

ОТЗЫВ

официального оппонента Арефьевой Ирины Ярославны
на диссертационную работу Галахова Дмитрия Максимовича
«Дефекты в суперсимметричных теориях поля и теории струн»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.3.3 - теоретическая физика

Одной из важнейших задач, стоящих перед современной теоретической физикой, является разработка новых методов работы и проведения непертурбативных вычислений в физических системах, находящихся в режиме сильной связи.

Основная сложность в такой задаче связана с необходимостью решать задачу в рамках релятивистски инвариантных теорий. Так, например, не вызывает принципиальных трудностей построения решетчатой калибровочной теории Янга-Миллса по обратной константе связи, но перейти к непрерывной релятивистски-инвариантной теории – сложная задача. Задача о построении теорий в области сильной связи может быть решена если есть дополнительный параметр по которому можно развить теорию возмущений. Например, это так для векторных $O(N)$ моделей, где роль параметра играет число полей N , но для так называемых матричных $N \times N$ теорий в реалистическом 4-мерном случае это сделать не удается.

Частично указанные трудности удастся преодолеть в рамках так называемого голографического подхода, обусловленного открытием AdS/CFT-дуальности (и других дуальностей). С помощью дуальностей можно связать характеристики динамики сильно скоррелированных систем с динамикой систем, где описание и вычисления оказываются доступны аналитическим методам.

Диссертационная работа Д.М.Галахова посвящена нахождению эффективного описания топологических дефектов в различных моделях квантовой теории поля и теории струн при наличии суперсимметрии.

Исследование дефектов особенно популярно в физике твердого тела, где любое отклонение от идеального кристалла (периодического расположения атомов) трактуется как дефект. Исследования проводятся используя различные математические методы - геометрические (методы дифференциальной геометрии) и методы алгебраической топологии (классификация дефектов по их топологическим инвариантам). Для описания дефектов используется риманова геометрия, при этом для описания дисклинаций используется кривизна, а для дислокации – кручение.

В данной диссертации используется термин «топологический дефект», что подразумевает под собой класс объектов в различных моделях теории поля, таких как, частице-подобные и мембрано-подобные решения полевых уравнений.

Характерной особенностью исследований, проведенных в диссертации является наличие суперсимметрии, что позволяет применить метод суперсимметричной локализации для непертурбативного вычисления квантовых характеристик топологических дефектов. Этот метод был открыт в работе Е. Виттена (1988), в которой содержалась ключевая идея, что если теория обладает нильпотентной суперсимметрией, то континуальный интеграл, который обычно сложно вычислить, локализуется на очень небольшом подмножестве всех возможных конфигураций полей. При этом суперсимметричная локализация является бесконечномерным обобщением формулы Дейстермата-Хекмана для континуального интеграла.

В диссертационной работе расширяется современный подход к локализации с суперсимметричных моделях, что позволяет непертурбативно определять не только суперсимметричные индексы, но и также вычислять квантовые характеристики спектров состояний БПС, сохраняющиеся или слабо модифицирующиеся действием ренормгруппы. С использованием таких характеристик в работе строится новая алгебра колчаных янгианов, а также ее обобщения, описывающая взаимодействие состояний БПС в низкоэнергетической теории. Также показывается, что квантовые числа спектров в присутствии топологических дефектов могут быть использованы для обобщения других топологических теорий, таких как теория Черна-Саймонса. Полученные в работе результаты будут интересны в теоретических исследованиях моделей квантовой теории поля и теории струн, суперсимметричных моделей с топологическими дефектами, для программы категорификации и геометризации непертурбативных физических явлений, в теории инвариантов многообразий. Этим обуславливается **актуальность и научная новизна** диссертационной работы.

Целью работы является построение новых методов вычисления и классификации суперсимметричных состояний в теории поля и теории струн, а также исследование их свойств.

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и одного приложения.

Во **введении** представлена общая характеристика работы, даны обзоры исторических контекстов рассмотренных в работе задач. Обосновываются актуальность и научная новизна диссертации. Также описаны методы, использованные в работе, подтверждаются

достоверность полученных результатов и указывается на способы апробации работы. Представлены основные положения, выносимые на защиту, а также личный вклад автора и объем работы.

В **первой главе** автор делает обзор широкого класса топологических дефектов, именуемых «интерфейсами», поскольку они интерполируют между различными типами теорий. На их примере в несложных случаях также даются обзоры дуальности Хиггса-Кулона и зеркальной симметрии. Дуальность Хиггса-Кулона рассмотрена на примере модели эквивариантной плоскости, где вычислены и сравниваются спектры БПС состояний на кулоновой и хиггсовой ветвях. Также рассматривается пример физической категорификации в случае, когда интерфейс отвечает параллельному переносу аналогичному для гипергеометрических рядов. В данном случае показано, что квантовое описание такого дефекта эквивалентно преобразованию флипа Атьи для разрешения конической сингулярности.

Во **второй главе** разработаны подходы к построению алгебр БПС для квиверных суперсимметричных теорий, построенных как эффективное описание систем D-бран в теории струн типа IIA на торических трехмерных многообразиях Калаби-Яу. Сначала описывается модель суперсимметричной квантовой механики на колчанном многообразии, где алгебра представлена алгеброй колчанного аффинного янгиана, обобщающей аффинные янгианы, построенные по аффинным диаграммам Дынкина, на колчанном многообразии. Алгебра строится с помощью семейств операторов Гекке, меняющих заряды D-бран, заданные характеристическими классами. Также в главе рассматриваются деформации данного семейства алгебр на сдвинутые аффинные янгианы, где сдвиг контролируется выбором обрамления колчана, и на тригонометрические и эллиптические алгебры, производимые компактификацией на различные дополнительные пространства. Глава заканчивается рассмотрением возможного обобщения рассмотренных в тексте методов на четырехмерные многообразия Калаби-Яу. Основная сложность с четырехмерными многообразиями заключается в том, что эффективное описание имеет меньше суперсимметрий, чем эффективное описание трехмерных многообразий. В работе предложена так называемая зарядовая функция для четырехмерных многообразий, описывающая в случае трехмерных многообразий семейства собственных значений подалгебры Картана представления неподвижных точек на колчанном многообразии.

В **третьей главе** предложен иной подход к построению БПС алгебр для эффективных описаний систем D-бран на торических многообразиях Калаби-Яу, отвечающий локализации на кулонову ветвь. В этом случае эффективное описание отвечает газу дионов, а алгебра БПС строится с помощью матричных элементов неупругого рассеяния. Результирующая алгебра является когомологической алгеброй Холла, которая изоморфна борелевски положительной части колчанного аффинного янгиана, полученного в

предыдущей главе. Также в главе обсуждается связь с обобщенными когомологическими теориями Эйленберга-Стинрода и новый метод построения алгебр БПС путем комбинирования инстантонных амплитуд.

В **четвертой главе** рассматриваются интегрируемые системы, основанные на алгебрах аффинных янгианов. Эти системы обобщают спиновые цепочки: бесконечное семейство коммутирующих гамильтонианов строится как следы степеней спектральной трансфер-матрицы, построенной по спектральной R-матрице, согласованной со структурой ко-произведения в алгебре. Получающаяся R-матрица также известна как инстантонная R-матрица, а вместо конечного набора спинов узлам отвечают бесконечные наборы кристаллов, перечисляющие неподвижные точки на колчаных многообразиях. В главе исследуются вопросы физической самосогласованности таких систем в зависимости от колчана. Доказывается теорема, что при естественных физических предположениях о структуре ко-произведения и R-матрицы самосогласованные интегрируемые системы могут быть построены только для некиральных колчанов. Также в главе строится обобщение полиномов Джека, представляющих собственные функции для гамильтонианов типа Калоджеро, на случай грассмановых переменных, основанное на эффективном описании системы D-бран на разрешении конической сингулярности.

В **пятой главе** исследуется вопрос о построении с помощью физических моделей категорифицированных инвариантов узлов и зацеплений, обобщающих известную модель полиномиальных инвариантов как вильсоновских средних в трехмерной теории Черна-Саймонса. В главе используется два подхода: в терминах суперсимметричной теории Ландау-Гинзбурга и в терминах сигма-модели с таргет-пространством, заданным колчанным многообразием. В обоих случаях строится интерфейс, чей индекс задается монодромией параллельного переноса с помощью связности Книжника-Замолодчикова вдоль косы. Показывается, что квантовые числа, а именно фермионное число и центральный заряд в супералгебре, также являются инвариантами косы и обобщают (категорифицируют) индекс, заданный знакопеременной суммой взвешенных центральных зарядов. Таким образом показывается, что в обеих моделях строится инвариант узла. Помимо этого в главе указывается эквивалентность категорифицированных выражений, полученных с помощью модели Ландау-Гинзбурга и сигма-модели, как проявления гомологической зеркальной симметрии. Также в главе показано, что физические методы позволяют свести вычисление категорифицированных инвариантов к вычислениям в рамках алгебраических структур, предъявленных в математической литературе о категорификации инвариантов узлов. Предложены механизмы, которые позволят обобщить результаты данной главы на старшие группы и представления.

В **заключении** сформулированы результаты проведенного исследования.

В **приложении** собраны сведения о свойствах суперсимметрии в различном числе измерений, использованные в диссертационной работе.

В диссертационной работе автором успешно применены современные методы в суперсимметричных квантовой теории поля и теории струн к моделям в присутствии топологических дефектов, построены новые алгебраические структуры, основанные на динамике D-бран в теории струн типа IIA, что позволяет строить различные обобщения, а также физические модели категорифицированных инвариантов зацеплений, что позволит в будущем обобщить эти величины на старшие группы и представления. Данные результаты являются **обоснованными и достоверными**. Они были представлены на международных конференциях, посвященных теоретической и математической физике, а также в публикациях в престижных рецензируемых международных журналах со строгой рецензионной политикой, индексируемых в базах данных РИНЦ, Scopus и Web of Science,

Работы диссертанта хорошо цитируются. В частности, на работы (D. Galakhov at all "Wild Wall Crossing and BPS Giants," JHEP 11 (2013), 046; и D. Galakhov at all "Shifted quiver Yangians and representations from BPS crystals," JHEP 08 (2021), 146) имеется около 100 ссылок. Вызвала отклик у специалистов также недавняя работа (D. Galakhov, "On supersymmetric interface defects, brane parallel transport, order-disorder transition and homological mirror symmetry," JHEP 22 (2020), 076)

Имеются, тем не менее, несколько **замечаний** к работе:

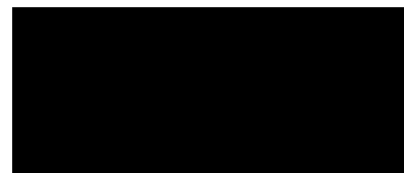
1. Во второй главе приводится довольно формальное определение кристаллических базисов. Стоило бы добавить больше комментариев о физической природе и физическом смысле данного определения.
2. В разделе 4.4 стоило бы осветить современный статус и возможности обобщения иных семейств ортогональных полиномов.
3. В разделе 5.3.3 рассматривается частный случай интерфейса, отвечающего переплетению двух нитей, а в последующих разделах результаты обобщаются на произвольное количество нитей. Стоило бы подробнее описать принципы справедливости данного обобщения.
4. Достаточно укловат литературный обзор во Введении.

Эти замечания несколько не умаляют научной ценности диссертационной работы.

Подводя итог, можно отметить, что диссертационная работа удовлетворяет требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства РФ №842 от 24 сентября 2013 года, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Автореферат диссертации полностью отражает содержание диссертационной работы и опубликованные статьи, опубликованные по ее тематике.

Диссертант Д.М.Галахов заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.3.3 – «Теоретическая физика».

Официальный оппонент,
главный научный сотрудник
отдела теоретической физики
ФГБУН Математический институт им. В.А.Стеклова РАН
член-корреспондент РАН
профессор, доктор физико-математических наук



И.Я. Арефьева

119333, г.Москва, ул. Губкина, д. 8
тел.: +7(495) 984 81 41
email: arefeva@mi-ras.ru

Подпись И.Я.Арефьевой заверяю
ученый секретарь МИАН
кандидат физико-математических наук



С.А. Поликарпов

22.09.2025

Список основных работ по теме защищаемой диссертации в рецензируемых научных изданиях за последние 5 лет:

1. Irina Ya. Aref'eva, Kristina Rannu, Pavel Slepov, Holographic anisotropic model for light quarks with confinement-deconfinement phase transition// *Journal of High Energy Physics*, 2021.— № 90.
2. Irina Ya. Aref'eva, Kristina Rannu, Pavel Slepov, Holographic Anisotropic Model for Heavy Quarks in Anisotropic Hot Dense QGP with External Magnetic Field// *Journal of High Energy Physics*, 2021. – № 161.
3. Irina Ya. Aref'eva, Anastasia A. Golubtsova, Eric Gourgoulhon, Holographic drag force in 5d Kerr-AdS black hole// *Journal of High Energy Physics*, 2021. – № 169.
4. Dmitry S. Ageev, Irina Ya. Aref'eva, Thermal density matrix breaks down the Page curve// *The European Physical Journal Plus* 137, 2022.— № 10.
5. D.S.Ageev, I.Y.Aref'eva, "Thermal density matrix breaks down the Page curve," *Eur. Phys. J. Plus* 137 (2022) no.10, 1188
6. Irina Ya. Aref'eva, Alexey Ermakov, Kristina Rannu, Pavel Slepov, Holographic model for light quarks in anisotropic hot dense QGP with external magnetic field// *The European Physical Journal Plus* 83, 2023.— № 79.
7. I.Aref'eva, I.Volovich, "Complete Evaporation of Black Holes and Page Curves," *Symmetry* 15 (2023) no.1, 170
8. I.Y.Aref'eva, A.Hajilou, K.Rannu and P.Slepov, "Magnetic Catalysis in Holographic Model with Two Types of Anisotropy for Heavy Quarks," *Eur. Phys. J. C* 83 (2023), 1143
9. Ageev, D. S., Aref'eva, I. Y., Belokon, A. I., Ermakov, A. V., Pushkarev, V. V., & Rusalev, T. A. Infrared regularization and finite size dynamics of entanglement entropy in Schwarzschild black hole. *Physical Review D* (2023), 108(4), 046005.
10. I.Aref'eva, I.Volovich, "Violation of the third law of thermodynamics by black holes, Riemann zeta function and Bose gas in negative dimensions," *Eur. Phys. J. Plus* 139 (2024) no.3, 30010.
11. D. S. Ageev, I. Ya. Aref'eva, A. I. Belokon, V. V. Pushkarev, T. A. Rusalev, "Entanglement entropy in de Sitter: no pure states for conformal matter", *JHEP*, **2024**:5 (2024), 308 , 24 pp.
12. I.Y. Aref'eva, A. Hajilou, P. Slepov and M. Usova, "Running Coupling for Holographic QCD with Heavy and Light Quarks: Isotropic case," *Phys. Rev. D* 110 (2024), 126009
13. I.Aref'eva, I.Volovich, D.Stepanenko, "Black brane/Bose gas duality and the third law of thermodynamics," *Theor. Math. Phys.* 222 (2025) no.2, 276-284
14. I.Y.Aref'eva, A.Hajilou, P.Slepov and M.Usova, "Beta-Functions and RG flows for Holographic QCD with Heavy and Light Quarks: Isotropic case," *Phys. Rev. D* 111 (2025), 046013
15. D.S.Ageev, I.Y.Aref'eva and T.A.Rusalev, "Black holes, cavities, and blinking islands," *Phys. Rev. D* 111, no.2, 026002 (2025)