

ОТЗЫВ

официального оппонента Решетихина Николая Юрьевича
на диссертационную работу Галахова Дмитрия Максимовича
«Дефекты в суперсимметричных теориях поля и теории струн»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.3.3 - теоретическая физика

Диссертационная работа Галахова Дмитрия Максимовича посвящена изучению свойств топологических дефектов в квантовой теории поля и теории струн при наличии суперсимметрии. Топологические дефекты являются важным предметом исследований в современных теоретической и математической физике, считается, что их внутренняя динамика обуславливает поведение физических систем в режиме сильной связи. Помимо этого естественные законы сохранения для топологических зарядов защищают объекты с топологической природой от квантовых и стохастических шумов. Конструкция таких объектов в квантовой теории поля и теории струн неизменно вовлекает в себя геометрические свойства пространства-времени физической теории, а также пространств параметров и полей. В современной литературе хорошо известна роль топологических объектов в суперсимметричных квантовых теориях поля в современных областях математики и математической физики, таких как алгебраическая геометрия, теория инвариантов многообразий, исчислительная геометрия, квантовые группы. Это подчеркивает **актуальность** произведенного в диссертационной работе исследования.

В работе физические модели топологических дефектов применены к двум интереснейшим объектам математической физики: алгебрам аффинных янгианов и категорифицированным инвариантам узлов. Ассоциативная алгебра янгианов возникает естественным образом в R-матричном подходе к интегрируемым спинным цепочкам, а с другой стороны может иметь независимую дринфельдовскую формулировку, основанную на соответствующей диаграмме Дынкина, или матрице Картана. В работе строится новое семейство алгебр, именуемых аффинными колчанными янгианами, где классификация аффинными диаграммами Дынкина обобщается до классификации колчанными диаграммами, отвечающими торическим трехмерным многообразиям Калаби-Яу.

Теория инвариантов узлов тесно связана с трехмерной теорией Черна-Саймонса и теорией квантовых групп. В силу этой связи квантовые корреляторы вильсоновских петель в физической трехмерной теории Черна-Саймонса могут быть вычислены непертурбативно точно и соответствуют так называемым полиномиальным инвариантам узлов и зацеплений Александера, Джонса и ХОМФЛИ. Категорификация позволяет обобщить их до полиномов большего числа переменных, которые различают больше узлов, и в идеале могут оказаться полными полиномиальными инвариантами. Однако задача о построении

физической модели, всецело описывающей категорифицированные инварианты, остается открытым вопросом по сей день и вызывает живейший интерес у физиков и математиков. Таким образом **научная новизна** работы заключается в том, что в работе предложены новые методы вычисления и исследования свойств суперсимметричных состояний дефектов, демонстрирующих поведение выше описанных математических объектов. Построены новые семейства алгебр колчаных янгианов и их обобщения, как алгебры рассеяния БПС состояний в системах D-бран на многообразиях Калаби-Яу, и категориальные инварианты узлов через квантовые числа дефектов в топологической теории струн.

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и одного приложения.

Во **введении** дается общая характеристика работы, обоснована актуальность и научная новизна представленного исследования, предъявлены положения, выносимые на защиту. Обоснована достоверность полученных результатов и описана апробация исследования. Указан личный вклад автора в исследование.

В **первой главе** вводится понятие топологических дефектов в суперсимметричных теориях поля и теории струн. Дается определение дефекта типа «интерфейс», интерполирующего между двумя разными теориями. Рассматриваются различные режимы локализации в теории в присутствии таких дефектов. Предложены примеры работы этих принципов в случаях относительно несложных моделей, вроде теории, отвечающей эквивариантной проективной плоскости. Также предложена к рассмотрению упрощенная модель гомологической зеркальной симметрии. Предложена модель физической категорификации: точное вычисление квантовых чисел основных суперсимметричных состояний, обобщающее понятие суперсимметричного индекса. Показано, что параллельный перенос вдоль пространства параметров в сигма-модели разрешения конической сингулярности отвечает задаче о продолжении гипергеометрических рядов за единичную окружность для индексов, а его категорификация отвечает флипу Атьи.

Во **второй главе** приводится обзор эффективной суперсимметричной квантово-механической модели системы D-бран на трехмерных торических многообразиях Калаби-Яу. Суперсимметричные основные состояния в этом семействе моделей при локализации на хиггсову ветвь перечисляются специальными комбинаторными объектами из статистической модели трехмерного плавленного кристалла, обобщающими понятие планарного разбиения, или трехмерных диаграмм Юнга. Вводятся и строятся явно представления алгебр аффинных колчаных янгианов. Это делается посредством непертурбативного вычисления действия операторов Гекке на основные суперсимметричные состояния в данном семействе моделей. Далее в главе исследуется

«сдвиг» в колчаных янгианах и его связь с обрамлением колчана, то есть с глобальными ароматическими симметриями финальной квантовой теории поля. Также в главе описаны обобщения колчаных янгианов на тригонометрические, также известные в литературе, как квантовые тороидальные, и эллиптические алгебры. Эти обобщения получены за счет компактификации на различные вспомогательные многообразия. Также в данной главе обсуждается возможность обобщения предъявленных методов на случай четырехмерного многообразия Калаби-Яу, выводится зарядовая функция для твердотельных разбиений, обобщающих диаграммы Юнга на четыре измерения.

В третьей главе описываются кохомологические алгебры Холла по колчанным диаграммам и показывается, что они эквивалентны борелевски положительной части соответствующего аффинного колчанного янгиана. Алгебры Холла вводятся также в рамках эффективного квантово-механического описания систем D-бран, как ассоциативные алгебры, чьи структурные константы отвечают амплитудам неупругого рассеяния суперсимметричных состояний при пересечении стенок маргинальной стабильности. В данной главе представлена локализация на кулонову ветвь, это описание сравнивается с описанием локализации на хиггсову ветвь в предыдущей главе, а также с геометрическим описанием в терминах (обобщенных) кохомологий пространств модулей представлений колчанов. В заключении данной главы предложен альтернативный способ построения этих алгебр с помощью элементов амплитуд инстантонных переходов.

В четвертой главе рассматриваются вопросы построения интегрируемых систем для новых алгебр колчаных янгианов. Так уравнения на изолированные суперсимметричные вакуумы в двумерных колчаных теориях часто называют уравнениями анзаца Бете в силу их формы. В данной главе решается вопрос о том, при каких условиях из такой системы получится восстановить интегрируемую систему по типу спиновой цепочки полностью, то есть построить соответствующие R-матрицу, трансфер-матрицу и анзац Бете. В данной главе предъявляются физически обоснованные гипотезы о форме структуры копроизведения на колчаных янгианах и совместной с ней перепутывающего оператора R-матрицы. На основании выдвинутых гипотез строится заключение, что интегрируемая система без физических патологий может быть построена только для колчаных янгианов, построенных по некиральным колчанам. В заключении данной главы приводится построение решений квантовой интегрируемой системы в виде супер-полиномов Джека, обобщающих каноническое определение полиномов Джека на случай грассмановых переменных. Бесконечный набор коммутирующих гамильтонианов в данной системе отвечает операторам Картана в колчанном янгиане, соответствующем разрешению конической сингулярности.

В пятой главе всесторонне рассматриваются вопросы задачи физической категорификации полиномиальных инвариантов узлов и зацеплений. Глава начинается с

краткого описания современного состояния данной задачи в математической литературе. Далее рассматриваются методы построения некатегорифицированных полиномиальных инвариантов путем вычисления монодромий конформных блоков в двумерной конформной модели Весса-Зумино-Виттена. Показывается, что задача о монодромии конформных блоков эквивалентна вычислению индекса дефекта типа «интерфейс» в топологической теории струн. Производится детальное вычисление спектров основных суперсимметричных состояний в присутствии дефекта, отвечающего узлу, зацеплению или косе, в двух моделях: модели Ландау-Гинзбурга и сигма-модели на пространстве флагов. Показано, что две модели на самом деле дуальны друг другу, а полученные квантовые инварианты зацепления совпадают с математически определенными категорифицированными инвариантами. Глава заканчивается предложениями об обобщении предложенных техник вычислений на случаи более общих калибровочных групп $SU(n)$, $n > 2$.

В **заключении** сформулированы результаты проведенного исследования.

В **приложении** собраны использованные в тексте диссертации сведения о свойствах суперсимметрии в различном числе измерений.

Имеются несколько **замечаний**:

1. В первой главе можно было бы добавить больше простых обучающих примеров физической реализации гомологической зеркальной симметрии.
 2. В пятой главе не говорится, какие сложности возникают при рассмотрении старших представлений, раскрашивающих узлы и компоненты зацеплений.
- Тем не менее, данные замечания нисколько не снижают научной ценности представляемой работы.

В диссертационной работе был успешно расширен метод локализации в суперсимметричных теориях для вычисления не только индексов, но и точных спектров и квантовых чисел основных суперсимметричных состояний в сильно связанных модлях. Выводы, полученные автором работы, являются **обоснованными**. Достоверность результатов подтверждается апробацией на международных конференциях, посвященных теоретической и математической физике, а также публикациями в престижных рецензируемых международных журналах, включенных в Перечень рецензируемых международных изданий.

Диссертационная работа удовлетворяет требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ №842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-

математических наук. Автореферат диссертации полностью отражает содержание диссертации.

Диссертант Д.М. Галахов заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.3.3 – «Теоретическая физика».

Официальный оппонент,
главный научный сотрудник
факультета математики и компьютерных наук
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»,
доктор физико-математических наук

Н.Ю. Решетихин

199178, 14-ая линия Васильевского острова, дом 29, г.Санкт-Петербург
тел.: +7 (812) 363 68 71

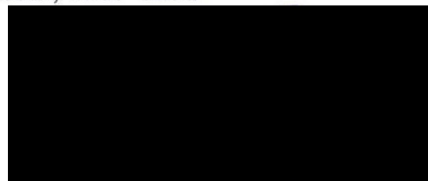
Подпись Н.Ю. Решетихина заверяю:

дата

Список основных работ по теме защищаемой диссертации в рецензируемых научных изданиях за последние 5 лет:

1. S.Gukov, B.Haghighat and N.Reshetikhin, "Foams and KZ-equations in Rozansky-Witten theories," Nucl. Phys. B 1014 (2025), 116856
2. N.Reshetikhin, J.Stokman, "Quantum superintegrable spin systems on graph connections," Indag. Math. 36 (2025), 644-674
3. N.Reshetikhin, "Spin Calogero-Moser periodic chains and two dimensional Yang-Mills theory with corners," Pure Appl. Math. Quart. 19 (2023) no.5, 2537-2572
4. H.De Clercq, N.Reshetikhin, J.Stokman, "Graphical Calculus for Quantum Vertex Operators, I: The Dynamical Fusion Operator," Commun. Math. Phys. 405 (2024) no.6, 149
5. E.Frenkel, D.Hernandez, N.Reshetikhin, "Folded quantum integrable models and deformed W-algebras," Lett. Math. Phys. 112 (2022) no.4, 80
6. N.Reshetikhin, "Periodic and open classical spin Calogero-Moser chains," Surveys Diff. Geom. 26 (2021) no.1, 263-297
7. N.Reshetikhin, J.Stokman, "Asymptotic boundary KZB operators and quantum Calogero-Moser spin chains," Contemp. Math. 780 (2022), 205-242
8. D.Keating, N.Reshetikhin, A.Sridhar, "Integrability of Limit Shapes of the Inhomogeneous Six Vertex Model," Commun. Math. Phys. 391 (2022) no.3, 1181-1207

9. J.Stokman, N.Reshetikhin, "N-point spherical functions and asymptotic boundary KZB equations," Invent. Math. 229 (2022) no.1, 1-86
10. S.Arthamonov, N.Reshetikhin, "Superintegrable Systems on Moduli Spaces of Flat Connections," Commun. Math. Phys. 386 (2021) no.3, 1337-1381



*Подпись Сергеев
и.в. Решетихина
удостоверяю*

ЗАМЕСТИТЕЛЬ НАЧАЛЬНИКА
УПРАВЛЕНИЯ КАДРОВ ГУОРП

ХОМУТСКАЯ Л. П.

