities of quantum fields in space-times with horizons. *Class. Quant. Grav.*, 39(21):217001, 2022.
- [143] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, and M. Simionato. Nonequilibrium quantum plasmas in scalar QED: Photon production, magnetic and Debye masses and conductivity. *Phys. Rev. D*, 61:085007, 2000.
- [144] Alexander M. Polyakov and Fedor K. Popov. Kronecker anomalies and gravitational striction. *arXiv: High Energy Physics - Theory*, 3 2022.
- [145] Alexei M. Tsvelik. *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2 edition, 2003.
- [146] Emil T. Akhmedov, Ugo Moschella, and Fedor K. Popov. Ultraviolet phenomena in AdS self-interacting quantum field theory. *JHEP*, 03:183, 2018.
- [147] E. T. Akhmedov, A. A. Artemev, and I. V. Kochergin. Interacting quantum fields in various charts of anti-de Sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, 103(4):045009, 2021.

- [148] E. T. Akhmedov. IR divergences and kinetic equation in de Sitter space. Poincare patch: Principal series. *JHEP*, 01:066, 2012.
- [149] Tomislav Prokopec. Symmetry breaking and the Goldstone theorem in de Sitter space. *JCAP*, 12:023, 2012.
- [150] Gerard 't Hooft and M. J. G. Veltman. One loop divergencies in the theory of gravitation. *Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A*, 20:69–94, 1974.
- [151] Markus B. Fröb. Fully renormalized stress tensor correlator in flat space. *Phys. Rev. D*, 88:045011, 2013.
- [152] Sohyun Park and R. P. Woodard. Scalar Contribution to the Graviton Self-Energy during Inflation. *Phys. Rev. D*, 83:084049, 2011.
- [153] L. H. Ford and R. P. Woodard. Stress tensor correlators in the Schwinger-Keldysh formalism. *Class. Quant. Grav.*, 22:1637–1647, 2005.
- [154] Alexander M. Polyakov. Quantum Geometry of Bosonic Strings. *Phys. Lett. B*, 103:207–210, 1981.
- [155] Harold Erbin. Notes on 2d quantum gravity and liouville theory. 2015.
- [156] Adel Bilal and Corinne de Lacroix. 2D gravitational Mabuchi action on Riemann surfaces with boundaries. *JHEP*, 11:154, 2017.
- [157] E. T. Akhmedov, K. V. Bazarov, D. V. Diakonov, U. Moschella, F. K. Popov, and C. Schubert. Propagators and Gaussian effective actions in various patches of de Sitter space. *Phys. Rev. D*, 100(10):105011, 2019.
- [158] D. V. Diakonov and K. V. Bazarov. Thermal loops in the accelerating frame. 1 2023.
- [159] Elba Alonso-Monsalve and David I. Kaiser. Debye Screening of Non-Abelian Plasmas in Curved Spacetimes. 9 2023.
- [160] V. I. Zakharov. Linearized gravitation theory and the graviton mass. *JETP Lett.*, 12:312, 1970.
- [161] Kurt Hinterbichler. Theoretical Aspects of Massive Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 84:671–710, 2012.

- [162] Bruce Allen and Theodore Jacobson. Vector Two Point Functions in Maximally Symmetric Spaces. *Commun. Math. Phys.*, 103:669, 1986.
- [163] H. Janssen and C. Dullemond. Propagators for Massive Vector Fields in Anti-de Sitter Space-time Using Stueckelberg's Lagrangian. *J. Math. Phys.*, 28:1023, 1987.