Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук

На правах рукописи

Галахов Дмитрий Максимович

# Дефекты в суперсимметричных теориях поля и теории струн

Специальность 1.3.3 — теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва2024

#### Оглавление

B	Введение			6	
1	Суперсимметричные дефекты типа «интерфейс»				
	1.1	Локај	пизация на мировом листе с границей и БПЗ состояния	18	
		1.1.1	Локализация и ренорм-групповой поток	18	
		1.1.2	Локализация в калибровочной сигма-модели с дефектом типа «интер-		
			фейс»	25	
		1.1.3	Кулонова ветвь: модель Ландау-Гинзбурга	31	
		1.1.4	Хиггсова ветвь: когерентные пучки	37	
		1.1.5	Хиггсова ветвь: эквивариантное действие	39	
		1.1.6	Параллельный перенос и формализм сетей	41	
	1.2	Эквин	зариантная модель проективной плоскости: солитонный спектр	51	
		1.2.1	Описание модели	51	
		1.2.2	Солитонный спектр на Кулоновой ветви	53	
		1.2.3	Солитонный спектр на Хиггсовой ветви	55	
		1.2.4	Инстантоны и граничные операторы	60	
	1.3	Катег	орификация аналитического продолжения гипергеометрических рядов .	64	
		1.3.1	Описание модели	64	
		1.3.2	Аналитическое продолжение в терминах группы Гротендика	67	
		1.3.3	Параллельный перенос и инвариантные браны Хербста-Хори-Пейджа .	72	
		1.3.4	Преобразование Фурье-Мукаи	75	
<b>2</b>	D-браны на торических многообразиях Калаби-Яу				
	2.1	Торич	неские многообразия Калаби-Яу, колчаны и кристаллы	84	
		2.1.1	Колчанная квантовая механика и БПЗ состояния	86	
		2.1.2	Локализация на Хиггсову ветвь и кристаллизация	90	
		2.1.3	Операторы сдвигов Гекке	96	
		2.1.4	Алгебра БПЗ: колчанный янгиан	105	
		2.1.5	Пример построения: $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ – колчанный Янгиан для $\mathbb{C}^3$	110	
	2.2	Сдвин	нутые колчанные янгианы	116	
		2.2.1	Представления из подкристаллов	116	

		2.2.2	Неприводимость	120
		2.2.3	Обрамление колчанов	121
		2.2.4	Приводимые представления и ИК-сингулярности	123
	2.3	Обоби	цения колчанных янгианов	127
		2.3.1	Вихри на эллиптических кривых	127
		2.3.2	БПЗ алгебра в подпространстве нулевой завихренности	129
		2.3.3	Вихри и четырехмерные кристаллы	134
		2.3.4	Тригонометрические и эллиптические алгебры, ассоциированные с кол-	
			чанными янгианами	138
		2.3.5	Сравнение с известными тригонометрическими/эллиптическими алгеб-	
			рами	143
	2.4	Четыј	рехмерные многообразия Калаби-Яу	145
		2.4.1	БПЗ D-браны на торических трехмерных многообразиях Калаби-Яу	145
		2.4.2	Твердотельные разбиения	147
		2.4.3	Зарядовая функция для твердотельных разбиений	151
3	Алі	ебры	рассеяния состояний D-бран	163
	3.1	Локал	изация на Кулонову ветвь	163
		3.1.1	Вклад узлов колчана	164
		3.1.2	Вклад морфизмов колчана	167
		3.1.3	Молекула БПЗ	169
		3.1.4	Формула для индекса Манскота-Пьолина-Сена	174
	3.2	Когом	иологическая алгебра Холла	176
		3.2.1	Обрамленные молекулы БПЗ	176
		3.2.2	Алгебра рассеяния	180
		3.2.3	Формулы пересечения стен маргинальной стабильности	183
		3.2.4	Сравнение БПЗ алгебр: алгебра Холла и колчанный янгиан	187
		3.2.5	Обобщенные когомологии	190
	3.3	Алгеб	ра инстантонов	196
		3.3.1	Янгиан и квантовая теория поля	196
		3.3.2	Классическая R-матрица из инстантонов	197
		3.3.3	Алгебра БПЗ как алгебра инстантонов	202
4	Вог	росы	дуальности калибровочных и интегрируемых теорий	206
	4.1	Прост	тая модель дуальности калибровочных и интегрируемых теорий	206
	4.2	Ко-пр	ооизведение в алгебрах колчанных янгианов	207
		4.2.1	Инстантонные поправки к ко-произведению	207
		4.2.2	Различные ко-произведения для колчанных Янгианов	209
		4.2.3	R-матрица и уравнения Янга-Бакстера	217

		4.2.4	Оператор Лакса	220
	4.3	Интегр	рируемость, уравнения анзаца Бете	223
		4.3.1	Теорема запрета для колчанных Янгианов со сдвигом	223
		4.3.2	Анзац Бете	229
	4.4	Фоков	ские модули алгебр БПЗ и гладкие 4-циклы	237
		4.4.1	О гладких колчанных многообразиях и Фоковых модулях	237
		4.4.2	Явные выражения для матричных коэффициентов и эйлеровых классов	239
		4.4.3	Супер-обобщение диаграмм Юнга	241
		4.4.4	Бозонизация	242
<b>5</b>	Физ	ически	ие модели категорифицированных инвариантов узлов	245
	5.1	Кратк	ий обзор комологий зацепления Хованова	245
	5.2	Группа	а кос в модели ВЗВН	247
		5.2.1	Группа кос	247
		5.2.2	Модель ВЗВН	248
		5.2.3	Монодромия Пикара-Лефшеца	250
	5.3	Симпл	ектическая А-модель Ландау-Гинзбурга	252
		5.3.1	Спектральный анализ Лефшецевых наперстков	252
		5.3.2	Вырождение ВКБ сетей: когомологии в модели Ландау-Гинзбурга	259
		5.3.3	Спектральные кривые и классификация вакуумов	263
		5.3.4	Реализации дефектов переплетений и замыканий	265
		5.3.5	Сравнение когомологий Хованова с когомологиями в модели Ландау-	
			Гинзбурга	270
	5.4	Алгебр	ро-геометрическая В-модель	277
		5.4.1	Спектральная дуальность на пространствах модулей колчанов	279
		5.4.2	Изоморфизм Маффеи	282
		5.4.3	Кристаллические фиксированные точки	284
		5.4.4	Действие группы кос на колчанных многообразиях	288
		5.4.5	Построение категорифицированного переплетающего дефекта: ядро Фурь	e-
			Мукаи	291
		5.4.6	Замечания о декатегорификации	296
	5.5	Замеча	ания о категорификации инвариантов узлов для старших групп	300
		5.5.1	Классификация вакуумов	301
		5.5.2	Переплетающие интерфейсы	302
		5.5.3	Замыкающие интерфейсы	303
		5.5.4	Инвариант зацепления	305

#### Заключение

308

#### Список литературы

$\mathbf{A}$	Суперсимметрия в теориях Янга-Миллса-Хиггса		
	A.1 Трехмерная суперсимметричная $\mathcal{N}=2$ теория в криволинейном пространство		334
	А.2 $\mathcal{N} = (2,2)$ суперсимметрия в двух измерениях		338
		А.2.1 Двумерная $\mathcal{N} = (2,2)$ калибровочная сигма-модель	338
		А.2.2 А-твист и В-твист	341
		А.2.3 Модель Ландау-Гинзбурга	343
	A.3	Граничные условия В-типа	343
		А.З.1 Фермионы на границе и граничный заряд	343
		А.З.2 Граничные условия, отвечающие бране	345
	A.4	Одномерная $\mathcal{N}=4$ суперсимметричная матричная квантовая механика	347
	A.5	$\mathcal{N} = (0,2)$ суперсимметричная эффективная теория D8-D0 бран	349

 $\mathbf{312}$ 

#### Введение

## Общая характеристика работы

Диссертационная работа посвящена исследованию геометрических свойств пространств модулей и параметров, находящих отражение в физических показателях спектров возбуждений для соответствующих квантовых теорий поля и теории струн, имеющих топологическую симметрию либо содержащих топологический сектор. Невозможно переоценить влияние понятия симметрии на прогресс в теоретической и математической физике и, тем более, на современную форму этих областей знания. Неудивительно, что в литературе можно наблюдать повышенный интерес мирового научного сообщества к обновленным и обобщенным понятиям симметрии [1], позволяющим расширить понятие и роль теории групп в современной теоретической физике до более абстрактного понятия категории.

Исследование в диссертационной работе направлено на область физических теорий, где топологические свойства достигаются за счет суперсимметрии. В данном контексте теория категорий сменяет теорию представлений групп симметрий, возникающую, например, при классификации типов элементарных частиц на основе симметрий Стандартной модели. Так эффективные квазичастичные и граничные состояния, например, доменные стенки, солитоны, инстантоны, монополи, а также порождающие их дефекты и дефектные операторы, соответствуют объектам и морфизмам некоторых *n*-категорий. В теориях с суперсимметрией выделяются особые классы таких дефект-состояний, сохраняющих часть суперсимметрии и находящихся на пороге ограничительного энергетического условия Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (БПЗ), их обычно классифицируют как БПЗ состояния. Наличие суперсимметрии как нельзя лучше подходит для круга задач категорификации, поскольку суперсимметрия позволяет естественным образом подавить, или даже в некоторых случаях сократить совсем обычные квантовые флуктуации в форме петлевых поправок в квантовой теории поля. Этот механизм, известный также как механизм локализации, позволяет проводить точные вычисления различных физических характеристик БПЗ состояний и сравнивать соответствующие спектры со спектрами объектов и морфизмов различных математических категорий. Более того, Нетеровы операторы суперзарядов, отвечающих суперсимметрии, приобретают форму дифференциалов на пространствах полей, что открывает непосредственный путь к геометризации физических задач и их точному аналитическому решению: физические объекты, дефекты, квази-частицы приобретают геометрический смысл на пространствах полей, модулей, параметров или деформаций соответствующей теории.

#### Актуальность темы исследования

Пожалуй наиболее канонической задачей категорификации в современной математической физике [2], стоящей перед научным сообществом на протяжении последних двадцати лет, можно назвать построение физической модели категорификации инвариантов узлов и зацеплений. Своими корнями эта задача уходит в каноническую низкоразмерную топологию. Узлом называется класс отображений  $S^1 \to S^3$  с точностью до объемлющей изотопии, или замкнутая линия в трехмерном пространстве простым языком. Зацеплением называется зацепление нескольких узловых компонент  $(S^1)^{\times n} \to S^3$ . Несмотря на сложность формулировки, такие отображения легко кодируются графически с помощью узловых диаграмм – проекций на двумерную плоскость, где в пересечениях нить, которая находится ближе к наблюдателю, изображается сплошной, а нить, которая дальше, разрывной линией (см. рис. 1). При этом становится очевидной основная задача теории узлов: установить, отвечают ли две различные диаграммы одному и тому же узлу, или зацеплению. Так в примере на рис. 1 изображены две визуально непохожие узловые диаграммы для одного и того же узла 41 согласно классификации Рольфсена.

7



Рисунок 1 – Две узловые диаграммы для узла-«восьмерки» 4<sub>1</sub>.

В современной трактовке задача различения диаграмм узлов сводится к построению так называемых инвариантов узлов – отдельных чисел [3; 4] и групп чисел, которые являются инвариантами движений Редемейстера [5] – преобразований диаграмм, следующих из объемлющей изотопии и не меняющих соответствующий узел. Особый интерес в физических приложениях эта задача приобрела после построения инвариантных полиномов Джонса  $J_K(q)$  [6; 7] и их физической интерпретации [8—10]:

$$J_K(q) = \langle W_{\Box}(K) \rangle \tag{0.1}$$

как вакуумных средних Вильсоновских петель

$$W_R(K) = \operatorname{Tr}_R \operatorname{Pexp}\left(i \oint_K A_i dx^i\right) \tag{0.2}$$

в трехмерной теории Черна-Саймонса с действием:

$$S(A) = \frac{k}{4\pi} \int_{S^3} d^3x \,\epsilon^{ijk} \text{Tr}\left(A_i \partial_j A_k + \frac{2i}{3} A_i A_j A_k\right) \,, \tag{0.3}$$

где мы выбрали калибровочную группу SU(2) и ее фундаментальное представление  $\Box$ , а параметр q связан с константой связи k, называемой уровнем, следующим образом:

$$q = \exp\frac{2\pi i}{k+2}.\tag{0.4}$$

В таких терминах легко представить простой аргумент, почему среднее Вильсоновской петли вдоль узла K является инвариантом относительно объемлющих изотопий. Действительно, вариация вложения узла K в объемлющее пространство пропорционально кривизне калибровочного поля  $F_{ij}$ , а на классических уравнениях движения для действия (0.3) эта величина зануляется  $F_{ij} = 0$ . В квантовой теории поправки и «обрамляющая» аномалия не портят это классическое рассуждение – среднее Вильсоновских петель вдоль компонент зацепления  $\mathcal{L}$  является инвариантом зацепления  $\mathcal{L}$  – полином по q – с точностью до общего мономиального множителя  $q^{\alpha}$ .

Физическая интерпретация полиномов Джонса и связь трехмерной теории Черна-Саймонса с двумерной теорией Весса-Зумино-Виттена-Новикова позволила построить эффективный механизм вычисления инвариантов узлов [11; 12] с помощью сплетающих операторов R-матриц на тензорной категории представлений квантовых групп и обобщить на случаи произвольных представлений и групп. Каноническим инвариантом на сегодняшний день в данной терминологии является полином Хосте-Окнеану-Миллета-Фрейда-Ликориша-Иттера-Пржитицки-Тращука (ХОМФЛИ-ПТ) [13; 14] для фундаментального представления группы SU(N) – многочлен по двум переменным a и q:

$$q = \exp\frac{2\pi i}{k+N}, \quad a = \exp\frac{2\pi i N}{k+N}. \tag{0.5}$$

Иное обобщение полиномов Джонса – категорификация – было предложено в работах М.Хованова [15], а затем и обобщение полиномов ХОМФЛИ в работах Хованова-Рожанского [16; 17]. В новом подходе по зацеплению  $\mathcal{L}$  строится биградуированный комплекс, чьи когомологии – инвариант зацепления, а производящая функция для соответствующих чисел Бетти называется полиномом М.Хованова (соответственно Хованова-Рожанского):

$$\mathbf{Kh}_{\mathcal{L}}(t,q) = \sum_{F,Z} t^F q^Z \dim H^{F,Z} \,. \tag{0.6}$$

Градуировка *F* является гомологической градуировкой, а данный полином обобщает полином Джонса (ХОМФЛИ) в том смысле, что последний является Эйлеровой характеристикой комплекса Хованова:

$$\mathbf{Kh}_{\mathcal{L}}(t = -1, q) = J_{\mathcal{L}}(q) \,. \tag{0.7}$$

С момента публикации работ М.Хованова начался поиск физической теории, которая описывала бы математическую конструкцию полиномов Хованова-Рожанского, как теория Черна-Саймонса описывает конструкцию полиномов Джонса. Ожидается, что такое физическое представление позволит естественным образом обобщить конструкцию Хованова-Рожанского и категорификацию Хованова-Лауды-Рокира [18—20] для алгебр SU(n) на неминускульные представления и алгебры Ли прочих серий Дынкина.

Несмотря на то, что в конструкции Хованова-Рожанского используются элементы топологической квантовой теории поля, тем не менее, физическая конструкция, где инвариантность наблюдаемых при деформациях объемлющей изотопии зацепления  $\mathcal{L}$  была бы наглядна, как в теории Черна-Саймонса, оставалась неявной в течение двадцати лет.

Изначально предложения решения данной задачи строились на различных способах компактификации М-теории в присутствии дефекта [21—27], определяющего зацепление, однако, отсутствие необходимых вычислительных техник для характеристик БПЗ состояний на тот момент не позволяло ни проверить работоспособность этих конструкций, ни соотнести инварианты, построенные физическими методами, с инвариантами, построенными математическими методами. Определенный прогресс в данном направлении был достигнут в относительно недавней работе [28].

Также данная задача появляется в современных исследованиях гомологической зеркальной симметрии [29—31].

Нельзя также обойти стороной тот факт, что мы могли бы прийти к этому актуальному кругу задач о свойствах и поведении БПЗ состояний в суперсимметричных теориях поля, начав с иной стартовой точки. Роль пространства БПЗ состояний в суперсимметричных теориях поля и струн как носителя дополнительных богатых алгебро-геометрических структур, в частности БПЗ алгебры, были отмечены в работах Дж.Харви и Г.Мура [32; 33]. В основе этого метода лежит отождествление структурных констант алгебры с коэффициентами S-матрицы рассеяния:

Подход Дж.Харви и Г.Мура к построению структур на БПЗ пространствах был удачно применен в различных системах, см. обзор в [34]. Однако для систем D-бран, параметризуемых колчанами, М.Концевичем и Я.Сойбельманом в [35] был разработан оригинальный подход к построению алгебраической структуры, основанный на геометрических свойствах колчанных многообразий. Связь этих диаметрально различных подходов была в выявлена в работе [36]. А в дальнейшем было показано, что результирующая алгебра – когомологическая алгебра Холла, принадлежащая к семейству алгебр перетасовок Одесского-Фейгина [37]. Она отвечает положительной по Борелю подалгебре колчанного янгиана [38] – обобщения аффинного янгиана для супералгебр Ли.

Появление янгиана в этой задаче говорит о связи с теорией интегрируемых систем [39], также известной как дуальность калибровочных и интегрируемых теорий [40—42]. Таким образом становится актуальной задача выяснить, *все* ли БПЗ алгебры для различных систем имеют дуального партнера в интегрируемых системах, и не представляют ли новые БПЗ алгебры, например, не содержащие в своей основе подалгебры Ли, новые интегрируемые системы, не описанные ранее в литературе.

Связь с интегрируемостью предполагает, что для данных систем может быть разработана трансфер-матрица и *R*-матрица, перемешивающая представления БПЗ алгебры в тензорном произведении. Графически *R*-матрица может изображаться как простое переплетение двух нитей, отвечающих представлениям:

$$R_{ab}: \quad V_a \otimes V_b \longrightarrow V_b \otimes V_a, \qquad \sum_{a}^{b} \bigvee_{b}^{a} \quad . \tag{0.9}$$

Ожидается, что *R*-матрица удовлетворяет кубическому уравнению Янга-Бакстера:

$$R_{ab} \circ R_{ac} \circ R_{bc} = R_{bc} \circ R_{ac} \circ R_{ab},$$

$$a \longrightarrow b = c \longrightarrow c = a \longrightarrow b = c \longrightarrow c = c \longrightarrow c$$

$$(0.10)$$

Также *R*-матрица, или точнее *R*-функтор, появляется в задаче о категорификации инвариантов зацеплений, *R*-матрица отвечает элементарной косе из двух нитей. В обоих случаях *R*-матрице придается смысл переплетающего действия на пространстве параметров суперсимметричной теории, реализованного в форме интерфейса. Уравнение Янга-Бакстера (0.10), в свою очередь, естественным образом следует из того факта, что суперсимметрия делает параллельный перенос плоским для БПЗ состояний вдоль интерфейса. Таким образом оба сюжета исследования переплетаются в один, отражая различные свойства спектров БПЗ состояний на фоне дефекта интерфейса. Исследования свойств интерфейс-дефектов занимают внушительную часть [43—50] среди современных направлений теоретической и математической физики в связи с богатой картиной применимости методологии в смежных областях, как было показано выше, а также в свете возможности разработки и применения новых методов непертурбативных вычислений в квантовой теории поля и теории струн.

Целью работы является построение новых методов вычисления и классификации суперсимметричных состояний в теории поля и теории струн, а также исследование их свойств и, в первую очередь, связи с математическими объектами на пространствах модулей и других параметров.

Для достижения поставленной цели в работе предстояло решить следующие **задачи**:

1. Разработать методы локализации для суперсимметричных теорий поля в присутствии дефектов типа «интерфейс», имитирующих поведение параллельного переноса на пространстве параметров.

- 2. Разработать методы построения исчерпывающего низкоэнергетического описания таких систем, методы вычисления эффективных волновых функций.
- 3. Применить разработанные результаты к проверке следующих гипотез:
  - 3.1. Дефект типа «интерфейс» отвечает функтору параллельного переноса (категорификация связности Берри) на категории граничных условий (D-бран).
  - 3.2. БПЗ сектор в теории компактификации М5-браны с дефектом, отвечающем зацеплению  $\mathcal{L}$ , является инвариантом  $\mathcal{L}$  и эквивалентен теории Хованова для инвариантов зацеплений.
  - 3.3. БПЗ алгебра рассеяния в системах D-бран на трехмерных торических многообразиях Калаби-Яу эквивалентна колчанному янгиану, априорно разработанному в математических работах.
- 4. Построить физическую теорию тригонометрической и эллиптической деформаций БПЗ алгебр.
- 5. Построить интегрируемые системы для новых БПЗ алгебр и изучить их поведение относительно дуальности калибровочных и интегрируемых систем.

**Научная новизна.** Полученные в диссертационной работе результаты являются оригинальными разработками автора диссертации. Все результаты опубликованы в отечественных и иностранных научных журналах, были представлены в докладах на различных международных конференциях. Результаты автора регулярно используются различными исследовательскими группами, известны в научном сообществе.

Результаты, представленные в диссертационном исследовании, имеют большую значимость в теоретических исследованиях топологических физических моделей квантовой теории поля и теории струн, суперсимметричных моделях с топологическими дефектами, в программе категорификации, построения новых инвариантов многообразий, а также в современной программе геометризации непертурбативных физических явлений. Полученные результаты позволяют описывать сложные физические явления в сильно скореллированных системах в терминах современных математических теорий и методологий, что, безусловно, способствует быстрому прогрессу в различных областях современной теоретической и математической физики.

<u>Методология и методы диссертационного исследования</u>. Результаты, представленные в диссертации, получены с помощью аналитических и численных вычислений. Для исследования низкоэнергетического поведения различных суперсимметричных физических систем использовались методы струннокалибровочных дуальностей и методы локализации. Для математической классификации состояний БПЗ использовались методы алгебраической и симплектической геометрий, а также алгебраической топологии. Для вычисления квантовых операторов, волновых функций и эффективных действий использовались методы квантовой теории поля. Для описания и исследования низкоэнергетических свойств D-бран на многообразиях Калаби-Яу использовались методы теории колчанов. Для описаний свойств интегрируемости для новых алгебраических результатов, получаемых в диссертационном исследовании, использовались методы интегрируемых систем. Также были применены методы теории групп и теории представлений алгебр и групп.

#### Основные положения, выносимые на защиту

- Построен механизм дуальности в описании низкоэнергетического физического поведения дефектов типа «интерфейс». Классификация БПЗ решений и граничных условий в задаче осуществляется посредством объектов математических категорий. Так дуальность отвечает гомологической зеркальной симметрии между категориями Фукаи-Сайдела для специальных симплектических Лагранжевых подмногообразий и (производными) категориями когерентных пучков.
- С помощью спектральной дуальности разработана новая физическая модель из семейства линейных калибровочных сигма-моделей, реализующая категорифицированное действие группы кос на пространствах модулей кол-

чанов. С помощью техник, упомянутых в предыдущем пункте, вычислены спектры БПЗ состояний, отвечающих элементарным сплетающим дефектам, генерирующим группу кос. Вычислено ядро преобразования Фурье-Мукаи в функториальном представлении этих дефектов. Показано, что результирующая алгебра сплетающих дефектов эквивалентна алгебре Хованова-Лауды-Рокира для  $\mathfrak{sl}_2$ .

- 3. Разработаны методы построения солитонных и инстантонных спектров в зеркально дуальной модели Ландау-Гинзбурга. Показано, что физическая модель компактификации М-бран для категорифицированных инвариантов зацеплений эквивалентна математической модели, предложенной М.Ховановым для sl<sub>2</sub>. Предложены пути обобщения полученных результатов на случай более общих алгебр sl<sub>n</sub>.
- 4. Вычислены коэффициенты рассеяния эффективных БПЗ состояний D-бран на многообразиях Калаби-Яу в молекулярной модели. С их помощью построена так называемая БПЗ алгебра рассеяния. Показано соответствие полученной алгебры когомологической алгебре Холла, предложенной М.Концевичем и Я.Сойбельманом.
- 5. Предложен способ вычисления коэффициентов рассеяния БПЗ состояний бран в моделях с сингулярными пространствами модулей. По соответствующим моделям построены новые БПЗ алгебры, обобщающие алгебры аффинных янгианов, – колчанные янгианы. Новые алгебры классифицируются не диаграммами Дынкина, а колчанными диаграммами для торических трехмерных многообразий Калаби-Яу. Построены и явно описаны «кристаллические» представления этих алгебр. Показана связь с когомологической алгеброй Холла и дуальность молекулярного и кристаллического описаний.
- 6. Предложены тригонометрические (тороидальные алгебры) и эллиптические обобщения колчанных янгианов. Физические модели в иерархии рациональных, тригонометрических и эллиптических алгебр отвечают компактификации дополнительных измерений системы D-бран в точку, на окружность и на тор соответственно. Что, в свою очередь, отвечает локализации

основного состояния на эквивариантные когомологии, К-теорию или эллиптические когомологии пространства модулей. Показана потенциальная возможность расширения построенной системы на абстрактные обобщенные когомологии Эйленберга-Стинрода.

- 7. Предложен метод вычисления структуры ко-произведения и R-матрицы для колчанных янгианов с помощью дефектов параллельного переноса вдоль сплетений параметров на пространствах модулей – обобщении понятия связности Берри. Доказана теорема запрета для колчанных янгианов со сдвигом. Для колчанных янгианов без сдвигов построены трансферматрицы и вектора Бете. Показано, что корни Бете отвечают вакуумам в дуальной модели.
- Получено выражение для зарядовой функции твердотельных разбиений, отвечающих классическим вакуумам в эффективной модели D-бран на четырехмерных многообразиях Калаби-Яу.

<u>Достоверность</u> полученных результатов проверяется обоснованностью методов, примененных в исследовании, обеспечивается публикуемостью результатов в престижных отечественных и международных журналах со строгой рецензионной политикой, а также подтверждается соответствием иным независимым результатам, полученным другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на научных семинарах в ИТЭФ, ККТЭФ НИЦ «Курчатовский институт», МФТИ, Сколтех, в университете Кавли физики и математики Вселенной (Кашиваноха, Япония), в университете Калифорнии в Беркли (Беркли, США), в университете Калифорнии в Дэвисе (Дэвис, США), в Калифорнийском технологическом университете (Пасадена, США), в университете Северной Каролины (Чапел-Хилл, США), в лаборатории Ангстрема при университете Уппсалы (Уппсала, Швеция), в Швейцарском Федеральном институте технологий (Цюрих, Швейцария), в университете Сорбонны (Париж, Франция). Также полученные результаты обсуждались на международных онлайн-семинарах, организованных научными группами ИТФ им. Ландау, центра математических исследований им. Яу (Пекин, Китай), университета Канзаса (Канзас, США). Помимо прочего результаты обсуждались на международных конференциях:

- Workshop on quantum fields, knots and integrable systems (Эдинбург, Великобритания, 2017),
- The XXVIIIth International Conference on Supersymmetry and Unification of Fundamental Interactions (SUSY 2021) (Пекин, Китай, 2021),
- «Strings and Fields 2021» (Киото, Япония, 2021),
- «Number Threory, Strings and Quantum Physics» (Токио, Япония, 2021).
- «Fields & Strings 2024» (Москва, Россия, 2024).
- «Problems of the Modern Mathematical Physics» (Дубна, Россия, 2024).

<u>Личный вклад</u>. Все результаты, включенные в диссертацию, получены лично соискателем или при его прямом участии. Соискатель принимал непосредственное участие в выполнении всех работ и написании текстов всех публикаций. Имена соавторов указаны в соответствующих публикациях.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 печатных изданиях, индексируемых Web of Science и Scopus, [51] (разд. 5.4.6), [52](разд. 5.3, 5.5), [36] (разд. 3.1, 3.2), [53] (разд. 2.1), [54] (глава 1, разд. 5.4), [55] (разд. 2.2), [56] (разд. 2.3), [57] (разд. 4.1, 4.2, 4.3), [58] (разд. 3.2.5, 3.3.2, 3.3.3), [59] (разд. 4.4), [60] (разд. 2.4), [61] (разд. 3.3.1).

## Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации составляет 351 страницу, включая 42 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 264 наименования.

## 1 Суперсимметричные дефекты типа «интерфейс»

#### 1.1 Локализация на мировом листе с границей и БПЗ состояния

#### 1.1.1 Локализация и ренорм-групповой поток

#### Локализация в квантовой механике

Канонический подход к локализации в квантово-механической системе с суперсимметрией был предложен в фундаментальной работе [62] (см. также обзоры [28; 63]). Здесь мы лишь упомянем основные шаги необходимые в нашем исследовании.

Для применения этих методов к квантовой теории поля (КТП) рассмотрим ее как квантово-механическую систему на бесконечномерном пространстве полей, или, иными словами, отображений:

$$\mathcal{T}_{\text{QM}} = \text{Map}\left(\mathcal{V}_{d-1} \longrightarrow \mathcal{T}\right).$$

Суперсимметрии отвечают Нетеровские суперзаряды Q и  $Q^{\dagger}$ , которые действуют на гильбертовом пространстве состояний и удовлетворяют следующим алгебраическим соотношениям:

$$\left\{\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^{\dagger}\right\} = 2\left(\mathcal{H} - |Q_{\text{top}}|\right) \ge 0, \qquad (1.1)$$

где  $\mathcal{H}$  – гамильтониан системы, а  $Q_{top}$  – топологический заряд класса полевых конфигураций. На собственные значения гамильтониана существует ограничение снизу:

$$\mathcal{H} \geq |Q_{\mathrm{top}}|$$

Это неравенство называется неравенством БПЗ. Состояния, насыщающие неравенство БПЗ, так что собственное значение гамильтониана принимает наимень-

шее возможное значение в фиксированном топологическом классе полей, называются БПЗ состояниями, волновые функции этих состояний аннигилируются суперзарядами:

$$\mathcal{Q}|\Psi_{\rm BPS}\rangle = \mathcal{Q}^{\dagger}|\Psi_{\rm BPS}\rangle = 0.$$
 (1.2)

Также говорят, что БПЗ состояния сохраняют *Q*-суперсимметрию.

Предположим, что таргет-пространство  $\mathcal{T}_{QM}$  параметризовано координатами  $x^i$ . Суперсимметрия смешивает бозонные поля  $x^i$  с соответствующими фермионными партнерами  $\psi_i$  и  $\psi_i^{\dagger}$ . Фермионные операторы ведут себя подобно дифференциальным формам, таким образом мы можем построить следующее соответствие:

$$\psi_i^{\dagger} \rightsquigarrow dx^i \wedge, \quad \psi_i \rightsquigarrow g^{ij} \iota_{\partial/\partial x^j},$$
(1.3)

где  $\iota$  – оператор внутреннего произведения (свертки формы с векторным полем), а  $g_{ij}$  – метрика на пространстве  $\mathcal{T}_{\rm QM}$ . Это соответствие позволяет отождествить некоторые квантово-механические величины с геометрическими величинами.

В частности, суперзаряды Q и  $Q^{\dagger}$  имеют смысл обобщенного дифференциала и дуальной по Ходжу пары к нему. В зависимости от геометрических структур, изначально представленных на пространстве  $\mathcal{T}_{QM}$ , таких как Риманова метрика, комплексная структура, эквивариантное действие группы, дифференциал-суперзаряд наследует соответствующие свойства: так он приобретает вид дифференциала де Рама, Дольбо, эквивариантного дифференциала в модели Картана, и т.д. В дополнение суперзаряд может приобрести вклад скалярной функции, характеризующей потенциал в системе. Волновые функции БПЗ состояний могут быть интерпретированы как гармонические формы на пространстве  $\mathcal{T}_{QM}$ .

В качестве примера рассмотрим упрощенную версию данной модели, где таргет-пространство  $\mathcal{T}_{\text{QM}}$  допускает действие группы Ли G, а также возможен выбор Морсовой функции высоты  $\mathfrak{H}$ . Суперзаряд в такой системе будет иметь

следующий вид:

$$\mathcal{Q} = d + (d\mathfrak{H}) + \iota_V = \psi_i^{\dagger} \frac{\partial}{\partial x^i} + \psi_i^{\dagger} (\partial_i \mathfrak{H}) + \psi_i g^{ij} V_j, \qquad (1.4)$$

где V – Киллингово векторное поле, индуцированное G-действием на  $\mathcal{T}_{\text{QM}}$ .

Механизм локализации можно разбить на четыре этапа:

1. Генераторы абелевой гомологической группы отождествляются с гармоническими формами, которые зануляют Q и  $Q^{\dagger}$  одновременно:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{BPS}} \cong H^*(\mathcal{Q}).$$

2. Рассматривается изоморфизм когомологий:

$$\phi^{(\hbar)}: H^*(\mathcal{Q}) \longrightarrow H^*(\mathcal{Q}(\hbar)),$$

где отображение  $\phi^{(\hbar)}$  – лишь обычное сопряжение следующим оператором:

$$\Phi_{\hbar} := \exp\left(-\left(\hbar^{-1} - 1\right)\mathfrak{H} + \left(\log\hbar\right)\sum_{i}\psi_{i}^{\dagger}\psi_{i}\right).$$
(1.5)

Для преобразованного суперзаряда находим следующее выражение:

$$\mathcal{Q}(\hbar) := \hbar \Phi_{\hbar} \mathcal{Q} \Phi_{\hbar}^{-1} = \hbar d + (d\mathfrak{H}) + \iota_V.$$

Новый суперзаряд относится к *иной* физической системе, неэквивалентной изначальной. Гамильтониан такой системы дается выражением:

$$\mathcal{H}(\hbar) := |Q_{\text{top}}(\hbar)| + \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{Q}(\hbar), \mathcal{Q}^{\dagger}(\hbar) \right\} =$$
  
=  $\hbar^{2}\Delta + \left| \vec{\nabla} \mathfrak{H} \right|^{2} + \left| \vec{V} \right|^{2} + \text{фермионы.}$  (1.6)

3. С одной стороны оператор Ф<sub>ħ</sub> восстанавливает явный вклад постоянной Планка, часто опускаемый в вычислениях, связанных с КТП, с другой стороны он указывает на инвариантность БПЗ подпространства Гильберта относительно изменений параметра ħ:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{BPS}}(\hbar) \cong \mathscr{H}_{\mathrm{BPS}}(\hbar').$$

 Используя эту инвариантность мы вычисляем волновые функции БПЗ состояний в квазиклассическом пределе:

$$\hbar \longrightarrow 0.$$

Процесс вычислений в квазиклассическом пределе имеет свои сложности – необходимость в определенных ситуациях рассматривать непертурбативные инстантонные поправки [28; 64]. В предложенной нами ситуации вычисление  $\mathscr{H}_{BPS}$  сводится к вычислению когомологий комплекса Морса-Смейла-Виттена (MCB) ( $\mathbf{M}^*, \mathbf{Q}$ ).

Значения поля, зануляющие потенциальный член (1.6) соответствуют классическим вакуумам системы, потому мы будем называть геометрическое место этих нулевых значений локусом вакуумов и обозначать как  $\mathfrak{V}$ . Предположим сначала, что  $\mathfrak{V}$  – множество изолированных точек. В каждой точке  $p \in \mathfrak{V}$  применим замену координат x на пространстве  $\mathcal{T}_{\text{QM}}$  следующим образом:

$$x \longrightarrow p + \hbar^{\frac{1}{2}}x$$

Тогда гамильтониан системы может быть разложен по порядкам ћ:

$$\mathcal{H} = |Q_{\text{top}}(\hbar)| + \hbar \mathcal{H}_p^{(0)} + O(\hbar^2).$$

Гамильтониан  $\mathcal{H}_p^{(0)}$  – гамильтониан обычной свободной частицы, и его основную волновую функцию  $\Psi_p$  легко вычислить.  $\Psi_p$  – приближение первого порядка к настоящей волновой функции БПЗ состояния. Как векторное пространство MCB комплекс натянут на вектора пертурбативных волновых функций:

$$\mathbf{M} := \bigoplus_{p \in \mathfrak{V}} \mathbb{C} \ \Psi_p. \tag{1.7}$$

Это векторное пространство градуировано фермионным числом *f*. Дифференциал в данном комплексе

$$\mathbf{Q}: \mathbf{M}^f \longrightarrow \mathbf{M}^{f+1}$$

определен через матричные элементы  $\langle \Psi_p | \mathbf{Q} | \Psi_{p'} \rangle$ , которые с точностью до ненулевого несущественного множителя совпадают с матричными элементами  $\langle \Psi_p | \mathcal{Q}^{\dagger}(\hbar) |$ 

$$\langle \Psi_p | \mathbf{Q} | \Psi_{p'} \rangle = \delta_{f_p, f_{p'}+1} \times \sum_{1\text{-инстантоны } (p \to p')} \Delta, \qquad (1.8)$$

где *n*-инстантон, соответствующий переходу из точки *p* в точку *p'*, является решением граничной задачи:

$$\partial_{\tau} x^{i}(\tau) = -g^{ij} \partial_{x^{j}} \mathfrak{H}(x(\tau)),$$

$$\lim_{\tau \to -\infty} x^{i}(\tau) = p, \quad \lim_{\tau \to -\infty} x^{i}(\tau) = p'.$$
(1.9)

Одно-инстантонные решения задачи (1.9) обладают лишь одним модулем переноса центра масс инстантона m, отображающим решение  $x^{i}(\tau)$  в решение  $x^{i}(\tau + m)$ . Параметр  $\Delta$  в выражении (1.8) – вклад  $\pm 1$ :

$$\Delta = \frac{\mathrm{Det}'\hat{D}}{|\mathrm{Det}'\hat{D}|},$$

где  $\hat{D}$  – оператор Дирака на фоне инстантонного решения:

$$\hat{D}_k^i := \partial_\tau \delta_k^i + \partial_{x^k} \left( g^{ij} \partial_{x^j} \mathfrak{H} \right),$$

а вклад нулевой моды, соответствующей модулю *m*, удален из выражений для определителей.

Гильбертово подпространство БПЗ определено как когомологии MCB комплекса:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{BPS}}^* \cong H^*(\mathbf{M}, \mathbf{Q}), \tag{1.10}$$

где когомологическая градуировка совпадает с градуировкой фермионным числом.

#### Вильсоновская перенормировка, «точная» в одной петле

Ранее мы предположили, что  $\mathfrak{V}$  – множество изолированных точек. Теперь рассмотрим случай, когда  $\mathfrak{V}$  – единственная связная гиперповерхность в пространстве  $\mathcal{T}_{\text{QM}}$ . Мы можем разделить координаты  $x^i$ , покрывающие  $\mathcal{T}_{\text{QM}}$ , на две группы: перпендикулярные к поверхности  $\mathfrak{V}$ , также мы их будем называть «быстрыми» переменными  $x_f$ , и касательные к  $\mathfrak{V}$ , или «медленные» переменные  $x_s$ . Медленные переменные  $x_s$  также называются *вакуумными модулями*. Пертурбативные моды  $x_f$ -поля вблизи вакуумного решения  $x_f = 0$  обладают большой эффективной частотой (массой), и поэтому мы назвали их быстрыми. Пертурбативные медленные моды  $x_s$  – аналоги Голдстоуновских мод, они могут даже формировать стационарные полевые конфигурации – конденсаты.

Разделение волновых мод на медленные и быстрые является прологом описания канонического действия Вильсоновской ренорм-группы [65]. Проще всего вычислить действие ренорм-группы на суперзаряды. Произведем замену переменных:

$$x_f \longrightarrow \hbar^{\frac{1}{2}} x_f$$

Тогда для выражений суперзарядов верны следующие разложения:

$$\mathcal{Q}(\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{\frac{n+1}{2}} \mathcal{Q}^{(n)}, \qquad (1.11)$$

где

$$\mathcal{Q}^{(0)} = d_f + \Omega(x_s) \cdot x_f. \tag{1.12}$$

Матрица частот  $\Omega(x_s) \neq 0$  определяет линейный функционал на переменных  $x_f$ , а дифференциал  $d_f$  определяет дифференцирование только по переменным  $x_f$ . Для волновых функций мы выбираем следующий анзац разложения:

$$\Psi_{\rm BPS}(\hbar) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^{\frac{n}{2}} \Psi^{(n)}.$$
(1.13)

Подставляя это разложение в (1.2), находим следующее соотношение в первом порядке по  $\hbar$ :

$$\mathcal{Q}^{(0)}\Psi^{(0)} = \bar{\mathcal{Q}}^{(0)}\Psi^{(0)} = 0.$$
(1.14)

Эти уравнения – простые линейные дифференциальные уравнения по  $x_f$ ,  $\Psi^{(0)}$ имеет вид волновой функции, локализованной вблизи вакуумной точки  $x_f = 0$ , квантовые поправки к которой подавлены Гауссовым экспоненциальным весом. Решения дифференциального линейного уравнения (1.14) формируют одномерное линейное пространство  $C \cdot \Psi^{(0)}$ , где C – обычная константа интегрирования. Поскольку поля  $x_s$  в уравнении (1.14) играют роль обычных параметров. мы можем заключить, что, если  $\Psi^{(0)}(x_f, x_s)$  – решение (1.14), то любое решение (1.14) имеет следующий вид:

$$C(x_s) \cdot \Psi^{(0)}(x_f, x_s),$$

где  $C(x_s)$  – функционал от параметров  $x_s$  общего вида. В следующем порядке приближения мы получаем следующие соотношения:

$$\mathcal{Q}^{(1)} \cdot C \cdot \Psi^{(0)} + \mathcal{Q}^{(0)} \cdot \Psi^{(1)} = 0,$$
  
$$\bar{\mathcal{Q}}^{(1)} \cdot C \cdot \Psi^{(0)} + \bar{\mathcal{Q}}^{(0)} \cdot \Psi^{(1)} = 0.$$
 (1.15)

Умножая оба уравнения на  $\Psi^{(0)\dagger}$  слева и интегрирую по  $x_f$ , мы получим следующее уравнение, определяющее вид C:

$$\mathcal{Q}_{\rm eff}C = \bar{\mathcal{Q}}_{\rm eff}C = 0, \qquad (1.16)$$

где

$$\mathcal{Q}_{\rm eff}(x_s) = \int dx_f \ \Psi^{(0)\dagger}(x_f, x_s) \mathcal{Q}^{(1)}(x_f, x_s) \Psi^{(0)}(x_f, x_s),$$
  
$$\bar{\mathcal{Q}}_{\rm eff}(x_s) = \int dx_f \ \Psi^{(0)\dagger}(x_f, x_s) \bar{\mathcal{Q}}^{(1)}(x_f, x_s) \Psi^{(0)}(x_f, x_s).$$
(1.17)

Суперзаряды (1.17) представляют собой результат действия Вильсоновской ренорм-группы на начальные выражения в одной петле, потому мы называем эти суперзаряды эффективными суперзарядами, определяющими теорию в инфракрасном(ИК) пределе, а C – эффективными волновыми функциями.

Поскольку данные вычисления произведены в квазиклассическом пределе  $\hbar \to 0$ , всеми старшими поправками в разложении (1.13) можно пренебречь. Такая процедура позволяет переформулировать задачу определения волновой функции БПЗ в терминах эффективной теории. А поскольку в течение вычисления нам потребовалось лишь задействовать первую поправку в теории возмущений, то процедуру перенормировки суперзарядов можно назвать точной в одной петле.

Также норма волновых функций в гильбертовом пространстве меняется посредством соответствующего якобиана:

$$\langle C'|C\rangle = \int dx_s \ J(x_s) \ \bar{C}'(x_s)C(x_s),$$
  
rge  $J(x_s) = \int dx_f \ \Psi^{(0)\dagger}(x_f, x_s)\Psi^{(0)}(x_f, x_s).$  (1.18)

# 1.1.2 Локализация в калибровочной сигма-модели с дефектом типа «интерфейс»

#### Линейная калибровочная сигма-модель

Рассмотрим двумерную  $\mathcal{N} = (2, 2)$  линейную калибровочную сигма-модель (ЛКСМ). В данном разделе мы рассмотрим теорию с калибровочной группой U(1) и киральными мультиплетами в количестве, заданном  $n_f$ , обладающими электрическими зарядами  $Q_a$  и массами  $\mu_a$  для  $a = 1, \ldots, n_f$  на пространственном интервале [0, L]. ЛКСМ с калибровочной группой общего вида может быть описана в подобных терминах. На границах интервала мы выбираем граничные условия типа Чана-Патона (см. Приложение А.З), иными словами можно сказать, что на границах интервала мы выбрали браны. Факторы Чана-Патона проявляются в уравнениях, описывающих нашу теорию, дважды. Во-первых, изменяется выражение для суперзарядов, это изменение контролируется функцией  $\bar{Q}_{bdry}$ , голоморфной для переменных киральных полей  $\phi_a$ , и граничными анти-фермионными полями  $\bar{\chi}_i$ . Во-вторых, изменяется вклад в граничный электрический заряд **q**. Выражение для суперзаряда (В-твиста) в данной теории с восстановленной зависимостью от  $\hbar$  имеет следующий вид:

$$\begin{split} \bar{\mathcal{Q}}_B &= \int dx^1 \left[ \lambda_1 \left( -i\hbar \delta_{\sigma_{\mathbb{I}}} - i\partial_1 \sigma_{\mathbb{R}} - \hbar \delta_{A_1} + i\hbar \theta \right) + \\ &+ \lambda_2 \left( \hbar \delta_{\sigma_{\mathbb{R}}} - \partial_1 \sigma_{\mathbb{I}} + \left( \sum_a Q_a |\phi_a|^2 - r \right) \right) \right) - \\ &- i\sqrt{2} \sum_a \bar{\psi}_{1,a} \left( \hbar \delta_{\bar{\phi}_a} + (Q_a \sigma_{\mathbb{R}} - \mu_{\mathbb{R},a}) \phi_a \right) - \\ &- \sqrt{2} \sum_a \bar{\psi}_{2,a} \left( (\partial_1 \phi_a + iQ_a A_1 \phi_a) - (Q_a \sigma_{\mathbb{I}} - \mu_{\mathbb{I},a}) \phi_a \right) \right] + \bar{\mathcal{Q}}_{\text{bdry}} \,. \end{split}$$

$$(1.19)$$

Также в дальнейшем мы используем выражение для Гауссового зарядово-

го оператора:

$$\mathcal{J} = \sum_{a} Q_a \left( \left( \bar{\phi}_a \delta_{\bar{\phi}_a} - \phi_a \delta_{\phi_a} \right) + \bar{\psi}_{1,a} \psi_{1,a} + \bar{\psi}_{2,a} \psi_{2,a} \right) + i \partial_1 \delta_{A_1} + \mathbf{q} \delta(\text{bdry}) , \qquad (1.20)$$

где **q** – электрический заряд бран на границах интервала.

Суперзаряды генерируют супералгебру в этой теории:

$$Q_B^2 = \mathcal{Z}, \quad \left\{ Q_B, \bar{Q}_B \right\} = 2\mathcal{H} + 2\operatorname{Re}\left(\zeta^{-1}\tilde{\mathcal{Z}}\right),$$
(1.21)

где  $\zeta$  – дополнительная фаза (см. (А.31)), а  $\mathcal{Z}$  и  $\tilde{\mathcal{Z}}$  – центральный заряд и твистованный центральный заряд соответственно.

Из приведенных алгебраических соотношений становится понятно, что спектр гамильтониана ограничен снизу. Волновые функции БПЗ состояний удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\mathcal{Q}_B |\Psi_{\rm BPS}\rangle = \bar{\mathcal{Q}}_B |\Psi_{\rm BPS}\rangle = \mathcal{J} |\Psi_{\rm BPS}\rangle = 0.$$
 (1.22)

Гильбертово подпространство БПЗ является собственным для гамильтониана:

$$\mathcal{H}|\Psi_{\rm BPS}\rangle = -{\rm Re}(\zeta^{-1}\tilde{\mathcal{Z}})|\Psi_{\rm BPS}\rangle.$$
 (1.23)

Чтобы ввести зависимость параметров от пространственной координаты  $x^1$ , отвечающую интерфейсу, достаточно заменить соответствующие константы в выражениях для суперзарядов (1.19) на функции  $x^1$ :

$$\theta \to \theta(x^1), \quad r \to r(x^1), \quad \mu_a \to \mu_a(x^1).$$
 (1.24)

Применяя обратное преобразование Лагранжа к оператору Гамильтона  $\mathcal{H}$ , можно восстановить действие теории на фоне интерфейса. Мы ограничимся рассмотрением интерфейса, отвечающего лишь изменяющимся в пространстве параметрам Файе-Иллиополуса и топологическому  $\theta$ -члену. В данном контексте легко вычислить, как меняется действие ЛКСМ в присутствии дефекта. При этом сохраняется только часть изначальной суперсимметрии, отвечающая В-твисту. Нам всего лишь необходимо модифицировать вклады члена Файе-Иллиополуса и топологического члена (А.24):

$$\mathcal{S}_{\mathrm{FI},\theta}' = \int dx^0 dx^1 \left[ -r \,\mathbf{D} + \theta \,F_{01} + \partial_1 r \,\sigma_{\mathbb{I}} - \partial_1 \theta \,\sigma_{\mathbb{R}} \right]. \tag{1.25}$$

Центральный заряд в данной модели задается следующим выражением:

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \Delta i \left\{ \hbar \sum_{a} \bar{\psi}_{-,a} \psi_{+,a} + \hbar \bar{\sigma} \bar{t}' - \sum_{a} \left( Q_a \bar{\sigma} - \bar{\mu}_a \right) |\phi_a|^2 - \hbar \bar{\sigma} \delta_{A_1} \right\} + \\ + \hbar \sum_{a} \bar{\mu}_a \int dx^1 \left( \bar{\phi}_a \delta_{\bar{\phi}_a} - \phi_a \delta_{\phi_a} + \bar{\psi}_{1,a} \psi_{1,a} + \bar{\psi}_{2,a} \psi_{2,a} \right),$$
(1.26)

где обозначение  $\Delta$  означает разницу значений величины на границах пространственного интервала, а t' – комплексифицированный параметр Файе-Иллиополуса:

$$t' = \hbar^{-1}r - i(\theta + \mathbf{q}_{bdry}). \qquad (1.27)$$

Калибровочная симметрия позволяет изменять общую нефизическую фазу волновой функции:

$$\Psi \to \exp\left(i\int \varphi(x^1)A_1(x^1) \ dx^1\right) \Psi.$$
(1.28)

Эти изменения не влияют на свойства интегрируемости волновой функции, однако сдвигают значения оператора Гауссового заряда и топологического параметра:

$$\mathcal{J}(x^1) \to \mathcal{J}(x^1) - \partial_1 \varphi(x^1), \quad \theta(x^1) \to \theta(x^1) - \varphi(x^1).$$
 (1.29)

Мы используем этот сдвиг, чтобы компенсировать вклады граничных электрических зарядов:

$$\varphi = \mathbf{q} \,\Theta(\mathrm{bdry}),\tag{1.30}$$

где  $\Theta$  – ступенчатая функция Хевисайда. Так мы заменяем вклад электрических зарядов бран на ступенчатые вклады. Поскольку параллельный перенос инвариантен относительно гомотопических преобразований пути переноса  $\wp$  в пространстве параметров, ступенчатые вклады могут быть сглажены (см. puc.1.1). Мы используем этот прием в дальнейшем и не будем рассматривать отдельно различные вклады электрических зарядов граничных бран, взамен мы будем сдвигать граничные значения функции топологического параметра  $\theta(x^1)$ .



Рисунок 1.1 – Вклад граничных бран в топологический параметр.

Далее, следуя плану, описанному в разделе 1.1.1, для исследования ИК свойств заявленной системы, нам необходимо построить МСВ комплекс. Первый шаг в построении МСВ комплекса – вычисление вакуумного локуса  $\mathfrak{V}$ .  $\mathfrak{V}$  в нашем случае соответствует решению уравнений:

$$\partial_{1}\sigma_{\mathbb{R}} = O(\hbar),$$

$$-\partial_{1}\sigma_{\mathbb{I}} + \left(\sum_{a} Q_{a} |\phi_{a}|^{2} - r\right) = O(\hbar),$$

$$(Q_{a}\sigma_{\mathbb{R}} - \mu_{\mathbb{R},a})\phi_{a} = O(\hbar),$$

$$\partial_{1}\phi_{a} + iQ_{a}A_{1}\phi_{a}) - (Q_{a}\sigma_{\mathbb{I}} - \mu_{\mathbb{I},a})\phi_{a} = O(\hbar).$$
(1.31)

Порядковый член  $O(\hbar)$  в правых частях этих соотношений вместо привычных нулей подразумевает, что квантовые поправки слегка «размывают» точные границы  $\mathfrak{V}$ .

Далее рассмотрим пространственно постоянные решения этих уравнений, удовлетворяющие упрощенным уравнениям:

$$\sum_{a} Q_{a} |\phi_{a}|^{2} - r = O(\hbar), \quad (Q_{a}\sigma - \mu_{a})\phi_{a} = O(\hbar).$$
(1.32)

В зависимости от значений параметров в этих уравнениях можно условно выделить три фазы:

- 1. Кулонова ветвь. Эта ветвь проявляется при следующих параметрических значениях:  $r = O(\hbar)$ ,  $\mu_a = O(1)$ . В вакуумном решении доминирует вакуумное среднее скалярного поля в калибровочном векторном мультиплете  $\sigma = O(1)$ . Вакуумные средние киральных мультиплетов равны нулю, но тем не менее им могут соответствовать нетривиальные квантовые поправки  $\phi_a = O\left(\hbar^{\frac{1}{2}}\right)$ .
- «Невырожденная» Хиггсова ветвь. Эта ветвь проявляется при следующих параметрических значениях: r = O(1), μ<sub>a</sub> = O(ħ). В этом случае ситуация диаметрально противоположна Кулоновой ветви: скалярные поля в киральном мультиплете приобретают вакуумные средние |φ<sub>a</sub>| = O(1), в то время как значения скалярных полей в векторных мультиплетах описываются лишь квантовыми поправками σ = O(ħ).
- 3. Смешанная/ «вырожденная» Хиггсова ветвь/кристаллизованная Кулонова ветвь. В этом случае r = O(1),  $\mu_a = O(1)$ . Теория локализуется в одну из фиксированных точек на Хиггсовой ветви:  $|\phi_a| = r^{\frac{1}{2}} + O(\hbar)$ ,  $\sigma = Q_a^{-1}\mu_a + O(\hbar)$ . При этом одновременно и скаляр в векторном мультиплете приобретает выделенные значения, для более содержательных калибровочных групп образуя регулярную структуру, напоминающую кристалл.

В литературе третий описанный случай, как правило, называется смешанной ветвью, поскольку скалярные поля и векторного, и кирального мультиплетов приобретают вакуумные средние. Однако нам бы хотелось сохранить употребление терминов «вырожденная Хиггсова ветвь», «кристаллизованная Кулонова ветвь», поскольку различие между вырожденной и невырожденной Хиггсовой ветвями довольно условно. В принципе функция высоты Морса может быть разделена на две части, содержащие параметры r и  $\mu_a$  по отдельности. Эти части могут быть перенормированы по отдельности путем введения двух ренорм-групповых потоков с параметрами  $\hbar_1$  и  $\hbar_2$ . Массовые параметры в результирующем выражении для суперзаряда будут иметь следующий порядок:

$$\mu_a \sim \hbar_1/\hbar_2.$$

Однако нет разницы, в каком порядке применять теорию локализации по  $\hbar_1$ 

или по  $\hbar_2$ , а, значит, соответствующие ренорм-групповые потоки коммутируют. Невырожденная Хиггсова ветвь проявится, если в первую очередь взять предел  $\hbar_1 \rightarrow 0$ , тогда последующий предел  $\hbar_2 \rightarrow 0$  локализует ее на вырожденную Хиггсову ветвь. Математически эта локализационная картина соответствует локализации в категории когерентных пучков на невырожденной Хиггсовой ветви из-за эквивариантного действия группы, параметризованного весами  $\mu_a$ . Мы объясним подробнее применение термина «кристаллизованная Кулонова ветвь» к предмету нашего обсуждения в разделе 2.1.2.

Так мы будем различать Хиггсову и Кулонову фазы теории, не прибегая к вакуумным значениям полей, а используя параметр r, которому мы позволяем изменяться на пространственной ширине интерфейса. БПЗ состояния в нашей теории будут иметь слоистую структуру с перемешанными фазами. Поскольку описанные фазы являются дуальными описаниями одной и той же физической картины, мы не ожидаем появления доменных стенок между означенными фазами.

В нашем случае множество  $\mathfrak{V}$  может иметь модули. Рассмотрим ренормгрупповой поток  $\hbar \to 0$  за счет интегрирования степеней свободы, перпендикулярных к  $\mathfrak{V}$ , и выведем эффективную теорию. Далее мы опишем эффективные теории и для Кулоновых, и для Хиггсовых ветвей при постоянных значениях параметров  $\mu_a$  и t и напомним формализм инстантонных сетей, следуя [28], позволяющий вычислять когомологии комплекса МСВ для суперсимметричных теорий с интерфейсами.

## Граничные условия из бран

Прежде чем продолжить обсуждение эффективных теорий, нам необходимо зафиксировать граничные условия на границах интервала [0, *L*], которые будут инвариантны по отношению к ренорм-групповому потоку. Только в этом случае мы можем гарантировать, что эффективные подпространства Гильберта состояний БПЗ дуальны друг другу.

В принципе, суперзаряд  $Q_B$ , который мы используем для локализации,

может оказаться не нильпотентным (см. (А.32)). Условия нильпотентности налагают ограничения на суперпотенциал и центральный заряд  $\mathcal{Z}$ , что приводит к определенным условиям для граничных мод возбуждения полей. Граничные условия для калибровочного, векторного мультиплета, таким образом, могут быть зафиксированы из инвариантного по отношению к ренорм-группе требования:

$$\mathcal{Q}_B^2 = 0$$

Для определения инвариантных по отношению к ренорм-группе граничных условий для киральных полей мы пользуемся подходом, описанным в работах [66; 67], и переписываем киральные поля в терминах суперполей для Втвиста, сохраняемого границей. Связь между суперсимметрией в объеме и на границе мирового листа нашей теории описана в Приложении А.3.2.

Для киральных полей выберем граничные условия типа Неймана, позволяющие бранам покрывать вакуумное многообразие целиком. Если нам потребуется ограничение на какое-то подмногообразие, мы используем браны с факторами Чана-Патона, соответствующими комплексам структурных пучков. Таким образом для скаляров мы запишем граничные условия в калибровочноинвариантном виде, аналогичном (A.53):

$$D_1\phi_a - (Q_a\sigma_{\mathbb{I}} - \mu_{\mathbb{I},a})\phi_a\big|_{\text{bdry}} = 0, \quad (Q_a\sigma_{\mathbb{R}} - \mu_{\mathbb{R},a})\phi_a\big|_{\text{bdry}} = 0.$$
(1.33)

Граничные условия для суперпартнеров могут быть получены с помощью действия В-твиста.

Конечно, предложенные граничные условия могут быть обобщены за счет добавления дополнительных граничных операторов (см. [68]), однако здесь эти обобщения рассматриваться не будут для простоты общей картины.

# 1.1.3 Кулонова ветвь: модель Ландау-Гинзбурга

#### Перенормировка Вильсона

Согласно процедуре локализации на Кулонову ветвь естественно ожидать, что поле Хиггса  $\phi_a$  не приобретает вакуумного среднего. Однако, чтобы пред-

ставлять собой настоящее классическое вакуумное решение, такая полевая конфигурация должна также удовлетворять условию, следующему из D-члена в суперсимметричном действии. Иными словами, мы требуем также, чтобы r = 0. Это условие необходимо соблюдать только на классическом уровне, разрешив квантовые поправки  $r = O(\hbar)$ . Переопределим переменные соответствующим образом:

$$r = \hbar \tilde{r}, \quad \tilde{r} = O(\hbar^0).$$

Таким же образом разложим

$$\phi_a \to \hbar^{\frac{1}{2}} \phi_a, \quad \sigma \to \Sigma + \hbar^{\frac{1}{2}} \sigma,$$
 (1.34)

где  $\Sigma$  – медленная часть скалярного поля  $\sigma$ , удовлетворяющая уравнению:

$$|\partial_1 \Sigma| = O(\hbar).$$

После интегрирования по быстрым модам полей  $\phi_a$  и  $\sigma$  и перенормирования пространственной координаты  $x^1 \to \hbar^{-1} x^1$  суперзаряд и оператор Гауссового заряда приобретают следующий вид:

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\text{eff}} = \int dx^1 \left[ \lambda_1 \left( -i\delta_{\Sigma_{\mathbb{I}}} - i\partial_1 \Sigma_{\mathbb{R}} - \delta_{A_1} + i\theta \right) + \lambda_2 \left( \delta_{\Sigma_{\mathbb{R}}} - \partial_1 \Sigma_{\mathbb{I}} + \left( \sum_a Q_a \operatorname{Re} Y_a - \tilde{r} \right) \right) \right], \qquad (1.35)$$
$$\mathcal{J} = i\partial_1 \delta_{A_1} - \sum_a Q_a \ \partial_1 \operatorname{Im} Y_a,$$

где мы ввели следующее обозначение для оператора беспорядка  $Y_a$ :

$$\operatorname{Re} Y_{a} = \left\langle \Psi^{(0)} \big| |\phi_{a}|^{2} \big| \Psi^{(0)} \right\rangle,$$

$$\partial_{1} \operatorname{Im} Y_{a} = \left\langle \Psi^{(0)} \big| - \left( \bar{\phi}_{a} \delta_{\bar{\phi}_{a}} - \phi_{a} \delta_{\phi_{a}} + \bar{\psi}_{\dot{1},a} \psi_{1,a} + \bar{\psi}_{\dot{2},a} \psi_{2,a} \right) \big| \Psi^{(0)} \right\rangle.$$
(1.36)

Вакуумные средние полей  $Y_a$  легко вычислить в одной петле [69]:

$$Y_a = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{Q_a \Sigma - \mu_a}{\Lambda}.$$
(1.37)

Многозначность функции логарифм в этом выражении соответствует дискретной неоднозначности в значении поля, определяемого положением Дираковской струны. Мы можем записать класс волновых функций, удовлетворяющих условию закона Гаусса, в следующей форме:

$$\exp\left(-\mathrm{i}\int dx^1 A_1 \sum_a Q_a \operatorname{Im} Y_a\right) \Psi(\Sigma).$$

Таким образом мы выводим эффективный суперзаряд в дуальной модели:

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\mathrm{LG}} = \int dx^{1} \left[ \zeta \left( \lambda^{2} - \lambda^{1} \right) \left( \delta_{\bar{\Sigma}} + \frac{\mathrm{i}}{2} \partial_{1} \Sigma - \zeta^{-1} \frac{\bar{W}'}{2} \right) + \zeta^{-1} \left( \lambda^{1} + \lambda^{2} \right) \left( \delta_{\Sigma} - \frac{\mathrm{i}}{2} \partial_{1} \bar{\Sigma} - \zeta \frac{W'}{2} \right) \right],$$

$$(1.38)$$

где W – эффективный сгенерированный суперпотенциал:

$$W(\Sigma) = t \Sigma + \sum_{a} \frac{Q_a \Sigma - \mu_a}{2\pi} \left[ \log \left( \frac{Q_a \Sigma - \mu_a}{\Lambda} \right) - 1 \right], \qquad (1.39)$$

а параметр Файе-Иллиополуса комплексифицирован вкладом топологического члена:

$$t = \tilde{r} - \mathrm{i}\theta$$

Эффективный центральный заряд задается следующим выражением:

$$\tilde{Z} = i\zeta^{-1}\Delta\bar{W}.$$
(1.40)

Такой суперзаряд определяет модель Ландау-Гинзбурга в комплексной плоскости, параметризованной полем  $\Sigma$ , с (твистованным) суперпотенциалом W.

## Модель Ландау-Гинзбурга

Теперь мы рассмотрим модель Ландау-Гинзбурга (ЛГ) более общего вида на *m*-мерном кэлеровом многообразии  $X_{\text{LG}}$  с координатами  $\Sigma^{I}$ ,  $I = 1, \ldots, m$ . Метрический тензор задан матрицей  $g_{I\bar{J}}$ , а суперпотенциал задан голоморфной функцией *W*. Вакуумный локус  $\mathfrak{V}$  определяется решениями следующего уравнения:

$$i\partial_1 \Sigma^I = \zeta^{-1} g^{IJ} \overline{\partial_{\Sigma^J} W}. \tag{1.41}$$

Постоянные в пространстве поля, удовлетворяющие (1.41), соответствуют корням алгебраической системы уравнений:

$$\partial_{\Sigma^J} W(\Sigma) = 0.$$

Мы назовем эти корни вакуумами в модели ЛГ, и будем обозначать индексом со звездочкой  $\Sigma_{*i}$ .

Для определения граничных условий, не нарушающих суперсимметрию, применим В-твист  $Q_B^2 + \bar{Q}_B^2$ . Результат эквивалентен сумме супертоков через границу. Дословно повторяя аргумент [64, раздел 39.2.2], мы придем к выводу, что граничная D-брана имеет форму специального лагранжева подмногообразия в конфигурационном пространстве полей. В качестве базиса таких специальных лагранжианов мы выбираем Лефшецевы наперстки.

Лефшецевы наперстки  $\mathcal{L}_i$  соответствуют вакуумам модели ЛГ (\**i*), а как многообразия определяются как объединение всех траекторий, удовлетворяющих асимптотической граничной задаче:

$$\partial_{\tau} \Sigma^{I} = -\zeta^{-1} g^{I\bar{J}} \overline{\partial_{\Sigma^{J}} W}, \quad \lim_{\tau \to -\infty} \Sigma(\tau) = \Sigma_{*i}.$$
(1.42)

Используя соотношения, определяющие  $\mathfrak{V}$  и Лефшецев наперсток, выведем следующие уравнения:

$$\partial_{1}(\zeta W) = -\mathrm{i}g^{I\bar{J}}\partial_{\Sigma^{I}}W\overline{\partial_{\Sigma^{J}}W} \in -\mathrm{i}\mathbb{R}_{\geq 0},$$
  
$$\partial_{\tau}(\zeta W) = -g^{I\bar{J}}\partial_{\Sigma^{I}}W\overline{\partial_{\Sigma^{J}}W} \in -\mathbb{R}_{\geq 0}.$$
 (1.43)

Таким образом в проекции на комплексную плоскость значений функции  $\zeta W$  наперстки представлены геометрически лучами, исходящими из критических значений  $W_{*i}$  и идущими параллельно действительной оси в сторону убывания. В то время как решения (1.41) – отрезки, соединяющие эти лучи. В пространстве полей  $X_{LG}$  Лефшецевы наперстки представлены пальцевидными расслоениями сфер  $S^{m-1}$ , где радиус сферы сжимается при приближении к вершине наперстка. Решения (1.41) могут быть представлены как струны БПЗ, протянутые между различными наперстками, либо как безразмерные струны с обоими концами, находящимися на одном наперстке (см. рис. 1.2).



Рисунок 1.2 – Лефшецевы наперстки.

Рассмотрим вспомогательную категорию C, где объекты заданы Лефшецевыми наперстками, а морфизмы определены как векторные Гильбертовы подпространства состояний БПЗ (1.10) для соответствующего выбора граничных условий:

$$\operatorname{Hom}^*(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j) := \mathscr{H}_{\operatorname{BPS}}(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j).$$

Категория Фукаи-Сайдела – категория, чьи объекты являются лагранжевыми подмногообразиями, соответствующими исчезающим циклам [70]. В нашем случае исчезающие циклы - расслоения сфер  $S^{m-1}$  вдоль лучей в плоскости  $\zeta W$ , исходящих из критических точек W. Для определенного суперпотенциала Wморфизмы также могут быть определены как Гильбертовы подпространства состояний БПЗ.<sup>1</sup> Векторное пространство морфизмов между парой наперстков  $\mathcal{L}_i$  и  $\mathcal{L}_j$  имеет шанс быть ненулевым только в случае:

$$\operatorname{Im} \zeta W_{*i} \ge \operatorname{Im} \zeta W_{*j}. \tag{1.44}$$

Таким образом, упорядочив наперстки согласно значению функции Im  $\zeta W$ , мы получим естественным образом последовательность объектов, удовлетворяющих условию исключительного набора. Категория Фукаи-Сайдела триангулирована, а, значит, любой ее объект может быть получен путем действия на исключительные объекты сдвигами и точными треугольными последовательностями [72]. Следовательно, для наших целей в качестве определения категории Фукаи-Сайдела мы можем использовать вспомогательную категорию C.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>В принципе, результирующая категория будет обернутой категорией Фукаи [30; 71], поскольку в нашей модели мы позволим лагранжевым подмногообразиям асимптотически приближаться к сингулярностям, так что асимптотическое поведение лагранжевых подмногообразий – дополнительная характеристика к определению категорий Фукаи.

Мы будем рассматривать данную конструкцию в пределе большого пространственного интервала  $L \to \infty$ . Физические пространственные размеры струнных состояний БПЗ и размеры в плоскости  $\zeta W$  связаны соотношением:

$$L = -\int \frac{d \operatorname{Im} \zeta W}{\left| g^{I\bar{J}} \partial_{\Sigma^{I}} W \overline{\partial_{\Sigma^{J}} W} \right|}.$$

Для приближения к пределу  $L \to \infty$  необходимо сдвинуть отрезок, отвечающий проекции струны БПЗ, в плоскости  $\zeta W$  в сторону критических точек – вакуумов в модели ЛГ, где знаменатель в этом выражении расходится. Вблизи вакуума (\**i*) в модели ЛГ уравнение (1.41) может быть линеаризовано для малых отклонений  $\delta\Sigma$  поля от вакуумного значения:

$$\partial_1 \delta \Sigma^I = -i\zeta^{-1} \left( g^{I\bar{J}} \overline{\partial_{JK}^2 W} \right)_{*i} \overline{\delta \Sigma^K} \,. \tag{1.45}$$

Решение этого линейного уравнения экспоненциально быстро приближается к вакууму (1.41). Таким образом можно ограничить размеры области ядра солитонного решения уравнения (1.41), где решение отличается от любого из постоянных вакуумов, узким регионом размера  $\lambda^{-1}$ , где  $\lambda$  – минимальный модуль собственного значения линейного оператора в уравнении (1.45). Такое солитонное решение в физических задачах ведет себя как квазичастица, или в нашем случае как доменная стенка в плоскости пространства-времени ( $x^0, x^1$ ).

В зависимости от соотношений между значениями  $\operatorname{Re} \zeta W$  для граничных вакуумных значений, солитон может быть либо удерживаем у одной из граничных бран, либо свободно двигаться в пространственном направлении  $x^1$ :

В последнем случае положение солитонного ядра  $x_c$  – трансляционный модуль солитонного решения в пределе  $L \to \infty$ . В зависимости от ситуации мы называем решение левым или правым связанным, либо свободным *ij*-солитоном. Стоит подчеркнуть, что возникающий модуль  $x_c$  фиктивен и не появляется при конечных размерах L, поскольку в этом случае существует эффективное взаимодействие между квазичастицей и граничными бранами, вынуждающее  $x_c$ принимать фиксированные равновесные значения.
#### 1.1.4 Хиггсова ветвь: когерентные пучки

Сначала мы рассмотрим простой случай  $\mu_a = 0$ .

В этом случае уравнения (1.31) имеют тривиальное почти стационарное решение:

$$\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{I}} = 0,$$
  

$$\phi_a = e^{iQ_a\vartheta_0}\Phi_a,$$
(1.47)  

$$A_1 = -\partial_1\vartheta_0,$$

где  $\Phi_a$  – модули на Хиггсовой ветви, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{a=1}^{n} Q_a |\Phi_a|^2 = r, \tag{1.48}$$

а  $\vartheta_0$  – произвольная функция. Покажем, что других решений нет. Для этого используем вторичное уравнение:

$$\left(-\partial_1^2 + \sum_a Q_a^2 |\phi_a|^2\right) \sigma_{\mathbb{I}} = 0.$$
(1.49)

Заметим, что оператор, возникающий в уравнении (1.49), может иметь только неотрицательные собственные значения для граничных значений, заданных постоянными полями, следовательно, у уравнения может быть только тривиальное решение.

Эквивариантный член в выражении для суперзаряда заставляет поля локализоваться на постоянные моды с точностью до калибровочных преобразований. С помощью интегрирования по быстро осциллирующим модам можно вывести выражение для эффективного суперзаряда, зависящего лишь от постоянных мод полей  $\phi_a$  и  $\sigma_{\mathbb{R}}$  [54]:

$$\bar{\mathcal{Q}}_{B}^{(\text{eff})} = -\mathrm{i}\sqrt{2}\sum_{a}\bar{\eta}_{a}\left(\hbar\partial_{\bar{\Phi}_{a}} + Q_{a}\Sigma_{\mathbb{R}}\Phi_{a}\right) + \nu\left(\partial_{\Sigma_{\mathbb{R}}} + \left(\sum_{a}Q_{a}|\Phi_{a}|^{2} - r\right)\right) + \bar{\mathcal{Q}}_{\text{bdry}}.$$
(1.50)

Условие на граничный электрический заряд также сводится к вкладу только постоянных мод:

$$\sum_{a} Q_a \left( \bar{\Phi}_a \frac{\partial}{\partial \bar{\Phi}_a} - \Phi_a \frac{\partial}{\partial \Phi_a} + \bar{\eta}_a \eta_a \right) = \Delta \mathbf{q}.$$
(1.51)

Рассмотрим проективное многообразие X, параметризованное набором комплексных чисел  $z_a, a = 1, ..., n$ , по модулю следующего преобразования:

$$z_a \sim \lambda^{Q_a} z_a, \quad \lambda \in \mathbb{C}^{\times}.$$

Переопределив поля следующим образом:

$$\Phi_a = e^{Q_a(\rho + \mathrm{i}\vartheta)} z_a, \quad \rho, \vartheta \in \mathbb{R} \,,$$

мы увидим, что и поле  $\rho$ , и поле  $\vartheta$  приобретают вакуумные средние в ИК пределе. Вакуумное среднее поля  $\rho$  определяется из условия D-члена, в то время как вакуумное среднее поля  $\vartheta$  фиксировано собственным значением оператора (1.51). Мы получили заключение, что эффективная теория описывает частицу, движущуюся по пространству X так, что выражение для эффективного заряда может быть разложено следующим образом:

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\text{eff}} = \bar{\nabla} + \bar{\mathcal{Q}}_{\text{bdry}},\tag{1.52}$$

где  $\bar{\nabla} - \bar{\partial}$ -компонента дифференциального оператора Дольбо на многообразии X, расширенное с помощью соответствующей связности Леви-Чивиты и U(1)связности, отвечающей заряду  $\Delta \mathbf{q}$ . В  $\bar{\mathcal{Q}}_{bdry}$  содержатся вклады от двух бран, расположенных на концах интервала в точках  $x^1 = 0$  и  $x^1 = L$ . Мы обозначим эти вклады как  $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{A}}$  и  $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{B}}$  соответственно:

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\text{eff}} = \bar{\nabla} + \bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{A}} - \bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{B}}.$$
(1.53)

Оба выражения  $\bar{Q}_{\mathcal{A}}$  и  $\bar{Q}_{\mathcal{B}}$  определяют комплексы векторных расслоений, или, в более общих терминах, пучки, которые мы обозначим как  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Суперзаряд (1.53) определяет дифференциал на комплексе из коцепей, определенных следующими пространствами:

$$\mathcal{C}^{n} := \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^{(0,k)}(X) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{X}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}[n-k]).$$
(1.54)

Этот комплекс описывает инъективное разрешение пучков гомоморфизмов  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ . Поскольку мы отождествили Гильбертово пространство состояний БПЗ с когомологиями суперзаряда  $\bar{\mathcal{Q}}_{\text{eff}}$ , мы можем переобозначить искомое Гильбертово пространство как когомологии производного функтора:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{BPS, soft Higgs}}^{\mathcal{F}} \cong \mathbf{R}^{\mathcal{F}} \mathrm{Hom}_{D\mathrm{Coh}(X)}\left(\mathcal{A}, \underline{\mathcal{B}}\right),$$
 (1.55)

где производные коцепи вычисляются по аргументу, который в выражении подчеркнут, а гомологическая степень  $\mathcal{F}$  соответствует собственному значению оператора фермионного числа.

#### 1.1.5 Хиггсова ветвь: эквивариантное действие

Действительные и мнимые части киральных масс  $\mu_a$  играют различные роли. Действительные части  $\mu_{\mathbb{R},a}$  дают вклад в функционал высоты Морса, в то время как мнимые части  $\mu_{\mathbb{I},a}$  описывают эквивариантное действие на пространстве полей. Потому можно рассматривать вырожденную Хиггсову ветвь, как производную категорию эквивариантных когерентных пучков. Однако, в литературе для таких структур, по большей части, отсутствует простая операционная модель, как, например, модель дифференциала Картана для обычных эквивариантных когомологий [67]. Таким образом, можно рассматривать приведенную здесь модель, основанную на физической калибровочной сигма-модели, как кандидата в обобщения модели Картана на теорию эквивариантных когерентных пучков.

Постоянные вакуумы теории соответствуют точкам на вакуумном многообразии, фиксированным по отношению к действию комплексифицированной калибровочной группы ( $b^{as}$  фиксированная точка):

$$\sigma = Q_b^{-1} \mu_b, \quad |\phi_{a=b}| = r^{\frac{1}{2}}, \quad \phi_{a\neq b} = 0, \quad \text{если } Q_b^{-1} r > 0.$$
 (1.56)

Мы идентифицируем эти точки как вакуумы *σ*-модели. Изучим волновые функции состояний БПЗ вблизи таких *σ*-модельных вакуумов. Следующее разложение позволяет фиксировать калибровку, выделив общую фазу  $\vartheta$ :

$$\phi_{a=b} = e^{iQ_b\vartheta} \left( r^{\frac{1}{2}} + \hbar^{\frac{1}{2}}\rho \right), \quad \phi_{a\neq b} = e^{iQ_a\vartheta}\hbar^{\frac{1}{2}}f_a,$$
  
$$\psi_{\alpha,a} = e^{-iQ_a\vartheta}\eta_{\alpha,a}, \quad A_1 = -\partial_1\vartheta.$$
(1.57)

Вклад в суперзаряд от  $f_a$ -мод имеет следующий вид:

$$\bar{Q}_{B} = \sum_{a \neq b} \int dx^{1} \left( -i\sqrt{2}\bar{\eta}_{\dot{1},a} \left( \delta_{\bar{f}_{a}} + \left[ Q_{a}Q_{b}^{-1}\mu_{\mathbb{R},b} - \mu_{\mathbb{R},a} \right] f_{a} \right) - \sqrt{2}\bar{\eta}_{\dot{2},a} \left( \partial_{1}f_{a} - \left[ Q_{a}Q_{b}^{-1}\mu_{\mathbb{I},b} - \mu_{\mathbb{I},a} \right] f_{a} \right) \right).$$

$$(1.58)$$

Особенность этого выражения для суперзаряда заключается в том, что у эквивариантного векторного поля есть неподвижная точка в пространстве отображений из отрезка [0, L]:

$$f_{a,0}\sqrt{\frac{2\mu_{\mathbb{I}}'}{e^{2\mu_{\mathbb{I}}'L}-1}}e^{\mu_{\mathbb{I}}'x^{1}}, \quad \mu_{\mathbb{I}}'=Q_{a}Q_{b}^{-1}\mu_{\mathbb{I},b}-\mu_{\mathbb{I},a}$$

Суперзаряд для этой моды полностью кирален и соответствует суперзаряду в модели частицы на комплексной плоскости, параметризованной комплексной координатой  $f_{a,0}$ , с приложенным к ней перпендикулярным магнитным полем:

$$\bar{Q}_B = -\mathrm{i}\sqrt{2}\bar{\eta}_{1,a,0} \left(\frac{\partial}{\partial\bar{f}_{a,0}} + \mu'_{\mathbb{R}}f_{a,0}\right), \quad \mu'_{\mathbb{R}} = Q_a Q_b^{-1} \mu_{\mathbb{R},b} - \mu_{\mathbb{R},a}.$$

Решением в данной модели является не единственное состояние БПЗ, а основной уровень Ландау, который бесконечно вырожден. Вырожденные состояния параметризованы квантовым числом углового момента  $\ell$ :

$$\Psi = \begin{cases} f_{a,0}^{\ell} e^{-|\mu_{\mathbb{R}}^{\prime}||f_{a,0}|^{2}} |0\rangle, & \mu_{\mathbb{R}}^{\prime} > 0, \ \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; \\ \bar{f}_{a,0}^{\ell} e^{-|\mu_{\mathbb{R}}^{\prime}||f_{a,0}|^{2}} \bar{\eta}_{1,a,0} |0\rangle, & \mu_{\mathbb{R}}^{\prime} < 0, \ \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \end{cases}$$
(1.59)

Это Гильбертово подпространство уровней Ландау представляет собой конденсат калибровочно инвариантного мезонного поля

$$f_a = \phi_a \phi_b^{-Q_a/Q_b}, \tag{1.60}$$

соответствующие волновые функции составляют пучок голоморфных или антиголоморфных (в зависимости от знака  $\mu'_{\mathbb{R}}$ ) функций в локальной карте, содержащей неподвижную точку.

Квантованный угловой момент  $\ell$  определен эквивариантной степенью, или сдвигом центрального заряда:

$$\Delta \tilde{Z} = -\mathrm{i} \left( Q_a Q_b^{-1} \mu_b - \mu_a \right) \ell.$$
(1.61)

Когда интервал L между граничными бранами становится велик, конденсат нулевых мод концентрируется вблизи одной из бран в зависимости от знака  $\mu'_{\mathbb{I}}$ :

$$\lim_{L \to \infty} \sqrt{\frac{2\mu'_{\mathbb{I}}}{e^{2\mu'_{\mathbb{I}}L} - 1}} e^{\mu'_{\mathbb{I}}x^{1}} \xrightarrow{\mu'_{\mathbb{I}} > 0, \operatorname{Re}\Delta \tilde{Z} > 0} \xrightarrow{\delta(L - x)} \delta(L - x)$$

$$\mu'_{\mathbb{I}} = 0, \operatorname{Re}\Delta \tilde{Z} = 0 \xrightarrow{\delta(x)} \delta(x)$$

$$(1.62)$$

Такое поведение дуально картине локализации в (1.46).

Для киральных масс  $\mu_a$  общего вида уравнения (1.31) также имеет солитонные решения, интерполирующие между двумя постоянными решениями в асимптотике подобно модели Ландау-Гинзбурга. Линеаризованные уравнения вблизи вакуума в  $\sigma$ -модели позволяют показать, что у солитонной квазичастицы будет конечный размер:

$$\min\left(r^{\frac{1}{2}}, |\mu_a|\right)^{-1}.$$
 (1.63)

## 1.1.6 Параллельный перенос и формализм сетей

### Дефекты типа «интерфейс»

В общем виде пространство параметров  $\mathcal{P}$  включает в себя параметры Файе-Иллиополуса (ФИ), топологические параметры для всех калибровочных групп, а также киральные массовые параметры. В нашей модели калибровочной группы U(1) мы позволим изменяться вдоль интерфейса параметрам ФИ и топологическому углу, оставив киральные массы постоянными. Потому оказывается удобным объединить их в один комплексный параметр:

$$t = r - \mathrm{i}\theta.$$

Таким образом в этом случае  $\mathcal{P}$  – комплексная плоскость, параметризованная t. Мы используем формализм сетей [28].

Путь  $\wp$ , определяющий интерфейс, – это отображение:

$$\wp: [0,L] \longrightarrow \mathcal{P}.$$

Вакуумный локус  $\mathfrak{V}$  соответствует решению вакуумных уравнений (1.31) для  $\sigma$ -модели, или уравнений (1.41) в случае модели Ландау-Гинзбурга, где постоянный параметр t заменен функцией отображения:

$$t = \wp\left(x^1\right).$$

Эту задачу легко решить в пределе *адиабатического* приближения. Мы будем считать изменение параметра t вдоль пути  $\wp$  *адиабатично*, если производная  $|\partial_1 t|$  много меньше масс всех солитонов. В теории с массивными вакуумами в общем положении мы всегда можем выбрать такой путь в пределе  $L \to \infty$ , так что величина  $|\partial_1 t| \ge |\Delta t|/L$  может быть мала настолько, насколько нужно. В этом пределе параметр t можно считать практически постоянным, а решение для произвольной функции  $t(x^1)$ , удовлетворяющей условию адиабатичности, может быть «склеено» с помощью диаграммной техники из решений для постоянного t.

Все диаграммы строятся на отрезке [0, L] и состоят из вершин и ребер. Вершины делятся на объемные и граничные.

Объемные вершины соответствуют *ij*-солитонам с транзитивным модулем. При подстановке такой вершины солитонный модуль перестает быть свободным параметром, его фиксирует условие стабильности:

$$*i - *j \quad , \quad \tilde{Z}^{(i \to j)}\left(t(x_c)\right) \in -i\mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad (1.64)$$

где  $\tilde{Z}$  – эффективный центральный заряд солитонного решения (1.40).

Соответственно граничные вершины представляются либо солитонами, удерживаемыми на границах, вместе с дополнительным условием стабильности, либо просто пустыми границами с соответствующим выбором постоянного вакуумного решения \**i*:

$$\begin{array}{c} 0 \\ \ast i \stackrel{0}{\longleftarrow} \ast i \stackrel{L}{\longleftarrow} \ast i \stackrel{L}{\longrightarrow} \ast i \\ \ast i \stackrel{0}{\longleftarrow} \ast j \quad , \quad \operatorname{Re} \tilde{Z}^{(i \to j)} \left( t(0) \right) > 0 \quad \operatorname{Im} \tilde{Z}^{(i \to j)} \left( t(0) \right) < 0 \qquad (1.65) \\ \ast i \stackrel{L}{\longrightarrow} \ast j \quad , \quad \operatorname{Re} \tilde{Z}^{(i \to j)} \left( t(L) \right) < 0 \quad \operatorname{Im} \tilde{Z}^{(i \to j)} \left( t(L) \right) < 0$$

Ребра диаграммы склеивают эти вершины в единую нить таким образом, что вакуумы на склеиваемых концах вершин совпадают. Из диаграммы легко прочесть приближенное решение солитонных уравнений на отрезке [0, L] следующим образом. Диаграмма сканируется вдоль координаты  $x^1 \in [0, L]$  слева направо:

- 1. Для точки на ребре решение соответствующее \*i-вакуумное решение для значения параметра  $t(x^1)$ .
- 2. Если  $x^1$  приближается к вершине, расположенной в точке  $x_c$ , решение переходит в солитонное решение в интервале  $(x_c m^{-1}, x_c + m^{-1})$ , где m соответствующая солитонная масса. Это решение приближается на границах интервала к вакуумному решению с экспоненциальной точностью  $O(e^{-m|x|})$ .

Все такие диаграммы – точки на вакуумном локусе  $\mathfrak{V}$ . Комплекс МСВ (1.7), как векторное пространство, натянут на волновые функции, соответствующие Гауссовым флуктуациям вблизи точек  $p \in \mathfrak{V}$ . В нашем случае этот комплекс биградуирован фермионным числом  $\mathcal{F}$  и твистованным центральным зарядом  $\tilde{\mathcal{Z}}$ .

Введем обозначения для квазичастиц

 $\mathfrak{X}_{ij},$ 

предположив, что мировая линия такой частицы представляет собой доменную стенку между вакуумами \**i* и \**j*. Допустим, на диаграмме имеется последовательность квазичастиц:

$$\mathfrak{X}_{i_1i_2},\mathfrak{X}_{i_2i_3},\ldots,\mathfrak{X}_{i_{n-1}i_n}.$$

Используя описанную выше процедуру, построим вакуумное решение и квазиклассическое приближение к волновой функции. Данное состояние имеет фиксированное фермионное число f. Обозначим соответствующую волновую функцию как:

$$\boldsymbol{\psi}_{i_1 i_n}^{(f)} \left[ \boldsymbol{\mathfrak{X}}_{i_1 i_2}, \boldsymbol{\mathfrak{X}}_{i_2 i_3}, \dots, \boldsymbol{\mathfrak{X}}_{i_{n-1} i_n} | \boldsymbol{\wp} \right].$$
(1.66)

Мы не будем выбирать фиксированную нормировку для этих векторов, считая, что  $\boldsymbol{\psi}$  – целая комплексная прямая. Волновые функции удовлетворяют соотношению сшивки, при этом соответствующие фермионные числа складываются:

$$\boldsymbol{\psi}_{i_{1}i_{k}}^{(f_{1})}\left[\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{i_{1}i_{2}},\ldots,\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{i_{k-1}i_{k}}|\boldsymbol{\wp}_{1}\right]\otimes\boldsymbol{\psi}_{i_{k}i_{n}}^{(f_{2})}\left[\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{i_{k}i_{k+1}},\ldots,\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{i_{n-1}i_{n}}|\boldsymbol{\wp}_{2}\right] = \\ = \boldsymbol{\psi}_{i_{1}i_{n}}^{(f_{1}+f_{2})}\left[\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{i_{1}i_{2}},\ldots,\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{i_{n-1}i_{n}}|\boldsymbol{\wp}_{1}\circ\boldsymbol{\wp}_{2}\right].$$
(1.67)

#### Инстантоны

Для вычисления дифференциала на комплексе MCB необходимо рассмотреть инстантоны (1.9). Простейший способ вывести уравнение инстантона – выделить преобразование суперсимметрии для фермионных полей и применить Виковский поворот для времени:

$$x^0 \longrightarrow -ix^2.$$

После такого преобразования на мировом листе системы удобно ввести комплексную координату:

$$z = x^1 + \mathrm{i}x^2$$

Таким образом мы получим следующие инстантонные уравнения в ЛКСМ:

$$F_{z\bar{z}} = 0, \quad 2\partial_{\bar{z}}\sigma = -\mathrm{i}\zeta^{-1}\left(r - \sum_{a}Q_{a}|\phi_{a}|^{2}\right), \qquad (1.68)$$
$$2D_{\bar{z}}\phi_{a} = \mathrm{i}\zeta^{-1}(Q_{a}\bar{\sigma} - \bar{\mu}_{a})\phi_{a}, \quad 2D_{\bar{z}}\bar{\phi}_{a} = \mathrm{i}\zeta^{-1}(Q_{a}\bar{\sigma} - \bar{\mu}_{a})\bar{\phi}_{a},$$

а такой вид инстантонные уравнения приобретут в модели Ландау-Гинзбурга:

$$2\partial_{\bar{z}}\Sigma = -i\zeta^{-1}\bar{W}'.$$
(1.69)

В этих случаях условия БПЗ на инстантонные решения принимают следующий вид:

$$\int_{A} d^{2}x \left[ \sum_{a} \left( |D_{1}\phi_{a}|^{2} + |D_{2}\phi_{a}|^{2} + 2|Q_{a}\sigma - \mu_{a}|^{2}|\phi_{a}|^{2} \right) + 4|\partial_{\bar{z}}\sigma|^{2} + \left( r - \sum_{a} Q_{a}|\phi_{a}|^{2} \right)^{2} \right] =$$

$$= -2\operatorname{Re} \zeta^{-1} \oint_{\partial A} d\bar{z} \left( \bar{\sigma} \left( r - \sum_{a} Q_{a}|\phi_{a}|^{2} \right) + \sum_{a} \mu_{a}|\phi_{a}|^{2} \right);$$

$$\int_{A} d^{2}x \left( 4|\partial_{\bar{z}}\Sigma|^{2} + |W'|^{2} \right) = -2\operatorname{Re} \oint_{\partial A} \zeta W \, dz.$$
(1.70)

Приведем здесь общий аргумент [28], почему инстантонные решения уравнений (1.68) и (1.69) не могут быть сконцентрированы в компактной области пространства, асимптотически приближаясь к единственному вакууму на бесконечности. Если решения на бесконечности асимптотически сходятся к единому вакууму в любом направлении на мировом листе, то правая часть в уравнениях (1.70) – ноль, а, значит, условие (1.70) допускает только тривиальные (с точностью до калибровочной симметрии) полевые конфигурации. Стоит заметить, что данная ситуация отличается от локализации на инстантонные решения при выборе А-твиста [69] в σ-модели. В последнем случае допускаются пространственно компактные решения вихрей БПЗ. Тем не менее, в нашей ситуации ядра инстантонов могут организовываться в протяженные одномерные структуры, описывающие мировые линии квазичастиц.

Любое солитонное решение является также и решением инстантонного уравнения (1.68) или (1.69), постоянным по временной координате  $x^2$ . Также решениями являются и движущиеся квазичастицы. Заметим, что уравнения (1.68) и (1.69) инвариантны при одновременном действии фазы на комплексную координату на мировом листе и параметр  $\zeta$ :

$$z \longrightarrow e^{i\varphi} z, \quad \zeta \longrightarrow e^{-i\varphi} \zeta.$$
 (1.71)

Это преобразование действует как Евклидов буст с быстрото<br/>й $\varphi$ в координатах

 $(x^1, x^2)$  на мировом листе. Солитонные решения, не поддерживающие соотношения стабильности (1.64) и не сохраняющие В-твист, тем не менее после буста могут быть помещены в виде наклонной мировой линии на мировой лист при условии, что быстрота удовлетворяет следующему соотношению:

$$e^{\mathbf{i}\varphi} = -\zeta^{-1} \frac{\tilde{\mathcal{Z}}}{|\tilde{\mathcal{Z}}|}.$$
(1.72)

А в присутствии интерфейса эффективный центральный заряд солитонного решения зависит от координаты  $x^1$ , потому его мировая линия  $(x^1(\tau), x^2(\tau))$  искривляется согласно уравнению:

$$\dot{x}^{1}(\tau) \cdot \operatorname{Re}\left[\zeta^{-1}\tilde{Z}\left(x^{1}(\tau)\right)\right] + \dot{x}^{2}(\tau) \cdot \operatorname{Im}\left[\zeta^{-1}\tilde{Z}\left(x^{1}(\tau)\right)\right] = 0.$$
(1.73)

Позволив солитонам перемещаться вдоль мировых линий на мировой поверхности, мы неизбежно будем вынуждены рассматривать процессы рассеяния солитонов, когда их мировые линии пересекаются в точке или с бранами на границе. Процессы рассеяния могут быть локализованы в точечных дефектах на мировой поверхности, которые мы будем называть вершинами рассеяния. Соответствующая амплитуда рассеяния задается интегралом по путям в КТП для фиксированного параметра  $t \in \mathcal{P}$  и заданного веера асимптотических вакуумов:

объем: 
$$\mathfrak{a}[\{i_1, i_2, \dots, i_n\}|t] \sim \underset{*i_n}{*i_1} \overset{*i_{n-1}}{\underset{*i_1}{\overset{*i_{n-1}}{\underset{*i_1}{\overset{*i_{n-1}}{\overset{*i_{n-1}}{\underset{*i_1}{\overset{*i_{n-1}}{\overset$$

Рассеивающиеся состояния солитонов в асимптотике определены однозначно как движущиеся солитоны с быстротой, заданной уравнением (1.72). Веера вакуумов для объемных вершин с циклически переставленными вакуумами эквивалентны друг другу. Также мы вынуждены допустить возможность нахождения на граничных бранах связанных солитонов (см. разделы 1.1.3 и 1.1.5), что отражено в описании граничных вершин. В случае, если понадобится привести пустое граничное условие без связанного солитона, достаточно задать  $*i_0 = *i_1$ либо  $*i_{n-1} = *i_n$ .

Сами по себе объемные вершины удовлетворяют набору  $A_{\infty}$ - соотношений, поскольку соответствуют Лагранжевым дискам в категории Фукаи-Сайдела [71], а вместе с граничными вершинами они удовлетворяют  $L_{\infty}$ -соотношениям [28]. Однако в данной работе мы не будем опираться на это свойство, используя иные методы вычислений.

Матричные элементы суперзаряда задаются суммами по инстантонным амплитудам – диаграммам, состоящим из объемных и граничных вершин, объединенных с помощью ребер из мировых линий движущихся солитонов в сети. Благодаря тому, что диаграммы инстантонных переходов имеют форму сетей на мировом листе, такая техника вычисления и приобрела название формализма сетей [73].

#### Гомотопия интерфейсов и вершины

Инстантоны проявляют себя в первую очередь при изучении поведения комплекса MCB при гомотопиях пути в пространстве параметров, отвечающего интерфейсу. Введем параметр гомотопии h и гомотопическое семейство путей  $\wp(h)$ , интерполирующее между двумя путями  $\wp_0$  и  $\wp_1$ :

Таким образом, гомотопический морфизм производит двухпараметрическое семейство параметров теории и эффективных суперпотенциалов:

$$t = \wp(x^1, h), \quad W(\phi, x^1, h).$$

Изоморфизм когомологий комплексов МСВ, или квази-изоморфизм комплексов МСВ, гарантирован существованием (см. раздел 10.7 в [28]) пары отображений цепей U и  $\tilde{U}$  между соответствующими комплексами, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$(\mathbf{M}_{0}^{*}, \mathbf{Q}_{0}) \xleftarrow{U}{\tilde{U}} (\mathbf{M}_{1}^{*}, \mathbf{Q}_{1}),$$
$$U \cdot \tilde{U} = \mathbf{Id} + T_{1} \cdot \mathbf{Q}_{0} + \mathbf{Q}_{0} \cdot T_{2},$$
$$\tilde{U} \cdot U = \mathbf{Id} + T_{3} \cdot \mathbf{Q}_{1} + \mathbf{Q}_{1} \cdot T_{4},$$

где  $T_i$  – какие-то отображения. Отображение U строится из вкладов решений инстантонного уравнения с динамическим вкладом параметров для соответствующего выбора граничных условий:

$$(\partial_1 + \mathrm{i}\partial_h)\Sigma = -\mathrm{i}\zeta^{-1}\overline{\partial_{\Sigma}W(\Sigma, x^1, h)}.$$
(1.75)

Обратное отображение  $\tilde{U}$  строится, используя обратное отображение гомотопии. Решение этого уравнения строится тем же способом, что и для уравнения солитонов с динамическим вкладом параметров: путем склеивания частных решений уравнений с постоянным параметром. Такая стратегия подразумевает под собой суммирование по диаграммам сетей, где инстантоны дают вклад как вершины.

Гомотопическая инвариантность гильбертова пространства состояний БПЗ приводит к категорификации формулы пересечения границ маргинальной стабильности в двумерных теориях [28; 74]. Из-за этого эффекта изменения условий стабильности либо солитоны формируют новые связанные состояния БПЗ, либо некоторые состояния БПЗ становятся нестабильны и распадаются. Естественным является желание описывать эти процессы распада/рекомбинации с помощью амплитуд рассеяния. С другой стороны процессы распада/рекомбинации могут быть замаскированы за гомотопическими движениями, соединяющими различные области пространства параметров, где представлены различные стабильные спектры состояний БПЗ. Получается, что в обеих интерпретациях этого явления принимают участие вершины рассеивающихся солитонов **a**, задающие вклад в решение уравнения (1.75).

Можно попробовать обойти необходимость вычислять решение инстантонных уравнений (1.68) и (1.69). Соответствующие значения амплитуд можно предсказывать, используя самосогласованность при пересечении стенок маргинальной стабильности. Во многих случаях солитонные состояния оказываются невырожденными: для фиксированного значения центрального заряда размерность градуированной компоненты БПЗ в Гильбертовом пространстве принимает значения 0 или 1. Для достижения такого уровня гранулированности (стратифицированности) Гильбертова подпространства состояний БПЗ, возможно, понадобится включить в рассмотрение дополнительные градуировки посредством других зарядов, коммутирующих с суперзарядом в теории. В таком случае процесс перехода через стенку становится «примитивным» [75], что позволяет вычислить значения амплитуд рассеяния подвижных солитонов. Проиллюстрируем сказанное выше на следующем примере. Предположим, что в теории имеется как минимум три постоянных вакуума \*i, \*j и \*k. Рассмотрим процесс гомотопического переноса между двумя фазами, где спектры содержат два солитона  $\mathfrak{X}_{ij}$  и  $\mathfrak{X}_{jk}$ , а в одной из фаз есть новое состояние  $\mathfrak{X}_{ik}$ . Единственный способ, каким солитон  $\mathfrak{X}_{ik}$  мог бы возникнуть в одной из фаз, – результат рекомбинации солитонов  $\mathfrak{X}_{ij}$  и  $\mathfrak{X}_{jk}$  в процессе рассеяния. Тогда и уравнение (1.75) имеет решение, интерполирующее между асимптотическими состояниями на интерфейсе, одно из которых содержит пару  $\mathfrak{X}_{ij}$  и  $\mathfrak{X}_{jk}$ , а другое  $\mathfrak{X}_{ik}$ :

$$\begin{array}{c}
 h \uparrow & \mathfrak{X}_{ik} \\
 h_{\text{crit}} & \mathfrak{a}_{\text{crit}} & [\{i, j, k\}] = \pm 1, \\
 0 & \mathfrak{a}_{\text{crit}} & [\{i, j, k\}] = \pm 1, \\
 \mathbf{a}_{\text{crit}} & \mathfrak{a}_{\text{crit}}, \quad h \ge h_{\text{crit}}; \\
 \mathbf{a}_{ij} & \mathfrak{X}_{jk} & \mathfrak{a} \left[\{i, j, k\} | h\right] = \begin{cases}
 \mathfrak{a}_{\text{crit}}, \quad h \ge h_{\text{crit}}; \\
 0, \quad h < h_{\text{crit}}.
 \end{cases}$$
(1.76)

То же решение определяет амплитуду рассеяния **a** для веера вакуумов  $\{i, j, k\}$ . Для вычисления непертурбативных поправок к суперзаряду достаточно знать лишь знак амплитуды.

49

#### Категорифицированный параллельный перенос

Как было упомянуто в разделе 1.1.3, категория бран в ИК эффективной теории Ландау-Гинзбурга соответствует категории Фукаи-Сайдела. Данные этой категории составляют из себя кэлерово многообразие и голоморфный суперпотенциал W на нем. Переход между категориями Фукаи-Сайдела с близкими функциями суперпотенциала W и W' соответствует функтору перехода [72]. Медленное адиабатическое изменение параметров вдоль пути  $\wp$  интерфейса поднимается до пути в семействе суперпотенциалов. Адиабатичность позволяет параллельно перенести физическую систему вдоль пути в пространстве параметров, где близкие состояния отождествляются на каждом шагу. Естественно ожидать подобного поведения и от категорий бран, при котором граничные условия браны  $\mathcal{B}$  и дефект интерфейса  $\mathfrak{J}_{\wp}$  заменяются браной-«голограммой»  $\beta_{\wp}(\mathcal{B})$ , задающей тот же спектр солитонов, что и пара  $\mathcal{B}$  и  $\mathfrak{J}_{\wp}$ . Таким образом мы приходим к следующему соотношению:



Здесь  $\beta_{\wp}$  – функтор параллельного переноса, а  $\mathfrak{J}_{\text{triv}}$  – простой интерфейс, соответствующий тривиальному пути  $[0, L] \rightarrow p$ , где p – точка. Более того, применяя адиабатичность, мы можем заметить, что  $\beta_{\wp}$  – функтор, совпадающий с функтором переноса в категории Фукаи-Сайдела через семейство суперпотенциалов вдоль  $\wp$ .

Доказательство озвученного выше предложения довольно сложное и здесь приведено не будет. Мы отсылаем читателя за деталями к монографии [28].

Действие функтора переноса для категории Фукаи-Сайдела наиболее явно прослеживается для исключительного набора Лефшецевых наперстков. Производная категория когерентных пучков также является триангулированной категорией, а, значит, среди ее объектов можно выбрать исключительный набор, например, набор расслоений  $\mathcal{O}(k)$  для  $\mathbb{CP}^n$ . Однако в последнем случае не находится явной универсальной функции, такой как суперпотенциал, позволяющей определить исключительные объекты априори и упорядочить их. Можно было бы построить эффективный потенциал в модели ЛКСМ  $\mathscr{W}$  так, что полевая конфигурация, интерполирующая между вакуумами *a* и *b*, имеет центральный заряд  $\tilde{Z}_{ab} = \mathscr{W}_b - \mathscr{W}_a$ , как и в (1.40). Однако для  $\mathscr{W}$  не находится простого выражения в терминах полей самой модели ЛКСМ.

С использованием эквивалентности категорий граничных условий, задаваемых бранами, для различных фаз можно расширить действие функтора параллельного переноса бран на абстрактную категорию бран:

$$\beta_{\wp}: \quad \mathfrak{D}_{p_1} \longrightarrow \mathfrak{D}_{p_2}. \tag{1.78}$$

Так в каждой фазе эта абстрактная категория бран может быть заменена на категорию Фукаи-Сайдела либо на производную категорию когерентных пучков, либо другую категорию граничных условий, задаваемую эффективным описанием теории в конкретной фазе.

Также мы ожидаем, что и закон композиции для функторов параллельного переноса распространяется на абстрактную категорию бран:

$$\beta_{\wp_2} \circ \beta_{\wp_1} = \beta_{\wp_1 \circ \wp_2}. \tag{1.79}$$

# 1.2 Эквивариантная модель проективной плоскости: солитонный спектр

#### 1.2.1 Описание модели

Дефекты (кинки, квазичастицы, доменные стенки) в сигма-моделях с таргетпространством, заданным проективным пространством  $\mathbb{CP}^{\kappa}$ , в 1+1 и других старших размерностях привлекают внимание многих исследовательских групп [76—81] как упрощенная модель для тестирования идей о поведении инстантонов в теории Янга-Миллса в 3+1 измерении [82]. В этом разделе мы построим спектры доменных стенок БПЗ в двумерной  $\mathcal{N} = (2, 2) \mathbb{CP}^1$ -модели в обоих случаях Хиггсовой и Кулоновой ветвей, а также подтвердим согласие спектров:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{BPS, Higgs}}\left(\mathbb{CP}^{1}\right) \cong \mathscr{H}_{\mathrm{BPS, Coulomb}}\left(\mathbb{CP}^{1}\right).$$
 (1.80)

Пример  $\mathbb{CP}^1$  оказывается одновременно и простым, и все еще достаточно нетривиальным случаем такой сигма-модели, на котором удобно проследить ключевые эффекты. Более того, в дальнейшем мы увидим, что модель  $\mathbb{CP}^1$ является примитивным блоком в построении более сложных моделей.

Модель  $\mathbb{CP}^1$  описывается U(1) калибровочным полем и двумя киральными полями с одинаковым зарядом  $Q_1 = Q_2 = 1$  и, в принципе, различными комплексными массами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Этот состав полей может быть легко закодирован в диаграмме колчана:



Выпишем выражение для эффективного суперпотенциала Ландау-Гинзбурга на Кулоновой ветви следуя идеям раздела 1.1.3:

$$W(\Sigma) = t\Sigma + \frac{1}{2\pi} \sum_{a=1}^{2} (\Sigma - \mu_a) \left( \log \frac{\Sigma - \mu_a}{\Lambda} - 1 \right), \qquad (1.81)$$

и соответствующее выражение для спектральной кривой:

$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) = z, \qquad (1.82)$$

где значение спектрального параметра задается комплексифицированным параметром ФИ, а параметр расслоения – производной суперпотенциала:

$$z = e^{-2\pi t}, \quad \lambda = -2\pi \, z \frac{d}{dz} W. \tag{1.83}$$

Введем относительный параметр комплексной массы:

$$\mu := \mu_1 - \mu_2.$$

У спектральной кривой имеется единственная точка ветвления

$$z_r = -\mu^2/4,$$

а топология спектральных сетей зависит от аргумента  $\mu$ . Топология меняется скачкообразно при значениях аргумента, заданных полуцелыми частями  $\pi$  (см. рис. 1.3).



Рисунок 1.3 — Топологии спектральных сетей <br/>вz-плоскости для эквивариантной модел<br/>и $\mathbb{CP}^1.$ 

#### 1.2.2 Солитонный спектр на Кулоновой ветви

Вакуумы на Кулоновой ветви теории определены решениями следующего вакуумного уравнения:

$$(\Sigma - \mu_1)(\Sigma - \mu_2) = \Lambda^2 e^{-2\pi t}.$$
 (1.84)

Мы решим его в пределе, когда Кулонова и Хиггсова ветви перекрываются:

Re 
$$t \gg 0$$
.

В этом случае вакуумные средние поля Σ задаются малыми отклонениями от одного из значений комплексных масс:

$$\Sigma_{*1,2} = \mu_{1,2} \pm \frac{\Lambda^2}{\mu_1 - \mu_2} e^{-2\pi t} + O\left(e^{-4\pi t}\right).$$
(1.85)

Несмотря на то, что вакуумные значения комплексного скаляра зафиксированы выбором вакуума, функция логарифма от этого поля оказывается, как обычно, многозначной. Та же многозначность проявляется в значении суперпотенциала в соответствующем вакууме. Иными словами, значения суперпотенциала в двух

$$\mathfrak{X}_{C,0} \xrightarrow{-2 \mathfrak{X}_{B,-1} -1 \ 0}_{-1 \ \mathfrak{X}_{A,-1} \ 0} \xrightarrow{(a)}_{\circ} \xrightarrow{(a)}_{\circ} \xrightarrow{(a)}_{\circ} \xrightarrow{(a)}_{\circ} \xrightarrow{(a)}_{\circ} W_{*2,\mathbb{Z}}$$

$$a = i(\mu_1 - \mu_2)$$

$$b = t(\mu_1 - \mu_2)$$

$$b = t(\mu_1 - \mu_2)$$

Рисунок 1.4 – Положения эквивариантных вакуумов в  $\mathbb{CP}^1$  *W*-плоскости.

вакуумах задаются целыми семействами точек на комплексной W-плоскости:

$$W_{*1,k} = t\mu_1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\pi} \left( \log \frac{\mu_1 - \mu_2}{\Lambda} - 1 \right) + i(\mu_1 - \mu_2)k + O\left(e^{-2\pi t}\right), \ k \in \mathbb{Z};$$
$$W_{*2,k} = t\mu_2 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2\pi} \left( \log \frac{\mu_2 - \mu_1}{\Lambda} - 1 \right) + i(\mu_1 - \mu_2)k + O\left(e^{-2\pi t}\right), \ k \in \mathbb{Z}.$$
(1.86)

Для описания солитонного спектра на Кулоновой ветви изобразим эти вакуумы непосредственно на рис. $1.4.^2$ 

Уравнение солитона (1.41) имеет решение, интерполирующее между вакуумами (\**i*) и (\**j*), если и только если значения суперпотенциалов удовлетворяют условию  $W_{*i} - W_{*i} \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Разрешения этих условий могут быть сведены в таблицу<sup>3</sup> 1.1.

Рассмотрим путь  $\wp$ , изображенный на рис. 1.3 (а). Этот путь движется в направлении Re  $t \to +\infty$  в t-плоскости и пересекает спектральную сеть в последовательности точек. Эта последовательность является вкладом либо семейства  $\mathfrak{X}_{C,k}$ , либо семейства  $\mathfrak{X}_{D,k}$  в зависимости от знака  $\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}$ . Так что, когда  $\wp$  пересекает спектральную сеть в точке, следующее выражение приобретает целочисленное значение:

$$\operatorname{Re} t \frac{\mu_{\mathbb{R},1} - \mu_{\mathbb{R},2}}{\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}} - \operatorname{Im} t \,.$$

$$t_{\rm mes} := \frac{W_{*1,0} - W_{*2,0}}{\mu_1 - \mu_2} = t \pm \frac{\mathbf{i}}{2} - \frac{1}{\pi} + O\left((\Lambda/\mu)e^{-2\pi t}\right).$$

<sup>3</sup>Нижним индексом мы обозначаем направление потока солитона.

 $<sup>^{2}</sup>$ Измеряемое значение параметра t оказывается перенормированным. Для простоты в дальнейшем мы пренебрегаем этим сдвигом:

Тип	Условие	Центральный заряд
$\mathfrak{X}_{A,k}$	$\mu_{\mathbb{I},1}=\mu_{\mathbb{I},2}$	$\mathcal{Z}_{\text{Clmb}}^{(1\to1)} = - \mu_{\mathbb{R},1} - \mu_{\mathbb{R},2} k, \ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
$\mathfrak{X}_{B,k}$	$\mu_{\mathbb{I},1}=\mu_{\mathbb{I},2}$	$\mathcal{Z}_{\text{Clmb}}^{(2\to2)} = - \mu_{\mathbb{R},1} - \mu_{\mathbb{R},2} k, \ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$
$\mathfrak{X}_{C,k}$	$\operatorname{Re} t \frac{\mu_{\mathbb{R},1} - \mu_{\mathbb{R},2}}{\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}} - \operatorname{Im} t =: k \in \mathbb{Z}$	$\mathcal{Z}_{\text{Clmb}}^{(1\to2)} = -\frac{\operatorname{Re} t}{\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}}  \mu_1 - \mu_2 ^2$
	$\mu_{\mathbb{I},1} > \mu_{\mathbb{I},2}$	
$\mathfrak{X}_{D,k}$	$\operatorname{Re} t  \frac{\mu_{\mathbb{R},1} - \mu_{\mathbb{R},2}}{\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}} - \operatorname{Im} t =: k \in \mathbb{Z}$	$\mathcal{Z}_{ ext{Clmb}}^{(2 ightarrow 1)} = -rac{\operatorname{Re}t}{\mu_{\mathbb{I},1}-\mu_{\mathbb{I},2}} \mu_1-\mu_2 ^2$
	$\mu_{\mathbb{I},1} < \mu_{\mathbb{I},2}$	

Таблица 1.1 – Солитоны в модели  $\mathbb{CP}^1$ .

Солитоны из семейств  $\mathfrak{X}_{A,k}$  и  $\mathfrak{X}_{B,k}$  имеют фиксированные массы, не зависящие от *t*-параметра, потому им не отвечают никакие точки ветвления в *z*-плоскости, где соответствующие массы могли бы обращаться в ноль. Однако, мы можем заметить их вклад по критическому поведению спектральных сетей при Arg  $\mu = 0$ ,  $\pi$  (см. рис. 1.3 (с)). При данном критическом значении центральные заряды солитонов из всех семейств оказываются сонаправлены в комплексной плоскости, что позволяет всем солитонам смешиваться друг с другом и рассеиваться. Кластерные координаты, задающие статсумму для соответствующего семейства солитонов, испытывают кластерное преобразование, когда статсумма для семейства  $\mathfrak{X}_{C,k}$  или  $\mathfrak{X}_{D,k}$  сопрягается с помощью статсуммы газа солитонов из семейства  $\mathfrak{X}_{A,k}$  или  $\mathfrak{X}_{B,k}$  [43; 83; 84]. Мы рассмотрим детали этого сопряжения, когда будем обсуждать инстантоны в этой модели.

#### 1.2.3 Солитонный спектр на Хиггсовой ветви

На Хиггсовой ветви мы также находим два классических вакуума:

1) 
$$\sigma_{*1} = \mu_1, \quad \vec{\phi}_{*1} = \left(r^{\frac{1}{2}}, 0\right);$$
  
2)  $\sigma_{*2} = \mu_2, \quad \vec{\phi}_{*2} = \left(0, r^{\frac{1}{2}}\right).$ 
(1.87)

Как было показано в разделе 1.1.5 в случа<br/>е $\mu_{\mathbb{I},1}=\mu_{\mathbb{I},2}$ волновые функции

состояний БПЗ для соответствующих вакуумов определяются следующими соотношениями (см. (1.59)):

$$\Psi_{1} \sim \begin{cases} (\phi_{2}/\phi_{1})^{k}|0\rangle, & \mu_{\mathbb{R},1} > \mu_{\mathbb{R},2} \\ (\bar{\phi}_{2}/\bar{\phi}_{1})^{k}\bar{\psi}_{2,1}|0\rangle, & \mu_{\mathbb{R},1} < \mu_{\mathbb{R},2} \end{cases},$$

$$\Psi_{2} \sim \begin{cases} (\phi_{1}/\phi_{2})^{k}|0\rangle, & \mu_{\mathbb{R},1} < \mu_{\mathbb{R},2} \\ (\bar{\phi}_{1}/\bar{\phi}_{2})^{k}\bar{\psi}_{1,1}|0\rangle, & \mu_{\mathbb{R},1} > \mu_{\mathbb{R},2} \end{cases},$$
(1.88)

где  $\phi$  и  $\psi$  – постоянные моды соответствующих полей.

Соответствующие суперзаряды приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\text{Higgs}}^{(1\to1)} &= -|\mu_{\mathbb{R},1} - \mu_{\mathbb{R},2}|k, \ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \mathcal{Z}_{\text{Higgs}}^{(2\to2)} &= -|\mu_{\mathbb{R},1} - \mu_{\mathbb{R},2}|k, \ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \end{aligned}$$
(1.89)

Эти состояния представляют собой солитонные состояния семейств  $\mathfrak{X}_{A,k}$  и  $\mathfrak{X}_{B,k}$  на дуальной Кулоновой ветви.

В случае же  $\mu_{\mathbb{I},1} \neq \mu_{\mathbb{I},2}$  необходимо решить систему уравнений, описывающую критическую полевую конфигурацию:

$$-\partial_1 \sigma_{\mathbb{I}} + \left(\sum_{a=1}^2 |\phi_a|^2 - r\right) = 0,$$
  

$$D_1 \phi_a - (\sigma_{\mathbb{I}} - \mu_{\mathbb{I},a}) \phi_a = 0, \ a = 1, 2.$$
(1.90)

Остальные уравнения в системе (1.31) могут иметь нетривиальное решение только при условии:

$$\sigma_{\mathbb{R}} = \mu_{\mathbb{R},1} = \mu_{\mathbb{R},2}.\tag{1.91}$$

Для удобства произведем замену координат:

$$\sigma_{\mathbb{I}} = \frac{\mu_{\mathbb{I},1} + \mu_{\mathbb{I},2}}{2} + s, \quad \Delta \mu = \frac{\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}}{2}, \quad A_1 = \partial_1 \vartheta,$$
  
$$\phi_1 = e^{-i\theta} r^{\frac{1}{2}} e^{\Phi} \cos \tau, \quad \phi_2 = e^{-i\theta} r^{\frac{1}{2}} e^{\Phi} \sin \tau.$$
 (1.92)

В новых переменных уравнения (1.90) значительно упрощаются:

$$\partial_1 \tau = \Delta \mu \sin 2\tau,$$
  

$$s = \partial_1 \Phi + \Delta \mu \cos 2\tau,$$
  

$$\partial_1 s = r \left( e^{2\Phi} - 1 \right).$$
(1.93)

Первое уравнение в списке (1.93) имеет аналитическое решение:

$$\cos \tau = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{4\Delta\mu(x^1 + c)}}}, \quad \sin \tau = \frac{e^{2\Delta\mu(x^1 + c)}}{\sqrt{1 + e^{4\Delta\mu(x^1 + c)}}}.$$
 (1.94)

Это решение описывает доменную стенку пространственной толщины<sup>4</sup>  $|\Delta \mu|^{-1}$ , расположенную в точке  $x^1 = c$ . Мы назовем это решение *полярным солитоном*, поскольку оно описывает переход из одного полюса сферы  $\mathbb{CP}^1$  в другой. В зависимости от знака  $\Delta \mu$  решение описывает либо поток из вакуума 1 в вакуум 2, либо в обратном направлении:

$$\vec{\phi}_{*1} = \left(r^{\frac{1}{2}}, 0\right) \xrightarrow{\Delta\mu > 0} \vec{\phi}_{*2} = \left(0, r^{\frac{1}{2}}\right) \quad . \tag{1.95}$$

К сожалению, оставшиеся уравнения в системе (1.93) не разрешаются в элементарных функциях, поскольку, например, уравнение для функции  $\Phi$  – уравнение Лиувилля с внешним источником. Вместо этого можно рассмотреть пертурбативное разложение в пределе  $\Delta \mu / \sqrt{r} \ll 1$  и подтвердить, что каждое решение уравнения (1.94) определяет решение для полной системы. Результирующее выражение оказывается довольно объемным и в дальнейшем нам не понадобится, потому здесь мы его не приводим.

Как обычно, низкоэнергетическая динамика этого решения задается поведением нулевых мод – вариациями полей  $\delta\phi_a$ ,  $\delta\sigma_{\mathbb{I}}$ ,  $\delta A_1$  вдоль модулей, к вычислению которых мы и переходим. К обычным уравнениям на нулевые моды мы добавляем дополнительное условие фиксации калибровки, что вариации полей не нарушают закон Гаусса (A.27):

$$\partial_1 \delta A_1 = \mathrm{i} \sum_{a=1}^2 \left( \bar{\phi}_a \delta \phi_a - \phi_a \delta \bar{\phi}_a \right).$$

В-твист (А.31), который мы выбрали, смешивает фермионные и бозонные моды обычным образом:

$$\delta\phi_a = \sqrt{2}\epsilon\,\psi_{1,a}, \quad \delta\sigma_{\mathbb{I}} - \mathrm{i}\delta A_1 = 2\epsilon\,\bar{\lambda}_1, \tag{1.96}$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Решения уравнения Лиувилля добавляют новый параметр экспоненциального подавления решения  $r^{-\frac{1}{2}}$ . Таким образом настоящая ширина доменной стенки задается выражением (1.63).

позволяя реорганизовать линейные уравнения на нулевые моды в уравнение на нулевые моды следующего оператора Дирака:

$$\nabla \begin{pmatrix} \psi_{1,1} \\ \psi_{1,2} \\ \bar{\lambda}_1 \end{pmatrix} = 0, \quad \nabla = \begin{pmatrix} D_1 - (\sigma_{\mathbb{I}} - \mu_{\mathbb{I},1}) & 0 & -\sqrt{2}\phi_1 \\ 0 & D_1 - (\sigma_{\mathbb{I}} - \mu_{\mathbb{I},2}) & -\sqrt{2}\phi_2 \\ -\sqrt{2}\bar{\phi}_1 & -\sqrt{2}\bar{\phi}_2 & \partial_1 \end{pmatrix}.$$
(1.97)

Мы вновь заменяем переменные следующим образом:

$$\psi_{1,a} := \phi_a \alpha_a, \quad \bar{\lambda}_1 := \beta. \tag{1.98}$$

Уравнения в новых переменных приобретают следующий вид (мы опустили индекс 1 для пространственной координаты  $x^1$ ):

$$\partial_x \alpha_1 - \sqrt{2}\beta = 0,$$
  

$$\partial_x \alpha_2 - \sqrt{2}\beta = 0,$$
  

$$\partial_x \beta - \sqrt{2}|\phi_1|^2 \alpha_1 - \sqrt{2}|\phi_2|^2 \alpha_2 = 0.$$
(1.99)

Два первых уравнения в этой системе легко решить:

$$\alpha_1(x) = \alpha_0(x) + c_0, \quad \alpha_2(x) = \alpha_0(x) - c_0, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_x \alpha_0(x).$$
 (1.100)

где  $c_0$  – константа интегрирования. Система уравнений (1.99) сводится к единственному уравнению на  $\alpha_0$ :

$$-\partial_x^2 \alpha_0 + 2(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2)\alpha_0 + 2c_0(|\phi_1|^2 - |\phi_2|^2) = 0.$$
 (1.101)

Решим это уравнение в приближении  $\Delta \mu / \sqrt{r} \ll 1$ :

$$|\phi_1|^2 \approx r (\cos \tau)^2, \quad |\phi_2|^2 \approx r (\sin \tau)^2.$$
 (1.102)

Общее решение имеет следующий вид:5

$$\alpha_0 = c_1 e^{-\sqrt{2r}x} + c_2 e^{\sqrt{2r}x} - \frac{c_0 r}{\sqrt{2r}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, e^{-\sqrt{2r}|x-y|} \frac{1 - e^{2(\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2})y}}{1 + e^{2(\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2})y}}.$$
 (1.103)

$$(-\partial_x^2 + m^2) G_m(x) = \delta(x), \quad G_m(x) = \frac{1}{2m} e^{-m|x|}, \quad m > 0.$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Напомним, что функция Грина для массивного одномерного оператора Лапласа приобретает следующий вид:

Последний член в этом выражении, содержащий интеграл, может быть переписан в терминах гипергеометрических рядов, однако использование приближения  $\Delta \mu / \sqrt{r} \ll 1$  сильно упрощает результирующее выражение, поскольку ядро интегрирования можно приблизить обычной дельта-функцией:

$$e^{-\sqrt{2r}|x|} \to \frac{2}{\sqrt{2r}}\delta(x).$$

В результате получаем следующее выражение:

$$\alpha_0 \approx c_1 e^{-\sqrt{2r}x} + c_2 e^{\sqrt{2r}x} - c_0 \frac{1 - e^{2(\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2})x}}{1 + e^{2(\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2})x}}.$$
(1.104)

Нулевые моды, отвечающие константам интегрирования  $c_1$  и  $c_2$ , сконцентрированы вблизи границ отрезка и изменяют электрический заряд граничных бран (см. (1.62)). Нулевые мода, соответствующая  $c_0$ , связана с положением ядра солитона.

Условие для масс (1.91) на вакуумную полевую конфигурацию должно выполняться в решениях только с точностью до первого порядка поправок по *ħ*. Выделим вклад порядков поправок явным образом:

$$\mu_{\mathbb{R},1} = \hbar \tilde{\mu}_{\mathbb{R},1}, \quad \mu_{\mathbb{R},2} = \hbar \tilde{\mu}_{\mathbb{R},2},$$

где  $\tilde{\mu}_{\mathbb{R},a}$  порядка  $\hbar^0$ . Центральный заряд приобретает постоянную поправку к нулевому равновесному значению из-за нулевой моды ядра солитона – «вакуумный суперзаряд»:

$$\bar{Q}_0 = \int \left(\bar{\lambda}_1 \theta + \sqrt{2}\tilde{\mu}_{\mathbb{R},1}\bar{\phi}_1\psi_{1,1} + \sqrt{2}\tilde{\mu}_{\mathbb{R},2}\bar{\phi}_2\psi_{1,2}\right) dx.$$
(1.105)

Также сдвигается и энергия основного состояния:

$$E_0 \sim |\tilde{\mathcal{Z}}| + |\bar{Q}_0|^2.$$

Чтобы состояние удовлетворяло условию БПЗ, для него должно выполняться и условие  $|Q_0|^2 = 0$ . После преобразований выражения для вакуумного суперзаряда и применения условия  $\beta(x \to \pm \infty) = 0$  мы выводим следующее соотношение:

$$\bar{Q}_{0} = \int \left(\beta\theta - \frac{\tilde{\mu}_{\mathbb{R},1} - \tilde{\mu}_{\mathbb{R},2}}{2} \left(\partial_{x} \frac{|\phi_{1}|^{2} - |\phi_{2}|^{2}}{|\phi_{1}|^{2} + |\phi_{2}|^{2}}\right)\beta + \frac{\tilde{\mu}_{\mathbb{R},1} - \tilde{\mu}_{\mathbb{R},2}}{\sqrt{2}} \frac{4|\phi_{1}|^{2}|\phi_{2}|^{2}}{|\phi_{1}|^{2} + |\phi_{2}|^{2}}c_{0}\right)dx.$$
(1.106)

А для приближенного выражения (1.104) мы получим следующее условие БПЗ:

$$\bar{Q}_0 \approx \frac{2c_0}{\sqrt{2}|\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}|} \left[ \theta(\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}) + r(\tilde{\mu}_{\mathbb{R},1} - \tilde{\mu}_{\mathbb{R},2}) \right] = 0.$$
(1.107)

Нулевая мода поля  $\phi$  добавляет свой собственный вклад  $\phi^k$  к волновой функции (как и в (1.88)). Этот вклад изменяет значение топологического угла  $\theta$  на k, потому условие БПЗ приобретает следующий вид (подобно условиям в таблице 1.1):

$$k = \operatorname{Re} t \, \frac{\mu_{\mathbb{R},1} - \mu_{\mathbb{R},2}}{\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}} - \operatorname{Im} t \in \mathbb{Z}.$$
(1.108)

Решение, удовлетворяющее этому условию, описывает поток, чье направление определяется разностью между массами  $\mu_{\mathbb{I},1}$  и  $\mu_{\mathbb{I},2}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\text{Higgs}}^{(1\to2)} &= -\frac{\text{Re}\,t}{\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}} |\mu_1 - \mu_2|^2, \ \ \mu_{\mathbb{I},1} > \mu_{\mathbb{I},2}; \\ \mathcal{Z}_{\text{Higgs}}^{(2\to1)} &= -\frac{\text{Re}\,t}{\mu_{\mathbb{I},1} - \mu_{\mathbb{I},2}} |\mu_1 - \mu_2|^2, \ \ \mu_{\mathbb{I},1} < \mu_{\mathbb{I},2}. \end{aligned}$$
(1.109)

Сравнивая получившиеся спектры солитонных решений (1.89) и (1.109) на Хиггсовой ветви со спектром на Кулоновой ветви из таблицы (1.1), мы найдем их полное совпадение, что отвечает предсказаниям гомологической зеркальной симметрии.

#### 1.2.4 Инстантоны и граничные операторы

Как мы уже упоминали в разделе 1.1.6, учет инстантонных вкладов становится критически важным при рассмотрении преобразований гомотопии пути интерфейса  $\wp$ . Один тип инстантонов, появляющихся в этой модели – это стандартное инстантонное решение, отвечающее гомотопии путей вблизи точки ветвления [52]. Мы рассмотрим этот вклад позже.

В данный момент сосредоточимся на вкладе иных инстантонных вершин рассеяния, отвечающих гомотопической инвариантности путей, изображенных на рис. 1.1, через соответствующий граничный оператор. Та же инстантонная вершина описывает рекомбинацию солитонов при критическом пресечении стенки маргинальной стабильности между спектрами (a) и (b), изображенными на рис. 1.3. Этот процесс можно описать в терминах кластерных преобразований статистических сумм по солитонным решениям связанных двумерных и четырехмерных систем из-за «ароматических» солитонов  $\mathfrak{X}_{A,k}$  и  $\mathfrak{X}_{B,k}$ , которые в приложении к четырехмерной теории описываются свободными квазичастицами, связываемыми двумерным дефектом [85; 86]. Такие солитоны описывают потоки между одинаковыми классическими вакуумами в модели ЛГ (1.84), но находящимися на различных листах накрытия функцией суперпотенциала W(см. рис. 1.4). Инстантонные вершины описывают следующие реакции квазичастиц:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_{A,-1} + \mathfrak{X}_{C,-1} \longleftrightarrow \mathfrak{X}_{C,0}, \\ &\mathfrak{X}_{B,-1} + \mathfrak{X}_{C,-1} \longleftrightarrow \mathfrak{X}_{C,0}. \end{aligned}$$
(1.110)

Чтобы показать, что такие вершины рассеяния нетривиальны, мы используем методы раздела 1.1.6.

Для большей наглядности мы будем работать в дуальной модели. В первую очередь восстановим вклад оператора беспорядка Y в выражении для суперпотенциала (1.81), а затем проинтегрируем по полю  $\Sigma$ . Получится класс моделей, который можно описать следующим семейством суперпотенциалов:

$$W=\mu Y-R\,e^Y-e^{-Y},\quad R\ll 1\,,$$

где  $\mu$  – некоторая комбинация массового параметра и  $R \sim e^{-2\pi t} \ll 1$ . У этой модели два семейства вакуумов в W-плоскости (см. рис. 1.4):

$$Y_{*1} = \log \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4R}}{2R} + 2\pi i\mathbb{Z}, \quad Y_{*2} = \log \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 4R}}{2R} + 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Процессы распада/рекомбинации происходят, когда центральные заряды солитонов оказываются сонаправлены в комплексной плоскости. Для ароматических солитонов значение  $\Delta W$  чисто мнимое для действительных значений параметра  $\mu$ . Таким образом, стенка маргинальной стабильности, разделяющая области пространства параметров с различными спектрами состояний БПЗ,

расположена на локусе, где величина  $\operatorname{Re}(\Delta W)$  для  $\mathfrak{X}_{C,k}$  меняет знак:

Re 
$$(\Delta W) = \mu \log \frac{\sqrt{\mu^2 + 4R} + \mu}{\sqrt{\mu^2 + 4R} - \mu} - 2\sqrt{\mu^2 + 4R}.$$

Поведение этой функции изображено на графике на рис. 1.5.



Рисунок 1.5 – График функции  $\operatorname{Re}\Delta W(\mu)$ .

Уравнение солитона в этой модели интегрируемо, потому  $\zeta$ -солитоны на рис. 1.4 стабильны, если обратное отображение  $W^{-1}$  на Y-плоскость голоморфно внутри прямоугольника, сгенерированного солитонными путями  $\mathfrak{X}_{C,-1}, \mathfrak{X}_{A,-1},$  $\mathfrak{X}_{B,-1}$ . Можно построить семейство конформных отображений  $W^{-1}$  на Y-плоскость для диска как функцию параметра  $\mu$ . На рис. 1.6 представлено это семейство для численного значения параметра R = 0.01. Как видно из этого рисунка, голоморфный диск схлопывается при приближении к критическому значению:

$$\mu_{\rm crit} = 0.3018\ldots$$



Рисунок 1.6 – Семейство голоморфных дисков в модели  $\mathbb{CP}^1$ .

Таким образом мы приходим к заключению, что существует *нетривиальная* амплитуда рассеяния солитонов для процессов вида (1.110). То же верно и для других процессов:

$$\mathfrak{a} [W_{*1,k_1}, W_{*1,k_2}, W_{*2,k_3} || \operatorname{Re} t | \gg 1] = 1, \quad \forall \ k_1, k_2, k_3;$$
  
$$\mathfrak{a} [W_{*1,k_1}, W_{*2,k_2}, W_{*2,k_3} || \operatorname{Re} t | \gg 1] = 1, \quad \forall \ k_1, k_2, k_3.$$
(1.111)

Также в такой простой модели единственного поля Y могут быть произведены некоторые простые численные оценки, в частности инстантонное уравнение (1.69) может быть решено численно.

Прежде чем описать это решение, проведем некоторые приготовления. Вопервых, приведем следующие обозначения для вакуумов:

$$Y_{\rm I} = Y_{*1}, \quad Y_{\rm II} = Y_{*1} - 2\pi i, \quad Y_{\rm III} = Y_{*2} - 2\pi i, \quad Y_{\rm IV} = Y_{*2} - 4\pi i.$$

Далее выберем фазу  $\zeta = \mathbf{i}$  и координаты *z*-плоскости:

$$z = \alpha \tilde{x}^1 + \beta \tilde{x}^2, \quad \alpha = \frac{\bar{W}_2 - \bar{W}_1}{|W_2 - W_1|}, \ \beta = \frac{\bar{W}_3 - \bar{W}_1}{|W_3 - W_1|}$$

В новых переменных инстантонное уравнение приобретает следующий вид:

$$(\alpha \partial_{\tilde{1}} + \beta \partial_{\tilde{2}})Y = h \,\overline{\partial_Y W},\tag{1.112}$$

где h – общий масштабный фактор для мировой плоскости. Для того, чтобы ускорить сходимость решения к вакуумному, мы выбираем h = 20.0. В выбранных координатах траектории солитонных квазичастиц параллельны осям  $\tilde{x}^1$  и  $\tilde{x}^2$ . Мы изобразим результат численного решения на рис. 1.7(а) в терминах функции плотности:

$$\rho\left(\tilde{x}^{1}, \tilde{x}^{2}\right) := |Y\left(\tilde{x}^{1}, \tilde{x}^{2}\right) - Y_{\mathrm{I}}| \cdot |Y\left(\tilde{x}^{1}, \tilde{x}^{2}\right) - Y_{\mathrm{II}}| \times \times |Y\left(\tilde{x}^{1}, \tilde{x}^{2}\right) - Y_{\mathrm{III}}| \cdot |Y\left(\tilde{x}^{1}, \tilde{x}^{2}\right) - Y_{\mathrm{IV}}| .$$
(1.113)

Когда плотность  $\rho$  обращается в ноль, это означает, что поле Y пребывает в одном из вакуумов теории ЛГ. Численное решение на рис. 1.7 описывает два асимптотических солитонных состояния, рассеивающихся в s-канальном процессе в два новых солитонных состояния. Промежуточное состояние в s-канале

также является солитоном. Потому мы схематически изображаем этот процесс как процесс рассеяния квазичастиц на рис. 1.7 (б). В этом процессе задействованы две вершины рассеяния (1.110).



Рисунок 1.7 – (а) Функция плотности  $\rho(t, s)$  для численного решения процесса рассеяния в модели  $W(Y) = 1.0 \times Y - 0.01 \times e^Y - e^{-Y}$ ; (б) диаграммное изображение процесса рассеяния.

## 1.3 Категорификация аналитического продолжения гипергеометрических рядов

#### 1.3.1 Описание модели

В данном разделе мы опишем переход в разрешении конической сингулярности, и каким образом это позволяет категорифицировать задачу о продолжении гипергеометрического ряда за единичную окружность. Основной физической моделью в данном разделе будет двумерная В-твистованная U(1) ЛКСМ с  $N_f = 4$  киральными мультиплетами. Заряды и массы киральных мультиплетов указаны в таблице ниже, также эту информацию можно записать в виде колчанной диаграммы:

Мы предполагаем, что комплексные массы  $\mu_a$  находятся в общем положении, в частности, мнимая часть разницы любой пары масс не является целым числом. Иначе может оказаться, что некоторые вакуумы в нашей модели вырождены.

В зависимости от знака параметра ФИ г Хиггсова ветвь представляет

собой одно из разрешений конической сингулярности:

$$X_{+} := X_{\text{Higgs}}(r > 0) = \left[ \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}_{(\phi_{3},\phi_{4})} \longrightarrow \mathbb{CP}^{1}_{(\phi_{1}:\phi_{2})} \right];$$
  

$$X_{-} := X_{\text{Higgs}}(r < 0) = \left[ \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}_{(\phi_{1},\phi_{2})} \longrightarrow \mathbb{CP}^{1}_{(\phi_{3}:\phi_{4})} \right].$$
(1.115)

где пары полей  $(\phi_1, \phi_2)$  и  $(\phi_3, \phi_4)$  играют попеременно роли базы и слоя.

Статсумма такой теории на диске для граничных условий, заданных структурным пучком, имеет следующий вид [68]:

$$Z(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} d\sigma \ e^{2\pi t \sigma} \Gamma(\sigma - i\mu_1) \Gamma(\sigma - i\mu_2) \Gamma(-\sigma + i\mu_3) \Gamma(-\sigma + i\mu_4) . \quad (1.116)$$

Этот интеграл может быть вычислен явно с помощью формулы Коши стандартным образом после дополнения контура интегрирования до замкнутого на бесконечности. Способ закрытия контура зависит от знака Re t. Мы не будем рассматривать различные вставки операторов для расслоений на граничной бране. Вместо этого рассмотрим различные контуры интегрирования  $\gamma_a$ ,  $a = 1, \ldots, 4$ , окружающие различные семейства полюсов гамма-функций. Эти четыре выбора контуров соответствуют четырем вакуумам \*a, где соответствующее поле приобретает вакуумное среднее  $|\phi_a| = r^{\frac{1}{2}}$ :

$$\gamma_{1} \underbrace{\overbrace{}}_{\gamma_{2}} \underbrace{\overbrace{}}_{\gamma_{2}} \underbrace{\overbrace{}}_{\mu_{2}} i\mu_{2} \qquad i\mu_{4} \underbrace{\overbrace{}}_{\mu_{4}} \underbrace{\overbrace{}}_{\gamma_{4}} (1.117)$$

Для каждого из базисных циклов интегрирования мы вычисляем соответствующий интеграл как сумму по полюсам. Результат может быть записан в виде

гипергеометрического ряда:

$$Z_{\gamma_{1}} = -2\pi i e^{2\pi i t \mu_{1}} \left[ \Gamma(i\mu_{12})\Gamma(-i\mu_{13})\Gamma(-i\mu_{14}) \right] {}_{2}F_{1} \left[ \begin{array}{c} -i\mu_{13}; -i\mu_{14} \\ 1 - i\mu_{12} \end{array} \right] \left( e^{-2\pi t} \right),$$

$$Z_{\gamma_{2}} = -2\pi i e^{2\pi i t \mu_{2}} \left[ \Gamma(i\mu_{21})\Gamma(-i\mu_{23})\Gamma(-i\mu_{24}) \right] {}_{2}F_{1} \left[ \begin{array}{c} -i\mu_{23}; -i\mu_{24} \\ 1 - i\mu_{21} \end{array} \right] \left( e^{-2\pi t} \right),$$

$$Z_{\gamma_{3}} = 2\pi i e^{2\pi i t \mu_{3}} \left[ \Gamma(i\mu_{43})\Gamma(-i\mu_{13})\Gamma(-i\mu_{23}) \right] {}_{2}F_{1} \left[ \begin{array}{c} -i\mu_{13}; -i\mu_{23} \\ 1 - i\mu_{43} \end{array} \right] \left( e^{2\pi t} \right),$$

$$Z_{\gamma_{4}} = 2\pi i e^{2\pi i t \mu_{4}} \left[ \Gamma(i\mu_{34})\Gamma(-i\mu_{14})\Gamma(-i\mu_{24}) \right] {}_{2}F_{1} \left[ \begin{array}{c} -i\mu_{14}; -i\mu_{24} \\ 1 - i\mu_{34} \end{array} \right] \left( e^{2\pi t} \right),$$

$$(1.118)$$

где  $\mu_{ab} = \mu_a - \mu_b$ . Единичная окружность  $|e^{2\pi t}| = 1$ , соответствующая значению r = 0, делит Риманову комплексную сферу, параметризованную  $e^{2\pi t}$ , на две полусферы. Соответственно, гипергеометрические ряды для  $\gamma_{1,2}$  абсолютно сходятся в полусфере, содержащей точку  $e^{2\pi t} = \infty$ , в то время, как ряды для  $\gamma_{3,4}$  сходятся в другой полусфере, содержащей точку  $e^{2\pi t} = 0$  (см. рис. 1.8).



Рисунок 1.8 – Различные представления пути  $\wp$  на пространстве параметров  $\mathcal{P}$ . Во всех данных представлениях путь пролегает между Хиггсовыми ветвями через узкую область вблизи  $r = 0, |e^{2\pi t}| = 1$ , где необходимо применять описание Кулоновой ветви к ИК поведению системы.

Вычисленные ряды можно аналитически продолжить с одной полусферы на другую, используя тот факт, что гипергеометрическая функция является решением гипергеометрического дифференциального уравнения, а пара решений, таким образом – сечение плоского  $SL(2, \mathbb{C})$ -расслоения. Связность на этом расслоении позволяет параллельно перенести гипергеометрическую функцию через единичную окружность и переразложить в новом базисе сходящихся рядов. Линейное отображение, отвечающее такому переносу, между базисами гипергеометрических рядов в двух полусферах может быть представлено следующим образом:

$$\begin{pmatrix} Z_{\gamma_1} \\ Z_{\gamma_2} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} Z_{\gamma_3} \\ Z_{\gamma_4} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\chi_3}{\chi_1} \cdot \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}} & \frac{\chi_4}{\chi_1} \cdot \frac{\lambda_{24}}{\lambda_{12}} \\ \frac{\chi_3}{\chi_2} \cdot \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{21}} & \frac{\chi_4}{\chi_2} \cdot \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{21}} \end{pmatrix}, \quad (1.119)$$

где

$$\chi_a := e^{\pi \mu_a}, \quad \lambda_{ab} := \frac{\chi_a}{\chi_b} - \frac{\chi_b}{\chi_a}.$$
(1.120)

Матрица А описывает параллельный перенос вдоль пути  $\wp$  на рис. 1.8.

#### 1.3.2 Аналитическое продолжение в терминах группы Гротендика

Статсумма на диске для ЛКСМ представляет собой отображение из категории граничных условий в соответствующую группу Гротендика – векторное пространство в данном случае. Прежде чем обсудить поведение самих категорий бран при параллельном переносе вдоль пути  $\wp$ , рассмотрим сначала поведение соответствующих групп Гротендика. Это позволит нам определиться со спектром солитонных состояний, связанных с дефектом. Для анализа мы применим методы спектральных сетей, которые обсудим в подробностях в дальнейшем в разделе 5.3.1.

Рассмотрим суперпотенциал дуальной теории ЛГ, где явно выделен вклад полей беспорядка  $Y_a$ :

$$W(\Sigma, Y_{a}) = t\Sigma + \frac{1}{2\pi} \sum_{a=1}^{2} \left[ (\Sigma - \mu_{a}) Y_{a} - \Lambda e^{Y_{a}} \right] + \frac{1}{2\pi} \sum_{b=3}^{4} \left[ (\mu_{b} - \Sigma) Y_{b} - \Lambda e^{Y_{b}} \right].$$
(1.121)

Статсумма для дуальной модели ЛГ имеет простой вид:

$$\Xi = \int d\Sigma \prod_{a} dY_{a} e^{W(\Sigma, Y_{a})} \,. \tag{1.122}$$

Мы обозначим статсумму в этом случае как  $\Xi$ , чтобы номинально отличать это выражение для теории ЛГ от соответствующего выражение для теории ЛКСМ, обозначенного Z. Вычислив интеграл сначала по полям  $Y_a$ , мы придем к выражению (1.116). Эквивалентность двух определений статсуммы  $Z = \Xi$ на диске является прямым следствием зеркальной симметрии в этой модели. К сожалению, топология Лефшецевых наперстков в терминах твистованного кирального поля  $\Sigma$  довольно сложна, потому мы будем интегрировать поля в ином порядке. Сначала проинтегрируем поле  $\Sigma$  в выражении (1.121). Поле  $\Sigma$  в суперпотенциале играет роль Лагранжевого множителя и налагает условие:

$$2\pi t + Y_1 + Y_2 - Y_3 - Y_4 = 0. (1.123)$$

Это условие легко разрешить в терминах новых переменных  $y_1, y_2, x$  и w:

$$Y_{1} = y_{2} - \log \left(1 - x^{-1}e^{-2\pi t}\right) - 2\pi t - \log(-x) + w,$$
  

$$Y_{2} = y_{1} - \log(1 - x) + \log(-x),$$
  

$$Y_{3} = y_{1} - \log(1 - x),$$
  

$$Y_{4} = y_{2} - \log \left(1 - x^{-1}e^{-2\pi t}\right).$$
  
(1.124)

Для такой замены переменных дельта-функциональное условие сводится к простому w = 0. Поля  $y_1$  и  $y_2$  можно разделить: соответствующие эффективные теории описывают два свободных киральных поля с массами  $\mu_{32}$  и  $\mu_{41}$ соответственно. В интегральном выражении для статсуммы эти переменные также отделяются, и соответствующий интеграл легко вычислить:

$$\int dy_1 e^{y_1(i\mu_{32}) - \Lambda e^{y_1}} \sim \Gamma(i\mu_{32}), \quad \int dy_2 e^{y_2(i\mu_{41}) - \Lambda e^{y_2}} \sim \Gamma(i\mu_{41}).$$
(1.125)

Таким образом, мы получим результирующее выражение для статсуммы теории ЛГ на диске, зависящую от выбора контура  $\mathcal{L}$ :

$$\Xi_{\mathcal{L}}(t) = e^{2\pi i t \,\mu_4} \,\Gamma(i\mu_{32})\Gamma(i\mu_{41}) \,\int_{\mathcal{L}} \frac{dx}{x} \, x^{i\mu_{42}} (1-x)^{i\mu_{23}} \left(1-x \,e^{2\pi t}\right)^{i\mu_{14}}.$$
 (1.126)

Эта статсумма соответствует (с точностью до общего множителя) статсумме модели ЛГ для поля *x* со следующим суперпотенциалом:

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \left[ \mu_{42} \log x + \mu_{23} \log(1-x) + \mu_{14} \log \left(1 - x e^{2\pi t}\right) \right].$$
(1.127)



Рисунок 1.9 — Спектральные сети для следующего выбора параметров:  $\mu_1 = 1.2 \times e^{0.07\pi i}$ ,  $\mu_2 = 2.2 \times e^{0.07\pi i}$ ,  $\mu_3 = 3.248 \times e^{0.07\pi i}$ ,  $\mu_4 = 2.248 \times e^{0.07\pi i}$ . Спектральная сеть изображена на плоскости  $z = e^{2\pi t}$ , подверженной конформному отображению  $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$  так, что  $0 \mapsto 1$ ,  $\infty \mapsto -1$ .

Геометрию Лефшецевых наперстков легче описывать в данной модели. Лефшецевы наперстки в данном случае – действительные кривые на комплексной *x*-плоскости, сходящиеся по спирали к точкам 0, 1,  $\infty$  и  $e^{2\pi t}$  подобно изображенным на рис. 1.3 наперсткам для модели  $\mathbb{CP}^1$ . Суперпотенциал (1.127) определяет спектральное накрытие пространства параметров:

$$z(z\lambda - \mu_1)(z\lambda - \mu_2) = (z\lambda - \mu_3)(z\lambda - \mu_4),$$
 (1.128)

где мы ввели следующее обозначение:

$$z := e^{2\pi t},$$

а мероморфный дифференциал Зайберга-Виттена задается выражением:

$$\Omega = 2\pi \mathrm{i} \lambda \, dz.$$

Используя этот дифференциал, мы строим спектральную сеть так называемых S-стенок – локусов в пространстве параметров, где центральные заряды солитонов удовлетворяют условию стабильности – на плоскости  $z = e^{2\pi t}$  на рис. 1.9. А на рис. 1.10 изображены спектральные сети на Римановой сфере и схематическое поведение топологии Лефшецевых наперстков в разных фазах. Для определения соответствующих топологий было решено численно уравнение (1.42) для параметров, заданных на рис. 1.9. Заметим, что иной выбор массовых параметров  $\mu_i$  приведет к иной картине фаз Лефшецевых наперстков. Однако все переходы между фазовыми картинками самосогласованны и



Рисунок 1.10 – Кулонова ветвь, параметризованная  $z = e^{2\pi t}$ .

описываются формулами пересечения стенок маргинальной стабильности. Далее мы увидим, что параллельный перенос может быть описан в универсальных терминах и от конкретного выбора фазовой картины не зависит, что отвечает самосогласованному поведению модели при фазовых переходах. В дальнейшем нам понадобятся топологии Лефшецевых наперстков, которые мы обозначили как  $\mathcal{L}_{i=1,2,3,4}$  соответственно.

Сравнивая картины S-стенок на рис. 1.3 и рис. 1.10, легко заметить, что Кулонова ветвь в данном случае склеена из двух Кулоновых ветвей  $\mathbb{CP}^1$ . Линия разделения идет вдоль окружности r = 0. В сингулярных точках 0 и  $\infty$ Кулонова ветвь переходит в Хиггсовы ветви, как и в модели  $\mathbb{CP}^1$ .

S-стенки разделяют Кулонову ветвь на три секции  $\mathbf{P}_{I}$ ,  $\mathbf{P}_{II}$  и  $\mathbf{P}_{III}$  с различными топологиями Лефшецевых наперстков. Соответствующие выражения для статсумм приобретают следующий вид:

$$\begin{split} \Xi_{\mathcal{L}_{1}} &= \frac{\Gamma(\mathrm{i}\mu_{32})\Gamma(1+\mathrm{i}\mu_{23})\Gamma(\mathrm{i}\mu_{41})\Gamma(1+\mathrm{i}\mu_{14})}{\Gamma(2+\mathrm{i}\mu_{14}+\mathrm{i}\mu_{23})} e^{2\pi\mathrm{i}t\,\mu_{3}} \left(1-e^{2\pi t}\right)^{1+\mathrm{i}\mu_{23}+\mathrm{i}\mu_{14}} \times \\ &\times {}_{2}F_{1} \left[ \begin{array}{c} 1+\mathrm{i}\mu_{14}; \ 1+\mathrm{i}\mu_{24} \\ 2+\mathrm{i}\mu_{14}+\mathrm{i}\mu_{23} \end{array} \right] \left(1-e^{2\pi t}\right), \\ \Xi_{\mathcal{L}_{2}} &= \frac{\sinh\pi\mu_{42}\sinh\pi\mu_{21}}{\sinh\pi\mu_{41}} e^{2\pi\mathrm{i}t\,\mu_{2}} \left[\Gamma(\mathrm{i}\mu_{32})\Gamma(\mathrm{i}\mu_{42})\Gamma(\mathrm{i}\mu_{21})\right] \times \\ &\times {}_{2}F_{1} \left[ \begin{array}{c} \mathrm{i}\mu_{42}; \ \mathrm{i}\mu_{32} \\ 1+\mathrm{i}\mu_{12} \end{array} \right] \left(e^{-2\pi t}\right), \\ \Xi_{\mathcal{L}_{3}} &= \frac{\sinh\pi\mu_{42}\sinh\pi\mu_{34}}{\sinh\pi\mu_{32}} e^{2\pi\mathrm{i}t\,\mu_{4}} \left[\Gamma(\mathrm{i}\mu_{41})\Gamma(\mathrm{i}\mu_{42})\Gamma(\mathrm{i}\mu_{34})\right] \times \\ &\times {}_{2}F_{1} \left[ \begin{array}{c} \mathrm{i}\mu_{42}; \ \mathrm{i}\mu_{41} \\ 1+\mathrm{i}\mu_{43} \end{array} \right] \left(e^{2\pi t}\right), \\ \Xi_{\mathcal{L}_{4}} &= e^{\pi(\mu_{32}+\mu_{42})} \Xi_{1} + \Xi_{2} = e^{\pi\mu_{34}} \Xi_{\mathcal{L}_{1}} - \Xi_{\mathcal{L}_{3}}. \end{split}$$

Параллельный перенос производится вдоль пути  $\wp$ , соединяющего Хиггсовы ветви в точках  $z = \infty$  и 0. Этот путь пересекает S-стенки в семействах точек, которые мы делим на три группы (см. рис. 1.10). В группах A и C бесконечно много точек пересечения со спиралями. Эти точки соответствуют башням солитонных состояний, найденных в модели  $\mathbb{CP}^1$  на рис. 1.3(a). А в группе В только две точки пересечения.

Переходы между базисами решений гипергеометрического уравнения  $Z_{\gamma}$ и  $\Xi_{\mathcal{L}}$  заданы матрицами Стокса  $\mathbf{S}_A$ ,  $\mathbf{S}_B$ ,  $\mathbf{S}_C$ , которые описывают суперсимметричные индексы солитонных состояний, отвечающих точке пересечения пути  $\wp$ со спектральной сетью. Переходы между различными базисами решений описываются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} Z_{\gamma_1} \\ Z_{\gamma_2} \end{pmatrix} \xrightarrow{G_I \mathbf{S}_A} \begin{pmatrix} \Xi_{\mathcal{L}_1} \\ \Xi_{\mathcal{L}_2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{S}_{B,1}} \begin{pmatrix} \Xi_{\mathcal{L}_1} \\ \Xi_{\mathcal{L}_4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{S}_{B,2}} \begin{pmatrix} \Xi_{\mathcal{L}_1} \\ \Xi_{\mathcal{L}_3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{S}_C G_{II}} \begin{pmatrix} Z_{\gamma_3} \\ Z_{\gamma_4} \end{pmatrix} , \quad (1.129)$$

таким образом

$$\mathbf{A} = G_I \mathbf{S}_A \mathbf{S}_{B,1} \mathbf{S}_{B,2} \mathbf{S}_C G_{II} \,.$$

Здесь матрицы  $G_I$  и  $G_{II}$  – диагональные матрицы нормировочных коэффициентов:

$$G_I = \operatorname{diag}\left(\begin{array}{c} \frac{\chi_3\chi_4}{\chi_1\chi_2}\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13}}, \quad \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{21}\lambda_{24}}\end{array}\right), \quad G_{II} = \operatorname{diag}\left(\begin{array}{c} \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{14}}, \quad \frac{\lambda_{24}\lambda_{34}}{\lambda_{23}}\end{array}\right);$$

а стоксовы матрицы имеют следующий вид:

$$\mathbf{S}_{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{h_{1}}{\lambda_{12}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{B,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\chi_{1}}{h_{1}\chi_{2}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{B,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\chi_{3}}{\chi_{4}} & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{C} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_{34}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
(1.130)

где параметр  $h_1$  задан вычетом  $\Omega$  в точке  $e^{2\pi t} = 1$ :

$$h_1 := \frac{\chi_1 \chi_2}{\chi_3 \chi_4} = \exp\left(-\frac{1}{2} \oint_1 \Omega^{(1)}\right), \quad \oint_1 \Omega^{(2)} = 0.$$
 (1.131)

Здесь мы предполагаем, что  $\Omega^{(i)}$  – значения дифференциала Зайберга-Виттена на листах накрытия 1 и 2 соответственно. Листы накрытия (1.128) занумерованы так, что интегралы  $\Omega^{(i)}$  описывают асимптотическое поведение первого и второго элементов в столбце (1.129) соответственно. Разрез выбран соединяющим две точки ветвления.

# 1.3.3 Параллельный перенос и инвариантные браны Хербста-Хори-Пейджа

Согласно (1.130) соотношения между базисами решений следующие:

$$\begin{pmatrix} \Xi_{\mathcal{L}_1} \\ \chi_3\chi_4\Xi_{\mathcal{L}_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \chi_3^2 & \chi_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{\gamma_3} \\ \tilde{Z}_{\gamma_4} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Xi_{\mathcal{L}_1} \\ h_1^2\chi_3\chi_4\Xi_{\mathcal{L}_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \chi_1^2 & \chi_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Z}_{\gamma_1} \\ \tilde{Z}_{\gamma_2} \end{pmatrix},$$
(1.132)
где<sup>6</sup>

$$\tilde{Z}_{\gamma_1} = h_1 \frac{\lambda_{13} \lambda_{14}}{\lambda_{32} \lambda_{41}} Z_{\gamma_1}, \quad \tilde{Z}_{\gamma_2} = h_1 \frac{\lambda_{23} \lambda_{24}}{\lambda_{32} \lambda_{41}} Z_{\gamma_2}, \\ \tilde{Z}_{\gamma_3} = \frac{\lambda_{31} \lambda_{32}}{\lambda_{32} \lambda_{41}} Z_{\gamma_3}, \quad \tilde{Z}_{\gamma_4} = \frac{\lambda_{41} \lambda_{42}}{\lambda_{32} \lambda_{41}} Z_{\gamma_4}.$$

$$(1.133)$$

Различные элементы базиса гипергеометрических решений могут быть также получены путем изменения граничных условий, накладываемых браной. На границе диска находится одна брана, к которой можно добавить Вильсоновскую петлю заряда k. Согласно [68] эта процедура добавления сдвигает значение комплексифицированного параметра ФИ:

$$t \longrightarrow t - ik.$$

Проще вычислить последствия такого сдвига в базисе  $Z_{\gamma}$ . Обозначим соответствующий оператор сдвига как  $\mathcal{W}_k$ :

$$\mathcal{W}_k Z_{\gamma_a} = \chi_a^{2k} Z_{\gamma_a}. \tag{1.134}$$

В качестве двух элементов базиса выберем  $\mathcal{W}_0$  и  $\mathcal{W}_1$ , что соответствуют послойному произведению исключительных расслоений  $\mathcal{O}$  и  $\mathcal{O}(1)$  с базой  $\mathbb{CP}^1$  в случае разрешенной конической сингулярности. В зависимости от знака r либо пара  $\phi_{1,2}$ , либо  $\phi_{3,4}$  параметризует базу  $\mathbb{CP}^1$  разрешения  $X_{\pm}$ . Тогда, поскольку  $\phi_{1,2}$  и  $\phi_{3,4}$  имеют электрические заряды по отношению к U(1) противоположные по знаку, Вильсоновская линия на границе соответствует расслоениям с противоположными по знаку классами Черна:

$$\mathcal{Y}_{-}(-k) \xleftarrow{r < 0} \mathcal{W}_k \xrightarrow{r > 0} \mathcal{Y}_{+}(k)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \ e^{\mu \ y - e^y} = \Gamma(\mu)$$

верно только в области Re  $\mu > 0$ . В иных ситуациях контур интегрирования должен быть выбран иначе, чтобы интеграл сходился абсолютно. Подобная свобода присутствует и в определении статсуммы на диске (1.116). Нейтральные мезонные поля (1.59) в задаче могут образовывать конденсаты, что изменяет граничные условия. Вклад таких полей может быть устранен при выборе пучка нулевого сечения в качестве граничных условий, что, в свою очередь, предписывает дополнить теорию граничной теорией одного фермиона. См. также [87, разд. 2.1.1].

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Разница в нормировках функций  $Z_k$  и  $\tilde{Z}_k$  объясняется тем, как были вычислены интегралы для гаммафункций (1.125). На практике эти соотношения зависят от того, как были выбраны контуры интегрирования согласно предписаниям КТП. Например, соотношение

Мы используем это предписание для анализа решений (1.132). Ряды в матрицах (1.132) соответствуют действию операторов  $\mathcal{W}$ , например, лагранжиан  $\mathcal{L}_1$  соответствует простым структурным пучкам на обеих концевых Хиггсовых ветвях, в то время как лагранжиан  $\mathcal{L}_4$  отвечает расслоениям  $\mathcal{Y}_{\pm}(\pm 1)$ , соответственно. Дополнительный множитель  $h_1^2$ , появившийся во втором соотношении в уравнениях (1.132), отвечает эквивариантному морфизму умножения на глобальное сечение  $\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$ . Мы обсудим этот феномен в деталях в разделе 1.3.4.

Двигаясь вдоль пути  $\wp$ , начав с Хиггсовой ветви при r > 0, мы заметим, что пара классов К-теории ( $[\mathcal{Y}_{+}(0)], [\mathcal{Y}_{+}(1)]$ ) превращается в пару лагранжевых бран ( $[\mathcal{L}_{1}], [\mathcal{L}_{4}]$ ) на дуальной Кулоновой ветви вблизи  $r \sim 0$ , а затем снова в пару классов К-теории ( $[\mathcal{Y}_{-}(0)], [\mathcal{Y}_{-}(-1)]$ ) на второй Хиггсовой ветви при r < 0. Это преобразование может быть схематично записано в виде следующей диаграммы:

Браны  $[\mathcal{L}_1]$  и  $[\mathcal{Y}_{\pm}(0)]$  ( $[\mathcal{L}_4]$  и  $[\mathcal{Y}_{\pm}(\pm 1)]$ , соответственно, дуальны друг другу и потому описывают ИК поведение одной и той же физической системы в дуальных терминах, а, значит, на уровне категорий граничных условий это эквивалентные объекты, отображаются друг в друга при преобразовании зеркальной симметрии. Таким образом, естественным будет принять браны  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_4$  за непертурбативные браны, что не меняются при движении вдоль  $\wp$ , меняется лишь их представление в локальном описании ИК эффективной модели.

Результат параллельного переноса бран можно вычислить с помощью построения инвариантных бран и используя правило ограничения градуировки из работы [88]. Назовем эти инвариантные браны бранами Хербста-Хори-Пейджа (ХХП). Легко проверить, что браны ХХП в этом случае совпадают с нашими инвариантными бранами  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_4$ .

#### 1.3.4 Преобразование Фурье-Мукаи

Функтор параллельного переноса (1.135) вдоль пути  $\wp$ , поднятый с уровня К-теории до уровня категорий, задает следующее преобразование бран:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{+}(0) &\xrightarrow{\wp_{+}} \mathcal{L}_{1} \xrightarrow{\wp_{-}} \mathcal{Y}_{-}(0) , \\ \mathcal{Y}_{+}(1) &\xrightarrow{\wp_{+}} \mathcal{L}_{4} \xrightarrow{\wp_{-}} \mathcal{Y}_{-}(-1) \otimes \mathcal{J} , \end{aligned} \tag{1.136}$$

где  $\mathcal{J}$  – идеальный пучок сечений расслоения  $\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}$  на  $X_-$ .

Как было показано в работе [89], это преобразование пучков отвечает преобразованию Фурье-Мукаи со следующим ядром:

$$\mathcal{K} = \mathcal{O}_{\{S_{(+)} = S_{(-)}\}}, \qquad (1.137)$$

где  $S_{(\pm)}$  – матрицы координат в слоях (1.148) на  $X_{\pm}$ , соответственно.

В этом разделе мы предоставим физическое подтверждение этого математического факта, разделенное на три шага:

- 1. Мы покажем, что соотношение (1.132) может быть поднято на уровень категорий без изменений, так что браны  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_4$  действительно инвариантные объекты категории бран.
- 2. Далее мы покажем, что ядро (1.137) преобразования Фуре-Мукаи может быть предсказано из свойств физической модели.
- 3. И, наконец, мы укажем на источник появления твиста пучком  $\mathcal{J}$  в соотношениях (1.136).

### Категорный параллельный перенос

Многообразия  $X_+$  и  $X_-$  изоморфны друг другу, а множества вакуумных уравнений обладают симметрией по отношению к отражению, отображающему r в -r. Благодаря этой симметрии нет необходимости рассматривать параллельный перенос вдоль всего пути  $\wp$ , достаточно лишь половины,  $\wp_+$  либо  $\wp_-$ . Мы выберем  $\wp_-$ . Путь  $\wp_-$  пересекает спектральную сеть (см. рис. 1.10) в одной точке в группе В, и в бесконечном числе точек в группе С. Параллельный перенос базиса Лефшецевых наперстков задается произведением соответствующих матриц Стокса:

$$\mathbf{S}_{B,2}\mathbf{S}_C = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ \frac{\chi_3}{\chi_4} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda_{34}}\\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{34}^{-1}\\ \frac{\chi_3}{\chi_4} & \frac{\chi_4}{\chi_3}\lambda_{34}^{-1} \end{pmatrix}.$$
 (1.138)

Стоксов коэффициент  $\lambda_{34}^{-1}$  в матрице  $\mathbf{S}_C$  соответствует статсумме газа солитонов, отвечающих точкам пересечения пути  $\wp$  со спектральной сетью из группы C, в частности, сам коэффициент является рядом по одно-солитонным вкладам:

$$\lambda_{34}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\chi_3^{-1}\chi_4\right)^{2k+1}$$

Мы построим элементы комплекса МСВ для интерфейса, определенного путем  $\wp_-$ , используя обозначения (1.66). Солитоны, проявляющие себя в этой модели, эквивалентны полярным солитонам в  $\mathbb{CP}^1$ -модели из таблицы (1.1). Мы будем обозначать их тип как  $\mathfrak{X}_{\alpha\beta;k}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – индексы вакуумов на базовом пространстве  $\mathbb{CP}^1$ . Таким образом, квазичастица  $\mathfrak{X}_{\alpha\beta;k}$  отвечает потоку  $\alpha \to \beta$ , а параметр k определен в таблице (1.1). Гомологические градуировки – фермионные числа – различных векторов определены через гомологические степени комплекса (1.141). Также их можно вычислить как индекс Маслова (см. [90, Приложение А]):

$$\mathbf{M}^{*} = \Psi_{L} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{33}^{(0)}[1] & 0 \\ \boldsymbol{\psi}_{43}^{(0)}[\mathfrak{X}_{43;0}] & \boldsymbol{\psi}_{44}^{(-1)}[1] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{33}^{(0)}[1] & \bigoplus_{k \ge 0} \boldsymbol{\psi}_{34}^{(0)}[\mathfrak{X}_{34;k}] \\ 0 & \boldsymbol{\psi}_{44}^{(0)}[1] \end{pmatrix} \cdot \Psi_{R} = \\ = \Psi_{L} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{33}^{(0)}[1] & \bigoplus_{k \ge 0} \boldsymbol{\psi}_{34}^{(0)}[\mathfrak{X}_{34;k}] \\ \boldsymbol{\psi}_{43}^{(0)}[\mathfrak{X}_{43;0}] & \bigoplus_{k \ge 0} \boldsymbol{\psi}_{44}^{(0)}[\mathfrak{X}_{43;0}, \mathfrak{X}_{34;k}] \oplus \boldsymbol{\psi}_{44}^{(-1)}[1] \end{pmatrix} \cdot \Psi_{R} .$$

$$(1.139)$$

Уравнение (1.139) является наивной категорификацией (1.138), поскольку не учтен вклад инстантонов. Произведение матриц на этом языке соответствует сшиванию солитонных диаграмм, представленному в разделе 1.1.6, где первый элемент базиса вакуумов соответствует вакууму, отвечающему циклу  $\mathcal{L}_1$  на Кулоновой ветви, а второй –  $\mathcal{L}_4$ . Пока что мы не задали граничных условий, для обозначения использованы волновые функции  $\Psi_L$  и  $\Psi_R$ .  $\Psi_L$  соответствует выбору граничной браны на левом конце отрезка. В качестве граничной браны можно выбрать и  $\mathcal{L}_1$ , и  $\mathcal{L}_4$ . Решения для  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_4$  асимптотически стремятся к вакуумным решениям \*3 и \*4 соответственно. Представим эти возможные выборы в форме векторов комплексов:

$$\left( \begin{array}{cc} \psi_{33}^{(0)}[\mathcal{L}_1] & 0 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cc} 0 & \psi_{44}^{(0)}[\mathcal{L}_4] \end{array} \right).$$

Выбор граничного условия справа на отрезке, и, соответственно, волновую функцию  $\Psi_R$  мы оставляем свободными.

Перегруппируем элементы получившегося комплекса следующим образом, начав с нижнего правого элемента матрицы (1.139):

$$\bigoplus_{k\geq 0} \boldsymbol{\psi}_{44}^{(0)}[\mathfrak{X}_{43;0},\mathfrak{X}_{34;k}] \oplus \boldsymbol{\psi}_{44}^{(-1)}[1] = \underbrace{\left(\boldsymbol{\psi}_{44}^{(0)}[\mathfrak{X}_{43;0},\mathfrak{X}_{34;0}] \oplus \boldsymbol{\psi}_{44}^{(-1)}[1]\right)}_{\bigoplus_{k\geq 1} \boldsymbol{\psi}_{44}^{(0)}[\mathfrak{X}_{43;0},\mathfrak{X}_{34;k}].$$
(1.140)

Подчеркнутый член в этом выражении является подкомплексом:

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\psi}_{44}^{(-1)}[1] \longrightarrow \boldsymbol{\psi}_{44}^{(0)}[\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{43;0}, \boldsymbol{\mathfrak{X}}_{34;0}] \longrightarrow 0 \quad , \qquad (1.141)$$

который квазиизоморфен нулевому векторному пространству. Мы приходим к этому простому заключению, используя факт, что гомотопическая деформация пути интерфейса через точку ветвления в спектральной сети приводит к появлению семейства квазиизоморфных комплексов МСВ (см. [52]). Инстантонное решение, отвечающее матричному элементу дифференциала **Q** в данном комплексе, описывается простой сетевой диаграммой, изображенной на рис. 1.11(а).

Подобным образом мы исследуем вклад башни солитонов  $\mathfrak{X}_{34;k}$  и заключаем, что он отвечает конденсату (1.62). Сначала заметим, что амплитуды рассеяния солитонов  $\mathfrak{a}_k$  (1.111) описывают «химическое» превращение типа (1.110) между солитонными частицами:

$$\mathfrak{X}_{34;k} \xleftarrow{\mathfrak{a}_k} \mathfrak{X}_{34;0} + \mathfrak{X}_{44;k} \,. \tag{1.142}$$

На уровне комплексов этот процесс рассеяния превращается в следующее соотношение эквивалентности:

$$\boldsymbol{\psi}_{34}^{(0)}[\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{34;k}] \cong \boldsymbol{\psi}_{34}^{(0)}[\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{34;0}] \otimes \mathbb{C} \left(\phi_3 \phi_4^{-1}\right)^k , \qquad (1.143)$$

где оказывается, что солитонная частица  $\mathfrak{X}_{44;k}$  эквивалентна сечению мономиального пучка  $(\phi_3 \phi_4^{-1})^k$  (подобно (1.60)), сконденсированного на границе. Явный пример этой конструкции конденсата представлен в (1.104). Вершина рассеяния  $\mathfrak{a}_k$  и граничная вершина, где солитон  $\mathfrak{X}_{44;k}$  отделяется от границы, отвечают одинаковым граничным условиям для сетевых диаграмм (см. рис. 1.11(б)). Также стоит отметить, что этот процесс включает в себя только переходы в  $\mathbb{CP}^1$ -базе многообразия  $X_-$ , таким образом можно использовать дуальность в спектрах Кулоновой и Хиггсовой ветвей в модели  $\mathbb{CP}^1$ , разобранную в разделе 1.2.



Рисунок 1.11 – Сетевые диаграммы

Если в качестве граничного условия выбрать  $\mathcal{L}_1$ , конечный комплекс MCB гомотопно эквивалентен следующему:

$$\left(\boldsymbol{\psi}_{33}^{(0)}\left[\mathcal{L}_{1}\right]\otimes\Psi_{R}\right)\oplus\left(\boldsymbol{\psi}_{34}^{(0)}\left[\mathcal{L}_{1};\mathfrak{X}_{34;0}\right]\otimes\bigoplus_{k\geq0}\mathbb{C}\left(\phi_{3}\phi_{4}^{-1}\right)^{k}\otimes\Psi_{R}\right)=$$

$$=:\Psi_{L}[\mathcal{Y}(0)]\otimes\Psi_{R}.$$
(1.144)

Этот комплекс эквивалентен выбору пучка  $\mathcal{Y}(0)$  в качестве граничной браны в ЛКСМ, следовательно мы обозначаем соответствующую волновую функцию, как  $\Psi_L[\mathcal{Y}(0)]$ .

Похожим образом выбор  $\mathcal{L}_4$  в качестве граничных условий соответствует

 $\mathbf{M}^*$ :

$$\left(\boldsymbol{\psi}_{43}^{(0)}\left[\mathcal{L}_{4};\mathfrak{X}_{43;0}\right]\otimes\Psi_{R}\right)\oplus$$
$$\oplus\left(\boldsymbol{\psi}_{44}^{(0)}\left[\mathcal{L}_{4};\mathfrak{X}_{43;0};\mathfrak{X}_{34;0}\right]\otimes\bigoplus_{k\geq1}\mathbb{C}\left(\phi_{3}\phi_{4}^{-1}\right)^{k}\right)\otimes\Psi_{R}=\qquad(1.145)$$
$$=:\Psi_{L}[\mathcal{Y}(-1)\otimes\mathcal{J}]\otimes\Psi_{R}.$$

Из-за сдвига в электрическом заряде k это граничное условие соответствует пучку  $\mathcal{Y}(-1)$ . Пучок  $\mathcal{Y}(-1)$  уже появлялся при декатегорифицированном рассмотрении бран ХХП, однако теперь мы его модифицируем с помощью пучка  $\mathcal{J}$ , имеющего тривиальный гомотопический класс. Появление пучка идеалов  $\mathcal{J}$ можно детектировать, заметив, что для каждого кирального поля  $\phi_i$  заряд сохраняется в ходе солитонного рассеяния по отдельности, а появления в результате пучка  $\mathcal{Y}(-1)$  не достаточно, чтобы эти заряды сохранить. Мы вернемся к детальному описанию этого феномена чуть позже.

Подобным образом можно проанализировать и  $\wp_+$ .

Рассуждая таким образом мы приходим к выражению (1.136) для функтора параллельного переноса. Теория на концах отрезка [0, *L*] находится в Хиггсовой фазе, потому граничные условия представлены производной категорией когерентных пучков, а сам параллельный перенос – функтор:

$$\beta_{\wp}: D^{(b)}\operatorname{Coh}(X_{+}) \longrightarrow D^{(b)}\operatorname{Coh}(X_{-}).$$
 (1.146)

Согласно теореме Орлова [91; 92] этот функтор может быть представлен преобразованием Фурье-Мукаи (ФМ) с некоторым ядром *K*:

$$\beta_{\wp} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathcal{K}}.\tag{1.147}$$

К счастью для нас, пучки  $\mathcal{Y}(k)$  и  $\mathcal{J}$  являются эквивариантными, а, следовательно, действие функтора параллельного переноса на них не изменится, даже если эквивариантное действие будет снято, например, устремлением параметров эквивариантного весового тора к нулю (см. определение эквивариантной производной категории в работе [93]). Таким образом, можно явно показать, что для ядра (1.137) преобразование ФМ на бранах  $\mathcal{Y}(0)$  и  $\mathcal{Y}(1)$  совпадает с действием функтора параллельного переноса (1.136) [94].

## Ядро Фурье-Мукаи

Далее мы предложим способ предсказать форму ядра ФМ (1.137) без проведения вычислений методами алгебраической геометрии.

Рассмотрим теорию вблизи левой границы интервала в постоянном вакууме \*1 или \*2, когда поле  $\phi_1$ , либо поле  $\phi_2$ , соответственно, приобретает вакуумное среднее. Согласно вычислению, проделанному в разделе 1.1.5, ИК описание теории будет содержать электрически нейтральные скалярные мезоны (1.60). Киральные поля могут быть скомбинированы в мезонные операторы различными способами, однако голоморфных комбинаций всего четыре, мы организуем эти комбинации в матрицу:

$$S = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2 \phi_4 & -\phi_1 \phi_4 \\ -\phi_2 \phi_3 & \phi_1 \phi_3 \end{pmatrix}.$$
 (1.148)

Эффективная теория для браны справа с двумя другими выборами вакуумов – \*3 и \*4 – будет иметь в своем составе те же голоморфные нейтральные мезонные поля. Согласно разделу 1.1.5, локализованное положение мезонных степеней свободы зависит от их эффективных масс:

$$\mu_{\text{eff}}(M_{ij}) = \begin{pmatrix} \mu_4 - \mu_2 & \mu_4 - \mu_1 \\ \mu_3 - \mu_2 & \mu_3 - \mu_1 \end{pmatrix}.$$
 (1.149)

Вклад в волновую функцию, отвечающий сконденсированному мезонному полю, задается общего вида голоморфной или анти-голоморфной функцией мезонного поля, что отвечает структурному пучку аффинной плоскости, параметризованной значением этого поля. Конденсат поля нейтральных мезонов **m** соответствует кольцу голоморфных волновых функций основных уровней Ландау  $\mathbb{C}[\mathbf{m}]$  и отвечает конденсатному многообразию, как точки в спектре кольца с топологией Зариски:

# Spec $\mathbb{C}[\mathfrak{m}]$ .

В нашем случае вся матрица мезонов S конденсируется целиком и параметризует слой многообразия  $X_{\pm}$ . Мы будем различать значения поля S на двух

концах интервала [0, L] с помощью индексов:

$$S_{(\pm)} \subset X_{\pm}.$$

 $M_{ij}$  локализуется вблизи левой или правой браны в зависимости от знака величины Im  $\mu(M_{ij})$ . В случае Im  $\mu(M_{ij}) = 0$  мезон  $M_{ij}$  не локализован и может быть представлен постоянной нулевой модой для всего интерфейса. Эти наблюдения указывают на то, что даже, если бы мы различали подмногообразия  $S_{(+)}$ и  $S_{(-)}$  для левой и правой бран, волновые функции состояний БПЗ зависят от общих мезонных степеней свободы  $M_{ij}(x^1)$ , таким образом:<sup>7</sup>

$$S_{(+)} = M_{ij}(0) = M_{ij}(L) = S_{(-)}$$

Иначе можно наложить это условие, включив в выражение для волновой функции БПЗ состояния δ-функцию:

$$\Psi_L(S_{(+)}) \otimes \Psi_{\text{bulk}} \otimes \Psi_R(S_{(+)}) \cdot \delta\left(\{S_{(+)} = S_{(-)}\} \subset X_+ \times X_-\right).$$
(1.150)

Геометрическое значение  $\delta$ -функции заключается в том, что носителем ядра  $\mathcal{K}$ является соответствующий локус. А мы произвели проверку, что  $\mathcal{K}$  – структурный пучок на этом локусе (1.137).

## Пучок идеалов ${\cal J}$

Заметим сначала, что выделенный вклад  $h_1^2$  в выражении (1.132) соответствует морфизму, отвечающему умножению пучка на глобальное сечение:

$$\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \otimes \dots \qquad (1.151)$$

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\mathrm{bdry}} = \chi_L \left( \phi(0) - z_L \right) + \chi_R \left( \phi(L) - z_R \right).$$

Эффективный суперзаряд для постоянной моды  $\phi_0 := \phi(0) = \phi(L)$  приобретает следующий вид:

$$\bar{\mathcal{Q}} \sim \bar{\psi}_1 \partial_{\bar{\phi}_0} + (\chi_L + \chi_R) \left( \phi_0 - \frac{z_L + z_R}{2} \right) - \frac{\chi_L - \chi_R}{2} (z_L - z_R).$$

В результате лапласиан ограничен снизу значением  $\{\bar{Q}, Q\} \geq \frac{1}{2} |z_L - z_R|^2$ , а, значит, в спектре отсутствуют состояния БПЗ, если  $z_L \neq z_R$ .

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Это условие легко перевести на язык пучков и граничных условий. Допустим, в качестве левого и правого граничных значений мы выберем пучки-небоскребы, локализованные в точках  $z_L$  и  $z_R$  соответственно. В этом случае вклад в граничный суперзаряд имеет следующий вид (см. (А.44)):

Переход от вакуума \*1 в вакуум \*3 может происходить по двум каналам: через  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_4$  соответственно:

$$*1 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} *3, \quad *1 \xrightarrow{\mathcal{L}_4} *3.$$

В терминах обходов (\*1  $\xrightarrow{\mathcal{L}_1}$  \*3) соответствует подъему пути  $\wp$  на лист 1 (см. рис. 1.10) спектрального накрытия (1.128). Тем временем второй канал (\*1  $\xrightarrow{\mathcal{L}_4}$  \*3) проходит вдоль подъема пути  $\wp$  на лист 1 до первой точки пересечения в группе В, далее происходит обход вдоль спектральной сети на лист 2, а затем другой обход во второй точке пересечения из группы В назад на лист 1. Относительные гомологические классы этих путей изображены как  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  на листе 1 на рис. 1.9. Соответствующий сдвиг градуировки определяется солитонным центральным зарядом, он может быть вычислен как гомономия вокруг сингулярной точки  $e^{2\pi t} = 1$ :

$$\int_{\Gamma_1} \Omega^{(1)} - \int_{\Gamma_2} \Omega^{(1)} = \oint_{e^{2\pi t} = 1} \Omega^{(1)} = -\log h_1^2.$$
(1.152)

Множитель  $h_1^2$  отвечает эквивариантной степени монома  $\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4$ . Появление этого монома в морфизме (1.151) легко объяснить в дуальной картине. Голономия вокруг точки  $e^{2\pi t} = 1$  может быть представлена как гистерезисный сдвиг полей беспорядка (1.124):

$$\frac{\Delta^{(1)}}{2\pi i} Y_1 = \frac{\Delta^{(1)}}{2\pi i} Y_2 = \frac{\Delta^{(1)}}{2\pi i} Y_3 = \frac{\Delta^{(1)}}{2\pi i} Y_4 = -1, 
\frac{\Delta^{(2)}}{2\pi i} Y_1 = \frac{\Delta^{(2)}}{2\pi i} Y_2 = \frac{\Delta^{(2)}}{2\pi i} Y_3 = \frac{\Delta^{(2)}}{2\pi i} Y_4 = 0,$$
(1.153)

где верхний индекс в обозначении  $\Delta^{(i)}$  соответствует вакуумному листу, вдоль которого производится параллельный перенос. Сдвиги мнимых частей полей  $Y_a$  на величины кратные  $2\pi$  соответствуют электрическим зарядам полей  $\phi_a$ , оседающих в конденсат:

$$\frac{\Delta}{2\pi i} Y_a = 1 \xleftarrow{\text{дуальность}} \phi_a \otimes \quad . \tag{1.154}$$

Таким образом, для (1.153) мы приходим к морфизму (1.151).

Для перевода вышеописанных процедур на язык пучков, нам необходимо рассмотреть, как меняется сечение пучка при переносе вдоль пути  $\wp$ . Для добавления твиста расслоением  $\mathcal{Y}(1)$  в выражении (1.123) рассмотрим общий сдвиг +1 полей  $Y_a$ , что соответствует в обоих вакуумах следующим мономам:

$$\phi_{1}(\phi_{1}\phi_{3})^{k_{1}}(\phi_{1}\phi_{4})^{k_{2}}(\phi_{2}/\phi_{1})^{k_{3}}, \ k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; 
\phi_{2}(\phi_{2}\phi_{3})^{k_{1}'}(\phi_{2}\phi_{4})^{k_{2}'}(\phi_{1}/\phi_{2})^{k_{3}'}, \ k_{1,2,3}' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$
(1.155)

Если эти мономы перенесены вдоль канала, соответствующего инвариантной бране  $\mathcal{L}_4$ , они оба умножатся на глобальное сечение (1.151), что не меняет класс мономов (1.155), поскольку это лишь умножение на структурный пучок – единичный элемент группы Пикара. Для преобразования этих сечений в сечения пучков в вакуумах \*3 и \*4, необходимо изменить заряженные множители следующим образом:

$$\phi_1 = (\phi_1 \phi_{3,4}) \cdot \phi_{3,4}^{-1}, \quad \phi_2 = (\phi_2 \phi_{3,4}) \cdot \phi_{3,4}^{-1}. \tag{1.156}$$

Мономы  $\phi_{3,4}^{-1}$  в вакуумах \*3 и \*4 соответствуют сечениям расслоения  $\mathcal{Y}(-1)$ , в то время как мономы  $\phi_{1,2}\phi_{3,4}$  – нейтральные мезоны  $M_{ij}$ . Эти поля нейтральных мезонов являются координатами на слое расслоения  $\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}$ , соответственно, они являются и сечениями пучка идеалов  $\mathcal{J}$  нулевых сечений  $\mathcal{O}(-1)^{\oplus 2}$ . Таким образом, мы заключаем, что  $\mathcal{L}_4$  преобразуется в пучок  $\mathcal{Y}_{-}(-1) \otimes \mathcal{J}$  при r < 0.

## 2 D-браны на торических многообразиях Калаби-Яу

## 2.1 Торические многообразия Калаби-Яу, колчаны и кристаллы

Стандартный способ физически исследовать геометрию трехмерного многообразия Калаби-Яу – поместить на него систему бран D6-D4-D2-D0, обертывающую само многообразие Калаби-Яу и голоморфные циклы внутри. В классической работе [95] М.Даглас и Г.Мур показали, что эффективная динамика таких систем D-бран описывается колчанными калибровочными теориями. Подробности этого соответствия для торических трехмерных многообразий Калаби-Яу в необходимом нам формализме можно найти в работах [38; 96; 97]. Здесь мы лишь повторим основные положения.

Колчанная диаграмма (ориентированный граф)  $\mathcal{Q}$  состоит из набора вершин  $\mathcal{Q}_0$  и набора стрелок  $\mathcal{Q}_1$ , соединяющих вершины. Стрелкам колчана сопоставляются отображения, которые мы будем обозначать переменными  $a \in \mathcal{Q}_1$ ; когда нам понадобится указать ее головную  $w \in \mathcal{Q}_0$  и хвостовую  $v \in \mathcal{Q}_0$  вершины, мы будем обозначать такую стрелку как  $a: v \to w$ . Алгебра путей  $\mathbb{C}\mathcal{Q}$ сгенерирована над полем  $\mathbb{C}$  и состоит из ориентированных путей, составленных из стрелок внутри колчана, с умножением, определяемым естественным сшиванием путей. Кроме того, задается колчанный суперпотенциал W – голоморфное отображение  $\mathcal{Q}_1$  в подпространство  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}\mathcal{Q}$ , образованное замкнутыми контурами по модулю циклических перестановок стрелок в цикле.

Для торического трехмерного многообразия Калаби-Яу существует процедура получения пары (Q, W). Эта процедура определяет периодический колчан  $\hat{Q}$ , нарисованный на торе, где исходная диаграмма колчана Q совпадает с  $\hat{Q}$ , рассматриваемой как абстрактный граф. А суперпотенциал W строится по

$$W \cong \sum_{\mathcal{F} \in \left(\text{грани } \hat{\mathcal{Q}}\right)} (\pm 1) \operatorname{Tr} \prod_{a \in \partial \mathcal{F}} a , \qquad (2.1)$$

где знак перед произведением определяется ориентацией границы  $\partial \mathcal{F}$  выбранной грани  $\mathcal{F}$ , а произведение представляет собой циклически упорядоченное произведение стрелок в  $\partial \mathcal{F}$ .

Рассмотрим двусторонний идеал  $\mathcal{I}_W$  в  $\mathbb{C}\mathcal{Q}$ , порожденный всеми производными  $\partial_a W$  для всех  $a \in \mathcal{Q}_1$ . Кольцо Якоби определяется следующим образом:

$$\mathcal{J}(\mathcal{Q}, W) \cong \mathbb{C}\mathcal{Q}/\mathcal{I}_W . \tag{2.2}$$

Для торических трехмерных многообразий Калаби-Яу  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, W)$  существует визуализация соответствующего колчана в виде кристаллической решетки [38; 96; 97]. Рассмотрим подъем  $\mathfrak{Q}$  диаграммы на торе  $\hat{\mathcal{Q}}$  до плоскости  $\mathbb{R}^2$ , универсально покрывающей тор.  $\mathfrak{Q}$  образует периодическую кристаллическую решетку, вложенную в  $\mathbb{R}^2$ . Мы рассмотрим одну D6-брану, обертывающую трехмерное многообразие Калаби-Яу и определяющую так называемое обрамление колчана. Это выделяет конкретный узел в колчане, который мы будем называть *обрамленным*. Отображение из обрамляющего в обрамленный узел добавляет новый элемент  $\iota$  к  $\mathbb{C}\mathcal{Q}$ . Нарушим трансляционную симметрию двумерного кристалла  $\mathfrak{Q}$ , выбрав положение корневого атома в любом узле, поднятом из обрамленного узла. Рассмотрим мономы  $m \in \mathcal{J}(\mathcal{Q}, W) \cdot \iota$ . Каждый такой моном определяет путь в алгебре путей колчана, начинающийся в обрамленном узле. Мы поднимаем этот путь до пути  $\wp_m$  в  $\mathfrak{Q}$ , начиная с корневого атома. Конечная точка этого пути — позиция атома  $\vec{r}$  в  $\mathfrak{Q}$ . Рассмотрим один кратчайший путь  $\wp_{m,0}$ , соединяющий корневой атом и атом в точке  $\vec{r}$ . Разница

$$\wp_m - \wp_{m,0}$$

содержит *n* замкнутых контуров в  $\mathfrak{Q}$  по модулю идеала  $\mathcal{I}_W$ . Моному *m* сопоставляется атом в трехмерной кристаллической решетке с координатами (см. рис. 2.1):

$$m \rightsquigarrow (\vec{r}, n)$$
,



Рисунок 2.1 – Трехмерный кристалл и его двумерная проекция

где целое число *n* задает координату в третьем направлении, т.е. «глубину» по отношению к поверхности кристалла.

Рассматривая все возможные пути, начинающиеся в обрамленном узле, мы получим базовый кристалл  $\Lambda_0$ , растущий из корневого атома.

Кристаллические диаграммы допускают дополнительный параметр *цвета*. Мы отождествляем набор цветов с набором вершин колчана  $\mathcal{V}$ . Мы будем обозначать цвет *u* некоторого атома  $\Box$  как  $\underline{u}$ . Для атома  $\Box$ , отождествленного с мономом

$$(a_n: v_{n-1} \to u) \cdot (a_n: v_{n-2} \to v_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (a_1: v_0 \to v_1) \cdot \iota$$

мы определяем его цвет конечной точкой  $u \in \mathcal{Q}_0$ 

#### 2.1.1 Колчанная квантовая механика и БПЗ состояния

Мы рассмотрим эффективную теорию, возникающую в системе D-бран, скомпактифицированных на трехмерное многообразие Калаби-Яу, с точки зрения мирового объема D-бран. Эффективная теория поля представляет собой колчанную суперсимметричную квантовую механику (СКМ) с четырьмя суперзарядами (см. Приложение A.4 и [98]).

В принципе, система СКМ хорошо определена для любой пары  $(\mathcal{Q}, W)$ . Чтобы определить ее полностью, нужна дополнительная информация, которую мы называем данными колчана.

D-браны обертывают голоморфные циклы и, следовательно, могут рассматриваться как D0-браны дробного заряда. Заряды этих D0-бран ассоциированы с вершинами колчана  $\mathcal{Q}_0$ . Определяя свойства нашей системы, мы выбираем неотрицательные целые числа  $n_v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , задающие заряды D0-бран для каждой вершины  $v \in \mathcal{Q}_0$ . Мы собираем эти числа в вектор измерений колчана  $\gamma$ :

$$\gamma = \{n_v\}_{v \in \mathcal{V}}$$

Узлу колчана  $v \in Q_0$  ставится в соответствие векторный мультиплет калибровочной группы  $U(n_v)$ , а стрелке  $a: v \to w \in Q_1$  – киральный мультиплет, заряженный бифундаментально в  $U(n_v) \times \overline{U(n_w)}$ . В общем случае обрамление соответствует набору узлов обрамления  $\mathcal{F}$  и стрелок, соединяющих обрамляющие и обычные узлы. Калибровочные группы в обрамляющих узлах «заморожены» и соответствуют ароматическим симметриям в теории. Соответствующие калибровочные поля в векторных мультиплетах, связанных с обрамляющими узлами, принимают постоянные вакуумные средние, равные ароматическим массам, а все другие поля суперпартнеров приобретают нулевые значения. Таким образом, мы рассматриваем квантовую теорию поля со следующей калибровочной и ароматической группами:

$$\mathcal{G} = \prod_{v \in \mathcal{V}} U(n_v)$$
 и  $\mathcal{G}_F = \prod_{f \in \mathcal{F}} U(n_f)$ .

Каждому фактору калибровочной группы  $U(n_v)$  сопоставляется член Файе-Иллиополуса (ФИ), определяемый параметром стабильности:

$$r_v = 2|Z_0|^{-1} \operatorname{Im}(\bar{Z}_0 Z_v)$$
,

где  $Z_v$  — центральные заряды D0-браны, а  $Z_0$  — центральный заряд всей конфигурации D-браны.

Таким образом, мы имеем следующий набор операторов, действующих на Гильбертово пространство калибровочной суперсимметричной квантовой меха-

ники: гамильтониан H, калибровочные преобразования  $\hat{G}$  и 4 суперзаряда  $Q_{\alpha}$ ,  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \, \alpha, \dot{\alpha} = 1, 2.$ 

Состояния БПЗ определяются как физические калибровочно инвариантные основные состояния. Используя соотношения супералгебры (А.55), можно заметить, что волновые функции состояний БПЗ зануляются всеми суперзарядами и генератором калибровочного преобразования:

$$Q_{\alpha}|\text{BPS}\rangle = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}|\text{BPS}\rangle = \hat{G}|\text{BPS}\rangle = 0$$
. (2.3)

Мы постараемся описать гильбертово пространство БПЗ в геометрических терминах так, как оно представлено в математической литературе, см., например, [35]. Таргет-пространство СКМ, которое мы обозначаем  $\mathcal{M}_{SQM}$ , параметризовано скалярными полями СКМ. Сюда входят присоединенные скаляры  $X_v^{1,2,3}$ , связанные с векторными мультиплетами, и бифундаментальные скаляры  $q_{(a: v \to w)}$ , связанные с киральными мультиплетами:

$$\mathcal{M}_{\text{SQM}}: \begin{array}{c} X_v^3 \in \mathfrak{u}(n_v), \ \Phi_v \in \mathfrak{gl}(n_v, \mathbb{C}) \ , \quad v \in \mathcal{Q}_0 \ , \\ q_{(a:\ v \to w)} \in \text{Hom}(\mathbb{C}^{n_v}, \mathbb{C}^{n_w}) \ , \quad a \in \mathcal{Q}_1 \ , \end{array}$$
(2.4)

где мы вводим новую комплексную комбинацию  $\Phi_v \cong X_v^1 + \mathrm{i} X_v^2$ .

Суперзаряд имеет вид дифференциала на таргет-пространстве:

$$\bar{Q}_{\dot{1}} = e^{-\mathfrak{H}} \left( d_{X^3} + \bar{\partial}_{\Phi,q} + \iota_V + dW \wedge \right) e^{\mathfrak{H}} , \qquad (2.5)$$

где мы определили функцию высоты:

$$\mathfrak{H} \cong \sum_{v \in \mathcal{Q}_0} \operatorname{Tr} X_v^3 \left( \frac{1}{2} \left[ \Phi_v, \bar{\Phi}_v \right] - \mu_{\mathbb{R}, v} \right) , \qquad (2.6)$$

векторное поле:

$$V \cong \sum_{(a: v \to w) \in \mathcal{Q}_1} \left( \Phi_w q_a - q_a \Phi_v \right) \frac{\partial}{\partial q_a} , \qquad (2.7)$$

и отображение моментов, определяющее условия стабильности:

$$\mu_{\mathbb{R},v} \cong r_v \, \mathbb{1}_{n_v \times n_v} - \sum_{x \in \mathcal{Q}_0} \sum_{(a:v \to x) \in \mathcal{Q}_1} q_a q_a^{\dagger} + \sum_{y \in \mathcal{Q}_0} \sum_{(b:y \to v) \in \mathcal{Q}_1} q_b^{\dagger} q_b \,. \tag{2.8}$$

Используя стандартные рассуждения [62], мы можем отождествить Гильбертово пространство БПЗ с  $\hat{G}$ -эквивариантными когомологиями одного из четырех суперзарядов, который мы принимаем за  $\bar{Q}_1$ :

$$\mathcal{H}_{\rm BPS} \cong H^*_{\hat{G}}(\bar{Q}_1) \ . \tag{2.9}$$

При такой геометрической идентификации когомологическая степень отождествляется с фермионным числом физического состояния.

Тонкость в идентификации (2.9) заключается в том, что таргет-пространство в SQM, вообще говоря, сингулярно. Чтобы регуляризовать его частично, мы вводим Ω-фон [99], и рассматриваем когомологии (2.9) после Ω-деформации.

Для описания  $\Omega$ -деформации, введем дополнительный калибровочный мультиплет  $U(1)_{F,a}$  для каждой стрелки  $a: v \to w$ , так что бифундаментальное киральное поле, помеченное стрелкой  $a: v \to w$ , имеет заряд -1 относительно этой симметрии  $U(1)_{F,a}$ . Затем мы «замораживаем» эти дополнительные степени свободы, устанавливая среднее значение для комплексного сопряженного скаляра  $\Phi_a$  в векторном мультиплете  $U(1)_{F,a}: \langle \Phi_a \rangle = \epsilon_a$ . В результате обнаруживается, что эта процедура приводит к изменению действия векторного поля (2.7):

$$V(q_a) = \sum_{(a: v \to w) \in \mathcal{A}} \left( \Phi_w q_a - q_a \Phi_v - \epsilon_a q_a \right) \frac{\partial}{\partial q_a} \,. \tag{2.10}$$

Кроме того, требование нильпотентности суперзаряда приводит к условию, что суперпотенциал инвариантен относительно эквивариантного торического действия:

$$\bar{Q}_{\dot{1}}^2 = -4\sum_{a\in\mathcal{A}}\epsilon_a \operatorname{Tr}\left(q_a\frac{\partial}{\partial q_a}\right)W = 0.$$
(2.11)

Поскольку суперпотенциал W представляет собой сумму мономов (2.1), уравнение (2.11) означает, что заряды ароматической симметрии  $\epsilon_a$  согласованы с суперпотенциалом. В случае колчана, отвечающего торическому трехмерному многообразию Калаби-Яу, распределение этих зарядов удовлетворяет так называемому «условию цикла» [38], т.е. сумма всех зарядов вдоль границы любой грани периодического колчана равна нулю. Это присвоение заряда параметризуется  $|Q_0| + 1$  параметрами [38, раздел 4.1]. Мы можем использовать калибровочные степени свободы, чтобы сместить распределение зарядов, и это приводит к переопределению зарядов, как обсуждалось в [38, раздел 4.3.2]. Мы можем исправить эту неопределенность, например, наложив «условие вершин», которое уменьшает количество параметров до двух  $\epsilon_{1,2}$  – это ничто иное, как две мезонные ароматические симметрии СКМ, которые в сочетании с R-симметрией (имеется в виду R-симметрия родительской четырехмерной теории  $\mathcal{N} = 1$ ) соответствуют трем изометриям трехмерного торического многообразия Калаби-Яу. Двумерная проекция кристалла параметризуется именно  $\epsilon_{1,2}$ .

#### 2.1.2 Локализация на Хиггсову ветвь и кристаллизация

В данном контексте мы рассмотрим локализацию на Хиггсову ветвь. Другими словами, мы предполагаем, что  $r_v$ -параметры велики, а киральные поля приобретают вакуумные средние – выберем следующие порядки величин рассматриваемых параметров:

$$|\epsilon| \ll \Lambda_{\rm cf} \ll |r|^{\frac{1}{2}} \,. \tag{2.12}$$

На самом деле, как мы увидим далее, вакуумные средние скаляров векторных мультиплетов также не равны нулю, а разрешены параметрами Ω-фона.

Следуя процедуре предыдущего раздела, мы связываем волновые функции с вакуумными значениями поля – критическими точками функции высоты  $\mathfrak{H}$  и суперпотенциала W, неподвижными по отношению к действию комплексифицированного векторного поля V, приведенного в (2.10).

Критические точки **5** определяют ноль действительного отображения моментов (2.8). Это уравнение является аналогом уравнения постоянной кривизны в соответствии Нарасимана-Шишадри-Хитчина-Кобаяши [100], его можно заменить на условие устойчивости, если одновременно комплексифицировать калибровочную группу. Рассмотрим комплексификацию:

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}} = \prod_{v \in \mathcal{V}} GL(n_v, \mathbb{C})$$

калибровочной группы колчана  $\mathcal{G}$ . В общем случае представление колчана  $\mathcal{R}$  –  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ -орбита набора линейных пространств

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{C}^{n_v}$$

соответствующих узлам колчана и снабженных действием морфизмов, соответствующих стрелкам:

$$q_{(a:v \to w)} \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^{n_v}, \mathbb{C}^{n_w})$$
.

Для представления колчана с вектором размерностей  $\gamma$  определим функцию

$$r(\gamma) \cong \sum_{v \in \mathcal{V}} n_v r_v, \quad r_v \in \mathbb{R} .$$
 (2.13)

Для представления  $\mathcal{R}$  с вектором размерности  $\gamma$  параметры ФИ  $r_v$  удовлетворяют условию  $r(\gamma) = 0$ . Это условие возникает естественным образом, если сложить следы всех отображений моментов (2.8). Колчанное представление  $\mathcal{R}$  называется полустабильным (стабильным), если для всех собственных подпредставлений  $\mathcal{R}'$  выполнено равенство  $r(\gamma') > 0$  ( $r(\gamma') \ge 0$ ). Теорема Кинга [101] (см. также [98] и примеры в [102]) утверждает, что каждое стабильное представление колчана  $\mathcal{R}$  содержит единственное решение (2.8) с точностью до комплексифицированных калибровочных преобразований. А все решения (2.8) содержатся в орбитах полустабильных представлений. В нашем рассмотрении все полустабильные представления будут стабильными, поэтому мы можем установить эквивалентность между решениями (2.8) и стабильными представлениями колчана.

Понятие алгебраической устойчивости переводится в понятие физической устойчивости [32; 103]. Действительно, физический вакуум представляет собой конфигурацию D-бран, а возможные подпредставления колчана считаются более элементарными D-бранами в исходной составной D-бране. Условие устойчивости для (2.13) определяет камеру устойчивости в пространстве центральных

зарядов D-бран, где составная D-брана стабильна, поскольку ее распад на более элементарные D-браны запрещен законами сохранения.

Здесь мы рассмотрим простой тип обрамления – один обрамляющий узел размерности 1 и обрамляющее отображение  $\iota$ , соединяющее этот узел с любым другим узлом колчана. Теорему Кинга несложно обобщить на обрамленные колчаны. Нужно лишь рассматривать обрамляющий узел как калибровочный узел и присвоить ему некоторый фиктивный параметр устойчивости  $r_f$ . Тогда функция устойчивости модифицируется как

$$r(\gamma) = r_f n_f + \sum_{v \in \mathcal{V}} n_v r_v , \quad r_v \in \mathbb{R} .$$

Стабильное представление, очевидно, неразложимо. Для нас это означает, что все представление  $\mathcal{R}$  генерируется как модуль  $\mathbb{C}\mathcal{Q} \cdot \iota$ . Для такого представления  $n_f = 1$ , а все подпредставления также являются модулями такого вида, поэтому, чтобы подпредставление  $\mathcal{R}'$  было хотя бы ненулевым, нужно иметь  $n'_f = 1$ . Тогда, выбрав  $r_v < 0$  и  $r_f = -\sum_{v \in \mathcal{V}} n_v r_v$ , мы обнаружим, что все обрамленные представления стабильны. Альтернативное доказательство можно получить, используя условие устойчивости обрамленных колчанов, как в работе [104].

Таким образом, все решения условия  $\mu_{\mathbb{R}} = 0$  отображения моментов (2.8) в колчане СКМ мы можем построить как неразложимые модули  $\mathbb{C}Q \cdot \iota$ . Тогда вакуумное многообразие  $\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0) \cap dW^{-1}(0)$  соответствует модулям над кольцом Якоби  $\mathcal{J}(Q, W) \cdot \iota$ . Поскольку мы хотели бы рассматривать модули конечной размерности, мы строим такие модули как дополнения к векторным пространствам

$$(\mathcal{J}(\mathcal{Q}, W) \cdot \iota) / (\mathcal{S} \cdot \iota) ,$$

где S – идеал в  $\mathcal{J}(Q, W)$ . Эквивариантные фиксированные точки, чье множество может быть описано как локус  $\mu_{\mathbb{R}}^{-1}(0) \cap dW^{-1}(0)$ , соответствуют S, произведенным мономами.

В разделе 2.1 мы отождествили базисные элементы  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, W) \cdot \iota$  с атомами кристалла, растущего из корневого атома. Тогда векторное пространство  $\mathcal{S} \cdot \iota$ 

естественным образом отождествляется с расплавленным кристаллом. Здесь правило плавления [96] – это отображение того факта, что *S* – идеал:

подмножество атомов базового кристалла, растущее из корневого атома, является расплавленным кристаллом  $\mathcal{K}$ , если для любого атома  $\overline{u} \in \mathcal{K}$  и любого отображения  $(a : u \to \circ) \in \mathcal{A}$ , все атомы  $a \cdot \overline{u}$  из базового кристалла также находятся в  $\mathcal{K}$ .

Классические вакуумы на Хиггсовой ветви для нашей колчанной СКМ находятся во взаимно однозначном соответствии с конечными кристаллами, растущими из корневого атома и полученными как дополнение базового кристалла  $\Lambda_0$  к некоторому расплавленному кристаллу  $\mathcal{K}$ . Для краткости мы будем называть такой конечный кристалл  $\Lambda$  просто кристаллом.

Имея такой кристалл  $\Lambda$ , мы легко восстановим вакуумное представление колчана. В представлении можно выбрать выделенный базис векторов  $\mathcal{R}$ , помеченных атомами  $\Box$  кристалла как мономы из  $\mathcal{J}(\mathcal{Q}, W) \cdot \iota$ . В частности, получаем

$$\mathbb{C}^{n_v} \cong \text{Span} \left\{ |\overline{v}\rangle \right\}. \tag{2.15}$$

Для морфизмов колчана получается следующее представление:

$$q_{(a: v \to w)} | \underline{u} \rangle = \begin{cases} |a \cdot \underline{u} \rangle, & \text{если } u = v, & u a \cdot \Box \in \Lambda, \\ 0, & \text{в иных случаях}. \end{cases}$$
(2.16)

Средние комплексных полей  $\langle \Phi_v \rangle$  в калибровочных мультиплетах также легко вычислить в выбранном базисе: они отличны от нуля только в том случае, если v совпадает с цветом u атома w, и принимают диагональную форму с собственными значениями  $\phi_{\Box}$ :

$$\phi_{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot \iota} = \sum_{i=1}^n \epsilon_a . \qquad (2.17)$$

Наша цель – определить выражения для эффективных волновых функций  $\Psi_{|\omega|<\Lambda_{cf}}$  (которые в дальнейшем для краткости будем обозначать как  $\Psi$ ) в окрестности соответствующей неподвижной точки. Прежде всего заметим, что частоты полей, входящих в калибровочный мультиплет, имеют порядок ~  $\sqrt{\theta}$ , и, таким образом, эти поля не дают вклада в волновую функцию. Член (2.10) в суперзаряде, определяющий векторное поле, смешивает голдстоуновские моды киральных полей относительно действия  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$  с комплексными скалярами векторных мультиплетов. Это смешивание заставляет киральные полевые голдстоуновские моды приобретать частоты также порядка ~  $\sqrt{\theta}$ .

Основным носителем волновой функции  $\Psi$  выступает мезонное многообразие:

$$\mathcal{M} = \left(\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{C} \,\delta q_a\right) / \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \,, \tag{2.18}$$

где мы использовали разложение киральных полей на вакуумные средние и флуктуации:  $q_a = \langle q_a \rangle + \delta q_a$ . Линеаризованное действие комплексифицированной калибровочной алгебры на касательные флуктуационные степени свободы имеет следующий вид:

$$\{g_v\} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}: \quad \delta q_{(a:v \to w)} \mapsto \delta q_{(a:v \to w)} + g_w \langle q_{(a:v \to w)} \rangle - \langle q_{(a:v \to w)} \rangle g_v .$$

Эффективный суперзаряд на мезонном многообразии принимает форму эквивариантно обобщенного дифференциала Дольбо. Эквивариантное торическое действие поля (2.10) представляет естественную градуировку на пространстве  $\mathcal{M}$ , где матричный элемент  $\langle \Box' | \delta q_a | \Box \rangle$  имеет эквивариантный вес, равный

$$\phi_{\Box'} - \phi_{\Box} - \epsilon_a$$
.

Таким образом, эффективная волновая функция  $\Psi$  задается представителем Тома класса Эйлера [67], связанным с критической точкой  $\Lambda$ . Мы могли бы записать упрощенную версию этого выражения в конкретном базисе  $\{m_i\}$  для  $\mathcal{M}$ , где действие эквивариантного векторного поля диагонально:

$$V = \sum_{i} w_i \, m_i \frac{\partial}{\partial m_i} \, .$$

Обратим внимание, что, ограничивая  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  обратно до некомплексифицированной версии  $\mathfrak{g}$  для векторного поля V, мы получим генераторы преобразований ароматической группы. Даже если эффективная метрика на  $\mathcal{M}$  будет скорректирована потоком ренорм-группы, результирующая метрика должна оставаться инвариантной по отношению к ароматической группе. Это, в свою очередь, означает, что различные весовые пространства ортогональны друг другу. Таким образом, мы можем дополнительно предположить, что в выбранном базисе метрика принимает следующий простой вид:

$$ds^2 = \sum_i d\bar{m}_i \ dm_i \ .$$

Эффективный суперзаряд принимает в выбранном базисе вид эквивариантного дифференциала Дольбо (см. [105, ур-е (23)]):

$$Q_{\text{eff}}^{\dagger} = \sum_{i} \left( d\bar{m}_i \; \partial_{\bar{m}_i} + w_i m_i \; \iota_{\partial/\partial_{m_i}} \right)$$

Легко выделить отдельного гармонического представителя  $Q_{\text{eff}}^{\dagger}$ -когомологии, используя следующее условие:

$$Q_{\rm eff}\Psi_{\Lambda} = Q_{\rm eff}^{\dagger}\Psi_{\Lambda} = 0 . \qquad (2.19)$$

Решение этой системы уравнений выглядит следующим образом:

$$\Psi_{\Lambda} = \left(\prod_{i} \left(w_{i} - |w_{i}| \ \bar{\psi}_{1,i} \psi_{2,i}\right) e^{-|w_{i}||m_{i}|^{2}}\right) \prod_{i} \bar{\psi}_{2,i} |0\rangle .$$
(2.20)

Эта волновая функция описывает простые гауссовы колебания вблизи вакуума, отмеченного кристаллом Л. Также, используя эквивалентность фермионных полей и форм, мы можем перевести это выражение в геометрическую форму представителя Тома для класса Эйлера:

$$\Psi_{\Lambda} \sim \bigwedge_{i} e^{-|w_i||m_i|^2} \left( w_i - |w_i| \ dm_i \wedge d\bar{m}_i \right) \ .$$

Преобразуем выражение (2.20) следующим образом:

$$\Psi_{\Lambda} = \left(\prod_{i} w_{i}\right) e^{-\left\{Q_{\text{eff}}^{\dagger}, \sum_{i} \frac{|w_{i}|}{w_{i}} \bar{m}_{i} \psi_{2,i}\right\}} \prod_{i} \bar{\psi}_{2,i} |0\rangle = \left(\prod_{i} w_{i}\right) \prod_{i} \bar{\psi}_{2,i} |0\rangle + \left(Q_{\text{eff}}^{\dagger} \text{-точные члены}\right) .$$

$$(2.21)$$

Таким образом, волновая функция когмологически эквивалентна пфаффиану кривизны (ср. [67, разделы 11.1.2 и 11.6]):

$$\Psi_{\Lambda} \sim \operatorname{Eul}_{\Lambda} \cong \prod_{i} w_{i} .$$
(2.22)

Класс Эйлера удовлетворяет нормировочному условию, следующему из эквивариантного интегрирования:

$$\int \Psi_{\Lambda} = 1 , \quad \int \Psi_{\Lambda} \wedge \Psi_{\Lambda'} = \operatorname{Eul}_{\Lambda} \delta_{\Lambda,\Lambda'} .$$
(2.23)

Здесь  $\Psi_{\Lambda}$  и  $\Psi_{\Lambda'}$  рассматриваются как формы – элементы эквивариантных когомологий, интегрирование происходит по пространству модулей представления колчана.

Это условие нормировки весьма необычно с физической точки зрения: более естественным было бы использовать унитарную эрмитову норму, происходящую от эрмитовой структуры в гильбертовом пространстве. Тем не менее, как было отмечено в [106, раздел 3.3], сам переход от гармонических форм к эквивариантным когомологиям Дольбо, который мы произвели для применения методов локализации, отдает приоритет комплексной структуре на  $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$  над унитарностью. Как мы увидим, этот выбор нормы приводит к появлению алгебры БПЗ, обладающей желаемыми свойствами аффинных янгианов. Для сравнения можно упомянуть, что аналогичное явление имеет место для базиса ортогональных полиномов Джека [107]. Векторы этого базиса ортогональны одновременно относительно двух вариантов нормы: эрмитовой и голоморфной. Однако повышающие и понижающие операторы, отвечающие умножению и дифференцированию по временным переменным  $p_n$  и  $\partial/\partial p_n$ , соответственно, сопряжены друг с другом только для голоморфной нормы.

## 2.1.3 Операторы сдвигов Гекке

Мы рассмотрели эффективную теорию с точки зрения мирового объема D0-браны. Назовем это описанием I. Также мы могли бы начать с эффективной теории мирового объема некомпактной D6-браны, обертывающей многообразие Калаби-Яу. Назовем это альтернативным описанием II. Описание II можно интерпретировать как струнную Кэлерову гравитацию [108—110], эффективное описание квантовой пены. D0-браны представляют собой точечные источники гравитации, деформирующие исходную геометрию Калаби-Яу таким образом, что Кэлерова форма  $\omega$  принимает следующий вид:

$$\omega = \omega_0 + g_s F_A , \qquad (2.24)$$

где  $\omega_0$  — невозмущенная кэлерова форма трехмерного многообразия Калаби-Яу X,  $g_s$  — струнная константа связи, а  $F_A$  — кривизна U(1)-связности A. Описание II осуществляется в терминах  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной шестимерной теории Янга-Миллса, вакуумы которой определяют условия на калибровочную связность A. Эти уравнения можно свести к уравнениям Дональдсона-Уленбека-Яу (ДУЯ) для A:

$$F_A^{(2,0)} = F_A^{(0,2)} = 0 , \quad \omega_0 \wedge \omega_0 \wedge F_A^{(1,1)} = 0 .$$
 (2.25)

Эти уравнения определяют естественное шестимерное обобщение инстантонных уравнений самодуальности в четырех измерениях.

Описания I и II эквивалентны друг другу по построению, поскольку оба применяются к одной и той же системе D-бран. Эту эквивалентность можно было бы проследить до ИК-степеней свободы. В случаях систем бран D0-D4 и бран D0-D2 эта эквивалентность приводит к описанию инстантонных [111] и вихревых [112] пространств модулей, известных как конструкция Атьи–Дринфельда– Хитчина–Манина (АДХМ), а само отношение эквивалентности известно как преобразование Нама. Однако, к сожалению, преобразование Нама неприменимо к шестимерной ситуации, поскольку оно использует тот факт, что четырехмерные  $2 \times 2$  киральные гамма-матрицы образуют кватернионное представление. Тем не менее, алгебро-геометрическое построение спектральных последовательностей Бейлинсона [113] остается применимым и в шестимерной ситуации.

Канонический анализ [114; 115] уравнений ДУЯ (2.25) отождествляет инстантонные решения с устойчивыми голоморфными связностями на X, которые поднимаются до пучков без кручения. Естественно ожидать, что все такие пучки можно построить как когомологии монад. Примеры такого анализа для определенного класса трехмерных многообразий Калаби-Яу приведены в [110]. Например, для случая  $\mathbb{C}^3$  рассматриваются пучки без кручения на  $\mathbb{CP}^3$  с заданным оснащением на бесконечных прямых. Каждый такой пучок  $\mathcal{E}$  является когомологией трехчленной монады. В данном случае колчан – это просто колчан-трилистник:

Пространство представления колчана в этом случае имеет вид:

$$\mathbb{C}^k \cong H^2\left(\mathbb{CP}^3, \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^3}\left(-3\right)\right)$$
.

Рассмотрим голоморфное расслоение  $\mathcal{E}$  над X. Будем называть  $\mathcal{E}'$  модификацией Гекке  $\mathcal{E}$  в точке  $x \in X$ , если  $c_3(\mathcal{E}') = c_3(\mathcal{E}) \pm 1$  и существует изоморфизм:

$$\mu: \quad \mathcal{E}'\big|_{X\setminus x} \longrightarrow \mathcal{E}\big|_{X\setminus x} . \tag{2.27}$$

Другими словами, мы можем сказать, что существует калибровочное преобразование  $G_{\mu}$ , которое, вообще говоря, сингулярно, однако, оно является гладким на открытом подмножестве  $X \setminus x$  и удовлетворяет следующему соотношению на связности:

$$\nabla_A G_\mu = G_\mu \nabla_{A'} . \tag{2.28}$$

Сингулярный гомоморфизм голоморфных расслоений индуцирует соответствующий гомоморфизм представлений колчана. Следуя [101], определим гомоморфизм  $\tau$  колчанных представлений  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{R}'$ 

$$\tau: \mathcal{R}' \longrightarrow \mathcal{R}$$
,

как набор линейных отображений  $\{\tau_v\}_{v\in\mathcal{V}}$ :

$$au_v: \quad \mathbb{C}^{n'_v} \longrightarrow \mathbb{C}^{n_v} ,$$

удовлетворяющих следующему соотношению

$$q_{(a:v \to w)} \cdot \tau_v = \tau_w \cdot q'_{(a:v \to w)}, \quad \forall a \in \mathcal{Q}_1 .$$

$$(2.29)$$

Заметим, что колчанное описание морфизма (2.29) работает для многообразия Калаби-Яу общего вида, помимо  $\mathbb{C}^3$ .

Обобщение конструкции АДХМН на шестимерные инстантоны отображает самодуальную калибровочную связность в морфизмы  $q_a$  представления колчана. Тогда мы можем рассматривать уравнение (2.29) как образ (2.28) при этом отношении эквивалентности.

Определим повышающий оператор Гекке  $\mathbf{E}_v$  как оператор БПЗ, выполняющий модификацию Гекке на расслоении, ассоциированном с описанием II, и увеличивающим размерность, связанную с дробным зарядом D0-браны, в узле  $v \in \mathcal{Q}_0$  на 1. Аналогично, понижающий оператора Гекке  $\mathbf{F}_v$  уменьшает размерность в узле v на 1.

В случае, скажем,  $n'_v = n_v + 1$  гомоморфизм  $\tau$  описывает  $\mathcal{R}$  как подпредставление  $\mathcal{R}'$ . Физическая интерпретация этого факта [103] состоит в том, что  $\mathcal{R}$  может появиться среди продуктов распада  $\mathcal{R}'$ . К сожалению, мы не можем дать непосредственное описание процесса распада в существующих рамках по следующей причине. Происходит распад связанного состояния, отвечающий явлению пересечения стенки на границе камеры маргинальной устойчивости, где условие устойчивости для (2.13) не выполняется. На этой границе некоторая часть параметров  $\Phi U \theta_v$  меняет знак, проходя через нулевое значение. Однако, описание ветви Хиггса не работает в окрестности  $\theta_v = 0$ , где открываются Кулоновская или смешанная ветви, как мы пояснили в разделе 1.1.2. Непертурбативный параллельный перенос бран через такие области доступен для некоторых моделей [88] и представляет собой физическое описание сплетения категорий бран посредством преобразования Фурье-Мукаи (см. раздел 1.3.4).

Приведем некоторые физические аргументы для получения матричных элементов для операторов **E**, **F**. Картина расплавленного кристалла предполагает естественную физическую интуицию, лежащую в основе процессов распада (рекомбинации), согласно которой атом уносится (приносится) на (из) бесконечность(-и), будучи отделенным от кристаллического тела (прикрепленным к нему). Собственные значения комплексного скалярного поля в калибровочном мультиплете  $\phi_{\Box}$ , вообще говоря, представляют собой комплексные числа. Присвоим атомам  $\Box \in \Lambda$  позиции в  $\mathbb{C}$ , соответствующие значениям  $\phi_{\Box}$ . Заметим, что для пары атомов, соединенных стрелкой,  $\Box$  и  $a \cdot \Box$ , их положения различаются как (см. (2.17)):

$$oldsymbol{\phi}_{a\cdot\square} - oldsymbol{\phi}_{\square} = \epsilon_a$$
 .

Эквивариантные веса удовлетворяют условию калибровочной инвариантности суперпотенциала W (3.37). Если стрелки  $a_1, \ldots, a_n$  образуют грань периодического графа  $\hat{Q}$ , то

$$\sum_{k} \epsilon_{a_k} = 0 . \tag{2.30}$$

Из этого условия следует, что для любой пары атомов  $\Box$  и  $\omega \cdot \Box$ , где  $\omega$  – замкнутый путь в колчане,  $\phi_{\Box} = \phi_{\omega \cdot \Box}$ . Следовательно, совокупность точек  $\phi_{\Box} \in \mathbb{C}$ является в точности двумерной проекцией трехмерного кристалла  $\Lambda$  (рис. 2.1). Тогда процесс удаления атома  $\Box$  соответствует пределу  $\phi_{\Box} \to \infty$ .

В общем случае мы не можем сделать этот предел адиабатическим, поскольку не все промежуточные состояния являются БПЗ. Тем не менее, перенесем мысленно волновую функцию  $\Psi$  к пределу  $\phi_{\Box} \to \infty$  и пронаблюдаем, как поток ренорм-группы модифицирует ее. В разделе 3.3.3 мы предложим альтернативную физическую картину переноса  $\phi_{\Box}$  между *парой* кристаллов под действием индуцированной связности Берри. Мы рассмотрим процесс распада кристалла, когда один атом  $\Box$  отрывается от кристалла  $\Lambda$ , в результате чего образуется другой кристалл  $\Lambda - \Box$ . Если  $\Lambda - \Box \subset \Lambda$ , то легко построить среднее значение морфизма  $\tau$  для представлений критических точек  $\Lambda$  и  $\Lambda - \Box$ :

$$\langle \tau \rangle |\Box' \rangle = \begin{cases} |\Box' \rangle, \quad \Box' = \Box; \\ 0, \quad \text{иначе}. \end{cases}$$
(2.31)

Тогда для касательных направлений получим линеаризованную версию (2.29):

$$\langle q_{(a:v \to w)} \rangle \cdot \delta \tau_v + \delta q_{(a:v \to w)} \cdot \langle \tau_v \rangle =$$

$$= \delta \tau_w \cdot \langle q'_{(a:v \to w)} \rangle + \langle \tau_w \rangle \cdot \delta q'_{(a:v \to w)} .$$

$$(2.32)$$

Обозначим линеаризованное мезонное пространство вблизи критической точки  $\Lambda - \Box$  как  $\mathcal{M}_1$ , а вблизи критической точки  $\Lambda$  как  $\mathcal{M}_2$ . Линейные уравнения (2.32) вырезают гиперплоскость  $\Sigma$  внутри  $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ . Обозначим координаты в  $\mathcal{M}_1$  как  $m_i^{(1)}$ , а координаты в  $\mathcal{M}_2$  как  $m_i^{(2)}$ . Тогда в  $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$  мы можем выбрать конкретный базис так, чтобы система уравнений, определяющая расположение  $\Sigma$  внутри  $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ , имела следующий вид:

$$m_i^{(1)} = m_i^{(2)}, \quad i = 1, \dots, n_1,$$
  

$$m_i^{(1)} = 0, \qquad i = n_1 + 1, \dots, n_2,$$
  

$$m_i^{(2)} = 0, \qquad i = n_1 + 1, \dots, n_3,$$
  
(2.33)

где  $n_k$  – некоторые размерности.

Разделим эти пространства и обозначим соответствующим образом:

$$U \cong \operatorname{Span} \left\{ m_{i}^{(1)} \right\}_{i=1}^{n_{1}} \cong \operatorname{Span} \left\{ m_{i}^{(2)} \right\}_{i=1}^{n_{1}},$$
  

$$V_{1} \cong \operatorname{Span} \left\{ m_{i}^{(1)} \right\}_{i=n_{1}+1}^{n_{2}}, \quad V_{2} \cong \operatorname{Span} \left\{ m_{i}^{(2)} \right\}_{i=n_{1}+1}^{n_{3}},$$
  

$$W_{1} \cong \operatorname{Span} \left\{ m_{i}^{(1)} \right\}_{i=n_{2}+1}^{\dim \mathcal{M}_{1}}, \quad W_{2} \cong \operatorname{Span} \left\{ m_{i}^{(2)} \right\}_{i=n_{3}+1}^{\dim \mathcal{M}_{2}}.$$
(2.34)

Схематически это разложение можно изобразить следующим образом:

Решив (2.32), представим морфизм  $\tau_v$  в виде:

$$\tau_v = \langle \tau_v \rangle + \delta \tau_v \; .$$

Поскольку  $\langle \tau_v \rangle$  – обычная проекция, мы можем рассмотреть блочное разложение киральных отображений q:

$$q^{(2)}(V_2, U, W_2) \sim \left( \frac{q^{(1)}(V_1 = 0, U, W_1) \mid f(V_2)}{h(W_2)} \right) ,$$
 (2.36)

где f и h – некоторые матрично-значные функции, таким образом за отображения между базисами, натянутыми на подкристаллы  $\Box$  и  $\Lambda$  –  $\Box$  внутри  $\Lambda$ , отвечают разные блоки:

$$\begin{split} q^{(2)}: \ \Lambda \to \Lambda \ , \quad q^{(1)}: \ \Lambda - \Box \to \Lambda - \Box \ , \\ f: \ \Box \to \Lambda - \Box \ , \quad h: \ \Lambda \to \Box \ . \end{split}$$

Такое блочное разложение позволяет нам подчеркнуть физический смысл нашего способа разбиения  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  и  $\Sigma$  на подпространства. При морфизме  $\tau$  блок  $q^{(1)}$  внутри  $q^{(2)}$  напрямую проецируется на  $q^{(1)}$  в представлении, соответствующем  $\Lambda - \Box$ .  $W_2$  определяет блок, соответствующий ядру морфизма  $\tau$ , поэтому уравнения для  $\Sigma$  не ограничивают это подпространство.  $V_2$  не входит в ядро  $\tau$ , однако отображается в 0, поэтому уравнения для  $\Sigma$  накладывают условие  $V_2 = 0$  (см. (2.33)). На блоке  $q^{(1)}$  морфизм  $\tilde{\tau}$  обратим, однако, подпространство  $V_1$  из  $\mathcal{M}_1$  не представлено в блоке  $q^{(1)}$  внутри  $\tilde{q}^{(2)}$ , поэтому равенство этого элемента нулю и определяет еще одну часть уравнений в (2.33), задающую  $\Sigma$ . Подпространства U и  $W_1$  отображаются в блок  $q^{(1)}$  при  $\tau^{-1}$ , это определяет остальные уравнения в (2.33) для U. Наконец, на  $W_1$  нет ограничений, поскольку это не мезонные степени свободы в  $\mathcal{M}_2$ : мы ввели их с помощью калибровочного преобразования  $g^{(2)}$ , и в  $\mathcal{M}_2$  их можно удалить.

На основании этих рассуждений для волновой функции состояния БПЗ в Л-вакууме можно предложить следующий вид:

$$\Psi_{\omega < |\Lambda_{\rm cf}|}(V_2, U, W_2) \times \Psi_{\omega > |\Lambda_{\rm cf}|}(W_1, \mathbf{hfm})$$

здесь **hfm** обозначает другие высокочастотные моды.  $W_1$  принадлежит к высокочастотным модам, поскольку мы определили это подпространство как немезонное. Проследим, как будет меняться эта функция при параллельном переносе ее из кристалла  $\Lambda$  в  $\Lambda - \Box$ . Сначала мы разделим все волновые функции подсистем на основе декомпозиции (2.35). В общем случае эти подпространства имеют подпространства с разными весами, а уравнения для  $\Sigma$  эквивариантны, поэтому мы можем работать с этими подпространствами как с ортогональными элементами:

$$\Psi_{\omega < |\Lambda_{\rm cf}|}(V_2)\Psi_{\omega < |\Lambda_{\rm cf}|}(U)\Psi_{\omega < |\Lambda_{\rm cf}|}(W_2) \times \Psi_{\omega > |\Lambda_{\rm cf}|}(W_1)\Psi_{\omega > |\Lambda_{\rm cf}|}(\mathbf{hfm})$$

При параллельном переносе подпространство  $W_1$ , принадлежащее к набору высокочастотных мод, становится низкочастотным в  $\Lambda - \Box$  и вносит вклад в эффективную волновую функцию. В частности, смешивание между  $W_1$  и  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  определяется математическими ожиданиями некоторых киральных полей  $\langle q \rangle$ , что схематично можно было бы записать для поля  $x \in W_1$ :

$$w_x \sim \sqrt{\langle q \rangle^2 + |\epsilon_x|^2}$$
.

Когда мы убираем атом  $\Box$ , увеличивая значение  $\phi_{\Box}$ , математическое ожидание  $\langle q \rangle$ , которое вносит вклад в потенциал с помощью члена  $|\phi_{\Box} \langle q \rangle|^2$ , должно стремиться к нулю, и смешивание между калибровочными и киральными степенями свободы исчезает:

высокие 
$$w: w_x \sim \sqrt{\langle q \rangle^2 + |\epsilon_x|^2} \sim \langle q \rangle \rightarrow$$
 низкие  $w: w_x \sim \epsilon_x$ . (2.37)

В нашем рассмотрении мы отслеживаем нормировку волновых функций только с точностью до голоморфного множителя по эквивариантным весам  $\epsilon$ , поэтому для волновых функций этот переход порождает коэффициент, как в (2.22), заданный обратным произведением по всем эквивариантным весам из  $W_1$ :

$$\Psi_{\omega > |\Lambda_{\rm cf}|}(W_1) \to \frac{1}{\operatorname{Eul}(W_1)} \Psi_{\omega < |\Lambda_{\rm cf}|}(W_1) \ . \tag{2.38}$$

 $V_2$  ведет себя иным образом, поэтому эти степени свободы становятся «тяжелыми», соответствующие веса w, являющиеся просто линейными функциями по  $\epsilon$ , «раздуваются». Поэтому для этих волновых функций мы получаем:

$$\Psi_{\omega < |\Lambda_{\rm cf}|}(V_2) \to \operatorname{Eul}(V_2)\Psi_{\omega > |\Lambda_{\rm cf}|}(V_2) .$$
(2.39)

Для вывода волновой функции для Λ − □ необходимо также рассмотреть степени свободы, соответствующие V<sub>1</sub>, поскольку они отсутствуют в исходной системе для кристалла Λ. Собирая все вклады, приходим к следующему соотношению:

$$\Psi_{\omega < |\Lambda_{\rm cf}|}(V_1) \times \Psi_{\omega < |\Lambda_{\rm cf}|}(\mathcal{M}_2) \times \Psi_{\omega > |\Lambda_{\rm cf}|} = = \frac{\operatorname{Eul}(V_2)}{\operatorname{Eul}(W_1)} \times \Psi_{\omega < |\Lambda_{\rm cf}|}(\mathcal{M}_1) \times \Psi_{\omega < |\Lambda_{\rm cf}|}(W_2) \times \Psi'_{\omega > |\Lambda_{\rm cf}|} .$$

$$(2.40)$$

Волновая функция  $\Psi_{\omega < |\Lambda_{cf}|}(W_2)$  содержит степени свободы  $W_2$ , не проецируемые на  $\mathcal{M}_1$ . Поскольку эти степени свободы не переходят в высокочастотные моды, естественно связать эту волновую функцию с D0-браной, а  $W_2$  – с уносимыми ее степенями свободы.

Мы сопоставляем действию  $\hat{F}$  матричный коэффициент, заданный числовым коэффициентом в приведенном выше выражении:

$$\frac{\operatorname{Eul}(V_2)}{\operatorname{Eul}(W_1)} = \frac{\operatorname{Eul}(\mathcal{M}_2)}{\operatorname{Eul}(\Sigma)} , \qquad (2.41)$$

где было использовано (2.35). Введем следующие обозначения:

$$\operatorname{Eul}_{\Lambda} \cong \operatorname{Eul}(\mathcal{M}_2), \quad \operatorname{Eul}_{\Lambda - \Box, \Lambda} \cong \operatorname{Eul}(\Sigma) .$$
 (2.42)

Полное выражение для  $\hat{F}$  дается вкладом всех возможных извлечений атомов из кристалла  $\Lambda$ . Обозначим Add( $\Lambda$ ) и Rem( $\Lambda$ ) соответственно множества атомов, которые можно удалить/добавить из/в кристалл  $\Lambda$  так, что в результате снова получится кристалл (см. рисунок 2.2). Тогда выражение для понижающего оператора принимает следующий вид:

$$\hat{F} \Psi_{\Lambda} = \sum_{\Box \in \operatorname{Rem}(\Lambda)} \mathbf{F}_{\Lambda, \Lambda - \Box} \Psi_{\Lambda - \Box}, \quad \mathbf{F}_{\Lambda, \Lambda - \Box} := \frac{\operatorname{Eul}_{\Lambda}}{\operatorname{Eul}_{\Lambda - \Box, \Lambda}} .$$
(2.43)

Выражение для  $\hat{E}$  определяется из требования сопряженности  $\hat{E}$  и  $\hat{F}$  по норме (2.23):

$$\hat{E} \Psi_{\Lambda} = \sum_{\Box \in \text{Add}(\Lambda)} \mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box} \Psi_{\Lambda+\Box}, \quad \mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box} := \frac{\text{Eul}_{\Lambda}}{\text{Eul}_{\Lambda,\Lambda+\Box}} .$$
(2.44)



Рисунок 2.2 – Пример кристалла плоского разбиения  $\pi$ , набор атомов, которые можно добавить Add $(\pi)$ , набор атомов, которые можно удалить Rem $(\pi)$ .

Эти выражения совпадают с выражениями, полученными геометрическими методами в [114], где модификация Гекке соответствует преобразованию Фурье-Мукаи  $\Psi_{\Lambda} \in H^*_{\mathcal{G}_{\mathbb{C}}}(\mathcal{M}_2)$  на многообразии-произведении  $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$  с ядром, заданным структурным пучком эквивариантного локуса соответствия (2.29). Действительно, используя ортогональность нормы (2.23), мы можем вычислить соответствующие коэффициенты в разложении (2.44) как

$$\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box} \cong \frac{\int (\hat{E} \ \Psi_{\Lambda}) \land \Psi_{\Lambda+\Box}}{\int \mathcal{M}_{1} \ \Psi_{\Lambda+\Box} \land \Psi_{\Lambda+\Box}}$$

Затем, стягивая интеграл числителя на  $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ , мы можем вычислить его, используя стандартные методы локализации:

$$\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box} = \frac{\int\limits_{\Sigma} \Psi_{\Lambda} \otimes \Psi_{\Lambda+\Box}}{\int\limits_{\mathcal{M}_{1}} \Psi_{\Lambda+\Box} \wedge \Psi_{\Lambda+\Box}} = \frac{\mathrm{Eul}_{\Lambda} \mathrm{Eul}_{\Lambda+\Box}}{\mathrm{Eul}_{\Lambda,\Lambda+\Box}} \cdot \frac{1}{\mathrm{Eul}_{\Lambda+\Box}} = \frac{\mathrm{Eul}_{\Lambda}}{\mathrm{Eul}_{\Lambda,\Lambda+\Box}}$$

### 2.1.4 Алгебра БПЗ: колчанный янгиан

Операторы сдвига Гекке, которые мы вывели в предыдущем разделе, являются операторами БПЗ; они отображают состояния БПЗ в состояния БПЗ. В целом они не имеют пертурбативной интерпретации — алгебра БПЗ содержит непертурбативные монополеподобные операторы [106] в калибровочно-инвариантных когомологиях суперзаряда  $\bar{Q}_1$ .

Существует также другой набор пертурбативных операторов БПЗ вида  $Tr(\Phi_v^k)$  при  $k \in \mathbb{N}$  и  $v \in \mathcal{V}$ . Очевидно, суперзаряд в виде (2.5) коммутирует с

 $\operatorname{Tr}(\Phi_v^k)$ , а калибровочная инвариантность этого оператора гарантирована. Эти операторы можно объединить в производящую функцию с помощью спектрального параметра  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\operatorname{Tr} (z - \Phi_v)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Tr} \Phi_v^n}{z^{n+1}} .$$
 (2.45)

В построенном представлении кристаллического базиса эти операторы становятся диагональными, соответствующие собственные значения задаются вакуумными средними  $\langle \Phi_v \rangle$  в соответствующем вакууме. Используя представление (2.15), легко получить собственные значения этих операторов:

$$\left[\operatorname{Tr} (z - \Phi_v)^{-1}\right] |\Lambda\rangle = \left(\sum_{\Box \in \Lambda^{(v)}} \frac{1}{z - \phi_{\Box}}\right) |\Lambda\rangle , \qquad (2.46)$$

где  $\Lambda^{(v)} \subset \Lambda$  – подмножество атомов кристалла цвета v.

Известно, что в случае модификации Гекке на комплексной плоскости [106] соответствующее представление алгебры БПЗ порождает векторный модуль соответствующего колчанного янгиана. Векторный модуль отвечает набору одномерных кристаллов, который представляет собой просто одномерный массив атомов, растущих из корневого атома, где новые атомы могут добавляться и удаляться только на конце этой цепочки. Соответствующая алгебра БПЗ непертурбативных модификаций Гекке замыкается на подалгебре пертурбативных операторов:

$$\hat{F}\hat{E} \sim f_1(\Phi), \quad \hat{E}\hat{F} \sim f_2(\Phi)$$

К сожалению, это не относится к двумерным и трехмерным кристаллам, где свободные позиции атомов разбросаны по всей границе кристалла.

Элементы матрицы удовлетворяют следующему набору соотношений (см.

[38]):

$$\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+a}\mathbf{F}_{\Lambda+a,\Lambda} = \mathop{\mathrm{res}}_{z=p_{a}} \hat{\psi}_{\Lambda}^{(a)}(z) = -\mathop{\mathrm{res}}_{z=p_{a}} \hat{\psi}_{\Lambda+a}^{(b)}(z) , \\
\frac{\mathbf{E}_{\Lambda+a,\Lambda+a+b}\mathbf{F}_{\Lambda+a+b,\Lambda+b}}{\mathbf{F}_{\Lambda+a,\Lambda+b}} = 1 , \\
\frac{\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+a}\mathbf{E}_{\Lambda+a,\Lambda+a+b}}{\mathbf{E}_{\Lambda+a,\Lambda+a+b}}\hat{\varphi}_{a,b} \left(\boldsymbol{\phi}_{a}-\boldsymbol{\phi}_{b}\right) = 1 , \\
\frac{\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+b}\mathbf{E}_{\Lambda+a,h}\mathbf{E}_{\Lambda+a,h}}{\mathbf{F}_{\Lambda+a+b,\Lambda+a+b}}\hat{\varphi}_{a,b} \left(\boldsymbol{\phi}_{a}-\boldsymbol{\phi}_{b}\right) = 1 , \\
\frac{\mathbf{E}_{\Lambda+a+b,\Lambda+a}\mathbf{F}_{\Lambda+a,h}}{\mathbf{F}_{\Lambda+a+b,\Lambda+b}\mathbf{F}_{\Lambda+b,\Lambda}}\hat{\varphi}_{a,b} \left(\boldsymbol{\phi}_{a}-\boldsymbol{\phi}_{b}\right) = 1 ,$$
(2.47)

где а отвечает атому цвета а, и были введены следующие функции:

$$\hat{\varphi}_{v,w}(z) \cong \underbrace{(-1)^{\delta_{v,w}+|a:v\to w|}}_{(b:w\to v)\in\mathcal{Q}_1} \underbrace{\prod_{(z:v\to w)\in\mathcal{Q}_1} (z+\epsilon_a)}_{(b:w\to v)\in\mathcal{Q}_1} ,$$

$$\hat{\psi}^{(v)}_{\Lambda}(z) \cong \left(\frac{1}{z}\right)^{\delta_{\mathbf{f}.\mathbf{n}.v}} \left(\prod_{(a:v\to v)\in\mathcal{Q}_1} -\frac{1}{\epsilon_a}\right) \prod_{\square\in\Lambda} \hat{\varphi}_{v,\hat{\square}}(z-\boldsymbol{\phi}_{\square}) .$$
(2.48)

Здесь **f.n**. обозначает цвет корневого атома, соответствующего узлу, который обрамлен, т.е. является образом отображения  $\iota$  из обрамляющего узла.

Функцию  $\hat{\psi}_{\Lambda}^{(v)}(z)$  мы будем называть *зарядовой функцией*, поскольку она отображает свойства ароматического заряда для вектора  $|\Lambda\rangle$ . Первое соотношение из набора (2.47) указывает на то, что все полюса рациональной функции  $\hat{\psi}_{\Lambda}^{(v)}(z)$  фиксированы и находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством  $\operatorname{Add}(\Lambda) \cup \operatorname{Rem}(\Lambda)$ .

Алгебра БПЗ часто компактно представляется введением спектрального параметра. Помимо (2.45) мы также можем ввести зависимость от спектральных параметров генераторов  $\hat{E}$ ,  $\hat{F}$  через коммутатор:

$$\hat{e}^{(v)}(z) := \left[ \text{Tr} \ (z - \Phi_v)^{-1}, \hat{E} \right] ,$$
  
$$\hat{f}^{(v)}(z) := - \left[ \text{Tr} \ (z - \Phi_v)^{-1}, \hat{F} \right] .$$
(2.49)

Эта модификация позволяет разделить действие операторов  $\hat{E}$ ,  $\hat{F}$  на вакантные позиции атомов в Add( $\Lambda$ ) и Rem( $\Lambda$ ), так что матричные элементы  $\hat{e}^{(v)}$ и  $\hat{f}^{(v)}$  будут иметь полюса в вакантных позициях атомов, спроецированных на Ф-плоскость [38]:

$$\hat{e}^{(v)}(z)|\Lambda\rangle = \sum_{\substack{\upsilon \in \text{Add}(\Lambda)}} \frac{\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box}}{z - \phi_{\Box}} |\Lambda + \Box\rangle ,$$

$$\hat{f}^{(v)}(z)|\Lambda\rangle = \sum_{\substack{\upsilon \in \text{Rem}(\Lambda)}} \frac{\mathbf{F}_{\Lambda,\Lambda-\Box}}{z - \phi_{\Box}} |\Lambda - \Box\rangle .$$
(2.50)

Также введем оператор  $\hat{\psi}^{(v)}(z)$  через его матричные элементы в кристаллическом представлении:

$$\hat{\psi}^{(v)}(z)|\Lambda\rangle = \psi^{(v)}_{\Lambda}(z) \times |\Lambda\rangle . \qquad (2.51)$$

Рассмотрим алгебру БПЗ, порожденную следующим набором генераторов:

$$\hat{e}^{(v)}(z) \;,\; \hat{f}^{(v)}(z) \;,\;\; \hat{\psi}^{(v)}(z) \;,\;\;\; v \in \mathcal{V} \;.$$

Используя соотношения (2.47), мы находим, что эти генераторы удовлетворяют следующему замкнутому набору соотношений:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}^{(v)}(x), \hat{f}^{(w)}(y) \end{bmatrix} \sim \delta_{vw} \frac{\hat{\psi}^{(v)}(x) - \hat{\psi}^{(w)}(y)}{x - y}, \\ \hat{\psi}^{(v)}(x) \hat{e}^{(w)}(y) \cong \hat{\varphi}_{v,w}(x - y) \hat{e}^{(w)}(y) \hat{\psi}^{(v)}(x), \\ \hat{\psi}^{(v)}(x) \hat{f}^{(w)}(y) \cong [\hat{\varphi}_{v,w}(x - y)]^{-1} \hat{f}^{(w)}(y) \hat{\psi}^{(v)}(x), \\ \hat{e}^{(v)}(x) \hat{e}^{(w)}(y) \sim \hat{\varphi}_{v,w}(x - y) \hat{e}^{(w)}(y) \hat{e}^{(v)}(x), \\ \hat{f}^{(v)}(x) \hat{f}^{(w)}(y) \sim [\hat{\varphi}_{v,w}(x - y)]^{-1} \hat{f}^{(w)}(y) \hat{f}^{(v)}(x), \end{aligned}$$

$$(2.52)$$

где  $\sim (\simeq)$  означает, что обе части совпадают в разложении по x и y с точностью до мономов  $x^j y^{k \ge 0}$  и  $x^{j \ge 0} y^k \ (x^{j \ge 0} y^{k \ge 0}).$ 

Настоящие соотношения немного отличаются от ожидаемых для колчананного янгиана БПЗ  $Y_{(Q,W)}$ , введенного в работе [38]. В частности, когда рассматриваемое трехмерное многообразие Калаби-Яу отвечает разрешению обобщенной конической сингулярности,  $Y_{(Q,W)}$  становится аффинным янгианом супералгебры Ли  $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n})$ , а генераторы e и f приобретают четность. В этом случае ожидается, что коммутатор e-f в (2.52) будет заменен суперкоммутатором с учетом четности генератора.
Мы будем присваивать четность атомам фиксированного цвета  $v \in Q_0$ подобно конструкции когомологической холловской алгебры [35]. Тот же результат мы получим, если рассмотрим вклад знака в (2.48) при перестановке двух операторов  $\hat{e}^{(v)}$ . Эта перестановка дает дополнительный знак минус, если число  $|a: v \to v|$  четно, и знак плюс, если это число нечетное. Итак, мы определяем четность для узла  $v \in Q_0$  как:

$$|v| = (1 + |a: v \to v|) \mod 2 \in \mathbb{Z}_2.$$
 (2.53)

Модифицируем элементы матрицы простыми сдвигами знака:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\Lambda,\Lambda+\Box} = \sigma_{+}(\Lambda,\Box) \ \mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box} ,$$
  

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\Lambda+\Box,\Lambda} = \sigma_{-}(\Lambda,\Box) \ \mathbf{F}_{\Lambda+\Box,\Lambda} ,$$
(2.54)

где  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  принимают только значения ±1. Представим эти функции в потенциальном виде. Иными словами, подготовим для них анзац в виде произведения попарных потенциальных членов взаимодействия нового атома с уже имеющимися атомами кристалла:

$$\sigma_{\pm}(\Lambda,\Box) = \prod_{\Box' \in \Lambda} \nu_{\pm}(\Box',\Box) . \qquad (2.55)$$

Тогда  $\nu_{\pm}$  должны удовлетворять определяющим соотношениям, чтобы генераторы алгебры БПЗ получили правильное статистическое поведение:

$$\nu_{+}(\bar{a}, \bar{b}) = (-1)^{|a||b| + \delta_{a,b} + |b \to a|} \nu_{+}(\bar{b}, \bar{a}) , 
\nu_{-}(\bar{a}, \bar{b}) = (-1)^{|a||b|} \nu_{-}(\bar{b}, \bar{a}) .$$
(2.56)

Эти соотношения могут быть разрешены в общем виде (см. [56, Приложение E]).

Новые генераторы алгебры БПЗ с поправленными знаками удовлетворяют соотношениям колчанного янгиана, которые переходят в известные аффинные янгианы серии супералгебр Ли  $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n})$ , отвечающих разрешению обобщенной конической сингулярности  $xy = z^m w^n$ . Однако, стоит заметить, понятие колчанного янгиана обобщает понятие афинных янгианов, классифицируемых расширенными супер-диаграммами Дынкина. Мы не будем приводить в этом разделе общие соотношения колчанного янгиана, а вернемся к ним, когда будем обсуждать дальнейшие обобщения колчанных янгианов на тригонометрические и эллиптические алгебры в разделе 2.3.4.

## 2.1.5 Пример построения: Ү $(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ – колчанный Янгиан для $\mathbb{C}^3$

Наша следующая в рассмотрении модель — это схема Гильберта на  $\mathbb{C}^3$ , и для ее описания мы используем стандартный колчан-трилистник с каноническим суперпотенциалом (2.26).

Пространство модулей представлений колчана-трилистника определяется выражением

Spec 
$$\mathbb{C}[B_1, B_2, B_3] / \langle [B_i, B_j] = 0 \rangle$$
.

Однако это пространство довольно сингуларно. В частности, на этом многообразии невозможно будет определить нули отображения реальных моментов. Поэтому на практике обычно вводят разрешение по обрамлению киральной материей *I*:

$$B_{2}$$

$$B_{3} \bigoplus_{I} B_{1} , \quad W = \operatorname{Tr}\left([B_{1}, B_{2}] B_{3}\right) . \quad (2.57)$$

Для такой ситуации мы можем применить аналог соответствия Хитчина-Кобаяши и утверждать, что неподвижные точки тора на локусе  $\mu_{\mathbb{R}} = \mu_{\mathbb{C}} = 0$ эквивалентны неподвижным точкам тора на следующем многообразии:

$$\left\{ \begin{array}{c} [B_i, B_j] = 0\\ I - циклический \end{array} \right\} / \{ комплексная калибровка \} .$$
 (2.58)

Подъем колчана (2.57) на тор, а затем на плоскость  $\mathbb{R}^2$ , покрывающей тор, представляет треугольную решетку с ребрами, соответствующими умножениям на  $B_i$ . Поскольку в неподвижной точке (2.58)  $B_i$  коммутируют, любому слову вида  $B_1^a B_2^b B_3^c I$  сопоставим моном  $u_1^a u_2^b u_3^c$  от коммутативных переменных  $u_i$ . Возможные кристаллы в этом случае охватывают векторные пространства, отождествляемые с

$$\mathcal{V} = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3] \mod \mathcal{I}$$
,

где  $\mathcal{I}$  – идеал длины *n*. Действие тора на переменные  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  можно прочитать из эквивариантного действия на  $B_i$ , имеющего веса  $\epsilon_i$ . Для визуализации кристаллов рассмотрим моном  $u_1^a u_2^b u_3^c$  как атом с координатами (a, b, c) в положительном трехмерном октанте **O**. Сам октант ассоциируется с мономиальными образующими кольца  $\mathbb{C}[u_1, u_2, u_3]$ . Каждый генератор  $u_1^a u_2^b u_3^c$  идеала отсекает от октанта все атомы с координатами  $(a, b, c) + \mathbf{O}$ . Остальные атомы соответствуют базисным векторам  $\mathcal{V}$ , и их должно быть  $n = \dim \mathcal{V}$ . Поэтому мы заключаем, что неподвижные точки тора на (2.58) находятся во взаимно однозначном соответствии с плоскими разбиениями, перечисляющими все возможные кристаллы (см. рисунок 2.2(а)).

Эквивариантные весовые параметры подчиняются ограничению нильпотентности, следующему из суперпотенциала (2.11):

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 ,$$

а весовая функция для атома  $\Box$  с трехмерными координатами  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  имеет вид:

$$\boldsymbol{\phi}_{\Box} = \epsilon_1 \mathbf{x} + \epsilon_2 \mathbf{y} + \epsilon_3 \mathbf{z} . \qquad (2.59)$$

Если следовать тем же шагам, что и в разделе 2.1.3, то матричные элементы должны принимать форму эквивариантных интегралов, приводящих к отношениям эйлеровых характеров касательного пространства к неподвижной точке и касательного пространства к локусу гомоморфности  $\Sigma$ :

$$\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box} = \frac{\widetilde{\mathrm{Eul}}_{\Lambda}}{\widetilde{\mathrm{Eul}}_{\Lambda,\Lambda+\Box}} , \quad \mathbf{F}_{\Lambda,\Lambda-\Box} = \frac{\widetilde{\mathrm{Eul}}_{\Lambda}}{\widetilde{\mathrm{Eul}}_{\Lambda-\Box,\Lambda}} .$$
(2.60)

Единственная проблема в этой конструкции состоит в том, что схема Гильберта на  $\mathbb{C}^3$  сингулярна, поэтому эйлеровы характеры касательных пространств не определены четко и требуют некоторой регуляризации. Регуляризацию, которая будет введена далее, мы обозначаем тильдой. В математической литературе вопрос сингулярности пространства гильбертовых схем на  $\mathbb{C}^3$  решается путем рассмотрения когомологий пространства модулей со значениями в исчезающем цикле dW, см. [116].

Чтобы справиться с этой сингулярностью, мы воспользуемся следующим приемом. Мы можем рассмотреть различные приложения потока ренорм-группы. В (1.5) мы использовали в качестве параметра, определяющего ИК-шкалу,  $\hbar$ , общий для всех частей суперзаряда. Однако, сопряжение с одним оператором  $\bar{\psi}\psi$  масштабирует сопряженные фермионные операторы  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  противоположными способами:

$$e^{\lambda\bar{\psi}\psi} \psi \ e^{-\lambda\bar{\psi}\psi} = e^{-\lambda}\psi \ , \quad e^{\lambda\bar{\psi}\psi} \ \bar{\psi} \ e^{-\lambda\bar{\psi}\psi} = e^{\lambda}\bar{\psi} \ . \tag{2.61}$$

А значит, можно ввести двухпараметрическое семейство суперзарядов, имеющих, тем не менее, изоморфные когомологии:

$$\bar{Q}_{\dot{1}}^{(\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2)} = e^{-\mathbf{s}_1\mathfrak{H}} \left( d_{X^3} + \bar{\partial}_{\Phi,q} + \iota_{\mathbf{s}_1V} + \mathbf{s}_2 dW \wedge \right) e^{\mathbf{s}_1\mathfrak{H}} .$$

$$(2.62)$$

Мы можем сначала масштабировать параметр  $\mathbf{s}_1$ , а затем  $\mathbf{s}_2$ . Это действие не меняет фиксированные точки действия тора, которые мы определили ранее, и гильбертово пространство БПЗ. Однако введенная процедура масштабирования изменяет частоты для касательных направлений в пространстве модулей и, в конечном итоге, изменяет эффективную волновую функцию.

Как и раньше, мы разлагаем все киральные поля вокруг их средних значений, определяемых фиксированной точкой кристалла, до линейного порядка:

$$B_1 = \langle B_1 \rangle + \delta B_1 , \ B_2 = \langle B_2 \rangle + \delta B_2 , \ B_3 = \langle B_3 \rangle + \delta B_3 , \ I = \langle I \rangle + \delta I .$$
 (2.63)

Линеаризованное комплексифицированное калибровочное действие, параметризованное матрицей G, действует на касательные поля по следующей схеме:

$$\delta B_i \to \delta B_i + [G, \langle B_i \rangle], \quad \delta I \to \delta I + G \langle I \rangle.$$
 (2.64)

Веса касательных направлений при эквивариантном действии тора определяются собственными значениями следующих операторов:

$$\delta B_i: \ [\Phi, *] - \epsilon_i \cdot *, \quad \delta I: \ \Phi \cdot *.$$
(2.65)

Мы ожидаем, что перемасштабирование  $\mathbf{s}_1$  в первую очередь приведет к тому, что касательные степени свободы, соответствующие калибровочным направлениям, приобретут большие частоты и не будут давать вклад в эффективную волновую функцию. Суперпотенциал не дает вклада в первом порядке, поэтому мы не налагаем дополнительные ограничения на касательные степени свободы, а ненулевые веса не затрагиваются им и остаются неизменными. Назовем это градуированное векторное пространство  $\mathcal{U}_{\Lambda}$ . Однако в нем можно встретить определенное направление в касательном пространстве с нулевым значением весов эквивариантного действия тора. Для этих направлений мы должны учитывать более высокие поправки, включая суперпотенциал.

Прежде всего мы утверждаем, что касательное пространство к неподвижной точке после вычета калибровочных степеней свободы, которое мы назвали  $\mathcal{U}_{\Lambda}$ , имеет четное число базисных векторов нулевого веса. Более того, можно объединить эти векторы в пары  $(t_a, s_a)$ , так что суперпотенциал в таких локальных координатах будет иметь следующий вид:

$$W = \sum_{a} t_a s_a . (2.66)$$

Причина справедливости такого разложения в следующем. Суперпотенциал инвариантен относительно калибровочной и ароматической симметрий и в касательных локальных координатах имеет квадратичную форму. В этой квадратичной форме в качестве мономов могут выступать только степени свободы, соответствующие взаимно противоположным весам. Вклад суперпотенциала, соответствующий степеням свободы нулевого веса, не может иметь квадратичных членов типа  $t_a^2$ , поскольку исходный суперпотенциал не имеет квадратичных членов в  $B_i$  и должен быть невырожденной квадратичной формой; в противном случае фиксированные точки, которые мы отождествили с плоскими разбиениями, не будут зафиксированы вдоль направлений вырождения W. Суперзаряд эффективно сводится к твистованному дифференциалу:

$$\bar{\partial} + dW \wedge .$$

Если определить волновую функцию, соответствующую когомологиям такого суперзаряда, она не будет иметь форму представителя Тома соответствующего класса Эйлера. Чтобы вернуть ситуацию в нужное русло, рассмотрим регуляризацию нулевых эквивариантных весов пар полей  $(t_a, s_a)$ . Предположим,  $t_a$  мы присвоили некоторый вес  $\epsilon_a$ , тогда  $s_a$  нужно присвоить вес  $-\epsilon_a$ , чтобы сохранить ароматическую инвариантность (2.66). Мы заключаем, что пара полей  $(t_a, s_a)$  вносит вклад  $-\epsilon_a^2$  в эйлеров характер. Опустим нормализацию и скажем, что пара полей с нулевым весом вносит вклад в знаковый множитель (-1) в эйлеров класс.

В случае касательного пространства к неподвижной точке число полей с нулевым эквивариантным весом всегда четно, как мы уже говорили. В этом случае количество пар составляет лишь половину количества этих полей. В общем случае, например, когда рассматриваются локусы гомоморфности  $\Sigma$ , мы будем сталкиваться с ситуациями, когда количество полей с нулевым весом нечетно, в этом случае мы принимаем за количество пар (нижнюю) целую часть половины количества полей с нулевым весом.

Подводя итог, предположим, что существует векторное пространство  $\mathcal{N}$  с базисом, в котором вектора градуированы эквивариантными весами действия тора:

$$\mathcal{N}: \{(m_i, w_i)\}_{i=1}^{\dim \mathcal{N}}$$
 (2.67)

Для такого пространства мы определяем регуляризованный класс Эйлера как:

$$\widetilde{\operatorname{Eul}}(\mathcal{N}) := (-1)^{\left\lfloor \frac{1}{2} \# (i: w_i = 0) \right\rfloor} \prod_{i: w_i \neq 0} w_i .$$
(2.68)

Здесь  $\#(i: w_i = 0)$  обозначает мощность подмножества векторов нулевого веса.

Поэтому мы естественным образом определяем:

$$\overline{\operatorname{Eul}}_{\Lambda} := \overline{\operatorname{Eul}}(\mathcal{U}_{\Lambda}) . \tag{2.69}$$

Единственным оставшимся ингредиентом в этой конструкции является описание локуса гомоморфности представлений. Мы осуществим эту конструкцию, включив гомоморфизм  $\tau$ , как было установлено в разделе 2.1.3:

$$B_i^{(2)} \bigcirc \mathcal{V}_{\Lambda+\Box} \xrightarrow{\tau} \mathcal{V}_{\Lambda} \bigcirc B_i^{(1)} \quad . \tag{2.70}$$

В нашем случае линеаризованное соотношение гомоморфности представлений колчана (2.32) приобретает следующий вид:

$$\langle \tau \rangle \cdot \delta B_i^{(2)} + \delta \tau \cdot \langle B_i^{(2)} \rangle = \delta B_i^{(1)} \cdot \langle \tau \rangle + \langle B_i^{(1)} \rangle \cdot \delta \tau, \quad i = 1, 2, 3$$

Оно позволяет ввести гиперплоскость  $\Sigma$  в пространстве всех линейных деформаций  $\delta B_i$  и  $\delta \tau$ . В этом случае мы определяем касательное пространство к локусу гомоморфности как:

$$\mathcal{U}_{\Lambda,\Lambda+\Box} := (\mathcal{U}_{\Lambda} \cup \mathcal{U}_{\Lambda+\Box}) \cap \Sigma .$$
(2.71)

А соответствующие эйлеровы характеры имеют следующий вид:

$$\widetilde{\operatorname{Eul}}_{\Lambda,\Lambda+\Box} := \widetilde{\operatorname{Eul}}(\mathcal{U}_{\Lambda,\Lambda+\Box}) .$$
(2.72)

Мы находим, что полученные матричные элементы удовлетворяют следующей системе уравнений (подобно выражениям (4.45) - (4.49) в работе [117]):

$$\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box}\mathbf{F}_{\Lambda+\Box,\Lambda} = -\frac{1}{\epsilon_{1}\epsilon_{2}\epsilon_{3}} \operatorname{Res}_{z=\phi_{\Box}}\psi_{\Lambda}(z), \\
\frac{\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box_{1}}\mathbf{E}_{\Lambda+\Box_{1},\Lambda+\Box_{1}+\Box_{2}}}{\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box_{2}}\mathbf{E}_{\Lambda+\Box_{2},\Lambda+\Box_{1}+\Box_{2}}} = \varphi\left(\phi_{\Box_{2}} - \phi_{\Box_{1}}\right), \\
\frac{\mathbf{F}_{\Lambda+\Box_{1}+\Box_{2},\Lambda+\Box_{1}}\mathbf{F}\Lambda + \Box_{1},\Lambda}{\mathbf{F}_{\Lambda+\Box_{1}+\Box_{2},\Lambda+\Box_{2}}\mathbf{F}_{\Lambda+\Box_{2},\Lambda}} = \varphi\left(\phi_{\Box_{2}} - \phi_{\Box_{1}}\right), \\
\sum_{\pi\in S_{3}}\left(\phi_{\Box_{\pi(1)}} - 2\phi_{\Box_{\pi(2)}} + \phi_{\Box_{\pi(3)}}\right)\mathbf{E}_{\Lambda,\Lambda+\Box_{\pi(1)}}\times \\
\times \mathbf{E}_{\Lambda+\Box_{\pi(1)},\Lambda+\Box_{\pi(1)}+\Box_{\pi(2)}}\mathbf{E}_{\Lambda+\Box_{\pi(1)}+\Box_{\pi(2)},\Lambda+\Box_{\pi(1)}+\Box_{\pi(2)}+\Box_{\pi(3)}} = 0.$$
(2.73)

Подняв эти соотношения на генераторы e(z), f(z) и  $\psi(z)$ , определенные в (2.50), мы находим, что алгебра БПЗ в этом случае изоморфна  $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ . А само представление алгебры, определенное волновыми функциями БПЗ D-бран, определяет модуль Макмахона, где вектора помечены плоскими разбиениями [118].

#### 2.2 Сдвинутые колчанные янгианы

#### 2.2.1 Представления из подкристаллов

Назовем плавленные кристаллы, полученные в разделе 2.1.2, каноническими. В этом разделе мы построим представления колчанного янгиана, также параметризуемые плавленными кристаллами. Однако, эти кристаллы будут более общего вида, а именно подкристаллы  ${}^{\sharp}C$ , вырезанные из канонического кристалла  $C_0$ .

Построим представление, связанное с  ${}^{\sharp}C$ , в несколько этапов.

 Сначала мы разлагаем подкристалл <sup>♯</sup>C на суперпозицию нескольких канонических кристаллов, каждый из которых после соответствующего перевода имеет вес плюс/минус кратности. А именно, подкристалл <sup>♯</sup>C можно рассматривать как суперпозицию положительных/отрицательных кристаллов (см. рис. 2.3).

Сама процедура декомпозиции состоит из нескольких шагов. Предположим, из канонического кристалла  $C_0$  вырезается подкристалл  ${}^{\sharp}C$ . Нам хотелось бы определить координаты (относительно  $C_0$ ) стартовых атомов каждого положительного и отрицательного кристаллов, на которые распадается  ${}^{\sharp}C$ .

- 1.1. Стартовые атомы положительных кристаллов вблизи начала координат называются *порождающими*. Без ограничения общности мы перемещаем  ${}^{\sharp}C$  как можно ближе к началу координат  $C_0$  в направлении, ортогональном двумерной проекции, так, чтобы как можно больше порождающих атомов имело нулевую глубину (т. е. лежали на поверхности кристалла).
- 1.2. Положительные кристаллы, производимые порождающими атомами, в конце концов встретятся и начнут перекрываться внутри C<sub>0</sub>. Чтобы избежать многократного пересчета перекрывающейся области внутри <sup>‡</sup>C, нам нужно добавить «отрицательный» кристалл, начинающийся в точке их встречи, чтобы сократить избыточную часть. Когда область пе-

рекрытия представляет собой перекрытие  $n \ge 2$  положительных кристаллов, нам нужно добавить n - 1 копий отрицательных кристаллов, начиная с точки встречи этих n положительных кристаллов. Атом в точке встречи, то есть атом, возглавляющий отрицательный кристалл, будем называть *замедляющим*. Порядок замедляющего атома определяется как n - 1 – количество копий отрицательных кристаллов. Обратим внимание, что позиции, цвета и порядок замедляющих кристаллов фиксируются после указания позиций порождающих атомов. См. рис. 2.3(a).

- 1.3. Отрицательные кристаллы также могут встретиться и начать перекрываться в <sup>#</sup>C. В этом случае нам нужно добавить положительные кристаллы, чтобы устранить перекрытие отрицательных кристаллов. Стартовые атомы этих положительных кристаллов снова являются порождающими. Тогда эти вторичные положительные кристаллы могут пересечься, что побудит нас добавить вторичные отрицательные кристаллы и т. д. Эта процедура следует принципу включения-исключения и продолжается до тех пор, пока мы не определим все порождающие и замедляющие атомы. См. рисунок 2.3(б).
- 1.4. Наконец, можно остановить рост <sup>#</sup>C в определенных направлениях, добавив отрицательные кристаллы, начиная с соответствующих мест. Атом, порождающий такой отрицательный кристалл, мы назовем *обрезающим*, поскольку кристалл <sup>#</sup>C перестает расти на месте этого атома. См. рис. 2.3(в).

С помощью этой процедуры мы можем представить любой подкристалл  $^{\sharp}C$  такими линейными суперпозициями (возможно, бесконечными) сдвигов канонических кристаллов  $C_0$ . Наконец, заметим, что для определения под-кристалла  $^{\sharp}C$  нам нужно только указать набор его порождающих и обрезающих атомов, поскольку набор замедляющих определяется положениями порождающих атомов.

2. Далее мы переводим разложение подкристалла  ${}^{\sharp}\mathcal{C}$  в функции заряда ос-



Рисунок 2.3 – Подкристал <sup>#</sup>С в каноническом кристалле может быть представлен как суперпозиция положительны и отрицательных канонических кристаллов.

новного состояния соответствующего представления, обозначаемые  ${}^{\sharp}\psi_0^{(a)}(z)$ для  $a \in Q_0$ .

Подкристалл  ${}^{\sharp}C$  соответствует основному состоянию представления  ${}^{\sharp}$ Rер сдвинутого колчаного янгиана Y(Q, W, s), где пара (Q, W) взаимно однозначно отображается в канонический кристалл  $C_0$ , а сдвиг **s** определяется формой подкристалл  ${}^{\sharp}C$ .

Рассмотрим конфигурации плавленных кристаллов из подкристалла  ${}^{\sharp}C$ , т.е. дополнения кристаллических конфигураций с некоторыми атомами, расплавленными с поверхности  ${}^{\sharp}C$ . Вместе они образуют возбужденные состояния представления  ${}^{\sharp}$ Rep. Все эти состояния можно получить, итеративно применяя оператор рождения  $e^{(a)}(z)$  к основному состоянию. Следовательно, функции заряда основного состояния  ${}^{\sharp}\psi_0^{(a)}(z)$  должны кодировать форму подкристалла  ${}^{\sharp}C$ .

Посмотрим, как три типа ведущих атомов (порождающие, замедляющие и

обрезающие) отображаются в выражении для  ${}^{\sharp}\psi_{0}^{(a)}(z).$ 

2.1. При применении оператора рождения  $e^{(a)}(z)$  к основному состоянию атомы, которые можно добавить, являются порождающими, каждый из которых дает точку роста положительного кристалла. Следовательно, координатная функция каждого порождающего атома дает полюс в  $^{\sharp}\psi_{0}^{(a)}(z)$ :

$$\mathfrak{p}^{(a)} = h(a)$$
, когда  $a$  – порождающий атом. (2.74)

Когда у  ${}^{\sharp}\psi_0^{(a)}(z)$  несколько полюсов, кристалл начинается с этих порождающих атомов и растет из них одновременно.

2.2. Каждый замедляющий атом порядка n порождает ноль порядка n в  ${}^{\sharp}\psi_0^{(a)}(z)$ :

$$z_{-}{}^{(a)} = h(a),$$
 когда  $a$  – замедляющий атом .  $(2.75)$ 

2.3. Каждый обрезающий атом порождает простой ноль в  ${}^{\sharp}\psi_0^{(a)}(z)$ :

$$z_{-}^{(a)} = h(a),$$
 когда  $a$  – обрезающий атом. (2.76)

Объединив все это вместе, мы получаем зарядовую функцию основного состояния:

$${}^{\sharp}\psi_{0}^{(a)}(z) = \frac{\prod_{\beta=1}^{\mathbf{s}_{-}^{(a)}}(z - z_{-\beta}^{(a)})}{\prod_{\alpha=1}^{\mathbf{s}_{+}^{(a)}}(z - \mathbf{p}_{\alpha}^{(a)})}, \qquad (2.77)$$

где  $\{\mathfrak{p}_{\alpha}^{(a)}\}$  соответствует множеству всех порождающих атомов цвета a, а  $\mathbf{s}_{+}^{(a)}$  – количество элементов этого набора,  $\{\mathbf{z}_{-\beta}^{(a)}\}$  соответствует набору всех замедляющих (кратность которых задана порядком) и обрезающих атомов цвета a и  $\mathbf{s}_{-}^{(a)}$  – количество элементов этого набора.

3. Теперь мы можем использовать те же формулы (2.48) и (2.51), заменяя зарядовую функцию основного состояния для канонического кристалла новой функцией  ${}^{\sharp}\psi_0^{(a)}(z)$ , чтобы определить представление  ${}^{\sharp}$ Rep сдвинутого колчанного янгиана Y(Q, W, s), где сдвиг  $s = \{s^{(a)}\}$  задается

$$\mathbf{s}^{(a)} \equiv \mathbf{s}^{(a)}_{+} - \mathbf{s}^{(a)}_{-} \,. \tag{2.78}$$

#### 2.2.2 Неприводимость

Представления, которые мы построили в предыдущем подразделе, определяя подкристалл через положения его порождающих, замедляющих и обрезающих атомов, в общем случае приводимы. Прежде всего, подкристалл может иметь множество связных компонент. В оставшейся части этого раздела мы сосредоточимся на тех подкристаллах, которые односвязны. Однако, даже для такого односвязного подкристалла  $^{\sharp}C$  соответствующее представление  $^{\sharp}$ Rep все еще может быть приводимо.

Чтобы убедиться в этом, давайте рассмотрим пример на рис. 2.4. Внутри канонического кристалла  $C_0$ , порождающий атом которого окрашен в синий цвет, находится отрицательный кристалл, увенчанный обрезающим атомом в позиции  $\Box_2$ . Это создает ноль  $z = h(\Box_2)$  для зарядовой функции основного состояния.



Рисунок 2.4 – Неприводимость представления требует, чтобы обрезающие атомы имели относительную нулевую глубину. На данном рисунке это условие нарушено, что приводит к трем неприводимым компонентам.

Теперь важным моментом является то, что отношения между атомами и функцией заряда основного состояния не являются взаимно однозначными (даже если мы предполагаем, что эквивариантные параметры общего вида). Это связано с тем, что эквивариантные параметры удовлетворяют условию цикла. А именно, ноль  $z = h(\Box_2)$  неизбежно означает, что есть нули, соответсвующие всем атомам  $\Box_3$ , двумерная проекция которых совпадает с  $\Box_2$ .

Становится ясным, что это может сделать представление приводимым.

Рассмотрим путь, показанный оранжевым цветом на рис. 2.4. Этот путь эквивалентен другому пути, показанному зеленым цветом, который проходит через атомы, соответствующие нулям функции заряда основного состояния. Это означает, что путь дает ноль в обоих направлениях, что делает представление приводимым.

Определим теперь неприводимую компоненту односвязного подкристалла. Без ограничения общности (поскольку важной информацией о подкристалле  ${}^{\sharp}C$ является его форма) мы можем использовать трансляционную инвариантность для перемещения подкристалла  ${}^{\sharp}\mathcal{C}$  как можно ближе к началу канонического кристалла  $C_0$ , так, чтобы как можно больше порождающих атомов имели нулевую глубину. Если обрезающий атом имеет глубину больше нуля, атомы с той же координатной функцией  $h(\Box_2)$ , но с меньшей глубиной, мы будем называть «тенями» обрезающего атома. Когда мы выращиваем кристалл, применяя повышающие операторы  $e^{(a)}(z)$  к основному состоянию, мы сначала попадаем в тень обрезающего атома с нулевой глубиной, и рост кристалла в этом направлении на этом останавливается. Именно нулевая тень обрезающего атома определяет первую неприводимую компоненту подкристалла. Отслоив эту первую неприводимую компоненту, мы можем снова начать рост кристалла, и тень на глубине один определит вторую неприводимую компоненту. Повторяя этот путь до тех пор, пока мы не достигнем истинного обрезающего атома, мы увидим, что наличие обрезающего атома глубиной *n* означает, что существует (по крайней мере) n+1 неприводимых компонент подкристалла. В примере, показанном на рис. 2.4, обрезающий атом (красного цвета) имеет глубину два, поэтому есть две тени (фиолетового цвета) с нулевой глубиной и глубиной, равной единице. Следовательно, приводимое представление, которое дает подкристалл на рис. 2.4, имеет три неприводимых компоненты.

#### 2.2.3 Обрамление колчанов

Обрамление колчана определяется добавлением к исходному колчану Q новой вершины (называемой *узлом обрамления*) и новых стрелок между новой

вершиной и существующими вершинами (1) и добавлением соответствующих новых мономиальных членов суперпотенциала W (2). Вершина a, соединенная с обрамляющим узлом f некоторой стрелкой  $f \rightarrow a$ , называется обрамленной вершиной или обрамленным узлом.

Для случая канонического кристалла  $C_0$  обрамленный колчан прост: добавляется один дополнительный узел f, т. е. узел обрамления, и стрелка  $\iota$  из f в конкретную вершину a, т.е. обрамленный узел. Когда мы конструируем кристалл, мы рассматриваем набор путей начиная с обрамленного узла, и это обеспечивает рост кристалла, начинающийся с атома цвета a. Такое обрамление мы называем *каноническим обрамлением*.

Для обычного подкристалла  ${}^{\sharp}C$  каждый полюс зарядовой функции основного состояния  ${}^{\sharp}\psi_0^{(a)}(z)$  представлен в обрамленном колчане  ${}^{\sharp}Q$  стрелкой из узла обрамления f в обрамленный узел a. Для общего выражения  $\{{}^{\sharp}\psi_0^{(a)}(z)\}$  с несколькими полюсами это означает, что, когда путь начинается от обрамленных узлов, существует несколько вариантов выбора стрелок на начальном этапе, а это, в свою очередь, означает, что рост кристаллов начинается в нескольких местах. Заряды обрамляющих стрелок следует приписывать в соответствии с зарядами порождающих атомов.

Нули  ${}^{\sharp}\psi_{0}^{(a)}(z)$  представлены стрелками от вершины *a* обратно к обрамляющему узлу *f*. Кроме того, для нулей  ${}^{\sharp}\psi_{0}^{(a)}(z)$  нам нужно добавить соответствующие члены суперпотенциала, чтобы рост кристалла действительно приостанавливался или прерывался на этом. А именно, чтобы реализовать отрицательный кристалл, мы добавляем стрелку из обрамленного узла *a*, идущую обратно к обрамляющему узлу *f*, а также новый суперпотенциальный член, включающий ее. Эти стрелки играют роль множителей Лагранжа. В то время, как добавление вновь введенного поля *q* потенциально расширяет вакуумное пространство модулей теории, условие *F*-члена, которое следует из взятия производной суперпотенциала по другим полям, сводится к условию в изначальной теории, когда *q* = 0. Нетривиальное утверждение состоит в том, что в подходящей камере пространства модулей (т.е. при подходящем выборе параметров устойчивости) это обеспечивается автоматически.

Физически обрамленный узел f представляет собой некомпактные D-браны, заполняющие некоторые некомпактные циклы торического трехмерного многообразия Калаби-Яу X. Например, узлу обрамления соответствует D6-брана, заполняющая весь X. Поскольку торическое трехмерное многообразие Калаби-Яу X само по себе некомпактно, его пространство модулей БПЗ также некомпактно, поэтому нам нужна процедура регуляризации, где мы начинаем с компактного многообразия Калаби-Яу, а затем переходим к пределу разделения (подобно [119]). Поскольку в конце этого процесса D6-брана некомпактна, калибровочное поле на D6-бране становится нединамическим и приводит к ароматической симметрии теории.

Аналогично, эффект добавления некомпактных D4- и D2-бран также может быть реализован путем выбора обрамления  $\sharp$  для ( ${}^{\sharp}Q, {}^{\sharp}W$ ).

#### 2.2.4 Приводимые представления и ИК-сингулярности

ИК-сингулярности, о которых мы упоминали ранее, являются стандартными сингулярностями для низкоэнергетических эффективных действий. Массы эффективных частиц являются функциями начальных параметров и параметров ренормгруппы и, в общем случае, не имеют ограничений. Пространство параметров может содержать определенные локусы, в которых массы некоторых частиц становятся равными нулю. Иногда безмассовая частица вносит вклад в качестве резонансного полюса в матрицу рассеяния при низких энергиях и, таким образом, может создавать конденсат и сингулярность в эффективном действии. В этом подразделе мы хотели бы представить наши аргументы в пользу того, что приводимость представления алгебры БПЗ тесно связана с появлением безмассовых частиц в низкоэнергетическом спектре, разрушающих изолированные кристаллические вакуумы.

### $Пример: \mathbb{C}^3$

Сначала проиллюстрируем это явление на простейшем примере колчана  $\mathbb{C}^3$  со стандартным суперпотенциалом:

$${}^{\sharp}Q = \prod_{R} \stackrel{S}{\longrightarrow} B_{1,2,3} , \qquad (2.79)$$
$${}^{\sharp}W = \operatorname{Tr} B_1[B_2, B_3].$$

По сравнению с канонически обрамленным колчаном  $(Q, W)_0$  для  $\mathbb{C}^3$ , обрамленный колчан ( ${}^{\sharp}Q, {}^{\sharp}W$ ) имеет дополнительную стрелку, идущую от калибруемого узла обратно к обрамляющему узлу  $\Box$ . Суперпотенциал W не изменяется благодаря этой дополнительной стрелке. А именно, существуют две стрелки R и S, соединяющие узел обрамления  $\Box$  с калибровочным узлом. Суперпотенциал не зависит ни от R, ни от S, поэтому эквивариантные веса этих полей не ограничены. Зарядовая функция основного состояния в этом случае выглядит следующим образом:

$${}^{\sharp}\psi_0(z) = \frac{z+h_S}{z-h_R} \ . \tag{2.80}$$

Кристалл  ${}^{\sharp}C$ , соответствующий ( ${}^{\sharp}Q, {}^{\sharp}W$ ), представляет собой канонический  $\mathbb{C}^3$  кристалл  $\mathcal{C}_0$ , заполняющий октант в трехмерном пространстве.

Приводимость этого представления зависит от значения комплексного параметра  $h_R + h_S$ . Рассмотрим две конфигурации расплавленного кристалла: пустую  $|\emptyset\rangle$  и содержащую один атом  $|\Box\rangle$ . Простой расчет дает матричный элемент повышающего оператора  $e_0$ :

$$\langle \Box \mid e_0 \mid \varnothing \rangle^2 = h_R + h_S . \tag{2.81}$$

Когда  $h_R + h_S$  – комплексное число общего вида, не принадлежащее двумерной кристаллической решетке, представление неприводимо. Однако если  $h_R + h_S = 0$ , представление становится приводимым, причем  $|\emptyset\rangle$  является одномерной неприводимой компонентой.

С другой стороны, в конфигурации, связанной с  $|\Box\rangle$ , мы имеем следующие

вакуумные средние значения полей:

$$\langle B_i \rangle = 0 , \quad \langle R \rangle = 1 , \quad \langle S \rangle = 0 , \quad \langle \Phi \rangle = h_R , \qquad (2.82)$$

таким образом квантовая поправка  $\delta R$  для сконденсированного поля R безмассовая, удовлетворяющая условию конденсации:

$$m_{\mathbb{C}}(\delta R) = \langle \Phi \rangle - h_R = 0 . \qquad (2.83)$$

Квантовая поправка  $\delta S$  к киральному полю S параметризует эффективное мезонное поле с эффективной киральной массой, определяемой следующим выражением:

$$m_{\mathbb{C}}(\delta S) = -\langle \Phi \rangle - h_S = -(h_R + h_S) = -\langle \Box \mid e_0 \mid \varnothing \rangle^2 .$$
(2.84)

Таким образом, мы видим, что ситуация, когда представление становится приводимым и векторы  $|\emptyset\rangle$  и  $|\Box\rangle$  принадлежат двум непересекающимся неприводимым компонентам, соответствует ИК-особенности, обусловленной эффективной безмассовой мезонной частицей.

#### Общий случай

Подобную простую логику, представленную ранее, можно распространить на общую ситуацию, когда отрицательный кристалл расположен глубже границ положительных кристаллов (см. рис. 2.5). В частности, мы увидим, что такая ситуация приводит к фактически новой безмассовой частице в ИК-пределе.



Рисунок 2.5 – Схематическое изображение приводимого кристаллического представления.

Рассмотрим путь, соединяющий ведущий атом положительного кристалла (атом с красной точкой на рис. 2.5) с атомом отрицательного кристалла (синяя точка на рис. 2.5). Разложим этот путь на два отрезка: (1) путь, идущий вдоль положительной границы кристалла, обозначаемый M, и (2) путь, идущий внутрь кристалла, обозначаемый D. Обозначим киральное поле, связанное со стрелкой, идущей от калибровочного узла обратно к узлу обрамления и соответствующее порождающему атому отрицательного кристалла, как S. Поправка к суперпотенциалу за счет стрелки S принимает следующий вид:

$$\delta W = \operatorname{Tr} S \cdot D \cdot M \ . \tag{2.85}$$

Эта модель может описывать как сценарии, когда отрицательный кристалл располагается на границе положительного кристалла, так и сценарий, когда он находится глубоко внутри положительного кристалла. В первом случае отображение *D* просто задается единицей алгебры путей колчана.

Мы начинаем выращивать кристалл K как обычно, пока он не достигнет атома, расположенного в M. Для такого кристалла поле M конденсируется и приобретает среднее значение

$$\langle M \rangle \neq 0 , \qquad (2.86)$$

следовательно, его комплексная масса  $m_{\mathbb{C}}(M) = 0$ . После спонтанного нарушения симметрии квантовые степени свободы  $\delta M$  приобретают массу согласно механизму Хиггса. Также мы можем сказать, что соответствующее поле удаляется из ИК-мезонного пространства (2.18) в результате  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ -действия. Обратим внимание, что  $m_{\mathbb{C}}(D) = 0$ , поскольку это поле не смещает положение атома, спроецированное на двумерное весовое пространство. Из условия цикла (2.30) на суперпотенциал мы получаем:

$$m_{\mathbb{C}}(S) = -m_{\mathbb{C}}(D) - m_{\mathbb{C}}(M) = 0.$$
 (2.87)

Вклад суперпотенциала корректирует эту нулевую массу следующим образом:

$$|\delta m_{\mathbb{C}}(S)|^{2} \sim \left|\frac{\partial \delta W}{\partial S}\right|^{2} \sim |\langle D\rangle|^{2} \cdot |\langle M\rangle|^{2} \sim |\langle D\rangle|^{2} , \qquad (2.88)$$

где в последнем соответствии в (2.88) мы использовали тот факт, что M имеет ненулевое вакуумное среднее.

Теперь рассмотрим два сценария по отдельности. В первом сценарии, когда отрицательный кристалл расположен на границе положительного кристалла и, следовательно, D представляет собой просто единицу в алгебре пути колчана, можно заменить D просто комплексным числом, поэтому его среднее не равно нолю, а из (2.88) поле S имеет ненулевую эффективную массу. Во втором сценарии, когда отрицательный кристалл помещается глубже внутри положительного кристалла, в соответствии с правилом плавления мы всегда можем выбрать конфигурацию расплавленного кристалла К такую, чтобы она не содержала атом  $D \cdot M$ . В этом случае  $\langle D \rangle = 0$  и поле S эффективно безмассово в ИК.

#### 2.3 Обобщения колчанных янгианов

#### 2.3.1 Вихри на эллиптических кривых

Для обобщения алгебраических структур мы рассмотрим компактификацию эффективной четырехмерной  $\mathcal{N} = 1$  теории, отвечающей колчану  $\mathcal{Q}$ , не сразу в одномерную квантово-механическую теорию, а на многообразие  $\Sigma \times \mathbb{R}$ , где  $\Sigma$  – эллиптическая кривая, двумерный тор с модулярным параметром  $\tau$ . В результате получается трехмерная  $\mathcal{N} = 2$  колчанная теория поля. При компактификации только компонента  $A_3$  четырехмерного вектор-потенциала переходит в скаляр X.

Для краткости будем обозначать набор узлов колчана как  $\mathcal{Q}_0$ , набор стрелок – как  $\mathcal{Q}_1$ .

Вакуумное пространство модулей описывается системой уравнений:

$$F_{12}^{(v)} = r^{(v)} - \sum_{w \in Q_0} \left( \sum_{I: w \to v} q_I q_I^{\dagger} - \sum_{J: v \to w} q_J^{\dagger} q_J \right), \ v \in \mathcal{Q}_0 ,$$

$$X^{(w)} q_{(I: v \to w)} - q_{(I: v \to w)} X^{(v)} = 0, \ I \in \mathcal{Q}_1 ,$$

$$\partial_z q_{(I: v \to w)} + i A_z^{(w)} q_{(I: v \to w)} - i q_{(I: v \to w)} A_z^{(v)} + h_I \phi_{(I: v \to w)} = 0, \ I \in \mathcal{Q}_1 ,$$

$$\partial_{q_I} W(q) = 0, \ I \in \mathcal{Q}_1 .$$

$$(2.89)$$

Первое и третье уравнения в системе (2.89) задают уравнения вихрей на эл-

липтической кривой. Четвертое уравнение в наборе представляет собой просто ограничения F-членов для скаляров киральных мультиплетов.

Пространство решений уравнений (2.89) по модулю калибровочной эквивалентности дает пространство модулей

$$\mathcal{M} = (2.89)/\mathcal{G} , \qquad (2.90)$$

которое мы называем пространством модулей вихрей. Гильбертово пространство БПЗ – это эквивариантные *Q*-когомологии пространства модулей:

$$\mathscr{H}_{\rm BPS} = H^*_{\mathcal{G}}\left(\mathcal{M}, \mathcal{Q}\right) \ . \tag{2.91}$$

Собственных значения гамильтониана ограниченны снизу:

$$\mathcal{H} \ge Z , \qquad (2.92)$$

где выражение для центрального заряда дается соотношением:

$$Z = \sum_{v \in Q_0} r^{(v)} \int F_{12}^{(v)} d^2 x .$$
(2.93)

Существует предел Брэдлоу (см., например, [120; 121]) на число вихрей на компактной поверхности:

$$\sum_{v \in Q_0} \int \operatorname{Tr} F_{12}^{(v)} d^2 x \le \left(\sum_{v \in Q_0} r^{(v)}\right) \times \Pi$$
лощадь поверхности . (2.94)

Гильбертово пространство (2.91) естественно градуировано решеткой центральных зарядов, которая представляет собой решетку вихревых квантовых чисел. Предел Брэдлоу (2.94) указывает на то, что число градуированных компонент в общем случае конечно.

Гильбертово пространство БПЗ можно рассчитать обычными методами локализации (см. раздел 1.1.1), где волновые функции будут представлены эффективными гауссовыми флуктуациями вокруг классического вакуума. Эту процедуру можно систематизировать в подходе вильсоновской перенормировки, где перенормировка оказывается точной в одной петле. Линеаризованные моды отклонения будут организованы в обычные башни Калуцы-Клейна (КК) мод намотки, частота которых определяется следующим эффективным выражением:

$$\omega = p_x n + p_y m +$$
ароматический заряд. (2.95)

В результате компактификации вдоль циклов эллиптической кривой либо  $p_x$ , либо  $p_y$  стремятся к бесконечности, так что эффективные ароматические заряды для соответствующих высших мод обмотки становятся больше, чем перенормировочное обрезание. Таким образом, эти способы не способствуют эффективному действию. Во время этой процедуры площадь эллиптической кривой, равная  $4\pi^2 (p_x p_y)^{-1}$ , схлопывается и не допускает вихревых решений за счет предела (2.94).

Поэтому мы предполагаем, что эллиптическая и тороидальная колчанные алгебры БПЗ соответствуют градуированной компоненте нулевой завихренности гильбертова пространства БПЗ.

Далее мы рассмотрим гильбертово пространство БПЗ с нулевой завихренностью и построим представления для тригонометрического  $\mathsf{T}_{\beta}(\mathcal{Q})$  и эллиптического  $\mathsf{E}_{\tau}(\mathcal{Q})$  обобщений алгебры колчанного янгиана  $Y(\mathcal{Q})$ ; мы вернемся к обсуждению вклада вихрей позже в разделе 2.3.3.

### 2.3.2 БПЗ алгебра в подпространстве нулевой завихренности

Функционал энергии положительно определен для конфигурации БПЗ и содержит квадрат напряженности поля:

$$\mathscr{E} = \sum_{v \in Q_0} \int d^2 x \, \mathrm{Tr} \, \left| F_{12}^{(v)} \right|^2 + \ldots = Z \,. \tag{2.96}$$

Поэтому для нулевой компоненты завихренности гильбертова пространства БПЗ с Z = 0 единственными решениями дифференциальных уравнений (2.89) являются конфигурации постоянного поля, а (2.89) сводится к системе алгебраических уравнений для средних значений (и, следовательно, с опущенными zпроизводными):

$$r^{(v)} - \sum_{w \in \mathcal{Q}_0} \left( \sum_{I: w \to v} q_I q_I^{\dagger} - \sum_{J: v \to w} q_J^{\dagger} q_J \right) = 0, \ v \in \mathcal{Q}_0 ,$$
  

$$X^{(w)} q_{(I: v \to w)} - q_{(I: v \to w)} X^{(v)} = 0, \ I \in \mathcal{Q}_1 ,$$
  

$$i A_z^{(w)} q_{(I: v \to w)} - i q_{(I: v \to w)} A_z^{(v)} + h_I q_{(I: v \to w)} = 0, \ I \in \mathcal{Q}_1 ,$$
  

$$\partial_{q_I} W(q) = 0, \ I \in \mathcal{Q}_1 .$$

$$(2.97)$$

Тогда наши построения будут во многом похожи на случай квантовой механики, который мы обсуждали в разделе 2.1. В частности, неподвижные точки тора пространства модулей задаются трехмерными кристаллами.

Используя соответствие Нарасимхана-Шешадри-Хитчина-Кобаяши, мы можем упростить уравнения, комплексифицировав калибровочные преобразования. Это дает пространство модулей представлений колчана:

$$\Re\left(\mathcal{Q}, W, \vec{d}\right) := \begin{cases} V_{v \in \mathcal{Q}_0}, \ d_v = \dim V_v \\ q_{(a:v \to w) \in \mathcal{Q}_1} \in \operatorname{Hom}(V_v, V_w) \\ \partial_{q_a} W = 0 \end{cases} \middle\} / \prod_{v \in \mathcal{Q}_0} \operatorname{GL}(d_v, \mathbb{C}) \ . \tag{2.98}$$

Как и в разделе 2.1.2, мы рассмотрим большие значения параметров устойчивости  $r_v$  и ИК эффективную теорию, в которой проинтегрированы тяжелые степени свободы. Этот процесс оставляет эффективное мезонное пространство:

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{IR}} = \bigoplus_{a=1}^{N_{\mathrm{meson}}} \{ \phi_a, h_a \} .$$
(2.99)

Нас интересуют сектора БПЗ, где волновая функция аннигилируется эффективным суперзарядом  $\bar{Q}_2^{(\text{eff})}$ , который в терминах мезонных полей имеет следующий вид:

$$\bar{Q}_{\dot{2}}^{(\text{eff})} = \sum_{a=1}^{N_{\text{meson}}} \int d^2 z \left[ \delta \bar{\phi}^a \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}_a} + \iota_{\delta/\delta\phi_a} \left( \partial_z \phi_a + h_a \phi_a \right) \right] , \qquad (2.100)$$

где мы заменили фермионные поля подходящими формами на кокасательном расслоении к полевому конфигурационному пространству. Хотя это выражение

суперзаряда включает функциональные производные, мы можем упростить его, если разложим поля в ортогональный базис двоякопериодических функций:

$$\phi(x,y) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \phi_{m,n} e^{2\pi i (mx+ny)} , \qquad (2.101)$$

где мы параметризуем эллиптическую кривую с модулем au следующим образом:

$$\frac{a\tau}{a} \frac{z = a(x + \tau y)}{a}, \qquad (2.102)$$

$$\frac{a\tau}{a} = \frac{1}{2i a \operatorname{Im} \tau} (\partial_y - \overline{\tau} \partial_x) .$$

Полученный суперзаряд разлагается по модам как

$$\bar{\mathcal{Q}}_{2}^{(\text{eff})} \sim \sum_{a=1}^{N_{\text{meson}}} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left( d\bar{\phi}_{a,m,n} \frac{\partial}{\partial\bar{\phi}_{a,m,n}} + \omega_a(m,n) \iota_{\partial/\partial\phi_{a,m,n}} \right) , \qquad (2.103)$$

где эффективные частоты  $\omega_a(m,n)$  определяются выражением

$$\omega_a(m,n) = \frac{\pi(n-\bar{\tau}m)}{a\,\operatorname{Im}\tau} + h_a \,. \tag{2.104}$$

Как и в разделе 2.1.2, мы отождествляем эффективные волновые функции БПЗ в неподвижных точках с классами Эйлера кокасательных расслоений, а представитель Тома для такого класса Эйлера задается характером:

$$\operatorname{Eul}(\mathfrak{R}_{\operatorname{IR}}) \sim \prod_{a=1}^{N_{\operatorname{meson}}} \prod_{m,n\in\mathbb{Z}} \omega_a(m,n) . \qquad (2.105)$$

Теперь вклад одного мезона выглядит следующим образом:

$$\prod_{m,n\in\mathbb{Z}}\omega_a(m,n) \xrightarrow{\zeta\text{-peryляризация}} \vartheta_{11}\left(\frac{h_a\,\operatorname{Im}\tau}{\pi}\Big|\,\bar{\tau}\right) \sim \zeta(h_a) \,. \tag{2.106}$$

Здесь мы использовали нечетную тета-функцию Якоби:

$$\vartheta_{11}(z|\tau) := -2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi z \prod_{k=0}^{\infty} (1-q^{2k}) \left(1-2q^{2k} \cos 2\pi z + q^{4k}\right), \quad q = e^{\pi i \tau} . \quad (2.107)$$

Заметим, что вычисляемый нами класс Эйлера определяется киральным определителем Дирака на римановой поверхности. Строго говоря, эта величина не является периодическим голоморфным калибровочно-инвариантным скаляром, как предполагает наивная формула произведения (2.106). Часть симметрий нарушается  $\zeta$ -регуляризацией. Регуляризация выбирается таким образом,

что результатом является голоморфное сечение голоморфного линейного расслоения на якобиане тора [122], таким образом,  $\zeta(z)$  приобретает свойства, которые будут иметь для нас решающее значение, как мы вскоре увидим:  $\zeta(z)$  – голоморфная нечетная функция.

До сих пор мы фокусировались на трехмерных суперсимметричных  $\mathcal{N} = 2$ колчанных калибровочных теориях на эллиптической кривой. Однако, теперь ясно, что такая же дискуссия будет идти параллельно и для двумерной компактификации на окружность с суперсимметрией  $\mathcal{N} = (2, 2)$ , или для одномерной  $\mathcal{N} = 4$  квантовой механики; такие компактификации размерностей приводят к сокращению циклов эллиптической кривой, которые сводят тета-функцию к гиперболической синусоидальной функции (для двух измерений) и линейной функции (для одного измерения), когда оба или один из циклов сжимаются соответственно. В результате мы получаем иерархию компактификаций, изображенную на рис. 2.6.

$$\begin{bmatrix} \mathsf{E}_{\tau}(Q,W) & \text{разм.} & \mathsf{T}_{\beta}(Q,W) & \text{разм.} & \mathsf{Y}(Q,W) \\ & & \stackrel{\text{ред.}}{\longrightarrow} & & & \bullet \\ \mathbf{D8}\text{-D6}\text{-D4}\text{-D2}\text{-D0} & & & & \bullet \\ \vartheta_{11}(z|\tau) & & 2\sinh(\beta z/2) & & z \\ 3 \text{ изм. } \mathcal{N} = 2 & & 2 \text{ изм. } \mathcal{N} = (2,2) & 1 \text{ изм. } \mathcal{N} = 4 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{торическое многообразие} \\ \text{Калаби-Яу} \end{pmatrix}$$

Рисунок 2.6 – Иерархия редукций эллиптической кривой и алгебр БПЗ.

Следуя этому наблюдению, мы предлагаем общее выражение для регуляризованного класса Эйлера для мезонного пространства:

$$\operatorname{Eul}_{\zeta}(\mathfrak{R}_{\operatorname{IR}}) := (-1)^{\left\lfloor \sum_{a:h_a=0}^{\infty} \frac{1}{2} \right\rfloor} \prod_{a:h_a \neq 0} \zeta(h_a) , \qquad (2.108)$$

где функция  $\zeta$  в зависимости от выбора алгебры соответствует z,  $\sinh \beta z$  или  $\vartheta_{11}(z|\tau)$ (что эквивалентно размерности калибровочной теории).

Мы определяем генераторы алгебры БПЗ как операторы модификации Гекке для расслоений на D-бранах подобно разделу 2.1.3. В результате действия модификаций Гекке представления колчана вкладываются друг в друга:

$$\Re\left(Q, W, \vec{d}\right) \xleftarrow{e}{f} \Re\left(Q, W, \vec{d} + 1_v\right) , \qquad (2.109)$$

где  $1_v$  – простой размерный вектор с единицей в позиции  $v \in Q_0$  и нулями в остальных местах. Под *вложением* мы подразумеваем, что существует *гомо-морфизм* из большего пространства в меньшее. Для неподвижных точек представления этот гомоморфизм возможен только в том случае, если один из соответствующих кристаллов вложен в другой кристалл.

Определим матричные элементы алгебры БПЗ следующим образом:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{K},\mathrm{K}+\Box} := \frac{\mathrm{Eul}_{\zeta} \left( \mathfrak{R}_{\mathrm{IR}}(\mathrm{K}) \right)}{\mathrm{Eul}_{\zeta} \left( \mathfrak{R}_{\mathrm{IR}}(\mathrm{K},\mathrm{K}+\Box) \right)} ,$$
  
$$\mathbf{F}_{\mathrm{K},\mathrm{K}-\Box} := \frac{\mathrm{Eul}_{\zeta} \left( \mathfrak{R}_{\mathrm{IR}}(\mathrm{K}) \right)}{\mathrm{Eul}_{\zeta} \left( \mathfrak{R}_{\mathrm{IR}}(\mathrm{K}-\Box,\mathrm{K}) \right)} .$$
 (2.110)

Для так определенных коэффициентов мы замечаем, что при условии, что Eul $_{\zeta}$  – обобщенный класс Эйлера (2.108) для *произвольной* нечетной функции  $\zeta$ :

$$\zeta(-z) = -\zeta(z) , \qquad (2.111)$$

матричные коэффициенты удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathrm{K}+\bar{e}_{1},\mathrm{K}+\bar{e}_{1}+\bar{b}_{2}}\mathbf{F}_{\mathrm{K}+\bar{e}_{1}+\bar{b}_{2},\mathrm{K}+\bar{b}_{2}} &= \mathbf{F}_{\mathrm{K}+\bar{e}_{1},\mathrm{K}}\mathbf{E}_{\mathrm{K},\mathrm{K}+\bar{b}_{2}}, \\
\frac{\mathbf{E}_{\mathrm{K},\mathrm{K}+\bar{b}_{2}}\mathbf{E}_{\mathrm{K}+\bar{b}_{2},\mathrm{K}+\bar{a}_{1}+\bar{b}_{2}}}{\mathbf{E}_{\mathrm{K},\mathrm{K}+\bar{e}_{1}}\mathbf{E}_{\mathrm{K}+\bar{e}_{1},\mathrm{K}+\bar{a}_{1}+\bar{b}_{2}}} &= \tilde{\varphi}^{a \Leftarrow b} \left(h_{\bar{e}_{1}} - h_{\bar{b}_{2}}\right), \\
\frac{\mathbf{F}_{\mathrm{K}+\bar{e}_{1}+\bar{b}_{2},\mathrm{K}+\bar{b}_{2}}\mathbf{F}_{\mathrm{K}+\bar{b}_{2},\mathrm{K}}}{\mathbf{F}_{\mathrm{K}+\bar{e}_{1}+\bar{b}_{2},\mathrm{K}+\bar{e}_{1}}\mathbf{F}_{\mathrm{K}+\bar{e}_{1},\mathrm{K}}} &= \tilde{\varphi}^{a \Leftarrow b} \left(h_{\bar{e}_{1}} - h_{\bar{b}_{2}}\right), \\
\mathbf{E}_{\mathrm{K},\mathrm{K}+\bar{e}}\mathbf{F}_{\mathrm{K}+\bar{e}_{1},\mathrm{K}} &= \lim_{t \to 0} \zeta(t) \ \tilde{\Psi}_{\mathrm{K}}^{(a)} \left(t + h_{\bar{e}}\right),
\end{aligned}$$

$$(2.112)$$

где используются следующие функции:

$$\tilde{\varphi}^{a \Leftarrow b}(z) = (-1)^{\delta_{a,b}} \frac{\prod_{I \in \{a \to b\}} \zeta \left(-z - h_I\right)}{\prod_{J \in \{b \to a\}} \zeta \left(z - h_J\right)} , \qquad (2.113)$$

а также зарядовая функция:

$$\tilde{\Psi}_{\mathbf{K}}^{(a)}(z) = \left(\prod_{I \in \{a \to a\}} \frac{1}{-\zeta(h_I)}\right) \times \prod_{[\underline{b}] \in \mathbf{K}} \tilde{\varphi}^{a \Leftarrow b} \left(z - h_{[\underline{b}]}\right) .$$
(2.114)

#### 2.3.3 Вихри и четырехмерные кристаллы

Динамика вихрей достаточно богата [106; 112; 120; 121; 123—127] и заслуживает отдельного обсуждения. Включение состояний БПЗ с ненулевой завихренностью в динамику нашей системы с очевидностью расширит алгебру БПЗ. Однако, как мы уже видели, такие топологические конфигурации являются особенностью суперсимметричной теории Янга-Миллса-Хиггса в плоском пространстве-времени размерности 2+1. И, следовательно, эти состояния не выживут во время компактификации из трех измерений в одно, поскольку предел Брэдлоу (2.94) выделяет состояния с нулевой завихренностью. Поэтому динамика вихревых состояний БПЗ в целом представляется несущественной для иерархии алгебр, изображенной на рис. 2.6, и выходит за рамки настоящего обсуждения. Тем не менее, в этом подразделе мы кратко осветим некоторые естественные перспективы модификаций и расширений алгебры БПЗ с включением вихрей.

Начнем с простых абелевых вихрей Абрикосова-Нильсена-Олесена в супермодели Янга-Миллса-Хиггса с одним киральным скаляром. Пространство модулей вихрей для этой системы имеет вид:

$$\mathcal{M}_{\text{vortex}} = \left\{ \begin{array}{c} F = \mathbf{D} \,\omega_{\Sigma} \\ D_z \phi = 0 \\ X_3 = 0 \end{array} \right\} / \mathcal{G} \,, \qquad (2.115)$$

где  $\omega_{\Sigma}$  – форма объема на римановой поверхности  $\Sigma$ . Хорошо известно, что это пространство модулей допускает гладкую индуцированную метрику и параметризуется нулями кирального поля  $\phi$  на  $\Sigma$  [112; 123; 125]. Топологический заряд, число завихренности, определяется первым характером Черна полученного калибровочного расслоения и совпадает с числом нулей  $\phi$ :

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} F =$$
число нулей поля  $\phi$ . (2.116)

При низких энергиях волновые функции состояний БПЗ, содержащих вих-

ри, локализуются на когомологии пространства модулей вихрей:

$$\mathscr{H}_{BPS} \cong H^* \left( \mathcal{M}_{vortex} \right)$$
. (2.117)

Сингулярные монопольные/антимонопольные операторы были определены в работах [128—130]. Версия этих операторов, сохраняющая суперсимметрию  $\bar{Q}_{2}$ , имеет следующий вид:

$$M_{\pm} \sim \exp\left[\pm \left(2\pi X_3 + i\gamma - 2\pi i \int_{\text{D.s.}} dx^0 \mathbf{D}\right)\right], \qquad (2.118)$$

где  $\partial_{\mu}\gamma = \pi \epsilon_{\mu\nu\lambda} F^{\nu\lambda}$  – дуальное фотонное поле, а последний член (а именно, интегрирование по времениподобной дираковской струне) необходим для суперсимметрии. Выбор знака в (2.118) зависит от того, выбран ли монопольный или антимонопольный оператор, и какую часть исходной суперсимметрии он сохраняет. (Анти-)монопольный оператор повышает (понижает) вихревое число состояния БПЗ на единицу:

$$\langle \mathfrak{m} | M_{\pm} | \mathfrak{n} \rangle \sim \delta_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \pm 1}$$
.

На нетривиальной поверхности алгебра монопольных операторов естественным образом расширяется за счет смешивания с полями нулевых мод на вихревом фоне. В простейшем примере одиночного вихря на поверхности тора гильбертово пространство БПЗ отождествляется просто с когомологиями поверхности (см., например, [127]) и имеет размерность 4. Поэтому мы ожидаем, что оператор монополя будет фактически иметь четыре нетривиальных матричных элемента, спаривающих вакуумное состояние с четырьмя состояниями с завихренностью, равной одному.

В инфракрасном пределе калибровочная группа нарушается до своей абелевой подгруппы за счет механизма Хиггса:

$$G_{\rm IR} = U(1)^{\otimes |\mathbf{K}|}$$
, (2.119)

где каждому U(1)-фактору соответствует атом кристалла, а  $|\mathbf{K}|$  – общее число атомов в кристалле K. Далее эта группа полностью нарушается вакуумными средними киральных полей.

Рассмотрим в этой модели составные «барионные» операторы, отвечающие путям *р*<sub>□</sub> в кристаллах, соединяющих корневой атом с искомым:

$$B_{\Box} = \prod_{I \in \wp_{\Box}} q_I . \tag{2.120}$$

Поскольку средние  $q_I$  удовлетворяют условию суперпотенциала (условию цикла), вакуумное среднее (2.120) не зависит от конкретного выбора пути  $\wp_{\Box}$ . Поле  $B_{\Box}$  имеет электрический заряд +1 относительно калибровочной подгруппы  $U(1)_{\Box}$  в (2.119), связанной с атомом  $\Box$ . Эта подгруппа нарушается средним  $B_{\Box}$ . Если поле  $B_{\Box}$  имеет ноль k-го порядка в точке  $z \in \Sigma$ , то эту точку пронзает k единиц магнитного потока поля  $U(1)_{\Box}$ .

В общем случае динамика таких вихрей весьма сложна, поскольку нам необходимо учитывать условие F-члена на средние значения. Тем не менее, мы можем легко вычислить квантовые числа таких состояний. Определим вектор вихревых чисел, связанный с атомами кристалла K:

$$\vec{\mathcal{N}}_{\mathrm{K}} = \{\mathfrak{n}_{\Box}\}_{\Box \in \mathrm{K}}, \quad \mathfrak{n}_{\Box} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$
(2.121)

Числа  $\mathfrak{n}_{\Box}$  определяют магнитные потоки  $U(1)_{\Box}$  через  $\Sigma$  и количество нулей поля  $B_{\Box}$  на поверхности  $\Sigma$ .

Условие факторизации (2.120) накладывает дополнительные ограничения на возможные значения  $\vec{\mathcal{N}}_{K}$ . Действительно, для двух атомов  $\Box_1$  и  $\Box_2$ , соединенных стрелкой *I*, барионы удовлетворяют факторизационному соотношению:

$$B_{\Box_2} = \phi_I B_{\Box_1} \ . \tag{2.122}$$

Среднее значение кирального поля  $\phi_I$  также физически наблюдаемо, поэтому  $\phi_I$  не может иметь полюсов на  $\Sigma$ , только нули. Поэтому мы получаем ограничение на нули барионных полей или, что то же самое, на потоки компонент U(1) в (2.119):

Если для пары атомов 
$$\Box_1$$
 и  $\Box_2$  существует  
ребро  $\{\Box_1 \to \Box_2\}$  в K, то  $\mathfrak{n}_{\Box_1} \leq \mathfrak{n}_{\Box_2}$ . (2.123)

Ограничение (2.123) имеет много общего с правилом плавления трехмерных кристаллов из раздела 2.1.2. Рассмотрим случай расплавленных кристаллов для плоских разбиений, связанных с  $\mathbb{C}^3$ , а затем ящикам плоского разбиения присвоим одномерные целочисленные характеристики по правилу (2.123) с неравенством  $\mathbf{n}_{\Box_1} \leq \mathbf{n}_{\Box_2}$ , замененным на  $\mathbf{n}_{\Box_1} \geq \mathbf{n}_{\Box_2}$ . Результатом будет трехмерное изображение четырехмерного твердотельного разбиения.

Паре (*K*,  $\vec{N}_{\rm K}$ ), удовлетворяющей (2.123), можно сопоставить конфигурацию атомов в четырехмерном пространстве, параметризованном следующими осями:

$$\Lambda^4 = (\mathsf{h}_1, \mathsf{h}_2, R$$
-заряд,  $\mathfrak{n}) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ ,

где атомы расположены следующим образом. Начнем с встраивания трехмерной кристаллической решетки в  $\Lambda^4$ , просто присвоив всем атомам  $\Box \in K$  четвертую координату, равную 0, затем заполним точки вдоль четвертой оси решетки  $\Lambda^4$ , начиная с 0 и вверх до  $\mathfrak{n}' = N - \mathfrak{n}_{\Box}$  для некоторого большого общего числа N (например, в качестве N можно взять предел Брэдлоу (2.94)). Все такие конфигурации представляют собой расплавленные четырехмерные кристаллы в решетке  $\Lambda^4$ , где решетка порождается морфизмами колчана, у которых четвертая координата  $\mathfrak{n}$  равна нулю, и новым отображением монополя  $M_+$ , имеющим координаты (0,0,0,1).

Следует подчеркнуть, что появление четырехмерных кристаллов неудивительно. Вихри – это квазичастицы в теории супер-Янга-Миллса-Хиггса, связанные с системой бран D8/D6/D4/D2/D0, погруженных в геометрию  $CY_3 \times T^2$ , где тор  $T^2$  – это пространственный срез нашей системы. В разделе 2.4 мы вернемся к обсуждению таких систем бран на четырехмерных многообразиях Калаби-Яу, где возникновение четырехмерных диаграмм твердотельных разбиений естественно с точки зрения ИК-теории.

# 2.3.4 Тригонометрические и эллиптические алгебры, ассоциированные с колчанными янгианами

В этом разделе мы в едином формате дадим определения колчанных янгианов и их тригонометрических и эллиптических обобщений.

С этого момента мы используем следующее соглашение для обозначения переменных. Записанные в верхнем регистре переменные (например, Z, W, H, C), являются возведенными в степень версиями переменных, записанных в нижнем регистре (например, z, w, h, c):

$$Z = e^{\beta z}, \qquad W = e^{\beta w}, \qquad H = e^{\beta h}, \qquad C = e^{\beta c}, \qquad \text{if t.d.}$$
(2.124)

Выбор  $\beta$  не будет играть существенной роли в нашем рассмотрении и может быть учтен соответствующим изменением масштаба переменных; мы сохраняем его, чтобы облегчить сравнение с известными алгебрами. В этом разделе мы используем следующую модифицированную гиперболическую функцию синуса и q-тета-функцию:<sup>1</sup>

$$Sin_{\beta}(z) := 2 \sinh \frac{\beta z}{2} = Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}}, 
\Theta_{q}(z) := -\frac{\theta_{q}(z)}{Z^{1/2}} = (Z^{\frac{1}{2}} - Z^{-\frac{1}{2}}) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - Z^{-1}q^{n}\right) \left(1 - Zq^{n}\right).$$
(2.125)

Помимо нормировочных множителей, которые не играют роли в дальнейшем анализе, мы делим каноническую q-тета-функцию на множитель  $Z^{1/2}$ , чтобы преобразовать ее в *нечетную* функцию z.

Три типа алгебр: колчанные янгианы, тригонометрические колчанные янгианы и эллиптические колчанные янгианы порождены тройками элементов  $(e^{(a)}(z), f^{(a)}(z), \psi^{(a)}_{\pm}(z))$ . В таком виде все они могут быть представлены еди-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Напомним, что обычная *q*-тэта-функция определяется как  $\theta_q(z) := (Z;q)_{\infty}(qZ^{-1};q)_{\infty}$ , где бесконечный *q*-символ Поххаммера  $(X;q)_{\infty} := \prod_{n=0}^{\infty} (1-Xq^n)$  для  $|q| \leq 1$ .

ным образом:

$$\begin{split} \psi_{\epsilon}^{(a)}(z)\,\psi_{\epsilon}^{(b)}(w) &\simeq C^{\epsilon\,\mathfrak{t}\,\chi_{ab}}\,\psi_{\epsilon}^{(b)}(w)\,\psi_{\epsilon}^{(a)}(z) \qquad \epsilon = \pm \,, \\ \psi_{+}^{(a)}(z)\,\psi_{-}^{(b)}(w) &\simeq \frac{\varphi^{a \Leftarrow b}\left(z + \frac{c}{2}, w - \frac{c}{2}\right)}{\varphi^{a \Leftarrow b}\left(z - \frac{c}{2}, w + \frac{c}{2}\right)}\,\psi_{-}^{(b)}(w)\,\psi_{+}^{(a)}(z)\,, \\ \psi_{\pm}^{(a)}(z)e^{(b)}(w) &\simeq \varphi^{a \Leftarrow b}\left(z \pm \frac{c}{2}, w\right)e^{(b)}(w)\psi_{\pm}^{(a)}(z)\,, \\ \psi_{\pm}^{(a)}(z)f^{(b)}(w) &\simeq (-1)^{|a||b|}\,\varphi^{a \Leftarrow b}(z, w)e^{(b)}(w)e^{(a)}(z)\,, \\ e^{(a)}(z)f^{(b)}(w) &\simeq (-1)^{|a||b|}\,\varphi^{a \Leftarrow b}(z, w)^{-1}f^{(b)}(w)f^{(a)}(z)\,, \\ f^{(a)}(z)f^{(b)}(w) &\simeq (-1)^{|a||b|}\,\varphi^{a \Leftarrow b}(z, w)^{-1}f^{(b)}(w)f^{(a)}(z)\,, \\ e^{(a)}(z)\,,\,f^{(b)}(w) &\geq -\delta_{a,b}\left(\mathfrak{p}(\Delta-c)\psi_{+}^{(a)}\left(z - \frac{c}{2}\right) - \\ &-\mathfrak{p}(\Delta+c)\psi_{-}^{(a)}\left(w - \frac{c}{2}\right)\right), \end{split}$$

где для рационального случая существует один набор  $\psi$ , а именно  $\psi_+ = \psi_-$ . Эти отношения имеют множество дополнительных ингредиентов, поясним их применение по отдельности.

Сначала объясним общие черты, присущие трем классам, а именно эллиптическим/тригонометрическим/рациональным алгебрам в определении (2.126).  $\mathbb{Z}_2$ -градуировка (т.е. статистика Бозе/Ферми) генераторов  $e^{(a)}$  и  $f^{(a)}$  обозначается |a| и определяется как

$$|a| = (|a \to a| + 1) \mod 2$$
, (2.127)

в то время как генераторы  $\psi_{\pm}^{(a)}(z)$  всегда четны. Обозначение [ $\star, \star$ } в (2.126) обозначает суперкоммутатор, а именно, это антикоммутатор для двух фермионов и коммутатор в остальных случаях. Также здесь мы используем следующее обозначение:

$$\Delta := z - w \,. \tag{2.128}$$

Свойства колчанных алгебр БПЗ собраны в так называемом факторе связи – функции, построенной из колчана *Q* по следующему правилу

$$\varphi^{a \Leftarrow b}(u) := (-1)^{|b \to a|\chi_{ab}} \frac{\prod_{I \in \{a \to b\}} \zeta(u+h_I)}{\prod_{J \in \{b \to a\}} \zeta(u-h_J)}, \qquad (2.129)$$

где вид весового коэффициента  $\zeta(u)$  от каждой стрелки зависит от того, рассматриваем ли мы рациональный, тригонометрический или эллиптический случай. Выражение (2.129) представляет собой прямое обобщение функции фактора связей (2.48), рассмотренного нами ранее в разделе 2.1.4. Также мы ввели дополнительный знаковый коэффициент, чтобы фактор связи удовлетворял условию взаимности для колчана произвольной киральности:

$$\varphi^{a \Leftarrow b}(u) \,\varphi^{b \Leftarrow a}(-u) = 1 \,. \tag{2.130}$$

В отличие от случая колчанных янгианов, фактор связи (2.129) должен быть слегка изменен, прежде чем мы сможем использовать его для определения алгебр и изучения их представлений, особенно для общего случая киральных колчанов. Поэтому мы будем называть коэффициент связи (2.129) *несбалансированным*. Чтобы иметь дело с киральными колчанами и изучать общие представления (как для некиральных, так и для киральных колчанов), нам необходимо ввести *сбалансированный* фактор связи:

$$\boldsymbol{\varphi}^{a \Leftarrow b}(z, w) := (ZW)^{\frac{t}{2}\chi_{ab}} \, \varphi^{a \Leftarrow b}(z - w) \,, \qquad (2.131)$$

где величина  $\mathfrak{t}$  определена как

$$\mathfrak{t} := \begin{cases} 0 & \text{рациональная} \\ 1 & \text{триг./эллиптическая} . \end{cases}$$
(2.132)

Сбалансированный фактор связи (2.131) удовлетворяет условию взаимности

$$\boldsymbol{\varphi}^{a \Leftarrow b}(z, w) \, \boldsymbol{\varphi}^{b \Leftarrow a}(w, z) = 1 \,. \tag{2.133}$$

Разница между тремя классами алгебр заключается в (1) весовом коэффициенте  $\zeta(u)$  в определении сбалансированного фактора связи  $\varphi^{a \leftarrow b}(z, w)$ , (2) значении центрального члена c, (3) разложении по модам образующих  $e^{(a)}(z)$ ,  $\psi^{(a)}_{\pm}(z)$  и  $f^{(a)}(z)$ ), (4) значении символа  $\simeq$  в (2.126) и (5) определении пропагатора  $\mathfrak{p}(z)$ . Теперь рассмотрим их по очереди.

1. В сбалансированном факторе связи (2.131) весовой коэффициент  $\zeta(u)$  для

каждой стрелки равен

$$\zeta(u) := \begin{cases} u & \text{рациональная,} \\ Sin_{\beta}(u) & \text{тригонометрическая,} \\ \Theta_{q}(u) & \text{эллиптическая,} \end{cases} (2.134)$$

где функции  $Sin_{\beta}(u)$  и  $\Theta_q(u)$  определены в (2.125).

2. Центральный член имеет следующий вид:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{рациональная,} \\ c & \text{триг./эллиптическая.} \end{cases}$$
(2.135)

3. Эти три случая различаются разложением по модам своих генераторов. Для генераторов  $e^{(a)}(z)$  и  $f^{(a)}(z)$  как для некирального, так и для кирального колчана имеем

Для генераторов  $\psi_{\pm}$  в случае некиральных колчанов получим

$$\int \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \psi_n^{(a)} z^{-(n+\mathbf{s}^{(a)})}$$
 pau.

$$\psi_{\pm}^{(a)}(z) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}^{-1} \psi_{\pm,n}^{(a)} Z^{\mp (n+\mathbf{s}^{(a)})} & \text{триг.} \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}^{-}\psi_{\pm,n,0}^{(a)}Z^{\mp\left(n+\mathbf{s}^{(a)}\right)}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}}\psi_{\pm,n,\alpha}^{(a)}Z^{\mp n}q^{\alpha}\right)$$
 ЭЛЛ., (2.137)

где мы использовали тот факт, что в рациональном случае  $\psi = \psi_{\pm}$ . Обратим внимание, что по сравнению с известными в литературе алгебрами для некоторых некиральных колчанов мы ввели дополнительное целое число  $\mathbf{s}^{(a)}$  (называемое «сдвиг»), поскольку оно важно при изучении общих представлений алгебр (см. раздел 2.2). Для генераторов  $\psi_{\pm}$  в случае киральных колчанов получаем

$$\int \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n^{(a)} z^{-(n+\mathbf{s}^{(a)})}$$
 pau.

$$\psi_{\pm}^{(a)}(z) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{\pm,n}^{(a)} Z^{\mp (n+\mathbf{s}^{(a)})} & \text{триг.} \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}^{n\in\mathbb{Z}}\psi_{\pm,n,0}^{(a)}Z^{\mp\left(n+\mathfrak{s}^{(a)}\right)}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}}\psi_{\pm,n,\alpha}^{(a)}Z^{\mp n}q^{\alpha}\right)$$
 ЭЛЛ. (2.138)

Заметим, что для киральных колчанов, когда мы рассматриваем бесконечномерные представления, информация о сдвиге  $\{\mathbf{s}^{(a)}\}$  теряется в разложении генераторов  $\psi_{\pm}^{(a)}(z)$  по модам и проявляет себя только в представлении, тогда как для конечномерных представлений сдвиг  $\{\mathbf{s}^{(a)}\}$  явно виден как в представлениях, так и в разложениях по модам  $\psi_{\pm}^{(a)}(z)$ .

- 4. Обозначение  $\simeq$  также используется в слегка различных контекстах в трех классах. В случае рациональной алгебры отношения строятся между разложениями в ряд Тейлора вокруг  $z = \infty$ , поэтому разложения левой и правой частей эквивалентны с точностью до членов  $z^n w^{m\geq 0}$  и  $z^{n\geq 0} w^m$ . В тригонометрическом и эллиптическом случаях мы сравниваем ряды Лорана по Z и W, а именно для отношения  $L_1 \simeq (P/Q)L_2$ , где  $L_i$  – два ряда Лорана, а P/Q является отношением двух гиперболических синусов или тета-функций,  $\simeq$  означает, что разложения в ряды Лорана  $QL_1$  и  $PL_2$ эквивалентны.
- 5. Наконец, пропагатор **p**(*z*) это формальный оператор дельта-функции, определенный по-разному для трех случаев:

$$\mathfrak{p}(z) := \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{рациональная,} \\ \delta(Z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} Z^n & \text{триг./эллиптическая.} \end{cases}$$
(2.139)

Форма алгебр в (2.126) происходит из естественных тригонометрических и эллиптических обобщений колчанных янгианов [38], т.е. как подъем  $u \rightarrow \text{Sin}_{\beta}(u) \rightarrow \Theta_q(u)$ . Однако, тригонометрическая и эллиптическая версии обладают важными особенностями, отсутствующими в рациональном случае. В алгебре (2.126) эти особенности проявляются в появлении *c* и  $\chi_{ab}$ , а также в том, что именно сбалансированный фактор связи (2.131) вместо несбалансированного (2.129) входит в определение алгебры (2.126).

# 2.3.5 Сравнение с известными тригонометрическими/эллиптическими алгебрами

Хотя описанные в предыдущем разделе эллиптические и тригонометрические алгебры в целом являются новой конструкцией, мы можем сравнить результаты с существующими определениями в литературе, когда торическое трехмерное многообразие Калаби-Яу не имеет компактных четырециклов.

Рассмотрим алгебру  $\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n}$ . Чтобы полностью определить алгебру, нам нужно выбрать соответствующую диаграмму Дынкина. Она определяется сигнатурой (см. [131; 132]):

$$\Sigma_{m,n}: \{1, 2, \dots, m+n\} \longrightarrow \{+1, -1\},$$
 (2.140)

так, что  $\#(+1) = m, \ \#(-1) = n$ . В дальнейшем мы рассмотрим индексы по модулю m + n.



Рисунок 2.7 — Пример колчана и соответствующей диаграммы Дынкина с сигнатуро<br/>й $\Sigma=\{+1,+1,+1,-1,-1,+1,-1\}.$ 

Тогда колчан и суперпотенциал определяются такими выражениями:

конфигурация спинов	$\sigma_i \sigma_{i+1} = 1$	$\sigma_i \sigma_{i+1} = -1$	
$\mathbb{Z}_2$ -четность	Четная	Нечетная	
Узел Дынкина	-0-	-×-	(2.141)
Колчанный узел	$\overbrace{B_{i}}{C_{i}} \overbrace{A_{i+1}}{A_{i+1}}$	$\underbrace{\begin{array}{c} A_i & A_{i+1} \\ \overleftarrow{B_i} & \overrightarrow{B_{i+1}} \end{array}}_{B_i + 1}$	
Суперпотенциал $\delta W_i$	$\sigma_i \operatorname{Tr} C_i \left( B_{i+1} A_{i+1} - A_i B_i \right)$	$-\sigma_i \operatorname{Tr} B_{i+1} A_{i+1} A_i B_i$	

Определим матрицу Картана и вспомогательную матрицу, следуя [132]:

$$A_{i,j}^{\Sigma} = (\sigma_i + \sigma_{i+1}) \,\delta_{i,j} - \sigma_i \delta_{i,j+1} - \sigma_j \delta_{i+1,j} ,$$
  

$$M_{i,j}^{\Sigma} = \sigma_i \delta_{i,j+1} - \sigma_j \delta_{i+1,j} .$$
(2.142)

Мы можем выбрать следующие эквивариантные веса для стрелок:

$$h(A_i) = \sigma_i (-\mathbf{h}_1) - \mathbf{h}_2 , \quad h(B_i) = \sigma_i (-\mathbf{h}_1) + \mathbf{h}_2 , \quad h(C_i) = 2\sigma_i \mathbf{h}_1 .$$
 (2.143)

Полученные соотношения для  $\mathsf{T}_{\beta}(Q_{m|n})$  можно преобразовать в:

$$\begin{split} \psi_{\epsilon}^{(i)}(z)\,\psi_{\epsilon}^{(j)}(w) &= \psi_{\epsilon}^{(j)}(w)\,\psi_{\epsilon}^{(i)}(z) \qquad \epsilon = \pm, \\ \frac{d^{M_{i,j}^{\Sigma}}p^{A_{i,j}^{\Sigma}}Z - CW}{d^{M_{i,j}^{\Sigma}}Z - p^{A_{i,j}^{\Sigma}}CW}\psi_{\epsilon}^{(i)}(z)\,\psi_{\epsilon}^{(j)}(w) &= \frac{d^{M_{i,j}^{\Sigma}}p^{A_{i,j}^{\Sigma}}CZ - W}{d^{M_{i,j}^{\Sigma}}CZ - p^{A_{i,j}^{\Sigma}}W}\psi_{-}^{(j)}(w)\,\psi_{+}^{(i)}(z), \\ \left(d^{M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}Z - p^{A_{i,j}^{\Sigma}}W\right)\,\psi_{\pm}^{(i)}(z)e^{(j)}(w) &= \left(d^{M_{i,j}^{\Sigma}}p^{A_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}Z - W\right)\,e^{(j)}(w)\psi_{\pm}^{(i)}(z), \\ \left(d^{M_{i,j}^{\Sigma}}Z - p^{A_{i,j}^{\Sigma}}W\right)\,e^{(i)}(z)e^{(j)}(w) &= \left(-1\right)^{|i||j|}\left(d^{M_{i,j}^{\Sigma}}p^{A_{i,j}^{\Sigma}}Z - W\right)\,e^{(j)}(w)\psi_{\pm}^{(i)}(z), \\ \left(d^{M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}Z - p^{-A_{i,j}^{\Sigma}}W\right)\,\psi_{\pm}^{(i)}(z)f^{(j)}(w) &= \left(d^{M_{i,j}^{\Sigma}}p^{-A_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}Z - W\right)\,f^{(j)}(w)\psi_{\pm}^{(i)}(z), \\ \left(d^{M_{i,j}^{\Sigma}}Z - p^{-A_{i,j}^{\Sigma}}W\right)\,f^{(i)}(z)\,f^{(j)}(w) &= \left(-1\right)^{|i||j|}\left(d^{M_{i,j}^{\Sigma}}p^{-A_{i,j}^{\Sigma}}Z - W\right)\,f^{(j)}(w)\,f^{(i)}(z)\,, \\ \left[e^{(a)}(z)\,,f^{(b)}(w)\right] &= -\delta_{i,j}\left(\mathfrak{p}(\Delta - c)\,\psi_{+}^{(a)}\left(z - \frac{c}{2}\right) - \mathfrak{p}(\Delta + c)\,\psi_{-}^{(a)}\left(w - \frac{c}{2}\right)\right)\,, \\ \end{array}$$

$$(2.144)$$

где

$$p = e^{\beta \mathbf{h}_1}, \quad d = e^{\beta \mathbf{h}_2}.$$
 (2.145)

С другой стороны, полученные соотношения для  $\mathsf{E}_{\tau}(Q_{m|n})$  можно привести к:

$$\begin{split} \psi_{\epsilon}^{(i)}(z)\,\psi_{\epsilon}^{(j)}(w) &= \psi_{\epsilon}^{(j)}(w)\,\psi_{\epsilon}^{(i)}(z) \qquad \epsilon = \pm, \\ \frac{\Theta_{q}\left(z - w + c - A_{i,j}^{\Sigma}\mathbf{h}_{1} + M_{i,j}^{\Sigma}\mathbf{h}_{2}\right)}{\Theta_{q}\left(z - w - c - A_{i,j}^{\Sigma}\mathbf{h}_{1} + M_{i,j}^{\Sigma}\mathbf{h}_{2}\right)}\psi_{+}^{(i)}(z)\psi_{-}^{(j)}(w) &= \frac{\Theta_{q}\left(z - w + c + A_{i,j}^{\Sigma}\mathbf{h}_{1} + M_{i,j}^{\Sigma}\mathbf{h}_{2}\right)}{\Theta_{q}\left(z - w - c + A_{i,j}^{\Sigma}\mathbf{h}_{1} + M_{i,j}^{\Sigma}\mathbf{h}_{2}\right)}\psi_{+}^{(j)}(z)\,, \\ d^{M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}Z\frac{\left(p^{A_{i,j}^{\Sigma}}d^{-M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}W/Z|q\right)_{\infty}}{\left(qp^{-A_{i,j}^{\Sigma}}d^{-M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}W/Z|q\right)_{\infty}}e^{(i)}(z)\,e^{(j)}(w) &= -W\frac{\left(p^{A_{i,j}^{\Sigma}}d^{M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}Z/W|q\right)_{\infty}}{\left(qp^{-A_{i,j}^{\Sigma}}d^{-M_{i,j}^{\Sigma}}W/Z|q\right)_{\infty}}e^{(i)}(z)\,e^{(j)}(w) &= -(-1)^{|i||j|}W\frac{\left(p^{A_{i,j}^{\Sigma}}d^{M_{i,j}^{\Sigma}}Z/W|q\right)_{\infty}}{\left(qp^{-A_{i,j}^{\Sigma}}d^{-M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}W/Z|q\right)_{\infty}}e^{(j)}(w)\,e^{(i)}(z)\,, \\ d^{M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}Z\frac{\left(p^{-A_{i,j}^{\Sigma}}d^{-M_{i,j}^{\Sigma}}W/Z|q\right)_{\infty}}{\left(qp^{A_{i,j}^{\Sigma}}d^{-M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}W/Z|q\right)_{\infty}}\psi_{\pm}^{(i)}(z)\,f^{(j)}(w) &= -W\frac{\left(p^{-A_{i,j}^{\Sigma}}d^{M_{i,j}^{\Sigma}}Z/W|q\right)_{\infty}}{\left(qp^{A_{i,j}^{\Sigma}}d^{-M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}W/Z|q\right)_{\infty}}f^{(j)}(w)\,\psi_{\pm}^{(i)}(z)\,, \\ d^{M_{i,j}^{\Sigma}}Z\frac{\left(p^{-A_{i,j}^{\Sigma}}d^{-M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}W/Z|q\right)_{\infty}}{\left(qp^{A_{i,j}^{\Sigma}}d^{-M_{i,j}^{\Sigma}}C^{\pm\frac{1}{2}}W/Z|q\right)_{\infty}}f^{(i)}(z)\,f^{(j)}(w) &= -(-1)^{|i||j|}W\frac{\left(p^{-A_{i,j}^{\Sigma}}d^{M_{i,j}^{\Sigma}}Z/W|q\right)_{\infty}}{\left(qp^{A_{i,j}^{\Sigma}}d^{-M_{i,j}^{\Sigma}}Z/W|q\right)_{\infty}}f^{(j)}(w)\,f^{(i)}(z)\,, \\ \left[e^{(a)}(z)\,,f^{(b)}(w)\right] &= -\delta_{i,j}\left(\mathfrak{p}(\Delta - c)\,\psi_{+}^{(a)}\left(z - \frac{c}{2}\right) - \mathfrak{p}(\Delta + c)\,\psi_{-}^{(a)}\left(w - \frac{c}{2}\right)\right)\,. \end{split}$$
Теперь очевидно, что эти соотношения совпадают с известными в литературе (см. (3.55) – (3.62) в [133]).

# 2.4 Четырехмерные многообразия Калаби-Яу

# 2.4.1 БПЗ D-браны на торических трехмерных многообразиях Калаби-Яу

В случае четырехмерных торических многообразий Калаби-Яу (CY<sub>4</sub>) эффективная теория представляет собой двумерную суперсимметричную  $\mathcal{N} =$ (0, 2)-теорию (см. Приложение А.5). Соответствующий колчан можно поднять до периодического расширенного колчана на трехмерном торе [134—136]. Помимо обычных калибровочных и киральных мультиплетов, закодированных в узлах и ориентированных ребрах колчана, в двумерной  $\mathcal{N} = (0, 2)$  теории имеется ферми-мультиплет, закодированный в неориентированных ребрах расширенного колчана. Обычный F-член  $\mathcal{N} = 1$  четырехмерных теорий (см. Приложение А.5) заменяется *EJ*-членами, определяемыми знаковой суммой по граням с неориентированными ребрами.

В этом раздле мы сосредоточимся на простейшем случае  $CY_4$ :  $\mathbb{C}^4$ . Следуя [134], рассмотрим колчан с каноническим обрамлением I, который представляет собой каноническую некомпактную D8-брану, обертывающую все многообразие  $\mathbb{C}^4$ :



Для случая  $\mathbb{C}^4$  периодический колчан и вакуумные уравнения, отвечаю-

щие ЕЈ-члену, имеют следующий вид:

Полный набор вакуумных уравнений состоит из канонического условия *D*члена и обсуждавшегося выше *EJ*-члена:

D-член: 
$$\sum_{i=1}^{4} \left[ B_i, B_i^{\dagger} \right] + II^{\dagger} = \zeta \mathbb{1},$$
 (2.149)  
EJ-член:  $[B_i, B_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$ 

Обратим внимание, что эти вакуумные уравнения эквивалентны описанию инстантонов АДХМ на  $\mathbb{R}^8$  [137—139].

Классические вакуумы, как и ранее, задаются неподвижными точками на этом многообразии, соответствующее эквивариантным восьмимерным инстантонам на Ω-фоне. Мы можем перечислить их аналогично четырехмерному и шестимерному случаям [140], используя теорему Кинга [101]. Рассмотрим эквивариантные мономы в алгебре колчанных путей:

$$\mathscr{A} = \mathbb{C}[B_1, B_2, B_3, B_4] / \langle [B_a, B_b] = 0 \rangle, \qquad (2.150)$$

которые действуют на циклический вектор *I*. Все такие мономы можно занумеровать точками положительного «седеканта»  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^4$  в четырехмерной целочисленной решетке. Канонический базис в четырехмерном пространстве обозначим через

$$\vec{e}_{1} = \begin{pmatrix} 1, 0, 0, 0 \end{pmatrix},$$
  

$$\vec{e}_{2} = \begin{pmatrix} 0, 1, 0, 0 \end{pmatrix},$$
  

$$\vec{e}_{3} = \begin{pmatrix} 0, 0, 1, 0 \end{pmatrix},$$
  

$$\vec{e}_{4} = \begin{pmatrix} 0, 0, 0, 1 \end{pmatrix}.$$
  
(2.151)

Моном определяется координатами точки в этой решетке:

$$(i, j, k, l) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \iff B_1^i B_2^j B_3^k B_4^l \cdot I.$$

$$(2.152)$$

Некоторые из этих операторов конденсируются и приобретают вакуумные средние, воздействуя на состояние вакуума. Набор сконденсированных операторов образует подмножество точек (которые будут соответствовать ящикам в твердотельном разбиении) в  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^4$ , которое мы называем четырехмерным кристаллом. Условия устойчивости неподвижных точек пространства модулей колчана вместе с условиями на EJ-члены накладывают условие выпуклости на возможные кристаллические конфигурации, известное в литературе как правило плавления [96; 97; 109; 140—143]. В результате БПЗ-вакуумы систем D-бран, обертывающих торические CY<sub>4</sub>, описываются моделью плавящегося кристалла.

В данном случае правило плавления таково (см. также (2.14)):

Для любой коробки  $\Box \in \mathbb{Z}^4_{\geq 0}$ ,

если существует другая коробка  $\Box' \in K$  в точке  $\vec{x}(\Box') = \vec{x}(\Box) + \vec{e}_k$  (2.153) для любых k = 1, 2, 3, 4, тогда  $\Box \in K$ .

## 2.4.2 Твердотельные разбиения

Твердотельное разбиение целого числа n – это трехмерный массив  $\pi$  целых неотрицательных чисел  $\pi_{i,j,k} \geq 0$ , удовлетворяющий  $\forall i, j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ :

$$\sum_{i,j,k} \pi_{i,j,k} = n, \ \pi_{i+1,j,k} \le \pi_{i,j,k}, \ \pi_{i,j+1,k} \le \pi_{i,j,k}, \ \pi_{i,j,k+1} \le \pi_{i,j,k}.$$
(2.154)

Производящая функция для твердотельных разбиений, определенная как

$$P(q) \equiv \sum_{\pi} q^{|\pi|}, \qquad (2.155)$$

задается следующим рядом:<sup>2</sup>

$$P(q) = 1 + q + 4q^{2} + 10q^{3} + 26q^{4} + 59q^{5} + 140q^{6} + 307q^{7} + 684q^{8} + 1464q^{9} + 3122q^{10} + 6500q^{11} + 13426q^{12} + 27248q^{13} + 54804q^{14} + \dots$$

(2.156)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Последовательность A000293 в библиотеке целочисленных последовательностей OEIS https://oeis.org/ A000293.

Твердотельное разбиение можно представить как нагромождение четырехмерных коробок со стороной единичной длины в углу четырехмерной комнаты. А именно, твердотельное разбиение  $\pi$  может быть представлено подмножеством узлов решетки  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^4$  с координатами:

$$(i, j, k, l), \quad 0 \le l < \pi_{i,j,k}.$$
 (2.157)

Набор твердотельных разбиений эквивалентен набору четырехмерных кристаллов в  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^4$ , удовлетворяющих правилу плавления (2.153), поэтому мы будем использовать эти два термина как синонимы.

Для твердотельного разбиения  $\pi$  определим два набора ящиков как Add $(\pi) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^4$  и Rem $(\pi) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^4$ , определяемые как позиции в четырехмерной решетке, где соответствующие ячейки могут быть *добавлены* в  $\pi$  или *удалены* из  $\pi$  таким образом, что полученные конфигурации снова являются твердотельными разбиениями (см. рис. 2.2 для иллюстрации трехмерного аналога).

Каждому полю *B<sub>i</sub>* мы присваиваем комплексный эквивариантный вес (или ароматический химпотенциал) **h**<sub>i</sub>. Эти веса определяют локальное эквивариантное торическое действие на CY<sub>4</sub>:

$$(x, y, z, w) \mapsto (e^{\mathbf{h}_1} x, e^{\mathbf{h}_2} y, e^{\mathbf{h}_3} z, e^{\mathbf{h}_4} w)$$
 (2.158)

и удовлетворяет условию Калаби-Яу:

$$\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_4 = 0. \tag{2.159}$$

Рассмотрим проекцию:

$$\mathbf{prj}: \quad (i, j, k, l) \longmapsto i \,\mathbf{h}_1 + j \,\mathbf{h}_2 + k \,\mathbf{h}_3 + l \,\mathbf{h}_4 \,. \tag{2.160}$$

Физический смысл этой проекции следующий: оператор  $B_1^i B_2^j B_3^k B_4^l I$ , который получает среднее в суперсимметричном вакууме, имеет ароматический заряд, определяемый **prj**(i, j, k, l).

Мы предполагаем, что веса  $h_k$  являются комплексными числами общего вида, удовлетворяющими (2.159). Поэтому три из этих чисел, скажем  $h_{1,2,3}$ , образуют неприводимый базис в модуле  $\mathbb{Z}\mathbf{h}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{h}_2 + \mathbb{Z}\mathbf{h}_3$  над  $\mathbb{Z}$ , так что комплексные числа  $(i \mathbf{h}_1 + j \mathbf{h}_2 + k \mathbf{h}_3)$  и  $(i' \mathbf{h}_1 + j' \mathbf{h}_2 + k' \mathbf{h}_3)$  для двух разных наборов (i, j, k) и (i', j', k') линейно независимы над  $\mathbb{Z}$ . Другими словами, если имеется разложение числа c:

$$c = i \mathbf{h}_1 + j \mathbf{h}_2 + k \mathbf{h}_3, \quad i, j, k \in \mathbb{Z},$$
 (2.161)

то это разложение единственное.

Оператор проектирования **prj** отображает положительный седекант (т.е. четырехмерный ортант)  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^4$  в трехмерную объемно-центрированную кубическую решетку Браве, обозначенную как  $\mathscr{B}$  (см. рис. 2.8). Заметим, что после (2.161) (что, в свою очередь, связано с ограничением Калаби-Яу (2.159)), весовое пространство эквивалентно трехмерной решетке  $\mathscr{B}$ , поэтому мы будем использовать  $\mathbf{h}_{1,2,3,4}$  (с учетом  $\sum_{i=1}^4 \mathbf{h}_i$ ) для обозначения как базиса (как комплексных чисел) весового пространства, так и базиса (как трехмерные векторы) решетки  $\mathscr{B}$ .<sup>3</sup> Соответственно, мы можем использовать одно и то же обозначе-



Рисунок 2.8 – Параметризация трехмерной объемно-центрированной решетки Браве *В*.

ние, например z, u, c и т.д., для обозначения как точки в трехмерной решетке  $\mathscr{B}$ , так и точки в весовом пространстве.

Ячейки Вороного («кирпичики») объемно-центрированной решетки представляют собой усеченные октаэдры и образуют мозаичное (также называемое «паркетным») замощение  $\mathbb{R}^3$ . Граница твердотельного разбиения состоит

$$\mathsf{h}_1 \mapsto (1, \, -1, \, -1) \;, \quad \mathsf{h}_2 \mapsto (-1, \, 1, \, -1) \;, \quad \mathsf{h}_3 \mapsto (1, \, 1, \, 1) \;, \quad \mathsf{h}_4 \mapsto (-1, \, -1, \, 1) \;.$$

 $<sup>^{3}</sup>$ Например, мы можем нарисовать трехмерную решетку  $\mathscr{B},$  выбрав для ее векторов следующее представление:

из трехмерных кубических пластинок, которые можно отобразить в параллелограммы при **prj**. Поэтому замощения  $\mathbb{R}^3$  параллелограммами находятся во взаимно-однозначном соответствии с твердотельными разбиениями  $\pi$ . См. примеры на рис. 2.9.





а) Пустой четырехмерный угол б) Гиперкубическая коробка в углу

Рисунок 2.9 – Два примера замощения ячейки Вороного.

Рассмотрим отображение подъема:

$$\ell: \quad \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{Z}^4_{>0} \,, \tag{2.162}$$

где четверка  $\ell_{k=1,...,4}$  целых неотрицательных чисел определяется однозначно через вектор  $c \in \mathscr{B}$  по следующему правилу:

$$\exists ! \{\ell_k\}_{k=1,\dots,4} : \quad c = \sum_{i=1}^4 \ell_i \mathsf{h}_i, \quad \ell_i \ge 0, \quad 0 \in \{\ell_k\}_{k=1,\dots,4}.$$
(2.163)

Любое твердотельное разбиение  $\pi$  мы можем перевести в поле высот  $\mu(c)$ , определяемое как количество ящиков, спроецированных в одну и ту же точку  $c \in \mathscr{B}$  с помощью отображения **prj**.

Затем, используя отображение подъема (2.162), мы можем отобразить поле высоты  $\mu(c)$  обратно в подмножество узлов  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^4$ :

$$L: \ \mu(c) \mapsto \left\{ \left( \ \ell_1(c) + u \,, \ \ell_2(c) + u \,, \ \ell_3(c) + u \,, \ \ell_4(c) + u \right) \right\}_{u=0}^{\mu-1} \,.$$
 (2.164)

Поле высот  $\mu$  представляет собой сечение расслоения  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^4 \to \mathscr{B}$  с нетривиальной связностью. Перенесем параллельно точку ( $c \in \mathscr{B}, \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) по вектору  $h_k$  следующим образом. Сначала мы поднимаем ее с помощью L в самый верхний ящик в  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^4$ , затем перемещаем эту точку с помощью подъема  $e_k$  вектора  $h_k$ 

$$\mathsf{T}_{k}^{3\mathrm{D}} = \mathbf{prj} \circ \mathsf{T}_{k}^{4\mathrm{D}} \circ L : \qquad (c,\mu) \mapsto (c+\mathsf{h}_{k},\mu+\Delta_{k}(c)), \qquad (2.165)$$

где

$$\Delta_k(c) := \delta_{0,\ell_k(c)} \,\delta_{0,\ell_k(c+\mathsf{h}_k)} \,. \tag{2.166}$$

Как мы видим, связность  $\Delta_k(c)$  принимает только значения 0 или 1 и зависит только от ребра  $(c \to c + \mathbf{h}_k) \in \mathscr{B}$ , но не от значения в слое  $\mu$ , поэтому мы будем называть величину  $\Delta_k(c)$  весом ребра.

Теперь мы переведем правило плавления (2.153) для четырехмерного кристалла, гарантирующее, что  $\pi$  действительно является твердотельным разбиением, в условие на поля высот  $\mu(c)$ . Правило плавления (2.153) просто означает, что, когда верхний ящик, зависший над проекцией  $c \in \mathscr{B}$ , сдвигается параллельным переносом вдоль  $h_k$ , он не должен опускаться ниже верхнего ящика, зависшего над  $c+h_k \in \mathscr{B}$ . Таким образом, мы приходим к следующему переводу правила плавления (2.153) в терминах поля высот:

$$\mu(c + \mathbf{h}_k) \le \mu(c) + \Delta_k(c), \qquad \forall c \in \mathscr{B}, \ k = 1, \dots, 4.$$
(2.167)

## 2.4.3 Зарядовая функция для твердотельных разбиений

#### Постановка задачи

Как и в случае с трехмерными многообразиями Калаби-Яу, нам бы хотелось построить алгебру БПЗ D-бран в этой системе. Однако, эта задача является непростой хотя бы потому, что эффективная теория поля на мировом объеме D-бран имеет меньшую суперсимметрию по сравнению с трехмерным случаем. Тем не менее, в этом разделе мы попробуем сделать первый шаг в означенном выше направлении и построим так называемую «зарядовую функцию». В трехмерном случае зарядовая функция (2.48) как функция спектрального параметра в общем виде описывала собственное значение выделенного оператора Картана в колчанном янгиане. Здесь мы используем иной подход и построим зарядовую функцию как мероморфную функцию спектрального параметра с свойствами, которые были определяющими в трехмерном случае:

- 1.  $\psi_{\pi}(z)$  рациональная функция z.
- 2. Все полюса  $\psi_{\pi}(z)$  простые.
- 3. Все полюса  $\psi_{\pi}(z)$  находятся во взаимно-однозначном соответствии с набором спроецированных координат  $\operatorname{prj}(\vec{x}(\Box))$ , где  $\Box \in \operatorname{Add}(\pi) \cup \operatorname{Rem}(\pi)$ , а  $\vec{x}(\Box)$  – соответствующие четырехмерные координаты. Этим свойством обладает и трехмерный аналог (2.48).

К сожалению, простое определение как произведение потенциалов по всем атомам кристалла, аналогичное трехмерной версии (2.48), вместе с ограничением (2.159), терпит неудачу уже на уровне двухатомных кристаллов. Мы увидим, что нам нужно не только изменить вклад каждого отдельного атома, но также необходимо включить вклады от определенных кластеров из 4 и 5 атомов.

#### Выражение для зарядовой функции

Выражение для зарядовой функции твердотельного разбиения **π** принимает следующую форму:

$$\psi_{\pi}(z) = \frac{1}{z} \prod_{\Phi_1 \in \pi} \varphi_1 \left( z - c \left( \Phi_1 \right) \right) \prod_{\Phi_{4,k} \in \pi} \varphi_{4,k} \left( z - c \left( \Phi_{4,k} \right) \right) \prod_{\Phi_5 \in \pi} \varphi_5 \left( z - c \left( \Phi_5 \right) \right) ,$$
(2.168)

где представлены 4 вклада:

- Первый фактор <sup>1</sup>/<sub>z</sub> это вклад вакуума с полюсом в 0, который позволяет добавить первый ящик.
- Синглет Ф<sub>1</sub> это одиночный ящик □ ∈ *π*. Вклад одиночного ящика задается функцией

$$\varphi_1(z) = \prod_{i=1}^4 \frac{z + \mathsf{h}_i}{z - \mathsf{h}_i} \times \prod_{1 \le i < j \le 4} (z + \mathsf{h}_i + \mathsf{h}_j), \qquad (2.169)$$

сдвинутой на координату  $c(\Phi_1)$ , которая является координатой проекции координаты ящика **prj**  $(\vec{x}(\Box))$ .

- Веерная четверка  $\Phi_{4,k}$  – это кластер четырех ящиков  $\Box_{i=1,2,3,4} \in \pi$ , удовлетворяющих координатному соотношению:

$$\vec{x}(\Box_2) - \vec{x}(\Box_1) = \vec{e}_a, \quad \vec{x}(\Box_3) - \vec{x}(\Box_1) = \vec{e}_b, \quad \vec{x}(\Box_4) - \vec{x}(\Box_1) = \vec{e}_c, \quad (2.170)$$

где индексы  $\{a, b, c, k\}$  представляют собой любую из перестановок  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Его вкладом является функция

$$\varphi_{4,k}(z) = \frac{1}{(z+\mathsf{h}_k)^2}, \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$
(2.171)

сдвинутая на координату  $c(\Phi_4)$ , которая является координатой проекции координаты первого ящика **prj**  $(\vec{x}(\Box_1))$ .

 - Пятерка Ф<sub>5</sub> – это кластер из пяти ящиков □<sub>i=1,2,3,4,5</sub> ∈ π, удовлетворяющих координатному соотношению:

$$\vec{x}(\Box_{i+1}) - \vec{x}(\Box_1) = \vec{e}_i, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4.$$
 (2.172)

Его вкладом является функция

$$\varphi_5(z) = z^2$$
. (2.173)

сдвинутая на координату  $c(\Phi_4)$ , которая является координатой проекции координаты первого ящика **prj**  $(\vec{x}(\Box_1))$ .

#### Доказательство

Теперь мы докажем, что зарядовая функция (2.168) удовлетворяет требованиям для всех конфигураций твердотельных разбиений. Доказательство проходит в три этапа:

- Сначала мы переводим выражение зарядовой функции (2.168), которая является функцией непосредственно твердотельного разбиения, в потенциальную функцию w(c)[µ] точки решетки c ∈ ℬ и поля высоты µ(x). Обе функции содержат одинаковое количество информации.
- 2. Затем мы покажем, что  $w(c)[\mu]$  зависит только от значения поля высот  $\mu$  в точке c и некоторых ее соседних и следующих за ближайшими соседями

точках в решетке *B*. Мы назовем этот небольшой набор соседних точек решетки *B* локальным фрагментом и докажем, что набор неравенств (2.167) имеет только *конечное* число целых решений на любых локальных фрагментах.

3. На последнем этапе, мы анализируем поведение зарядовой функции (2.168) через соответствующую потенциальную функцию w(c)[µ] для всех решений, вычисленных на предыдущем шаге, и показываем, что функция заряда (2.168) обладает всеми желаемыми свойствами для всех этих решений, что и завершает доказательство.

Локальные потенциалы. Введем локальный потенциал w для точки решетки  $c \in \mathscr{B}$ : он определяется как порядок полюса зарядовой функции  $\psi_{\pi}$  в точке c:

$$\psi_{\pi}(z) = \frac{\beta}{(z-c)^{w(c)}} \times (1 + \mathcal{O}(z-c)), \quad \text{as } z \to c.$$
 (2.174)

Заметим, что, когда величина w(c) отрицательна,  $\psi_{\pi}$  имеет в этой точке ноль порядка -w.

Используя (2.168), мы можем вывести выражение для локального потенциала w(c) в точке решетки c:

$$w(c) = \sum_{k=1}^{4} \left( \mu(c - \mathbf{h}_{k}) - \mu(c + \mathbf{h}_{k}) \right) - \sum_{1 \le i < j \le 4} \mu(c + \mathbf{h}_{i} + \mathbf{h}_{j}) + 2\sum_{k=1}^{4} \min_{\substack{1 \le i \le 4 \\ i \ne k}} \left\{ \mu(c + \mathbf{h}_{k} + \mathbf{h}_{i}) - \Delta_{i}(c + \mathbf{h}_{k}) \right\} - 2\sum_{1 \le i \le 4}^{4} \left\{ \mu(c + \mathbf{h}_{i}) - \Delta_{i}(c) \right\} + \delta_{c,0}, \qquad (2.175)$$

где первые два слагаемых взяты из отдельных ящиков  $\Phi_1$ , следующие два слагаемых представляют собой вклады четверок  $\Phi_{4,k}$  и пятерок  $\Phi_5$ , соответственно, а последний член – вклад вакуумного полюса в (2.168).

Чтобы учесть вклад кластера ящиков, таких как  $\Phi_{4,k}$  и  $\Phi_5$ , нам сначала нужно определить все ситуации, когда положение ящика  $\Box$  и всех соседних с ним позиций вдоль необходимого ребра  $\vec{e}_k$  заполнены. Рассмотрим ряд ящиков  $\mu(c)$ , зависших над некоторой позицией c:

$$\left\{\vec{\ell}(c), \, \vec{\ell}(c) + \vec{s}, \, \dots, \, \vec{\ell}(c) + (\mu(c) - 1)\vec{s}\right\},\tag{2.176}$$

где

$$\vec{\ell}(c) := \sum_{k=1}^{4} \ell_k(c)\vec{e}_k \qquad \text{if} \qquad \vec{s} := \sum_{k=1}^{4} \vec{e}_k \,. \tag{2.177}$$

Теперь сдвинем все эти коробки на вектор  $\vec{e}_k$ . Это эквивалентно параллельному переносу соответствующих сечений с помощью  $\mathsf{T}_k^{\mathrm{3D}}$ :

$$\Lambda_{1} := \left\{ \vec{\ell}(c + \mathbf{h}_{k}) + \Delta_{k}(c)\vec{s}, \vec{\ell}(c + \mathbf{h}_{k}) + (\Delta_{k}(c) + 1)\vec{s}, \dots \\ \dots, \vec{\ell}(c + \mathbf{h}_{k}) + (\Delta_{k}(c) + \mu(c) - 1)\vec{s} \right\}.$$
(2.178)

Теперь мы сравниваем этот набор с набором нависающих над  $c + h_k$  коробок:

$$\Lambda_2 := \left\{ \vec{\ell}(c + \mathsf{h}_k), \, \vec{\ell}(c + \mathsf{h}_k) + \vec{s}, \, \dots, \, \vec{\ell}(c + \mathsf{h}_k) + (\mu(c + \mathsf{h}_k) - 1)\vec{s} \right\} \,.$$
(2.179)

Используя набор неравенств (2.167) и  $\Delta_k(c) \ge 0$ , находим, что размер пересечения двух наборов ящиков (2.178) и (2.179) равен:

$$|\Lambda_1 \cap \Lambda_2| = \mu(c + \mathsf{h}_k) - \Delta_k(c) \,. \tag{2.180}$$

Чтобы вычислить размер пересечения всех множеств по всем требуемым направлениям  $\vec{e}_k$ , нужно всего лишь применить функцию минимума в (2.175).

**Решение локальных неравенств.** Теперь рассмотрим локальный фрагмент узлов решетки *B*, близких к точке *c*:

$$\Pi_{c} = \{c\} \cup \{c \pm \mathsf{h}_{k}\}_{1 \le k \le 4} \cup \{c + (\mathsf{h}_{i} + \mathsf{h}_{j})\}_{\substack{1 \le i, j \le 4\\ i \ne j}}, \qquad (2.181)$$

Первое и второе подмножества этого фрагмента представляют центр и восемь вершин куба в ячейке решетки Браве (см. рис. 2.8) соответственно, а последнее подмножество представляет собой шесть центров, находящихся в шести соседних ячейках напротив каждой грани куба. Ниже мы рисуем этот фрагмент со всеми ориентированными ребрами  $c \rightarrow c + h_k$  в нем, см. рисунок 2.10.



Рисунок 2.10 – Локальный фрагмент в решетке Браве.

Сначала рассмотрим расслоение поля высот над ориентированным циклом в фрагменте  $\Pi_c$ , который проходит через ящик в центре c, а затем через одну из четырех вершин (скажем,  $c + h_1$ ), затем через центр соседней ячейки (скажем,  $c + h_1 + h_2$ ), затем в вершине  $c - h_4$ , прежде чем вернуться в начальную точку (см. путь, отмеченный на рис. 2.10):

$$\begin{pmatrix} c \\ \mu_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+\mathbf{h}_1} \begin{pmatrix} c+\mathbf{h}_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+\mathbf{h}_2} \begin{pmatrix} c+\mathbf{h}_1+\mathbf{h}_2=c-\mathbf{h}_3-\mathbf{h}_4 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{+\mathbf{h}_3} \begin{pmatrix} c-\mathbf{h}_4 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+\mathbf{h}_4} \begin{pmatrix} c \\ \mu_0 \end{pmatrix}.$$
(2.182)

Используя набор неравенств (2.167), можно вывести следующие диапазоны возможных высот соседних ячеек  $\mu_{1,2,3}$  относительно высоты ячеек в центре  $\mu_0$ :

$$\begin{array}{ll}
\mu_{1} \leq \mu_{0} + \Delta_{1} \\
\mu_{2} \leq \mu_{1} + \Delta_{2} \\
\mu_{3} \leq \mu_{2} + \Delta_{3} \\
\mu_{0} \leq \mu_{3} + \Delta_{4}
\end{array} \xrightarrow{\mu_{0} - \Delta_{2} - \Delta_{3} - \Delta_{4}} \leq \mu_{1} \leq \mu_{0} + \Delta_{1} \\
\mu_{0} - \Delta_{3} - \Delta_{4} \leq \mu_{2} \leq \mu_{0} + \Delta_{1} + \Delta_{2} \\
\mu_{0} - \Delta_{4} \leq \mu_{3} \leq \mu_{0} + \Delta_{1} + \Delta_{2} + \Delta_{3}
\end{aligned}$$

$$(2.183)$$

где  $\Delta_i$  – соответствующие веса ребер, принимающие значения 0 или 1. Такие циклы можно провести через все прямоугольники в вершинах и центрах соседних ячеек в фрагменте  $\Pi_c$ . Отсюда следует, что для фрагмента  $\Pi_c$  набор неравенств (2.167) допускает только *конечный* набор целочисленных решений для заданного  $\mu_0$  (высота в центре *c* фрагмента, модуль). Обозначим такое решение как  $M(\Pi_c, \mu_0)$ .

Теперь мы можем посчитать количество таких решений. Заметим, что формула веса (2.175) симметрична относительно группы перестановок  $S_4$ , переставляющей  $\mathbf{h}_k \to \mathbf{h}_{\sigma(k)}, \sigma \in S_4$ . Поэтому мы опишем только представителей

156

орбит  $S_4$ . Мы находим **четыре** возможных распределения весов ребер в фрагменте  $\Pi_c$  по модулю действия  $S_4$ , показанных на рисунке 2.11, где мы использовали следующий цветовой код для ориентированных ребер:

(2.184)



Рисунок 2.11 – Локальные конфигурации весов ребер на фрагменте П<sub>c</sub>.

Мы будем называть конфигурацию  $M(\Pi_c, \mu_0)$  открытой, если ящик можно добавить или удалить из стопки ящиков поверх точки c, и закрытой в противном случае. А именно,  $M(\Pi_c, \mu_0)$  является открытой, если любая из конфигураций  $M(\Pi_c, \mu_0 \pm 1)$  также является решением (2.167) над  $\Pi_c$ , и закрытой в противном случае.

Следовательно, чтобы *доказать*, что зарядовая функция (2.168) обладает желаемыми свойствами, в частности наличием полюсов порядка 1 в позициях, где коробки можно добавлять или удалять, нам нужно доказать, что весовая функция (2.175) *может различать* открытые и закрытые решения  $M(\Pi_c, \mu_0)$ . И это можно сделать напрямую, поскольку неэквивалентные  $M(\Pi_c, \mu_0)$  образуют конечное множество. Мы вернемся к этому вычислению в конце этого раздела.

#### Анализ локальных конфигураций

Сначала, чтобы получить некоторое визуальное представление о поведении границ твердотельных разбиений, мы хотели бы обсудить структуру локальных картин – локальных форм трехмерной гиперповерхности границы твердотельного разбиения. Для этого мы представим явно только решения для одной конфигурации, а именно случая (в) на рис. 2.11, который является  $S_4$ симметричным. Мы выбираем симметричную конфигурацию  $S_4$  (в) на рис. 2.11, так как в этом случае решения (2.167) также можно разбить на отдельные  $S_4$ орбиты. В этом случае достаточно проанализировать отдельного представителя каждой орбиты.

Используя нашу стратегию рассмотрения только одного представителя на каждой  $S_4$ -орбите, мы получаем всего 28  $S_4$ -классов решений, соответствующих **28** локальным картинам, показанным на рис. 2.12, где мы использовали следующую цветовую кодировку для обозначения значения  $\mu(c)$  локального поля высоты:

$$\mu\left(\bullet\right) = \mu_0, \quad \mu\left(\circ\right) = \mu_0 - 1. \tag{2.185}$$

Можно было бы поднять локальные картины, изображенные на рис. 2.12, до трехмерных мозаичных разбиений. Однако мы не будем их здесь приводить, поскольку эти трехмерные мозаичные замощения имеют довольно сложную структуру, плохо передаваемую плоской печатью. Другими словами, каждое из этих замощений является уникальным представителем групповой орбиты S<sub>4</sub> и представляет собой локальную картину трехмерной гиперповерхности с «ямами», «холмами» и «седлами», ограничивающей твердотельное разбиение. Таким образом, мы приходим к выводу, что количество неэквивалентных локальных изображений для сплошных разбиений равно 28 по сравнению с локальными изображениями 3 и 8 для случаев диаграмм Юнга и плоских разбиений, соответственно.

Глядя на рис. 2.12, становится ясно, когда конфигурация полей высот в окрестности точки *с* является «открытой», а именно, когда твердотельное раз-



Рисунок 2.12 – Различные локальные решения  $M(\Pi_c, \mu_0)$  неравенств (2.167).

биение  $\pi$  допускает добавление или удаление ящиков потенциал w = 1, который соответствует полюсу первого порядка в зарядовой функции (2.168). В «закрытом» случае w неположителен, что указывает на ноль порядка -w в соответствующей точке решетки.

Теперь рассмотрим конфигурацию общего вида. Рассмотрим подъем  $\hat{\Pi}_c$ локального фрагмента  $\Pi_c$  на решетку  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^4$  (см. рис. 2.13). Из сложенных коробок в твердотельном разбиении  $\hat{\Pi}_c$  вырезает все слои коробок, спроецированных вектором (1, 1, 1, 1) на  $\mathscr{B}$ , поэтому  $\hat{\Pi}_c$  можно рассматривать как цилиндр высотой  $\mu_0$  и с трехмерным поперечным сечением. Как цилиндр,  $\hat{\Pi}_c$  имеет две границы: верхнюю и нижнюю. Верхняя граница принадлежит трехмерной поверхности, которая является частью внешней границы твердотельного разбиения, проекция которой в три измерения называется мозаичным замощением, тогда как нижняя граница находится на пересечении  $\hat{\Pi}_c$  со стенками четырехмерной комнаты, в углу которой сложены четырехмерные коробки, образующие само твердотельное разбиение.

Отфакторизуем все возможные локальные формы верхних границ этих цилиндров по  $S_4$ , получим **28** локальных картин, показанных на рис. 2.12. Когда мы отфакторизуем все локальные формы нижних границ по  $S_4$ , мы получаем **4** конфигурации локальных весов ребер, показанные на рис. 2.11. Тот факт, что зарядовая функция (2.168) симметрична относительно  $S_4$  (которая действует перестановкой  $h_{1,2,3,4}$ ), позволяет рассматривать только отдельных представителей локального фрагмента в классах сопряженности  $S_4$ . Однако, это не позволяет нам отфакторизровать по  $S_4$  верхнюю и нижнюю границы независимо — группа  $S_4$  действует на цилиндр  $\hat{\Pi}_c$  как единое целое!

Чтобы исправить ситуацию, выполним канонический разрез где-нибудь посередине цилиндра, как это изображено на рис. 2.13. Этот канонический разрез выбран так, чтобы он имел форму угла пустой четырехмерной комнаты, перенесенного в положение разреза, и, следовательно, являлся  $S_4$ -симметричным. Разрез делит  $\hat{\Pi}_c$  на два элемента:  $\hat{\Pi}_c^-$  и  $\hat{\Pi}_c^+$ . Поскольку форма разреза  $S_4$ симметрична, мы можем получить произвольный цилиндр  $\hat{\Pi}_c$ , склеив пару  $S_4$ -



Рисунок 2.13 — Подъем  $\hat{\Pi}_c$  локального фрагмента  $\Pi_c$  от проекции на твердотельное разбиение.

классов сопряженности  $\hat{\Pi}_c^-$  и  $\hat{\Pi}_c^+$  после наложения относительного поворота с помощью элемента  $g \in S_4$  (см. рис. 2.13).

Поскольку функция заряда (2.168) является экстенсивной по отношению к размеру твердотельного разбиения, произведения в выражении (2.168) разлагаются на произведения по  $\hat{\Pi}_c^-$  и  $\hat{\Pi}_c^+$ . Поэтому, чтобы доказать, что функция заряда обладает желаемыми свойствами, достаточно доказать, что ее компоненты  $\hat{\Pi}_c^-$  и  $\hat{\Pi}_c^+$  обладают желаемыми свойствами. Другими словами, нужно лишь проверить все классы  $S_4$ -сопряженности нижних границ, которые спариваются каноническим разрезом с верхней границей, а затем отдельно все классы  $S_4$ -сопряженности верхних границ. В общей сложности это дает нам только  $\mathbf{4} + \mathbf{28} = \mathbf{32}$  случая для проверки.

Прежде чем закончить этот подраздел, отметим, что мы явно проверили с помощью компьютерных вычислений помимо вышеперечисленных случаев более широкий класс решений набора неравенств (2.167) для всех возможных конфигураций весов ребер на рис. 2.11, без учета действия  $S_4$ . Фактически, на всякий случай мы даже рассмотрели локальный участок размером больше  $\Pi_c$ , добавив к  $\Pi_c$  узлы решетки, расположенные в 12 центрах  $\mathbf{h}_i - \mathbf{h}_{j\neq i}$  ячеек решетки напротив 12 ребер куба, см. рисунок 2.8. Как и ожидалось, для этого более крупного локального фрагмента существует 7 (вместо 4) локальных конфигураций весов ребра, и для каждой такой конфигурации существует 14 656 решений неравенств (2.167). Компьютерная проверка всех этих  $\mathbf{7} \times \mathbf{14} \mathbf{656} = \mathbf{102} \mathbf{592}$ случаев подтверждает, что w = 1 (соответственно  $w \leq 0$ ) для открытых (соответственно закрытых) локальных решений, тем самым подтвердив, что предложенная зарядовая функции (2.168) удовлетворяет набору запрашиваемых условий.

## 3 Алгебры рассеяния состояний D-бран

## 3.1 Локализация на Кулонову ветвь

В этой главе мы построим модель локализации суперсимметричной матричной квантовой механики на Кулонову ветвь. Эта модель дуальна рассмотренной нами в главе 2. Локализация на Кулонову ветвь описывает многоцентровую молекулярную картину, к описанию которой мы переходим, и она определяется особым режимом масштабирования параметров. Введем масштабирующие параметры в выражение для суперзарядов (см. (А.56)):

$$\mathcal{Q} = e^{\mathbf{s}_{1}h_{1} + \mathbf{s}_{2}h_{2}} \left( \sum_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{Tr} \left( -\bar{\lambda}_{v}^{i}\Pi_{v}^{3} - 2\bar{\lambda}_{v}^{2}\Pi_{v}^{z} \right) + \right. \\
\left. + i\sqrt{2} \sum_{(a:v \to w) \in \mathcal{A}} \operatorname{Tr} \left( \psi_{a1}\pi_{a} + 2i\mathbf{s}_{3}(\bar{q}_{a}\bar{Z}_{w} - \bar{Z}_{v}\bar{q}_{a})\psi_{a2} \right) \right) e^{-\mathbf{s}_{1}h_{1} - \mathbf{s}_{2}h_{2}}, \\
\mathcal{Q}^{\dagger} = e^{-\mathbf{s}_{1}h_{1} - \mathbf{s}_{2}h_{2}} \left( \sum_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{Tr} \left( -\lambda_{v}^{1}\Pi_{v}^{3} - 2\lambda_{v}^{2}\Pi_{v}^{\bar{z}} \right) - \right. \\
\left. - i\sqrt{2} \sum_{(a:v \to w) \in \mathcal{A}} \operatorname{Tr} \left( \bar{\psi}_{\dot{a}1}\bar{\pi}_{a} - 2i\mathbf{s}_{3}\bar{\psi}_{\dot{a}2}(Z_{w}q_{a} - q_{a}Z_{v}) \right) \right) e^{\mathbf{s}_{1}h_{1} + \mathbf{s}_{2}h_{2}}, \quad (3.1)$$

где П, <br/>  $\pi$  – соответствующие операторы импульса,

$$h_{1} = \sum_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{Tr} X_{v}^{3} \left( \theta_{v} + \sum_{a:v \to \bullet} \bar{q}_{a} q_{a} - \sum_{a:\bullet \to v} q_{a} \bar{q}_{a} \right) ,$$
  

$$h_{2} = \frac{1}{2} \sum_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{Tr} X_{v}^{3} \left[ Z_{v}, \bar{Z}_{v} \right] .$$
(3.2)

Мы предполагаем  $\mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_1$ , а также ожидаем, что поля векторных мультиплетов  $X_v^i$  могут приобретать вакуумные средние значения. При локализации на Кулонову ветвь поля  $q_a$  не получают вакуумного среднего, однако последнее противоречит классическому вакуумному условию  $\partial_{X^3}h_1 = 0$ , если мы также не изменим масштаб  $\theta_v$  на  $\theta_v/\mathbf{s}_1$ . Такое общее равномерное изменение масштаба параметров ФИ не приводит к пересечению стенок маргинальной стабильности.

#### 3.1.1 Вклад узлов колчана

Прежде всего, устремим параметр  $\mathbf{s}_2$  к бесконечности. При этом средние значения  $X^i$  коммутируют. Используя калибровочное преобразование  $U(n_v)$  в каждой вершине колчана v, мы можем привести все  $X_v^i$  к диагональному виду. Поэтому мы раскладываем поля в следующем виде:

диагональный недиагональный

Для простоты сначала рассмотрим случай, когда у нас есть колчан с одним узлом  $v \, c \, n_v = 2$ , таким образом все  $X_v^i$  – матрицы  $2 \times 2$ . Оказывается, результирующий гамильтониан зависит только от разностей диагональных значений  $X_v^i$ . Поэтому мы выбираем следующую параметризацию:

$$X_v^i = \begin{pmatrix} x_i & \frac{1}{\sqrt{\mathbf{s}_2}} w_i \\ \frac{1}{\sqrt{\mathbf{s}_2}} \bar{w}_i & 0 \end{pmatrix}.$$
 (3.4)

Для недиагональной части фермионной матрицы мы используем следующие обозначения:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \chi \\ \rho & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.5}$$

Основной вклад в гамильтониан для поля  $w_i$  имеет вид:

$$\mathcal{H} = \mathbf{s}_2 \left[ -\sum_i \partial_{w_i} \partial_{\bar{w}_i} + \sum_i |\epsilon_{ijk} w_j x_k|^2 - \bar{\chi} \bar{\sigma}^i x_i \chi + \bar{\rho} \bar{\sigma}^i x_i \rho \right] + O\left(\mathbf{s}_2^{\frac{1}{2}}\right) . \quad (3.6)$$

Естественным будет выбрать новые координаты:

$$u_i = \epsilon_{ijk} w_j x_k$$
.

Эти координаты не определяют матричные координаты целиком, поскольку они удовлетворяют линейному соотношению  $w_i u_i = 0$ . Тогда введем четвертую координату:

$$u_4 = \sum_i w_i x_i$$

Новый сформированный ортонормированный базис имеет следующий вид:

$$v_1 = \frac{x_2 u_1 - x_1 u_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} |\vec{x}|}, \quad v_2 = \frac{u_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad v_3 = \frac{u_4}{|\vec{x}|}$$

В этих координатах гамильтониан приобретает следующий вид:

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{3} \partial_{\bar{v}_i} \partial_{v_i} + |\vec{x}|^2 \sum_{i=1}^{2} |v_i|^2 - \bar{\chi} \bar{\sigma}^i x_i \chi + \bar{\rho} \bar{\sigma}^i x_i \rho \,. \tag{3.7}$$

Заметим, что степень свободы, обозначаемая  $v_3$ , не имеет потенциального члена. Это происходит потому, что  $v_3$  – это плоское направление, отвечающее калибровке. Мы можем переписать бозонную часть генераторов калибровочного вращения как

$$\mathbf{g}(\varphi) = \operatorname{Tr}\left[\varphi, X^{i}\right] \Pi^{i} = \frac{\sqrt{\mathbf{s}_{2}}}{2} \left[\operatorname{Tr}\left(\varphi(\sigma_{1} + \mathrm{i}\sigma_{2})\right) |\vec{x}|\partial_{v_{3}} + \operatorname{Tr}\left(\varphi(\sigma_{1} - \mathrm{i}\sigma_{2})\right) |\vec{x}|\partial_{\bar{v}_{3}}\right] + O\left(\mathbf{s}_{2}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

$$(3.8)$$

Полученная G-инвариантная волновая функция не зависит от  $v_3$ , поэтому мы не требуем, чтобы она была  $L^2$ -интегрируемой. Она должна быть  $L^2$ -интегрируемой с мерой  $d^2v_1d^2v_2$ , а направление, связанное с  $v_3$ , мы считаем компактным координатным направлением в калибровочной группе. Для определения волновой функции необходимо определить первый фермионный вакуум  $|0\rangle$ . Определим его таким образом, чтобы он уничтожался всеми операторами без черты:

$$\chi_{lpha}|0
angle=
ho_{lpha}|0
angle=0$$
 .

В этих условиях нетрудно вычислить основное состояние гамильтониана (3.7):

$$\Psi = C e^{-|\vec{x}|^{-1}|\epsilon_{ijk}w_j x_k|^2} \left( \bar{z}\bar{\chi}_1 - (x^3 - |\vec{x}|)\bar{\chi}_2 \right) \left( \bar{z}\bar{\rho}_1 - (x^3 + |\vec{x}|)\bar{\rho}_2 \right) |0\rangle, \qquad (3.9)$$

где C – некоторая нормировочная константа. В первом порядке гамильтониан не имел кинетического члена для полей  $x_i$ . Поэтому мы можем умножить это

состояние на любую волновую функцию  $\psi(\vec{x})$  или считать  $C \vec{x}$ -зависимой. В конце концов, это некоторый общий множитель  $\Psi$ , зависящий от  $\vec{x}$ . Составная волновая функция  $|\psi\Psi\rangle$  принадлежит нулевому пространству гамильтониана и суперзарядов. Таким образом, у нас есть условия:

$$\langle \psi' \Psi | Q_{\alpha} | \psi \Psi \rangle = \langle \psi' | Q_{\alpha}^{\text{eff}} | \psi \rangle = 0, \quad \langle \psi' \Psi | Q_{\alpha} | \psi \Psi \rangle = \langle \psi' | \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^{\text{eff}} | \psi \rangle = 0.$$
(3.10)

Волновая функция основного состояния  $\psi$  аннигилируется эффективными суперзарядами:

$$Q_{\alpha}^{\text{eff}} = \langle \Psi | Q_{\alpha} | \Psi \rangle = \mathbf{i} (\sigma^k \bar{\lambda})_{\alpha} (\partial_{x^k} + B_k) ,$$
  

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^{\text{eff}} = \langle \Psi | \bar{Q}_{\dot{\alpha}} | \Psi \rangle = \mathbf{i} (\lambda \sigma^k)_{\alpha} (\partial_{x^k} - B_k) ,$$
(3.11)

где мы ввели эффективную связность Берри:

$$B_k = \frac{\langle \Psi | \partial_{x^k} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \,. \tag{3.12}$$

Заметим, что выбор другой нормализации C' индуцирует калибровочное преобразование связности Берри:

$$B_k \to B_k + \partial_{x^k} \log C' - \partial_{x^k} \log C$$
. (3.13)

Таким образом, выбрав нормировку C в волновой функции (3.9), мы зафиксируем калибровку связности Берри. Оказывается, в этом случае связность Берри калибровочно эквивалентна тривиальной связности, поэтому мы выбираем C таким образом, чтобы  $B_k = 0$ , что соответствует  $C = |\vec{x}|^{-2}\bar{z}^{-1}$ , где  $z = x_1 + ix_2$ . Мы определяем волновую функцию, соответствующую паре диагональных средних значений  $\vec{x}_{v,i}$  и  $\vec{x}_{v,j}$  для векторного мультиплета в узле vколчана как

$$\mathscr{V}_{v,ij} = \frac{1}{|\vec{x}_{v,i} - \vec{x}_{v,j}|^2 (\bar{z}_{v,i} - \bar{z}_{v,j})} \times \\
\times \exp\left[ - |\vec{x}_{v,i} - \vec{x}_{v,j}|^{-1} |\vec{w} \times (\vec{x}_{v,i} - \vec{x}_{v,j})|^{-1})|^2 \right] \times \\
\times \left( (\bar{z}_{v,i} - \bar{z}_{v,j}) \, \bar{\chi}_{v,ij,1} - \left( (x_{v,i}^3 - x_{v,j}^3) - |\vec{x}_{v,i} - \vec{x}_{v,j}| \right) \, \bar{\chi}_{v,ij,2} \right) \times \\
\times \left( (\bar{z}_{v,i} - \bar{z}_{v,j}) \, \bar{\rho}_{v,ij,1} - \left( (x_{v,i}^3 - x_{v,j}^3) + |\vec{x}_{v,i} - \vec{x}_{v,j}| \right) \, \bar{\rho}_{v,ij,2} \right) |0\rangle.$$
(3.14)

Такая волновая функция является основным строительным блоком вклада узлов в общую волновую функцию. Свойства этой функции относительно действия генератора  $J_3 + R$  нам понадобятся для расчета спиновых характеров (см. Приложение А.4) в дальнейшем. Волновая функция разложима на  $J_3 + R$ -инвариантную часть и антиголоморфную часть:

$$\mathscr{V}_{v,ij} = \mathscr{V}_{v,ij,(J_3+R)-\text{inv}} \mathscr{V}_{v,ij,\overline{\text{holo}}}, \quad \mathscr{V}_{v,ij,\overline{\text{holo}}} = (\bar{z}_{v,i} - \bar{z}_{v,j})^{-1}.$$
(3.15)

Также важно отметить, что большое калибровочное преобразование в узле v переставляет местами  $z_{v,i}$  и  $z_{v,j}$  и одновременно преобразует фермионы:

$$\chi_{ij} \mapsto \rho_{ji}, \quad \rho_{ij} \mapsto \chi_{ji}.$$
 (3.16)

Легко заметить, что  $\mathscr{V}_{v,ij,(J_3+R)-\text{inv}}$  является инвариантом больших калибровочных преобразований.

## 3.1.2 Вклад морфизмов колчана

Аналогичным образом мы строим вклад стрелок, отвечающих морфизмам колчана. Чтобы вычислить строительные блоки для волновой функции, достаточно рассмотреть простейший нетривиальный колчан со стрелой:

$$\textcircled{1} \longrightarrow \textcircled{1}$$

Здесь числа в узлах обозначают вектор размерности. Стрелочный лагранжиан зависит только от разностного вектора  $\vec{x}_w - \vec{x}_v$ , поэтому для краткости в этом подразделе мы будем использовать следующее обозначение:  $\vec{x} := \vec{x}_w - \vec{x}_v$ . И у нас есть только одно поле q. Поскольку в этой фазе поле q не приобретает вакуумное среднее, мы разлагаем его вокруг критической точки q = 0, переопределяя  $q \to q/\sqrt{s_1}$ . Поправки первого порядка имеют следующий вид:

$$Q_{\alpha} = i\sqrt{2\mathbf{s}_{1}} \left(\psi_{\alpha}\pi - 2i\bar{q}x^{i}(\sigma^{i0}\psi)_{\alpha}\right) + O(\mathbf{s}_{1}^{0}),$$
  

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -i\sqrt{2\mathbf{s}_{1}} \left(\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\pi} + 2i(\bar{\psi}\bar{\sigma}^{0i})_{\dot{\alpha}}x^{i}q\right) + O(\mathbf{s}_{1}^{0}),$$
  

$$\mathcal{H} = \mathbf{s}_{1} \left(-\partial_{\bar{q}}\partial_{q} + |\vec{x}|^{2}|q|^{2} - \bar{\psi}\bar{\sigma}^{i}x^{i}\psi\right) + O(\mathbf{s}_{1}^{0}).$$
(3.17)

Волновая функция основного состояния, аннигилируемая этими суперзарядами, имеет следующий вид:

$$\Psi = C e^{-|\vec{x}||q|^2} \left( \bar{z} \bar{\psi}_{\dot{1}} - (x_3 - |\vec{x}|) \bar{\psi}_{\dot{2}} \right) |0\rangle .$$
(3.18)

Это состояние отвечают элементу эквивариантных когомологий представления колчана (см. также [98]). Предположим,  $x_3 = 0$ , тогда мы могли бы выбрать  $Q_1$ в качестве эквивариантного  $\partial$ -оператора Дольбо [67; 144]:

$$Q_1 = \partial_q + \iota_{\bar{\xi}}, \qquad (3.19)$$

где  $\xi$  — векторное поле, порожденное эквивариантным вращением q с параметром  $\bar{z}$ . Чтобы отобразить состояние (3.18) в форму, мы должны выбрать другой фермионный вакуум  $|\tilde{0}\rangle$ , такой, что он аннигилируется  $\iota$ :

$$|\tilde{0}\rangle := \bar{\psi}_{\dot{1}}|0\rangle$$

В этом случае получим:

$$\Psi = C e^{-|z||q|^2} (\bar{z} + |z| dq \wedge d\bar{q}) = C \ \bar{z} \ e^{\frac{|z|}{z} \{Q_1, iqd\bar{q}\}} \sim \bar{z} \,. \tag{3.20}$$

Таким образом, эта волновая функция просто гомотопна представителю Тома соответствующего класса Эйлера (см. раздел 2.1.2 и [67, глава 10]).

Мы снова можем выбрать правильную нормировку *С* для волновой функции (3.18), зафиксировав связность Берри в эффективных суперзарядах:

$$Q_{\alpha}^{\text{eff}} = \langle \Psi | Q_{\alpha} | \Psi \rangle = \mathbf{i} (\sigma^{k} \bar{\lambda})_{\alpha} (\partial_{x^{k}} + B_{k}) + \lambda_{\alpha} D,$$
  

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^{\text{eff}} = \langle \Psi | \bar{Q}_{\dot{\alpha}} | \Psi \rangle = \mathbf{i} (\lambda \sigma^{k})_{\alpha} (\partial_{x^{k}} - B_{k}) + \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} D.$$
(3.21)

В данном случае мы получаем нетривиальный *D*-член, поскольку существует ненулевое среднее

$$\langle |q|^2 \rangle = \frac{1}{|\vec{x}|} \,. \tag{3.22}$$

А для связности Берри имеем:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{i}{2} \nabla \frac{1}{|\vec{x}|} \,. \tag{3.23}$$

Связность Берри соответствует векторному потенциалу, создаваемому дираковским монополем. Мы выбираем такие нормировки, чтобы в северном(+) и южном(-) полушариях связность задавалась каноническими выражениями:

$$\vec{B}_{\pm} = -\frac{i}{2} \left( \pm 1 - \frac{x_3}{|\vec{x}|} \right) \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
(3.24)

Соответствующие нормировки различаются в зависимости от того, требуем ли мы, чтобы векторные потенциалы были регулярными в северном или южном полушарии:

$$C_{+} = |\vec{x}|^{\frac{1}{2}} \left(|\vec{x}| + x_{3}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad C_{-} = |\vec{x}|^{\frac{1}{2}} \left(|\vec{x}| + x_{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$
 (3.25)

Строительный блок для вклада колчанных морфизмов определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{a:(v,i)\to(w,j)} &= \left( \frac{|\vec{x}_{w,j} - \vec{x}_{v,i}|}{|\vec{x}_{w,j} - \vec{x}_{v,i}| + (x_{w,j}^3 - x_{v,i}^3)} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left( \frac{z_{w,j} - z_{v,i}}{\bar{z}_{w,j} - \bar{z}_{v,i}} \right)^{\frac{1}{2}\Theta\left(x_{v,i}^3 - x_{w,j}^3\right)} e^{-|\vec{x}_{v,i} - \vec{x}_{w,j}||q_{a,ij}|^2} \times \\ &\times \left[ \left( \bar{z}_{w,j} - \bar{z}_{v,i} \right) \bar{\psi}_{1,a,ij} - \left( \left( x_{w,j}^3 - x_{v,i}^3 \right) - |\vec{x}_{w,j} - \vec{x}_{v,i}| \right) \bar{\psi}_{2,a,ij} \right] |0\rangle , \end{aligned}$$

$$(3.26)$$

где  $\Theta$  – ступенчатая функция Хевисайда.

Волновая функция разложима на  $J_3 + R$ -инвариантную часть и антиголоморфную часть:

$$\mathscr{A}_{a,ij} = \mathscr{A}_{a,ij,(J_3+R)-\text{inv}}\mathscr{A}_{a,ij,\overline{\text{holo}}}, \quad \mathscr{A}_{a,ij,\overline{\text{holo}}} = (\bar{z}_{w,j} - \bar{z}_{v,i})^{\Theta(x^3_{w,j} - x^3_{v,i})}.$$
(3.27)

# 3.1.3 Молекула БПЗ

Собрав воедино подготовительные вычисления, выполненные в предыдущих подразделах, построим приближенную волновую функцию следующего вида:

$$\Psi\left[\mathscr{Q}, \vec{n}, \vec{\theta}\right] = \psi_{\mathrm{mol}} \left(\prod_{\substack{v \in \mathcal{V}(\mathscr{Q}) \\ i < j}} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{n_v} \mathscr{V}_{v,ij}\right) \left(\prod_{(a:v \to w) \in \mathcal{A}(\mathscr{Q})} \prod_{i=1}^{n_v} \prod_{j=1}^{n_w} \mathscr{A}_{a,ij}\right), \quad (3.28)$$

где молекулярная часть  $\psi_{mol}$  волновой функции аннигилируется эффективными суперзарядами, соответствующими системе взаимно взаимодействующих дионов (для сравнения см. [98]):

$$Q_{\alpha} = \sum_{v \in \mathcal{V}} \sum_{i=1}^{n_{v}} \left[ -\mathrm{i}(\sigma^{0}\bar{\lambda}_{v,i})_{\alpha} D_{v,i} - (\vec{\sigma}\bar{\lambda}_{v,i})_{\alpha} \left( -\mathrm{i}\vec{\nabla}_{v,i} - \vec{A}_{v,i} \right) \right] ,$$
  
$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = \sum_{v \in \mathcal{V}} \sum_{i=1}^{n_{v}} \left[ \mathrm{i}(\lambda_{v,i}\sigma^{0})_{\alpha} D_{v,i} - (\lambda_{v,i}\vec{\sigma})_{\alpha} \left( -\mathrm{i}\vec{\nabla}_{v,i} - \vec{A}_{v,i} \right) \right] .$$

$$(3.29)$$

Эффективные *D*-члены определяют набор соотношений, соответствующих уравнениям Ф.Денефа:

$$D_{v,i} = \theta_v + \sum_{w \in \mathcal{V}} \left\{ \sum_{a:v \to w} \sum_{j=1}^{n_w} \frac{1}{|\vec{x}_{v,i} - \vec{x}_{w,j}|} - \sum_{a:w \to v} \sum_{j=1}^{n_w} \frac{1}{|\vec{x}_{v,i} - \vec{x}_{w,j}|} \right\}.$$
 (3.30)

А векторный потенциал  $\vec{A}_{\alpha}$  соответствует дионному взаимодействию и удовлетворяет:

$$\vec{\nabla}_{\alpha} D_{\beta} = \vec{\nabla}_{\beta} D_{\alpha} = \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla}_{\alpha} \times \vec{A}_{\beta} + \vec{\nabla}_{\beta} \times \vec{A}_{\alpha} \right) \,. \tag{3.31}$$

Эта система описывает совокупность элементарных бесструктурных дионов [98]. Каждой вершине колчана v сопоставляется  $n_v$  дионов одного и того же зарядового вектора  $\gamma_v$ , принимающего значения в решетке зарядов Г. Данные колчана могут быть закодированы в виде антисимметрического спаривания на решетке  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , удовлетворяющего условию:

$$\langle \gamma_v, \gamma_w \rangle = \#(a: v \to w) - \#(a: w \to v), \qquad (3.32)$$

где мы считаем стрелки, протекающие между соответствующими узлами колчана. Тогда поля  $\vec{x}_{v,i}$  параметризуют расположение дионов в  $\mathbb{R}^3$ .

Для вычисления спинового характера (А.63) нам нужно вставить соответствующую петлю Вильсона. Введение петли Вильсона для  $J_3 + R$  аналогично включению  $\Omega$ -фона, как в [145], или постоянного магнитного поля, параметризованного напряженностью поля  $\eta > 0$ , направленного вдоль третьей оси в  $\mathbb{R}^3$ . Мы имитируем эту вставку, модифицируя производные:<sup>1</sup>

$$\partial_z \to \partial_z + \eta \bar{z}, \quad \partial_{\bar{z}} \to \partial_{\bar{z}} - \eta z.$$

Мы следуем подходу [146] и локализуем состояния на неподвижных точках  $J_3 + R$ -генератора: на третьей оси в  $\mathbb{R}^3$ . При локализации векторные поля  $\vec{x}_{v,i}$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Ту же деформацию можно имитировать, включив  $\Omega_{\eta}$ -фон или изменив функцию высоты  $h_1 \to h_1 + \eta \text{Tr} Z \bar{Z}$ . Эта деформация также влияет на вклад вершин (3.14), однако она имеет порядок  $\eta$ , поэтому в дальнейшем мы ею пренебрегаем.

развивают вакуумные средние вдоль третьей оси, которые мы обозначим как  $x_{v,i}^*$ . Эти значения удовлетворяют уравнениям Денефа:

$$r_{v} + \sum_{w \in \mathcal{V}} \left\{ \sum_{a:v \to w} \sum_{j=1}^{n_{w}} \frac{1}{|x_{v,i}^{*} - x_{w,j}^{*}|} - \sum_{a:w \to v} \sum_{j=1}^{n_{w}} \frac{1}{|x_{v,i}^{*} - x_{w,j}^{*}|} \right\} = 0.$$
(3.33)

Разложение суперзарядов вокруг этой критической точки имеет следующий вид:

$$Q_{1} = i \sum_{v,i} \bar{\lambda}_{v,i}^{i} \left( \partial_{x_{v,i}^{3}} - \sum_{w,j} \operatorname{sign}(x_{v,i}^{*} - x_{w,j}^{*}) \times \left( \sum_{a:v \to w} \frac{x_{v,i}^{3} - x_{w,j}^{3}}{|x_{v,i}^{*} - x_{w,j}^{*}|^{2}} - \sum_{a:w \to v} \frac{x_{v,i}^{3} - x_{w,j}^{3}}{|x_{v,i}^{*} - x_{w,j}^{*}|^{2}} \right) \right) + i \sum_{v,i} \bar{\lambda}_{v,i}^{i} \left( 2\partial_{z_{v,i}} + 2\eta \bar{z}_{v,i} - \frac{1}{2} \sum_{w,j} \operatorname{sign}(x_{v,i}^{*} - x_{w,j}^{*}) \times \left( \sum_{a:v \to w} \frac{\bar{z}_{v,i} - \bar{z}_{w,j}}{|x_{v,i}^{*} - x_{w,j}^{*}|^{2}} - \sum_{a:w \to v} \frac{\bar{z}_{v,i} - \bar{z}_{w,j}}{|x_{v,i}^{*} - x_{w,j}^{*}|^{2}} \right) \right).$$

$$(3.34)$$

Последний член во второй скобке имитирует вклад электромагнитного поля электрон-дионной системы. Электромагнитное поле диона имеет точечный источник, поэтому вблизи полюсов сферы оно направлено вдоль третьей оси и имеет величину ~  $1/r^2$ . Это поле действует как дополнительная поправка к введенному нами постоянному полю  $\eta$ . Задача о подсчете собственных состояний гамильтона в плоскости с включенным магнитным полем, перпендикулярным этой плоскости, имеет хрестоматийное решение в терминах уровней Ландау [147]. Когда  $r_v$  обращается в ноль, состояние приближается к границе области стабильности. Связанные молекулы дионов приобретают гигантские физические размеры [148]. Взаимное электромагнитное взаимодействие становится незначительным по сравнению с внешним полем  $\eta$ . Таким образом, в конечном итоге мы получаем молекулярную волновую функцию в (3.28), аппроксимированную состояниями Холла:

$$\psi_{\rm mol} = \psi(x_{v,i}^3) \prod_{v \in \mathcal{V}} \prod_{i=1}^{n_v} \bar{z}_{v,i}^{\ell_{v,i}} e^{-\eta z_{v,i} \bar{z}_{v,i}} |0\rangle \,. \tag{3.35}$$

Здесь уровень Ландау задается параметром  $\ell_{v,i} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

Эта волновая функция снова разложима на  $J_3 + R$ -инвариантную часть и антиголоморфную часть, заданную холловским состоянием:

$$\psi_{\text{mol}} = \psi_{(J_3+R)-\text{inv}}\psi_{\overline{\text{holo}}}, \quad \psi_{\overline{\text{holo}}} = \prod_{v \in \mathcal{V}} \prod_{i=1}^{n_v} \bar{z}_{v,i}^{\ell_{v,i}}.$$
(3.36)

 $\psi_{(J_3+R)-inv}$  заведомо не является  $L^2$ -интегрируемой функцией. Эта функция должна быть инвариантной относительно перемещения общего центра масс дионной системы вдоль третьей оси, поэтому потенциал имеет плоские направления. В принципе, для непримитивных размерных векторов можно ожидать вклада многомерных состояний, поэтому пространство модулей представления колчана становится сингулярным с ветвями различных размерностей.

Как было отмечено в [146; 149] уравнения Денефа (3.33) описывают критические точки функции высоты:

$$W = \sum_{v \in \mathcal{V}} r_v \sum_{i=1}^{n_v} x_{v,i} + \sum_{(a:v \to w) \in \mathcal{A}} \sum_{i=1}^{n_v} \sum_{j=1}^{n_w} \operatorname{sign} \left( x_{v,i} - x_{w,j} \right) \log |x_{v,i} - x_{w,j}| \,. \tag{3.37}$$

Соответствующая волновая функция  $\psi(x_{v,i}^3)$  задается коцепью в комплексе Морса [62], порожденного критическими точками функции высоты W, которые мы обозначили как  $x^*$ . Соответствующую коцепь Морса обозначим как

$$\Lambda(x^*) = \bigwedge_{\alpha} dx_{\alpha}^{\Theta(-\omega_{\alpha})}$$

где  $\omega_{\alpha}$  – собственные значения гессиана  $\partial_{x_{v,i}}\partial_{x_{w,j}}W|_{x^*}$  и  $x_{\alpha}$  – соответствующие собственные векторы.

Как мы уже видели, общую волновую функцию основного состояния можно разложить как

$$\Psi_{\rm mol} = \Psi_{(J_3+R)-\rm inv} \Psi_{\rm \overline{holo}} \,. \tag{3.38}$$

Инвариантная часть не участвует в подсчете спинового характера. На волновую функцию и критические точки (3.33) естественным образом действует симметрическая группа  $\prod_{v} S_{n_v}$ , переставляющая переменные вершин колчана. Это действие соответствует большим калибровочным *G*-преобразованиям. Физические

волновые функции соответствуют симметризации найденных локализованных волновых функций. Подобная симметризация применяется и в волновых функциях Лафлина, однако, в данном случае мы не накладываем на эффективные частицы какой-то специальной статистики. При подсчете индекса БПЗ можно думать о нем как об эквивариантной сумме по отношению к действию этой симметрической группы, которая сводится к сумме по неподвижным точкам. В фиксированных точках часть волновой функции, обозначенная как  $\Psi_{(J_3+R)-inv}$ , не вносит вклад в индекс, и учитывать нужно лишь  $\Psi_{holo}$ . Поэтому достаточно учитывать лишь вклад F- и  $(J_3 + R)$ -неинвариантных частей, т.е. антиголоморфной части, задаваемой симметризацией:

$$H_{0,\overline{\text{holo}}}\left(\mathscr{Q},\vec{n},\vec{\theta}\right) = \bigoplus_{x^*;\,\ell_{v,i}\geq 0} \mathbb{C} \underset{v}{\text{Sym}} \Lambda(x^*) \times \left( \prod_{v\in\mathcal{V}} \left( \prod_{i=1}^{n_v} \bar{z}_{v,i}^{\ell_{v,i}} \prod_{\substack{i,j=1\\i< j}}^{n_v} (\bar{z}_{v,i} - \bar{z}_{v,j})^{-1} \right) \right) \times \left( \sum_{(a:v\tow)\in\mathcal{A}} \prod_{i=1}^{n_v} \prod_{j=1}^{n_w} \prod_{i=1}^{n_w} (\bar{z}_{w,j} - \bar{z}_{v,i})^{\Theta(x^*_{w,j} - x^*_{v,i})} \right).$$
(3.39)

Здесь сумма производится по решениям уравнений Денефа (3.33) и уровням Ландау, а симметризация проходит по перестановкам переменных в каждой вершине колчана. Выражение для суперсимметричного индекса БПЗ сводится к следу только по этим антиголоморфным состояниям:

$$\Omega(y) = (-1)^{|\mathcal{A}| + |\mathcal{V}| - 1} y_{v}^{\sum_{v} \frac{n_{v}(n_{v}-1)}{2} + |\mathcal{A}| - 1} (y - y^{-1}) \times \operatorname{Tr}_{H_{0,\overline{holo}}} (-1)^{F} y^{-2\mathcal{J}}, 
\mathcal{J} = \sum_{v,i} \bar{z}_{v,i} \partial_{\bar{z}_{v,i}}.$$
(3.40)

Основная счетная часть этого громоздкого выражения –  $\text{Tr}_{H_{0,\overline{holo}}}$   $(-1)^F y^{-2\mathcal{J}}$ . Этот член соответствует вычислению полинома Пуанкаре. Чтобы сопоставить его с спиновым индексом, мы добавили множитель  $(y - y^{-1})$ , соответствующий вкладу центра масс, который следует исключить, и общие мономиальные коэффициенты, чтобы полученное выражение соответствовало индексу, инвариантному относительно преобразования  $\Omega(y) = \Omega(y^{-1})$  для гладких колчанных пространств модулей.

Также следует подчеркнуть, что  $H_{0,\overline{holo}}$  не является реальным гильбертовым пространством  $H_0$  основных состояний.  $H_{0,\overline{holo}}$  лишь квазиизоморфна  $H_0$ : совпадают только их индексы, т.е. эйлеровы характеристики. Чтобы построить реальное пространство  $H_0$  согласно работе [62], нам нужно построить дифференциал Морса

$$d_{\mathrm{Morse}}:\quad H_{0,\overline{\mathrm{holo}}}[f]\longrightarrow H_{0,\overline{\mathrm{holo}}}[f+1]\,,$$

насыщаемый наиболее крутыми по функциям высоты нисходящими потоками. Полученный *H*<sub>0</sub> определяется как когомология:

$$H_0 = H^* \left( H_{0,\overline{\text{holo}}}, d_{\text{Morse}} \right) . \tag{3.41}$$

## 3.1.4 Формула для индекса Манскота-Пьолина-Сена

Простой способ расчета индекса (3.39) был предложен в работах [146; 149; 150]. Он основан на взаимодействии статистик Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна и Больцмана. Мы могли заметить, что симметризация, появившаяся в (3.39), соответствует остатку интегрирования по калибровочной группе, и, как мы уже упоминали, индекс, который мы вычисляем, соответствует эквивариантному интегралу. Поэтому индекс сводится к сумме по неподвижным точкам. Неподвижные точки симметрической группы могут быть помечены разбиениями  $\{(l)^{k_l}\}$ . Например, эквивариантный характер для симметричной группы определяется следующим образом:

$$\chi_{\text{sym}}(n) = \sum_{\substack{\{k_l\}\\\sum_l lk_l = n}} \left( \prod_l \frac{1}{k_l! l^{k_l}} \right) \chi\left(\{(l)^{k_l}\}\right) , \qquad (3.42)$$

где  $\chi$  – характер без наложения какой-либо симметризации. В качестве простейшей демонстрации этой концепции мы могли бы ввести эквивариантный характер полиномов от *n* переменных, взвешивая каждый моном с химическим потенциалом  $q^{\text{степень}}$ . Тогда характер симметричных многочленов от *n* переменных будет иметь вид

$$\chi_{\text{sym}}(n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-q^j}$$

Неподвижные точки симметрической группы представляют собой мономы совпадающих степеней. Например, фиксированные точки S<sub>3</sub>:

$$\{3\}: z_1^k z_2^k z_3^k, \quad \{2,1\}: z_1^{k_1} z_2^{k_1} z_3^{k_2}, \quad \{1,1,1\}: z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3}.$$

Соответствующие характеры имеют следующий вид:

$$\chi\left(\{(l)^{k_l}\}\right) = \prod_l \frac{1}{(1-q^l)^{k_l}}$$

Таким образом, используя (3.42), мы связываем характеры для различных статистик.

Индекс для больцмановской статистики, соответствующий гильбертовому пространству (3.39), без процедуры симметризации легко вычислить. Соответствующие уравнения индекса и Денефа (3.33) соответствуют абелеву расщепленному колчану. Мы можем абелианизировать узел v соответствующей размерности  $n_v$ , расщепив его на  $n_v$  узлов размерности 1 с сохранением всех стрелок и параметров ФИ (см. рисунок 3.1). Расщепленным мы назовем колчан со всеми узлами абелианизированными.



Рисунок 3.1 – Пример расщепления колчана.

Индекс Больцмана для колчана *2* определяется суммой по уровням Ландау и весом стрелки для данной фиксированной точки уравнений Денефа:

$$\Omega_{\text{Больцмана}}(y,\mathscr{Q}) = (-1)^{|\mathcal{A}| + |\mathcal{V}| - 1} y^{\sum_{v} \frac{n_{v}(n_{v}-1)}{2} + |\mathcal{A}| - 1} \left(\frac{1}{y - y^{-1}}\right)^{\sum_{v} n_{v} - 1} \times \\
\times \sum_{x^{*}} (-1)^{f(x^{*})} y^{-2\sum_{a} \#(a:v \to w)\Theta(x^{*}_{w,j} - x^{*}_{v,i})},$$
(3.43)

где f – соответствующее фермионное число, определяемое половиной разности количеств положительных и отрицательных собственных значений гессиана W.

Неподвижные точки симметричной группы соответствуют склейкам узлов (см. рисунок 3.1). Также при склеивании вершин колчана необходимо определить соответствующие уровни Ландау:

$$\bar{z}_1^{\ell_1} \bar{z}_2^{\ell_2} \to \bar{z}_1^{\ell} \bar{z}_2^{\ell} \,.$$

Следовательно, индексный вклад одного уровня Ландау изменяется. Нам необходимо добавить соответствующие *y*-факторы. Результатом является формула Манскота-Пьолина-Сена для индекса колчана:

$$\Omega_{\text{MPS}}(y,\mathscr{Q}) = \sum_{\substack{\{\vec{k}_l\}\\\sum_l l \vec{k}_l = \vec{n}}} \left( \prod_i \prod_l \frac{1}{k_l^{(i)}! l^{k_l^{(i)}}} \left( \frac{y - y^{-1}}{y^l - y^{-l}} \right)^{k_l^{(i)}} \right) \times \\
\times \Omega_{\text{Больцмана}} \left( y, \mathscr{Q} \left( \{(l)^{\vec{k}_l}\} \right) \right),$$
(3.44)

где сумма пробегает по расщепленным векторам, соответствующим разбиению каждой компоненты вектора размерности  $\vec{n}$ . Эта формула работает для колчанов без петель и примитивных векторов размерностей. В более общей ситуации подсчет должен быть более тщательным, см. [149].

# 3.2 Когомологическая алгебра Холла

#### 3.2.1 Обрамленные молекулы БПЗ

Расчет типовых индексов состояний БПЗ даже с использованием формулы (3.44) представляет собой довольно сложную комбинаторную задачу. Для подсчета состояний БПЗ и соответствующих индексов гораздо более эффективный способ – использовать различные соотношения пересечения стен маргинальной стабильности. Простой способ получить набор таких соотношений – использовать пробный линейный дефект в теории класса S [151; 152]. Линейные дефекты определяются условиями суперсимметричной монодромии для полей в теории вокруг одномерных многообразий. Богатым семейством таких дефектов являют собой обобщенные линии Вильсона-'тХофта. В низкоэнергетическом пределе такие дефекты могут быть представлены тяжелыми дионами, поэтому на языке колчана они переводятся в дополнительные узлы обрамления, добавленные к колчану (см., например, [153]). Другими словами, мы должны рассмотреть обычную вершину колчана, присвоить векторному полю  $X^3$  в этой вершине вакуумное среднее, скажем,  $x_c$  и обнулить все остальные поля. Выберем узел обрамления, соединенный со всеми остальными вершинами колчана k исходящими стрелками (см. рис. 3.2). Заметим, что таким образом мы не добавляем в колчан ориентированные петли.



Рисунок 3.2 – Обрамленный колчан.

На языке молекул БПЗ мы получим тяжелое дионное ядро, расположенное в точке  $x_c$  на третьей оси  $\mathbb{R}^3$ . Сначала мы перейдем к режиму, когда сама молекула БПЗ локализована в окрестности координаты  $\hat{x}$ . Меняя координаты сдвигом  $x_{v,i} \rightarrow x_{v,i} + \hat{x}$ , заметим, что система уравнений Денефа (3.33) распадается на систему двух приближенных наборов уравнений. Первый соответствует сумме по всем уравнениям, в котором все члены взаимного взаимодействия дионов компенсируют друг друга, и в конечном итоге мы получаем вклады параметров ФИ и членов, отвечающих обрамлению. Обрамляющие члены мы аппроксимируем вкладом, когда все дионы помещены в одну точку  $\hat{x}$ :

$$\sum_{v} n_{v} r_{v} - \frac{k \sum_{v} n_{v}}{|x_{c} - \hat{x}|} = 0.$$
(3.45)

Это уравнение имеет два решения: когда состояние локализовано справа и слева от обрамляющего ядра. По причине, которая станет ясной далее, мы сосредоточимся только на левой критической точке (см. рис. 3.3).



Рисунок 3.3 – Обрамленная молекула БПЗ

Соответствующая точка локализации молекулы задается следующим выражением:

$$\hat{x} = x_c - \frac{k \sum_v n_v}{\sum_v n_v r_v}.$$
 (3.46)

Подставив это выражение обратно в уравнения Денефа, мы получим еще одну приближенную систему уравнений уже без обрамления и с переопределенными параметрами устойчивости, имеющими теперь нулевое среднее:

$$\tilde{r}_v = r_v - \frac{\sum\limits_v n_v r_v}{\sum\limits_v n_v} \,. \tag{3.47}$$

Поэтому волновая функция легких дионов представляется обычной волновой функцией рассчитанного нами ранее колчана без обрамления с эффективными параметрами устойчивости  $\tilde{r}_v$ , локализованной вблизи  $\hat{x}$ .

Параметры ФИ, входящие в эффективную колчанную  $\mathcal{N} = 4$  квантовую механику, связаны с фазами комплексных центральных зарядов элементарных дионов в эффективной теории [151]:

$$r_v = 2|\mathcal{Z}_c|^{-1} \mathrm{Im}\left(\bar{\mathcal{Z}}_c \mathcal{Z}_v\right) , \qquad (3.48)$$

где  $\mathcal{Z}_c$  – большой центральный заряд ядра.

Предположим, что все центральные заряды лежат в верхней полуплоскости. Тогда, если  $\mathcal{Z}_c$  лежит правее  $\mathcal{Z}_{\mu}, r_{\mu} > 0$ , то существует критическая точка, а молекула БПЗ привязана к ядру. Когда  $\mathcal{Z}_c$  приближается к  $\mathcal{Z}_{\mu}$ , размер связанного состояния  $R \sim \left( \operatorname{Im}(\bar{\mathcal{Z}}_c \mathcal{Z}_\mu) \right)^{-1}$  становится все больше и больше, пока созданное связанное состояние не распадется полностью при пересечении стенки маргинальной стабильности:





Теперь предположим, что существует адиабатическое изменение  $\mathcal{Z}_{c}(t)$  с некоторым адиабатическим параметром  $t \in [0, 1]$ , так что оно пересекает значение  $\mathcal{Z}_{\mu}$  для некоторой молекулы по часовой стрелке при увеличении t. Соответствующие молекулярные состояния могут возникать из асимптотической бесконечности и рассеиваться на ядре. Взаимодействие между рассеивающимися молекулами имеет порядок  $\sim k^{-1}$ , поэтому, полагая  $k \gg 1$ , можно им пренебречь. Порядок появления этих молекул совпадает с порядком расположения соответствующих  $r_{\mu}$  на прямой или порядком центральных зарядов в комплексной плоскости, когда прямым порядком считается направление против часовой стрелки (см. рисунок 3.3):

$$\hat{x}_1 < \hat{x}_2 \iff r_1 < r_2. \tag{3.50}$$

Построим асимптотическое состояние рассеяния. Если в состоянии  $\Psi$  находится только одна молекула БПЗ, то состояние рассеяния БПЗ также будет задаваться волновой функцией  $\Psi$ . Действительно, в волновую функцию (3.39) можно ожидать вклада от стрелок, соединяющих вершины колчана с узлом обрамления. Однако, поскольку мы решили рассеивать молекулы БПЗ только слева, этот вклад компенсируется тета-функциями Хевисайда в (3.39). Предположим теперь, что мы рассеиваем два последовательно возникающих состояния молекул БПЗ  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ . Полученную волновую функцию назовем произведением состояний  $\Psi_1 \cdot \Psi_2$ . Соответствующая волновая функция задается умножением на форм-факторы киральных полей, отвечающих стрелкам в (3.39), и симметризацией:

$$\Psi_{1} \cdot \Psi_{2}\left(\{\bar{z}_{v,i}\} \cup \{\bar{z}_{v,i}'\}\right) = \sum_{\text{перетасовки}} \Psi_{1}\left(\{\bar{z}_{v,i}\}\right) \Psi_{2}\left(\{\bar{z}_{v,i}'\}\right) \times \\ \times \frac{\prod_{v,w \in \mathcal{V}} \prod_{i=1}^{n_{1}^{v}} \prod_{j=1}^{n_{2}^{w}} (\bar{z}_{v,i} - \bar{z}_{w,j}')^{\#(a:v \to w)}}{\prod_{v \in \mathcal{V}} \prod_{i=1}^{n_{1}^{v}} \prod_{j=1}^{n_{2}^{v}} (\bar{z}_{v,i} - \bar{z}_{v,j}')} .$$
(3.51)

Перестановки соответствуют симметризации в (3.39) по симметрической группе  $\prod_{v} S_{n_v}$  для  $\vec{n} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2$ , примененной к совместному набору переменных  $\{\bar{z}_{v,i}\} \cup \{\bar{z}'_{v,i}\}$ . Заметим здесь, что это произведение некоммутативно, порядок волновых функций определяется положениями локализации соответствующих молекул БПЗ в  $\mathbb{R}^3$  и, следовательно, средними значениями параметра устойчивости молекулы БПЗ  $r_{1,2} = \vec{n}_{1,2} \cdot \vec{r}$ .

#### 3.2.2 Алгебра рассеяния

В работе [32] была предложена следующая естественно возникающая на гильбертовых пространствах состояний БПЗ билинейная структура произведения:

$$m_{\rm HM}: \quad H_{\rm BPS} \otimes H_{\rm BPS} \to H_{\rm BPS} ,$$
 (3.52)

превращающая гильбертово пространство в алгебру, где роль структурных констант будут исполнять S-матрицы. Разберем здесь детали этого определения. Предположим, мы рассеяли два состояния БПЗ и получили новое, возможно, многочастичное состояние  $\Psi_3$ . Центральные заряды во время этого процесса суммируются, поэтому  $Z_3 = Z_1 + Z_2$ . При наличии связанного состояния частиц 1 и 2 амплитуда рассеяния как комплексная функция мандельстамовской *s*-переменной имеет выделенный полюс:

$$\mathcal{A}(12 \to 3) = \frac{\langle \Psi_3 | \Psi_1 \cdot \Psi_2 \rangle}{s - |\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2|^2}.$$
(3.53)

Вычет в этом полюсе определяет произведение в алгебре  $\Psi_1 \cdot \Psi_2$ . К сожалению, мы не сможем применить эту идею непосредственно в нашей ситуации. Причина этого состоит в том, что операторы импульса в суперсимметричной квантовой механике не входят в супералгебру, а ускоренные состояния БПЗ более не удовлетворяют условию БПЗ, поэтому мы не можем отклоняться от физического локуса, где *s* веществен и удовлетворяет неравенству:

$$s = (|\mathcal{Z}_1| + |\mathcal{Z}_2|)^2 > |\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2|^2,$$

если только мы не находимся точно в локусе маргинальной устойчивости, где  $|\mathcal{Z}_1| + |\mathcal{Z}_2| = |\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2|$ . Рассмотрим небольшое отклонение от локуса маргинальной стабильности, параметризованное t, так что мы возвращаемся на локус при
t = 0:

$$|\mathcal{Z}_{1}(t)| + |\mathcal{Z}_{2}(t)| > |\mathcal{Z}_{1}(t) + \mathcal{Z}_{2}(t)|$$
для  $t > 0$ ,  
и  $|\mathcal{Z}_{1}(0)| + |\mathcal{Z}_{2}(0)| = |\mathcal{Z}_{1}(0) + \mathcal{Z}_{2}(0)|$ . (3.54)

Мы получаем семейство волновых функций  $\Psi_3(t)$ , адиабатически меняющихся с t. Тот факт, что значение t = 0 соответствует стенке маргинальной стабильности, отражается на поведении  $\Psi_3(t)$ : при приближении t к значению t = 0состояние 3 становится неустойчивым, и его волновая функция факторизуется в две (или более) одночастичные асимптотические волновые функции:

$$\lim_{t\to 0}\Psi_3(t)=\mathscr{S}^3_{12}\ \Psi_1\otimes\Psi_2.$$

Таким образом мы можем определить адибатический предел S-матрицы:

$$\mathscr{S}_{12}^3 = \lim_{t \to 0} \langle \Psi_3(t) | \Psi_1 \Psi_2 \rangle \,.$$

Используя это выражение в качестве полюсного вычета в (3.53), мы определяем алгебру рассеяния волновых функций БПЗ как:

$$\Psi_1 \cdot \Psi_2 = \mathscr{S}_{12}^3 \Psi_1 \Psi_2 \,. \tag{3.55}$$

Типы и количество дионов, принадлежащих к первому и второму рассеянным состояниям, можно описать векторами заряда  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ . Умножение отобразит произведение этих волновых функций в волновую функцию, соответствующую вектору заряда  $\vec{n}_1 + \vec{n}_2$ . Пространства антиголоморфных волновых функций естественно градуировать векторами зарядов. Элементы этих пространств, описываемые волновыми функциями Холла, вместе с умножением образуют алгебру, которую мы могли бы назвать алгеброй рассеяния для состояний Холла (SAHS). Структура (3.51) используется на этом пространстве в качестве правила произведения для  $H_0$ :

$$m_{\text{SAHS}}: \quad H_{(0,\,\vec{n}_1)} \otimes H_{(0,\,\vec{n}_2)} \to H_{(0,\,\vec{n}_1+\vec{n}_2)}.$$
 (3.56)

Явное выражение для  $m_{\text{SAHS}}$  мы построили в предыдущем подразделе, она задается соотношением (3.51). Здесь следует подчеркнуть следующую тонкость этой конструкции:  $\mathscr{S}_{12}^3$ для (3.51) – это не просто число, а рациональная функция  $\bar{z}$ . Это не так уж удивительно по сравнению с обычными примерами процессов рассеяния в квантовой теории поля, поскольку состояние  $\Psi_3$  зависит также от степеней свободы поля, отрицательная энергия которого создает связь для состояний  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ . Обычно в задачах рассеяния мы рассматриваем асимптотические состояния  $\Psi_1$ и  $\Psi_2$  при выключенном взаимном взаимодействии. Таким образом, состояние  $|\Psi_1\Psi_2\rangle$  в первом порядке по константе связи аппроксимируется как произведение трех ингредиентов: состояний  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  и связующего поля, помещенного в вакуумное состояние. В нашей ситуации мы не можем поместить связующее поле в вакуум даже в пренебрежении константой связи, поскольку электромагнитное поле в эффективном описании несет нетривиальный угловой момент для дионной пары, заданный спариванием на дионных зарядах  $\langle *, * \rangle$ .

Как мы упоминали ранее, основные состояния естественно отождествлять с эквивариантными когомологиями пространства модулей колчанных представлений. Сопоставляя суперзаряду  $Q_1$  действие дифференциала, мы находим, что алгебраический элемент Вейля параметризуется полями  $\bar{Z}_v$ . Эквивариантные когомологии  $H^*$  соответствуют многочленам от переменных  $\bar{z}_{v,i}$ , параметризующим эквивариантный тор. Поэтому естественно отождествлять пространства антиголоморфных волновых функций и  $H^*$ .  $H^*$  также можно градуировать векторами зарядов  $\vec{n}$ . Элементы  $H^*$  образуют когомологическую холлову алгебру (СоНА) с умножением, введенным Концвичем и Сойбельманом в работе [35]:

$$m_{\text{CoHA}}: \quad H^*_{\vec{n}_1} \otimes H^*_{\vec{n}_2} \to H^*_{\vec{n}_1 + \vec{n}_2}.$$
 (3.57)

Заметим, что эта структура совпадает со структурой произведения на гильбертовых пространствах состояний БПЗ, которую мы построили:

$$m_{\rm SAHS} = m_{\rm CoHA} \,. \tag{3.58}$$

Поэтому мы заключаем, что алгебра рассеяния холловских состояний и когомологическая холловская алгебра эквивалентны. Мы заключаем, что SAHS и CoHA являются ассоциативными алгебрами и вместе соответствуют частному случаю алгебры перетасовок Фейгина-Одесского [37], которую мы разберем в деталях в разделе 3.2.4.

# 3.2.3 Формулы пересечения стен маргинальной стабильности

Формулы пересечения стенок представляют собой набор соотношений, описывающих, как меняются индексы БПЗ при изменении параметров устойчивости. Основная идея построения этих соотношений – инвариантность обрамленных состояний БПЗ при изменении параметров устойчивости. Явления пересечения стенок представляют собой распады или рекомбинации молекул БПЗ, однако, как мы показали ранее, обрамленная молекула БПЗ остается связанной, а центральные заряды  $Z_i$  остаются внутри конуса, образованного  $Z_c(0)$  и  $Z_c(1)$ (см. (3.49)), даже если перетасовать сами центральные заряды  $Z_i$ . Перестановки  $Z_i$  приводят к перестановкам упорядоченного набора соответствующих параметров устойчивости (3.48), позволяющим перемещаться между различными областями устойчивости. Сравнивая обрамленные волновые функции БПЗ, можно определить, какой вклад вносят волновые функции стабильных необрамленных состояний БПЗ в различных областях устойчивости.

Предположим, что происходит рассеяние N необрамленных состояний БПЗ, определенных набором векторов размерностей  $\{\vec{n}^{(\alpha)}\}_{\alpha=1}^{N}$ . Обрамленная волновая функция БПЗ строится как

$$\Psi_{\text{обрамленная}} = \prod_{\{\vec{n}^{(\alpha)}\}}^{\curvearrowleft} \Psi_{\vec{n}^{(\alpha)}}, \qquad (3.59)$$

где в качестве произведения мы применяем ассоциативное произведение (3.51), а состояния упорядочиваются по следующему правилу:

$$\alpha < \beta, \quad r^{(\alpha)} < r^{(\beta)}, \tag{3.60}$$

где

$$r^{(\alpha)} = \frac{\sum_{v} n_v^{(\alpha)} r_v}{\sum_{v} n_v^{(\alpha)}} \,.$$

Здесь следует заметить, что вектора размерности  $\vec{n}$  и  $k\vec{n}$ ,  $k \geq 2$  имеют одинаковые средние параметры устойчивости  $r^{(\alpha)}$ . Поэтому они локализованы в одном и том же положении в  $\mathbb{R}^3$  или, что то же самое, на одном и том же луче центральных зарядов. Поэтому естественным будет объединить гильбертовы пространства различных чисел дионов в пространства Фока дионов, где мы суммируем по всем множителям примитивного размерного вектора:

$$\mathcal{F}_{\vec{n}} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} H_{k\vec{n}} \,. \tag{3.61}$$

Тогда для пространств Фока получаем следующую формулу пересечения стенок маргинальной стабильности. Упорядоченное произведение

$$\bigotimes_{\vec{n}}^{\prime} \mathcal{F}_{\vec{n}}$$

остается инвариантным при перестановке параметров стабильности.

Яркий и в то же время простой пример можно привести на примере колчана Кронекера с одной стрелкой. В работе [35] было показано, что:

$$\mathcal{F}_{(1,0)} \otimes \mathcal{F}_{(0,1)} \cong \mathcal{F}_{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_{(1,1)} \otimes \mathcal{F}_{(1,0)} \,. \tag{3.62}$$

В левой части мы имеем упорядочение параметров стабильности  $r_1 < r_2$ , и в этой камере стабильности нет связанного состояния, поэтому вклад вносят только пространства Фока, соответствующие элементарным дионам. В правой части порядок параметров устойчивости меняется на  $r_1 > r_2$ , и появляется пространство Фока связанного состояния с вектором заряда (1,1).

В данной ситуации весьма полезно использовать индексы для пространств Фока. В дополнение к обычному индексу мы могли бы добавить химический потенциал для полного дионного заряда Q, в результате мы получим характеры пространств Фока:

$$\Phi(u,y) = \operatorname{Tr}_{\mathcal{F}}(-1)^F y^{-2\mathcal{J}} u^{\mathcal{Q}}.$$
(3.63)

Чтобы учесть некоммутативность произведения (3.51), заметим, что для двух состояний с векторами заряда  $\vec{n}$  и  $\vec{n}'$ :

$$\mathcal{J}(\Psi_{\vec{n}} \cdot \Psi_{\vec{n}'}) - \mathcal{J}(\Psi_{\vec{n}'} \cdot \Psi_{\vec{n}}) = \langle \vec{n}, \vec{n}' \rangle, \qquad (3.64)$$

где правая часть определяется антисимметричным спариванием на решетке зарядов:

$$\langle \vec{n}, \vec{n}' \rangle := \sum_{v,w} n_v n'_w \left( \#(a:v \to w) - \#(a:w \to v) \right)$$
 (3.65)

Что эквивалентно следующему соотношению:

$$y^{-2\mathcal{J}}(\Psi_{\vec{n}}\cdot\Psi_{\vec{n}'})=y^{-2\langle\vec{n},\vec{n}'\rangle}y^{-2\mathcal{J}}(\Psi_{\vec{n}'}\cdot\Psi_{\vec{n}}).$$

Итак, мы предполагаем, что химические потенциалы наследуют свойство некоммутативности алгебры, поэтому, когда мы переставляем их в произведении, они производят соответствующий *y*-фактор от перестановки состояний:

$$u_{\vec{n}}u_{\vec{n}'} = y^{-2\langle \vec{n}, \vec{n}' \rangle} u_{\vec{n}'} u_{\vec{n}} = y^{-\langle \vec{n}, \vec{n}' \rangle} u_{\vec{n}+\vec{n}'} \,. \tag{3.66}$$

Рассчитаем такие индексы на простых примерах. Мы начнем с колчана с одним узлом. Соответствующее пространство Фока имеет следующий вид:

$$\mathcal{F}_0 = \bigoplus_{n \ge 1} \bigoplus_{0 \le \ell_1 < \dots \ell_n} \mathbb{C} \operatorname{Sym} \frac{\bar{z}_1^{\ell_1} \cdots \bar{z}_n^{\ell_n}}{\prod_{i < j} (\bar{z}_i - \bar{z}_j)}.$$

Вклады в индекс создадут и числители, и знаменатели волновых функций. Вклад знаменателя зависит только от числа частиц n и может быть сокращен перепараметризацией химического потенциала u, что приводит к общему y-множителю индекса. В принципе, имеют значение только относительные степени различных вкладов уровней Ландау. Мы выбираем нормализацию индексов (общий y-множитель), как в [35], так, чтобы состоянию с уровнями Ландау  $0 \leq \ell_1 < \ldots < \ell_n$  сопоставлялась степень  $\sum_i \ell_i - n$ . Соответствующий индекс пространства Фока имеет следующий вид (совпадает с q-символом Поххамера):

$$\Phi_o(u,y) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{-k^2}}{\prod_{j=1}^k (1-y^{-2j})} u^k = (-y^{-1}u; y^{-2})_{\infty}.$$
(3.67)

Индекс для молекулы БПЗ, заданный конечным полиномом Лорана от у:

$$\Omega(y) = \sum_{s} a_s y^s \,, \tag{3.68}$$

отвечает вкладами волновых функций  $\psi_{s,p}$  с  $p = 1, \ldots, a_s$  для проекции спина s. Когда молекула БПЗ привязана к ядру дефекта, мы должны добавить вклад степени свободы центра масс, чтобы соответствующие обрамленные волновые функции БПЗ имели следующий вид:

$$\psi_{s,p} ar{z}^\ell$$
 .

Эти состояния могут объединяться в многомолекулярные вклады:

$$\psi_{s,p} \bar{z}^{\ell_1} \cdot \psi_{s,p} \bar{z}^{\ell_2} \cdot \dots$$

Если состояния отвечают эффективным гипермультиплетам из теории класса S, они представлены газом фермионов. Вклад пространства Фока, состоящего из кратных  $\psi_{s,p}$ -компонент, равен  $\Phi_o(y^s u, y)$ . Наоборот, если состояния представлены бозонами, соответствующий вклад равен  $\Phi_o(-y^s u, y)^{-1}$ . Теорема об отсутствии экзотики [154] предсказывает отсутствие состояний с нетривиальным изоспином. А, значит, индексы соответствуют сумме характеров неприводимых представлений SU(2) с целыми или полуцелыми спинами. Первые соответствуют фермионным вкладам, вторые – бозонным состояниям, поскольку в определении мы отделили вклад гипермультиплета, соответствующего степени свободы центра масс.

В конечном итоге вклад пространства Фока молекулы БПЗ с индексом  $\Omega(y)$  равен [151]:

$$\Phi^{\Omega}(u,y) = \prod_{s} \Phi_o \left( \operatorname{sign}(a_s) y^s u, y \right)^{a_s} .$$
(3.69)

Применяя производящую функцию к упорядоченному произведению пространств Фока, мы получаем, что упорядоченное произведение по неприводимым векторам размерности:

$$\prod_{\vec{n}} \Phi^{\Omega_{\vec{n}}(y)}(u_{\vec{n}}, y) = \text{const}$$
(3.70)

остается инвариантным при перестройках порядка параметров устойчивости. Утверждение (3.70) устанавливает соотношения пересечения стенок маргинальной стабильности, аналогичное формуле Концевича-Сойбельмана [151; 155] для мотивных инвариантов Дональдсона-Томаса. В разобранном выше примере (3.62) соотношение (3.70) приобретает вид канонического соотношения на так называемые *q*-символы Поххамера:

$$\Phi_o(u_1, y) \Phi_o(y \, u_1 u_2, y) \Phi_o(u_2, y) = \Phi_o(u_2, y) \Phi_o(u_1, y), \qquad (3.71)$$

где  $u_1 u_2 = y^{-2} u_2 u_1$ .

# 3.2.4 Сравнение БПЗ алгебр: алгебра Холла и колчанный янгиан

Рассмотрим модификацию борелевски положительной части кристаллического представления колчанной алгебры БПЗ (рациональной, торической или эллиптической), в которой отсутствуют дополнительные множители:

$$\hat{e}^{(a)}(z)|\mathbf{K}\rangle = \sum_{\boldsymbol{a}\in \mathrm{Add}(\mathbf{K})} \mathfrak{p}(z-h_{\boldsymbol{a}}) \mathbf{E}_{\mathbf{K},\mathbf{K}+\boldsymbol{a}} |\mathbf{K}+\boldsymbol{a}\rangle .$$
(3.72)

Такие генераторы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\hat{e}^{(a)}(z)\hat{e}^{(b)}(w) = \tilde{\varphi}^{a \Leftarrow b}(z-w) \ \hat{e}^{(b)}(w)\hat{e}^{(a)}(z) \ , \tag{3.73}$$

где модифицированный фактор связи  $\tilde{\varphi}$  определен в (2.113). Эту алгебру мы обозначим как  $\hat{\mathsf{E}}_{\tau}^+(Q)$ .

Следуя работам [37; 156] определим следующую функцию:

$$\lambda_{a,b}(z,w) := \frac{\prod_{I \in \{b \to a\}} \zeta \left(z - w - h_I\right)}{\zeta \left(z - w\right)^{\delta_{a,b}}} . \tag{3.74}$$

Используя это определение, можно скомбинировать соотношения на повышающие операторы следующим образом:

$$\lambda_{a,b}(z,w) \ \hat{e}^{(a)}(z)\hat{e}^{(b)}(w) = \lambda_{b,a}(w,z) \ \hat{e}^{(b)}(w)\hat{e}^{(a)}(z) \ . \tag{3.75}$$

Далее мы построим алгебру перетасовок  $\mathbf{Sh}(Q)$ , ассоциированную с колчаном Q, следуя работе [35]. Эту алгебру естественно отождествить с алгеброй Кулоновой ветви, аналогичной построенной в разделе 3.2.2, тогда как алгебру БПЗ, построенную в разделе 2.3.4, можно назвать алгеброй ветви Хиггса (поскольку мы выполнили локализацию относительно ветви Хиггса в нашей квантовой теории поля). Общий подход к локализации предполагает, что оба способа локализации должны давать изоморфные гильбертовые пространства состояний БПЗ, согласно *дуальности Хиггса-Кулона*, описанной нами в разделе 1.1.2. Однако, к двойственности Хиггса-Кулона следует подходить с некоторой осторожностью (см., например, [157]). Причина в том, что как Хиггсова, так и Кулонова ветви могут иметь особенности, так что не все состояния БПЗ четко определены в обоих пределах. Мы будем рассматривать следующий гомоморфизм:

$$\xi: \quad \hat{\mathsf{E}}_{\tau}^+(Q) \longrightarrow \mathbf{Sh}(Q) , \qquad (3.76)$$

как представление дуальности Хиггса-Кулона.

В работах об алгебрах перетасовок [37; 116; 158—160] в ряде примеров некоторых янгианов, торических и эллиптических алгебр приведены способы инвертировать гомоморфизм (3.76), сделав его, таким образом, изоморфизмом.

Подобно работе [35] рассмотрим подпространство  $\mathbf{Sh}(Q, \vec{d})$ , порожденное рядами Лорана по переменным  $\{x_{i,a}\}$ , где  $\vec{d}$  – размерный вектор колчана. Индекс a пробегает значения в вершинах колчана, и  $i = 1, \ldots, d_a$ . Функции, порождающие  $\mathbf{Sh}(Q, \vec{d})$ , симметричны по каждой группе переменных  $\{x_{i,a}\}_{i=1}^{d_a}$ , помеченной  $a \in Q_0$ . Эта симметрия является остаточной группой Вейля больших ненарушенных калибровочных преобразований рассматриваемой квантовой теории поля. Произведение перемешивания – это бинарная операция, действующая следующим образом:

$$\square: \quad \mathbf{Sh}(Q, \vec{d}) \times \mathbf{Sh}(Q, \vec{d'}) \longrightarrow \mathbf{Sh}(Q, \vec{d} + \vec{d'}) . \tag{3.77}$$

Явным образом произведение в алгебре перетасовок действует на элементы  $\mathbf{Sh}(Q)$  следующим образом (ср. с [35, теорема 2] и [161, предложение 2.3] для

обобщенных когомологических теорий):<sup>2</sup>

$$(f \sqcup g) \left( \{x_{i,a}\} \cup \{x'_{i,a}\} \right) = \left\{ f \left( \{x_{i,a}\} \right) g \left( \{x'_{i,a}\} \right) \frac{\prod_{a \in Q_0} \prod_{b \in Q_0} \prod_{I \in \{a \to b\}} \prod_{i=1}^{d_a} \prod_{j=1}^{d'_b} \zeta \left(x'_{j,b} - x_{i,a} - h_I\right)}{\prod_{c \in Q_0} \prod_{i=1}^{d_c} \prod_{j=1}^{d'_c} \zeta \left(x'_{j,c} - x_{i,c}\right)} \right\},$$
(3.78)

где симметризация заключается в перетасовке элементов групп  $\{x_{i,a}\}$  и  $\{x'_{i,a}\}$  таким образом, чтобы результат был симметричен относительно каждой подгруппы  $\{x_{i,a}\}_{i=1}^{d_a} \cup \{x'_{i,a}\}_{i=1}^{d'_a}$  для каждой  $a \in Q_0$ , а общее количество тасований равно

$$\prod_{a \in Q_0} \begin{pmatrix} d_a + d'_a \\ d_a \end{pmatrix}. \tag{3.79}$$

Перепишем это определение в более удобном виде. Введем связь между двумя типами переменных:

$$\Lambda\left(x_{i,a}, x_{j,b}'\right) := \lambda_{b,a}(x_{j,b}, x_{i,a}) , \qquad (3.80)$$

и объединим двойные индексы (i, a) в одинарные индексы  $\alpha$ . Таким образом, (3.78) можно переписать следующим образом:

$$(f \sqcup g) \left( \{x\} \cup \{x'\} \right) = \operatorname{Sym}_{\text{перетасовки}} \left\{ f\left( \{x\} \right) g\left( \{x'\} \right) \prod_{\alpha,\beta} \Lambda(x_{\alpha}, x'_{\beta}) \right\} .$$
(3.81)

Гомоморфизм  $\xi$  в этом случае задается простым отождествлением порождающих мод  $\hat{e}_n^{(a)}$  с умножением в алгебре перетасовок на моном  $x_{i,a}^n$ , где каждому генератору  $\hat{\mathsf{E}}_{\tau}^+(Q)$  соответствует новый индекс *i*.

Чтобы оправдать это определение, достаточно показать, что простые генераторы удовлетворяют (3.75) и расширяют его на всю алгебру с помощью

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>При размерной редукции, когда  $\zeta(x) \to x$ , мы получаем снова уже введенную структуру (3.51) когомологических алгебр Холла. Также мы выведем это соотношение в (3.90), используя методы КТП.

ассоциативности введенного произведения. Заметим, что для простых генераторов мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \xi \left[ \lambda_{a,b}(z,w) \hat{e}^{(a)}(z) \hat{e}^{(b)}(w) \right] &= \lambda_{a,b}(z,w) \xi \left[ \hat{e}^{(a)}(z) \right] \sqcup \xi \left[ \hat{e}^{(b)}(w) \right] = \\ &= \lambda_{a,b}(z,w) \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x_a^n}{z^n} \right\} \sqcup \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{y_b^k}{w^k} \right) = \\ &= \lambda_{a,b}(z,w) \left\{ \sup_{\text{shuffles}} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x_a^n}{z^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{y_b^k}{w^k} \lambda_{b,a}(y_b,x_a) \right\} = \\ &= \lambda_{a,b}(z,w) \lambda_{b,a}(w,z) \left\{ \sup_{\text{shuffles}} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x_a^n}{z^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{y_b^k}{w^k} \right\} = \\ &= \xi \left[ \lambda_{b,a}(w,z) \hat{e}^{(b)}(w) \hat{e}^{(a)}(z) \right]. \end{aligned}$$
(3.82)

### 3.2.5 Обобщенные когомологии

В фундаментальной работе [62] была установлена крепкая связь между общирными областями физики и геометрии. Как мы показали в разделе 1.1.1, на практике удается связать физическую информацию об основном состоянии суперсимметричной квантовомеханической системы с геометрической информацией о таргет-пространстве этой теории. Изменяя различные детали квантовой теории, например, добавляя дополнительные симметрии, можно получить разные теории когомологий. В самой работе [62] описаны две теории когомологии: когомологии де Рама и модель Картана для эквивариантных когомологий. Однако вопрос, имеет ли какая-либо обобщенная теория когомологий в формулировке Эйленберга-Стинрода прозрачное и понятное описание в терминах физической модели, все еще открыт.

Здесь мы преследуем гораздо более скромную цель и попытаемся ответить на следующий вопрос: почему спектры БПЗ колчанных калибровочных теорий (или их подсекторов) могут быть описаны обобщенной теорией когомологий. Мы основываем наше исследование на наблюдениях из предыдущих подразделов для БПЗ-спектров компактификаций четырехмерной калибровочной теории, отвечающей колчану, с суперсимметрией  $\mathcal{N} = 1$  в четырех измерениях. Выделим временное направление из четыпехмерного пространства-времени Минковского и компактифицируем оставшийся пространственный срез в получившееся пространство Σ. В случаях Σ =точка-окружность-тор результирующая алгебра БПЗ (ее беспоточный подсектор) является рациональной/тригонометрической/эллиптической версией колчанного янгиана. Чтобы восстановить роль теории когомологий как описания гильбертова пространства БПЗ, отметим, что стандартная картина Шредингера для квантовой теории поля представляет конфигурации полей как точки в пространстве отображений:

$$\operatorname{Map}\left(\Sigma \longrightarrow \operatorname{Rep} \mathfrak{Q}_0\right) \,, \tag{3.83}$$

а сама квантовая теория поля рассматривается как квантовая механика в пространстве (3.83). Таким образом, становится естественным отождествлять гильбертово пространство БПЗ с когомологиями пространства (3.83). На практике в случае dim  $\Sigma \ge 2$  из-за возможных нетривиальных потоков и аномалий мы можем отождествить только подсектор гильбертова пространства БПЗ с соответствующими когомологиями, см. обсуждения в [56, раздел 4] и в [122; 162— 164].

Суперзаряд, относительно которого мы производим локализацию, аналогичен (1.19) с существенной модификацией части векторного поля. Теперь он включает в себя помимо калибровочного и ароматического действия диффеоморфизм:

$$\bar{V} = \int_{\Sigma} w \sum_{(a:i\to j)\in\mathfrak{Q}_1} \left(\partial_{\bar{z}}\phi_a^{\dagger} + \phi_a^{\dagger}\sigma_j - \sigma_i\phi_a^{\dagger} - \mu_a\phi_a^{\dagger}\right) \frac{\delta}{\delta\phi_a^{\dagger}}, \qquad (3.84)$$

где z – координата вдоль окружности в случае  $\Sigma = S^1$  и комплексная координата вдоль  $\Sigma$ , если  $\Sigma$  – риманова поверхность, а w – форма объема. В случае  $\Sigma = \{$ точка $\}$  теория когомологий просто возвращается к простым когомологиям, определяемым (1.19). В трех случаях, когда  $\Sigma$  – точка, окружность или тор, когомологические теории представляют собой обычные когомологии, К-теорию и эллиптические когомологии, соответственно. Однако, в последнем случае основным аргументом является то, что функция, естественным образом отождествляемая с  $\zeta(\sigma)$ , является тэта-функцией Якоби. Более того, ситуация становится еще более сложной, если в рол<br/>и $\Sigma$ рассматривать риманову поверхность более высокого рода.

Здесь мы хотели бы привести аргументы в пользу того, что для абстрактно определенного  $\Sigma$  (в качестве примера можно привести семейство римановых поверхностей разных родов и модулей в качестве  $\Sigma$ ) беспоточный подсектор гильбертова пространства БПЗ описывается теорией обобщенных когомологий.

Покажем, почему такой вывод мог быть достигнут априори. Сначала сильное упрощение теории происходит, когда мы присоединяем структуру векторного пространства к спектру нашей когомологической теории (кобордизмам) – с самого начала являющейся исключительно абелевой группой. Это представляется необходимым шагом, поскольку мы отождествляем этот спектр с гильбертовым пространством БПЗ, имеющим явную структуру С-линейного пространства. Однако этот морфизм абелевых групп переводит все элементы кручения в ноль. А оставшаяся информация о свойствах рассматриваемого многообразия фиксируется характеристическими классами. Второй пункт схемы рассуждений заключается в применении особенности суперсимметрии и эквивариантного действия, индуцированного калибровочной и ароматической группами. Это действие вызывает локализацию, так что ценная информация о многообразии, чьи когомологии рассматриваются, сводится к описанию окрестности неподвижных точек.

В итоге мы можем заключить, что гильбертово пространство БПЗ изоморфно обобщенной эквивариантной теории когомологий как абелева группа:

$$\mathscr{H}^*_{\mathrm{BPS}} \cong E^*_G \left( \operatorname{Rep} \mathfrak{Q}_0 \right) \,. \tag{3.85}$$

Подробности о том, какие свойства  $E^*$  проявляются в этой модели, т.е. какой формальный групповой закон будет иметь место, фиксируются пространством полей (3.83).

Чтобы следовать этим путем, напомним, что основным строительным блоком эквивариантной теории когомологий является классифицирующее пространство  $BU(1) \cong MU(1) \cong \mathbb{CP}^{\infty}$ . Рассмотрим эффективную теорию для следующего колчана Кронекера, соответствующего модели частицы на проективном пространстве  $\mathbb{CP}^{\kappa}$ :

В результате мы получим классифицирующее пространство BU(1) в пределе  $\kappa \to \infty$ . Теория когомологий этого пространства представляет собой кольцо, порожденное первым классом Черна, заданным кэлеровой формой  $\omega$ . Двойственность Хиггса-Кулона [98] (см. также раздел 1.1.2) идентифицирует кольца  $\mathbb{C}[\omega]$  и  $\mathbb{C}[\sigma]$  как эффективные описания гильбертового пространства БПЗ на Хиггсовой и Кулоновой ветвях, соответственно.

Предполагая, что поле  $\sigma$  в векторном поле V является внешним и постоянным, получаем, что результирующая теория является свободной. Мы могли бы разложить поле  $\phi$  по импульсам Фурье p на  $\Sigma$ . Фактически p просто сдвигает  $\sigma \rightarrow \sigma + p$  из-за члена диффеоморфизма в (3.84). Класс Эйлера такой теории описывает волновую функцию основного состояния и представляет собой произведение элементарных волновых функций, представленных классами Эйлера для каждого p:

$$\det \iota_{\bar{V}} = \prod_{p} \left( \sigma + p \right) \xrightarrow{\text{регуляризация}} \zeta(\sigma) \,. \tag{3.87}$$

Для  $\Sigma$  высших родов g > 1 это произведение задается тэта-функциями Римана [122]. Для поверхности рода g > 1 ароматические линии Вильсона, насыщающие постоянное значение  $\sigma$ , принадлежат якобиану Jac( $\Sigma$ ), имеющему комплексную размерность g. Чтобы ограничить  $\sigma$  принятием значений в комплексной плоскости, можно ограничить рассмотрение всех ароматических зарядов плоскостью в Jac( $\Sigma$ ). Еще одна сложность, отвечающая регуляризации, – это аномалия, которая нарушает либо ароматическую инвариантность det  $\iota_{\bar{V}}$ , либо голоморфное поведение этой величины, переводящая ее в сечение детерминантного расслоения [122]. В конце концов, для простоты и для того, чтобы считать  $\sigma$  постоянным полем или, точнее, принадлежащим абелеву Jac( $\Sigma$ ), из обсуждения приходится исключить топологически нетривиальные конфигурации поля. Этого можно достичь, ограничив рассмотрение беспоточным подсектором гильбертова пространства БПЗ, другими словами, этот подсектор не включает возможные вихри БПЗ (см. раздел 2.3.2).

В этом предложении мы намеренно опустили явное обсуждение римановых поверхностей  $\Sigma$  и возможных результирующих формальных групповых логарифмов  $\log_{\xi} z$ , отвечающих выделенному морфизму  $\xi : E^* \to \Lambda$ , где  $\Lambda$  – кольцо Лазара. Оставляя эти замечания в стороне, мы хотели бы сконцентрироваться на аргументах, которые работают для любого  $\Sigma$  и позволяют построить алгебру БПЗ в абстрактных терминах. Как мы упоминали ранее, гомоморфизм кольца кобордизмов над  $\mathbb{C}$  и локализация делают рассмотрение К-теории, эллиптических когомологий и обобщенных когомологий в этой модели однородным, ограничивая наиболее существенную информацию о модели неподвижными точками таргет-пространства и функцией det  $\iota_V$ . Также следует отметить, что  $(\det \iota_V)^{\pm 1}$  является нескомпенсированным вкладом однопетлевого определителя в голоморфной статистической сумме [165; 166], отвечающей эллиптическим родам.

В завершение этого раздела рассмотрим снова построение когомологической алгебры Холла (CoHA) (см. раздел 3.2.2), только теперь в терминах абстрактных обобщенных когомологий.

Как и ранее переведем математическую конструкцию произведения двух волновых функций БПЗ  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – элементов кольца  $E_G^*$  – в картину двух компактных молекул, разделенных в физическом пространстве. Таким образом динамика распадается на эффективные динамики внутри каждой отдельной молекулы, а обменное взаимодействие между молекулами учитывается как петлевые поправки. Этого можно добиться, применив прием с тяжелым обрамляющим ядром из раздела 3.2.1.

Мы могли бы повторить эту процедуру для  $\Sigma$ , выполнив интегрирование ренормгруппы для каждой моды отдельно. Обозначим собственные значения  $\sigma_i, i \in \mathfrak{Q}_0$  как  $\sigma_i^{\alpha}$ , где  $\alpha = 1, \ldots, n_i$ , а  $n_i$  – размерности колчана. Следовательно, волновая функция стабильной локализованной молекулы БПЗ является функцией следующих переменных:

$$\Psi_1\left(\{\sigma_1^{\alpha_1}\}_{\alpha_1=1}^{n_1}, \{\sigma_2^{\alpha_2}\}_{\alpha_2=1}^{n_2}, \ldots\right) , \qquad (3.88)$$

симметричная по каждой группе переменных  $\{\sigma_i^{\alpha_i}\}_{\alpha_i=1}^{n_i}$ .

Рассмотрим сначала стрелку  $a : i \to j$ , соединяющую узлы i и j, полагая  $i \neq j$ . Поле  $\phi_a$  имеет компоненту  $(\beta, \alpha)$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – индексы базисных векторов  $\mathbb{C}^{n_i}$  и  $\mathbb{C}^{m_j}$ , соответственно. Квантовое поле  $(\phi_a)_{\beta\alpha}$  является функцией координаты на  $\Sigma$  и может быть разложено по модам Фурье  $(\phi_a)_{\beta\alpha}(p)$  как функция соответствующих импульсов p. В конечном итоге, эквивариантный вес  $(\phi_a)_{\beta\alpha}(p)$  задается действием калибровочной группы, ароматической группы и диффеоморфной части векторного поля (3.84). Согласно (3.27), этот вклад имеет следующий вид:

$$\left(p + \sigma_j^\beta - \sigma_i^\alpha - \mu_a\right)^{\Theta(h_2 - h_1)}.$$
(3.89)

Аналогичным образом мы разлагаем по модам и учитываем вклады полей в случае совпадающих узлов колчана i = j, однако, в этом случае за счет вложения приобретается дополнительный вклад недиагональных элементов калибровочного мультиплета, которые становятся частицами Голдстоуна. Они вносят вклад в знаменатель волновой функции 3.15.

Принимая во внимание, что остаток ненарушенной группы Вейля калибровочной группы действует на  $\sigma_i^{\alpha}$  перестановками, приходим к следующей формуле умножения волновых функций, обобщающей (3.51):<sup>3</sup>

$$\Psi_1 \cdot \Psi_2 = \underset{\{\sigma\},\{\sigma'\}}{\operatorname{Sym}} \Psi_1\left(\{\sigma\}\right) \Psi_2\left(\{\sigma'\}\right) \prod_{i,j\in\mathfrak{Q}_0} \prod_{\alpha=1}^{n_i} \prod_{\beta=1}^{m_j} \eta_{i,j} \left(\sigma_j^\beta - \sigma_i^\alpha\right) , \qquad (3.90)$$

где элементарный форм-фактор  $\eta$  определяется следующим выражением:

$$\eta_{i,j}(z) := \frac{\prod\limits_{a:i \to j} \zeta(z - \mu_a)}{\zeta(z)^{\delta_{i,j}}} \,. \tag{3.91}$$

Числитель в этой формуле представляет собой вклад киральных полей  $(\phi_a)_{\alpha\beta}$ , а знаменатель – соответствующий вклад недиагональных элементов калибровоч-

 $<sup>^{3} \</sup>mathrm{Такое}$ обобщение было также предложено в работах [161; 167].

ного поля ( $\sigma_i$ )<sub> $\alpha \neq \beta$ </sub>. Это выражение естественным образом обобщает структуру (3.51), введенную нами для когомологических алгебр Холла.

## 3.3 Алгебра инстантонов

### 3.3.1 Янгиан и квантовая теория поля

Далее мы в деталях разберем построение R-матриц и интегрируемых систем, основанных на алгебре колчанного янгиана. Здесь же мы упомянем лишь некоторые элементы этой конструкции, позволяющие обозначить иной путь построения колчанного янгиана через алгебру инстантонов в суперсимметричной колчанной калибровочной теории.

Янгиан допускает структуру алгебры Хопфа, в частности, можно определить копроизведение даже для аффинных случаев [168—170]. Имея копроизведение  $\Delta$ , мы можем восстановить R-матрицу – сплетающий оператор, переставляющий порядок множителей в тензорном квадрате:

$$\Delta_{12}R = R\Delta_{21}. \tag{3.92}$$

Как копроизведение, так и R-матрица зависят от комплексного спектрального параметра, имеющего ту же природу, что и параметр разложения в ряду (2.45), то есть это эквивариантный вес в (2.48). *R*-матрица является решением уравнения Янга-Бакстера, гарантирующим, что тензорная структура представления действительно ассоциативна.

С другой стороны, R-матрица и трансфер-матрица могут быть получены независимо от структуры янгиана, стартуя со спиновых цепочек и других интегрируемых моделей, таких как модель Калоджеро [171]. Связь между квантовой теорией поля и интегрируемыми моделями хорошо известна в литературе [172; 173].

Физический подход позволяет весьма элегантно аргументировать появление таких нетривиальных соотношений, как уравнение Янга-Бакстера: две стороны равенства – это просто разные, но гомотопически эквивалентные пути в пространстве параметров (модулей) КТП, тогда равенство двух сторон есть лишь отсутствие гистерезиса в теории. Отсутствие гистерезиса у рассматриваемых теорий – вполне естественное свойство, индуцированное суперсимметрией (см. раздел 1.1.6).

Эволюцию R-матрицы, как для янгианов, так и квантовых алгебр, а также их смесей типа квантовых тороидальных алгебр (см. раздел 2.3.4), в квантовой теории поля можно разложить в ряд переходов через инстантонные или солитонные скачки [49; 50; 54; 90; 174—176] между перекрывающимися уровнями эффективных теорий. Это наблюдение позволяет нам ожидать, что алгебра солитонов и инстантонов БПЗ неявным образом воспроизводит янгиан, другими словами, мы ожидаем наличия следующих соотношений:

$$E_{\lambda,\lambda+\Box} = \lim_{T \to \infty} \langle \lambda + \Box | e^{-\frac{1}{\hbar}TH} | \lambda \rangle$$
(3.93)

для некоторого эффективного Гамильтониана Н.

### 3.3.2 Классическая R-матрица из инстантонов

Следуя [57], было бы весьма эффективным вычислить одноинстантонное решение, отвечающее процессу миграции атома между колчанными кристаллами БПЗ, находящимися в одном весовом пространстве ( $\sigma$ , h). В этом случае два кристалла, расположенные при двух значениях h, представляют собой два вектора предполагаемых представлений алгебры БПС, и вложение их в одно и то же весовое пространство является физической моделью тензорного произведения. Как утверждалось в [57] (мы перейдем к этому рассмотрению в разделе 4.2), для такого тензорного произведения можно построить различные копроизведения и R-матрицы, связанные преобразованием базиса. Такое преобразование задается суммой по инстантонам, переносящим атомы из одного кристалла в другой, и член первого порядка в этом разложении – одноинстантонная амплитуда  $\mathscr{A}$  – имеет определенную форму так называемой классической R-матрицы, содержащей действия повышающих и понижающих операторов в будущей алгебре БПЗ (недавнее обсуждение свойств факторизации колчанной R-матрицы янгианов представлены, например, в работах [177—181]). Другими словами, мы смогли бы разделить инстантонную амплитуду на характерные части, соответствующие матричным элементам операторов алгебры БПЗ, и восстановить сами операторы алгебры БПЗ в дальнейшем.

Рассмотрим миграцию одиночного атома  $\Box$  из кристалла K<sub>1</sub> в кристалл K<sub>2</sub>. Фактически мы могли бы аппроксимировать эту ситуацию, поскольку устойчивые атомы кристаллов K<sub>1</sub> и K<sub>2</sub> заморожены в своих позициях, так что миграцию одного  $\sigma$  можно представить как эффективный ИК-переход в U(1) теории, в которой замороженные поля становятся ароматическими симметриями, где  $\sigma$  – комплексный скаляр в калибровочном мультиплете U(1) (см. рис.3.4). Мы придем к похожей ситуации в разделе 5.4.5.



Рисунок 3.4 – Колчанное ИК описание миграции атома.

Имея это в виду, мы рассмотрим простую модель, в которой помимо  $\mathbb{CP}^1$ -базы есть только пары положительно и отрицательно U(1)-заряженных полей, отвечающих слою и имитирующих степени свободы замороженного кристалла.

$$\begin{array}{c} (\mu_{1+},m_1) & \overbrace{\phi_{1+}}^{\phi_{1+}} \sigma & \overbrace{\phi_{1-}}^{\phi_{1-}} (\mu_{1-},m_1) \\ (\mu_{2+},m_2) & \overbrace{\phi_{2+}}^{\phi_{2+}} X_1 \\ (a_1,m_1) & \sqsubseteq & (a_2,m_2) \end{array} \cong \left( \begin{array}{c} \phi_{1+} & \phi_{1-} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mu_{1+} & \downarrow & X_1 \\ a_1 \end{array} \right)_{m_1} \otimes \left( \begin{array}{c} \phi_{2+} & \phi_{2-} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mu_{2+} & \downarrow & X_2 \\ a_2 \end{array} \right)_{m_2} . \quad (3.94)$$

Функция высоты в этом случае имеет следующий вид

$$U = hr - (h - m_1)|X_1|^2 - (h - m_2)|X_2|^2.$$
(3.95)

Произведем следующую замену координат ( $\varphi, \vartheta \in [0, 2\pi)$ ],  $\chi \in [0, \pi/2]$ ):

$$X_1 = \rho e^{i\varphi} \cos \chi, \quad X_2 = \rho e^{i\varphi} \sin \chi e^{i\vartheta}. \tag{3.96}$$

В этих терминах функция высоты имеет следующий вид:

$$U = (h - m(\chi))(r - \rho^2) + \frac{m_{12}}{2}r\cos 2\chi,$$
  

$$m(\chi) = m_1\cos^2\chi + m_2\sin^2\chi, \quad m_{12} = m_1 - m_2.$$
(3.97)

Первый член функции высоты заставляет эффективную теорию описывать модель на трехмерной сфере радиуса  $\rho = \sqrt{r}$  (расслоение Хопфа над базой  $\mathbb{CP}^1$ , параметризованной  $X_1$  :  $X_2$ ) и фиксирует математическое ожидание для  $h = m(\chi)$ . Второй член образует два кассических вакуума – южный и северный полюсы  $\mathbb{CP}^1$ :

$$\chi = 0, \quad \cos 2\chi = +1, \quad (\Box, \varnothing), \chi = \frac{\pi}{2}, \quad \cos 2\chi = -1, \quad (\varnothing, \Box),$$
(3.98)

что соответствует ситуациям, когда в исходной модели атом находится в K<sub>1</sub> или K<sub>2</sub>, соответственно. Этот член вызывает инстантонное туннелирование между вакуумами:

$$\cos \chi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{8m_{21}\tau}}}, \quad \sin \chi(\tau) = \frac{e^{4m_{21}\tau}}{\sqrt{1 + e^{8m_{21}\tau}}}, \quad (3.99)$$

где  $\tau$  – евклидово время вдоль инстантонной траектории. Это решение эквивалентно решению полярного солитона, построенному нами в разделе 1.2.3.

Таким образом, если  $m_2 > m_1$ , то  $Q_1$ -инстантонные потоки следуют из вакуума ( $\Box, \varnothing$ ) в вакуум ( $\varnothing, \Box$ ), поскольку функция высоты Морса U возрастает только в этом направлении.

Результирующую волновую функцию для ИК-режима можно записать для двух вакуумов как факторизацию элементарных волновых функций для свободных киральных скаляров:

$$\Psi_{(\Box,\varnothing)} = \Phi \left( \phi_{1+} | a_1 - \mu_{1+}, m_1 - m_1 \right) \Phi \left( \phi_{1-} | \mu_{1-} - a_1, m_1 - m_1 \right) \times \\ \times \Phi \left( \phi_{2+} | a_1 - \mu_{2+}, m_1 - m_2 \right) \times \\ \times \Phi \left( \phi_{2-} | \mu_{2-} - a_1, m_2 - m_1 \right) \Phi \left( X_1 : X_2 | a_1 - a_2, m_1 - m_2 \right), \\ \Psi_{(\varnothing,\Box)} = \Phi \left( \phi_{1+} | a_2 - \mu_{1+}, m_2 - m_1 \right) \Phi \left( \phi_{1-} | \mu_{1-} - a_2, m_1 - m_2 \right) \times \\ \times \Phi \left( \phi_{2+} | a_2 - \mu_{2+}, m_2 - m_2 \right) \times \\ \times \Phi \left( \phi_{2-} | \mu_{2-} - a_2, m_2 - m_2 \right) \Phi \left( X_1 : X_2 | a_2 - a_1, m_2 - m_1 \right),$$
(3.100)

где  $X_1$ :  $X_2$  – однородная координата на касательном слое к  $\mathbb{CP}^1$ . Функция  $\Phi(\phi|z, x_3)$  представляет собой волновую функцию эквивариантной  $\mathbb{C}$ -плоскости, аналогичную (2.20) и (3.26).

Все весовые параметры эффективны и изменяются вдоль инстантонной траектории, так как  $h = m(\chi)$  эффективно зависит от значения  $\chi$ . Таким образом, мы заключаем, что инстантон индуцирует потоки в пространстве модулей для этих полей и соответствующий перенос с помощью связности Берри (3.23). В нашей модели связности вклад вносит не только мода веса  $\sigma$ , но и все моды  $\sigma + p$  с импульсами p вдоль  $\Sigma$ . Согласно схеме регуляризации (3.87) это приводит к замене каждого класса Эйлера  $\sigma$  весового пространства классом Коннера-Флойда  $\zeta(\sigma)$ . В таблице 3.1 мы рассчитываем амплитуды для переноса полей, следуя [58, Приложение А], где  $T\phi$  обозначает касательное пространство к комплексной плоскости, натянутое на соответствующее киральное поле  $\phi$ .

Таблица 3.1 – Амплитуды переноса посредством связности Берри

Поле	Направление потока	Амплитуда
(1+)	экватор $\rightarrow$ сев. пол.	1
(1-)	экватор $\rightarrow$ юж. пол.	$\zeta\left(T\phi_{(1-)}\right)$
(2+)	юж. пол. $\rightarrow$ экватор	$\zeta \left(T\phi_{(2+)}\right)^{-1}$
(2-)	сев. пол. $\rightarrow$ экватор	1
$\mathbb{CP}^1$	юж. пол. → сев. пол.	$\zeta (T(X_1:X_2))^{-1}$

Полная амплитуда представляет собой классическую R-матрицу для связанной с ней колчанной алгеброй БПЗ в форме t-канальной амплитуды (инстантонное евклидово время  $\tau$  на диаграмме течет вверх, подобно [57, раздел 4.4.5]):



200

В общем виде мы хотели бы показать, что инстантонную амплитуду можно разделить следующим образом:

$$\mathscr{A} = \mathbf{F}_{\mathrm{K}_{1},\mathrm{K}_{1}-\Box} \cdot \zeta \left(\sigma_{\mathrm{fin}} - \sigma_{\mathrm{in}}\right)^{-1} \cdot \mathbf{E}_{\mathrm{K}_{2},\mathrm{K}_{2}+\Box}, \qquad (3.102)$$

где  $\sigma_{in}$  и  $\sigma_{fin}$  – начальное и конечное положения мигрирующего атома в  $\sigma$ плоскости в исходном и конечном кристалле соответственно. Вершины, соответствующие процессам испускания и захвата атома, оказываются совпадающими с вершинами, определенными в (2.43), (2.44).

Давайте проверим, как этот рецепт работает в нашей эффективной модели. Локусы гомоморфизмов рассчитываются по следующим коммутативным диаграммам ( $\alpha = 1, 2$ ):

Имеем следующие касательные пространства:

$$T\mathcal{R}_{\Box_{\alpha}} = \operatorname{Span}\left\{\phi_{\alpha+}, \phi_{\alpha-}\right\}, \quad T\mathcal{R}_{\varnothing_{\alpha}} = 0, \quad T\mathcal{I}_{\varnothing_{\alpha}, \Box_{\alpha}} = \operatorname{Span}\left\{\phi_{\alpha+}\right\}.$$
(3.104)

Результирующие вклады вершин, рассчитанные методами, обсуждавшимися в разделе 2.1.3, совпадают с вкладами, рассчитанными с помощью эффективной связи Берри в (3.101):

$$\mathbf{F}_{\Box_{1},\varnothing_{1}} = \frac{\zeta \left(T\mathcal{R}_{\Box_{1}}\right)}{\zeta \left(T\mathcal{I}_{\varnothing_{1},\Box_{1}}\right)} = \frac{\zeta \left(T\phi_{(1+)}\right)\zeta \left(T\phi_{(1-)}\right)}{\zeta \left(T\phi_{(1+)}\right)} = \zeta \left(T\phi_{(1-)}\right) ,$$

$$\mathbf{E}_{\varnothing_{2},\Box_{2}} = \frac{\zeta \left(T\mathcal{R}_{\varnothing_{2}}\right)}{\zeta \left(T\mathcal{I}_{\varnothing_{2},\Box_{2}}\right)} = \zeta \left(T\phi_{(2+)}\right)^{-1} .$$
(3.105)

Наш вывод, основанный на вычислении связности Берри, вклада классической R-матрицы в квантовую R-матрицу, аналогичен выводу эллиптических стабильных оболочек [49; 175], составляющих квантовую R-матрицу [182; 183] (см. также элементарные транспортные амплитуды для киральных полей в таблице 3.1 и [175, раздел 3.3]).

## 3.3.3 Алгебра БПЗ как алгебра инстантонов

Как мы уже отмечали, структура инстантонной амплитуды предполагает схематическое разложение в t-канале (3.101). Две вершины мы связали с понижающим и повышающим операторами, поскольку схематически мы могли бы представить эти вершины как элементарные процессы испускания или захвата атома кристаллом. Мы рассматриваем эти вершинные элементы как матричные элементы алгебры операторов, меняющих количество атомов в кристаллах, так что результатом снова является кристалл. Аналогично [53, раздел 2.7] мы трактуем происхождение выражений для этих матричных коэффициентов как перенос относительно индуцированной связности Берри. Прежде чем вычислять связи между этими матричными элементами, введем базовый элемент переноса Берри, который нам понадобится в дальнейшем, как перестановку двух атомов цветов *i* и *j* вдоль оси *h*.

Происходит перераспределение в упорядоченном положений атомов вдоль оси h, тогда как их положение в  $\sigma$ -плоскости сохраняется. Результат зависит только от относительного положения в  $\sigma$ -плоскости, которую мы обозначаем просто как  $\sigma_{12} = -\sigma_{21}$ . Мы уже видели в разделах 3.1.2 и 3.2.5, что связность Берри участвует в качестве форм-фактора в формуле умножения CoHA (3.90) для определенного порядка на оси h. Перестановка атомов на оси h дает простой вклад как соотношение двух факторов (3.91) с переставленными параметрами:

$$\operatorname{Prm}(\mathbb{I}, \mathbb{I}) = \frac{\eta_{i,j}(\sigma_{21})}{\eta_{j,i}(\sigma_{12})} = \left(\frac{\mathbf{e}_{\xi}(\sigma_{12})}{\mathbf{e}_{\xi}(-\sigma_{12})}\right)^{\delta_{i,j}} \frac{\prod_{(a:i\to j)\in\mathfrak{Q}_1} \mathbf{e}_{\xi}(-\sigma_{12}-\mu_a)}{\prod_{(b:j\to i)\in\mathfrak{Q}_1} \mathbf{e}_{\xi}(\sigma_{12}-\mu_b)} =: \varphi_{i,j}(\sigma_{12}).$$

$$(3.106)$$

Более того, как мы видели ранее, эта величина определяет алгебру БПЗ в данном случае. Здесь мы покажем, что соотношения (2.112) получаются в результате гистерезиса параллельных переносов на пространствах кристаллов.

Далее мы будем рассматривать разные пути в пространстве кристаллов

202

и, соответственно, обозначать соответствующие элементы матриц перехода:

$$[K_1 \to K_2 \to K_3] := [K_1 \to K_2] \cdot [K_2 \to K_3]$$
. (3.107)

Эти обозначения соответствуют обозначениям, введенным ранее, таким образом:

$$[K_1 \to K_2] = \begin{cases} \mathbf{E}_{K_1, K_2}, & K_1 \subset K_2, \\ \mathbf{F}_{K_1, K_2}, & K_1 \supset K_2. \end{cases}$$
(3.108)

Рассмотрим сначала соотношение, возникающее при перестановке действия двух повышающих операторов. Прийти от некоторого кристалла К к кристаллу К +  $\Box_1$  +  $\Box_2$  можно двумя способами: сначала добавив атом  $\Box_1$ , затем атом  $\Box_2$  или наоборот. Гистерезис между этими двумя путями в пространстве кристаллов сводится к перестановке атомов  $\Box_1$  и  $\Box_2$  в *h*-плоскости, поскольку повышающая инстантонная вершина добавляет эти атомы в разном порядке в двух процессах:



Переведя эти графические описания на введенный язык матричных элементов, получим следующую связь между элементами матрицы:

$$\frac{[\mathrm{K} \to \mathrm{K} + a] \to \mathrm{K} + a]}{[\mathrm{K} \to \mathrm{K} + b] \to \mathrm{K} + a]} = \varphi_{a,b} \left( \omega_{a} - \omega_{b} \right) , \qquad (3.110)$$

где  $\omega_a$  и  $\omega_b$  – положения атомов a и b в плоскости z.

В этих выражениях соотношения типа A/B = C/D, как в (3.110), следует понимать как AD = BC. Всякий раз, когда в (3.106) для заданных значений веса появляется ноль или полюс, один из путей в кристаллическом пространстве становится недоступным. Например, путь [ $\emptyset \rightarrow \square \rightarrow \square$ ] доступен в одном варианте из-за правила плавления для кристаллов [38, раздел 6.4], это подразумевает, что [ $\emptyset \rightarrow \square \rightarrow \square$ ] = 0. С другой стороны, в этом случае веса атомов в  $\sigma$ -плоскости связаны соотношением  $\omega_{\Xi} = \omega_{\Box} + \mu_{1\rightarrow 2}$ , что вносит 0 в числитель или знаменатель (3.106). Связь между понижающими операторами рассчитывается по аналогичной картине гистерезиса:

Соответствующее соотношение для матричных коэффициентов имеет следующий вид:

$$\frac{[\mathrm{K}+\overline{a}+\overline{b}\to\mathrm{K}+\overline{a}\to\mathrm{K}]}{[\mathrm{K}+\overline{a}+\overline{b}\to\mathrm{K}+\overline{b}\to\mathrm{K}]} = \varphi_{a,b}\left(\omega_{\overline{a}}-\omega_{\overline{b}}\right) \,. \tag{3.112}$$

Соотношения, смешивающие одновременно повышающие и понижающие генераторы, можно разделить на два типа в зависимости от того, добавляются/вычитаются два разных атома или один и тот же одиночный атом в/из кристалла.

Однонаправленный поток инстантонов от меньшего значения функции высоты U к более высокому указывает на то, что обе траектории понижающего и повышающего операторов направлены одинаково. Поэтому нет разницы в порядке добавления атома  $\Box_1$  и вычитания атома  $\Box_2$ , если  $\Box_1 \neq \Box_2$ :



Из этого графического описания следует соотношение:

$$[\mathbf{K} + \mathbf{a} \to \mathbf{K} + \mathbf{a} + \mathbf{b} \to \mathbf{K} + \mathbf{b}] = [\mathbf{K} + \mathbf{a} \to \mathbf{K} \to \mathbf{K} + \mathbf{b}].$$
(3.114)

Наконец, добавление и последующее вычитание некоторого атома П приводит к перестановке П со всеми атомами кристалла К:

$$= \operatorname{Prm}(\Box_1, \mathbf{K}). \quad (3.115)$$

Введем фазу сплетения одиночного атома <br/>iв позиции zв $\sigma$ -плоскости с кристал<br/>лом К:

$$\Psi_{\mathrm{K}}^{(i)}(z) := \prod_{a:i \to i} \mathbf{e}_{\xi}(-\mu_{a})^{-1} \prod_{\mathfrak{f} \in \mathrm{flavor}} \varphi_{i,\mathfrak{f}}(z-u_{\mathfrak{f}}) \prod_{[\underline{j}] \in \mathfrak{Q}_{0}} \varphi_{i,j}(z-\omega_{[\underline{j}]}), \qquad (3.116)$$

где  $\mathfrak{f}$  перечисляет все обрамляющие узлы, а  $u_{\mathfrak{f}}$  – соответствующие ароматические заряды. Наивно можно было бы думать, что (3.115) приводит к такому отношению:

$$[\mathbf{K} \to \mathbf{K} + \mathbf{i} \to \mathbf{K}] \sim \Psi_{\mathbf{K}}^{(i)}(\omega_{\mathbf{i}}), \qquad (3.117)$$

однако в точке  $z = \omega_{\mathbb{H}}$  имеется полюс функции заряда  $\Psi$  [38, раздел 6.3]. Также отметим, что рассуждения о гистерезисной голономии не позволяют восстановить общую нормировку генераторов и, следовательно, коэффициент пропорциональности в (3.117). Изменение нормировочных коэффициентов для [K  $\rightarrow$  K  $\pm$   $\Box$ ] не влияет на отношения (3.110), (3.112), (3.114), поскольку все они однородны по матричным элементам. Используя альтернативное определение (2.44), (2.43) для матричных элементов некоторых простых процессов, можно показать, что точное соотношение выглядит следующим образом:

$$[\mathbf{K} \to \mathbf{K} + \mathbf{i} \to \mathbf{K}] = \lim_{t \to 0} \zeta(t) \, \Psi_{\mathbf{K}}^{(i)}(t + \omega_{\mathbf{k}}) \,. \tag{3.118}$$

Как и ожидалось, мы снова пришли к соотношениям (2.112), выведенным нами ранее с помощью эквивариантного интегрирования по пространствам модулей представлений колчанов.

## 4 Вопросы дуальности калибровочных и интегрируемых теорий

# 4.1 Простая модель дуальности калибровочных и интегрируемых теорий

В этом разделе мы вернемся к рассмотрению двумерной  $\mathcal{N} = (2,2)$  суперсимметричной калибровочной колчанной теории, связанной с торическим трехмерным многооюразием Калаби-Яу. Для семейства этих теорий мы можем применить зеркальную дуальность (см. раздел 1.1.3). В итоге получится модель Ландау-Гинзбурга с характерным твистованным суперпотенциалом:

$$\mathcal{W}(\vec{\sigma}) = i \sum_{a \in \mathcal{Q}_0} \sum_{i=1}^{d_a} t_a \sigma_i^{(a)} + \sum_{(I:a \to b) \in \mathcal{Q}_1} \sum_{i=1}^{d_a} \sum_{j=1}^{d_b} \mathbf{w} \left( \sigma_j^{(b)} - \sigma_i^{(a)} - h_I \right) , \qquad (4.1)$$
$$\mathbf{w}(\sigma) = \sigma \left( \log \sigma - 1 \right) ,$$

где  $d_a$  – колчанные размерности, соответствующие узлам колчана  $a \in Q_0$ ,  $\sigma_i^{(a)}$  – скалярные комплексные поля в векторных мультиплетах, а  $t_a$  – соответствующие комплексифицированные параметры ФИ (1.27). Вакуумное уравнение для твистованного суперпотенциала  $\mathcal{W}$  представляет собой совокупность следующих алгебраических уравнений:

$$\exp[\partial_{\sigma_i^{(a)}} \mathcal{W}] = 1 \tag{4.2}$$

для средних значений твистованных киральных полей  $\sigma_i^{(a)}$ . После несложных преобразований эти уравнения можно переписать в следующем виде:

$$1 = \mathbf{BAE}_{i}^{(a)}\left(\vec{\sigma}, \vec{u}, \vec{\mathfrak{q}}\right) := \mathfrak{q}_{a}^{-1} \prod_{\substack{1 \le j \le N_{a} \\ j \ne i}} \varphi^{a \Leftarrow a} \left(\sigma_{i}^{(a)} - \sigma_{j}^{(a)}\right) \times \\ \times \prod_{\substack{b \in Q_{0} \\ b \ne a}} \prod_{k=1}^{N_{b}} \varphi^{a \Leftarrow b} \left(\sigma_{i}^{(a)} - \sigma_{k}^{(b)}\right) \prod_{\mathfrak{f}} \varphi^{a \Leftarrow \mathfrak{f}} \left(\sigma_{i}^{(a)} - u_{\mathfrak{f}}\right) ,$$

$$(4.3)$$

где функция  $\varphi$  – фактор связи, определенный в (2.129). Произведение в последнем члене проходит по всем одномерным обрамлениям колчана, а  $\mathfrak{q}_a := e^{it_a}$ . Для вакуумной конфигурации полей  $\sigma$  уравнение (4.3) выполняется для всех  $a \in \mathcal{Q}_0$ ,  $i = 1, \ldots, d_a$ .

Уравнения (4.3) по своей форме напоминают уравнения анзаца Бете. Действительно, соответствие калибровочной и интегрируемой моделей [172; 173] утверждает, что уравнения (4.3) можно отождествить с уравнениями анзатца Бете некоторой интегрируемой модели. Это весьма нетривиальное утверждение. Целью данного раздела является проверка этого утверждения для большого класса суперсимметричных калибровочных теорий, связанных с торическими многообразиями Калаби-Яу.

# 4.2 Ко-произведение в алгебрах колчанных янгианов

### 4.2.1 Инстантонные поправки к ко-произведению

Кристаллический базис, который мы определили в разделе 4.2.2, представляет собой базис устойчивых неподвижных точек, когда пространственный носитель теории компактен (см. примеры в [56]). Однако, если размерность пространства-времени равна  $D \ge 2$ , левая часть уравнений на неподвижные точки превращается в динамическое уравнение; результирующие уравнения, описывающие поток в пространстве полей, имеют вид (1.68), чьими решениями являются солитоны.

С физической точки зрения появление солитонов означает, что квазиклассические волновые функции, построенные как описание флуктуаций вокруг классического вакуума, не являются реальными собственными состояниями гамильтониана. Их приходится корректировать непертурбативными солитонными вкладами, возникающими из-за перекрытия волновых функций между кристаллами, расположенными при разных  $u_i$ . Это, в свою очередь, означает, что кристаллический базис не является реальным стабильным базисом<sup>1</sup> истинных собственных состояний, вместо этого они связаны линейным преобразованием (которое мы обозначаем как U), построенным как вклад разреженного солитонного газа. Такая картина аналогична построенной нами в главе 1 для описания интерфейсов параллельного переноса.

Мы описали такие переходы в разделе 3.3. Схематически мы можем изобразить их как показано на рисунке 4.1.



Рисунок 4.1 – Направление солитонного потока в весовой плоскости.

## Кристаллический базис и стабильный базис

При общем выборе цикла интегрирования  $\mathcal{L}$  для изучения асимптотического поведения дисковой статистической суммы можно разложить ее по всем возможным асимптотикам:

$$Z = \int_{\mathcal{L}} d\sigma \, e^{\mathcal{W}(\sigma)} \sim \sum_{\mathbf{K}} c_{\mathbf{K}}(\mathcal{C}) e^{\mathcal{W}(\langle \sigma \rangle_{\mathbf{K}})} \,, \tag{4.4}$$

где индекс К пробегает все неподвижные точки кристалла,  $\langle \sigma \rangle_{\rm K}$  – вакуумное среднее, соответствующее неподвижной точке К, а  $c_{\rm K}(\mathcal{C})$  – коэффициенты разложения. Базис циклов  $\mathcal{C}_{\rm K}$ , помеченных неподвижными точками, назовем К, удовлетворяющих условиям  $c_{\rm K}(\mathcal{C}_{{\rm K}'}) = \delta_{{\rm K},{\rm K}'}$ , – это вакуумный базис.

Мы будем называть базис наперстков Лефшеца (а также базис соответствующих им операторов бран) *стабильным базисом*. В обычном ВКБ-анализе асимптотического поведения интегралов устойчивый базис (а именно базис наперстков Лефшеца)  $\mathcal{L}_{K}$  совпадает с вакуумным базисом. Однако, когда наперсток Лефшеца, соответствующий наподвижной точке  $K_1$ , пересекает наперсток

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Стабильный базис – это базис *листьев* по Маулику-Окунькову [182]. Листья являются двойственными наперсткам Лефшеца и представляют собой объединения всех солитонных траекторий, вытекающих из фиксированной точки.

другой неподвижной точки K<sub>2</sub>, переход между этими состояниями контролируется матрицей Стокса *U*:

Вакуумный базис 
$$\longrightarrow$$
 Стабильный базис . (4.5)

Коэффициенты  $c_{\rm K}(\mathcal{L}_{{\rm K}'})$  определяются вкладами солитонов, протекающих от K' к K.<sup>2</sup>

Введем степени на двухцепочечных неподвижных кристаллических точках следующим образом:

$$\deg |\mathbf{K}_1\rangle_{u_1} \otimes |\mathbf{K}_2\rangle_{u_2} := |\mathbf{K}_2| - |\mathbf{K}_1|, \qquad (4.6)$$

где |K| – число атомов в кристалле К. Поскольку в базисе цепей кристаллов из двух узлов, упорядоченных по этой градуировке, все солитонные траектории направлены от K<sub>1</sub> к K<sub>2</sub>, матрица Стокса *U* является нижнетреугольной. Эквивалентно мы можем разложить:

$$U = 1 \otimes 1 + \sum_{k \ge 1} S_k, \quad \deg S_k = 2k,$$
 (4.7)

где оператор степени *n* повышает степень вектора на *n*.

Явное построение U довольно сложное: сначала нужно решить нелинейные солитонные уравнения, а затем построить однопетлевой определитель на фоне солитона. Чтобы обойти эти трудности, мы используем связи этих решений с алгебраическими структурами.

## 4.2.2 Различные ко-произведения для колчанных Янгианов

### Кристаллические цепочки и наивное тензорное произведение

Одним из первых ингредиентов, необходимых для построения спиновой цепочки, является представление алгебры БПЗ. Для колчанных алгебр БПЗ

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Подобные коэффициенты с точки зрения граничных условий В-типа на ветви Хиггса известны в математической литературе (см., например, [49; 182—185]) как значения стабильных оболочек в неподвижных точках  $\operatorname{Stab}_{K'}|_{K}$ .

мы можем использовать представления алгебры в терминах плавленных кристаллов, обсуждаемые в разделе 2.1.2. Здесь представление  $\mathcal{F}(^{\sharp}\mathcal{C})$  помечено выбором подкристалла  $^{\sharp}\mathcal{C}$  канонического кристалла, что, в свою очередь, отвечает выбору обрамления колчана. Более общее обрамление колчана сводится к набору обрамлений  $\mathfrak{f}_i$  с помощью одного узла обрамления размерности 1 (см. рисунок 4.2).



Рисунок 4.2 – Многомерное обрамление.

Пространство представления натянуто на вектора

$$\mathcal{F}(^{\sharp}\mathcal{C}): \quad \left\{ |\mathbf{K},^{\sharp}\mathcal{C}\rangle_{u} \right\} , \qquad (4.8)$$

где и обозначает спектральный параметр.

Для построения спиновых цепочек рассмотрим представление  $\mathcal{F}(^{\sharp}C_i)$  для каждого узла *i* и рассмотрим тензорное произведение  $\otimes_i \mathcal{F}(^{\sharp}C_i)$  представлений. Полученный кристалл можно представить составным кристаллом, состоящим из взаимно независимых расплавленных кристаллов K<sub>i</sub> с центрами масс соответственно  $u_i$  в общей комплексной плоскости весов:



Каждый К<sub>i</sub> растет в пределах  ${}^{\sharp}C_i$ . Мы выбрали параметризацию комплексных скалярных вакуумных средних, связанных с  $f_i$ , и обозначили их как  $u_i$ . Заметим, что мы предполагаем, что эти кристаллы не мешают друг другу, даже если проекции кристаллов на плоскость становятся достаточно большими и перекрывают друг друга.

Как было предложено в [53] (см. также [56]), такая геометрическая картина находит естественное отождествление с тензорным произведением представлений, ассоциированных с подкристаллами  ${}^{\sharp}C_i$ . Вектор в таком представлении, отвечающем несвязному объединению расплавленных кристаллов  $\bigsqcup_i K_i$ , обозначим как

$$|\mathbf{K}_1, {}^{\sharp}\mathcal{C}_1\rangle_{u_1} \otimes |\mathbf{K}_2, {}^{\sharp}\mathcal{C}_2\rangle_{u_2} \otimes \ldots \otimes |\mathbf{K}_n, {}^{\sharp}\mathcal{C}_n\rangle_{u_n}.$$
(4.10)

Когда выбор конкретного подкристалла  ${}^{\sharp}C_i$  не имеет значения или является очевидным из контекста, мы будем опускать эти символы в обозначениях. Мы называем это представление *кристаллической цепочкой* по аналогии со спиновыми цепочками.

Следуя [56], мы определяем *наивное*<sup>3</sup> представление тензорного произведения алгебры БПЗ колчана на цепочке кристаллов как

$$\begin{split} \mathbf{\Delta}_{0}^{(n)}(\psi(z)) \bigotimes_{i=1}^{n} |\mathbf{K}_{i}\rangle_{u_{i}} &= \prod_{i} \Psi_{\mathbf{K}_{i}}(z-u_{i}) \times \bigotimes_{i} |\mathbf{K}_{i}\rangle_{u_{i}}, \\ \mathbf{\Delta}_{0}^{(n)}(e(z)) \bigotimes_{i=1}^{n} |\mathbf{K}_{i}\rangle_{u_{i}} &= \sum_{i} \sum_{\Box \in \mathrm{Add}(\mathbf{K}_{i})} \prod_{j < i} \Psi_{\mathbf{K}_{j}} (u_{i} + h_{\Box} - u_{j}) \times \\ &\times \frac{[\mathbf{K}_{i} \to \mathbf{K}_{i} + \Box]}{z - (u_{i} + h_{\Box})} \bigotimes_{j < i} |\mathbf{K}_{j}\rangle_{u_{j}} \otimes |\mathbf{K}_{i} + \Box\rangle_{u_{i}} \otimes \bigotimes_{k > i} |\mathbf{K}_{k}\rangle_{u_{k}}, \qquad (4.11) \\ \mathbf{\Delta}_{0}^{(n)}(f(z)) \bigotimes_{i=1}^{n} |\mathbf{K}_{i}\rangle_{u_{i}} &= \sum_{i} \sum_{\Box \in \mathrm{Rem}(\mathbf{K}_{i})} \prod_{k > i} \Psi_{\mathbf{K}_{k}} (u_{i} + h_{\Box} - u_{k}) \times \\ &\times \frac{[\mathbf{K}_{i} \to \mathbf{K}_{i} - \Box]}{z - (u_{i} + h_{\Box})} \bigotimes_{j < i} |\mathbf{K}_{j}\rangle_{u_{j}} \otimes |\mathbf{K}_{i} - \Box\rangle_{u_{i}} \otimes \bigotimes_{k > i} |\mathbf{K}_{k}\rangle_{u_{k}}, \end{split}$$

где мы обозначили генераторы алгебры  $a \in \mathsf{Y}$  как  $\mathbf{\Delta}_{0}^{(n)}(a)$ , чтобы указать, что это представление действует на тензорной степени  $\mathsf{Y}^{\otimes n}$ . В дальнейшем мы часто будем рассматривать цепочку, состоящую всего из двух узлов, и будем обозначать соответствующий  $\mathbf{\Delta}_{0}^{(2)}$  просто как  $\mathbf{\Delta}_{0}$ . Также в дальнейшем будет

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Мы называем эти представления «наивными», поскольку они представляют собой простое обобщение структур матричных коэффициентов (2.50) на кристаллические цепочки. Процессы взаимного обмена атомами между отдельными кристаллами не учитываются.

полезно ввести сокращенные обозначения для (4.11):

$$\Delta_{0}e = e \otimes 1 + \psi \stackrel{\rightarrow}{\otimes} e,$$
  

$$\Delta_{0}f = 1 \otimes f + f \stackrel{\leftarrow}{\otimes} \psi,$$
(4.12)  

$$\Delta_{0}\psi = \psi \otimes \psi.$$

#### Недиагональное копроизведение для колчанной алгебры БПЗ

Мы собираемся рассмотреть кристаллическую цепочку, связанную с представлениями этой алгебры в терминах плавящихся кристаллов, и далее обсудим уравнения анзаца Бете.

Как уже говорилось, нас интересуют копроизведения алгебры, поскольку копроизведение позволяет строить цепочки кристаллов как тензорные степени представлений. Для некоторых колчанных алгебр БПЗ копроизведения уже описаны в литературе: например, тороидальные колчанные алгебры БПЗ имеют известное копроизведение, также копроизведение известно в простейшем рациональном случае для алгебры аффинного янгиана  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ .<sup>4</sup> Мы также ожидаем, что алгебра колчана БПЗ будет иметь копроизведение — гомоморфизм алгебры:

$$\Delta: \quad \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y} \,. \tag{4.13}$$

Когда структура копроизведения  $\Delta$  удовлетворяет условию коассоциативности

$$(\Delta \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta , \qquad (4.14)$$

итерированное копроизведение:

$$\Delta^{(n)}: \quad \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Y}^{\otimes n}, \qquad (4.15)$$
$$\dots \circ (1 \otimes 1 \otimes \Delta) \circ (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$$

фактически не зависит от порядка, в котором выполняются операции.

Рассмотрим также представление:

$$\operatorname{Rep}: \quad \mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y} \longrightarrow \operatorname{End} \left( \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \right) \,, \tag{4.16}$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Предложенные копроизведения для более экзотических экземпляров алгебр, таких как  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_n), \Upsilon(\widehat{\mathfrak{sl}}_{m|n}),$  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n})$ , можно найти в работах [168; 169; 179], соответственно.

где  $\mathcal{F}$  – **Y**-модули, ассоциированные с подкристаллами  ${}^{\sharp}\mathcal{C}_{1,2}$ . Теперь мы можем вычислить копроизведение в представлении, чтобы получить новую структуру  $\Delta$ :

$$\mathbf{Y} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y} \xrightarrow{\operatorname{Rep}} \operatorname{End} \left( \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \right)$$

$$\underbrace{\mathbf{\Delta} = \operatorname{Rep} \circ \Delta}$$

$$(4.17)$$

В дальнейшем будем говорить, что структура  $\Sigma \in \text{End}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F})$  факторизуется, если

 $\exists \Sigma \in \mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y} \quad \text{так, что} \quad \mathbf{\Sigma} = \operatorname{Rep} \circ \Sigma \,, \tag{4.18}$ 

в противном случае мы считаем, что  $\Sigma$  не факторизуется.

Наивное представление для кристаллической цепочки (4.11) является естественным кандидатом на представление копроизведения колчанной алгебры БПЗ, поскольку  $\Delta_0$  является гомоморфизмом алгебры по построению. Однако, если мы внимательно посмотрим на структуру (4.11), мы обнаружим, что  $\Delta_0$  не факторизуется, как в (4.17). Действительно, например, в  $\Delta_0 e(z)$  есть элемент, имеющий фазу  $\Psi_{K_1}(h_{\Box} + u_2 - u_1)$ , где  $K_1$  – первый кристалл в кристаллической цепочке, а  $h_{\Box} + u_2$  – координата добавленного атома к кристаллу  $K_2$  в весовой плоскости. Таким образом, нет возможности распутать операторы из первого и второго сомножителей копроизведения. Мы заключаем, что  $\Delta_0$  *не факторизуется*.

Помимо этой проблемы, как мы позже увидим, *R*-матрица  $R^{(0)}$ , получающаяся из  $\Delta_0$ , не приводит к уравнению вакуума для калибровочных теорий (см. (4.33) и (4.34)) и, следовательно, не имеет значения для соответствия калибровочных и интегрируемых теорий. Мы заключаем, что копроизведение  $\Delta$ , отвечающее соответствию калибровочных и интегрируемых теорий, отличается от  $\Delta_0$ .

Заметим, что *обе* структуры  $\Delta_0$  и  $\Delta$  являются действительными представлениями Y на кристаллической цепочке, состоящей из двух узлов. Придумать новое представление – непростая задача, поэтому кажется естественным предположить, что  $\Delta_0$  и  $\Delta$  являются *изоморфными* представлениями. Иными словами, мы ожидаем следующего соотношения:

$$\mathbf{\Delta} \cdot U = U \cdot \mathbf{\Delta}_0 \,, \tag{4.19}$$

где U – функция спектральных параметров  $u_1$  и  $u_2$ , соответствующих двум множителям  $\mathcal{F}$  в тензорном произведении.

Присвоим образующим в  $Y \otimes Y$  градуировку по следующему правилу:

$$\deg (e \otimes 1) = -1, \quad \deg (f \otimes 1) = +1, \quad \deg (\psi \otimes 1) = 0; \deg (1 \otimes e) = +1, \quad \deg (1 \otimes f) = -1, \quad \deg (1 \otimes \psi) = 0.$$

$$(4.20)$$

Если вектора в  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$  упорядочены по числу атомов во втором множителе, эта градуировка будет соответствовать в матричном представлении оператора тому, насколько далеко ненулевой матричный элемент находится от главной диагонали. Установив градуировку, мы можем применить фильтрацию к выражениям из  $\mathbf{Y}^{\otimes 2} = \mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y}$ . В дальнейшем будем говорить, что некоторое выражение определено по модулю  $\mathbf{Y}_k^{\otimes 2}$ , подразумевая, что мы рассматриваем разложение до степени k.

Следуя аргументам, представленным в разделе 4.2.1, мы заключаем, что матрица U нижнетреугольная. Поскольку U отвечает гомоморфизму представлений, все собственные значения U равны 1. Собирая эти соображения воедино, можно отразить эти факты об отображении U в следующем разложении:

$$U = 1 \otimes 1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k, \quad \deg S_k = 2k.$$
 (4.21)

Также определим обрезанный ряд для U:

$$U_n \equiv 1 \otimes 1 + \sum_{k=1}^n S_k \,, \tag{4.22}$$

тогда получим:

$$U^{-1} = U_n^{-1} - S_{n+1} \mod \mathsf{Y}_{2n+4}^{\otimes 2}.$$
(4.23)

Используя (4.19) и (4.12), получаем следующие соотношения:

$$\Delta e = U_n \cdot \Delta_0 e \cdot U_n^{-1} + [S_{n+1}, e \otimes 1] \mod \mathsf{Y}_{2n+3}^{\otimes 2},$$
  

$$\Delta f = U_n \cdot \Delta_0 f \cdot U_n^{-1} + [S_{n+1}, 1 \otimes f] \mod \mathsf{Y}_{2n+3}^{\otimes 2},$$
  

$$\Delta \psi = U_n \cdot \Delta_0 \psi \cdot U_n^{-1} + [S_{n+1}, \psi \otimes \psi] \mod \mathsf{Y}_{2n+4}^{\otimes 2}.$$
(4.24)

Требование, чтобы  $\Delta$  происходило от истинного копроизведения  $\Delta$  (чтобы мы могли явно факторизовать  $\Delta = \operatorname{Rep} \circ \Delta$ ), приводит к набору рекуррентных соотношений для  $S_n$ :

$$\begin{aligned} U_{n} \cdot \boldsymbol{\Delta}_{0} e \cdot U_{n}^{-1} \Big|_{\mathrm{deg}=2n+1} + [S_{n+1}, e \otimes 1] & \text{факторизуется}, \\ U_{n} \cdot \boldsymbol{\Delta}_{0} f \cdot U_{n}^{-1} \Big|_{\mathrm{deg}=2n+1} + [S_{n+1}, 1 \otimes f] & \text{факторизуется}, \\ U_{n} \cdot \boldsymbol{\Delta}_{0} \psi \cdot U_{n}^{-1} \Big|_{\mathrm{deg}=2n+2} + [S_{n+1}, \psi \otimes \psi] & \text{факторизуется}. \end{aligned}$$
(4.25)

Если мы сможем найти решение этих уравнений такое, что полученная структура  $\Delta$  окажется ассоциативной, мы сможем построить истинную структуру копроизведения на колчанных янгианах. Запишем первые несколько уровней явно.

Для уровня 1 имеем:

$$\psi \stackrel{\rightarrow}{\otimes} e + [S_1, e \otimes 1]$$
 факторизуется,  
 $f \stackrel{\leftarrow}{\otimes} \psi + [S_1, 1 \otimes f]$  факторизуется, (4.26)  
 $[S_1, \psi \otimes \psi]$  факторизуется.

Для уровня 2 имеем:

$$\begin{bmatrix} S_1, \psi \stackrel{\rightarrow}{\otimes} e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \otimes 1, S_1 \end{bmatrix} S_1 + \begin{bmatrix} S_2, e \otimes 1 \end{bmatrix} \quad \text{факторизуется},$$
$$\begin{bmatrix} S_1, f \stackrel{\leftarrow}{\otimes} \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \otimes f, S_1 \end{bmatrix} S_1 + \begin{bmatrix} S_2, 1 \otimes f \end{bmatrix} \quad \text{факторизуется}, \qquad (4.27)$$
$$\begin{bmatrix} \psi \otimes \psi, S_1 \end{bmatrix} S_1 + \begin{bmatrix} S_2, \psi \otimes \psi \end{bmatrix} \quad \text{факторизуется}.$$

Легко получить  $S_1$ , удовлетворяющую этим условиям, например, из рас-

смотрения в квантовой теории поля (см. раздел 3.3.2):

$$S_{1} |\mathbf{K}_{1}\rangle_{u_{1}} \otimes |\mathbf{K}_{2}\rangle_{u_{2}} =$$

$$= \sum_{a \in Q_{0}} (-1)^{|a|+1} \sum_{\underline{a}_{1} \in \operatorname{Rem}(\mathbf{K}_{1})} \sum_{\underline{a}_{2} \in \operatorname{Add}(\mathbf{K}_{2})} \frac{[\mathbf{K} \to \mathbf{K} - \underline{a}_{1}] [\mathbf{K}' \to \mathbf{K}' + \underline{a}_{2}]}{z + h_{\underline{a}_{1}} - h_{\underline{a}_{2}}} \times (4.28)$$

$$\times |\mathbf{K} - \underline{a}_{1}\rangle_{u_{1}} \otimes |\mathbf{K}' + \underline{a}_{2}\rangle_{u_{2}}.$$

Если мы применим явную форму (4.28)  $S_1$ , мы получим:<sup>5</sup>

$$\Delta e(z) = \Delta_1 e(z) - \sum_{k \ge 1} \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} \psi_{-k} \otimes e_j \mod \mathsf{Y}_3^{\otimes 2},$$
  

$$\Delta f(z) = \Delta_1 f(z) - \sum_{k \ge 1} \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-1-j} f_j \otimes \psi_{-k} \mod \mathsf{Y}_3^{\otimes 2},$$
  

$$\Delta \psi(z) = \Delta_1 \psi(z) \mod \mathsf{Y}_2^{\otimes 2},$$
  
(4.29)

где структура  $\Delta_1$  определена следующими соотношениями:

$$\Delta_{1}e(z) = e(z) \otimes 1 + \psi(z) \otimes e(z) \quad \in \mathsf{Y} \otimes \mathsf{Y},$$
  

$$\Delta_{1}f(z) = 1 \otimes f(z) + f(z) \otimes \psi(z) \quad \in \mathsf{Y} \otimes \mathsf{Y},$$
  

$$\Delta_{1}\psi(z) = \psi(z) \otimes \psi(z) \quad \in \mathsf{Y} \otimes \mathsf{Y}.$$
(4.30)

Выражение для  $\Delta_1$  напоминает копроизведение для квантовых групп и родственных алгебр в литературе. Заметим, однако, что  $\Delta_1$  не является гомоморфизмом алгебры для колчанных янгианов. Это интересная тонкость в нашем обсуждении рационального случая. Иная ситуация в тригонометрическом случае, а именно в квантовых тороидальных колчанных алгебрах БПЗ: в этом случае тригонометрический аналог  $\Delta_1$ , который мы обозначим как  $\ddot{\Delta}_1$ , является допустимым копроизведением, и тригонометрический аналог  $\Delta_0$ ,  $\ddot{\Delta}_0$ , факторизуется как  $\ddot{\Delta}_0 = \text{Rep} \circ \ddot{\Delta}_1$  [186]. Тем не менее, мы продолжаем называть  $\ddot{\Delta}_0$  наивным копроизведением, поскольку существует другая структура копроизведения, связанная с  $\Delta_0$  автоморфизмом Мики. Естественно ожидать, что

$$f(z) := \frac{\prod_{i=1}^{m} (z - p_i)}{\prod_{j=1}^{n} (z - q_j)} = \sum_{k=0}^{m-n} f_{-k} z^k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{res}_{w=q_j} f(w)}{z - q_j}, \text{ rge } f_{-k} = -\operatorname{res}_{w=\infty} f(w) / w^{k+1}.$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Здесь мы применяем каноническое разложение рациональной функции:
при вырождении к рациональному случаю автоморфизм Мики в тригонометрическом случае сведется к нашему отображению U.

## 4.2.3 R-матрица и уравнения Янга-Бакстера

#### *R*-*матрица*

В данном разделе мы обсудим свойства и построение R-матрицы. Ожидается, что R-матрица является переплетающим оператором для структуры копроизведения:<sup>6</sup>

$$R \cdot \Delta = \Delta \cdot R \,. \tag{4.31}$$

Отметим, что наивное представление кристаллической цепочки (4.11) также действует на тензорные факторы неэквивалентным образом. Поэтому мы можем построить «наивную» R-матрицу  $R^{(0)}$ , переплетающую  $\Delta_0$ :

$$R^{(0)} \cdot \mathbf{\Delta}_0 = \mathbf{\Delta}_0 \cdot R^{(0)} \,. \tag{4.32}$$

Получить явное выражение для  $R^{(0)}$  из (4.32) в кристаллическом представлении довольно просто:

$$R^{(0)}(u_{12}) |\mathbf{K}_1\rangle_{u_1} \otimes |\mathbf{K}_2\rangle_{u_2} = \rho_{\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_2}(u_{12}) |\mathbf{K}_2\rangle_{u_2} \otimes |\mathbf{K}_1\rangle_{u_1}, \qquad (4.33)$$

где скалярная фаза  $\rho$  удовлетворяет рекуррентным соотношениям:

$$\rho_{\mathrm{K}_{1}+\underline{a},\mathrm{K}_{2}}(z) = \Psi_{\mathrm{K}_{2}}^{(a)}(z+h_{\underline{a}}) \ \rho_{\mathrm{K}_{1},\mathrm{K}_{2}}(z) ,$$

$$\rho_{\mathrm{K}_{1},\mathrm{K}_{2}+\underline{a}}(z) = \Psi_{\mathrm{K}_{1}}^{(a)}(h_{\underline{a}}-z)^{-1}\rho_{\mathrm{K}_{1},\mathrm{K}_{2}}(z) .$$
(4.34)

Это выражение  $R^{(0)}$  удовлетворяет уравнениям Янга-Бакстера и условию унитарности.

$$R^{(\text{conv.})} \cdot \Delta = \Delta^{\text{op}} \cdot R^{(\text{conv.})}$$

где  $\Delta^{\mathrm{op}} \equiv P \cdot \Delta \cdot P$ , а P – оператор перестановки, действующий на пару модулей.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Обратим внимание: поскольку *R*-матрица, используемая в этом разделе, на самом деле является так называемой скрученной *R*-матрицей, связь между нашей скрученной *R*-матрицей и копроизведением задается (4.31). Для сравнения: матрица *R*, определяемая традиционно в литературе, связана с копроизведением соотношением

Из связи между  $\Delta$  и  $\Delta_0$ , а именно

$$\boldsymbol{\Delta} = U(z) \cdot \boldsymbol{\Delta}_0 \cdot U(z)^{-1}, \qquad (4.35)$$

мы наблюдаем, что *R*-матрица *R* и наивная *R*-матрица *R*<sup>(0)</sup> связаны следующим образом:

$$R(z) = U(-z) \cdot R^{(0)}(z) \cdot U(z)^{-1}.$$
(4.36)

Как мы видим, *R*-матрица ведет себя естественным образом по отношению к Гауссовой факторизации, несмотря на то, что уравнения Янга-Бакстера не предполагают такого естественного разложения. Эта факторизация напоминает факторизацию *R*-матриц в случае квантовых групп [187].

# Уравнения Янга-Бакстера

Как видно на примере (4.11), внутрь тензорного произведения множители могут входить неэквивалентным образом: физически, когда мы соединяем кристаллы и получаем тензорное произведение, при этом важно, какой кристалл идет первым, а какой следующим в тензорном произведении. Однако ожидается, что тензорные степени с произвольным порядком факторов представлений будут изоморфными представлениями алгебры. Изоморфизм (переплетающий оператор) между двухузловыми цепями с противоположным порядком тензорных сомножителей называется *R*-матрицей:

$$R: \quad \mathcal{F}_{u_1} \otimes \mathcal{F}_{u_2} \longrightarrow \mathcal{F}_{u_2} \otimes \mathcal{F}_{u_1}. \tag{4.37}$$

Априори *R* является функцией двух спектральных параметров, а именно  $R = R(u_1, u_2)$ . Однако, поскольку координата центра масс  $(u_1 + u_2)/2$  соответствует химпотенциалу глобальной ароматической симметрии U(1) базовой физической системы, *R* становится является функцией только параметра  $u_1 - u_2$ . Для рационального/тригонометрического/эллиптического случая  $R(u_1, u_2)$  является рациональной функцией от  $(u_1 - u_2)/\sinh\beta(u_1 - u_2)/\theta(u_1 - u_2)$ . О физическом происхождении этих трех факторов см. раздел 2.3.2.

Для тензорного произведения эту двухузловую *R*-матрицу легко обобщить

до R-матрицы, которая переставляет местами два соседних множителя в позициях i и (i + 1) в тензорном произведении общего вида:

$$R_{i,i+1}: \dots \otimes \mathcal{F}_{u_{i-1}} \otimes \mathcal{F}_{u_i} \otimes \mathcal{F}_{u_{i+1}} \otimes \mathcal{F}_{u_{i+2}} \otimes \dots \longrightarrow$$

$$\dots \otimes \mathcal{F}_{u_{i-1}} \otimes \mathcal{F}_{u_{i+1}} \otimes \mathcal{F}_{u_i} \otimes \mathcal{F}_{u_{i+2}} \otimes \dots, \qquad (4.38)$$

$$R_{i,i+1} = \dots \otimes 1 \otimes R \otimes 1 \otimes \dots$$

В дальнейшем мы часто будем использовать графический язык. На этом языке тензорные факторы изображаются в виде прямых цепочек, идущих справа налево и упорядоченных в соответствии с порядком в тензорном произведении, так что первый элемент соответствует верхней нити. Матричный элемент оператора *R* изображается в виде простой косы следующей диаграммой:

$${}_{u_2}\langle \mathbf{K}'_2| \otimes {}_{u_1}\langle K'_1| R(u_1 - u_2) | \mathbf{K}_1 \rangle_{u_1} \otimes | \mathbf{K}_2 \rangle_{u_2} = \underbrace{(\mathbf{K}'_2, u_2)}_{(\mathbf{K}'_1, u_1)} \underbrace{\sim}_{s} \underbrace{(\mathbf{K}_2, u_2)}_{(\mathbf{K}_2, u_2)} .$$
(4.39)

Поскольку *R*-матрица переставляет факторы в тензорном произведении, она должна давать представление группы перестановок; поэтому мы налагаем следующие требования на ее матричные элементы:

1. *R*-матрица *R* должна удовлетворять уравнениям Янга-Бакстера:

$$R_{12}(u_{12}) R_{13}(u_{13}) R_{23}(u_{23}) = R_{23}(u_{23}) R_{13}(u_{13}) R_{12}(u_{12}), \qquad (4.40)$$

где  $u_{ij} \equiv u_i - u_j$ . Эти уравнения можно представить следующей диаграммой:



2. Кроме того, *R*-матрица удовлетворяет условию унитарности:

$$R_{12}(u_{12}) R_{21}(u_{21}) = 1, \qquad (4.42)$$

которое можно представить как

#### 4.2.4 Оператор Лакса

Имея выражение для *R*-матрицы, мы можем построить так называемые операторы Лакса, действующие на представление, зафиксировав два из четырех представлений на графическом изображении *R*-матрицы. Иными словами, эти операторы строятся как сплетение неизвестного кристалла с известным:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{K}',\mathrm{K}}^{(a)}(u) := \underbrace{(\mathrm{K}',u)}_{(\mathrm{K}',u)} \tag{4.44}$$

Это графическое представление можно перевести в отношение между матричными элементами оператора Лакса  $\mathcal{L}_{K',K}$  и элементами *R*-матриц следующим образом:

$${}_{v}\langle P_{2}|\mathcal{L}_{\mathrm{K}',\mathrm{K}}(u)|P_{1}\rangle_{v} := {}_{v}\langle P_{2}|\otimes {}_{u}\langle\mathrm{K}'|R(u-v)|\mathrm{K}\rangle_{u}\otimes|P_{1}\rangle_{v}.$$
(4.45)

Графическое изображение операторов Лакса (4.44) предполагает естественное определение алгебраических операторов, действующих на кристаллические цепочки. В графических обозначениях мы отождествляем тензорные степени с пучками нитей, поэтому для перехода от определения операторов Лакса  $\mathcal{L}$  к их высшим копроизведениям мы просто заменяем одну нить пучком из n нитей:

$$\Delta^{(n)}\mathcal{L}_{\mathbf{K}',\mathbf{K}}(u) := \underbrace{(\mathbf{K}',u)}_{(\mathbf{K}',u)} \underbrace{\overbrace{(\mathbf{K}',u)}}_{(\mathbf{K},u)} . \tag{4.46}$$

Структура копроизведения в терминах операторов Лакса приобретает исключительно простой вид:

$$\Delta \mathcal{L}_{\mathrm{K}',\mathrm{K}}(u) = \sum_{\mathrm{K}''} \mathcal{L}_{\mathrm{K}'',\mathrm{K}}(u) \otimes \mathcal{L}_{\mathrm{K}',\mathrm{K}''}(u) \,. \tag{4.47}$$

Мы можем перевыразить действие операторов Лакса через генераторы колчанной алгебры БПЗ, используя соотношение (4.36).

Для этого введем некоторые упрощающие обозначения. Кристалл с фиксированным числом  $\alpha \in \mathbb{N}$  атомов будем обозначать как  $Q_{\alpha}$ . Таким образом, можно ввести дополнительную градуировку матричных элементов *R*:

$$R = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_n, \quad \langle \mathbf{K}', Q'_\beta | R_n | Q_\alpha, \mathbf{K} \rangle \sim \delta_{n, \alpha - \beta}.$$
(4.48)

Мы выводим из (4.36) следующие соотношения (здесь мы используем сокращенное обозначение  $r = R^{(0)}, s_k = S_k(z), s_{-k} = S_k(-z)$ ):

$$R_{2} = rs_{1}^{2} - rs_{2},$$

$$R_{1} = s_{-1}rs_{1}^{2} - rs_{1} - s_{-1}rs_{2},$$

$$R_{0} = r - s_{-1}rs_{1} - s_{-2}rs_{2} + s_{-2}rs_{1}^{2},$$

$$R_{-1} = s_{-1}r - s_{-2}rs_{1},$$

$$R_{-2} = s_{-2}r.$$
(4.49)

В частности, для матричных элементов имеем:

$$\langle \mathbf{K}' | \mathcal{L}_{\varnothing, \varnothing}(z) | \mathbf{K} \rangle = \rho_{\varnothing, \mathbf{K}}(z) \, \delta_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'}, \langle \mathbf{K}' | \mathcal{L}_{\varnothing, \Box}(z) | \mathbf{K} \rangle = -\rho_{\varnothing, \mathbf{K}'}(z) \, \langle \varnothing, \mathbf{K}' | S_1(z) | \Box, \mathbf{K} \rangle, \langle \mathbf{K}' | \mathcal{L}_{\Box, \varnothing}(z) | \mathbf{K} \rangle = \rho_{\varnothing, \mathbf{K}}(z) \, \langle \mathbf{K}', \Box | S_1(-z) | \mathbf{K}, \varnothing \rangle,$$

$$\langle \mathbf{K}' | \mathcal{L}_{Q'_1, Q_1}(z) | \mathbf{K} \rangle = \rho_{Q_1, \mathbf{K}}(z) \, \delta_{\mathbf{K}, \mathbf{K}'} \delta_{Q_1, Q'_1} - - \langle \mathbf{K}', Q'_1 | S_1(-z) R^{(0)}(z) S_1(z) | Q_1, \mathbf{K} \rangle.$$

$$(4.50)$$

Используя соотношения (4.28) и (4.34), находим:

$$\mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing} = t_{\mathfrak{f}}(z) ,$$

$$\mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing} = \mathbf{F}_{\varpi,\varnothing} \times t_{\mathfrak{f}}(z) e^{(a)} (z + h_{\varpi}) ,$$

$$\mathcal{L}_{\varpi,\varnothing} = -\mathbf{E}_{\varnothing,\varpi} \times f^{(a)} (z + h_{\varpi}) t_{\mathfrak{f}}(z) ,$$

$$\mathcal{L}_{\varpi',\varpi} = t_{\mathfrak{f}}(z) \psi^{(a)}(z + h_{\varpi}) +$$

$$+ \mathbf{E}_{\varnothing,\varpi'} \mathbf{F}_{\varpi,\varnothing} \times f^{(a)} (z + h_{\varpi'}) t_{\mathfrak{f}}(z) e^{(a)} (z + h_{\varpi}) .$$
(4.51)

Здесь оператор  $t_{f}(z)$  (оператор h в обозначениях [181]) зависит от обрамления и, следовательно, от подкристалла  ${}^{\sharp}C$ , связанного с фиксированным кристаллическим узлом, который сплетается при построении операторов Лакса (4.44). В кристаллическом базисе он приобретает вакуумное среднее:

$$t_{\mathfrak{f}}(z)|\mathbf{K}\rangle = \rho_{\varnothing,\mathbf{K}}(z)|\mathbf{K}\rangle = \left(\prod_{a\in Q_0}\prod_{a\in\mathbf{K}}\varphi^{a\Leftarrow\mathfrak{f}}\left(h_a - z\right)\right)^{-1}|\mathbf{K}\rangle.$$
(4.52)

Оператор  $t_{\rm f}(z)$  можно рассматривать как набор четных операторов Картана помимо  $\psi^{(a)}(z)$ ; для него имеются следующие коммутационные соотношения с повышающими и понижающими операторами:

$$t_{\mathfrak{f}}(z) e^{(a)}(w) \simeq \varphi^{a \Leftarrow \mathfrak{f}} (w - z)^{-1} e^{(b)}(w) t_{\mathfrak{f}}(z) ,$$
  

$$t_{\mathfrak{f}}(z) f^{(a)}(w) \simeq \varphi^{a \Leftarrow \mathfrak{f}} (w - z) f^{(b)}(w) t_{\mathfrak{f}}(z) .$$
(4.53)

В заключение этого раздела рассмотрим аналогичным образом высшие операторы типа  $\mathcal{L}_{\mathrm{K},\varnothing}(z)$ . Сначала отметим, что:

$$S_{k\geq 1}|\varnothing\rangle\otimes|\mathbf{K}\rangle=0 \quad \Rightarrow \quad U(z)^{-1}|\varnothing\rangle\otimes|\mathbf{K}\rangle=|\varnothing\rangle\otimes|\mathbf{K}\rangle.$$
 (4.54)

Применяя (4.36), получаем:

$$\langle \mathbf{K}' | \mathcal{L}_{Q_n, \varnothing} | \mathbf{K} \rangle = \langle \mathbf{K}', Q_n | S_n(-z) | \mathbf{K}, \varnothing \rangle \cdot \rho_{\varnothing, \mathbf{K}}(z) .$$
 (4.55)

Разложение, подобное (4.28), ожидается и для  $S_k$ :

$$S_k \sim \underbrace{f \cdot f \cdot f \cdot \dots}_{k \text{ times}} \otimes \underbrace{e \cdot e \cdot e \cdot \dots}_{k \text{ times}}.$$
 (4.56)

Это разложение совместимо с присвоением степеней (4.20).

Используя форму (4.56)  $S_n$ , матричный элемент этого оператора можно представить следующим образом:

$$\langle \mathbf{K}', Q_n | S_n(-z) | \mathbf{K}, \varnothing \rangle = \oint d\vec{y} \ F_{Q_n}(\vec{y}, z) \times \\ \times \langle \mathbf{K}' | \prod_{b \in Q_0} f^{(b)} \left( y_1^{(b)} \right) f^{(b)} \left( y_2^{(b)} \right) \dots f^{(b)} \left( y_{|Q_n^{(b)}|}^{(b)} \right) | \mathbf{K} \rangle ,$$

$$(4.57)$$

где F – некоторая функция, зависящая от пробного кристалла  $Q_n$  и всех остальных спектральных параметров.

Используя это представление для  $\mathcal{L}_{\mathrm{K},\varnothing}(z)$ , получаем:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{K},\varnothing}(u) = \oint d\vec{y} \ F_{\mathrm{K}}(\vec{y}, u) \times \\ \times \left[ \prod_{b \in Q_0} f^{(b)} \left( y_1^{(b)} \right) f^{(b)} \left( y_2^{(b)} \right) \dots f^{(b)} \left( y_{|\mathrm{K}^{(b)}|}^{(b)} \right) \right] t_{\mathfrak{f}}(u) .$$
(4.58)

Нетрудно обобщить эти соотношения на тензорные степени представлений. Для краткости обозначим высшие копроизведения жирным шрифтом:

$$(\Delta^{(m-1)}\mathcal{L})_{\mathbf{K},\mathbf{K}'}(u) =: \mathcal{L}_{\mathbf{K},\mathbf{K}'}(u), \quad (\Delta^{(m-1)}e)^{(a)}(u) =: \mathbf{e}^{(a)}(u), \text{ II T.A.}$$
(4.59)

Таким образом, получаем:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{K},\varnothing}(u) = \oint d\vec{y} \ F_{\mathrm{K},a}(\vec{y},u) \ \mathbf{t}_{\mathfrak{f}}(u) \times \\ \times \left[ \prod_{b \in Q_0} \mathbf{f}^{(b)} \left( y_1^{(b)} \right) \mathbf{f}^{(b)} \left( y_2^{(b)} \right) \dots \mathbf{f}^{(b)} \left( y_{|\mathrm{K}^{(b)}|}^{(b)} \right) \right] .$$

$$(4.60)$$

Заметим, что зависимость переменных, обозначенных жирным шрифтом, в конечном выражении от степени m опущена, ее всегда можно восстановить из контекста.

# 4.3 Интегрируемость, уравнения анзаца Бете

## 4.3.1 Теорема запрета для колчанных Янгианов со сдвигом

В этом разделе мы представим два аргумента, противоречащих соответствию калибровочных и интегрируемых теорий, для определенных представлений (которые вызывают отрицательный сдвиг функции заряда основного состояния) и для кирального колчана, соответственно. Наши аргументы применимы как к сдвинутым колчанным янгианам, связанным с некиральными колчанами, так и, в частности, к общим колчанным янгианам, связанным с *киральными* колчанами. Затем мы обсудим теоретико-калибровочную природу появившихся сложностей.

## Условия из уравнений Янга-Бакстера

В качестве первого аргумента запрета рассмотрим уравнение Янга-Бакстера (УЯБ) со следующими начальными/конечными состояниями:



где кристалл K' имеет на один атом больше, чем K, и может быть записан как  $K + \Box'$ , а  $Q_n$  обозначает суммирование по всем кристаллам размерности n (т.е. с n атомами), которые могут появиться в соответствующем промежуточном канале.<sup>7</sup>

Подставляя разложения *R*-матриц (4.49) в УЯБ (4.61), получаем следующее условие:

$$\langle \emptyset, Q_1 | S_1(u_{21}) | \Box, \emptyset \rangle \langle \emptyset, \mathbf{K}' | S_1(u_{13}) | Q_1, \mathbf{K} \rangle +$$

$$+ \frac{\rho_{\emptyset, \mathbf{K}}(u_{13})}{\rho_{\emptyset, \mathbf{K}'}(u_{13})} \langle \emptyset, \mathbf{K}' | S_1(u_{23}) | \Box, \mathbf{K} \rangle = \frac{\rho_{\emptyset, \emptyset}(u_{12})}{\rho_{\emptyset, \Box}(u_{12})} \langle \emptyset, \mathbf{K}' | S_1(u_{23}) | \Box, \mathbf{K} \rangle,$$

$$(4.62)$$

где  $u_{ij} \equiv u_i - u_j$ . Затем, подставив выражение  $S_1$  из (4.28) и рекуррентное соотношение  $\rho$  из (4.34), перепишем условие (4.62) в виде:

$$(-1)^{|a|+1}\Psi_{\varnothing}(h_{\Box'}+u_{3}-u_{1})\frac{\mathbf{F}_{\Box,\varnothing}\mathbf{E}_{\mathrm{K},\mathrm{K}+\Box'}}{(h_{\Box}+u_{2})-(h_{\Box'}+u_{3})}+ \\ +\sum_{\tilde{\Box}\in\mathrm{Add}(\varnothing)}\frac{\mathbf{F}_{\Box,\varnothing}\mathbf{E}_{\varnothing,\tilde{\Box}}\mathbf{F}_{\tilde{\Box},\varnothing}\mathbf{E}_{\mathrm{K},\mathrm{K}+\Box'}}{((h_{\Box}+u_{2})-(h_{\tilde{\Box}}+u_{1}))((h_{\Box}+u_{1})-(h_{\Box'}+u_{3}))} = (4.63)$$
$$= (-1)^{|a|+1}\Psi_{\varnothing}(h_{\Box}+u_{2}-u_{1})\frac{\mathbf{F}_{\Box,\varnothing}\mathbf{E}_{\mathrm{K},\mathrm{K}+\Box'}}{(h_{\Box}+u_{2})-(h_{\Box'}+u_{3})},$$

где во второй строке мы суммировали все возможные варианты  $Q_1$ , что соответствует множеству  $Add(\emptyset)$ , т.е. всем атомам, которые можно добавить в основное состояние этого кристалла.

 $<sup>^{7}{</sup>m B}$  этом подразделе мы удалим цветные метки a на операторах и атомах для упрощения записи получаемых выражений; они не существенны для аргумента и могут быть легко восстановлены.

Также, поскольку  $\Psi_{\varnothing}(z)$  представляет собой вклад основного состояния функции заряда, его можно записать как

$$\Psi_{\varnothing}(z) = \sum_{k \ge 0} \Psi_{\varnothing,-k} z^k + \sum_{\tilde{\Box} \in \operatorname{Add}(\varnothing)} \frac{\operatorname{Res}_{w=h_{\tilde{\Box}}} \Psi_{\varnothing}(w)}{z - h_{\tilde{\Box}}}.$$
(4.64)

Подставив это выражение в (4.63), мы получим требование согласованности:

$$\sum_{k\geq 1} \Psi_{\varnothing,-k} \frac{(h_{\Box'} + u_3 - u_1)^k - (h_{\Box} + u_2 - u_1)^k}{(h_{\Box} + u_2) - (h_{\Box'} + u_3)} = 0, \qquad (4.65)$$

где мы использовали тот факт, что  $\mathbf{E}_{\varnothing,\tilde{\Box}}\mathbf{F}_{\tilde{\Box},\varnothing} = (-1)^{|a|+1} \operatorname{Res}_{w=h_{\tilde{\Box}}} \Psi_{\varnothing}(w).$ 

Условие (4.65) означает, что *R*-матрица, заданная (4.36), решает УЯБ только в том случае, если нет отрицательного сдвига в функции заряда основного состояния  $|\varnothing\rangle$ , а именно

$$\Psi_{\varnothing,-k} = 0,$$
 для  $k \ge 1.$  (4.66)

Следствием ограничения (4.66) является то, что в зарядовых функциях основного состояния (2.77) степень знаменателя не может быть меньше, чем степень числителя, а именно,

$$\mathfrak{s}_a \ge 0, \quad \forall \, a \in Q_0 \,. \tag{4.67}$$

#### Согласование копроизведения операторов Лакса и колчанных алгебр БПЗ

Предыдущий аргумент запрещает отрицательный сдвиг (точнее, мы требуем  $\mathfrak{s}_a \geq 0$  в разложении по модам *функции заряда основного состояния*) и, следовательно, ограничивает тип двумерных кристаллических представлений, которые мы можем рассматривать в задаче об интегрируемости. Далее мы приведем более сильный запрещающий аргумент, который исключит все киральные колчаны.

Второй запрещающий аргумент использует согласованность копроизведения, происходящего из двух разных источников. Как мы видели в разделе 4.2.4, операторы Лакса имеют естественную структуру копроизведения (4.47). Используя соотношения (4.51), мы могли бы получить копроизведение, индуцированное операторами Лакса, на Y. Теперь мы можем рассмотреть вопрос, совместимы ли копроизведение, индуцированное операторами Лакса на Y, и исходное копроизведение Y, построенное в разделе 4.2.2:

$$\Delta^{(\text{Lax})} \stackrel{???}{=} \Delta^{(\mathsf{Y})}. \tag{4.68}$$

Как мы увидим в этом разделе, совместимость накладывает ограничение на отрицательные моды операторов Картана  $\psi^{(a)}(z)$ .

Для копроизведения (4.47) операторов Лакса имеем:

$$\Delta \mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing} = \mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing} \otimes \mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing} + \mathcal{L}_{\square,\varnothing} \otimes \mathcal{L}_{\varnothing,\square} \mod \mathsf{Y}_{4}^{\otimes 2},$$
  

$$\Delta \mathcal{L}_{\varnothing,\square} = \mathcal{L}_{\varnothing,\square} \otimes \mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing} + \mathcal{L}_{\square,\square} \otimes \mathcal{L}_{\varnothing,\square} \mod \mathsf{Y}_{3}^{\otimes 2},$$
  

$$\Delta \mathcal{L}_{\square,\varnothing} = \mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing} \otimes \mathcal{L}_{\square,\varnothing} + \mathcal{L}_{\square,\varnothing} \otimes \mathcal{L}_{\square,\square} \mod \mathsf{Y}_{3}^{\otimes 2}.$$
(4.69)

Тогда получим следующие соотношения:

$$(\Delta \mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing})^{-1} \Delta \mathcal{L}_{\varnothing,\Box} = \left(\mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing}^{-1} \mathcal{L}_{\varnothing,\Box}\right) \otimes 1 + \left[\left(\mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing}^{-1} \mathcal{L}_{\Box,\Box}\right) - \left(\mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing}^{-1} \mathcal{L}_{\Box,\varnothing} \mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing}^{-1} \mathcal{L}_{\varnothing,\Box}\right)\right] \otimes \left(\mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing}^{-1} \mathcal{L}_{\varnothing,\Box}\right) \mod \mathsf{Y}_{3}^{\otimes 2}.$$

$$(4.70)$$

Подставив (4.51), получим:

$$\Delta e(z) = \Delta_1 e(z) \mod \mathsf{Y}_3^{\otimes 2}. \tag{4.71}$$

Сравнивая (4.71) и (4.29), мы видим, что эти два выражения совместимы только в том случае, если

$$\psi_{-k} = 0, \quad k \ge 1.$$
 (4.72)

Это ограничение означает, что в алгебре не допускаются отрицательные сдвиги. Поскольку колчанные янгианы для киральных колчанов всегда требуют отрицательных сдвигов, даже бесконечно отрицательных сдвигов, когда рассматриваются бесконечные представления (что и происходит в обычном случае), этот второй аргумент исключает все киральные колчаны.

# Теоретико-полевой аргумент против киральных колчанов: нарушение дуальности Хиггса-Кулона

Для двумерных  $\mathcal{N} = (2, 2)$  калибровочных линейных сигма-моделей с таргет-пространством, заданным киральным колчаном  $\mathcal{Q}$ , существуют два явления, модифицирующие квантовое описание пространства модулей: киральная аномалия и ренорм-групповой бег параметров ФИ. В результате возведенные в степень комплексные параметры ФИ  $e^{it_a}$ ,  $a \in Q_0$  имеют аномальные размерности:

$$\delta_a = \sum_b d_a d_b \chi_{ab} \,, \tag{4.73}$$

где индекс b перечисляет все узлы колчана — как калибровочные, так и обрамляющие. Параметры  $\chi_{ab}$  – это параметры киральности колчана, определенные следующим образом:

$$\chi_{ab} := |a \to b| - |b \to a| \,. \tag{4.74}$$

Следовательно,  $\delta_a$  обращается в нуль для некиральных колчанов.

Вакуумные уравнения (от которых ожидается, что они будут уравнениями анзатца Бете) (4.3) представляют собой уравнения для комплексных скаляров  $\sigma_{\alpha}^{(a)}, a \in Q_0, \alpha = 1, \ldots, d_a$  и принимают следующий вид:

$$\frac{P_{(a,\alpha)}\left(\sigma_{\alpha}^{(a)},\sigma_{\beta}^{(b)}\right)}{Q_{(a,\alpha)}\left(\sigma_{\alpha}^{(a)},\sigma_{\beta}^{(b)}\right)} = e^{\mathrm{i}t_{a}},\qquad(4.75)$$

где мы подразумеваем, что для пар индексов  $(b,\beta) \neq (a,\alpha)$ , а скаляры  $\sigma_{(a,\alpha)}$  имеют размерность 1. Сравнивая размерности левой и правой частей, получим:

$$\deg P_{(a,\alpha)} - \deg Q_{(a,\alpha)} = \delta_a \,. \tag{4.76}$$

Как следствие дуальности Хиггса-Кулона, мы ожидаем явного отображения между кристаллическим вакуумом на Хиггсовой ветви и корнями Бете (решениями (4.75)) на Кулоновой ветви в пределе большого Кэлерового объема  $|e^{it_a}| \to \infty$  в циклической камере. Эта идентификация происходит следующим образом. В пределе  $|e^{it_a}| \to \infty$  уравнения (4.75) сводятся к уравнениям для нулей знаменателя:

$$Q_{(a,\alpha)}\left(\sigma_{\alpha}^{(a)},\sigma_{\beta}^{(b)}\right) = 0.$$
(4.77)

Корни этих уравнений соответствуют вакуумным средним полей  $\sigma_{\alpha}^{(a)}$  на Кулоновой ветви, совпадающим с соответствующими значениями на Хиггсовой ветви. На Хиггсовой ветви  $\sigma_{\alpha}^{(a)}$  приобретают значения в проекциях атомов кристалла на комплексную плоскость весов (см. раздел 2.1.2). Таким образом, мы получаем набор решений (4.75) со следующим поведением:

$$\sigma_{\alpha}^{(a)} = u_r + O\left(h_i, \left|e^{-\mathrm{i}t_a}\right|\right) , \qquad (4.78)$$

при некотором выборе модулей  $u_r$  так, чтобы  $\sigma_{\alpha}^{(a)}$  принадлежал кристаллу  $K_r$  в кристаллической цепочке. Если колчан киральный,<sup>8</sup> однако, существует выбор размеров колчана  $d_a$  такой, что  $\delta_a > 0$  для некоторого  $a \in Q_0$ . В этом случае, помимо корней (4.78), связанных с конфигурацией кристаллической цепочки, (4.75) будет иметь дополнительные корни со следующим поведением:

$$\sigma_{\alpha}^{(a)} \sim \left| e^{\mathrm{i}\,\upsilon\,t_a} \right|, \quad \upsilon > 0.$$
(4.79)

В пределе большого объема эти корни уходят в бесконечность в весовой плоскости и не соответствуют никакому вакууму на Хиггсовой ветви.

R-матрица для колчана Q строится как интерфейс двумерной теории  $\mathcal{N} = (2,2)$  с таргет-пространством, заданным пространством модулей колчана Q. Набор уравнений Янга-Бакстера следует из двух свойств:

- 1. Параллельный перенос плоский. Это приводит к равенству функторов параллельного переноса по гомотопически эквивалентным путям в пространстве параметров, как в (4.41).
- 2. Расщепляемость кристаллов в кристаллических цепочках позволяет соотносить кристаллические модули с нитями в (4.41).

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Эта проблема возникает, даже если киральна только часть колчана, отвечающая обрамлению, и  $\chi_{\mathfrak{f}a} < 0$ для некоторого узла a, так что соответствующий колчанный янгиан имеет отрицательный сдвиг  $\mathfrak{s}_a < 0$ , см. раздел 4.3.1.

То, что колчан Q является киральным, не ухудшает свойства параллельного переноса и связанного с ним интерфейса. Однако, унитарность нарушается появлением вакуума (4.79), не связанного с кристаллическими цепочками, в процессе расщепления левой и правой части (4.41) в произведении трех *R*-матриц, которые мы должны суммировать по *всем* вакуумам БПЗ, появляющимся в теории, включая (4.79), чтобы соотношение (4.41) выполнялось. Следовательно, если мы ограничим построение *R*-матриц кристаллическими базисами и связанной с ними структурой копроизведения, то результирующая *R*-матрица не будет решением уравнений Янга-Бакстера.

### 4.3.2 Анзац Бете

# Предварительные сведения

В этом разделе мы обобщим конструкцию [180; 181] (см. также [178; 179]) для уравнений анзаца Бете на алгебры БПЗ, которые не запрещены теоремой из предыдущего раздела, а именно, несмещенные версии алгебр БПЗ, соответствующие некиральным колчанам для торических трехмерных многообразий Калаби-Яу. Тогда единственными возможными вариантами являются несмещенные аффинные янгианы **g**, где алгебра **g** – **gl**<sub>n</sub>, **gl**<sub>m|n</sub> или D(2, 1; α).<sup>9</sup>

Эта конструкция носит весьма технический характер и опирается на свойства алгебры Y и алгебры операторов Лакса.

Сначала предположим, что генераторы алгебры Y удовлетворяют алгебраическим соотношениям (2.126), а операторы Лакса могут быть перевыражены через Y согласно (4.51), (4.58).

Что касается *R*-матрицы, ожидается, что она будет удовлетворять уравнениям Янга-Бакстера (4.41) и условию унитарности (4.43). В дополнение к этим стандартным соотношениям мы ожидаем, что *R*-матрица будет приобретать

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Для явных алгебраических соотношений  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$  и  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n})$ , см. раздел 8 в [38]; о колчане  $D(2,1;\alpha)$  см. раздел 6 [188], где дана тригонометрическая версия алгебры.

особый вид в пределе спектрального параметра  $u_{12} \to 0.^{10}$  Если представления в  $u_1$  и  $u_2$  изоморфны, то мы требуем:

$$R_{12}(0) = 1 \otimes 1. \tag{4.80}$$

Это свойство естественным образом следует из существования копроизведения  $\Delta$  для Y. Копроизведение ведет себя гладко в пределе  $u_{12} \rightarrow 0$ , и существует четко определенный предел  $\Delta(u_{12} = 0)$ . Более того, *R*-матрица отображает  $\Delta(u_{12})$  в  $\Delta(-u_{12})$ , которые идентичны в точке  $u_{12} = 0$ , поэтому *R*-матрица в  $u_{12} = 0$  действует как тождественный оператор.

Графически это свойство можно изобразить так:

$$u \xrightarrow{u} u = u \xrightarrow{u} u$$
. (4.81)

#### Внешние вектора Бете

Присвоим некоторые варианты цветов  $b \in Q_0$  кристаллам с центрами масс, расположенными в разных положениях  $x_i^{(b)}$ . Назовем этот набор параметров:

$$\vec{x} := \left\{ \left\{ x_i^{(b)} \right\}_{i=1}^{N_b} \right\}_{b \in Q_0} , \qquad (4.82)$$

и обозначим соответствующее состояние пустой кристаллической цепи как:

$$|\tilde{\boldsymbol{\varnothing}}\rangle = |\varnothing\rangle_{x_1^{(b_1)}} \otimes \cdots \otimes |\varnothing\rangle_{x_{d_{b_m}}^{(b_m)}}.$$
 (4.83)

Следуя [181], мы определяем состояние  $|\chi(\vec{x})\rangle$  как следующий контурный интеграл:

$$|\chi(\vec{x})\rangle := \oint_{x_1^{(b_1)}} dz_1^{(b_1)} \mathbf{e}^{(b_1)} \left( z_1^{(b_1)} \right) \cdots \oint_{x_{d_{b_m}}^{(b_m)}} dz_1^{(b_m)} \mathbf{e}^{(b_m)} \left( z_{d_{b_m}}^{(b_m)} \right) |\tilde{\boldsymbol{\varnothing}}\rangle, \qquad (4.84)$$

где все интегралы вычисляются по малым окружностям вокруг соответствующих полюсов  $\vec{x}$ .

 $<sup>^{10}</sup>$ Для случаев  $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$  и  $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_2)$  эти свойства были доказаны в [181] и [180] соответственно с использованием методов соответствующей конформной теории поля. Однако, такое описание для рассматриваемых типичных колчанных алгебр БПЗ неизвестно.

Мы будем рассматривать цепочку модулей, соответствующих одному и тому же каноническому обрамлению **f**. Пустой кристалл в этом модуле обозначим следующим образом:

$$|\boldsymbol{\varnothing}\rangle = |\boldsymbol{\varnothing}\rangle_{u_1} \otimes |\boldsymbol{\varnothing}\rangle_{u_2} \otimes \cdots \otimes |\boldsymbol{\varnothing}\rangle_{u_n}.$$
(4.85)

Мы строим внешие вектора Бете с помощью процесса рассеяния, где  $|\chi(\vec{x})\rangle$  переходит в  $|\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\rangle$ , тогда как вакуум  $|\boldsymbol{\varphi}\rangle$  рассеивается во внешний вектор Бете  $|B(\vec{x})\rangle$ :



с неуказанными состояниями на внешних ногах справа внизу. Это графическое обозначение следует перевести в следующее алгебраическое соотношение:

$$|B(\vec{x})\rangle = \sum_{\vec{K}} \mathcal{L}_{\emptyset, \mathbf{K}_{1}^{(b_{1})}}^{(b_{1})} \left(x_{1}^{(b_{1})}\right) \cdots \mathcal{L}_{\emptyset, \mathbf{K}_{d_{m}}^{(b_{m})}}^{(b_{m})} \left(x_{d_{m}}^{(b_{m})}\right) |\boldsymbol{\varnothing}\rangle \cdot \langle \vec{K} | \chi \rangle.$$

$$(4.87)$$

## Трансфер-матрицы

Обозначим тензорное произведение n кристаллических модулей  $\mathcal{F}_{u_i}$ , соответствующее некоторому фиксированному обрамлению  $\mathfrak{f}$ , следующим образом:

$$\mathscr{F} := \mathcal{F}_{u_1} \otimes \mathcal{F}_{u_2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{F}_{u_n} \,. \tag{4.88}$$

Для вычисления следов матриц мы вводим оператор градуировки, действующий на кристаллические представления следующим образом:

$$\mathbf{s}|\mathbf{K}\rangle = \left(\prod_{a\in Q_0} \mathfrak{q}_a^{|\mathbf{K}^{(a)}|}\right) |\mathbf{K}\rangle, \qquad (4.89)$$

для некоторых химпотенциалов  $|\mathfrak{q}_a| < 1$ . Этот оператор позволяет ввести понятие характера в кристаллическом представлении, так что

$$\operatorname{Tr}' 1 = \operatorname{Tr} \mathbf{s} = \sum_{\mathbf{K}} \mathfrak{q}_{a}^{|\mathbf{K}^{(a)}|}$$
(4.90)

представляет собой статистическую сумму, связанную с кристаллическим модулем, – производящую функцию для соответствующих инвариантов Дональдсона-Томаса. Ожидается, что эта статистическая сумма будет сходиться внутри единичного шара  $|\mathbf{q}_a| < 1$ . В частности, для случая  $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$  существует единственный цвет  $\mathbf{q}_a = \mathbf{q}$ , и мы получаем канонические результаты:

$$\operatorname{Tr}_{\Phi_{\mathsf{OK}}}' 1 = \prod_{k \ge 1} \frac{1}{(1 - \mathfrak{q}^k)}, \quad \operatorname{Tr}_{\mathsf{Makmaxof}}' 1 = \prod_{k \ge 1} \frac{1}{(1 - \mathfrak{q}^k)^k}.$$
(4.91)

Графически действие оператора в можно обозначить следующим образом:

$$\mathbf{s} = \underline{\quad} \mathbf{o} \underline{\quad} \mathbf{.} \tag{4.92}$$

*R*-матрицы лишь перетасовывают атомы между кристаллами и переплетают оператор градуировки. В результате получаем следующую связь между **s**-операторами и *R*-матрицами:

$$\swarrow_{\sim}^{\sim} = \checkmark_{\sim}^{\sim} \qquad (4.93)$$

Трансфер-матрица

$$T(z): \quad \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F} \tag{4.94}$$

может быть построена каноническим образом как повторяющееся переплетение со вспомогательным модулем  $\mathcal{F}_z$ , нить которого мы обозначим как 0-ую:

$$T_{\mathbf{s}}(z) := \operatorname{Tr}_{\mathcal{F}_{z}} (\mathbf{s}_{\mathcal{F}_{z}} \otimes 1_{\mathscr{F}}) R_{0n}(z-u_{n}) \dots R_{01}(z-u_{1}) =$$

$$= \sum_{\mathrm{K}} \overset{(\mathrm{K},z)}{\underset{u_{1}}{\overset{u_{n}}{\underset{u_{2}}{\overset{u_{2}}{\underset{u_{1}}{\overset{u_{2}}{\underset{(\mathrm{K},z)}{\overset{u_{2}}{\underset{u_{1}}{\overset{u_{2}}{\underset{(\mathrm{K},z)}{\overset{u_{n}}{\underset{(\mathrm{K},z)}{\underset{(\mathrm{K},z)}{\overset{u_{n}}{\underset{(\mathrm{K},z)}{\overset{u_{n}}{\underset{(\mathrm{K},z)}{\underset{(\mathrm{K},z)}{\underset{(\mathrm{K},z)}{\overset{u_{n}}{\underset{(\mathrm{K},z)}$$

Применяя уравнения Янга-Бакстера (4.41), соотношение унитарности (4.43) и отношение (4.93), можно показать, что трансфер-матрицы с разными значениями спектрального параметра коммутируют:

$$[T(z_1), T(z_2)] = 0. (4.96)$$

Это признак интегрируемости, поскольку коэффициенты разложения  $I_k$  трансферматрицы в точке  $z \to \infty$ :

$$T(z) = \frac{I_0}{z} + \frac{I_1}{z^2} + \frac{I_2}{z^3} + \dots$$
(4.97)

образуют бесконечное множество взаимно коммутирующих интегралов движения для рассматриваемой интегрируемой модели.

Канонический способ решения этой системы – использовать вектора Бете  $|B\rangle$  для решения задачи собственных значений трансфер-матрицы:

$$T(z)|B\rangle = \Lambda(z)|B\rangle,$$
 (4.98)

где вектор Бете  $|B\rangle$  не зависит от z. В этой процедуре канонический способ построения векторов Бете (см., например, [189; 190]) заключается в использовании алгебраического анзаца Бете, где  $|B\rangle$  генерируется из вектора с наименьшим весом в модуле  $\mathscr{F}$  с помощью недиагональных элементов *R*-матрицы. Условие согласованности такого анзаца с (4.98) приводит к набору уравнений о спектральных параметрах *R*-матриц, называемому *уравнениями анзаца Бете*.

## Вывод уравнений анзаца Бете

Сначала спроецируем уравнение (4.98) с  $|B\rangle$ , заданным внешним вектором Бете (4.87), на состояние:

$$\langle \vec{\mathbf{K}} | = \bigotimes_{i=1}^{n} {}_{u_i} \langle \mathbf{K}_i | \,. \tag{4.99}$$

Такая проекция означает, что мы присваиваем состояние  $_{u_i}\langle \mathbf{K}_i | i$ -му внешнему отрезку в правой нижней части диаграммы (4.86), и может быть представлена в виде

$$(\mathbf{K}_{n}, a, u_{n}) \xrightarrow{(\mathbf{K}_{n}, a, u_{n})} (4.100)$$

Заметим, что для каждого цвета  $b \in Q_0$  общее количество атомов цвета b в этом наборе кристаллических состояний  $\{K_i\}$  ограничено следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{K}_{i}^{(b)}| = d_{b}, \quad \forall b \in Q_{0}.$$
(4.101)

После применения этой проекции мы замечаем, что задача собственных значений (4.98) может быть преобразована в следующий набор графических соотношений для произвольного  $\vec{K}$ , удовлетворяющего соотношению (4.101):



где собственное значение  $\Lambda(z)$  одинаково для всех  $\vec{K}$ .

Для упрощения этих соотношений, мы применяем прием из работы [181] и приравниваем  $z = u_1$ . Левая часть (4.102) упрощается после применения (4.81):



где мы воспользовались тем, что *R*-матрица тривиально действует на пустых кристаллах.

Теперь нам нужно сравнить правые части (4.102) и (4.103). На эти диаграммы можно взглянуть под другим углом и рассматривать операции сплетения как действия операторов  $\mathcal{L}$  со спектральными параметрами  $u_1, \ldots, u_n$  на тензорную степень пространств Фока, заданных спектральными параметрами  $\vec{x}$ . В этих терминах мы можем переписать эти уравнения как:

$$\langle \tilde{\boldsymbol{\varnothing}} | \mathbf{s}_{\mathrm{K}_{1}} \mathcal{L}_{\mathrm{K}_{1},\varnothing}(u_{1}) \mathcal{L}_{\mathrm{K}_{n},\varnothing}(u_{n}) \dots \mathcal{L}_{\mathrm{K}_{2},\varnothing}(u_{2}) | \chi(\vec{x}) \rangle =$$

$$= \Lambda(u_{1}) \langle \tilde{\boldsymbol{\varnothing}} | \mathcal{L}_{\mathrm{K}_{n},\varnothing}(u_{n}) \dots \mathcal{L}_{\mathrm{K}_{2},\varnothing}(u_{2}) \mathcal{L}_{\mathrm{K}_{1},\varnothing}(u_{1}) | \chi(\vec{x}) \rangle .$$

$$(4.104)$$

Чтобы дальше упростить это уравнение, мы применим представление (4.58)

234

для операторов  $\mathcal{L}$ :

$$\oint d\vec{y} F_{\vec{K}}(\vec{y}) \left[ \prod_{b \in Q_0} \mathfrak{q}_b^{|K_1^{(b)}|} \right] \left\langle \prod_{b \in Q_0} \prod_{\alpha=1}^{|K_1^{(b)}|} \mathbf{f}^{(b)}\left(y_{(\alpha|1)}^{(b)}\right) \mathbf{t}_{\mathfrak{f}}(u_1) \times \prod_{i=2}^n \prod_{b \in Q_0} \prod_{\alpha=1}^{n} \mathbf{f}^{(b)}\left(y_{(\alpha|i)}^{(b)}\right) \mathbf{t}_{\mathfrak{f}}(u_i) \right\rangle = \left(4.105\right)$$

$$= \Lambda(u_1) \oint d\vec{y} F_{\vec{K}}(\vec{y}) \left\langle \prod_{i=2}^n \prod_{b \in Q_0} \prod_{\alpha=1}^{|K_i^{(b)}|} \mathbf{f}^{(b)}\left(y_{(\alpha|i)}^{(b)}\right) \mathbf{t}_{\mathfrak{f}}(u_i) \times \prod_{b \in Q_0} \prod_{\alpha=1}^{|K_1^{(b)}|} \mathbf{f}^{(b)}\left(y_{(\alpha|1)}^{(b)}\right) \mathbf{t}_{\mathfrak{f}}(u_1) \right\rangle,$$

где

$$F_{\vec{K}}(\vec{y}) = \prod_{i=1}^{n} F_{K_i}\left(y_{(*|i)}^{(*)}\right) \,,$$

а элементы матрицы  $\langle \ldots \rangle$  вычисляются между теми же состояниями, что и в (4.104).

Собственное значение  $\Lambda(u_1)$  в (4.104) легко фиксируется для выбора  $K_1 = \emptyset$ . Поскольку собственные значения не зависят от множества состояний кристалла  $\vec{K}$ , то становится наглядно понятно, что собственное значение соответствует множителю, появляющемуся при перестановке  $h(u_1)$  от конца операторного выражения к началу: таким образом, мы можем исключить  $\Lambda(u_1)$  из (4.105):

$$\oint d\vec{y} F_{\vec{K}}(\vec{y}) \left[ \prod_{b \in Q_0} \mathfrak{q}_b^{|K_1^{(b)}|} \right] \left\langle \prod_{b \in Q_0} \prod_{\alpha=1}^{|K_1^{(b)}|} \mathbf{f}^{(b)} \left( y_{(\alpha|1)}^{(b)} \right) \mathbf{t}_{\mathfrak{f}}(u_1) \times \right. \\
\left. \times \prod_{i=2}^n \prod_{b \in Q_0} \prod_{\alpha=1}^{|K_i^{(b)}|} \mathbf{f}^{(b)} \left( y_{(\alpha|i)}^{(b)} \right) \mathbf{t}_{\mathfrak{f}}(u_i) \right\rangle = \\
\left. = \oint d\vec{y} F_{\vec{K}}(\vec{y}) \left\langle \mathbf{t}_{\mathfrak{f}}(u_1) \prod_{i=2}^n \prod_{b \in Q_0} \prod_{\alpha=1}^{|K_i^{(b)}|} \mathbf{f}^{(b)} \left( y_{(\alpha|i)}^{(b)} \right) \mathbf{t}_{\mathfrak{f}}(u_i) \times \\
\left. \times \prod_{b \in Q_0} \prod_{\alpha=1}^{|K_1^{(b)}|} \mathbf{f}^{(b)} \left( y_{(\alpha|1)}^{(b)} \right) \right\rangle.$$
(4.106)

В этом отношении выражения в скобках отличаются лишь порядком понижающих операторов. Тогда, используя коммутационные соотношения **f**-операторов и **t**-операторов (4.53), мы можем перемещать понижающие операторы один за другим с крайнего правого в крайнее левое положение в правой части соотношения (4.106). Каждое такое перемещение понижающего оператора, зависящего от  $y_A^{(b)}$  (где A = (i|1) — некоторый двойной индекс), будет давать множитель:

$$\mathbf{BAE}_{A}^{(b)}(\vec{y}, \vec{u}, \vec{q}), \qquad (4.107)$$

где фаза ВАЕ определена в (4.3).

При вычислении обеих частей (4.106) нам необходимо спарить операторы **f** с операторами **e**, которые появляются в определении состояния  $|\chi(\vec{x})\rangle$ . Элементарное спаривание имеет следующий вид:

$$\langle \varnothing | \mathbf{f}^{(a)}(y) \mathbf{e}^{(b)}(z) | \varnothing \rangle = \sum_{p} \frac{\delta_{ab} \operatorname{res}_{u=p} \langle \varnothing | \boldsymbol{\psi}^{(a)}(u) | \varnothing \rangle}{(y-p)(z-p)}, \qquad (4.108)$$

где индекс *p* пробегает все возможные полюса оператора  $\psi^{(a)}$ . Последующее интегрирование по  $\vec{z}$  по малым окружностям вокруг  $\vec{x}$  отсекает в (4.106) вклад только тех полюсов *c*, которые расположены в какой-то из точек набора  $\vec{x}$ . Аналогично, интегрирование по  $\vec{y}$  приводит к тому, что носитель подынтегральной функции сжимается только до  $\vec{x}$ . Поэтому различные спаривания между операторами **f** и **e** влекут за собой разные перестановки отображений носителя подынтегрального выражения  $\vec{y} \to \vec{x}$ .

Используя отождествление  $\vec{y}$  и  $\vec{x}$ , мы видим, что (4.106) и (4.104) выполняются тривиально и достаточно, если точки  $\vec{x}$  являются корнями уравнений анзаца Бете:

$$\mathbf{BAE}_{i}^{(b)}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{\mathfrak{q}}) = 1, \quad \forall \ b \in Q_{0}, \ i = 1, \dots, N_{b},$$
(4.109)

где **ВАЕ** определен в (4.3).

#### 4.4 Фоковские модули алгебр БПЗ и гладкие 4-циклы

## 4.4.1 О гладких колчанных многообразиях и Фоковых модулях

Попытки построить представления свободного поля для представлений аффинных янгианов общего вида сталкиваются с определенными трудностями [191], а полученные алгоритмы непрозрачны и довольно быстро становятся сложными. Напротив, представление свободного поля для Фоковского модуля  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$  хорошо изучено и дается в терминах полиномов Джека.<sup>11</sup>

Это мотивирует нас к поиску деформаций семейств полиномов Джека для представлений подобных модулю Фока и в других аффинных янгианах. Однако, какое представление следует определить как каноническое представление Фока, остается неясным, особенно когда мы обсуждаем супералгебры. Мы попытаемся найти подсказки в физической картине, обсуждавшейся до сих пор. Соответствующие колчаны для  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$  и  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_{1|1})$  изображены в таблице 4.1.

Каноническое представление аффинного янгиана, возникающее в этом случае, представляет собой представление Макмахона, где векторы модуля отвечают трехмерными кристаллами. В примере  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ , соответствующем  $\mathbb{C}^3$ , эти кристаллы представляют собой просто плоские разбиения. Модуль Фока возникает в этой алгебре, когда мы пытаемся удержать D-браны внутри тяжелой D4-браны, обертывающей вещественный 4-цикл внутри Калаби-Яу, в данном случае любой из трех  $\mathbb{C}^2$ -плоскостей, инвариантных относительно торического действия внутри  $\mathbb{C}^3$ . Эта деформация [193; 194] (см. также раздел 2.2) изменяет обрамление колчана и модифицирует суперпотенциал (см. таблицу 4.1) таким образом, что нарушается симметрия между полями  $X_i$ , и суперпотенциал приобретает следующий вид:

$$W = \operatorname{Tr} X_1 \left[ f(X_2, X_3, \ldots) + IJ \right], \qquad (4.110)$$

где функция f не зависит от  $X_1$ , а I, J – поля, соответствующие колчанному обрамлению.

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Другие конструкции свободного поля (см., например, [192])  $\mathsf{Y}(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n})$  довольно сложны и требуют нетривиального расширения, делающего гамильтонианы  $\psi_k^{\pm}$  некоммутативными.



Таблица 4.1 – Сравнение представлений Макмахона (трехмерный кристалл) и (полу-)Фока (двумерный срез) для алгебр  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$  и  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_{1|1})$ .

Следует отметить, что в случаях  $\mathsf{Y}(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$  эта процедура увеличивает начальную суперсимметрию с 8 суперзарядов до 16, а соответствующие поля, играющие роль  $X_1$ , становятся множителями Лагранжа, таким образом колчанное многообразие, представленное уравнением:

$$\partial_{X_1} W = f(X_2, X_3, \ldots) + IJ = 0,$$
 (4.111)

является колчанным многообразием Накаджимы. Известно, что это алгебраическое многообразие является *гладким* [195] в отличие от колчанного многообразия, отвечающего исходному Макмахоновскому модулю. В случае  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ это известное описание Атьи-Дринфельда-Хитчина-Манина (АДХМ) для схемы Гильберта Hilb<sup>\*</sup>( $\mathbb{C}^2$ ) [114]:

$$[B_1, B_2] + IJ = 0. (4.112)$$

Суперсимметрия колчанной калибровочной теории, соответствующей супералгебре  $\mathbf{Y}(\widehat{\mathfrak{gl}}_{m|n})$ , не может быть усилена. Тем не менее, мы надеемся получить гладкое колчанное многообразие, повторяя описанную выше стратегию. Мы сосредоточимся на случае  $\mathbf{Y}(\widehat{\mathfrak{gl}}_{1|1})$ , соответствующем разрешению конической сингулярности xy = zw. Выбирая 4-цикл, мы соответствующим образом модифицируем колчан и суперпотенциал (см. таблицу 4.1). В этом случае роль множителя Лагранжа играет поле  $A_2$ , а условие F-члена описывает следующее колчанное многообразие:

$$B_2 A_1 B_1 - B_1 A_1 B_2 + IJ = 0. (4.113)$$

Эта процедура приводит к представлениям, которые являются срезами канонического представления пирамиды [140] для  $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_{1|1})$ . Мы выбрали параметры таким образом, чтобы срез проходил над одноатомным слоем восточной стороны пирамиды.

# 4.4.2 Явные выражения для матричных коэффициентов и эйлеровых классов

Заметим, что класс Эйлера касательного пространства к неподвижной точке, заданный разбиением  $\lambda$ , совпадает с крюковой мерой и может быть представлен в интегральной форме (аналогично [99; 137; 196—198]), или как вычет интегральной меры:

$$\operatorname{Eul}_{\lambda} = \left(\operatorname{res}_{\lambda} \operatorname{Mes}(\vec{x}, \vec{y})^{-1}\right)^{-1}, \qquad (4.114)$$

где

$$\operatorname{Mes}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\operatorname{Bec}(\operatorname{ctenehu} \operatorname{cbofod}\mu)}{\operatorname{Bec}(\operatorname{yc}, \operatorname{rob}\mu_{3}) \times \operatorname{Bec}(\operatorname{ka}, \operatorname{hufopoBka})} = \frac{\prod_{i=1}^{d_{1}} \prod_{j=1}^{d_{2}} (y_{j} - x_{i} - h_{1})(x_{i} - y_{j} - h_{2})(x_{i} - y_{j} + h_{2}) \times \prod_{i=1}^{d_{1}} x_{i} \times \prod_{j=1}^{d_{2}} (-y_{j} - h_{1})}{\prod_{i,i'=1}^{d_{1}} (x_{i} - x_{i'}) \times \prod_{j,j'=1}^{d_{2}} (y_{j} - y_{j'}) \times \prod_{i=1}^{d_{1}} \prod_{j=1}^{d_{2}} (x_{i} - y_{j} - h_{1})},$$

$$(4.115)$$

а  $d_{1,2}$  – размерности колчана, заданные  $n_{\lambda}^{\pm}$  соответственно. Для вычисления вычета в (4.114) мы упорядочиваем узлы кристалла  $\lambda$  по длине пути в кристалле, соединяющего рассматриваемый узел с узлом, расположенным в точке (0,0). Затем меняем переменные  $x_{i(a)} \to \omega_a + t_a$ , если узел *a* имеет тип (+), или  $y_{j(a)} \to \omega_a + t_a$  если *a* имеет (-)-тип. Далее определяем:

$$\operatorname{res}_{\lambda} := \dots \operatorname{res}_{t_4=0} \operatorname{res}_{t_3=0} \operatorname{res}_{t_2=0} \operatorname{res}_{t_1=0} .$$

$$(4.116)$$

Матричные коэффициенты и собственные значения операторов Картана выводятся с помощью методов, описанных в разделе 2.1, и задаются следующими комбинаторными выражениями (см. [156]):

$$\mathbf{E}_{\lambda,\lambda+a} = A_a \times \prod_{b \in \lambda} \eta_{\bar{a},\bar{b}}(\omega_a - \omega_b), \quad \mathbf{F}_{\lambda,\lambda-a} = B_a \times \prod_{b \in \lambda} \xi_{\bar{a},\bar{b}}(\omega_a - \omega_b),$$

$$\psi^{\pm}_{\lambda}(z) = \psi^{\pm}_{\varnothing}(z) \times \prod_{b \in \lambda} \varphi_{\pm,\bar{b}}(z - \omega_b),$$
(4.117)

где  $\bar{c}$  обозначает узел типа c в колчане  $\mathsf{Y}(\widehat{\mathfrak{gl}}_{1|1})$  в таблице 4.1, а потенциалы определяются как:

$$\begin{split} \eta_{++}(z) &= \eta_{--}(z) = z \,; \qquad \xi_{++}(z) = \xi_{--}(z) = \frac{1}{z} \,; \\ \eta_{+-}(z) &= \begin{cases} \frac{z - h_1}{2z(z + h_1)}, &\text{если } z = \pm h_2 \,; \\ \frac{1}{2z}, &\text{если } z = h_1 \,; &\xi_{+-}(z) = z + h_1 \,; \\ \frac{1}{2z - h_2^2}, &\text{в прот. случае}; \end{cases} \quad (4.118) \\ \eta_{-+}(z) &= \begin{cases} 1, &\text{если } z = h_1 \,; \\ \frac{1}{z - h_1}, &\text{в прот. случае}; &\xi_{-+}(z) = \frac{z^2 - h_2^2}{z + h_1} \,. \\ \varphi_{\bar{a},\bar{b}}(z) &= -\frac{\eta_{\bar{a},\bar{b}}(z)}{\eta_{\bar{b},\bar{a}}(-z)} = -\frac{\xi_{\bar{a},\bar{b}}(z)}{\xi_{\bar{b},\bar{a}}(-z)} = \eta_{\bar{a},\bar{b}}(z)\xi_{\bar{a},\bar{b}}(z) = \\ &= \begin{cases} 1, &\text{если } \bar{a} = \bar{b} \,; \\ \frac{z^2 - h_1^2}{z^2 - h_2^2}, &\text{если } (\bar{a}, \bar{b}) = (+-) \,; \\ \frac{z^2 - h_2^2}{z^2 - h_1^2}, &\text{если } (\bar{a}, \bar{b}) = (-+) \,. \end{cases} \end{split}$$

$$A_{a} = \begin{cases} \frac{2}{|x_{a}| + |y_{a}|}, & \text{если } \bar{a} = + \text{ и } a \text{ находится на границе ;} \\ \frac{2h_{1}}{\omega_{a}}, & \text{если } \bar{a} = + \text{ и } a \text{ находится внутри ;} \\ 1, & \text{если } \bar{a} = -; \\ 1, & \text{если } \bar{a} = -; \\ B_{a} = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{a} = +; \\ -\omega_{a} - h_{1}, & \text{если } \bar{a} = -; \\ -\omega_{a} - h_{1}, & \text{если } \bar{a} = -; \\ \psi_{\varnothing}^{+}(z) = \frac{1}{z}, & \psi_{\varnothing}^{-}(z) = -z - h_{1}. \end{cases}$$
(4.120)

#### 4.4.3 Супер-обобщение диаграмм Юнга

Заметим, что расплавленные кристаллы, представляющие собой срезы пирамидоидальных разбиений, находятся во взаимно однозначном соответствии с суперразбиениями и супердиаграммами Юнга, которые мы определяем в этом подразделе. Назовем суперразбиением  $\lambda$  полуцелого числа  $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}/2$  последовательность полуцелых чисел:

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge \ldots \ge 0, \qquad (4.121)$$

такую, что  $\sum_{i} \lambda_i = u$  и, если  $\lambda_i$  не целое, то неравенства в последовательности (4.121) строгие:  $\lambda_{i-1} > \lambda_i > \lambda_{i+1}$ .

В полном соответствии с обычными разбиениями для суперразбиений вводятся супердиаграммы Юнга. Диаграмма построена как заполнение нижнего правого плоского квадранта плитками так, что каждая следующая плитка поддерживается сверху и слева предыдущей плиткой или стенкой. Половинкам присваиваем треугольные полуплитки. Высота столбца плиток соответствует числу  $\lambda_i$ , например:

$$\left\{4, \frac{7}{2}, 2, 2, \frac{3}{2}, 1\right\} = \boxed{4.122}$$
(4.122)

Выделим пары связных узлов  $(+) \rightarrow (-)$  в кристалле  $\lambda$  (эти пары выделены пузырьками на рис. 4.3). Тогда мы обнаружим, что некоторые пары полны, а в некоторых парах отсутствует (-)-узел. Мы идентифицируем полные пары

И

с полными квадратными плитками в соответствующей супердиаграмме Юнга и неполные пары с треугольными полуплитками. При такой идентификации кристаллическая диаграмма преобразуется в супердиаграмму Юнга, см. рис. 4.3.<sup>12</sup>



Рисунок 4.3 – Кристаллическое и диаграммное обозначения для векторов Фоковского модуля  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_{1|1}).$ 

#### 4.4.4 Бозонизация

Мы определяем следующий набор суперкоммутирующих операторов  $\theta_k$ ,  $p_k, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  из борелевской положительной части  $\mathsf{Y}(\widehat{\mathfrak{gl}}_{1|1})$  в Фоковском представлении:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= e_0^+, \\
p_1 &= \left\{ e_0^-, e_0^+ \right\}, \\
\theta_{k+1} &= \frac{1}{k} \left[ e_1^+, \left\{ e_0^-, \theta_k \right\} \right], \\
p_{k+1} &= \frac{1}{k} \left\{ e_0^-, \left[ e_1^+, p_k \right] \right\}.
\end{aligned}$$
(4.123)

Эти операторы суперкоммутируют (антикоммутируют для фермионов и коммутируют в противном случае) как обычные  $p_k$  и грассмановы переменные  $\theta_k$ . Естественно отождествить их с «супервременами» – аналогами временных переменных в случае  $\Upsilon(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$  и полиномов Джека/Шура – и рассмотреть полиномиальное кольцо:

$$\mathcal{R} = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots].$$
(4.124)

Заметим, что мономы в  $\mathcal{R}$  находятся во взаимно однозначном соответствии с суперразбиениями: мы просто отождествляем элемент  $\lambda_i$  в  $\lambda$  (см. (4.121)) либо

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Аналогичная система диаграмм для представлений, связанных со срезами кристалла, была введена и развита в [194]. Однако, здесь мы не делим полную квадратную плитку на две половины разного цвета.

с  $p_k$ , либо с  $\theta_k$  в мономиальном произведении по следующему правилу:

$$\lambda_i \leftrightarrow \begin{cases} p_{\lambda_i}, & \text{если } \lambda_i - \text{целое};\\ \theta_{\lambda_i + \frac{1}{2}}, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$
(4.125)

Можно было бы ввести аддитивные бозонные и фермионные градуировки для временных суперпеременных:

$$\deg_b p_k = 2k, \quad \deg_b \theta_k = 2k - 1, \quad \deg_f p_k = 0, \quad \deg_f \theta_k = 1.$$
 (4.126)

Тогда производящие функции для мономиальных степеней и чисел супер-диаграмм Юнга согласуются:

$$\sum_{\mathfrak{m}\in\mathcal{R}} q^{\deg_b\mathfrak{m}} T^{\deg_f\mathfrak{m}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1+Tq^{2k-1}}{1-q^{2k}}.$$
(4.127)

Согласие этих производящих функций предполагает, что в кольце  $\mathcal{R}$  можно выбрать *выделенный* базис таким образом, что вектора этого базиса соответствовали супер-диаграммам Юнга при (4.123). Согласие между этими базисами может быть выражено в следующем отношении:

$$S_{\lambda}(p_1, p_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots) | \emptyset \rangle = |\lambda\rangle,$$
 (4.128)

где полиномы  $S_{\lambda}$ , построенные в [59], образуют базис ортогональных полиномов и обобщают базис полиномов Джека до нечетных переменных.

Аналогичным образом мы могли бы построить сопряженные супервремена  $\theta_{-k}, p_{-k}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  из борелевской отрицательной части  $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_{1|1})$  в представлении Фока:

$$\begin{aligned}
\theta_{-1} &= f_0^+, \\
p_{-1} &= \left\{ f_0^-, f_0^+ \right\}, \\
\theta_{-k-1} &= \frac{1}{k} \left[ f_1^+, \left\{ f_0^-, \theta_{-k} \right\} \right], \\
p_{-k-1} &= \frac{1}{k} \left\{ f_0^-, \left[ f_1^+, p_{-k} \right] \right\}.
\end{aligned}$$
(4.129)

Вместе эти борелевские положительные и отрицательные части образуют

супер-алгебру Гейзенберга:

$$\{\theta_k, \theta_m\} = \delta_{k+m,0} (-1)^{k-1} (\epsilon_1 \epsilon_2)^{2|k|-2} \cdot \mathbb{1},$$
  

$$[\theta_k, p_m] = 0,$$
  

$$[p_k, p_m] = \delta_{k+m,0} (-1)^{k-1} k (\epsilon_1 \epsilon_2)^{2|k|-1} \cdot \mathbb{1}.$$
  
(4.130)

#### 5 Физические модели категорифицированных инвариантов узлов

### 5.1 Краткий обзор комологий зацепления Хованова

В этом разделе нашей основной целью будет сравнение когомологической теории, возникающей в описании зацеплений с помощью модели Ландау-Гинзбурга, с гомологиями Хованова. Приведем здесь краткий обзор конструкции гомологий Хованова, следуя работам [199; 200].

Обозначим через E(L) комплекс, соответствующий зацеплению L как векторному пространству. Комплекс строится по простым правилам. В каждую вершину пересечения ставится разрешение по правилу:

$$E\left[\left(\mathbf{X}\right]\right] = E\left[\left(\mathbf{J}\right)\left(\right] \oplus \left[q^{-1}t^{-1}\right] E\left[\mathbf{X}\right]\right].$$
(5.1)

Комплекс биградуирован по **P**-степени и **F**-степени (гомологической степени), их сдвиги обозначим через  $q^{\mathbf{P}}t^{\mathbf{F}}$ . Тогда комплекс, соответствующий зацеплению L, со временем распадается в прямую сумму комплексов, соответствующих непересекающимся наборам циклов с соответствующими сдвигами степени. Их отображают в биградуированные линейные пространства по правилу:

$$E\left[\begin{array}{c}\mathsf{O}\ L\right] = V \otimes E[L]\,,\tag{5.2}$$

где V – двумерное пространство, натянутое на вектора  $v_+$  и  $v_-$  с **Р**-степеньями +1 и -1 соответственно.

Далее рассматривается набор дифференциалов  $d_{\chi}^2 = 0$ , имеющих гомологическую степень 1 и действующих в каждом пересечении  $\chi$  одним из двух способов:

- соединяя циклы (умножение):

$$\begin{array}{ccc}
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 & \\$$

- разъединяя циклы (ко-умножение):

$$\begin{array}{cccc}
& & & & & & \\ V \xrightarrow{\Delta} V \otimes V, & \Delta : \begin{cases} v_+ \mapsto v_+ \otimes v_+ \\ v_- \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & &$$

Полный дифференциал определяется как

$$d = \sum_{\chi} d_{\chi} \,. \tag{5.5}$$

Умножение и ко-умножение образуют из элементов комплекса алгебру Фробениуса, или топологическую теорию поля в физических терминах, соответствующие струнные диаграммы изображены в (5.3) и (5.4). Гомотопическая эквивалентность струнных диаграмм порождает соответствующие диаграммы коммутативности для умножения и ко-умножения. Дифференциал является локальным в том смысле, что все отдельные дифференциалы  $d_{\chi}$  антикоммутируют друг с другом. Это следует из гомотопической эквивалентности струнных диаграмм:

Гомологии Хованова для зацепления определены следующим образом:

**KHom**(L) := 
$$H_*(E(L), d)$$
. (5.7)

По определению, гомологии Хованова удовлетворяют точному треугольнику скейн-соотношений, категорифицирующему скейн-соотношения для полиномов Джонса:

$$\dots \to \operatorname{KHom} \left[ \begin{array}{c} \swarrow \end{array} \right] \to \operatorname{KHom} \left[ \begin{array}{c} \mathsf{X} \end{array} \right] \to \\ \to \operatorname{KHom} \left[ \begin{array}{c} \mathsf{I} \end{array} \right] \to t \operatorname{KHom} \left[ \begin{array}{c} \rightleftharpoons \end{array} \right] \to \dots \end{array}$$
(5.8)

# 5.2 Группа кос в модели ВЗВН

## 5.2.1 Группа кос

Рассмотрим общую конфигурацию из N точек на комплексной плоскости  $z_i \in \mathbb{C}, i = 1, ..., N$ . Предположим, что этот набор упорядочен какой-либо функцией упорядочения, скажем, вещественной частью, мнимой частью или абсолютным значением параметров  $z_i$ . Если мы выберем последний вариант, мы скажем, что неравенство i < j справедливо для индексов, когда

$$|z_i| < |z_j|.$$

Рассмотрим перестановку двух соседних точек с индексами i и i + 1 против часовой стрелки. Параметризуем этот ход временным интервалом  $I_t$ . Мировые линии этих точек в пространстве-времени  $\mathbb{C} \times I_t$  образуют простую косу из N нитей, в которой сплетены только две соседние нити:

$$b_{i,i+1} = \underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & i & i+1 & N \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline 1 & 2 & i & i+1 & N \end{array}}_{\begin{array}{c} \mathbb{C}} \mathbb{C} \end{array}$$
(5.9)

Обратный элемент образован перестановкой по часовой стрелке:

$$b_{i,i+1}^{-1} = \underbrace{\begin{array}{c} 1 & 2 & i & i+1 & N \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & i & i+1 & N \end{array}}_{1 & 2 & i & i+1 & N} \mathbb{C} \quad . \tag{5.10}$$

Будем считать косы эквивалентными с точностью до внешней изотопии. Также косы обладают естественным умножением, состоящем в соединении кос. В этих

условиях косы  $b_{i,i+1}$  и  $b_{i,i+1}^{-1}$  для разных индексов *i* порождают группу кос  $\mathfrak{Br}_N$  из N нитей и удовлетворяют следующему набору соотношений:

$$b_{i,i+1}b_{i,i+1}^{-1} = b_{i,i+1}^{-1}b_{i,i+1} = 1;$$
  

$$b_{i,i+1}b_{j,j+1} = b_{j,j+1}b_{i,i+1}, \quad \text{если} \ |i-j| > 1;$$
  

$$b_{i,i+1}b_{i+1,i+2}b_{i,i+1} = b_{i+1,i+2}b_{i,i+1}b_{i+1,i+2};$$
(5.11)

где под групповой единице<br/>й ${\mathbbm 1}$ подразумевается совокупность Nрасплетенных нитей.

## **5.2.2** Модель ВЗВН

Двумерная конформная модель Весса-Зумино-Виттена-Новикова (ВЗВН) характеризуется уровнем k и группой Ли G. Голоморфное примарное поле  $g_{\lambda}(z)$ зависит от комплексной координаты z на двумерной поверхности и преобразуется как представление алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  старшего веса  $\lambda$  [201]. *N*-точечные конформные блоки являются голоморфными функциями положений проколов:

$$\mathcal{B}_{\vec{\lambda}}^{\vec{\alpha}}(\vec{z}) = \left\langle g_{\lambda_1}^{\alpha_1}(z_1) g_{\lambda_2}^{\alpha_2}(z_2) \dots g_{\lambda_N}^{\alpha_N}(z_N) \right\rangle, \qquad (5.12)$$

где  $\alpha_i$  параметризуют вектора соответствующих представлений веса  $\lambda_i$ . Конформные блоки для различного выбора  $\vec{\lambda}$  и  $\vec{\alpha}$  образуют векторное пространство *N*-точечных конформных блоков  $\mathfrak{B}_N$ .  $\mathfrak{B}_N$  – пространство решений уравнений Книжника-Замолодчикова (КЗ). Другими словами, вектор

$$\Psi(\vec{z}) := \sum_{\vec{\lambda},\vec{\alpha}} c_{\vec{\alpha}}^{\vec{\lambda}} \mathcal{B}_{\vec{\lambda}}^{\vec{\alpha}}(\vec{z})$$
(5.13)

зануляется связностью Книжника-Замолодчикова [202]:

$$\nabla_a^{\mathrm{KZ}}\Psi = (\partial_{z_a} - A_a)\Psi = \left(\partial_{z_a} + \epsilon \sum_{b \neq a} \frac{\eta_{ij} T_a^i T_b^j}{z_a - z_b}\right)\Psi = 0, \quad a = 1, \dots, N, \quad (5.14)$$

где  $\eta$  – форма Киллинга, и  $\epsilon = (k + c_2(\mathfrak{g}))^{-1}$ , где  $c_2(\mathfrak{g})$  – двойственное число Кокстера. Генераторы T действуют как генераторы  $t^i$  соответствующей алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  на полях:

$$T_a^i \left\langle g_{\lambda_1}^{\alpha_1}(z_1) \dots g_{\lambda_N}^{\alpha_N}(z_N) \right\rangle = \left\langle g_{\lambda_1}^{\alpha_1}(z_1) \dots \left( \left( t^i \right)_{\alpha'_a}^{\alpha_a} g_{\lambda_a}^{\alpha'_a}(z_a) \right) \dots g_{\lambda_N}^{\alpha_N}(z_N) \right\rangle.$$
(5.15)

Связность КЗ плоская на конфигурационном пространстве N точек вне особого множества, где точки  $z_a$  сталкиваются. Соответствующее отображение параллельного переноса будет инвариантом соответствующего гомотопического класса. Рассмотрим пути, ассоциированные с простыми косами  $b_{i,i+1}^{\pm}$  в (5.9), (5.10), и обозначим соответствующие пути, спроецированные на  $\mathbb{C}$ , как  $\wp_{i,i+1}^{\pm}$ . Операторы параллельных переносов:

$$U_{i,i+1}: \mathfrak{B}_N \longrightarrow \mathfrak{B}_N,$$
  

$$U_{i,i+1} = \operatorname{Pexp} \int_{\mathfrak{G}_{i,i+1}} A_a dz^a.$$
(5.16)

удовлетворяют соотношениям группы кос (5.11) в силу того, что параллельный перенос плоский, и образуют представление группы кос  $\mathfrak{Br}_N$  на конформных блоках  $\mathfrak{B}_N$ .

Категорификация представления группы кос для общих групп Ли и их представлений является сложной задачей [29; 30], поэтому мы ограничимся простейшим случаем G = SU(2) и его представлением спина-1/2. Поместим модель ВЗВН на цилиндр, для этого два первичных поля разместим в точках 0 и  $\infty$ , соответствующие (не обязательно целые) веса –  $\lambda_0$  и  $\lambda_{\infty}$ , остальные поля находятся в представлении SU(2) со спином 1/2:

$$\langle \lambda_0 | \underbrace{\bigcirc \bullet \bullet \cdots \bullet}_{z_0 \ z_1 \ z_{m-1}} | \lambda_{\infty} \rangle$$
 (5.17)

Индекс  $\alpha$  для первичных полей g в представлении со спином 1/2 принимает два значения, соответствующие проекциям спина +1/2 и -1/2. Для краткости мы будем обозначать эти индексы как + и -, соответственно. Действие отображений параллельного переноса разбивает пространство конформных блоков на инвариантные подпространства фиксированных весов. Поэтому относительные числа положительных и отрицательных спинов являются инвариантами действия группы кос. Предположим, среди наших m спинов n спины положительные, а m - n отрицательные. Совокупность всех таких спиновых конфигураций обозначим как  $\mathcal{Y}_{n,m-n}$ . В дальнейшем мы будем использовать изоморфизм между множеством спиновых конфигураций  $\mathcal{Y}_{n,m-n}$  и всеми диаграммами Юнга, которые можно вложить в прямоугольное поле  $(m - n) \times n$ . Этот изоморфизм строится следующим образом. Рассмотрим прямоугольное  $(m - n) \times n$  поле элементарных ячеек. Мы строим путь, идущий от верхнего левого угла этого поля к правому нижнему углу. Этот путь проходит по границам ячеек. На каждом перекрестке можно повернуть либо вниз, либо вправо, ход вниз соответствует спину +1/2, а ход налево соответствует спину -1/2. Карта, описывающая маршрут и записанная как последовательность символов + и -, находится во взаимно однозначном соответствии с конфигурацией спинов в  $\mathcal{Y}_{n,m-n}$ . Соответствующая диаграмма Юнга представляет собой прямоугольный профиль под нарисованным графом пути. Например, существует два следующих представления разбиения  $\{3, 2, 1, 1\}$  в  $\mathcal{Y}_{3.5}$ :

$$(-,+,-,+,-,+,-) \quad \leftrightarrow \qquad \overbrace{} \qquad \overbrace{} \qquad (5.18)$$

Это соответствие следует сравнивать с гомологической проективной дуальностью, обсуждаемой, например, в работе [203].

### 5.2.3 Монодромия Пикара-Лефшеца

Выражения для конформных блоков могут быть построены с использованием так называемого представления свободного поля [204; 205]. Полученные выражения принимают вид интегрального представления решения уравнений K3 (5.14). В нашем конкретном случае это решение имеет вид [206; 207]:

$$\Psi_{\mathcal{L}}(z_1, \dots, z_m) = \prod_{a=0}^{m-1} z_a^{-\epsilon\lambda_0/2} \prod_{0 \le a < b \le m-1} (z_a - z_b)^{-\epsilon/2} \times \\ \times \int_{\mathcal{L}} \prod_{i=1}^n dx_i \prod_{i=1}^n x_i^{\epsilon\lambda_0} \prod_{i=1}^n \prod_{a=0}^{m-1} (x_i - z_a)^{\epsilon} \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^{-2\epsilon}.$$
(5.19)

Контур интегрирования  $\mathcal{L}$  выбран таким образом, чтобы интеграл сходился абсолютно. Базис циклов интегрирования изоморфен базису конформных блоков. Однако, прямая идентификация цикла с фиксированными значениями  $\vec{\lambda}$  и  $\vec{\alpha}$  весьма сложна. В пределе  $|\lambda_0| \gg 1$  нетрудно показать, что базис конформных блоков идентичен базису Лефшецевых наперстков.

Форма уравнений Книжника-Замолодчикова предполагает естественную ВКБ-аппроксимацию [208] задачи параллельного переноса  $U_{i,i+1}$ .

Мы можем классифицировать параллельный перенос Пикара-Лефшеца как категорию Фукаи-Сайдела модели Ландау-Гинзбурга с суперпотенциалом:

$$\check{W}_{\rm LG}(\vec{x}) = \epsilon \lambda_0 \sum_{i=1}^n \log x_i + \epsilon \sum_{i=1}^n \sum_{a=0}^{m-1} \mu_a \log (x_i - z_a) - 2\epsilon \sum_{1 \le i < j \le n} \log (x_i - x_j).$$
(5.20)

Здесь мы привели более общее выражение для суперпотенциала в случае произвольных весов полей вставок. Однако, в модели, где все вставки кроме как в 0 и  $\infty$  спина 1/2, все  $\mu_a = 1$ . Этот суперпотенциал является обобщением суперпотенциала, который мы использовали для построения категоризации аналитического продолжения гипергеометрического ряда в (1.127). Аналогичную модель Ландау-Гинзбурга можно вывести как эффективную модель коллективных координат монопольноподобных решений в пятимерной теории, компактифицированной на сигаре [28; 209].

Рассмотрим кэлерово многообразие X комплексной размерности N, его координаты пронумеруем заглавными латинскими буквами I = 1, ..., N. Это многообразие наделено кэлеровой метрикой  $g_{I\bar{J}}$ . Также рассмотрим голоморфную функцию  $W : X \to \mathbb{C}$ , в физической конструкции мы называем ее суперпотенциалом.

Критические точки W будем называть вакуумами и обозначать их маленькими латинскими буквенными индексами из вакуумного множества:  $i \in \mathbb{V}$ .

Лефшецевы наперстки являются «хорошими» циклами интегрирования для интегралов типа:

$$B_i = \int_{\mathcal{L}_i(\zeta)} \prod_I d\phi^I e^{\zeta^{-1} W(\phi^I)} \,. \tag{5.21}$$

Заметим, что в W-плоскости наперстки Лефшеца изображаются линиями постоянного наклона  $\pi i$  + Arg  $\zeta$ , следовательно, интеграл (5.21), взятый вдоль наперстка Лефшеца, сходится:



Теперь рассмотрим *n*-мерное комплексное пространство  $\mathcal{P}$ , натянутое на координаты  $z_a$  и семейство функций  $W : X \times \mathcal{P} \to \mathbb{C}$  голоморфны по обоим типам переменных. Расслоение интегралов на  $\mathcal{P}$ :

$$B_i(z_a) = \int_{\mathcal{L}_i(\zeta)} \prod_I d\phi^I e^{\zeta^{-1} W(\phi^I | z_a)}$$
(5.22)

обладает монодромиями, называемыми монодромиями Пикара-Лефшеца, соответствующие пересекающимся наперсткам Лефшеца [210].

Если критическая точка j пересекает наперсток Лефшеца  $\mathcal{L}_i(\zeta)$ , то интеграл (5.22) приобретает ВКБ-сдвиг:

$$B_i(z_a) \mapsto B_i(z_a) + \mu_{ij}B_j. \tag{5.23}$$

Здесь  $\mu_{ij}$  представляют собой с точностью до знака число пересечений наперстков  $\mathcal{L}_i(\zeta)$  и  $\mathcal{L}_j(\zeta)$ , в литературе эта величина называется индексом Маслова [211]. С физической точки зрения  $\mu_{ij}$  имеет интерпретацию индекса [64; 210; 212] *ij*-солитонов.

## 5.3 Симплектическая А-модель Ландау-Гинзбурга

## 5.3.1 Спектральный анализ Лефшецевых наперстков

## Асимптотическая связность Берри

Альтернативный способ построить монодромию и, следовательно, подсчитать вклад пересечений Лефшецевых наперстков – рассмотреть естественную связность Берри на этом расслоении интегралов. Эта конструкция связности в
некоторой степени аналогична построению  $tt^*$ -связности [212]<sup>1</sup>. В частности, в квазиклассическом пределе  $\zeta \to 0$  основной вклад в интеграл (5.22) накапливается вблизи критических точек W, поэтому любая вставка в подынтегральное выражение  $\mathcal{O}_a$ , имеющая множитель dW по любому направлению в X-пространстве квазиклассически равна 0. Поэтому вставки  $\mathcal{O}_a$  образуют кольцо, изоморфное  $\mathbb{C}[\phi^I]/dW$ , обычно называемое киральным кольцом (кольцом Якоби) операторов в двумерной  $\mathcal{N} = (2, 2)$  суперсимметричной модели Ландау-Гинзбурга [64].

Кроме того, заметим, что производные  $\partial_{z_a}$  по базе  $\mathcal{P}$  действуют квазиклассически умножением на  $\partial_{z_a} W(\phi^I | z_a)$  в этом кольце. Эта операция индуцирует естественную связность. Предположим, что мы выбираем набор операторов  $\hat{\mathcal{O}}_a := \partial_{z_a} W(\phi^I | z_a)$  в киральном кольце, тогда вектор  $\Psi := (\langle \mathcal{O}_1 \rangle, \dots, \langle \mathcal{O}_n \rangle)$ , где  $\langle \star \rangle$  обозначает усреднение с мерой (5.22), является сечением расслоения<sup>2</sup>:

$$\nabla_a \Psi := \left(\partial_{z_a} - \zeta^{-1} C_a + A_a\right) \Psi = 0, \qquad (5.24)$$

где  $C_a$  – структурные константы кольца:

$$\hat{\mathcal{O}}_a \mathcal{O}_b = (C_a)^c_b \mathcal{O}_c + \sum_I P_I \partial_{\phi^I} W \,, \tag{5.25}$$

а  $A_a$  – компоненты связности порядка  $O(\zeta^0)$ . Далее рассмотрим комплексную кривую  $z_a(x) : \mathbb{C} \to \mathcal{P}$  и стянем связность  $\nabla_a \ltimes \nabla := \nabla_a \frac{dz_a}{dx}$  на  $\mathbb{C}$ . Тогда  $\Psi$ является решением линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dx}\Psi - \zeta^{-1}C_a\frac{dz_a}{dx}\Psi + A_a\frac{dz_a}{dx}\Psi = 0.$$
(5.26)

Анализ этих уравнений весьма похож на изучение асимптотики решения дифференциальных уравнений с помощью методов Стокса, также известного в физике как метод Венцеля-Крамерса-Бриллюэна (ВКБ) (см., например, [215]). Мы

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Более сложную связь между *G*-операми и связностью Гаусса-Манина, построенную на основе решения системы Хитчина для группы *G*, можно найти в работе [213].

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Заметим, что настоящая  $tt^*$ -связность имеет антиголоморфную часть, индуцируя таким образом нетривиальную метрику Замолодчикова в пространстве параметров  $\mathcal{P}$  [214].

ищем решение в следующем виде:

$$\Psi(x) \sim e^{\zeta^{-1} \int_{x}^{x} p(t) dt + O(\zeta^{0})} \,. \tag{5.27}$$

Приближение нулевого порядка сводится к алгебраическому уравнению для эйконала pdx, которое определяет разветвленное накрытие  $\Sigma$  над  $\mathbb{C}$ :

$$Det \left(\mathbb{1} \cdot p(x)dx + C_a dz_a\right) = 0.$$
(5.28)

Это уравнение, определяющее комплексную кривую  $\Sigma$  с мероморфным дифференциалом  $\lambda := p \ dx$ .

Выберем некоторую тривиализацию разветвленного накрытия  $\pi : \Sigma \to \mathbb{C}$ : набор точек ветвления – нулей дискриминанта (5.28) по p – и набор разрезов (см. рис. 5.1). На множестве  $\mathcal{C}^c = \mathbb{C} \setminus \{\text{разрезы}\}$  можно сделать выбор упорядочивания корней  $p^{(i)}$ . Таким образом, у нас есть корректно определенное отображение  $s : \Sigma \setminus \pi^{-1} \{\text{разрезы}\} \to \mathbb{Z}$ , которое сопоставляет каждой точке на  $\Sigma$ , не лежащей на разрезе, порядковый номер листа накрытия, на котором она лежит. Мы продолжаем определение порядка корней до точек ветвления, сопоставляем каждой точке ветвления и разрезу элемент группы Галуа спектрального накрытия (5.28) как многочлена от p. Различные корни  $p^{(i)}$  естественным образом отождествляются с выбором Лефшецевых наперстков или вакуумов в (5.22). В теориях с некоторой дополнительной симметрией, где вакуум может быть помечен весами некоторой группы, группу Галуа накрытия можно естественным образом отождествить с группой Вейля [43; 216; 217].



Рисунок 5.1 – Точки ветвления и разрезы.

Теперь у нас есть линейное пространство асимптотических решений (5.26), однако оказывается, что разложение по асимптотическим решениям с постоянными коэффициентами не может быть хорошим глобальным решением уравнения (5.26). Самый простой способ убедиться в этом – заметить, что в точках ветвления асимптотические решения приобретают монодромии Галуа, как мы уже упоминали, однако, связность  $\nabla$  плоская также и в проекциях точек ветвления на  $\mathbb{C}$ . Очевидно, что в окрестностях точки ветвления типа (ij) асимптотика (5.27) недействительна, поскольку разница  $p^{(i)} - p^{(j)}$  близка к нулю. Приведем рецепт построения исправленной версии асимптотического разложения, детали и вывод которого можно найти в различных литературных источниках [43; 84; 215].

### Точное разложение ВКБ

Мы разрезаем базовую кривую С вещественными линиями ВКБ (также называемыми линиями Стокса или *S*-стенками). Набор линий состоит из двух подмножеств: первичных линий и дочерних. Первичная линия типа *ij* начинается с проекции точки ветвления типа *(ij)* и удовлетворяет условиям:

$$\iota_{\partial_t}(\lambda^{(i)} - \lambda^{(j)}) \in \zeta \mathbb{R}_{>0}, \qquad (5.29)$$

где  $\partial_t$  – касательный вектор к прямой (см. рис. 5.2(a,б)), а  $\iota$  – операция внешнего произведения векторных полей и форм. Заметим, что *ij*-линия и *ji*-линия не эквивалентны, и существует два возможных типовых шаблона для линий ВКБ вблизи проекции простой точки ветвления.

В стыках первичных линий рождаются новые линии-потомки, в частности, если ij- и jk-линии пересекаются друг с другом, в стыке рождается новая ik-линия, удовлетворяющая тому же уравнению (5.29) (см. рис. 5.2(в)). Это результат появления связанного солитонного состояния (см. раздел 1.1.6).



Рисунок 5.2 – Примеры линий ВКБ.

Тогда любое новое пересечение первичных линий с потомками и потомков между собой порождает новые линии-потомки. Совокупность всех линий ВКБ для заданного  $\zeta$  называется сетью ВКБ  $\mathcal{W}_{\zeta}^{3}$ .

Рассмотрим множество  $\mathfrak{L}$ , образованное формальными суммами ориентированных вещественных путей на  $\Sigma$  с коэффициентами, являющимися целыми неотрицательными числами. Мы можем наделить это множество ассоциативным унитарным умножением, наложив закон умножения для двух произвольных путей  $\wp_1$  и  $\wp_2$  следующим образом:

$$\wp_1 \circ \wp_2 = \begin{cases} 0, \text{ если начало } \wp_1 \text{ не совпадает с концом } \wp_2; \\ \text{сшивка } \wp_1 \text{ и } \wp_2 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$
(5.30)

Мы строим обходы  $\mathbb{D}(\wp, \zeta) \in \mathfrak{L}$  в зависимости от ориентированного пути  $\wp$  на  $\mathbb{C}$  и фазы  $\zeta$  по двум правилам:

1. Если  $\wp$  не пересекает  $\mathcal{W}_{\zeta}$ , то

$$\mathbb{D}(\wp,\zeta) = \pi^{-1}(\wp) = \sum_{i} \pi^{-1}_{(i)}(\wp), \qquad (5.31)$$

где  $\pi^{-1}$  подразумевает подъем пути  $\wp$  на все листы накрытия  $\Sigma$ .

2. Если путь  $\wp$  пересекает  $\mathcal{W}_{\zeta}$  по прямой  $\ell$  в точке p, то точка p разбивает путь  $\wp$  на две части  $\wp_{-}$  и  $\wp_{+}$ . Тогда новый обход имеет следующий вид:

$$\mathbb{D}(\wp,\zeta) = \mathbb{D}(\wp_{-},\zeta)(1+\eta \,\mathfrak{d}_{p,\ell})\mathbb{D}(\wp_{+},\zeta)\,. \tag{5.32}$$

Здесь  $\eta$  – формальный параметр. Элементарный обход  $\mathfrak{d}_{p,\ell}$  для *ij*-линии ВКБ  $\ell$  вычисляется следующим образом. Рассмотрим отрезок  $\bar{\ell}$ , идущий от начала прямой  $\ell$  до точки p, тогда

$$\mathfrak{d}_{p,\ell} = \pi_{(i)}^{-1}(\bar{\ell}^{-1}) \,\mathfrak{d}_{_{\mathbf{источника}}} \,\pi_{(j)}^{-1}(\bar{\ell})\,, \tag{5.33}$$

где  $\bar{\ell}^{-1}$  подразумевает, что мы рассматриваем противоположную ориентацию отрезка  $\bar{\ell}$ , а  $\mathfrak{d}_{_{\mathrm{источника}}}$  задается простым выражением для первичной линии ВКБ:

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Правила построения сетей ВКБ и расчета их вкладов такие же, как и для спектральных сетей [43]. Однако спектральные сети появляются в пределе больших конформных размерностей в формулировке конформных теорий поля [218], или в пределе  $\epsilon_{1,2} \to 0$  на  $\Omega_{\epsilon_1,\epsilon_2}$ -фоне в формулировке теории класса S. C точки зрения связности типа (5.56) предел ВКБ соответствует пределу  $\zeta \to 0$ , тогда как предел спектральной сети соответствует пределу большого спина представления [174].

$$\mathfrak{d}_{_{\mathrm{стыка}}} = \mathfrak{d}_{p_{_{\mathrm{стыка}}},\ell_{ik}} + \mathfrak{d}_{p_{_{\mathrm{стыка}}},\ell_{ij}}\mathfrak{d}_{p_{_{\mathrm{стыка}}},\ell_{jk}} \,. \tag{5.34}$$



Рисунок 5.3 – Стыковка линий ВКБ.

Система обходов имеет естественную градуировку – степень обхода – взвешенную по формальному параметру  $\eta$ , в общем случае мы подразумеваем  $\eta = 1$ , однако, иногда мы будем использовать эту градуировку, обозначая ее как  $\mathbb{D}^{(k)}$ :

$$\mathbb{D}(\wp,\zeta) = \sum_{k} \eta^{k} \mathbb{D}^{(k)}(\wp,\zeta) \,. \tag{5.35}$$

Построив эту систему, можно определить асимптотическое решение (5.26), представляющее собой экспоненту, ориентированную по путям, как матрицу в координатах, связанных с вакуумом V, имеющую следующее разложение:

$$\left(\operatorname{Pexp}\,\zeta^{-1}\int\limits_{\wp}\nabla\right)_{ij} = \sum_{\gamma\in\mathbb{D}(\wp,\zeta)} e^{\zeta^{-1}\int\limits_{\gamma}\lambda + \pi i\int\limits_{\gamma}\omega + O(\zeta)} E_{\partial\gamma}.$$
(5.36)

Здесь матрица  $(E_{a-b})_{ij} := \delta_{i,s(a)} \delta_{j,s(b)}$ , где *s* – отображение из  $\Sigma$  в номера листов накрытия (5.28). Форма  $\omega$  определяется следующим образом (см. [90, Приложение A]). Для каждого корня  $p^{(i)}$  имеется одномерное нулевое пространство  $\psi^{(i)}$ :

$$\left(\mathbb{1} \cdot p^{(i)}(x)dx + C_a dz_a\right)\psi^{(i)} = 0.$$
(5.37)

Тогда на i-ом листе накрытия форма  $\omega^{(i)}$  определяется как

$$\omega^{(i)} = -\frac{1}{\pi i} \frac{\text{Det}\left[\psi^{(1)}, \dots, (d+A)\psi^{(i)}, \dots, \psi^{(n)}\right]}{\text{Det}\left[\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n)}\right]}.$$
(5.38)

Следует подчеркнуть, что упорядоченная по пути экспонента и аналогичное разложение обхода удовлетворяют обычному свойству эволюционной композиции:

$$\sum_{j} \left( \operatorname{Pexp} \zeta^{-1} \int_{\wp} \nabla \right)_{ij} \left( \operatorname{Pexp} \zeta^{-1} \int_{\wp'} \nabla \right)_{jk} = \left( \operatorname{Pexp} \zeta^{-1} \int_{\wp^{\circ}\wp'} \nabla \right)_{ik}. \quad (5.39)$$

Лефшецевы наперстки и линии ВКБ

Мы рассмотрели комплексную кривую  $z_a : \mathbb{C} \to \mathcal{P}$ , теперь мы рассмотрим одномерный путь  $\wp \subset \mathbb{C}$ . Отображение  $z_a$  поднимает его до некоторого пути  $\hat{\wp}$  в  $\mathcal{P}$ . Мы можем вычислить параллельный перенос в расслоении интегралов  $B_i$  по пути  $\hat{\wp}$  с помощью переходов (5.23) и стянуть его обратно на  $\wp$ . Также мы можем вычислить тот же параллельный перенос с использованием стянутой связности, как в (5.36), и результаты должны совпадать. Используя эту эквивалентность, можно связать обходы с пересечениями наперстков Лефшеца.

У такого подхода есть два преимущества. Прежде всего, явный вид наперстков, решение (1.42) с заданными граничными условиями, трудно вычислить даже численно, поскольку это не каноническая задача Коши. В то время, как в сетевом формализме ВКБ эта задача отображается в одномерную задачу, которую легко явно решить численно. При этом у нас на руках имеется простое выражение в виде интеграла вида  $\omega$  для индекса Маслова, отождествляемого с  $\eta$ -инвариантом оператора Дирака на солитонном фоне.

Рассмотрим некоторые детали. Предположим, наш путь  $\wp$  пересекает сеть ВКБ  $\mathcal{W}_{\zeta}$  в наборе точек  $p_{\alpha}$ :

$$\wp \cap \mathcal{W}_{\zeta} = \{p_{\alpha}\}_{\alpha=1}^{r} \,. \tag{5.40}$$

Предположим, что точке  $p_{\alpha}$  сопоставлен элементарный обход  $\mathfrak{d}_{p_{\alpha}}$  в формуле (5.32) от пересечения с линией ij. Можно утверждать, что при подъеме  $\hat{p}_{\alpha}$  точки  $p_{\alpha}$  до  $\hat{\wp}$  *i*-ый Лефшецев наперсток пересекает *j*-ое критическое значение. Соответствующая разница значений W в критических точках и солитонный

индекс имеют следующие значения

$$W_i - W_j = \int_{\mathfrak{d}_{p_\alpha}} \lambda, \quad \mu_{ij} \sim e^{\pi i \int_{\mathfrak{d}_{p_\alpha}} \omega}.$$
 (5.41)

Мы не ставили равенство для индекса, поскольку в общем случае интеграл дает комплексное число. По физическим причинам разумно сравнивать только относительные индексы для одних и тех же значений граничного вакуума *i* и *j* [28]. В этом случае соотношение индексов является целым числом.

# 5.3.2 Вырождение ВКБ сетей: когомологии в модели Ландау-Гинзбурга

Для построения комплекса MCB необходимо взять пространство решений (1.42) и превратить его в комплекс. Мы можем использовать построенную ранее эквивалентность между обходами и Лефшецевыми наперстками, чтобы построить пертурбативное векторное пространство комплекса MCB:

$$\mathbb{D}(\wp,\zeta) = \sum_{i} n_{i} \cdot \mathfrak{d}_{i} \quad \mapsto \quad \mathbf{M}(\hat{\wp},\zeta) = \bigoplus_{i} \mathbb{Z}^{n_{i}} |\mathfrak{d}_{i}\rangle.$$
(5.42)

Значительно сложнее построить действие дифференциала  $\mathbf{Q}$  на этом комплексе. Для этого вычисления воспользуемся идеей об адиабатическом переносе системы ближе к стенке маргинальной стабильности. Мы рассматриваем семейство интерфейсов, заданных функциями  $z_a$ , и ищем отображение  $z_a^{(0)}$ , когда две разные критические точки, заданные, скажем,  $\mathfrak{d}_i$  и  $\mathfrak{d}_j$ , совпадают. Это дало бы нам особый вырожденный вид сети ВКБ, который мы называем **ноль-сеть**  $\mathbb{W}_{\zeta}(\mathfrak{d}_j, \mathfrak{d}_i)$ . В результате для элемента **Q**-матрицы имеем:

$$\langle \mathbf{\mathfrak{d}}_j | \mathbf{Q} | \mathbf{\mathfrak{d}}_i \rangle = \delta_{F_j, F_i + 1} \# \left[ \mathbb{W}_{\zeta}(\mathbf{\mathfrak{d}}_j, \mathbf{\mathfrak{d}}_i) \right] \,. \tag{5.43}$$

#### Инстантоны и ноль-сети

В разделе 1.2.4 мы описали инстантоны в суперсимметричной модели Ландау-Гинзбурга как сети рассеивающихся солитонных решений.

Для *ij*-солитона величина Re  $[\zeta^{-1} \mathcal{Z}_{ij}(x_c)]$  всегда положительна. В зависимости от знака мнимой части тогда получаем следующие возможности:

- Іт  $[\zeta^{-1} \mathcal{Z}'_{ij}(x_c)] > 0$ : решение (1.73) сходится к критической точке  $x_c$  в далеком будущем  $\tau \to +\infty$ , точка привязки  $x_c$  называется стабильной точкой привязки *в будущем*.
- Іт  $[\zeta^{-1} \mathcal{Z}'_{ij}(x_c)] < 0$ : решение (1.73) сходится к критической точке  $x_c$  в далеком прошлом  $\tau \to -\infty$ , точка привязки  $x_c$  называется стабильной точкой привязки *в прошлом*.

Из формы сети линий ВКБ легко определить, является ли точка привязки в будущем или в прошлом. Заметим, что

$$\mathcal{Z}'_{ij}(x_c) = p^{(i)} - p^{(j)} \tag{5.44}$$

в точке пересечения  $p_0$  пути  $\wp$  и ij-линии  $\ell$ . Более того, уравнение (5.29) подразумевает, что

Im 
$$\left[\zeta^{-1} \mathcal{Z}'_{ij}(x_c)\right] = \text{Im } dz^{-1}|_{p_0}.$$
 (5.45)

Таким образом, угол между касательными векторами  $\partial_t \kappa \ell$  и  $\wp$  определяет тип точки привязки (см. пример на рис. 5.4(а)):

$$\begin{aligned} \partial_t|_{\ell} \wedge \partial_t|_{\wp} &> 0 \quad \to \quad e \text{ будущем} \\ \partial_t|_{\ell} \wedge \partial_t|_{\wp} &< 0 \quad \to \quad e \text{ прошлом} \end{aligned}$$
(5.46)



Рисунок 5.4 – Примеры спектральных сетей.

Теперь построим простейший пример нуль-сети. Предположим, существует инстантон, соединяющий точки привязки будущего и прошлого (см. рис. 5.4(б)). Заметим, что из конечности инстантонного действия следует, что конфигурация поля стремится к некоторому вакууму на пространственных бесконечностях  $x \to \pm \infty$ , общему для всех значений  $\tau$ . Другими словами, на пространственных бесконечностях нет граничных вершин инстантонного излучения. Соответствующее спектральное накрытие и соответствующие обходы построить несложно:

$$i \xrightarrow{ij} \mathfrak{d}_{2} \xrightarrow{i} j \mapsto \xrightarrow{\gamma} \xrightarrow{i} \wp \qquad (5.47)$$

Оба обхода  $\mathfrak{d}_1$  и  $\mathfrak{d}_2$  начинаются на листе *i* и заканчиваются на листе *j*. Мы полагаем, что должно существовать отображение *z* такое, что солитоны, соответствующие обходам  $\mathfrak{d}_1$  и  $\mathfrak{d}_2$ , совпадают, т.е. точки пересечения линий ВКБ с путем  $\wp$  должны совпадать, как в правой части диаграммы (5.47). Путь  $\mathfrak{d}_1 \circ \mathfrak{d}_2^{-1}$ представляет собой замкнутый цикл на  $\Sigma$ , который мы обозначили  $\gamma$ . Поскольку согласно (5.41):

$$\int_{\mathfrak{d}_1} \lambda = \int_{\mathfrak{d}_2} \lambda = Z_{ij} = W_i - W_j \,, \tag{5.48}$$

легко видеть, что

$$\oint_{\gamma} \lambda = 0. \tag{5.49}$$

Для этого значения контурного интеграла мы называем это асимптотическое состояние спектральной сети **ноль-сетью**  $\mathbb{W}_{\zeta}(\mathfrak{d}_j,\mathfrak{d}_i).$ 

Покажем, что условие (5.49) является общим для всех инстантонных конфигураций. Распространенной формой инстантона (искривленной сети на языке [28]) является горизонтальная «гусеница» (см. рисунок 5.5). Тело состоит из коротких изогнутых доменных стенок. Ноги представляют собой доменные границы, приближающиеся к асимптотическим точкам стабильных солитонов. Совокупность вакуумов вверху (бесконечное будущее) и внизу (бесконечное прошлое) обозначаются соответственно как  $i_1, \ldots, i_t$  и  $j_1, \ldots, j_b$ . Вакуумы l и r в крайнем левом и крайнем правом углу являются общими для прошлых и будущих состояний. Следовательно, обходы  $\mathbf{d}_t$  и  $\mathbf{d}_b$ , соответствующие верхней и нижней конфигурациям критического поля, начинаются на листе, соответствующем вакууму *l*, и переходят на лист, соответствующий вакууму *r*, причем

$$\int_{\mathfrak{d}_t} \lambda = \int_{\mathfrak{d}_b} \lambda = W_l - W_r \,.$$

Мы можем сформировать цикл  $\gamma = \mathfrak{d}_t \circ \mathfrak{d}_b^{-1}$ , замкнутый на накрытии  $\Sigma$  и удовлетворяющий (5.49).



Рисунок 5.5 – Типичный вид сети для инстантона в модели Ландау-Гинзбурга.

В общем случае мы определяем **ноль-сеть**  $\mathbb{W}_{\zeta}(\mathfrak{d}_j,\mathfrak{d}_i)$  для пары обходов  $\mathfrak{d}_i$ и  $\mathfrak{d}_j$  как асимптотическое состояние сети ВКБ, такое, что часть сети, дающая вклад в эти обходы, поднимается до конечного замкнутого цикла  $\gamma$  на  $\Sigma$ , причем  $\oint \lambda = 0.$ 

Это определение может показаться несколько *парадоксальным*. Оно отличается от обычного флипа в триангуляции, используемого для обсуждения кластерных преобразований в литературе по спектральным сетям [43; 84; 216; 217], см. также раздел 5.4.6. Флипы появляются, когда *ij*-линия ВКБ  $\ell$ , начинающаяся из точки ветвления  $p_1$ , попадает в другую точку ветвления  $p_2$ , при той же настройке параметра  $\zeta$  существует решение *ji*-линии  $\ell'$ , идущее из  $p_2$ до  $p_1$ . В отличие от флипов ноль-сети возникают из стыков двух линий одного типа *ij*. Фактически крестообразный переход соответствует «ложной» точке ветвления. Ложной точкой ветвления является точка  $p_0$ , в которой дискриминант спектрального накрытия  $\Sigma$  имеет двойной ноль, поэтому листы накрытия только касаются друг друга, не образуя разреза. Контур  $\gamma$  защемлен в ложной точке ветвления и может быть разделен на два замкнутых цикла  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , проецируемых на пути, соединяющие  $p_1$  с  $p_0$  и  $p_0$  с  $p_2$  соответственно:

$$\oint_{\gamma} \lambda = \int_{p_1}^{p_0} \lambda^{(j)} + \int_{p_0}^{p_2} \lambda^{(j)} + \int_{p_2}^{p_0} \lambda^{(i)} + \int_{p_0}^{p_1} \lambda^{(i)} \stackrel{(5.29)}{=} \zeta \left[ \left| \oint_{\gamma_1} \lambda \right| - \left| \oint_{\gamma_2} \lambda \right| \right] .$$
(5.50)

Ноль-сеть  $\mathbb{W}_{\zeta}(\mathfrak{d}_j, \mathfrak{d}_i)$  соответствует инстантону, соединяющему два критических значения функционала высоты, соответствующих обходам  $\mathfrak{d}_i$  и  $\mathfrak{d}_j$ , поэтому мы предлагаем считать инстантонные вклады с помощью ноль-сетей, см. (5.43).

Рассмотрим другой характерный пример ноль-сети. В данном примере представлена всего одна точка ветвления. Предположим, у нас есть путь  $\wp$ , пересекающий две линии ВКБ, исходящие из одной точки ветвления, как это показано на следующей диаграмме (слева):



Здесь мы сравниваем обход, построенный из двух последовательных обходов  $\mathfrak{d}_1$ и  $\mathfrak{d}_2$ , и пустой обход, соответствующий подъему  $\wp$  на лист *i*. Когда мы сжимаем дугу пути  $\wp$  так, чтобы путь  $\wp$  пересекал точку ветвления, цикл  $\gamma = \mathfrak{d}_1 \circ \mathfrak{d}_2^{-1}$  может быть спроецирован в цикл, охватывающий точку ветвления дважды. Очевидно, это дает ноль-сеть  $\mathbb{W}_{\zeta}(\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2, \emptyset)$ , соответствующий инстантон, представляющий слияние пары инстантон-анти-инстантон, изображенной в правой части диаграммы (5.51) (что эквивалентно диаграмме, изображенной на рис. 1.11(a)).

# 5.3.3 Спектральные кривые и классификация вакуумов

Рассмотрим множество вакуумов  $\mathbb{V}(\{z_a\}; \{k_a\}; m)$  эффективного суперпотенциала (5.20) для *m* монопольных решений пятимерной скомпактифицированной М-браны [28]. Если  $z_a$  разнесены далеко ( $|\lambda_0 \Delta z| \gg 1$ ), то пространство вакуумов можно разложить в сумму пространств отдельных вакуумов для каждого прокола  $z_a$ :

$$\mathbb{V}(\{z_a\};\{k_a\};m) = \bigoplus_{\substack{\sum\\a=1}^n \mu_a = m} \mathbb{V}(z_1;k_1;\mu_1) \times \ldots \times \mathbb{V}(z_n;k_n;\mu_n).$$
(5.52)

Следовательно, достаточно рассмотреть пространство вакуумов для одного прокола. Для одного прокола имеем

$$\mathbb{V}(z;k;m) \cong v_{k-2m}, \quad m = 0, \dots, k, \qquad (5.53)$$

где  $v_{\alpha}$  – одномерное инвариантное подпространство веса  $\alpha$  (см. [52, приложение A]). В общем виде получаем

$$\bigoplus_{m=0}^{k} \mathbb{V}(z;k;m) \cong \bigsqcup_{k=0}^{k} k \text{ коробок}.$$
(5.54)

Мы рассмотрим простейший случай фундаментальных представлений. В случае  $\mathfrak{su}_2$  представления изоморфны комплексно-сопряженным, тогда достаточно рассмотреть только случай  $\mu_a = 1$ . Возможных решений для одного прокола всего два –  $\mathbb{V}(z;1;0)$  и  $\mathbb{V}(z;1;1)$  – обозначим их (–) и (+) соответственно проекциям спина.

Следующий базовый пример – два прокола, соответственно имеем:

$$\mathbb{V}(\{z_a, z_b\}; \{1, 1\}, 0) = (-, -); \\
\mathbb{V}(\{z_a, z_b\}; \{1, 1\}, 1) = (+, -) \oplus (-, +); \\
\mathbb{V}(\{z_a, z_b\}; \{1, 1\}, 2) = (+, +).$$
(5.55)

В киральном кольце существует базис такой, что связность (5.26) имеет следующий вид:

$$\nabla = d - \zeta^{-1} \sum_{a} dz_{a} \left[ \sum_{b \neq a} \frac{h^{(a)} \otimes h^{(b)} + e^{(a)} \otimes f^{(b)} + f^{(a)} \otimes e^{(b)}}{z_{a} - z_{b}} + c \ m^{(a)} \right] , \quad (5.56)$$

где h, e, f – стандартные генераторы  $\mathfrak{su}_2, c \sim \lambda_0 \log |z|, \zeta \sim \epsilon^{-1}$ :

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$
 (5.57)

Связность (5.56) отвечает связности K3 (5.14) и действует диагонально во всех трех пространствах (5.55).

Имеет значение только взаимное расположение точек, поэтому выберем  $z_a = x, z_b = -x$ . Тогда пространство параметров  $\mathcal{P} \cong \mathbb{C}$ , и мы выбираем тривиальное отображение  $x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ . В этом случае спектральная кривая имеет следующий вид:

$$p^{2} + \frac{2p}{x} - c^{2} = 0, \quad \lambda = p \ dx.$$
 (5.58)

Два корня совпадают с двумя вакуумами (+, -) и (-, +), и мы с легкостью можем построить сеть ВКБ (см. рис. 5.6).



Рисунок 5.6 – Спектральная кривая для двух проколов в случае  $\mathfrak{su}_2$  и пути интерфейса.

#### 5.3.4 Реализации дефектов переплетений и замыканий

Компонуемость интерфейсов (1.79) позволяет не конструировать каждый раз новый интерфейс для нового зацепления. Вместо этого можно разложить любой интерфейс на произведение элементарных интерфейсов аналогично формулировке инвариантов зацепления для квантовой группы  $U_q(\mathfrak{su}_2)$  (см., например, [12; 219]). Такими базовыми интерфейсами являются косы-интерфейсы, аналогичные генераторам группы кос – мы называем их  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{R}^{-1}$ -интерфейсами по аналогии с R-матрицами – и «шапки/чашки», или интерфейсы сшивания/разделения, соединяющие/создающие пару нитей для замыкания. Последние являются аналогами q-коэффициентов Клебша-Гордана  $C_{\Box}^{\varnothing}$  и  $C_{\varnothing}^{\Box,\Box}$ .

Без ограничения общности мы можем выбрать вещественные параметры  $c > 0, \zeta < 0$ . Тогда доминирующим членом в (5.20) является первый, пропорциональный c. Суперпотенциал вдоль наперстка Лефшеца растет как  $W(t) = -\zeta t$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , поэтому асимптотически наперсток Лефшеца можно аппроксимировать линией  $w(t) = -\zeta c^{-1}t$ . Они представлены линиями, параллельными вещественной оси, текущими к положительной бесконечности. В случае одного монополя наперсток Лефшеца выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$
 (5.59)

Набору тривиальных кос на диаграмме естественно сопоставить набор постоянных траекторий  $z_a$ , лежащих на мнимой оси:

Тогда два сплетающих элемента даются следующими диаграммами:

$$\mathcal{R} := \mathbf{X}, \quad \mathcal{R}^{-1} := \mathbf{X}, \quad (5.61)$$

и они соответствуют путям на  $\mathcal{P} = \mathbb{C}$ , изображенным на рис. 5.6, соответственно.

Мы приходим к следующим диаграммным выражениям для элементарных переплетающих интерфейсов:

В работе [90] утверждалось, что замыкающие интерфейсы слияния/разделения можно рассматривать как некий полуповорот, также изображенный на рис. 5.6. В наших терминах они имеют следующий вид:

$$\mathbf{M}\left(\bigcap\right) = \prod_{-++}^{-++} \oplus qt^{-1} \xrightarrow[+]{}_{12}^{-++}, \qquad (5.62c)$$

$$\mathbf{M}\left(\bigcup\right) = q^{-1}t \stackrel{\stackrel{-}{\underset{+}{\longrightarrow}}^{+}}{\underset{+}{\xrightarrow{-}}} \oplus \stackrel{+}{\underset{+}{\overset{-}{\longrightarrow}}} . \tag{5.62d}$$

Здесь мы использовали градуировку  $q^{\mathbf{P}}t^{\mathbf{F}}$  для всех решений:

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{s}} = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \oint_{\mathfrak{s}} \lambda, \quad \mathbf{F}_{\mathfrak{s}} = -\oint_{\mathfrak{s}} \omega.$$
(5.63)

Горизонтальными линиями мы изобразили солитонные решения, привязанные к интерфейсу, они помечены индексами соответствующих линий ВКБ. Мы разделили эти индексы на индексы без штриха и индексы со штрихом. Причина этого в том, что солитонные пути в таргет-пространстве X имеют разную топологию для простых и непростых точек привязки. Мы не будем здесь комментировать эту деталь, однако этот факт легко увидеть из сравнения **P**-степеней решений. Также можно построить путь в  $\mathcal{P}$ , соответствующий косе  $\mathcal{R}^{-1}$  как путь, соответствующий косе  $\mathcal{R}$ , текущий в противоположном направлении. Если мы перевернем путь, соответствующий  $\mathcal{R}$ , мы увидим, что он сначала пересекает линию ВКБ со штрихом, а затем линию без штриха. Соответствующее пространство непертурбативных состояний БПЗ определяется как когомологии комплекса МСВ:

$$\mathscr{H}_{BPS}(L) := H^*(\mathbf{M}(L), \mathbf{Q}), \qquad (5.64)$$

где действие суперзаряда **Q** определяется выражением (5.43).

Детали об инвариантности данной конструкции по отношению к движениям Редемейстера можно найти в работе [90, раздел 6]. Здесь мы рассмотрим только второе движение Редемейстера и опишем инвариантность в терминах ноль-сетей.

Второе движение Редемейстера подразумевает, что две следующие косы эквивалентны:

$$\left| \left\langle \right\rangle \sim \right\rangle \right| \left( \right).$$
 (5.65)

Однако, разложив комплекс в левой части, можно получить следующие вклады:

$$\mathcal{E}\left(\bigotimes\right) = \left| \bigcup_{n=1}^{+} \oplus \bigoplus_{n=1}^{+} \oplus$$

Члены в скобках сокращаются за счет инстантонов. Опишем соответствующие ноль-сети. Их несложно построить, так как при раздвижении нитей точки пересечения на диаграмме зацепления двигаются навстречу друг другу, а вместе с ними двигаются точки привязки солитонов. Таким образом, мы можем выбрать следующий семейство путей  $\hat{\wp}$ :

$$z_a(x) = i(r - x^2) - \frac{1}{2}, \quad z_b(x) = -\left(i(r - x^2) - \frac{1}{2}\right).$$
 (5.67)

На диаграмме, изображенной на рис. 5.7, мы представляем соответствующие диаграммы связей и сети ВКБ.



Рисунок 5.7 – Семейство диаграмм кос и соответствующих спектральных сетей.

Мы пометили ноль-сети, соответствующие инстантонам, сокращающим вклады **P**-степеней -1 и +1, как  $\mathbb{W}^{(-1)}$  и  $\mathbb{W}^{(+1)}$  соответственно. Здесь еще раз подчеркнем, что ноль-сеть *не* представляет собой кластерную мутацию, переводящую идеальную триангуляцию в идеальную триангуляцию, и рассматриваемая ситуация весьма показательна. В этом случае спектральное накрытие является двойным, обычно сети ВКБ приписывают идеальную триангуляцию базовой кривой  $\mathbb{C}$  по трем правилам [43] (см. построенные примеры в разделе 5.4.6): линии ВКБ играют роль медиан треугольников, точки ветвления соответствуют центрам граней треугольников, сингулярности – вершинам треугольников. Триангуляция *идеальна*, если все ребра триангуляции имеют с обеих сторон грани треугольника. Очевидно, что в середине мы получаем не идеальную триангуляцию, вместо треугольника средняя грань – ромб.

Общая стратегия построения нулевой сети заключается в следующем. Солитоны обычно привязаны к определенным элементам, таким как пересечения или элементы замыкания. Мы можем гомотопически перемещать их на диаграмме зацеплений, чтобы солитоны (точки пересечения сетей ВКБ с путем  $\wp$ ) тоже перемещались. Ноль-сети появляются рядом с конфигурациями, соответствующими уменьшению разрешения диаграммы, как в предыдущем примере.

# 5.3.5 Сравнение когомологий Хованова с когомологиями в модели Ландау-Гинзбурга

Теперь сравним комплексы, следующие из (5.1) и (5.64). Покажем, что (5.64) эквивалентен (5.1) в два этапа:

1. Сначала покажем, что

$$\mathbf{M}\left[\boldsymbol{\times}\right] = \left[q^{-1}t^{-1}\right]\mathbf{M}\left[\boldsymbol{\cdot}\right] \oplus \mathbf{M}\left[\boldsymbol{\times}\right], \qquad (5.68)$$

как в выражении(5.1).

2. Затем покажем, что дифференциал Q можно представить в виде

$$Q = \sum_{\text{BCE } \chi} Q_{\chi} \,, \tag{5.69}$$

где  $\chi$  – пересечения в диаграмме зацеплений, причем  $Q_{\chi}$  действует на пересечение  $\chi$ , склеивая или разрезая циклы в разрешении, как в (5.3) и (5.4).

#### Этап 1.

Рассмотрим следующую диаграмму:



Мы только что перерисовали диаграмму, изображенную на рис. 5.6: теперь разрез показан явно. Мы рассматриваем три гомотопических пути  $\wp_k$ . Напишем схематически все обходы для этих путей. Обозначим через  $\mathfrak{d}_i^{(ab)}$  обход из-за пересечения с соответствующей линией ВКБ, начинающийся на листе a и заканчивающийся на листе b. Путь на  $\Sigma$  без обходов обозначим как  $\ell^{(kk)}$ , а перестановку листа за счет прохождения разреза обозначим как  $\sigma^{(kl)}$ .

Соответствующие обходы имеют следующий вид:

$$\mathbb{D}(\wp_{1},\zeta) = \ell^{(11)} + \ell^{(22)} + \mathfrak{d}_{1}^{(12)} + \mathfrak{d}_{2}^{(12)}; \mathbb{D}(\wp_{2},\zeta) = \sigma^{(12)}\mathfrak{d}_{5}^{(21)} + \mathfrak{d}_{3}^{(21)}\sigma^{(12)} + \sigma^{(12)} + \sigma^{(12)}\mathfrak{d}_{5}^{(21)}\mathfrak{d}_{2}^{(12)} + + \left(\sigma^{(21)} + \mathfrak{d}_{3}^{(21)}\sigma^{(12)}\mathfrak{d}_{5}^{(21)}\right) + \left(\sigma^{(21)}\mathfrak{d}_{2}^{(12)} + \mathfrak{d}_{3}^{(21)}\sigma^{(12)}\mathfrak{d}_{5}^{(21)}\mathfrak{d}_{2}^{(12)}\right);$$
(5.71)  
$$\mathbb{D}(\wp_{3},\zeta) = \tilde{\sigma}^{(12)}\mathfrak{d}_{4}^{(21)} + \mathfrak{d}_{6}^{(21)}\tilde{\sigma}^{(12)} + \mathfrak{d}_{1}^{(12)}\mathfrak{d}_{6}^{(21)}\tilde{\sigma}^{(12)} + \tilde{\sigma}^{(12)} + + \left(\tilde{\sigma}^{(21)} + \mathfrak{d}_{6}^{(21)}\tilde{\sigma}^{(12)}\mathfrak{d}_{4}^{(21)}\right) + \left(\mathfrak{d}_{1}^{(12)}\tilde{\sigma}^{(21)} + \mathfrak{d}_{1}^{(12)}\mathfrak{d}_{6}^{(21)}\tilde{\sigma}^{(12)}\mathfrak{d}_{4}^{(21)}\right).$$

Члены, взятые в скобки, собираются в пары солитонных состояний, которые поднимаются из состояний БПЗ за счет инстантонных поправок. Эти члены можно сократить.

Мы видим, что все три пути дают эквивалентные Гильбертовы пространства БПЗ:

$$H^*(\mathbf{M}(\wp_1,\zeta),\mathbf{Q}) \cong H^*(\mathbf{M}(\wp_2,\zeta),\mathbf{Q}) \cong H^*(\mathbf{M}(\wp_3,\zeta),\mathbf{Q}).$$
(5.72)

Ни один из путей (5.71) не дает интерфейса, совпадающего с желаемым, поэтому мы объединяем некоторые вклады путей  $\wp_2$  и  $\wp_3$ , считая, что этот интерфейс соответствует абстрактному пути  $\wp_0$ , о котором только известно, что он гомотопичен  $\wp_1$ ,  $\wp_2$ ,  $\wp_3$ :

$$\mathbb{D}(\wp_0, \zeta) = \tilde{\sigma}^{(12)} \mathfrak{d}_4^{(21)} + \mathfrak{d}_3^{(21)} \sigma^{(12)} + \mathfrak{d}_1^{(12)} \mathfrak{d}_6^{(21)} \tilde{\sigma}^{(12)} + \tilde{\sigma}^{(12)} + \left(\sigma^{(21)} + \mathfrak{d}_3^{(21)} \sigma^{(12)} \mathfrak{d}_5^{(21)}\right) .$$
(5.73)

Все члены в выражении содержат перестановку  $\sigma^{(ij)}$  из-за пересечения разреза, эта перестановка важна, так как мы хотели бы получить интерфейс, отвечающий тривиальной косе, как в (5.1), и эта перестановка в точности отменяет твист траектории *w*-поля. Учитывая все вклады, переставляя слагаемые, делая замену  $(q,t) \mapsto (qt,t)$  и пренебрегая общим мономиальным q, t-множителем, мы

приходим к следующим интерфейсам:

Заметим, что первые четыре члена в скобках в выражении (5.74a) образуют тождественный интерфейс. Поэтому нам необходимо проверить, образуют ли следующие четыре члена в скобках пару чашка/шапка. Для краткости обозначим эти члены как X.

Можно использовать следующее гомотопическое преобразование интерфейсов:

$$\bigcap = = \bigcap , \qquad (5.75)$$

и рассмотреть следующие тождества на диаграммах:

$$(\overbrace{)}^{?} = (5.76)$$

Таким образом, для подтверждения пункта 1 в списке достаточно подтвердить эквивалентность начальных и конечных членов цепочки (5.76).

С помощью выражений (5.74a), (5.74b) вычисляем:

Если рассмотреть эти вклады более детально, то можно заметить, что это ровно четыре вклада тривиального тождественного интерфейса для вакуумов (+, +), (-, -), (-, +) и (+, -), соответственно. В каждом случае набор обходов можно модифицировать до простого пустого обхода на поверхности  $\Sigma$ . Продемонстрируем это утверждение на примере (+, +) вакуума. Модифицируем кривую и соответствующие обходы следующим образом:

Таким образом, путь  $\wp$  дает единственный пустой обход – подъем  $\wp$  на соответствующий лист.  $\wp$  пересекает два разреза. Первый разрез дает перестановку  $(+, +, +, -) \rightarrow (+, +, -, +)$ , немодифицированному обходом решению соответствует поворот  $(+, +, -, +) \rightarrow (+, -, +, +)$  и, наконец, другой разрез производит отображение  $(+, -, +, +) \rightarrow (-, +, +, +)$ . Этот обход эквивалентен простому решению, соответствующему (+, +) вакууму. Аналогично можно проверить, что любой инстантон для этого интерфейса соответствует инстантонному решению для этого модифицированного интерфейса с использованием аргумента «имплантата» из [90].

#### Этап 2

Для проверки второго пункта нашего списка просто построим действие локальных дифференциалов  $Q_{\chi}$  и сравним его с правилами (5.3) и (5.4).

Первый шаг в этом направлении, который необходимо сделать, – это присвоить векторы  $v_+$  и  $v_-$  двум типам циклов. Это легко сделать, рассматривая тривиальный узел, он дается ровно двумя вкладами с **P**-степенью ±1, используя (5.74a), получаем:

$$v_{+} = + \bigcirc - , \quad v_{-} = - \bigcirc + .$$
 (5.79)

Мы представляем форму отображений в виде солитонных диаграмм зацеплений и изображаем ноль-сети, ответственные за эти отображения:

- Умножение:

 $-v_+ \otimes v_- \mapsto v_-$ : в этом случае ноль-сеть появляется в линияхпотомках ВКБ (новую линию мы обозначаем как  $\ell$ ):



 $-v_{-}\otimes v_{+}\mapsto v_{-}$ : в этом случае ноль-сеть появляется в линияхпотомках ВКБ (новую линию мы обозначаем как  $\ell$ )



 $-v_+\otimes v_+\mapsto v_+$ : в этом случае ноль-сеть является одной из

наиболее простых (см. раздел 5.3.2):



- $-v_{-}\otimes v_{-}\mapsto 0$ : член  $v_{-}\otimes v_{-}$  имеет наименьшую **P**-степень -3, для него нет парного члена той же степени, поэтому **Q** = 0 в этой ситуации.
- Ко-умножение:
  - $-v_{-} \mapsto v_{-} \otimes v_{-}$ : в этом случае ноль-сеть является одной из наиболее простых (см. раздел 5.3.2):



$$-v_+ \mapsto v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+$$
:



До сих пор мы построили систему дифференциалов  $Q_{\chi}$ , действующих в пересечениях диаграмм. Комплекс  $\tilde{\mathbf{M}}$  можно рассматривать как гиперкуб разрешений в полной аналогии с комплексом Хованова: вершины представлены разными разрешениями пересечений диаграмм зацеплений  $\chi$  в (5.74а), ребра –  $Q_{\chi}$ . Действие суперзаряда образует алгебру Фробениуса, заданную соотношениями (5.3) и (5.4) и удовлетворяющую (5.6), поэтому для ребер суперзаряды  $Q_{\chi}$  антикоммутируют. Однако, чтобы утверждать (5.6), нужно сделать еще один шаг и доказать, что не существует других дифференциалов, кроме  $Q_{\chi}$ .

Предположим, существуют другие типы дифференциалов. Рассмотрим куб разрешений, для простоты ограничимся наглядным трехмерным кубом:



Вершины куба отмечены в соответствии с выбором разрешения. Существует три типа дифференциалов, каждый из которых меняет одно из разрешений:

$$Q_1: \Psi_{1**} \to \Psi_{0**}, \quad Q_2: \Psi_{*1*} \to \Psi_{*0*}, \quad Q_3: \Psi_{**1} \to \Psi_{**0}.$$
(5.80)

Эти дифференциалы образуют ребра куба. Предположим, существует какойто новый тип дифференциала, он дает новое отображение  $\tilde{Q}$  :  $\Psi_{110} \rightarrow \Psi_{001}$ . Это можно представить как более элементарные перемещения, последовательно сдвигающие все разрешения  $\tilde{Q} \sim Q_2 Q_1 Q_3^{-1}$ . Эту комбинацию нельзя рассматривать как комбинацию инстантонов, поскольку один из них является антиинстантоном  $Q_3^{-1}$ , однако где-то на границе пространства модулей этой конфигурации может присутствовать одномодульный инстантон БПЗ. Существует еще один путь  $Q_1 Q_2 Q_3^{-1}$ , соединяющий  $\Psi_{110}$  и  $\Psi_{001}$ . Все эти пути обозначены на схеме жирными стрелками. Тогда отображение  $\tilde{Q}$  должна получать вклады от обоих путей

$$\tilde{Q} \sim Q_2 Q_1 Q_3^{-1} + Q_1 Q_2 Q_3^{-1} \sim 0$$

В общей ситуации все такие члены содержат числа Q и  $Q^{-1}$  противоположной четности, поэтому они суммируются с результатом, равным нулю. В качестве альтернативного вывода мы можем рассмотреть матричный элемент  $Q^2$ , кото-

рый должен быть равен нулю. Он задается суммой по всем возможным путям:

$$0 = \langle \Psi_{001} | Q^2 | \Psi_{111} \rangle = \langle \Psi_{001} | Q_1 Q_2 + Q_2 Q_1 + \tilde{Q} Q_3 | \Psi_{111} \rangle =$$
  
=  $\langle \Psi_{001} | \tilde{Q} Q_3 | \Psi_{111} \rangle = \langle \Psi_{001} | \tilde{Q} | \Psi_{110} \rangle.$  (5.81)

# 5.4 Алгебро-геометрическая В-модель

# Колчанные многообразия Накаджимы

Разновидности колчанных многообразий Накаджимы параметризуют классические ветви Хиггса суперсимметричных теорий Янга-Миллса-Хиггса. В этом разделе мы будем рассматривать разновидности колчанов так называемого  $A_k$ типа:

Эта теория сопровождается каноническим суперпотенциалом:

$$W = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Tr} P_i \left( B_i A_i - A_{i+1} B_{i+1} - \Gamma_i \Delta_i \right).$$
 (5.83)

Здесь и далее мы подразумеваем, что поля с индексами i вне интервала  $1, \ldots, k$  равны нулю.

Обозначим массовые параметры  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  как каноническую параметризацию деформации  $\Omega$ -фона [99; 197; 220]:

$$\mu(A_i) = \epsilon_1, \quad \mu(B_i) = \epsilon_2, \quad \mu(\Gamma_i) = 0, \quad \mu(\Delta_i) = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \mu(P_i) = -\epsilon_1 - \epsilon_2.$$
(5.84)

Эти массы вводятся как дополнительные твистованные массы – ароматические мультиплеты U(1), связанные с колчанными стрелками.

Классическая Хиггсова ветвь описывается множеством киральных полей,

удовлетворяющих условиям D-члена и F-члена:

**D**-член: 
$$A_{i-1}A_{i-1}^{\dagger} + B_iB_i^{\dagger} + \Gamma_i\Gamma_i^{\dagger} - A_i^{\dagger}A_i - B_{i-1}^{\dagger}B_{i-1} - \Delta_i^{\dagger}\Delta_i = r_i, \quad i = 1, \dots, k;$$
  
**F**-член:  $A_iB_i = A_{i+1}B_{i+1} - \Gamma_i\Delta_i, \quad i = 1, \dots, k;$   
 $P_i = 0, \quad i = 1, \dots, k.$ 
(5.85)

Последнее ограничение  $P_i = 0$  очень простое и отображения  $P_i$  больше нигде не встречаются, поэтому в каноническом описании колчанных многообразий Накаджимы эти условия и поля  $P_i$  обычно опускаются, мы будем действовать в этом разделе аналогичным образом. Также мы допускаем следующее обычное упрощение обозначений. Поскольку все узлы соединены двойным набором стрелок, мы заменяем этот дублет одной связью:

 $\bigcirc \longrightarrow \bigcirc \longleftrightarrow \bigcirc \longleftrightarrow \bigcirc .$ 

Классические вакуумы, удовлетворяющие (5.85), связанные действием калибровочной группы, эквивалентны. Поэтому вакуумное многообразие – классическая ветвь Хиггса – в этом случае описывается следующим фактором:

$$\mathcal{R}(\vec{v}, \vec{w}) := \left\{ \mathbf{D}\text{-член}, \mathbf{F}\text{-член} \right\} / \prod_{i=1}^{k} U(v_i).$$
(5.86)

Это многообразие является гладким при значениях  $r_i$ , принадлежащих определенным камерам стабильности. В дальнейшем мы будем в основном использовать камеру стабильности, называемую циклической камерой:

$$r_i > 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Условие **D**-члена можно заменить на условие устойчивости и расширение калибровочной группы до ее комплексифицированного аналога, поэтому пространство модулей представления колчана допускает изоморфное описание:

$$\mathcal{R}(\vec{v}, \vec{w}) = \{ \text{стабильность}, \mathbf{F}\text{-член} \} / \prod_{i=1}^{k} GL(v_i, \mathbb{C}).$$
(5.87)

Для колчанных многообразий Накаджимы эта теорема доказана в [221]. Стабильное представление многообразия колчана Накаджимы, соответствующее циклической камере, будем обозначать как  $\mathcal{R}_+(\vec{v}, \vec{w})$ . Это гладкое алгебраическое многообразие комплексной размерности:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}(\vec{v}, \vec{w}) = 2(\vec{w}, \vec{v}) - 2(\vec{v}, \vec{v}) + (\vec{v}, A\vec{v}),$$
(5.88)

где А – матрица смежности колчана:

$$A_{i,j} = \delta_{i,j+1} + \delta_{i+1,j}$$

# 5.4.1 Спектральная дуальность на пространствах модулей колчанов

Спектральная дуальность устанавливает изоморфизм вакуумных пространств модулей для некоторых теорий (см., например, [222]). Нас будет интересовать случай трехмерных теорий [223; 224]. Эта дуальность также тесно связана с трехмерной зеркальной симметрией (см., например, [225—227]) и *q*-соответствием Лэнглэндса (см., например, [183; 228—232]).

Можно получить эквивалентность решений уравнений анзаца Бете, описывающих вакуумные пространства модулей, для теорий с таргет-пространствами, связанными с двойственной парой колчанов  $\mathfrak{Q}$  и  $\mathfrak{Q}^!$ . Эта дуальноть проявляет себя в наиболее простом виде, когда и  $\mathfrak{Q}$ , и  $\mathfrak{Q}^!$  описывают так называемые теории T[SU(k)] [224; 233]:

$$T[SU(k)] = \overset{k}{\Box} \overset{k-1}{\Box} \overset{k-2}{\Box} \overset{2}{\Box} \overset{1}{\Box} \overset{1}{\Box} (5.89)$$

Дуальность меняет роли комплексных массовых параметров  $\mu$ , связанных с узлами обрамления, и комплексных параметров ФИ  $r_i - i\theta_i$ , связанных с калибровочными узлами.

Подобным образом спектральная дуальность [223] связывает теорию с таргет-пространством, заданным кокасательным расслоением к грассманиану:

$$T^*\operatorname{Gr}(n,m) = \overset{m}{\Box} \overset{n}{\longrightarrow} ^n , \qquad (5.90)$$

с теорией определенного типа, который мы обозначим как  $\mathcal{S}_{n,m-n}$ :

В инфракрасном режиме эти теории испытывают явление нарушения симметрии. Эффективные поля, оставшиеся в ИК-описании на Кулоновой ветви, являются собственными значениями скаляров  $\sigma$  в калибровочном мультиплете. Мы можем обозначить эти поля двумя индексами  $\Sigma_{\alpha}^{(a)}$ , где индекс *a* пробегает узлы  $a = 1, \ldots, m - 1$  и  $\alpha = 1, \ldots, v_a$ .

Процедура генерации эффективного суперпотенциала аналогична описанной в разделе 1.1.3 (см. также [234]). Мы могли бы редуцировать суперпотенциал в трехмерной теории [223] или взять логарифм подынтегральной функции дисковой статсуммы [68, раздел 10], заменив гамма-функции их аппроксимациями Стирлинга. Результат для колчанного многообразия Накаджимы имеет следующий вид:

$$W_{LG} = \sum_{a=1}^{N} t_a \Sigma_{\alpha}^{(i)} + \sum_{a=1}^{N} \sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\\alpha\neq\beta}}^{N} \mathbf{w} \left( \Sigma_{\alpha}^{(a)} - \Sigma_{\beta}^{(a)} - \epsilon_1 - \epsilon_2 \right) + \sum_{a=1}^{N-1} \sum_{\alpha=1}^{v_a} \sum_{\beta=1}^{v_{a+1}} \mathbf{w} \left( \Sigma_{\beta}^{(a+1)} - \Sigma_{\alpha}^{(a)} - \epsilon_1 \right) + \sum_{a=1}^{N-1} \sum_{\alpha=1}^{v_a} \sum_{\beta=1}^{v_{a+1}} \mathbf{w} \left( \Sigma_{\alpha}^{(a)} - \Sigma_{\beta}^{(a+1)} - \epsilon_2 \right) + \sum_{a=1}^{N} \sum_{p=1}^{w_a} \mathbf{w} \left( \Sigma_{\alpha}^{(a)} - \mu_p^{(a)} \right) + \sum_{a=1}^{N} \sum_{p=1}^{w_a} \mathbf{w} \left( \mu_p^{(a)} - \Sigma_{\alpha}^{(a)} - \epsilon_1 - \epsilon_2 \right) ,$$
(5.92)

где  $\mu_p^{(a)}, p = 1, \ldots, w_a$  – массы, связанные с узлами обрамления,  $t_a$  – комплексированные параметры ФИ:

$$t_a = r_a - \mathrm{i}\theta_a$$

**w** – элементарный одиночный киральный суперпотенциал (4.1).

Аналогичная размерная редукция  $T^* Gr(n,m)$  даст эффективную теорию с суперпотенциалом (5.20). Спектральная двойственность между  $T^* Gr(n,m)$  и

 $S_{n,m-n}$  указывает на то, что соответствующие пространства вакуумных модулей изоморфны, в частности, в множествах критических точек фазы Ландау-Гинзбурга.  $\check{W}_{LG}$  (5.20) и  $W_{LG}$  (5.92) изоморфны при следующей идентификации параметров:

$$z_a =: e^{2\pi\tau_a}, \quad t_a = \tau_a - \tau_{a-1}.$$
 (5.93)

Здесь рассмотрим легкое доказательство этого факта для простейшего случая n = 1. Полное аналитическое доказательство этого соотношения дуальности для общих m и n весьма сложно технически, оно описано в работе [235].

В случае n=1 теория  $\mathcal{S}_{1,m-1}$  отвечает следующей колчанной диаграмме:

$$\mathcal{S}_{1,m-1} = \Box \longrightarrow \odot \cdots \odot \Box \Box \qquad (5.94)$$

Соответствующий суперпотенциал имеет следующий вид:

$$W_{\rm LG} = \sum_{a=0}^{m-1} \mathbf{w} \left( \Sigma^{(a)} - \Sigma^{(a+1)} \right) + \sum_{a=0}^{m-1} \mathbf{w} \left( \Sigma^{(a+1)} - \Sigma^{(a)} - \epsilon \right) + \sum_{a=1}^{m-1} t_a \Sigma^{(a)}, \quad (5.95)$$

где мы сдвинули поля  $\Sigma^{(a)} \to \Sigma^{(a)} + a\epsilon_1,$ 

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2, \tag{5.96}$$

и предполагаем граничные, что условия для узлов представлены следующим образом:

$$\Sigma^{(0)} = \mu_+, \quad \Sigma^{(m)} = \mu_-,$$

где комплексные массы  $\mu_+$  и  $\mu_-$  связаны с узлами оснащения  $w_1$  и  $w_{m-1}$  соответственно.

В наших обозначениях вакуумные уравнения имеют следующий вид:

$$e^{2\pi\tau_{a-1}}\left(1-\frac{\epsilon}{\Sigma^{(a-1)}-\Sigma^{(a)}}\right) = e^{2\pi\tau_a}\left(1-\frac{\epsilon}{\Sigma^{(a)}-\Sigma^{(a+1)}}\right).$$
(5.97)

Правая часть этого уравнения эквивалентна левой части со сдвигом индексов на единицу. Заметим, что оба выражения в левой и правой частях не зависят

от индекса а. Введем новую переменную:

$$x := e^{2\pi\tau_a} \left( 1 - \frac{\epsilon}{\Sigma^{(a)} - \Sigma^{(a+1)}} \right).$$
(5.98)

Легко решить уравнение (5.98) для переменных  $\Sigma^{(a)}$ , тогда можно прийти к единственному условию для  $\Sigma^{(a)}$ , соответствующему граничным условиям:

$$\frac{\mu_{+} - \mu_{-} - m\epsilon}{x} + \sum_{a=0}^{m-1} \frac{\epsilon}{x - z_{a}} = 0.$$
(5.99)

Последнее уравнение описывает критические точки дуального суперпотенциала теории  $T^*$ Gr(1,m) (см. (5.20)):

$$\check{W}_{\rm LG} = \epsilon \left(\frac{\mu_+ - \mu_-}{\epsilon} - m\right) \log x + \epsilon \sum_{a=0}^{m-1} \log(x - z_a).$$
(5.100)

# 5.4.2 Изоморфизм Маффеи

Рассмотрим многообразие N-ступенчатого флага гиперплоскостей  $F_a$  в *d*-мерном комплексном пространстве (см. [236]):

$$\mathcal{F}_{\vec{q}}^{d} := \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^{d} = F_{0} \supseteq F_{1} \supseteq F_{2} \supseteq \ldots \supseteq F_{N} \supseteq F_{N+1} = \{0\} \\ \dim F_{a} - \dim F_{a+1} = q_{a} \ge 0, \quad a = 0, \ldots, N \end{array} \right\}.$$
(5.101)

Касательное расслоение к многообразию флагов получается добавлением нильпотентного элемента *z*:

$$\mathcal{N}_{\vec{q}}^d := \left\{ (z, F_{\bullet}) \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^d) \times \mathcal{F}_{\vec{q}}^d \mid z(F_a) \subseteq F_{a+1} \right\}.$$
(5.102)

Положим, что z – элемент типа  $\lambda$ , где  $\lambda = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p\}$  – разбиение целого числа d, если нильпотентная матрица z в своем жордановом разложении содержит блоки размеров  $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ . Срез в  $\mathcal{N}_{\vec{q}}^d$ , где z – элемент типа  $\lambda$ , обозначим как  $\mathcal{N}_{\vec{q},\lambda}^d$ .

Кокасательное расслоение  $\mathcal{N}_{\vec{q}}^d$  изоморфно колчанному многообразию Накаджимы с размерными векторами

$$\vec{v} = (\dim F_1, \dim F_2, \dots, \dim F_N), \quad \vec{w} = (d, 0, 0, \dots)$$

в циклической камере [221; 231]. Чтобы установить этот изоморфизм, полезно отождествить  $W_1$  с  $V_0$  и отобразить:

$$A_0 := \Gamma_1, \quad B_0 := \Delta_1.$$

Если векторное пространство  $\mathbb{C}^d$  отождествить с  $V_0$ , то гиперплоскости  $F_a$  получаются как

$$F_a = \operatorname{Im} H_a, \tag{5.103}$$

где отображения На имеют следующий вид:

$$H_a = A_0^{\dagger} \cdot \ldots \cdot A_{a-1}^{\dagger} : \quad V_a \longrightarrow V_0.$$
 (5.104)

Нильпотентный элемент z определяется в этой структуре как:

$$z = (B_0 A_0)^{\dagger}. \tag{5.105}$$

Следует отметить, что согласно нашим предписаниям элемент z имеет эквивариантный вес  $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ . Векторы из  $V_0$ , принадлежащие одному жорданову подпространству, образуют модуль, порожденный циклическим вектором  $\vec{u}$ :

$$\vec{u}, \ z\vec{u}, \ z^2\vec{u}, \ z^3\vec{u}, \ldots$$

Это накладывает ограничение на нединамические средние значения поля  $\sigma$ , связанного с обрамляющим узлом  $W_1$ . Чтобы сгенерировать нильпотентный элемент типа  $\lambda$ , оно должно иметь следующий вид:

$$\sigma = \operatorname{diag}\left(\mu_1, \mu_1 - \epsilon, \dots, \mu_1 - \epsilon\lambda_1, \ \mu_2, \dots, \mu_2 - \epsilon\lambda_2, \ \dots, \mu_p - \epsilon\lambda_p\right).$$
(5.106)

Изоморфизм Маффеи [237] связывает колчанные многообразия Накаджимы и срезы в кокасательном расслоении к многообразию флагов:

$$\mathcal{R}_{+}(\vec{v},\vec{w}) \cong \mathcal{N}^{d}_{\vec{q},\lambda},\tag{5.107}$$

где

$$q_a = -v_a + v_{a+1} + \sum_{j=1}^a w_j,$$

а  $\lambda$  – разбиение типа  $1^{w_N}2^{w_N-1}\dots N^{w_1}$ ,  $d = \sum_a q_a$ . В общем виде изоморфизм Маффея довольно сложен, тем не менее, его можно значительно упростить для эквивариантных неподвижных точек.

Многообразие  $\mathcal{N}_{\vec{q},\lambda}^d$  описывает поперечный срез в точке, заданной нильпотентным элементом z в представлении пространства свертки разрешения замыкания орбиты  $\tilde{Gr}_{\vec{x}}$  в аффинном грассманиане  $PGL_2$  [29; 30; 238—240].

#### 5.4.3 Кристаллические фиксированные точки

Для ЛКСМ с таргет-пространством, заданным колчанным многообразием, мы ввели нетривиальный суперпотенциал (5.83). Теория локализуется в критическом локусе функции высоты и суперпотенциала, фиксированных относительно калибровочной симметрии. Суперпотенциал W усложняет рассмотрение модели ЛКСМ, вводит нетривиальное граничное условие для граничного суперзаряда, приводящее к эффекту матричной факторизации [68; 88; 241]:

$$\bar{\mathcal{Q}}_{\mathrm{bdry}}^2 = W \cdot \mathbf{Id}$$

Мы попытаемся обойти эту трудность, используя прием эквивариантной локализации. Мы разделяем потоки локализации, как это было предложено в разделе 1.1.1, так что сначала мы локализуем теорию на локус (5.85), чтобы таргет-пространство в ИК представляло собой кокасательное расслоение к (5.85), затем продолжаем локализацию к эквивариантным неподвижным точкам. К счастью, на критическом локусе (5.85)  $W \equiv 0$ , и нет необходимости рассматривать матричную факторизацию для когерентных пучков в эффекивном таргет-пространстве. Для других типов колчанов с сингулярными пространствами модулей этот трюк не сработает, поскольку вклад будут вносить более высокие квантовые поправки.

Эквивариантные неподвижные точки на колчанном многообразии Накаджимы в циклической камере представлены  $\sum_{i} w_i$ -наборами N-цветных диаграмм Юнга. В случае теории  $S_{n,m-n}$  этот набор представляет собой просто пару диаграмм Юнга  $\vec{Y} = \{Y_1, Y_2\}$ . Более того, для заданных размерностей колчана две диаграммы Юнга дополняют друг друга, так что реальная неподвижная точка помечается одной диаграммой Юнга, которую можно вложить в поле ячеек  $(m-n) \times n$ . Если  $Y_1$  заполняет белую область на диаграмме, изображенной на рис. 5.8(a), то  $Y_2$ , транспонированная и впоследствии отраженная вдоль обеих осей относительно начала координат, заполняет дополнительную серую область. Имеется дополнительная раскраска диаграмм, связанных с узлами колчана. Мы нумеруем/раскрашиваем узлы диаграммы (5.91) слева направо, начиная с цвета 1, так, чтобы узлы, связанные с узлами обрамления, имели цвета n и m - n, соответственно. Раскраска ячеек поля происходит диагональными рядами, как показано на рис. 5.8(а), начиная с цвета 1 в верхнем левом углу и заканчивая цветом m - 1 в правом нижнем углу.

Мы промаркировали левый нижний угол как «—», и вдоль белой области используем координаты  $x_1$  и  $y_1$  так, чтобы самая нижняя левая ячейка имела координаты (0,0). Также верхний правый угол обозначается как «+», вдоль серой области используются координаты  $x_2$  и  $y_2$ , так что самая верхняя правая ячейка имеет координаты (0,0).



Рисунок 5.8 – Диаграмное изображение эквивариантных фиксированных точек на многообразии  $\mathcal{S}_{n,m-n}$ .

В разделе 5.2.2 мы уже отождествили набор таких диаграмм Юнга со спиновой цепочкой  $\mathcal{Y}_{n,m-n}$ .

На дуальной стороне трехмерной зеркальной симметрии  $\mathcal{Y}_{n,m-n}$  определяют ячейки Шуберта для грассманиана  $\operatorname{Gr}(n,m)$  (см., например, [242]).

Существует простая процедура представления вакуумных средних полей в соответствующем постоянном вакууме с помощью схематического обозначения эквивариантной неподвижной точки. В ИК-вакууме калибровочная группа нарушена до группы Вейля, а скалярное поле  $\sigma$  в калибровочных мультиплетах приобретает диагональные средние порядка комплексных масс:

$$\left\langle \sigma^{(a)} \right\rangle = \operatorname{diag}\left(\sigma_1^{(a)}, \sigma_2^{(a)}, \dots, \sigma_{v_a}^{(a)}\right), \quad a = 1, \dots, m-1.$$

Ненарушенная остаточная группа Вейля калибровочной группы действует на эти средние значения перестановками:

$$\prod_{i=1}^{m-1} S_{v_i}.$$

Следовательно, вакуумные значения  $\langle \sigma^{(a)} \rangle$ , отличающиеся переупорядочением  $\sigma_{\alpha}^{(a)}$  внутри каждой *a*-группы, не различаются на физическом уровне. Эти средние можно извлечь непосредственно из диаграмм, как показано на рис. 5.8(а). Каждая ячейка на диаграмме соответствует определенному вакуумному ожиданию. Обозначим комплексную массу, связанную с узлом оснащения  $w_n$ , как  $\mu_+$ , а массу, связанную с узлом  $w_{m-n}$ , как  $\mu_-$ . Связь между ячейками и средними  $\sigma^{(a)}$  зависит от типа области, к которой принадлежит ячейка, а также от ее координат x, y и цвета c:

Белая ячейка с 
$$(x_1, y_1, c) \iff \sigma^{(c)} = \mu_- + x_1 \epsilon_1 + y_1 \epsilon_2;$$
  
Серая ячейка с  $(x_2, y_2, c') \iff \sigma^{(c')} = \mu_+ + x_2 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2.$  (5.108)

После нарушения симметрии компоненты киральных полей ведут себя как независимые эффективные ИК-поля. Для их индексов можно было бы ввести следующие обозначения:

$$\phi_{(b,\beta)(a,\alpha)}$$
.

Это поле является компонентой кирального поля, представленного стрелкой  $a \to b$ , соединяющей узлы a и b. Индексы  $\alpha$  и  $\beta$  являются матричными индексами соответствующего линейного отображения, сопоставленного стрелке  $a \to b$ . Эффективная ИК-масса такого поля равна:

$$\mu\left(\phi_{(b,\beta)(a,\alpha)}\right) = \sigma_{\beta}^{(b)} - \sigma_{\alpha}^{(a)} - \mu(\text{стрелка } a \to b).$$
(5.109)

Теперь в наших возможностях описать обратное отображение изоморфизма  $\Xi$ , отображающее неподвижную точку на  $S_{n,m-n}$  в спиновую конфигурацию. Изоморфизм Маффеи отображает  $S_{n,m-n}$  в многообразие флагов с  $q_a = 1$ (см. (5.101)), другими словами, в срез пространства модулей полного флага T[SU(m)]. Обозначим соответствующее кокасательное расслоение к многообразию флагов как  $\mathcal{N}_{n,m-n}$ , а векторные пространства, связанные с калибровкой и узлами обрамления для исходного  $S_{n,m-n}$  и его образа Маффеи, как V, W и  $\tilde{V}, \tilde{W}$ , соответственно. Для самого большого пространства имеем:

$$\tilde{V}_0 = \tilde{W}_1 = \mathbb{C}^m = W_n^{\oplus n} \oplus W_{m-n}^{\oplus (m-n)}, \qquad (5.110)$$

где  $W_n^{\oplus n}$  – это всего лишь *n* копий одномерного пространства  $W_n$ . Оператор *z* в этом базисе имеет следующий вид:

$$z = \left(\begin{array}{cc} J_n & 0\\ 0 & J_{m-n} \end{array}\right),$$

где  $J_k$  – жордановы блоки соответствующих размеров.

Сопоставим  $W_n$  и  $W_{m-n}$  одномерные пространства, натянутые на проективные векторы спина-1/2:

$$W_n = \operatorname{Span}\left\{\left|+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right\}, \quad W_{m-n} = \operatorname{Span}\left\{\left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle\right\}, \quad (5.111)$$

или просто  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$  для краткости. Тогда векторы  $W_n^{\oplus n}$  и  $W_{m-n}^{\oplus (m-n)}$  можно обозначить как  $|+,a\rangle$ ,  $a = 1, \ldots, n$  и  $|-,b\rangle$ ,  $b = 1, \ldots, m - n$  соответственно. Также введем забывающий морфизм:

$$\xi: |+,i\rangle \mapsto |+\rangle, |-,i\rangle \mapsto |-\rangle.$$
(5.112)

Кокасательное расслоение к флагу  $\mathcal{N}_{n,m-n}$  допускает ортогональное разложение по прямым с естественной нормой на  $\tilde{V}_0$ :

$$V_0 = \mathbb{C}^m = \ell_0 \oplus \ell_1 \oplus \ldots \oplus \ell_{m-1}, \quad \dim \ell_a = 1, \quad \ell_a \perp \ell_b \text{ for } a \neq b;$$
  

$$F_a = \bigoplus_{k=a}^{m-1} \ell_k.$$
(5.113)

Оказывается, что для неподвижных точек  $\xi(\ell_i)$  параллелен либо  $|+\rangle$ , либо  $|-\rangle$ . Таким образом, мы строим следующее отображение на диаграммах Юнга  $Y \in \mathcal{Y}_{n,m-n}$ . Сначала мы строим колчанное представление  $\mathcal{S}_{n,m-n}$  на основе неподвижных точек, затем применяем к нему изоморфизм Маффеи для получения точки на кокасательном расслоении к флагу  $\mathcal{N}_{n,m-n}$  и, наконец, мы применяем забывающий морфизм к ортогональному разложению многообразия флагов:

$$\Xi: \quad Y \mapsto (\xi(\ell_0), \xi(\ell_1), \dots, \xi(\ell_{m-1})).$$
 (5.114)

В результате получается слово, представляющее собой набор спинов, с n (+)спинами и m - n (-)-спинами, а  $\Xi$  является изоморфизмом. Как и следовало ожидать,  $\Xi$  эквивалентен изоморфизму (5.18), построенному в разделе 5.2.2.

#### 5.4.4 Действие группы кос на колчанных многообразиях

Предположим, что параметры  $z_a$  конформного блока модели ВЗВН расположены на цилиндре так, как изображено на схеме (5.17):

$$|z_0| < |z_1| < |z_2| < \ldots < |z_{m-1}|.$$
(5.115)

В этом случае параметры  $\tau_a$  (5.93) упорядочены по их действительным частям:

$$\operatorname{Re} \tau_0 < \operatorname{Re} \tau_1 < \operatorname{Re} \tau_2 < \ldots < \operatorname{Re} \tau_{m-1}.$$
(5.116)

Тогда дуальная модель  $S_{n,m-n}$  находится в циклической камере пространства параметров:

$$r_1 > 0, r_2 > 0, \dots, r_{m-1} > 0.$$
 (5.117)

Путь  $\wp_{a,a+1}$ , заданный элементом косы  $b_{a,a+1}$ , переставляет местами  $\tau_a$  и  $\tau_{a+1}$  и проходит вне циклической камеры к новой камере:

$$r_1 > 0, \ldots, r_a > 0, r_{a+1} < 0, r_{a+2} > 0, \ldots, r_{m-1} > 0.$$
 (5.118)

На локусе в пространстве параметров, разделяющем две камеры, колчаное многообразие может стать *сингулярным*. Физически мы можем наблюдать явление,
подобное обсуждаемому в разделе 1.3, когда описание ветви Хиггса не может имитировать эффективное поведение теории, и приходится переключиться на описание кулоновской ветви с помощью модели Ландау-Гинзбурга. Нам хотелось бы рассчитать категорированный параллельный перенос, индуцированный  $\wp_{a,a+1}$ , однако, работать в камере (5.118) оказывается неудобным. Не известно, существует ли хороший комбинаторный способ подсчета фиксированных точек в этой камере, как мы это делали с циклической камерой. К счастью, существует изоморфизм  $\varphi$  исходного колчанного многообразия пространства модулей  $S_{n,m-n}$  в камере (5.118) в другое многообразие  $S'_{n,m-n}$ , находящееся в циклической камере:



Действительно, обе теории двойственны одной и той же модели Ландау-Гинзбурга только с перетасованными индексами проколов  $z_a$ . При построении параллельного переноса, если он идет по пути, проходящему через сингулярное многообразие, невозможно действовать напрямую, приходится дуализировать теоретические наблюдаемые в модель Ландау-Гинзбурга, а затем отображать их обратно. На этом пути вместо того, чтобы напрямую дуализировать модель ЛГ к новой камере  $S_{n,m-n}$ , мы просто перетасовываем индексы проколов  $z_a$  и отображаем теорию в  $S'_{n,m-n}$ , изображенную на диаграмме (5.119). Эта идентификация дает точное отображение между параметрами моделей  $S_{n,m-n}$  и  $S'_{n,m-n}$ :

$$r'_{a} = r_{a} + r_{a+1}, \quad r'_{a+1} = -r_{a+1}, \quad r'_{a+2} = r_{a+2} + r_{a+1},$$
  
если  $b < a$  или  $b > a + 2, \quad r'_{b} = r_{b}.$  (5.120)

Для модели ЛГ, вообще говоря, отклонения эффективных ИК-полей  $\Sigma$  от вакуумных значений подавляются поведением эффективного суперпотенциала, это подавление гораздо мягче, чем квантовое подавление отклонений полей  $\sigma$  от вакуумных значений. Позаимствовав аналогию из физики конденсированного состояния, мы могли бы назвать кулоновскую фазу, в которую включено описание модели ЛГ, «*жсидкой*»<sup>4</sup>, переход от фазы ЛКСМ к фазе ЛГ мы могли бы назвать «плавлением», а обратный процесс – «затвердеванием». Используя эту терминологию, мы получаем живописание процесса параллельного переноса: при изменении параметров на пути через жидкую фазу кристаллическое состояние сначала плавится, а затем затвердевает, по существу, в новый кристалл.

Чтобы получить представление о том, как этот изоморфизм может работать на исходных многообразиях, рассмотрим простой случай  $S_{1,m-1}$ . Если мы ищем постоянный вакуум, доминирующая часть функции высоты, определяющей этот вакуум, не имеет производных:

$$\mathfrak{H}_{\text{red}} = -\int dx^1 \sum_{b} \text{Tr } \sigma_{\mathbb{I}}^{(b)} \left( |A_{b-1}|^2 + |B_b|^2 - |A_b|^2 - |B_{b-1}|^2 - \text{Re } t_b \right). \quad (5.121)$$

Очевидно, выражение (5.121) инвариантно относительно следующей замены координат:

$$t_{a-1} \to t_{a-1} + t_a, \qquad t_a \to -t_a, \qquad t_{a+1} \to t_{a+1} + t_a; \sigma^{(a-1)} \to \sigma^{(a-1)}, \quad \sigma^{(a)} \to \sigma^{(a-1)} + \sigma^{(a+1)} - \sigma^{(a)}, \quad \sigma^{(a+1)} \to \sigma^{(a+1)}; \qquad (5.122) A_a \to A_{a+1}, \quad B_a \to B_{a+1}, \quad A_{a+1} \to A_a, \quad B_{a+1} \to B_a.$$

Полный переход от  $\mathcal{S}_{n,m-n}$  к  $\mathcal{S}'_{n,m-n}$  обозначим как  $\Phi_{a,a+1}$ , как показано на диаграмме (5.119):

$$\Phi_{a,a+1} = \varphi \circ \beta_{\wp_{a,a,+1}}.$$
(5.123)

Морфизм  $\Phi_{a,a+1}$  также можно представить как преобразование Фурье-Мукаи с определенным ядром. Далее мы вычислим это ядро.

 $<sup>{}^{4}</sup>$ В качестве физической аналогии можно было бы позаимствовать сходство между конформными блоками, заданными дисковыми амплитуды в теории с суперпотенциалом  $\check{W}_{LG}$  и средними матричных моделей типа Пеннера (или  $\beta$ -ансамблей) [243—248]. В каноническом пределе больших N эффективные частицы – собственные значения матрицы – образуют вигнеровские *капли*, заключенные в потенциальных экстремумах.

# 5.4.5 Построение категорифицированного переплетающего дефекта: ядро Фурье-Мукаи

В этом подразделе мы изучим свойства параллельного переноса вдоль пути  $\wp_{a,a+1}$  в пространстве параметров и вычислим морфизм  $\Phi_{a,a+1}$  в виде преобразования Фурье-Мукаи на кокасательном расслоении к пространству флагов  $\mathcal{N}_{q,\lambda}^d$ , ассоциированное с теорией  $\mathcal{S}_{n,m-n}$ . На пути  $\wp_{a,a+1}$ , переводящем  $r_{a+1} > 0$ в  $r_{a+1} < 0$ , многообразие становится сингулярным в точке  $r_{a+1} = 0$ , однако, это может не влиять на эквивариантные фиксированные точки. Эквивариантная локализация может предотвратить попадание значений поля в сингулярность и коллапс эффективного описания. На самом деле ситуация зависит от расположения спинов в неподвижной точке и именно от двух спинов, находящихся в узлах a и a + 1.

Введем следующее обозначение (где мы использовали ортогональное разложение (5.113)):

$$E_{a,a+1} := F_{a+1}/F_{a-1} = \ell_a \oplus \ell_{a+1}.$$
(5.124)

Существует 4 возможные конфигурации спинов, разделенные на две группы, когда спины параллельны и антипараллельны. Жорданово разложение оператора z, ограниченного на  $E_{a,a+1}$ , для этих двух групп различно:

$$\begin{pmatrix} (-, -) \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (+, +) \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-, +) \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (+, -) \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$$

$$z \Big|_{E_{a,a+1}} = J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big| z \Big|_{E_{a,a+1}} = J_1 \oplus J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5.125)$$

Заметим, что в первом случае, когда спины сонаправлены, информацию о самом многооборазии флагов можно восстановить по информации о  $E_{a,a+1}$  и операторе z, можно построить обе линии  $\ell_a$  и  $\ell_{a+1}$  как ядро z и его ортогональное дополнение:

$$\ell_a = \operatorname{Ker} z \big|_{E_{a,a+1}}, \quad \ell_{a+1} = \left(\operatorname{Ker} z \big|_{E_{a,a+1}}\right)^{\perp}.$$

В последнем случае, когда спины противонаправлены, информация о вложении  $\ell_a \hookrightarrow E_{a,a+1}$  не сохраняется ни в  $E_{a,a+1}$ , ни в z, а многообразие становится син-

гулярным. Заметим, что все  $\ell_a$  являются прямыми, поэтому их можно рассматривать как элементы  $\mathbb{CP}^1$ . В физической теории все эти  $\mathbb{CP}^1$  имеют конечные объемы, контролируемые средними значениями киральных конденсатов, определяющих вложение линий в  $\mathbb{C}^m$  (5.104). Обозначим соответствующие объемы  $U_a$ , в конечном итоге они являются функциями  $\vec{U}(\vec{r})$  параметров устойчивости ФИ  $r_a$ .

При стремлении  $r_{a+1}$  к нулю вдоль  $\wp_{a,a+1}$  векторы объема в случаях сонаправленных и противоположных спинов ведут себя по-разному:

$$\vec{U}_{J_2} = (O(1), \dots, O(1), \dots, O(1)),$$
  
$$\vec{U}_{J_1 \oplus J_1} = (O(1), \dots, O(1), \dots, O(1)), \sim \sqrt{r_{a+1}}, O(1), \dots, O(1)).$$
  
(5.126)

В первом случае классический вакуум находится вдали от сингулярности на всем пути  $\wp_{a,a+1}$ , поэтому переход плавный и не требует склейки через разрешение Кулоновой ветви. В случае, когда спины противонаправлены, некоторые классические средние значения полей исчезают в точке  $r_{a+1} = 0$ , как и в случае конической сингулярности, обсуждаемой в разделе 1.3. В этом случае описание Хиггсовой ветви не отражает ИК-поведение, и нам приходится перейти к описанию Кулоновой ветви. Рассмотрим ситуацию противонаправленных спинов более подробно.

Если две конфигурации спинов отличаются перестановкой:

$$(-,+) \longrightarrow (+,-),$$

соответствующие диаграммы Юнга отличаются на одну ячейку цвета *a* + 1 на границе диаграммы Юнга, которая *nepexodum* из белой области в серую область (см. пример на рисунке 5.8(б)) для пары неподвижных точек, где *мигрирующая ячейка* выделена жирной рамкой:

Обозначим вектора, указывающие на мигрирующую ячейку из углов + и –, как  $\vec{\rho}_+$  и  $\vec{\rho}_-$ , соответственно. Согласно сопоставлению (5.109) эти вершины соответствуют операторам, обозначим эти операторы как  $y_+$  и  $y_-$ , соответственно. Это именно те операторы, чьи вакуумные средние стремятся к нулю по мере приближения к сингулярности в точке  $r_{a+1} = 0$ :

$$\langle |y_+|^2 \rangle \sim r_{a+1}, \quad \langle |y_-|^2 \rangle \sim r_{a+1}.$$
 (5.128)

Поскольку средние значения этих полей приближаются по порядку к  $\hbar$ , поля более не считаются классическими.

Отклонения калибровочных мультиплетов от классических значений  $\langle \sigma \rangle$ , расположенных в позициях ячеек диаграмм Юнга, подавляются массами полей, соответствующих касательному расслоению и генерируемых через механизм Хиггса средними значениями киральных полей. Когда поля  $y_{\pm}$  становятся квантовыми, масса Хиггса калибровочного поля, соответствующего мигрирующей ячейке, становится равной нулю. Соответствующий скаляр в этом калибровочном мультиплете обозначим как  $\sigma_0$ .

Эффективные массы или эквивариантные веса поле<br/>й $y_\pm$ имеют следующий вид:

$$\mu(y_{\pm}) = \sigma_0 - \tilde{\mu}_{\pm}, \tag{5.129}$$

где

$$\tilde{\mu}_{\pm} := \mu_{\pm} + \vec{\rho}_{\pm} \cdot \vec{\epsilon},$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$\vec{\rho}_- \cdot \vec{\epsilon} = x_1 \epsilon_1 + y_1 \epsilon_2, \quad \vec{\rho}_+ \cdot \vec{\epsilon} = x_2 \epsilon_1 + y_2 \epsilon_2.$$

Когда мигрирующая ячейка находится в белой области диаграммы на рис. 5.8(б)  $\sigma_0 = \tilde{\mu}_-$ , так что масса поля  $y_-$  равна нулю согласно (5.129), поэтому  $y_-$  конденсируется и образует эквивариантную неподвижную точку (-, +).

Касательное пространство к колчанному многообразию порождает другие квантовые поля, которые мы делим на две группы. Первая группа из двух полей

имеет массы, зависящие от  $\sigma_0$ , мы называем их  $z_+$  и  $z_-$ :

$$\mu(z_{\pm}) = \epsilon + \tilde{\mu}_{\pm} - \sigma_0. \tag{5.130}$$

Также существует группа касательных полей с массами, не зависящими от  $\sigma_0$ , их 2(n-1):

$$u_1, \ldots, u_{2(n-1)}.$$
 (5.131)

Условия **D**-члена и **F**-члена для этих полей имеют следующий вид:

$$|y_{+}|^{2} + |y_{-}|^{2} - |z_{+}|^{2} - |z_{-}|^{2} = r_{a+1},$$
  

$$y_{+}z_{+} - y_{-}z_{-} = 0.$$
(5.132)

Анализируя спектры поля и условия на них, мы приходим к выводу, что вблизи сингулярности  $r_{a+1} \to 0$  наша теория  $S_{n,m-n}$  течет под действием ренормгруппы в простую теорию  $S_{1,1}$  и набор 2(n-1) свободных нейтральных киральных скаляров:

$$\mathcal{S}_{n,m-n} \xrightarrow{r_{a+1} \to 0} \qquad \underbrace{1 \xrightarrow{y_+ \sigma_0 \quad z_-}}_{z_+} \underbrace{1} \oplus \operatorname{CBo6.} (u_1, \dots, u_{2(n-1)}) \qquad .$$

$$(5.133)$$

Спонтанно нарушенная начальная калибровочная симметрия восстанавливается в ИК до U(1), эффективные фононы с массами Хиггса

$$m_{\mathrm{Higgs}} \sim \langle |y_+|^2 + |y_-|^2 \rangle$$

становятся безмассовыми и разрушают кристаллические связи, фиксирующие положение мигрирующей ячейки  $\sigma_0$  в решетке. Однако, как мы видим, нет необходимости плавить весь кристалл, достаточно дислоцировать одну мигрирующую ячейку.

Следует отметить, что количество реальных касательных полей соответствует размерности колчанного многообразия:

$$\underbrace{2}_{y_{\pm}} + \underbrace{2}_{z_{\pm}} + \underbrace{2(n-1)}_{u_{a}} - (\mathbf{D}-член) - (\mathbf{F}-член) = 2n = \dim S_{n,m-n},$$
(5.134)

согласно (5.88).

Эффективная теория  $S_{1,1}$  описывает флип в конической сингулярности, который мы обсуждали в разделе 1.3. Путь  $\wp_{a,a+1}$ , переводящий  $r_{a+1}$  от положительных значений к отрицательным, совпадает с аналитическим продолжением построенной нами категорификации гипергеометрических функций в терминах преобразования Фурье-Мукаи. Ядро преобразования Фурье-Мукаи определялось посредством носителя дельта-функции в волновой функции состояния БПЗ (1.150). Проще говоря, нам нужно было идентифицировать все нейтральные мезоны на концах отрезка границы [0, L]. В этом случае помимо обычных нейтральных мезонов конической сингулярности появляются новые мезоны  $u_1, \ldots, u_{2(n-1)}$ , нейтральные по отношению к U(1) эффективной  $S_{1,1}$ . Таким образом, эффективные волновые функции состояний БПЗ при наличии границы, порождаемой параллельным переносом вдоль  $\wp_{a,a+1}$ , имеют следующий множитель (подобно дельта-функциональному множителю в (1.150)):

$$\Psi_{\text{BPS}} \sim \delta (y_{+}z_{+} - (y_{+}z_{+})') \,\delta (y_{+}z_{-} - (y_{+}z_{-})') \times \\ \times \,\delta (y_{-}z_{+} - (y_{-}z_{+})') \,\delta (y_{-}z_{-} - (y_{-}z_{-})') \times \\ \times \,\delta (u_{1} - u'_{1}) \dots \,\delta (u_{2(n-1)} - u'_{2(n-1)}),$$
(5.135)

где переменные без штриха соответствуют координатам начального пространства  $S_{n,m-m}$  в  $x^1 = 0$ , а переменные со штрихом соответствуют координатам конечного  $S'_{n,m-n}$  в  $x^1 = L$  на диаграмме (5.119).

Чтобы дать геометрическую интерпретацию этого преобразования, хотелось бы отметить следующее ортогональное разложение по подпространствам:

$$\tilde{V}_0 = \ell_0 \oplus \ldots \oplus \ell_{a-1} \oplus E_{a,a+1} \oplus \ell_{a+2} \oplus \ldots \oplus \ell_{m-1}.$$
(5.136)

Оператор z является функцией только нейтральных мезонов. Более того, знания этого разложения достаточно, чтобы определить значения всех нейтральных мезонов. Информация о значениях  $y_{\pm}$  остается неизвестной, поскольку они управляют вложением  $\ell_a \hookrightarrow E_{a,a+1}$ , которое невозможно восстановить по представленным данным. По этим данным мы можем восстановить все гиперплоскости  $F_b$ , кроме  $F_{a+1}$ :

$$F_{b} = \bigoplus_{k=b}^{m-1} \ell_{k}, \quad \text{если } b \ge a+2,$$

$$F_{b} = \left(\bigoplus_{k=b}^{a-1} \ell_{k}\right) \oplus E_{a,a+1} \oplus \left(\bigoplus_{j=a+2}^{m-1} \ell_{j}\right), \quad \text{если } b \le a.$$
(5.137)

Подводя итог, мы приходим к выводу, что дельта-функция в (5.135) имеет своим носителем следующее многообразие:

$$\Upsilon_{a,a+1} := \{ (F_*, F'_*) : F_b = F'_b, \text{ если } b \neq a+1 \}.$$
(5.138)

В результате функтор параллельного переноса  $\Phi_{a,a+1}$  может быть построен как преобразование Фурье-Мукаи относительно ядра  $\mathcal{O}_{\Upsilon_{a,a+1}}$ , заданного структурным пучком  $\Upsilon_{a,a+1}$ .

Функторы  $\Phi_{a,a+1}$  согласуются с функторами пересечений, построенными в [238, раздел 4.2.2] для SL(2) и обобщенными в [239; 249] – наше многообразие  $\Upsilon_{i,i+1}$  соответствует  $Z_n^i$  в обозначениях [238]. Также следует отметить, что мы построили только прямые функторы кос (пересечения #1 и #3 в [238]), которые не твистованы линейными расслоениями типа  $F_a/F_{a-1}$ , которые будут появляются для обратных функторов (пересечения #2 и #4 в [238]). Эти дополнительные твисты линейными расслоениями будут зафиксированы сдвигами эквивариантной градуировки.

В [238] было показано, что  $\Phi_{a,a+1}$  удовлетворяет отношениям (5.11), тогда как в нашей интерпретации функторов  $\Phi_{a,a+1}$  как интерфейсов в группе кос соотношения (5.11) естественным образом следуют из того факта, что категорифицированный параллельный перенос локально плоский, а транспортные пути в отношениях (5.11) гомотопны.

### 5.4.6 Замечания о декатегорификации

В заключение этого раздела дадим несколько комментариев по поводу декатегорификации функторов  $\Phi_{a,a+1}$ . В [238] показано, что К-теоретическая

редукция функтора  $\Phi_{a,a+1}$  дает обычный элемент группы кос в модулярной тензорной категории  $\mathcal{U}_{\mathfrak{q}}(sl_2)$ , построенный из оператора перестановки и  $U_{\mathfrak{q}}(sl_2)$  R-матрицы в представлении  $\Box \otimes \Box$ :

$$R = \mathfrak{q}^{\frac{h\otimes h}{4}} \left( 1 + (\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^{-1}) \ e \otimes f \right) \mathfrak{q}^{\frac{h\otimes h}{4}}, \tag{5.139}$$

где e, f и h – стандартные генераторы Шевалле  $U_{\mathfrak{q}}(sl_2)$  [250]. Параметр квантовой группы определяется эквивариантным весом оператора z:

$$\mathbf{q} = e^{\pi i (\mu(A_i) + \mu(B_i))} = e^{\pi i \epsilon}.$$
(5.140)

Плоское сечение связностей Книжника-Замолодчикова (5.19) отвечаетј представлению свободных полей для конформных блоков в двумерной конформной теории поля Лиувилля с константой связи  $b = \sqrt{\epsilon}$  [251]. Соответствующий оператор параллельного переноса  $U_{i,i+1}$  также отвечает R-матрице в  $\mathcal{U}_{q}(sl_2)$  [252] с параметром, определяемым соотношением (5.140).

Мы заключаем, что функтор  $\Phi_{i,i+1}$  категорифицирует параллельный перенос для оператора Берри  $U_{i,i+1}$ :

$$\Phi_{i,i+1} \xrightarrow{\text{dekateropudukalus}} U_{i,i+1}$$

Иной метод получения некомпактной  $\mathcal{R}$ -матрицы, аналогичный декатегорификации методов, раскрытых в данной главе, подробно обсуждался в [51; 174], где было показано, как можно построить  $\mathcal{R}$ -матрицу для *n*-нитевой косы посредством монодромии Концевича-Сойбельмана. Эта монодромия дуальна монодромии, возникающей при параллельном переносе на пространстве модулей теорий класса S, что, в свою очередь, позволяет разложить ее в терминах характеров Фоковских модулей для состояний БПЗ дионов, аналогичных построенным в разделе 3.2.3. Процедура в основном состоит из нескольких шагов.

1. Прежде всего необходимо построить спектральную кривую:

$$\lambda^{2} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{c_{2}(R_{i})}{(z-x_{i})^{2}} + \frac{u_{i}}{z-x_{i}} \right) .$$
 (5.141)

Между модулями  $u_i$  существуют соотношения, поэтому для *n*-нитевой косы существует n-3 свободных модулей. Тем не менее, мы увеличиваем количество модулей. Это не должно повлиять на задачу, со временем мы собираемся их интегрировать, единственная информация, которую мы используем, это то, что вычеты фиксированы на начальном этапе:

$$\oint_{x_i} \lambda = \pm \sqrt{c_2(R_i)} \,. \tag{5.142}$$

В дальнейшем мы также не отслеживаем эту информацию по мере эволюции состояния вдоль косы. Итак, практически мы начинаем со следующей спектральной кривой:

$$\lambda^{2} = \frac{\prod_{j=1}^{2n+1} (z - p_{j})}{\prod_{i=1}^{n} (z - x_{i})^{2}}.$$
(5.143)

В конечном итоге мы увеличиваем количество модулей  $p_i$  на единицу, чтобы кривая выглядела так:

$$\lambda^{2} = \frac{\prod_{j=1}^{2n+2} (z - p_{j})}{\prod_{i=1}^{n} (z - x_{i})^{2}}.$$
(5.144)

Соответствующие преобразования триангуляций под действием простого переплетения изображены на рис. 5.9 для двух нитей. Жирными линиями отмечены видоизмененные ребра триангуляций, а жирными серыми линиями – начальные ребра.



Рисунок 5.9 – Эволюция триангуляций.

2. Рассматривается расширенное пространство модулей  $\mathcal{M}$  с координатами (x, u, b).

- Вводится переход триангуляции, соответствующий пересечению стены маргинальной стабильности, т.е. ∃γ ∈ H<sub>1</sub>(Σ), Im b<sup>-1</sup>λ|<sub>γ</sub> = 0. Этот флип может быть явно построен
  - а) в представлении Шредингера (фундаментальное действие):

$$\hat{\kappa}_{\gamma} \sim (\hat{w}_{\gamma}|q)_{\infty};$$

б) в представлении Гейзенберга (сопряженное действие):

$$\hat{K}_{\gamma}O = \hat{\kappa}_{\gamma}^{-1}O\hat{\kappa}_{\gamma}.$$

4. Инварианты Концевича-Сойбельмана строятся из условия плоского переноса (аналогично условию (3.70))

$$\prod_{\substack{\tau=1 \text{ отгля}\\ n \in \tau, n \\ n \in \tau, n}}^{\leftarrow} \hat{K}_{\gamma} = \hat{\mathbb{1}}.$$
(5.145)

Разрежем этот цикл, тогда, например,  $\mathbf{S} = \hat{K}_{\gamma_2}\hat{K}_{\gamma_1} = \hat{K}_{\gamma_1}\hat{K}_{\gamma_1+\gamma_2}\hat{K}_{\gamma_2}$ , поэтому **S** является инвариантом при переходах через стенки маргинальной стабильности.

- 5. В рамках этой концепции узлы можно описать как монодромии Концевича-Сойбельмана. Фактически, узел можно описать как некоторую монодромию конформных блоков [10] таким образом, что рассматривается исходный конформный блок, точки которого перемещаются путем перестановок с нетривиальной монодромией, так что в конечном итоге получается тот же конформный блок (с возможными перестановками точек). Точка в пространстве модулей  $\mathcal{M}$  определяется конформным блоком. Таким образом, узлу можно сопоставить некоторые элементы из  $\pi_1(\mathcal{M})$ .
- 6. Далее строим элементарный строительный блок для простого переворота

$$R \sim (\hat{w}_{\gamma_1} | q^2)_{\infty} (\hat{w}_{\gamma_2} | q^2)_{\infty} (\hat{w}_{\gamma_3} | q^2)_{\infty} (\hat{w}_{\gamma_4} | q^2)_{\infty} \in U(Heis).$$
(5.146)

7. Весь элемент *R*-матрицы строится простой склейкой

$$\mathcal{R} = \prod_{i} R_i \in \pi_1(\mathcal{M}, U(Heis)).$$
(5.147)

*R*-матрица (5.146) совпадает с *R*-матрицей, полученной Л.Фаддеевым [253], P.Кашаевым [254] и позже К.Хиками [255—257]. Она зависит от двух дополнительных свободных констант c', c'':

$$\langle x_1, x_2 | R^{(H)} | y_1, y_2 \rangle = \frac{\Phi_b \left( x_1 - y_1 + \frac{iQ}{2} \right) \Phi_b \left( y_2 - x_2 + \frac{iQ}{2} \right)}{\Phi_b \left( x_1 - x_2 \right) \Phi_b \left( y_2 - y_1 \right)} \times$$

$$\times e^{2\pi i \left( \frac{iQ}{2} (y_1 - y_2 - x_1 + x_2) + c'(y_2 - x_1) + c''(-y_1 + x_2) + \frac{1}{12} (1 + Q^2) - \frac{1}{2} (c' + c'')^2 \right)}.$$

$$(5.148)$$

При выборе интегральных представлений спина 1/2 на входящих и выходящих ногах  $\mathcal{R}$ -матрицы ее выражение сходится к (5.139).

# 5.5 Замечания о категорификации инвариантов узлов для старших групп

Здесь мы используем модель Ландау-Гинзбурга в пространстве монопольных модулей [28; 90], однако естественно рассматривать магнитные монополи в SU(n)-теории Янга-Миллса-Хиггса на  $\mathbb{R}^3$ . В этом случае типы монополей обозначаются положительными корнями  $\mathfrak{su}_n$ . Пространства монопольных модулей градуированы n - 1 неотрицательными числами монополей  $m_k$ , которые мы собираем в вектор  $\vec{m}$ .

Суперпотенциал того, что можно было бы назвать аналогом наивной модели монополя или квазиклассической моделью монополя, когда центры монополя разделены большими пространственными промежутками, обобщающий выражение 5.20, приведен, например, в [258]. Здесь мы используем низкоэнергетическое эффективное описание с  $\mathfrak{su}_n$  суперпотенциалом Янга-Янга, которое в терминах интегралов (5.22) дает формулировку в терминах свободных полей для SU(n) модели ВЗВН с N проколами соответственно [205]:

$$W = \sum_{a=1}^{N} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{m_i} k_{a,i} \log(z_a - w_{i,s}) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{1 \le r \ne s \le m_i} \log(w_{i,s} - w_{i,r}) + \sum_{1 \le i \ne j \le n-1} \sum_{r=1}^{m_i} \sum_{s=1}^{m_j} \log(w_{i,r} - w_{j,s}) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{m_i} c_i w_{i,s}.$$
(5.149)

Здесь  $k_{i,a}$  – вектор старшего веса представления  $R_a$ , отвечающего проколу  $z_a$ .

# 5.5.1 Классификация вакуумов

Если проколы разделены большими промежутками  $|c_i(z_a - z_b)| \gg 1$ , мы снова имеем разложение вакуумного решения:

$$\mathbb{V}(\{z_a\}; \{\vec{k}_a\}; \vec{m}) = \bigoplus_{\substack{\sum\\ a=1}^{N} \vec{\mu}_a = \vec{m}} \mathbb{V}(z_1; \vec{k}_1; \vec{\mu}_1) \times \ldots \times \mathbb{V}(z_n; \vec{k}_n; \vec{\mu}_n).$$
(5.150)

Достаточно изучить лишь классификацию вакуумов в присутствии одного прокола:

$$\mathbb{V}(z;\vec{k};\vec{m}) \cong v_{\vec{k}-\sum_{\vec{\alpha}_i \in \Delta^+} m_i \vec{\alpha}_i}, \qquad (5.151)$$

где  $v_{\lambda}$  – инвариантное подпространство веса  $\lambda$ . В общем виде имеем:

$$\bigoplus_{\vec{m}} \mathbb{V}(z; \vec{k}; \vec{m}) \cong V_{\vec{k}}, \qquad (5.152)$$

где  $V_{\lambda}$  – неприводимый  $\mathfrak{su}_n$ -модуль представления старшего веса  $\lambda$ . Это утверждение естественным образом следует из связи между базисом кирального оператора и стабильным базисом (см. [182; 183]).

Мы снова ограничимся зацеплениями, раскрашенными фундаментальным представлением. Однако и в этом случае нам потребуются как фундаментальные представления  $\Box$ , так и анти-фундаментальные  $\bar{\Box}$  представления, которые не изоморфны друг другу в случае  $\mathfrak{su}_n$ ,  $n \geq 3$ . Оба представления являются *n*-мерными и со старшими весами  $\vec{k}_{\Box} = (1, 0, 0, ...)$  и  $\vec{k}_{\bar{\Box}} = (..., 0, 0, 1)$ . Вектора отвечают следующим вакуумным решениям:

$$\Box: \quad \mathbb{V}(z; \Box; (0, 0, 0, \ldots)), \quad \mathbb{V}(z; \Box; (1, 0, 0, \ldots)), \\ \qquad \mathbb{V}(z; \Box; (1, 1, 0, \ldots)), \ldots \\ \bar{\Box}: \quad \ldots, \quad \mathbb{V}(z; \bar{\Box}; (\ldots, 0, 1, 1)), \\ \qquad \mathbb{V}(z; \bar{\Box}; (\ldots, 0, 0, 1)), \quad \mathbb{V}(z; \bar{\Box}; (\ldots, 0, 0, 0)) .$$
(5.153)

Мы будем обозначать их, встречающиеся в этом порядке, как i и  $\bar{i}$  соответственно. Определить, что это за решения, несложно, особенно если предположить некоторый порядок, скажем, все  $c_i$  действительны и удовлетворяют  $c_1 \gg c_2 \gg \ldots \gg c_{n-1}$ :

$$j: \quad w_{k,1} = -\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{s=i}^{j-1} c_s\right)^{-1} \sim -c_k^{-1},$$

$$k = 1, \dots, j-1;$$

$$\bar{j}: \quad w_{k,1} = -\sum_{i=k}^{n-1} \left(\sum_{s=n-j+1}^{i} c_s\right)^{-1} \sim -(n-k)c_{n-j+1}^{-1},$$

$$k = n-j+1, \dots, n-1.$$
(5.154)

# 5.5.2 Переплетающие интерфейсы

Будем рассматривать следующие типы переплетающих интерфейсов (ось эволюции интерфейса  $x^1$  на всех диаграммах направлена вверх):



Соответствующая нить помечается фундаментальным представлением, если стрелка на нити течет в том же направлении, что и адиабатический параметр интерфейса  $x^1$ , и антифундаментальным в противном случае. Очевидно, что существует еще шесть возможных ориентаций, однако мы не будем обсуждать их здесь, поскольку они связаны с упомянутыми двумя посредством сверток с замыкающими интерфейсами:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}$$
.

Легко заметить, что если обе нити отмечены фундаментальным представлением, то существует очень простая классификация допустимых вакуумных решений:

$$\mathbb{V}\left(\{z_a, z_b\}; \{\Box, \Box\}; (\underbrace{2, \ldots, 2}_{i \text{ pas}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{j-i \text{ pas}}, 0, \ldots, 0)\right) = (i \otimes j) \oplus (j \otimes i),$$

для i < j; (5.155)

$$\mathbb{V}\left(\{z_a, z_b\}; \{\Box, \Box\}; (\underbrace{2, \ldots, 2}_{i \text{ pas}}, 0, \ldots, 0)\right) = i \otimes i.$$

Следовательно, спектральная кривая разлагается на полиномы второго и первого порядка в соответствии с двумя возможными случаями, описанными выше:

$$\prod_{i} \left( p - \frac{t_i}{x} \right) \prod_{j>i} \left( p^2 - \left( \frac{q_{ij}}{x} + \frac{s_{ij}}{x^2} \right) p + \tilde{c}_{ij} \right) = 0, \quad \lambda = p \ dx \,. \tag{5.156}$$

Какие на самом деле числа  $t_i$ ,  $q_{ij}$  и  $s_{ij}$  не так важно в данном случае. Релевантной информацией об этой кривой являются дискриминанты полиномов для пар  $i \otimes j$ : они имеют вид  $D_{ij} = x^{-2} + \tilde{c}_{ij}^2$ , где эффективный параметр  $\tilde{c}_{ij} = \vec{c} (\vec{m}_i - \vec{m}_j)$ . Поэтому поведение  $i \otimes j$  вакуума аналогично поведению +- вакуума в случае  $\mathfrak{su}_2$ , рассмотренного в разделе 5.3.5, и аналогично для  $\vec{i} \otimes \vec{j}$  вакуума. Поэтому без повторного вывода мы просто принимаем результаты раздела 5.3.5 и строим следующие выражения для интерфейсов:

$$\mathbf{M}\left(\swarrow^{\mathbf{X}}\right) = \bigoplus_{i,j} q^{-\delta_{ij}} \bigvee_{j=i}^{i} \bigoplus_{\substack{i,j \\ j>i}} qt^{-1} \bigvee_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{j} \bigoplus_{\substack{i,j \\ j>i}} q^{-1} \bigvee_{\substack{j=1 \\ j>i}}^{j} \prod_{\substack{i,j \\ j>i}}^{j} \prod_{\substack{i$$

Здесь солитоны обозначаются, как обходы, аналогичные изображенным на рис. 5.6. Листы 1 и 2 соответствуют вакуумам  $j \otimes i$  и  $i \otimes j$ .

# 5.5.3 Замыкающие интерфейсы

Естественным источником поиска интерфейсов слияния/разделения в этом случае снова является изотипическое разложение. Тензорное произведение представления и его сопряженного всегда содержит тривиальное представление:

$$R\otimes \bar{R} = \varnothing \oplus \dots$$

Тривиальное представление в этом случае рассматривается как волновая функция в теории Черна-Саймонса на поверхности среза постоянного  $x^1$  без какихлибо проколов. Коэффициенты Клебша-Гордана между R,  $\bar{R}$  и  $\varnothing$  дают выражения для образа интерфейсов в группе Гротендика. Как мы видели ранее, изотипическая декомпозиция может быть использована при построении половинных  $\mathcal{R}$ -интерфейсов, поэтому естественно начать поиск структуры интерфейсов слияния/разделения, рассматривая  $\mathcal{R}$ -интерфейсы для вакуумов  $\Box \otimes \overline{\Box}$ и  $\overline{\Box} \otimes \Box$ .



Рисунок 5.10 – Спектральные кривые для двух проколов в случае  $\mathfrak{su}_n$ ,  $\Box \otimes \overline{\Box}$ .

Рассмотрим вакуумное решение с нулевым весом  $\vec{k}_{\Box} + \vec{k}_{\bar{\Box}} - \sum_{\vec{\alpha}_i \in \Delta^+} m_i \vec{\alpha}_i = 0$ , отвечающее срезу в теории Черна-Саймонса без проколов:

$$\mathbb{V}\left(\{z_a, z_b\}; \vec{k}_{\Box} + \vec{k}_{\bar{\Box}}; (1, \dots, 1)\right) = \bigoplus_{i=1}^n (i \otimes \bar{i}).$$
 (5.158)

Однако, к сожалению, это вакуумное множество не расщепляется, и результирующая спектральная кривая имеет довольно сложную структуру. Например, для **su**<sub>3</sub> находим:

$$p^{3} + \left(-2c_{1} - c_{2} - \frac{3}{x}\right)p^{2} + \left(\frac{4c_{1}}{x} + \frac{2c_{2}}{x} + c_{1}^{2} + c_{2}c_{1}\right)p + \left(-\frac{c_{1}^{2}}{x} - \frac{c_{2}c_{1}}{x}\right) = 0, \quad \lambda = p \ dx \ .$$
(5.159)

Типовую структуру кривой  $\mathfrak{su}_n$  для этого вакуума мы изображаем на рис. 5.10. Мы обозначили вакуумы соответственно  $j = (j \otimes \overline{j})$  и  $\overline{j} = (\overline{j} \otimes j)$  в точке  $x^1 \to +i\infty$ . Мы строим интерфейсы слияния/разделения аналогично [90, раздел 4.3] как полуповороты. Однако проще определить разные интерфейсы в разном порядке масштабирования:  $c_1 \gg c_2 \gg \ldots \gg c_{n-1}$  или  $c_1 \ll c_2 \ll \ldots \ll c_{n-1}$ . Поэтому мы используем оба варианта, подразумевая, что можно гомотопически изменить порядок, или предполагать, что параметры  $c_i$  слегка зависят от  $x^1$ . В терминах диаграмм получаем:

$$\mathbf{M}\left(\checkmark\checkmark\right) = \prod_{n=\bar{n}}^{n=\bar{n}} \oplus \ldots \oplus (tq^{-1})^{n-1} \xrightarrow[n=\bar{n}]{\underline{1} \quad \overline{1}}, \qquad (5.160a)$$

$$\mathbf{M}\left(\bigwedge\right) = \prod_{\bar{n}=n}^{\bar{n}=n} \oplus \ldots \oplus (qt^{-1})^{n-1} \xrightarrow[\bar{1}=1]{\bar{n}=1}, \qquad (5.160b)$$

$$\mathbf{M}\left(\checkmark \right) = \underset{\overline{1} \quad 1}{\bigsqcup_{\overline{1} \quad 1}} \oplus \ldots \oplus (tq^{-1})^{n-1} \underset{\overline{1} \quad 1}{\bigsqcup_{\overline{1} \quad 1}}, \qquad (5.160c)$$

Толстая горизонтальная линия на всех этих диаграммах понимается как соответствующее граничное условие D-браны. Мы обозначили несколько солитонов пунктирной горизонтальной линией, каждый такой солитон представляет собой миграцию одного поля  $w_i$ . Это неверная интерпретация, поскольку в интерфейсах «шапка» и «чашка» против часовой стрелки все поля  $w_i$  мигрируют одновременно, они появляются от пересечений с линиями-потомками (j, n) и  $(\bar{j}, \bar{n})$ . Однако для простоты мы изображаем и предполагаем, что эти солитоны представляют собой комбинацию последовательных скачков солитонов, как в интерфейсах чашка/шапка, отвечающих повороту по часовой стрелке. Это одновременное/последовательное представление переключается на противоположное для ориентации против часовой стрелки/по часовой стрелке, если, например, выбирается противоположный знак  $\zeta$ .

#### 5.5.4 Инвариант зацепления

Имея выражения для всех  $\mathcal{R}$ -интерфейсов и замыкающих интерфейсов, можно определить соответствующий комплекс для зацепления L, просто склеив все элементарные интерфейсы вместе. Дифференциал задается **Q**-действием (5.43). Полученные  $\mathfrak{su}_n$  когомологии Ландау-Гинзбурга для зацепления L определяют состояния БПЗ в присутствии дефекта:

$$\mathfrak{su}_n \mathscr{H}_{\mathrm{BPS}}(L) := H^* \left( \mathbf{M}(L), \mathbf{Q} \right) .$$
(5.161)

Мы ожидаем, что это Гильбертово пространство БПЗ будет инвариантом зацепления L. Чтобы проверить это, необходимо проверить инвариантность этой конструкции при трех движениях Редемейстера и двух дополнительных условиях, обеспечивающих инвариантность при различных вариантах направления эволюции интерфейса по оси  $x^1$ . Инвариантность относительно всех этих движений легко проверить по принципу [90, раздел 6].

Здесь мы не будем вдаваться в детальную проверку всех движений Редемейстера, ограничимся в качестве примера только движением І. Движение Редемейстера I подразумевает изоморфизм комплексов, отвечающих зацеплениям, отличающимся петлей, по модулю полного сдвига на **P**- и **F**-степени из-за аномалии обрамления:

$$\bigvee = q^{\#}t^{\#} \uparrow$$

Рассмотрим комплекс, появляющийся в левой части этого уравнения:



Члены в скобках сокращаются из-за соответствующих ноль-сетей, которые

схематически можно изобразить так:

$$\begin{array}{c} & & & & & & \\ & & & & \\ & & & & & \\ & &$$

А остальные члены в (5.162) представляют собой ровно один тривиальный интерфейс. Это легко увидеть в явной конструкции обхода или с использованием аргумента «имплантат», как в работе [90].

Фактический расчет инвариантов зацеплений в этой схеме, тем не менее, довольно сложен. Как видно, результирующие когомологии изоморфны гомологиям Хованова-Розанского в этом примере [259], а полиномы Пуанкаре связаны простой заменой переменных:

$$P_{\rm KR}(q,t) = P_{\rm LG}(qt,t).$$
 (5.164)

## Заключение

В данной диссертационной работе были получены следующие результаты:

- 1. Вычислены волновые функции в двумерных моделях с N = (2,2) суперсимметрией в пределе низких энергий и в присутствии дефектов типа «интерфейс», интерполирующих между различными точками в пространстве параметров теории. Показано, что в данных семействах моделей классификация калибровочно неэквивалентных волновых функций состояний, сохраняющих часть суперсимметрии теории (так называемых состояний Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (БПЗ)), отвечает математической классификации в терминах объектов категорий. Показано, что Тдуальность, спущенная на уровень волновых функций, приводит к гомологической зеркальной симметрии, связывающей категории Фукаи-Сайдела и (производные) категории когерентных пучков.
- 2. Предложена новая модель, где операторы дефектов отвечают элементам группы кос. Классификация волновых функций таких сплетающих дефектов отвечает классификации объектов в категориальной деформации Хованова-Лауды-Рокира для алгебры Ли sl<sub>2</sub>. С помощью зеркальной симметрии, соответствующей также спектральной дуальности в данном контексте, установлена связь данной модели, реализованной, как сигма-модель на многообразии флагов (или колчанном многообразии в более общем случае), с иными высокоэнергетическими реализациями в терминах суперсимметричных моделей Ландау-Гинзбурга.
- Предложена новая модель из семейства моделей Ландау-Гинзбурга, где операторы дефектов отвчечают зацеплениям нитей в трехмерном пространстве. Показано, что из квантовых чисел состояний (фермионного числа и

центрального заряда супералгебры) в данной модели в присутствии дефекта зацепления может быть восстановлен категориальный инвариант зацепления, предложенный М.Ховановым и обобщающий значение вакуумного среднего петель Вильсона в трехмерной теории Черна-Саймонса для калибровочной группы SU(2). Также в работе предложены методы обобщения вычислений на случаи калибровочной группы SU(n),  $n \geq 3$ .

- 4. Описаны молекуло-подобные низкоэнергетические состояния в эффективной модели D-бран в теории струн типа IIA, скомпактифицированной на многообразие Калаби-Яу. Непертурбативно вычислены элементы матрицы неупругого рассеяния таких состояний при нулевом импульсе. Показано, что эти элементы находятся во взаимно-однозначном соответствии со структурными константами когомологической алгебры Холла, введенной М.Концевичем и Я.Сойбельманом для умножения эквивариантных когомологий на многообразиях Калаби-Яу.
- 5. Предложен новый способ работы с сингулярными пространствами модулей представлений колчанов. Для этого в эффективных моделях D-бран на торических многообразиях Калаби-Яу, классифицируемых колчанами, вычислены квази-классические волновые функции основных суперсимметричных состояний до второго порядка в теории возмущений в дуальной «кристаллической» фазе. Показано, что данные состояния подвержены действию операторов дефектов, добавляющих и убавляющих элементарные D-браны. Вместе эта конструкция состояний и операторов, действующих на них, соответствует «кристаллическим» представлениям алгебр колчанных янгианов, которые обобщают обычные алгебры аффинных янгианов, построенных по аффинным диаграммам Дынкина для супер-алгебр Ли. Описана связь когомологических алгебр Холла с алгебрами колчанных янгианов в терминах дуальности Кулона-Хиггса для физической модели D-бран.
- 6. В работе рассмотрены компактификации эффективных теорий D-бран на торических многообразиях Калаби-Яу (четырехмерные  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричные теории Янга-Миллса) на различные дополнительные простран-

ства. Доказано, что таким образом можно получить обобщения колчанных янгианов, как алгебр рассеяния состояний БПЗ, на торические и эллиптические алгебры, отвечающие обобщению умножения Концевича-Сойбельмана на элементы К-теории и эллиптических когомологий пространств модулей преставлений колчанов. Предложены новые аргументы в пользу гипотезы, что компактификация на римановы поверхности старшего рода отвечает обобщенным когомологическим теориям Эйленберга-Стинрода.

- 7. Вычислены суперсимметрические индексы дефектных операторов типа «интерфейс» в эффективных теориях D-бран на торических многообразиях Калаби-Яу. Соответствующие индексы отвечают матричным элементам R-матриц для алгебр колчанных янгианов с дополнительной структурой биалгебры Хопфа и удовлетворяют уравнениям Янга-Бакстера. Показано, что требования квантово-полевой согласованности соответствующей теории поля приводит к сужению разрешенного класса колчанных моделей на некиральные колчаны.
- 8. Показано, что методы работы с трехмерными многообразиями Калаби-Яу не могут быть легко обобщены на четырехмерные многообразия, а требуют нового развития. Предложено новое обобщенное определение зарядовой функции – рациональной функции, чья полюсная структура однозначно определяется волновой функцией состояния БПЗ в «кристаллической» фазе. Показано, что в отличие от трехмерного случая в четырехмерном случае зарядовая функция состоит из вкладов как отдельных узлов «кристалла», так и целых узловых кластеров.

### Благодарности

Я выражаю благодарность своим соавторам В.Ли, А.Д.Миронову, А.Ю.Морозову, Н.Целоусову, М.Ямамзаки. Также я выражаю признательность М.Аганаджич, А.С.Анохиной, за полезные обсуждения И замечания С.Б.Артамонову, Э.Т.Ахмедову, Л.В.Бишлер, А.И.Бондалу, Т.Ватари, Д.В.Васильеву, Е.А.Горскому, Т.Димофте, П.И.Дунину-Барковскому, Г.Жао, М.М.Капранову, Е.А.Зенкевичу, А.В.Зотову, Дж.Клингемпилю, З.Жу, Е.С.Ланиной, А.В.Литвинову, Н.М.Колганову, П.Коротееву, П.Лонги, Д.Г.Мельникову, С.А.Миронову, А.В.Маршакову, В.В.Мишнякову, А.А.Морозову, Γ.B.Mypy, Д.Мутиа, Х.Накаджиме, А.Ю.Окунькову, М.А.Ольшанецкому, И.В.Полюбину, А.В.Пополитову, Б.Пьолину, А.В.Слепцову, Я.С.Сойбельману, Л.Суханову, С.М.Харчеву, А.В.Смирнову, К.Хори. С.М.Хорошкину, Ш.Р.Шакирову, В.Шенде, Я.Янг.

Я признателен Е.С.Сусловой за помощь и поддержку, оказанную в процессе подготовки этой работы.

Я выражаю свою глубочайшую благодарность своей семье за их неизменную поддержку во всех моих начинаниях.

### Список литературы

- 1. A Panorama Of Physical Mathematics c. 2022 / I. Bah [и др.]. 2022. нояб. arXiv: 2211.04467 [hep-th].
- Chun S., Gukov S., Roggenkamp D. Junctions of surface operators and categorification of quantum groups. - 2015. - arXiv: 1507.06318 [hep-th].
- Vassiliev V. Cohomology of knot spaces // Theory of Singularities and Its Applications. — 1990. — т. 1. — с. 23—69.
- 4. Kontsevich M. Vassiliev's knot invariants // Adv. in Sov. Math. 1993. T. 16, № 2. c. 137-150.
- 5. Kauffman L. H. Knots and physics. T. 1. World scientific, 2001.
- Jones V. F. R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras // Bull. Am. Math. Soc. — 1985. — т. 12, № 1. — с. 103—111.
- Jones V. F. R. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials // Ann. Math. 1987. т. 126. с. 335—388.
- Schwarz A. S. The partition function of a degenerate functional // Communications in Mathematical Physics. — 1979. — т. 67. — с. 1—16.
- Atiyah M. F. Topological quantum field theory // Publications Mathématiques de l'IHÉS. — 1988. — т. 68. — с. 175—186.
- 10. Witten E. Quantum field theory and the Jones polynomial // Communications in Mathematical Physics. 1989. т. 121, № 3. с. 351—399.
- Решетихин Н. Ю. Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты связок // Алгебра и анализ. — 1989. — т. 1, № 2. — с. 169—188.
- Reshetikhin N. Y., Turaev V. G. Ribbon graphs and their invaraints derived from quantum groups // Communications in Mathematical Physics. — 1990. — T. 127. — c. 1—26.

- 13. A new polynomial invariant of knots and links / P. Freyd [и др.] // Bulletin of the American Mathematical Society. 1985. т. 12, № 2. с. 239—246.
- 14. *Przytycki J. H.*, *Traczyk P.* Invariants of links of Conway type // Kobe J. Math. 1988. т. 4. с. 115—139. arXiv: 1610.06679 [math.GT].
- Khovanov M. A categorification of the Jones polynomial. 1999. arXiv: math/9908171 [math.QA].
- Khovanov M., Rozansky L. Matrix factorizations and link homology. 2004. arXiv: math/0401268 [math.QA].
- 17. *Khovanov M.*, *Rozansky L.* Matrix factorizations and link homology II // Geometry & Topology. — 2008. — т. 12, № 3. — с. 1387—1425.
- Khovanov M., Lauda A. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I // Representation Theory of the American Mathematical Society. 2009. т. 13, № 14. с. 309—347.
- Khovanov M., Lauda A. A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II // Transactions of the American Mathematical Society. 2011. т. 363, № 5. с. 2685—2700.
- 20. Rouquier R. 2-Kac-Moody algebras. -2008. -arXiv: 0812.5023 [math.RT].
- Gukov S., Schwarz A. S., Vafa C. Khovanov-Rozansky homology and topological strings // Lett. Math. Phys. — 2005. — т. 74. — с. 53—74. — arXiv: hepth/0412243.
- 22. Gukov S., Saberi I. Lectures on Knot Homology and Quantum Curves. 2012. нояб. arXiv: 1211.6075 [hep-th].
- 23. Witten E. Khovanov Homology And Gauge Theory. 2011. авг. arXiv: 1108.3103 [math.GT].
- 24. *Witten E.* Fivebranes and Knots. 2011. янв. arXiv: 1101.3216 [hep-th].
- Topological Strings, D-Model, and Knot Contact Homology / M. Aganagic [и др.] // Adv. Theor. Math. Phys. — 2014. — т. 18, № 4. — с. 827—956. arXiv: 1304.5778 [hep-th].
- 26. Witten E. Two Lectures On The Jones Polynomial And Khovanov Homology. 2014. янв. arXiv: 1401.6996 [math.GT].

- 27. Aganagic M., Shakirov S. Knot Homology and Refined Chern-Simons Index // Commun. Math. Phys. — 2015. — т. 333, № 1. — с. 187—228. — arXiv: 1105.
  5117 [hep-th].
- 28. Gaiotto D., Moore G. W., Witten E. Algebra of the Infrared: String Field Theoretic Structures in Massive  $\mathcal{N} = (2, 2)$  Field Theory In Two Dimensions. — 2015. — июнь. — arXiv: 1506.04087 [hep-th].
- Aganagic M. Knot Categorification from Mirror Symmetry, Part I: Coherent Sheaves. — 2020. — апр. — arXiv: 2004.14518 [hep-th].
- Aganagic M. Knot Categorification from Mirror Symmetry, Part II: Lagrangians. — 2021. — май. — arXiv: 2105.06039 [hep-th].
- Aganagic M. Homological Knot Invariants from Mirror Symmetry. 2022. июль. arXiv: 2207.14104 [math.GT].
- 32. *Harvey J. A., Moore G. W.* Algebras, BPS states, and strings // Nucl. Phys.
  B. 1996. т. 463. с. 315-368. arXiv: hep-th/9510182.
- Harvey J. A., Moore G. W. On the algebras of BPS states // Commun. Math. Phys. - 1998. - т. 197. - с. 489-519. - arXiv: hep-th/9609017.
- 34. BPS Algebras in 2D String Theory / S. M. Harrison [и др.] // Annales Henri Poincare. — 2022. — т. 23, № 10. — с. 3667—3752. — arXiv: 2107.03507 [hep-th].
- 35. Kontsevich M., Soibelman Y. Cohomological Hall algebra, exponential Hodge structures and motivic Donaldson-Thomas invariants // Commun. Num. Theor. Phys. 2011. т. 5. с. 231-352. arXiv: 1006.2706 [math.AG].
- Galakhov D. BPS Hall Algebra of Scattering Hall States // Nucl. Phys. B. –
   2019. т. 946. с. 114693. arXiv: 1812.05801 [hep-th].
- Feigin B. L., Odesskii A. V. Vector bundles on elliptic curve and Sklyanin algebras. - 1995. - arXiv: q-alg/9509021 [math.QA].
- 38. Li W., Yamazaki M. Quiver Yangian from Crystal Melting // JHEP. 2020. T. 11. c. 035. arXiv: 2003.08909 [hep-th].
- 39. Spill F. Yangians in Integrable Field Theories, Spin Chains and Gauge-String Dualities // Rev. Math. Phys. — 2012. — т. 24. — с. 1230001. — arXiv: 1201. 1884 [hep-th].

- 40. Nekrasov N. A., Shatashvili S. L. Bethe/Gauge correspondence on curved spaces // JHEP. 2015. т. 01. с. 100. arXiv: 1405.6046 [hep-th].
- 41. Nekrasov N., Pestun V., Shatashvili S. Quantum geometry and quiver gauge theories // Commun. Math. Phys. 2018. т. 357, № 2. с. 519—567. arXiv: 1312.6689 [hep-th].
- 42. Nekrasov N. Superspin chains and supersymmetric gauge theories // JHEP. 2019. т. 03. с. 102. arXiv: 1811.04278 [hep-th].
- 43. *Gaiotto D.*, *Moore G. W.*, *Neitzke A.* Spectral networks // Annales Henri Poincare. — 2013. — т. 14. — с. 1643—1731. — arXiv: 1204.4824 [hep-th].
- 44. Costello K., Witten E., Yamazaki M. Gauge Theory and Integrability, II // ICCM Not. — 2018. — т. 06, № 1. — с. 120—146. — arXiv: 1802.01579 [hep-th].
- 45. Costello K., Yamazaki M. Gauge Theory And Integrability, III. 2019. авг. arXiv: 1908.02289 [hep-th].
- 46. *Kerr G.*, *Soibelman Y.* On 2d-4d motivic wall-crossing formulas. 2017. нояб. arXiv: 1711.03695 [math.AG].
- 47. Clingempeel J., Le Floch B., Romo M. Brane transport in anomalous (2,2) models and localization. 2018. нояб. arXiv: 1811.12385 [hep-th].
- 48. Brunner I., Klos F., Roggenkamp D. Phase transitions in GLSMs and defects // JHEP. - 2021. - т. 05. - с. 006. - arXiv: 2101.12315 [hep-th].
- Dedushenko M., Nekrasov N. Interfaces and Quantum Algebras, I: Stable Envelopes. — 2021. — сент. — arXiv: 2109.10941 [hep-th].
- 50. Dedushenko M., Nekrasov N. Interfaces and Quantum Algebras, II: Cigar Partition Function. 2023. июнь. arXiv: 2306.16434 [hep-th].
- 51. Galakhov D., Mironov A., Morozov A. SU(2)/SL(2) knot invariants and Kontsevich-Soibelman monodromies // Theor. Math. Phys. — 2016. — т. 187, № 2. с. 678—694. — arXiv: 1510.05366 [hep-th].
- 52. Galakhov D. Why Is Landau-Ginzburg Link Cohomology Equivalent To Khovanov Homology? // JHEP. — 2019. — т. 05. — с. 085. — arXiv: 1702.07086 [hep-th].

- 53. Galakhov D., Yamazaki M. Quiver Yangian and Supersymmetric Quantum Mechanics // Commun. Math. Phys. 2022. т. 396, № 2. с. 713-785. arXiv: 2008.07006 [hep-th].
- 54. Galakhov D. On supersymmetric interface defects, brane parallel transport, order-disorder transition and homological mirror symmetry // JHEP. 2020. T. 22. c. 076. arXiv: 2105.07602 [hep-th].
- 55. Galakhov D., Li W., Yamazaki M. Shifted quiver Yangians and representations from BPS crystals // JHEP. — 2021. — т. 08. — с. 146. — arXiv: 2106.01230 [hep-th].
- 56. Galakhov D., Li W., Yamazaki M. Toroidal and elliptic quiver BPS algebras and beyond // JHEP. — 2022. — т. 02. — с. 024. — arXiv: 2108.10286 [hep-th].
- 57. Galakhov D., Li W., Yamazaki M. Gauge/Bethe correspondence from quiver BPS algebras // JHEP. — 2022. — т. 11. — с. 119. — arXiv: 2206.13340 [hep-th].
- 58. Galakhov D. BPS states meet generalized cohomology // JHEP. 2023. T. 07. c. 059. arXiv: 2303.05538 [hep-th].
- 59. Galakhov D., Morozov A., Tselousov N. Super-Schur polynomials for Affine Super Yangian Y(ĝl<sub>1|1</sub>) // JHEP. - 2023. - т. 08. - с. 049. - arXiv: 2307. 03150 [hep-th].
- 60. Galakhov D., Li W. Charging solid partitions // JHEP. 2024. т. 01. с. 043. arXiv: 2311.02751 [hep-th].
- Galakhov D., Morozov A., Tselousov N. Towards the theory of Yangians // Phys. Rev. D. - 2024. — март. — т. 109, вып. 6. — с. 066001. — arXiv: 2311.00760 [hep-th].
- 62. Witten E. Supersymmetry and Morse theory // J. Diff. Geom. 1982. т. 17,
  № 4. с. 661—692.
- 63. Behtash A. More on Homological Supersymmetric Quantum Mechanics // Phys. Rev. D. - 2018. - т. 97, № 6. - с. 065002. - arXiv: 1703.00511 [hep-th].

- 64. Mirror symmetry. т. 1 / К. Hori [и др.]. Providence, USA : AMS, 2003. (Clay mathematics monographs).
- 65. Zinn-Justin J. Quantum field theory and critical phenomena // Int. Ser. Monogr. Phys. — 2002. — т. 113. — с. 1—1054.
- 66. Mirror symmetry and line operators / Т. Dimofte [и др.] // JHEP. 2020. т. 02. — с. 075. — arXiv: 1908.00013 [hep-th].
- Cordes S., Moore G. W., Ramgoolam S. Lectures on 2-d Yang-Mills theory, equivariant cohomology and topological field theories // Nucl. Phys. B Proc. Suppl. - 1995. - т. 41. - с. 184-244. - arXiv: hep-th/9411210.
- 68. Hori K., Romo M. Exact Results In Two-Dimensional (2,2) Supersymmetric Gauge Theories With Boundary. 2013. авг. arXiv: 1308.2438 [hep-th].
- 69. *Hori K.*, *Vafa C.* Mirror symmetry. 2000. февр. arXiv: hep-th/ 0002222.
- 70. *Haydys A*. Fukaya-Seidel category and gauge theory // J. Sympl. Geom. 2015. т. 13. с. 151—207. arXiv: 1010.2353 [math.SG].
- 71. Auroux D. A beginner's introduction to Fukaya categories. 2013. arXiv: 1301.7056 [math.SG].
- Seidel P. Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. c. viii+326. (Zurich Lectures in Advanced Mathematics).
- 73. Gaiotto D., Moore G. W., Witten E. An Introduction To The Web-Based Formalism. — 2015. — июнь. — arXiv: 1506.04086 [hep-th].
- 74. Khan A. Z., Moore G. W. Categorical Wall-Crossing in Landau-Ginzburg Models. — 2020. — окт. — arXiv: 2010.11837 [hep-th].
- 75. Denef F., Moore G. W. Split states, entropy enigmas, holes and halos // JHEP. — 2011. — т. 11. — с. 129. — arXiv: hep-th/0702146.
- 76. Solitons in the Higgs phase: The Moduli matrix approach / М. Eto [и др.] //
  J. Phys. A. 2006. т. 39. R315-R392. arXiv: hep-th/0602170.
- 77. Statistical mechanics of vortices from D-branes and T-duality / M. Eto [и др.] // Nucl. Phys. B. 2008. т. 788. с. 120—136. arXiv: hep-th/ 0703197.

- 78. Dynamics of Domain Wall Networks / М. Eto [и др.] // Phys. Rev. D. 2007. т. 76. с. 125025. arXiv: 0707.3267 [hep-th].
- Shifman M., Yung A. Non-Abelian Confinement in N=2 Supersymmetric QCD: Duality and Kinks on Confining Strings // Phys. Rev. D. - 2010. - т. 81. с. 085009. - arXiv: 1002.0322 [hep-th].
- 80. Nonperturbative contributions from complexified solutions in CP<sup>N-1</sup>models / T. Fujimori [и др.] // Phys. Rev. D. 2016. т. 94, № 10. с. 105002. arXiv: 1607.04205 [hep-th].
- 81. Harland D. Kinks, chains, and loop groups in the CP\*\*n sigma models // J. Math. Phys. 2009. т. 50. с. 122902. arXiv: 0902.2303 [hep-th].
- Polyakov A. M. Gauge Fields and Strings. т. 3. New York, NY : Hardwood academic publishers, 1987. (Contemporary concepts in physics).
- Manschot J., Pioline B., Sen A. Wall Crossing from Boltzmann Black Hole Halos // JHEP. - 2011. - T. 07. - c. 059. - arXiv: 1011.1258 [hep-th].
- 84. Galakhov D., Longhi P., Moore G. W. Spectral Networks with Spin // Commun. Math. Phys. — 2015. — т. 340, № 1. — с. 171—232. — arXiv: 1408.0207 [hep-th].
- 85. Gaiotto D., Moore G. W., Neitzke A. Wall-crossing, Hitchin Systems, and the WKB Approximation. 2009. июль. arXiv: 0907.3987 [hep-th].
- 86. Selfdual strings and N=2 supersymmetric field theory / A. Klemm [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1996. — т. 477. — с. 746—766. — arXiv: hep-th/9604034.
- 87. Nedelin A., Pasquetti S., Zenkevich Y. T[SU(N)] duality webs: mirror symmetry, spectral duality and gauge/CFT correspondences // JHEP. 2019. т. 02. с. 176. arXiv: 1712.08140 [hep-th].
- 88. Herbst M., Hori K., Page D. Phases Of N=2 Theories In 1+1 Dimensions
  With Boundary. 2008. март. arXiv: 0803.2045 [hep-th].
- Bondal A., Kapranov M., Schechtman V. Perverse schobers and birational geometry. - 2018. - arXiv: 1801.08286 [math.AG].
- 90. Galakhov D., Moore G. W. Comments On The Two-Dimensional Landau-Ginzburg Approach To Link Homology. 2016. июль. arXiv: 1607.04222 [hep-th].

- 91. Huybrechts D. Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006. — c. viii+307. — (Oxford Mathematical Monographs).
- 92. Orlov D. O. Derived categories of coherent sheaves and equivalences between them // Russian Mathematical Surveys. — 2003. — т. 58, № 3. — с. 511.
- Bernstein J., Lunts V. Equivariant sheaves and functors. т. 1578. Springer-Verlag, Berlin, 1994. — с. iv+139. — (Lecture Notes in Mathematics).
- 94. Kapranov M., Kontsevich M., Soibelman Y. Algebra of the infrared and secondary polytopes // Adv. Math. 2016. т. 300. с. 616—671. arXiv: 1408.2673 [math.SG].
- 95. Douglas M. R., Moore G. W. D-branes, quivers, and ALE instantons. 1996. – arXiv: hep-th/9603167 [hep-th].
- 96. Ooguri H., Yamazaki M. Crystal Melting and Toric Calabi-Yau Manifolds // Commun. Math. Phys. — 2009. — т. 292. — с. 179—199. — arXiv: 0811.2801 [hep-th].
- 97. *Yamazaki M.* Crystal Melting and Wall Crossing Phenomena // Int. J. Mod. Phys. 2011. т. A26. с. 1097—1228. arXiv: 1002.1709 [hep-th].
- 98. Denef F. Quantum quivers and Hall / hole halos // JHEP. 2002. т. 10. —
  с. 023. arXiv: hep-th/0206072 [hep-th].
- 99. Nekrasov N. A. Seiberg-Witten prepotential from instanton counting // Adv. Theor. Math. Phys. — 2003. — т. 7, № 5. — с. 831—864. — arXiv: hep-th/ 0206161.
- Donaldson S. K. A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri // J.
  Diff. Geom. 1983. т. 18. с. 269—277.
- 101. King A. D. Moduli of representations of finite-dimensional algebras // Quart.
  J. Math. Oxford Ser. (2). 1994. т. 45, № 180. с. 515—530.
- 102. N = 2 quantum field theories and their BPS quivers / M. Alim [и др.] // Adv. Theor. Math. Phys. - 2014. - т. 18, № 1. - с. 27-127. - arXiv: 1112.3984
  [hep-th].
- 103. Douglas M. R., Fiol B., Romelsberger C. Stability and BPS branes // JHEP. —
   2005. т. 09. с. 006. arXiv: hep-th/0002037 [hep-th].

- 104. *Reineke M.* Framed quiver moduli, cohomology, and quantum groups // J. Algebra. 2008. т. 320, № 1. с. 94—115.
- 105. Lillywhite S. Formality in an equivariant setting // Transactions of the American Mathematical Society. — 2002. — т. 355. — с. 2771—2793. — arXiv: math/ 0201229.
- 106. Vortices and Vermas / M. Bullimore [и др.] // Adv. Theor. Math. Phys. 2018. т. 22. с. 803—917. arXiv: 1609.04406 [hep-th].
- Macdonald I. G. Symmetric functions and Hall polynomials. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979. — c. viii+180. — Oxford Mathematical Monographs.
- 108. Bershadsky M., Sadov V. Theory of Kahler gravity // Int. J. Mod. Phys. 1996. — т. A11. — с. 4689—4730. — arXiv: hep-th/9410011 [hep-th].
- 109. Quantum foam and topological strings / A. Iqbal [и др.] // JHEP. 2008. т. 04. — с. 011. — arXiv: hep-th/0312022 [hep-th].
- 110. Cirafici M., Sinkovics A., Szabo R. J. Cohomological gauge theory, quiver matrix models and Donaldson-Thomas theory // Nucl. Phys. 2009. т. B809. с. 452—518. arXiv: 0803.4188 [hep-th].
- 111. Kronheimer P. B., Nakajima H. Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons // Math. Ann. — 1990. — т. 288, № 2. — с. 263—307.
- 112. Moduli space of non-Abelian vortices / М. Eto [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2006. т. 96. с. 161601. arXiv: hep-th/0511088 [hep-th].
- 113. Beilinson A. A. Coherent sheaves on  $\mathbf{P}^n$  and problems in linear algebra //Funktsional. Anal. i Prilozhen.  $-1978. - \tau$ . 12,  $\mathbb{N}$  3. - c. 68-69.
- 114. Nakajima H. Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces. т. 18. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. — с. xii+132. — (University Lecture Series).
- 115. Donaldson S. K., Kronheimer P. B. The geometry of four-manifolds. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1990. — c. x+440. — (Oxford Mathematical Monographs). — Oxford Science Publications.

- 116. Cohomological Hall algebras, vertex algebras and instantons / M. Rapcak [и др.] // Commun. Math. Phys. — 2019. — т. 376, № 3. — с. 1803—1873. arXiv: 1810.10402 [math.QA].
- 117. Procházka T. W-symmetry, topological vertex and affine Yangian // JHEP. 2016. T. 10. c. 077. arXiv: 1512.07178 [hep-th].
- 118. Quantum toroidal gl<sub>1</sub>-algebra: plane partitions / В. Feigin [и др.] // Куоtо J. Math. 2012. т. 52, № 3. с. 621—659.
- 119. Jafferis D. L., Moore G. W. Wall crossing in local Calabi Yau manifolds. —
  2008. arXiv: 0810.4909 [hep-th].
- Maldonado R., Manton N. S. Analytic vortex solutions on compact hyperbolic surfaces // J. Phys. A. 2015. т. 48, № 24. с. 245403. arXiv: 1502.
  01990 [hep-th].
- 121. Miyake A., Ohta K., Sakai N. Volume of Moduli Space of Vortex Equations and Localization // Prog. Theor. Phys. — 2011. — т. 126. — с. 637—680. arXiv: 1105.2087 [hep-th].
- 122. Alvarez-Gaume L., Moore G. W., Vafa C. Theta Functions, Modular Invariance and Strings // Commun. Math. Phys. / под ред. М. Stone. — 1986. — т. 106. с. 1—40.
- 123. Taubes C. H. Arbitrary N: Vortex Solutions to the First Order Landau-Ginzburg Equations // Commun. Math. Phys. — 1980. — т. 72. — с. 277— 292.
- 124. *Manton N. S.*, *Rink N. A.* Geometry and Energy of Non-abelian Vortices // J. Math. Phys. — 2011. — т. 52. — с. 043511. — arXiv: 1012.3014 [hep-th].
- 125. Hanany A., Tong D. Vortices, instantons and branes // JHEP. 2003. T. 07. c. 037. arXiv: hep-th/0306150.
- Bullimore M., Ferrari A., Kim H. Twisted indices of 3d N = 4 gauge theories and enumerative geometry of quasi-maps // JHEP. 2019. т. 07. с. 014. arXiv: 1812.05567 [hep-th].
- 127. Bullimore M., Ferrari A., Kim H. Supersymmetric Ground States of 3d N = 4 Gauge Theories on a Riemann Surface. 2021. май. arXiv: 2105.08783 [hep-th].

- 128. Borokhov V., Kapustin A., Wu X.-k. Monopole operators and mirror symmetry in three-dimensions // JHEP. — 2002. — т. 12. — с. 044. — arXiv: hep th/0207074.
- 129. Borokhov V., Kapustin A., Wu X.-k. Topological disorder operators in threedimensional conformal field theory // JHEP. — 2002. — т. 11. — с. 049. arXiv: hep-th/0206054.
- 130. Intriligator K., Seiberg N. Aspects of 3d N=2 Chern-Simons-Matter Theories // JHEP. - 2013. - т. 07. - с. 079. - arXiv: 1305.1633 [hep-th].
- 131. Nagao K., Yamazaki M. The Non-commutative Topological Vertex and Wall Crossing Phenomena // Adv. Theor. Math. Phys. — 2010. — т. 14, № 4. c. 1147—1181. — arXiv: 0910.5479 [hep-th].
- 132. Bezerra L., Mukhin E. Braid actions on quantum toroidal superalgebras. 2019. дек. arXiv: 1912.08729 [math.QA].
- 133. Konno H. Elliptic Quantum Groups  $U_{q,p}(\hat{gl}_N)$  and  $E_{q,p}(\hat{gl}_N)$ . 2016. MAPT. arXiv: 1603.04129 [math.QA].
- 134. 2d (0,2) Quiver Gauge Theories and D-Branes / S. Franco [и др.] // JHEP. 2015. т. 09. с. 072. arXiv: 1506.03818 [hep-th].
- 135. Franco S., Hasan A. Graded Quivers, Generalized Dimer Models and Toric Geometry // JHEP. 2019. т. 11. с. 104. arXiv: 1904.07954 [hep-th].
- 136. Franco S., Yu X. BFT<sub>2</sub>: a general class of 2dN = (0, 2) theories, 3-manifolds and toric geometry // JHEP. 2022. т. 08. с. 277. arXiv: 2107.00667 [hep-th].
- 137. Nekrasov N. Magnificent four // Adv. Theor. Math. Phys. 2020. т. 24,
  № 5. с. 1171—1202. arXiv: 1712.08128 [hep-th].
- 138. ADHM in 8d, coloured solid partitions and Donaldson-Thomas invariants on orbifolds / G. Bonelli [и др.] // J. Geom. Phys. — 2023. — т. 191. — с. 104910. arXiv: 2011.02366 [hep-th].
- 139. Szabo R. J., Tirelli M. Noncommutative Instantons in Diverse Dimensions. —
   2022. июль. arXiv: 2207.12862 [hep-th].

- 140. Szendroi B. Non-commutative Donaldson-Thomas invariants and the conifold // Geom. Topol. — 2008. — т. 12, № 2. — с. 1171—1202. — arXiv: 0705.3419 [math.AG].
- 141. Okounkov A., Reshetikhin N., Vafa C. Quantum Calabi-Yau and classical crystals // Prog. Math. 2006. т. 244. с. 597. arXiv: hep-th/0309208.
- 142. Nagao K., Nakajima H. Counting invariant of perverse coherent sheaves and its wall-crossing // Int. Math. Res. Not. IMRN. 2011. т. 2011, № 17. с. 3885—3938. arXiv: 0809.2992 [math.AG].
- 143. Mozgovoy S., Reineke M. On the noncommutative Donaldson-Thomas invariants arising from brane tilings // Adv. Math. — 2010. — т. 223, № 5. — с. 1521— 1544.
- 144. Libine M. Lecture Notes on Equivariant Cohomology. —. arXiv: 0709.3615[math.SG].
- 145. Ohta K., Sasai Y. Exact Results in Quiver Quantum Mechanics and BPS Bound State Counting // JHEP. — 2014. — т. 11. — с. 123. — arXiv: 1408.0582 [hep-th].
- 146. *Manschot J.*, *Pioline B.*, *Sen A.* From Black Holes to Quivers // JHEP. 2012. т. 11. с. 023. arXiv: 1207.2230 [hep-th].
- 147. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика: Нерелятивистская теория. Наука, 1989.
- 148. Wild Wall Crossing and BPS Giants / D. Galakhov [и др.] // JHEP. 2013. т. 11. — с. 046. — arXiv: 1305.5454 [hep-th].
- 149. Manschot J., Pioline B., Sen A. On the Coulomb and Higgs branch formulae for multi-centered black holes and quiver invariants // JHEP. — 2013. — т. 05. — с. 166. — arXiv: 1302.5498 [hep-th].
- 150. Manschot J., Pioline B., Sen A. A Fixed point formula for the index of multicentered N=2 black holes // JHEP. — 2011. — т. 05. — с. 057. — arXiv: 1103.1887 [hep-th].
- 151. Gaiotto D., Moore G. W., Neitzke A. Framed BPS States // Adv. Theor. Math. Phys. — 2013. — т. 17, № 2. — с. 241—397. — arXiv: 1006.0146 [hep-th].

- 152. Gukov S., Witten E. Gauge Theory, Ramification, And The Geometric Langlands Program. — 2006. — дек. — arXiv: hep-th/0612073.
- 153. Chung H.-J., Okazaki T. (2,2) and (0,4) supersymmetric boundary conditions in 3d N = 4 theories and type IIB branes // Phys. Rev. D. 2017. т. 96, № 8. с. 086005. arXiv: 1608.05363 [hep-th].
- 154. Geometric engineering of (framed) BPS states / W.-y. Chuang [и др.] // Adv. Theor. Math. Phys. — 2014. — т. 18, № 5. — с. 1063—1231. — arXiv: 1301.3065 [hep-th].
- 155. Kontsevich M., Soibelman Y. Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations. — 2008. — нояб. — arXiv: 0811.2435 [math.AG].
- 156. Feigin B. L., Tsymbaliuk A. I. Equivariant K-theory of Hilbert schemes via shuffle algebra // Kyoto J. Math. 2011. т. 51, № 4. с. 831—854.
- 157. Beaujard G., Mondal S., Pioline B. Multi-centered black holes, scaling solutions and pure-Higgs indices from localization. 2021. март. arXiv: 2103.
  03205 [hep-th].
- 158. Enriquez B. On correlation functions of Drinfeld currents and shuffle algebras. —
   1998. сент. arXiv: math/9809036 [math.QA].
- 159. Neguţ A. The R-matrix of the quantum toroidal algebra. 2020. май. arXiv: 2005.14182 [math.QA].
- 160. Neguţ A. Quantum toroidal and shuffle algebras. 2013. февр. arXiv:
  1302.6202 [math.RT].
- 161. Yang Y., Zhao G. The cohomological Hall algebra of a preprojective algebra // Proc. Lond. Math. Soc. (3). — 2018. — т. 116, № 5. — с. 1029—1074. — arXiv: 1407.7994 [math.RT].
- 162. Chiral Lagrangians, anomalies, supersymmetry, and holomorphy / A. Losev [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1997. — т. 484. — с. 196—222. — arXiv: hepth/9606082.
- 163. Closset C., Di Pietro L., Kim H. 't Hooft anomalies and the holomorphy of supersymmetric partition functions // JHEP. — 2019. — т. 08. — с. 035. arXiv: 1905.05722 [hep-th].
- 164. Dedushenko M. Remarks on Berry Connection in QFT, Anomalies, and Applications. 2022. нояб. arXiv: 2211.15680 [hep-th].
- 165. 2d partition function in Ω-background and vortex/instanton correspondence / T. Fujimori [и др.] // JHEP. — 2015. — т. 12. — с. 110. — arXiv: 1509.08630 [hep-th].
- 166. Beem C., Dimofte T., Pasquetti S. Holomorphic Blocks in Three Dimensions // JHEP. - 2014. - т. 12. - с. 177. - arXiv: 1211.1986 [hep-th].
- 167. Hornbostel J., Kiritchenko V. Schubert calculus for algebraic cobordism // J. Reine Angew. Math. (Crelle). 2011. т. 2011, № 656. с. 59—85. arXiv: 0903.3936 [math.AG].
- 168. Guay N., Nakajima H., Wendlandt C. Coproduct for Yangians of affine Kac– Moody algebras // Advances in Mathematics. — 2018. — т. 338. — с. 865— 911. — arXiv: 1701.05288 [math.QA].
- 169. Ueda M. Construction of Affine Super Yangian. —. arXiv: 1911.06666 [math.RT].
- 170. *Bao J.* A Survey of Toric Quivers and BPS Algebras. 2023. янв. arXiv: 2301.00663 [hep-th].
- 171. Awata H. Calogero-Moser-Sutherland Models / под ред. J. F. van Diejen, L. Vinet. New York, NY : Springer New York, 2000. с. 23—35.
- 172. Nekrasov N. A., Shatashvili S. L. Supersymmetric vacua and Bethe ansatz // Nucl. Phys. B Proc. Suppl. / под ред. L. Baulieu [и др.]. — 2009. — т. 192/ 193. — с. 91—112. — arXiv: 0901.4744 [hep-th].
- 173. Nekrasov N. A., Shatashvili S. L. Quantum integrability and supersymmetric vacua // Prog. Theor. Phys. Suppl. / под ред. Т. Такауападі, S. Yahikozawa. 2009. т. 177. с. 105—119. arXiv: 0901.4748 [hep-th].
- 174. Galakhov D., Mironov A., Morozov A. Wall Crossing Invariants: from quantum mechanics to knots // J. Exp. Theor. Phys. 2015. т. 120, № 3. с. 549—577. arXiv: 1410.8482 [hep-th].
- 175. Bullimore M., Zhang D. 3d  $\mathcal{N} = 4$  Gauge Theories on an Elliptic Curve // SciPost Phys. -2022. - T. 13,  $\mathbb{N}$  1. - c. 005. - arXiv: 2109.10907 [hep-th].

- 176. Crew S., Zhang D., Zhao B. Boundaries & Localisation with a Topological Twist. — 2023. — июнь. — arXiv: 2306.16448 [hep-th].
- 177. Procházka T., Watanabe A. On Bethe equations of 2d conformal field theory. —
  2023. янв. arXiv: 2301.05147 [hep-th].
- 178. Kolyaskin D., Litvinov A., Zhukov A. R-matrix formulation of affine Yangian of gl^(1|1) // Nucl. Phys. B. 2022. т. 985. с. 116023. arXiv: 2206.
  01636 [hep-th].
- 179. *Bao J.* A note on quiver Yangians and *R*-matrices // JHEP. 2022. т. 08. — с. 219. — arXiv: 2206.06186 [hep-th].
- 180. Chistyakova E., Litvinov A., Orlov P. Affine Yangian of gl(2) and integrable structures of superconformal field theory // JHEP. — 2022. — т. 03. — с. 102. arXiv: 2110.05870 [hep-th].
- 181. Litvinov A., Vilkoviskiy I. Liouville reflection operator, affine Yangian and Bethe ansatz // JHEP. — 2020. — т. 12. — с. 100. — arXiv: 2007.00535 [hep-th].
- 182. Maulik D., Okounkov A. Quantum Groups and Quantum Cohomology. —
   2012. нояб. arXiv: 1211.1287 [math.AG].
- 183. Aganagic M., Okounkov A. Elliptic stable envelopes // J. Am. Math. Soc. —
  2021. т. 34, № 1. с. 79—133. arXiv: 1604.00423 [math.AG].
- 184. Shenfeld D. Abelianization of Stable Envelopes in Symplectic Resolutions : PhD thesis / Shenfeld Daniel. — 09.2013. — доступно по адресу http:// arks.princeton.edu/ark:/88435/dsp01ws859f77c.
- 185. Smirnov A. Polynomials associated with fixed points on the instanton moduli space. — 2014. — апр. — arXiv: 1404.5304 [math-ph].
- 186. Feigin B., Jimbo M., Miwa T. Finite type modules and Bethe ansatz for quantum toroidal gl<sub>1</sub> // Communications in Mathematical Physics. 2017. T. 356. c. 285-327. arXiv: 1603.02765 [math.QA].
- 187. Khoroshkin S. M., Tolstoy V. N. Universal R-matrix for quantized (super) algebras // Communications in Mathematical Physics. — 1991. — т. 141. с. 599—617.

- 188. Noshita G., Watanabe A. A note on quiver quantum toroidal algebra // JHEP. - 2022. - т. 05. - с. 011. - arXiv: 2108.07104 [hep-th].
- 189. Faddeev L. D. How algebraic Bethe ansatz works for integrable model // Les Houches School of Physics: Astrophysical Sources of Gravitational Radiation. — 05.1996. — pp. 149—219. — arXiv: hep-th/9605187.
- 190. Slavnov N. A. Algebraic Bethe ansatz. -. arXiv: 1804.07350 [math-ph].
- 191. Morozov A., Tselousov N. 3-Schurs from explicit representation of Yangian  $\hat{Y(\mathfrak{gl}_1)}$ . Levels 1-5. 2023. май. arXiv: 2305.12282 [hep-th].
- 192. Bezerra L., Mukhin E. Quantum toroidal algebra associated with  $\mathfrak{gl}_{m|n}$ . 2019. arXiv: 1904.07297 [math.QA].
- 193. Nishinaka T., Yamaguchi S., Yoshida Y. Two-dimensional crystal melting and D4-D2-D0 on toric Calabi-Yau singularities // JHEP. — 2014. — т. 05. с. 139. — arXiv: 1304.6724 [hep-th].
- 194. Noshita G., Watanabe A. Shifted quiver quantum toroidal algebra and subcrystal representations // JHEP. 2022. т. 05. с. 122. arXiv: 2109.02045 [hep-th].
- 195. *Ginzburg V.* Lectures on Nakajima's Quiver Varieties. 2009. май. arXiv: 0905.0686 [math.RT].
- 196. Moore G. W., Nekrasov N., Shatashvili S. Integrating over Higgs branches // Commun. Math. Phys. — 2000. — т. 209. — с. 97—121. — arXiv: hep-th/ 9712241.
- 197. Moore G. W., Nekrasov N., Shatashvili S. D particle bound states and generalized instantons // Commun. Math. Phys. — 2000. — т. 209. — с. 77—95. arXiv: hep-th/9803265.
- 198. Nekrasov N., Piazzalunga N. Magnificent Four with Colors // Commun. Math. Phys. — 2019. — т. 372, № 2. — с. 573—597. — arXiv: 1808.05206 [hep-th].
- 199. Bar-Natan D. On Khovanov's categorification of the Jones polynomial // Algebraic & Geometric Topology. — 2002. — т. 2, № 1. — с. 337—370. arXiv: math/0201043 [math.QA].

- 200. Dolotin V., Morozov A. Introduction to Khovanov Homologies. I. Unreduced Jones superpolynomial // JHEP. 2013. т. 01. с. 065. arXiv: 1208. 4994 [hep-th].
- 201. Di Francesco P., Mathieu P., Sénéchal D. Conformal field theory. New York, NY : Springer, 1997. (Graduate texts in contemporary physics).
- 202. Knizhnik V. G., Zamolodchikov A. B. Current Algebra and Wess-Zumino Model in Two-Dimensions // Nucl. Phys. В / под ред. I. М. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1984. — т. 247. — с. 83—103.
- 203. Chen Z., Guo J., Romo M. A GLSM View on Homological Projective Duality // Commun. Math. Phys. — 2022. — т. 394, № 1. — с. 355—407. — arXiv: 2012.
  14109 [hep-th].
- 204. Dotsenko V. S., Fateev V. A. Conformal Algebra and Multipoint Correlation Functions in Two-Dimensional Statistical Models // Nucl. Phys. B / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1984. — т. 240. — с. 312.
- 205. Wess-Zumino-Witten model as a theory of free fields / A. Gerasimov [и др.] // International Journal of Modern Physics A. — 1990. — т. 5, № 13. — с. 2495— 2589.
- 206. Schechtman V. V., Varchenko A. N. Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology // Inventiones mathematicae. — 1991. — т. 106, № 1. с. 139—194.
- 207. Etingof P. I., Frenkel I., Kirillov A. A. Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations. — American Mathematical Soc., 1998.
- 208. Reshetikhin N., Varchenko A. Quasiclassical asymptotics of solutions to the KZ equations. — 1994. — февр. — arXiv: hep-th/9402126.
- 209. Gaiotto D., Witten E. Knot Invariants from Four-Dimensional Gauge Theory // Adv. Theor. Math. Phys. — 2012. — т. 16, № 3. — с. 935—1086. — arXiv: 1106.4789 [hep-th].
- 210. Hori K., Iqbal A., Vafa C. D-branes and mirror symmetry. 2000. май. arXiv: hep-th/0005247.
- 211. *Арнольд В. И.* О характеристическом классе, входящем в условия квантования // Функц. анализ и его прил. — 1967. — т. 1, № 1. — с. 1—14.

- 212. Cecotti S., Vafa C. On classification of N=2 supersymmetric theories // Commun. Math. Phys. — 1993. — т. 158. — с. 569—644. — arXiv: hepth/9211097.
- 213. Opers versus nonabelian Hodge / O. Dumitrescu [и др.]. —. arXiv: 1607. 02172 [math.DG].
- 214. *Cecotti S.*, *Vafa C.* Topological antitopological fusion // Nucl. Phys. B. 1991. т. 367. с. 359—461.
- 215. *Елютин П. В., Кривченков В. Д.* Квантовая механика с задачами. Физматлит, 2001.
- 216. Longhi P., Park C. Y. ADE Spectral Networks // JHEP. 2016. т. 08. —
  с. 087. arXiv: 1601.02633 [hep-th].
- 217. Hollands L., Neitzke A. BPS states in the Minahan-Nemeschansky E<sub>6</sub> theory // Commun. Math. Phys. — 2017. — т. 353, № 1. — с. 317—351. — arXiv: 1607.
  01743 [hep-th].
- 218. Zamolodchikov A. B. Conformal symmetry in two-dimensional space: Recursion representation of conformal block // Theor. Math. Phys. 1987. т. 73, № 1. с. 1088—1093.
- 219. Kirillov A., Reshetikhin N. Y. Representations of the algebra Uq(sl(2)), q-orthogonal // Infinite dimensional Lie algebras and groups. 1989. т. 7. с. 285.
- 220. Nekrasov N., Okounkov A. Seiberg-Witten theory and random partitions // Prog. Math. — 2006. — т. 244. — с. 525—596. — arXiv: hep-th/0306238.
- 221. Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras / H. Nakajima [и др.] // Duke Mathematical Journal. 1994. т. 76, № 2. с. 365—416.
- 222. Spectral Duality in Integrable Systems from AGT Conjecture / A. Mironov [и др.] // JETP Lett. — 2013. — т. 97. — с. 45—51. — arXiv: 1204.0913 [hep-th].
- 223. Gaiotto D., Koroteev P. On Three Dimensional Quiver Gauge Theories and Integrability // JHEP. — 2013. — т. 05. — с. 126. — arXiv: 1304.0779 [hep-th].

- 224. Bullimore M., Kim H.-C., Koroteev P. Defects and Quantum Seiberg-Witten Geometry // JHEP. — 2015. — т. 05. — с. 095. — arXiv: 1412.6081 [hep-th].
- 225. Boundaries, Mirror Symmetry, and Symplectic Duality in 3d  $\mathcal{N} = 4$  Gauge Theory / M. Bullimore [и др.] // JHEP. — 2016. — т. 10. — с. 108. — arXiv: 1603.08382 [hep-th].
- 226. Intriligator K. A., Seiberg N. Mirror symmetry in three-dimensional gauge theories // Phys. Lett. B. — 1996. — т. 387. — с. 513—519. — arXiv: hepth/9607207.
- 227. Mirror symmetry in three-dimensional theories, SL(2,Z) and D-brane moduli spaces / J. de Boer [и др.] // Nucl. Phys. B. 1997. т. 493. с. 148—176. arXiv: hep-th/9612131.
- 228. Kapustin A., Witten E. Electric-Magnetic Duality And The Geometric Langlands Program // Commun. Num. Theor. Phys. — 2007. — т. 1. — с. 1—236. arXiv: hep-th/0604151.
- 229. Aganagic M., Frenkel E., Okounkov A. Quantum q-Langlands Correspondence // Trans. Moscow Math. Soc. 2018. т. 79. с. 1—83. arXiv: 1701.03146 [hep-th].
- 230. Okounkov A., Smirnov A. Quantum difference equation for Nakajima varieties. 2016. φebp. arXiv: 1602.09007 [math-ph].
- 231. 3d Mirror Symmetry and Elliptic Stable Envelopes / R. Rimányi [и др.]. 2019. февр. arXiv: 1902.03677 [math.AG].
- 232. Dinkins H. 3d mirror symmetry of the cotangent bundle of the full flag variety. - 2020. - arXiv: 2011.08603 [math.AG].
- 233. Aprile F., Pasquetti S., Zenkevich Y. Flipping the head of T[SU(N)]: mirror symmetry, spectral duality and monopoles // JHEP. 2019. т. 04. с. 138. arXiv: 1812.08142 [hep-th].
- 234. Mirror symmetry in (2+1)-dimensions and (1+1)-dimensions / M. Aganagic [и др.] // JHEP. — 2001. — т. 07. — с. 022. — arXiv: hep-th/0105075.
- 235. Koroteev P., Zeitlin A. M. 3d Mirror Symmetry for Instanton Moduli Spaces. 2021. — май. — arXiv: 2105.00588 [math.AG].

- 236. Affleck I., Bykov D., Wamer K. Flag manifold sigma models: spin chains and integrable theories. 2021. янв. arXiv: 2101.11638 [hep-th].
- 237. Maffei A. Quiver varieties of type A. 1998. arXiv: math/9812142 [math.AG].
- 238. Cautis S., Kamnitzer J. Knot homology via derived categories of coherent sheaves I, sl(2) case. 2007. arXiv: math/0701194 [math.AG].
- 239. Cautis S., Kamnitzer J. Knot homology via derived categories of coherent sheaves II, sl<sub>m</sub> case // Inventiones Mathematicae. 2008. июль. т. 174, № 1. с. 165—232. arXiv: 0710.3216 [math.AG].
- 240. Mirković I., Vybornov M. On quiver varieties and affine Grassmannians of type A. —. arXiv: math/0206084 [math.AG].
- 241. Khovanov M., Rozansky L. Topological Landau-Ginzburg models on a worldsheet foam // Adv. Theor. Math. Phys. — 2007. — т. 11, № 2. — с. 233—259. arXiv: hep-th/0404189.
- 242. Smirnov E. Grassmannians, flag varieties, and Gelfand-Zetlin polytopes. 2015. авг. arXiv: 1508.03010 [math.AG].
- 243. Dijkgraaf R., Vafa C. Toda Theories, Matrix Models, Topological Strings, and N=2 Gauge Systems. - 2009. - Ceht. - arXiv: 0909.2453 [hep-th].
- 244. Itoyama H., Maruyoshi K., Oota T. The Quiver Matrix Model and 2d-4d Conformal Connection // Prog. Theor. Phys. — 2010. — т. 123. — с. 957— 987. — arXiv: 0911.4244 [hep-th].
- 245. Eguchi T., Maruyoshi K. Penner Type Matrix Model and Seiberg-Witten Theory // JHEP. — 2010. — т. 02. — с. 022. — arXiv: 0911.4797 [hep-th].
- 246. Schiappa R., Wyllard N. An A(r) threesome: Matrix models, 2d CFTs and 4d N=2 gauge theories // J. Math. Phys. 2010. т. 51. с. 082304. arXiv: 0911.5337 [hep-th].
- 247. Mironov A., Morozov A., Morozov A. Conformal blocks and generalized Selberg integrals // Nucl. Phys. B. — 2011. — т. 843. — с. 534—557. — arXiv: 1003.5752 [hep-th].
- 248. Resolvents and Seiberg-Witten representation for Gaussian beta-ensemble / A. Mironov [и др.] // Theor. Math. Phys. — 2012. — т. 171. — с. 505—522. arXiv: 1103.5470 [hep-th].

- 249. Cautis S., Kamnitzer J. Knot homology via derived categories of coherent sheaves IV, coloured links // arXiv e-prints. — 2014. — arXiv: 1410.7156 [math.AG].
- 250. Klimyk A., Schmüdgen K. Quantum groups and their representations. Springer-Verlag, Berlin, 1997. — c. xx+552. — (Texts and Monographs in Physics). — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-60896-4.
- 251. Mironov A., Morozov A., Shakirov S. On 'Dotsenko-Fateev' representation of the toric conformal blocks // J. Phys. A. – 2011. – т. 44. – с. 085401. – arXiv: 1010.1734 [hep-th].
- 252. Knot invariants from Virasoro related representation and pretzel knots / D. Galakhov [и др.] // Nucl. Phys. B. 2015. т. 899. с. 194—228. arXiv: 1502.02621 [hep-th].
- 253. Faddeev L. D. Modular double of quantum group // Conference Moshe Flato. —
  2000. c. 149—156. arXiv: math/9912078.
- 254. Kashaev R. M. On the spectrum of Dehn twists in quantum Teichmuller theory. 2000. авг. arXiv: math/0008148.
- 255. *Hikami K., Inoue R.* Cluster Algebra and Complex Volume of Once-Punctured Torus Bundles and Two-Bridge Knots. — 2012. — дек. — arXiv: 1212.6042 [math.GT].
- 256. Hikami K., Inoue R. Braids, complex volume and cluster algebras // Algebraic & Geometric Topology. 2015. т. 15, № 4. с. 2175—2194. arXiv: 1304.4776 [math.GT].
- 257. *Hikami K.*, *Inoue R.* Braiding operator via quantum cluster algebra // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2014. т. 47, № 47. с. 474006. arXiv: 1404.2009 [math.QA].
- 258. Braverman A., Dobrovolska G., Finkelberg M. Gaiotto-Witten superpotential and Whittaker D-modules on monopoles // Adv. Math. 2016. т. 300. с. 451—472. arXiv: 1406.6671 [math.AG].
- 259. Link Homologies and the Refined Topological Vertex / S. Gukov [и др.] // Commun. Math. Phys. — 2010. — т. 298. — с. 757—785. — arXiv: 0705.1368 [hep-th].

- 260. Wess J., Bagger J. Supersymmetry and supergravity. Princeton, NJ, USA : Princeton University Press, 1992.
- 261. Marino M. Lectures on localization and matrix models in supersymmetric Chern-Simons-matter theories // J. Phys. A. - 2011. - т. 44. - с. 463001. arXiv: 1104.0783 [hep-th].
- 262. Hori K. Linear models of supersymmetric D-branes // KIAS Annual International Conference on Symplectic Geometry and Mirror Symmetry. — 12.2000. arXiv: hep-th/0012179.
- 263. *Closset C.*, *Guo J.*, *Sharpe E.* B-branes and supersymmetric quivers in 2d // JHEP. — 2018. — т. 02. — с. 051. — arXiv: 1711.10195 [hep-th].
- 264. Gadde A., Gukov S., Putrov P. (0, 2) trialities // JHEP. 2014. т. 03. с. 076. — arXiv: 1310.0818 [hep-th].

#### А Суперсимметрия в теориях Янга-Миллса-Хиггса

# А.1 Трехмерная суперсимметричная $\mathcal{N} = 2$ теория в криволинейном пространстве

В этом приложении мы рассмотрим четырехмерную теорию  $\mathcal{N} = 1$  на  $\mathbb{R}_t \times S^1 \times \Sigma_g$ , где  $\mathbb{R}_t$  — временное направление, а  $\Sigma_g$  – Риманова поверхность рода g. Наша цель – изучить трехмерную теорию  $\mathcal{N} = 2$  на  $\mathbb{R}_t \times \Sigma_g$ , которая может быть выведена из четырехмерной теории  $\mathcal{N} = 1$  на  $\mathbb{R}_t \times S^1 \times \Sigma_g$  путем размерной редукции вдоль  $S^1$ . Тем не менее, обозначения для первой теории более компактны и симметричны, чем для второй, поэтому мы строим суперсимметричные лагранжианы и преобразования в четырех измерениях. Чтобы свести рассмотрение к трем измерениям, мы просто предположим, что все поля постоянны вдоль  $S^1$ , а компонента калибровочного поля  $A_3$  порождает действительный скаляр X.

В этом разделе мы принимаем обозначения [260].

На <br/>  $\mathbb{R}_t \times S^1 \times \Sigma_g$ выбираем метрику произведения и метрику по компоненте<br/>  $\Sigma_g$ в конформно плоской форме:

$$ds^{2} = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -(dx^{0})^{2} + (dx^{3})^{2} + e^{\varphi}dx_{i}dx^{i}.$$
 (A.1)

В этих терминах спин-связность имеет следующий вид ( $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$ ):

$$\omega^{12} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} dx^i \partial_j \varphi . \tag{A.2}$$

R-симметрия становится калибровочной. Соответствующая связность имеет следующий вид:

$$A^{(\mathrm{R})} = -\frac{1}{2}\omega^{12}, \quad F^{(R)} = dA^{(\mathrm{R})} = -\frac{R}{4}\det g \, d^2x, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_g} F^{(R)} = g - 1 \;, \quad (\mathrm{A.3})$$

где R – двумерная скалярная кривизна  $\Sigma_g$ :

$$R = -e^{-\varphi} \,\partial^i \partial_i \varphi \,. \tag{A.4}$$

Канонические R-заряды различных компонент лагранжиана собраны в таблице A.1.

Таблица А.1 – R-заряды полей

Поле	$\xi_{lpha}$	$A_{\mu}$	$\lambda_{lpha}$	D	$\phi$	$\psi_{lpha}$	F	W
R-заряд	1	0	1	0	$r_{\phi}$	$r_{\phi} - 1$	$r_{\phi} - 2$	2

Действие состоит из пяти слагаемых: действий калибровочных полей и киральных, суперпотенциального члена, членов Файе-Иллиополуса и Черна-Саймонса:

$$S = S_{\text{gauge}} + S_{\chi} + S_W + S_{\text{FI}} + S_{\text{top}} . \qquad (A.5)$$

Суперсимметрия порождается ковариантно-постоянным спинором Киллинга *ξ*:

$$\mathcal{D}_{\mu}\xi_{\alpha} = \partial_{\mu}\xi_{\alpha} - \frac{1}{2}\omega_{\mu ab} \left(\sigma^{ab}\xi\right)_{\alpha} + iA^{(R)}_{\mu}\xi_{\alpha} = 0.$$
 (A.6)

Это уравнение имеет постоянное решение:

$$\xi_{\alpha} = (c, 0) . \tag{A.7}$$

Действие калибровочных полей имеет следующий вид:

$$S_{\text{gauge}} = \int_{\mathbb{R}_t \times S^1 \times \Sigma_g} d^4 x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{4} F^{(a)}_{\mu\nu} F^{\mu\nu(a)} - \mathrm{i}\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\sigma}^{\mu} D_{\mu} \lambda^{(a)} + \frac{1}{2} \mathbf{D}^{(a)} \mathbf{D}^{(a)} \right).$$
(A.8)

Это действие иварианто по отношению к следующим преобразованиям суперсимметрии:

$$\delta A^{(a)}_{\mu} = -i\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\sigma}_{\mu}\xi + i\bar{\xi}\bar{\sigma}_{\mu}\lambda^{(a)} ,$$
  

$$\delta \lambda^{(a)}_{\alpha} = (\sigma^{\mu\nu}\xi)_{\alpha}F^{(a)}_{\mu\nu} + i\xi_{\alpha}\mathbf{D}^{(a)} ,$$
  

$$\delta\bar{\lambda}^{(a)}_{\dot{\alpha}} = -\left(\bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)_{\dot{\alpha}}F^{(a)}_{\mu\nu} - i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\mathbf{D}^{(a)} ,$$
  

$$\delta\mathbf{D}^{(a)} = D_{\mu}\bar{\lambda}^{(a)}\bar{\sigma}^{\mu}\xi + \bar{\xi}\bar{\sigma}^{\mu}D_{\mu}\lambda^{(a)} .$$
  
(A.9)

Действие киральных полей имеет следующий вид:

$$S_{\chi} = \int_{\mathbb{R}_{t} \times S^{1} \times \Sigma_{g}} d^{4}x \sqrt{-g} \left( -D_{\mu}\phi^{\dagger}D^{\mu}\phi - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}D_{\mu}\psi + \mathbf{F}^{\dagger}\mathbf{F} + i\sqrt{2}\left(\phi^{\dagger}T^{a}\psi\lambda^{(a)} - \bar{\lambda}^{(a)}\bar{\psi}T^{a}\phi\right) + \mathbf{D}^{(a)}\phi^{\dagger}T^{a}\phi + \frac{i}{4}r_{\phi}R\phi^{\dagger}\phi\right).$$
(A.10)

Это действие инвариантно по отношению к следующим преобразованиям суперсимметрии:

$$\delta \phi = \sqrt{2} \xi \psi ,$$
  

$$\delta \psi_{\alpha} = i\sqrt{2} \left(\sigma^{\mu} \bar{\xi}\right)_{\alpha} D_{\mu} \phi + \sqrt{2} \xi_{\alpha} \mathbf{F} ,$$
  

$$\delta \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = -i\sqrt{2} \left(\xi \sigma^{\mu}\right)_{\dot{\alpha}} D_{\mu} \phi^{\dagger} + \sqrt{2} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \mathbf{F}^{\dagger} ,$$
  

$$\delta \mathbf{F} = i\sqrt{2} \bar{\xi} \bar{\sigma}^{\mu} D_{\mu} \psi + 2i T^{a} \phi \bar{\xi} \bar{\lambda}^{(a)} .$$
(A.11)

Суперпотенциальный член имеет следующий вид:

$$S_W = \int_{\mathbb{R}_t \times S^1 \times \Sigma_g} d^4 x \sqrt{-g} \operatorname{Tr} \left( \mathbf{F} \partial_\phi W - \frac{1}{2} \partial_\phi^2 W \, \psi \psi \right) + (\text{c.c.}) \,. \tag{A.12}$$

Это действие инвариантно относительно преобразований суперсимметрии только в том случае, если суперпотенциал W калибровочно-инвариантен и имеет R-заряд +2. В случае искривленной поверхности  $\Sigma_g$  R-заряд дает явный вклад во взаимодействие с  $A^{(R)}$ .

Член Файе-Иллиополуса определяется действительным параметром *r*:

$$S_{\rm FI} = \int_{\mathbb{R}_t \times S^1 \times \Sigma_g} d^4 x \sqrt{-g} \, (-r) \, \mathbf{D}^{(a)} \, \operatorname{Tr} T^a \, . \tag{A.13}$$

Обычно в трехмерии также рассматривают топологический член Черна-Саймонса (см., например, [261]). Мы опустим его в нашем рассмотрении, поскольку мы заинтересованы в последовательности размерных компактификаций от четырехмерной теории Янга-Миллса к одномерной колчанной квантовой механике, и топологический член Черна-Саймонса не является универсальным ввиду этой редукции.

Антикоммутаторы фермионных полей задаются следующим выражением:

$$\left\{\psi_{\alpha}(\vec{x}), \bar{\psi}_{\dot{\beta}}(\vec{y})\right\} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \sigma^{0}_{\alpha\dot{\beta}} \,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \,. \tag{A.14}$$

Закона Гаусса для калибровочных полей определяется условием, что следующий оператор аннигилирует физические состояния:

$$\mathcal{J}^{a} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta A_{0}} =$$

$$= D_{\mu} F^{\mu 0(a)} - \mathrm{i} f^{abc} \bar{\lambda}^{(b)} \bar{\sigma}^{(0)} \lambda^{(c)} + \mathrm{i} \left( \phi^{\dagger} T^{a} D^{0} \phi - D^{0} \phi^{\dagger} T^{a} \phi \right) + \bar{\psi} \bar{\sigma}^{0} T^{a} \psi .$$
(A.15)

Суперзаряды генерируют преобразования полей:

$$\delta \mathcal{O} = \mathrm{i} \left[ \xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}, \mathcal{O} \right] \; .$$

Единственными компонентами суперзаряда, генерируемыми  $\xi$ , являются  $Q_2$  и  $\bar{Q}_2$ . Выражения для них можно легко вывести из ковариантизированных выражений суперзарядов на плоском фоне:

$$Q_{\alpha} = \int_{S^{1} \times \Sigma_{g}} d^{3}x \sqrt{-g} \left[ \sqrt{2}D_{\mu}\phi^{\dagger} \left(\sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{0}\psi\right)_{\alpha} + i\sqrt{2} \left(\sigma^{0}\bar{\psi}\right)_{\alpha} \mathbf{F} - i\left(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{0}\bar{\lambda}^{(a)}\right)_{\alpha}F^{(a)}_{\mu\nu} - \left(\sigma^{0}\bar{\lambda}^{(a)}\right)_{\alpha}\mathbf{D}^{(a)}\right],$$

$$\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = \int_{S^{1} \times \Sigma_{g}} d^{3}x \sqrt{-g} \left[ \sqrt{2} \left(\bar{\psi}\bar{\sigma}^{0}\sigma^{\mu}\right)_{\dot{\alpha}}D_{\mu}\phi - i\sqrt{2}\mathbf{F}^{\dagger} \left(\psi\sigma^{0}\right)_{\dot{\alpha}} - i\left(\lambda^{(a)}\sigma^{0}\bar{\sigma}^{\mu\nu}\right)_{\dot{\alpha}}F^{(a)}_{\mu\nu} - \left(\lambda^{(a)}\sigma^{0}\right)_{\dot{\alpha}}\mathbf{D}^{(a)}\right].$$
(A.16)

Эти суперзаряды удовлетворяют следующей супералгебре:

$$\{Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}\} = 2H + 2i\hat{G} \left[A_0^{(a)} - A_3^{(a)}\right] - 2Z ,$$
  

$$(Q_2)^2 = \left(\bar{Q}_{\dot{2}}\right)^2 = 0 ,$$
(A.17)

где *H* – гамильтониан, оператор калибровочного преобразования имеет следующий вид:

$$\hat{G}[\epsilon] = \int_{S^1 \times \Sigma_g} d^3 x \sqrt{-g} \ \epsilon \ \mathcal{J}^{(a)} \ . \tag{A.18}$$

Собственные значения центрального заряда могут быть отличны от нуля для определенной формы пространственного многообразия  $S^1 \times \Sigma_g$ , допускающего нетривиальные потоки магнитного поля через  $\Sigma_g$ :

$$Z = \operatorname{vol}_{S^1} \times r \int_{\Sigma_g} F^{(a)} \operatorname{Tr} T^a .$$
(A.19)

### **А.2** $\mathcal{N} = (2, 2)$ суперсимметрия в двух измерениях

#### А.2.1 Двумерная $\mathcal{N} = (2,2)$ калибровочная сигма-модель

Действие  $\mathcal{N} = (2,2)$  двумерной калибровочной линейной сигма-модели также может быть получено путем размерной редукции четырехмерной  $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной теории Янга-Миллса-Хиггса [64; 260].

Векторный мультиплет, описывающий калибровочное поле, состоит из калибровочного векторного поля  $A_{\mu}$ , комплексного скаляра  $\sigma$ , вспомогательного поля **D** и фермионов  $\lambda$ . Здесь для простоты мы рассматриваем только калибровочную теорию U(1), соответствующее действие для мультиплета калибровочного вектора задается следующим выражением:

$$S_{g} = \int dx^{0} dx^{1} \frac{1}{2} \left[ |\partial_{0}\sigma|^{2} - |\partial_{1}\sigma|^{2} + i\bar{\lambda}_{-} \left( \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_{0} + \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_{1} \right) \lambda_{-} + i\bar{\lambda}_{+} \left( \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_{0} - \stackrel{\leftrightarrow}{\partial}_{1} \right) \lambda_{+} + F_{01}^{2} + \mathbf{D}^{2} \right].$$
(A.20)

Преобразования суперсимметрии векторного мультиплета имеют следующий вид:

$$\begin{split} \delta A_{\pm} &= \frac{i}{2} \bar{\epsilon}_{\pm} \lambda_{\pm} + \frac{i}{2} \epsilon_{\pm} \bar{\lambda}_{\pm}, \\ \delta \sigma &= -i \bar{\epsilon}_{+} \lambda_{-} - i \epsilon_{-} \bar{\lambda}_{+} \\ \delta \mathbf{D} &= \frac{1}{2} \Big( - \bar{\epsilon}_{+} (\partial_{0} - \partial_{1}) \lambda_{+} - \bar{\epsilon}_{-} (\partial_{0} + \partial_{1}) \lambda_{-} \\ &+ \epsilon_{+} (\partial_{0} - \partial_{1}) \bar{\lambda}_{+} + \epsilon_{-} (\partial_{0} + \partial_{1}) \bar{\lambda}_{-} \Big), \\ \delta \lambda_{+} &= i \epsilon_{+} (\mathbf{D} + i F_{01}) + \epsilon_{-} (\partial_{0} + \partial_{1}) \bar{\sigma}, \\ \delta \lambda_{-} &= i \epsilon_{-} (\mathbf{D} - i F_{01}) + \epsilon_{+} (\partial_{0} - \partial_{1}) \sigma. \end{split}$$
(A.21)

В данных выражениях мы использовали обозначения  $A_{\pm} := \frac{1}{2}(A_0 \pm A_1).$ 

Можно ввести киральные мультиплеты, состоящие из комплексных скалярных полей  $\phi$ , фермионов  $\psi$  и вспомогательных комплексных скаляров F, заряженных в некотором представлении соответствующей калибровочной группы. Здесь мы рассматриваем поле с электрическим зарядом Q:

$$S_{\chi} = \int dx^{0} dx^{1} \left[ |D_{0}\phi|^{2} - |D_{1}\phi|^{2} + i\bar{\psi}_{-} \left( \overleftrightarrow{D}_{0} + \overleftrightarrow{D}_{1} \right) \psi_{-} + i\bar{\psi}_{+} \left( \overleftrightarrow{D}_{0} - \overleftrightarrow{D}_{1} \right) \psi_{+} + Q\mathbf{D}|\phi|^{2} + |\mathbf{F}|^{2} - Q^{2}|\sigma\phi|^{2} - Q\bar{\psi}_{-}\sigma\psi_{+} - Q\bar{\psi}_{+}\bar{\sigma}\psi_{-} + iQ\bar{\phi} \left( \lambda_{+}\psi_{-} - \lambda_{-}\psi_{+} \right) + iQ\phi \left( \bar{\psi}_{+}\bar{\lambda}_{-} - \bar{\psi}_{-}\bar{\lambda}_{+} \right) \right].$$
(A.22)

Суперсимметричные преобразования для кирального мультиплета имеют следующий вид:

$$\begin{split} \delta\phi &= \epsilon_{+}\psi_{-} - \epsilon_{-}\psi_{+}, \\ \delta\psi_{+} &= \mathrm{i}\bar{\epsilon}_{-}(D_{0} + D_{1})\phi + \epsilon_{+}\mathbf{F} - Q\bar{\epsilon}_{+}\bar{\sigma}\phi, \\ \delta\psi_{-} &= -\mathrm{i}\bar{\epsilon}_{+}(D_{0} - D_{1})\phi + \epsilon_{-}\mathbf{F} + Q\bar{\epsilon}_{-}\sigma\phi, \\ \delta\mathbf{F} &= -\mathrm{i}\bar{\epsilon}_{+}(D_{0} - D_{1})\psi_{+} - \mathrm{i}\bar{\epsilon}_{-}(D_{0} + D_{1})\psi_{-} + \\ &+ (\bar{\epsilon}_{+}\bar{\sigma}\psi_{-} + \bar{\epsilon}_{-}\sigma\psi_{+}) + \mathrm{i}(\bar{\epsilon}_{-}\bar{\lambda}_{+} - \bar{\epsilon}_{+}\bar{\lambda}_{-})\phi. \end{split}$$
(A.23)

Дополнительные параметры могут быть введены с помощью топологического члена и члена Файе-Иллиополуса:

$$\mathcal{S}_{\mathrm{FI},\theta} = \int dx^0 dx^1 \left[ -r\mathbf{D} + \theta F_{01} \right] \,. \tag{A.24}$$

Также мы можем рассмотреть суперпотенциальный член, определяемый голоморфной функцией киральных полей  $W(\phi)$ :

$$\mathcal{S}_W = \int dx^0 dx^1 \operatorname{Re}\left(\mathbf{F}W' - W''\psi_+\psi_-\right) \,. \tag{A.25}$$

Теперь нам хотелось бы проквантовать эту теорию. Поля **D** и **F** нединамические, поэтому приобретают только вакуумные средние:

$$\mathbf{D} = r - Q|\phi|^2, \quad \mathbf{F} = -\frac{1}{2}\bar{W}'. \tag{A.26}$$

*А*<sub>0</sub> также нединамическое поле и накладывает на состояния связь первого рода – закон Гаусса:

$$\mathcal{J} = Q \left( i (\bar{\phi} D_0 \phi - \phi D_0 \bar{\phi}) + \bar{\psi}_+ \psi_+ + \bar{\psi}_- \psi_- \right) - \partial_1 F_{01} + \rho_{\text{bdry}}, \qquad (A.27)$$

где  $\rho_{\rm bdry}$  – электрический заряд, создаваемый границей.

Под полями понимаются операторы в гильбертовом пространстве, операторы импульса определяются как соответствующие вариации:

$$F_{01}(x^1) = -i\frac{\delta}{\delta A_1(x^1)} - \theta, \quad \partial_0 \sigma(x^1) = -2i\frac{\delta}{\delta \bar{\sigma}(x^1)}, \quad D_0 \phi(x^1) = -i\frac{\delta}{\delta \bar{\phi}(x^1)}$$

Физическое гильбертово пространство в этой схеме квантования определяется условием:

$$\mathcal{J}|\text{phys}\rangle = 0.$$

Мы выводим суперзаряды как пространственные интегралы соответствующих супертоков Нетер:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{+} &= \int dx^{1} \Big[ \frac{1}{2} \Big( -\bar{\lambda}_{-} (\mathbf{D} - \mathrm{i}F_{01}) + \mathrm{i}\bar{\lambda}_{+} (\partial_{0} + \partial_{1})\bar{\sigma} \Big) + \\ &+ \Big( \psi_{+} (D_{0} + D_{1})\bar{\phi} + \mathrm{i}\bar{\psi}_{-}\mathbf{F} + \mathrm{i}Q\psi_{-}\bar{\sigma}\bar{\phi} \Big) \Big], \\ \mathcal{Q}_{-} &= \int dx^{1} \Big[ \frac{1}{2} \Big( \bar{\lambda}_{+} (\mathbf{D} + \mathrm{i}F_{01}) - \mathrm{i}\bar{\lambda}_{-} (\partial_{0} - \partial_{1})\sigma \Big) + \\ &+ \Big( \psi_{-} (D_{0} - D_{1})\bar{\phi} - \mathrm{i}\bar{\psi}_{+}\mathbf{F} + \mathrm{i}Q\psi_{+}\sigma\bar{\phi} \Big) \Big], \\ \bar{\mathcal{Q}}_{+} &= \int dx^{1} \Big[ \frac{1}{2} \Big( -\lambda_{-} (\mathbf{D} + \mathrm{i}F_{01}) - \mathrm{i}\lambda_{+} (\partial_{0} + \partial_{1})\sigma \Big) + \\ &+ \Big( \bar{\psi}_{+} (D_{0} + D_{1})\phi - \mathrm{i}\psi_{-}\bar{\mathbf{F}} - \mathrm{i}Q\bar{\psi}_{-}\sigma\phi \Big) \Big], \end{aligned}$$
(A.28)  
$$\bar{\mathcal{Q}}_{-} &= \int dx^{1} \Big[ \frac{1}{2} \Big( \lambda_{+} (\mathbf{D} - \mathrm{i}F_{01}) + \mathrm{i}\lambda_{-} (\partial_{0} - \partial_{1})\bar{\sigma} \Big) + \\ &+ \Big( \bar{\psi}_{-} (D_{0} - D_{1})\phi + \mathrm{i}\psi_{+}\bar{\mathbf{F}} - \mathrm{i}Q\bar{\psi}_{+}\bar{\sigma}\phi \Big) \Big]. \end{aligned}$$

Эти генераторы удовлетворяют следующей алгебре суперсимметрии:

$$\mathcal{Q}_{+}^{2} = \int dx^{1} \frac{Q}{2} \bar{\sigma} \bar{\phi} \bar{W}', \quad \mathcal{Q}_{-}^{2} = -\int dx^{1} \frac{Q}{2} \sigma \bar{\phi} \bar{W}', \left\{ \mathcal{Q}_{\pm}, \bar{\mathcal{Q}}_{\pm} \right\} = \mathcal{H} \pm \mathcal{P}, \left\{ \mathcal{Q}_{+}, \mathcal{Q}_{-} \right\} = \mathcal{Z}, \left\{ \mathcal{Q}_{+}, \bar{\mathcal{Q}}_{-} \right\} = \tilde{\mathcal{Z}} + \int dx^{1} \bar{\sigma} \mathcal{J},$$
(A.29)

где  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{P}$  – гамильтониан и оператор импульса, соответствующий действию

(А.5).  $\mathcal{Z}$  и  $\tilde{\mathcal{Z}}$  – центральные заряды, определяемые следующими выражениями:

$$\mathcal{Z} = \int dx^1 \left[ i\bar{W}' D_1 \bar{\phi} + \frac{i}{2} \partial_1 (\bar{\lambda}_- \bar{\lambda}_+) \right],$$
  

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \int dx^1 \left[ i\partial_1 (\bar{\psi}_- \psi_+ + \bar{\sigma} (\mathbf{D} - iF_{01})) \right].$$
(A.30)

Эти выражения допускают непосредственное обобщение на произвольные калибровочные группы и представления.

Также нам нужно будет рассмотреть несколько разновидностей киральных мультиплетов. Это означает, что мы заряжаем наши киральные поля относительно нединамической группы ароматов  $U(N_f)$ , где  $N_f$  – количество ароматов. Мы присваиваем комплексные массы  $\mu_i$ ,  $i = 1, \ldots, N_f$  киральным полям. Для этого калибровочная группа  $U(N_f)$  замораживается. Скалярному полю присваивается нединамическое вакуумное среднее, параметризующее заряд ароматической симметрии:

$$\sigma_f = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{N_f}),$$

все остальные поля в мультиплете остаются нулевыми.

#### А.2.2 А-твист и В-твист

А-твистом и В-твистом, следуя общепринятой терминологии [64], мы называем следующие семейства суперзарядов ( $\zeta$  – комплексная фаза):

$$\mathcal{Q}_{A} = \zeta^{\frac{1}{2}} \mathcal{Q}_{-} + \zeta^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{Q}}_{+}, \quad \mathcal{Q}_{A}^{\dagger} = \bar{\mathcal{Q}}_{A} = \zeta^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{Q}}_{-} + \zeta^{\frac{1}{2}} \mathcal{Q}_{+}, 
\mathcal{Q}_{B} = \zeta^{\frac{1}{2}} \mathcal{Q}_{-} + \zeta^{-\frac{1}{2}} \mathcal{Q}_{+}, \quad \mathcal{Q}_{B}^{\dagger} = \bar{\mathcal{Q}}_{B} = \zeta^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{Q}}_{-} + \zeta^{\frac{1}{2}} \bar{\mathcal{Q}}_{+}.$$
(A.31)

Соответствующие подалгебры, порождаемые этими суперзарядами, легко вычислить (здесь мы уже применили условие закона Гаусса  $\mathcal{J} = 0$ ):

$$\mathcal{Q}_{A}^{2} = -\mathrm{i} \int dx^{1} \, Q\sigma \operatorname{Im}(\zeta^{-1}\phi W') + \tilde{\mathcal{Z}}^{*}, \quad \left\{ \mathcal{Q}_{A}, \bar{\mathcal{Q}}_{A} \right\} = 2\mathcal{H} + 2\operatorname{Re}(\zeta \mathcal{Z}),$$

$$\mathcal{Q}_{B}^{2} = \mathrm{i} \int dx^{1} \, Q \operatorname{Im}(\zeta\sigma) \bar{\phi} \bar{W}' + \mathcal{Z}, \quad \left\{ \mathcal{Q}_{B}, \bar{\mathcal{Q}}_{B} \right\} = 2\mathcal{H} + 2\operatorname{Re}(\zeta^{-1}\tilde{\mathcal{Z}}).$$
(A.32)

Мы строим основные состояния БПЗ как когомологии соответствующего суперзаряда. Чтобы эта процедура работала, нам необходимо, чтобы соответствующий суперзаряд был нильпотентным. Другими словами, когда мы рассматриваем модель Ландау-Гинзбурга, сохраняющую А-твист, мы предполагаем  $Q_A^2 = 0$ . Когда же мы рассматриваем ЛКСМ, сохраняющий В-твист, мы принимаем  $Q_B^2 = 0$ . В первом случае мы предполагаем, что киральные поля не заряжены и отсутствует калибровочная симметрия, суперпотенциал может быть произвольной голоморфной функцией; во втором случае мы считаем суперпотенциал калибровочно-инвариантной функцией киральных полей. В обоих случаях член, содержащий суперпотенциал, зануляется в квадрате суперзаряда, а оставшаяся часть описывает браны как граничные условия на полях. При этих предположениях суперзаряды в этих моделях могут быть представлены следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{A} &= e^{-\mathfrak{H}_{A}} \int dx^{1} \left( -i\sqrt{2}\zeta^{\frac{1}{2}}\psi_{-}\frac{\delta}{\delta\phi} - i\sqrt{2}\zeta^{-\frac{1}{2}}\bar{\psi}_{+}\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}} \right) e^{\mathfrak{H}_{A}}, \\
\mathfrak{H}_{A} &= \int dx^{1} \left[ i\,\bar{\phi}\partial_{1}\phi - \operatorname{Re}\left(\zeta^{-1}W\right) \right]; \\
\bar{\mathcal{Q}}_{B} &= e^{-\mathfrak{H}_{B}} \int dx^{1} \left[ -\lambda_{1}\left(\frac{\delta}{\delta A_{1}} + i\frac{\delta}{\delta\sigma_{\mathbb{I}}}\right) + \lambda_{2}\frac{\delta}{\delta\sigma_{\mathbb{R}}} - \right. \\
\left. - i\sqrt{2}\bar{\psi}_{1}\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}} - \sqrt{2}\bar{\psi}_{2}\left(\hat{V}\cdot\phi\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_{2}W' \right] e^{\mathfrak{H}_{B}}, \\
- i\sqrt{2}\bar{\psi}_{1}\frac{\delta}{\delta\bar{\phi}} - \sqrt{2}\bar{\psi}_{2}\left(\hat{V}\cdot\phi\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_{2}W' \right] e^{\mathfrak{H}_{B}}, \\
\mathfrak{H}_{B} &= \int dx^{1} \left(\sigma_{\mathbb{I}}\partial_{1}\sigma_{\mathbb{R}} - \sigma_{\mathbb{R}}\left(r - Q|\phi|^{2}\right) - i\theta A_{1}\right), \\
\hat{V}\cdot\phi &= D_{1}\phi - Q\sigma_{\mathbb{I}}\phi.
\end{aligned}$$
(A.33a)

Здесь мы ввели следующие обозначения:

$$\lambda_{1} = \frac{1}{2} \left( \zeta^{\frac{1}{2}} \lambda_{-} + \zeta^{-\frac{1}{2}} \lambda_{+} \right), \quad \lambda_{2} = \frac{1}{2} \left( \zeta^{\frac{1}{2}} \lambda_{-} - \zeta^{-\frac{1}{2}} \lambda_{+} \right),$$
  

$$\psi_{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \zeta^{\frac{1}{2}} \psi_{-} + \zeta^{-\frac{1}{2}} \psi_{+} \right), \quad \psi_{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \zeta^{\frac{1}{2}} \psi_{-} - \zeta^{-\frac{1}{2}} \psi_{+} \right), \quad (A.34)$$
  

$$\sigma_{\mathbb{R}} = \frac{\zeta \sigma + \zeta^{-1} \bar{\sigma}}{2}, \quad \sigma_{\mathbb{I}} = \frac{\zeta \sigma - \zeta^{-1} \bar{\sigma}}{2\mathrm{i}}.$$

Заметим, что в этих переменных изменяется норма фермионных полей:

$$\frac{1}{2}\bar{\lambda}_{-}\lambda_{-} + \frac{1}{2}\bar{\lambda}_{+}\lambda_{+} + \bar{\psi}_{-}\psi_{-} + \bar{\psi}_{+}\psi_{+} = \bar{\lambda}_{1}\lambda_{1} + \bar{\lambda}_{2}\lambda_{2} + \bar{\psi}_{1}\psi_{1} + \bar{\psi}_{2}\psi_{2}.$$
(A.35)

#### А.2.3 Модель Ландау-Гинзбурга

Также нам понадобится сигма-модель с таргет-пространством, заданным кэлеровым многообразием X. Рассмотрим n киральных полей  $\phi^i$ , определяющие координаты на X. Метрика определяется потенциалом Кэлера:

$$g_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} K(\phi, \phi) \,.$$

Лагранжиан этой модели имеет следующий вид:<sup>1</sup>

$$\mathcal{S} = \int dx^0 dx^1 \left[ -g_{i\bar{j}}\partial^\mu \phi^i \partial_\mu \overline{\phi^j} + 2ig_{i\bar{j}}\overline{\psi_-^j} D_+ \psi_-^i + 2ig_{i\bar{j}}\overline{\psi_+^j} D_- \psi_+^i + R_{i\bar{j}k\bar{l}}\psi_+^k \psi_-^k \overline{\psi_-^j}\overline{\psi_+^l} + g_{i\bar{j}}\left(F^i - \Gamma_{jk}^i \psi_+^j \psi_-^k\right) \left(\overline{F^i} - \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}}\overline{\psi_+^j}\overline{\psi_-^k}\right) + \frac{1}{2}F^i \partial_i W - \frac{1}{2}\partial_{ij}^2 W \psi_+^i \psi_-^j + \frac{1}{2}\overline{F^i}\overline{\partial_i W} - \frac{1}{2}\overline{\partial_{ij}^2 W \psi_-^i}\overline{\psi_+^j} \right].$$
(A.36)

Соответствующие суперзаряды имеют следующий вид:

$$\mathcal{Q}_{\pm} = \int dx^1 \left( g_{i\bar{j}} (\partial_0 \pm \partial_1) \overline{\phi^j} \psi^i_{\pm} \mp \frac{\mathrm{i}}{2} \overline{\psi^i_{\mp}} \overline{\partial_i W} \right).$$
(A.37)

Для А-твиста получаем следующее выражение:

$$\mathcal{Q}_{A} = \int dx^{1} \left[ -\mathrm{i}\psi^{i}_{+} \left( \delta_{\phi^{i}} + \mathrm{i}g_{i\bar{j}}\partial_{1}\overline{\phi^{j}} - \frac{1}{2}\partial_{i}W \right) - \mathrm{i}\overline{\psi^{i}_{-}} \left( \delta_{\overline{\phi^{i}}} - \mathrm{i}g_{\bar{i}j}\partial_{1}\phi^{j} - \frac{1}{2}\overline{\partial_{i}W} \right) \right].$$
(A.38)

#### А.3 Граничные условия В-типа

#### А.3.1 Фермионы на границе и граничный заряд

Опишем действие В-твиста для преобразований суперсимметрии в ЛКСМ:

$$\epsilon_{+} = \zeta^{\frac{1}{2}}\nu, \quad \epsilon_{-} = -\zeta^{-\frac{1}{2}}\nu, \quad \bar{\epsilon}_{+} = \zeta^{-\frac{1}{2}}\bar{\nu}, \quad \epsilon_{-} = -\zeta^{\frac{1}{2}}\bar{\nu}$$

 ${}^{1}\partial_{\pm} = \frac{1}{2}(\partial_{0} \pm \partial_{1})$ 

Выражения (А.21) и (А.23) при этой замене изменяются следующим образом:

$$\delta A_{0} = -i \left( \bar{\nu} \lambda_{2} + \nu \bar{\lambda}_{2} \right), \qquad \delta \lambda_{1} = \nu \left( -\partial_{1} \sigma_{1} + i \partial_{0} \sigma_{2} - F_{01} \right),$$

$$\delta A_{1} = i \left( \bar{\nu} \lambda_{1} + \nu \bar{\lambda}_{1} \right), \qquad \delta \lambda_{2} = \nu \left( \partial_{0} \sigma_{1} - i \partial_{1} \sigma_{2} - i \Delta \right),$$

$$\delta \sigma_{1} = -i \left( \bar{\nu} \lambda_{2} + \nu \bar{\lambda}_{2} \right), \qquad \delta \phi = \sqrt{2} \nu \psi_{1},$$

$$\delta \sigma_{2} = \nu \bar{\lambda}_{1} - \bar{\nu} \lambda_{1}, \qquad \delta \psi_{1} = -i \sqrt{2} \bar{\nu} \left( D_{0} \phi - i Q \sigma_{1} \phi \right), \qquad (A.39)$$

$$\delta \psi_{2} = -i \sqrt{2} \bar{\nu} \left( -D_{1} \phi + Q \sigma_{2} \phi \right) - \sqrt{2} F \nu,$$

$$\delta \Delta = \bar{\nu} \partial_{1} \lambda_{1} + \bar{\nu} \partial_{0} \lambda_{2} - \nu \partial_{1} \bar{\lambda}_{1} - \nu \partial_{0} \bar{\lambda}_{2},$$

$$\delta F = i \sqrt{2} \bar{\nu} \left( D_{1} \psi_{1} - Q \sigma_{2} \psi_{1} \right) + i \sqrt{2} \bar{\nu} \left( D_{0} \psi_{2} - i Q \sigma_{1} \psi_{2} \right) - 2i Q \bar{\nu} \bar{\lambda}_{1} \phi.$$

Заметим, что суперсимметрия позволяет ввести мультиплет Ферми [262], рассматривая следующую суперсимметричную конфигурацию поля:

$$\phi = 0, \quad \psi_1 = 0.$$

Оказывается, что пространственная производная  $D_1$  исчезает из действия. Поэтому мы рассматриваем его как граничный мультиплет Ферми. Разрешается взаимодействие с полями в объеме через суперпотенциал, однако от этого суперпотенциала сохраняется только первая производная. Мы называем это фермионным суперпотенциалом V.

Введем граничный мультиплет Ферми как пару ферми<br/>онов  $\chi$ и вспомогательного поля U:

$$\delta \chi = -\sqrt{2}U\nu,$$
  

$$\delta U = i\sqrt{2} \left( D_0 \chi - iQ\sigma_{\mathbb{R}} \chi \right).$$
(A.40)

Действие для граничного мультиплета Ферми имеет следующий вид:

$$S_{\text{b.f.}} = \int dx^0 \left[ i\bar{\chi} \overset{\leftrightarrow}{D}_0 \chi + |U|^2 + Q\sigma_1 \bar{\chi} \chi \right] + \int dx^0 \operatorname{Re} \left( UV(\phi) - V'(\phi)\psi_1 \chi \right).$$
(A.41)

Предположим, что на границе вставлена петля Вильсона в представлении  $\kappa$  и граничный фермион, другими словами, модифицируем действие следующим

образом:

$$\mathcal{S}_{2d} \to \mathcal{S}_{2d} + \kappa \int dx^0 (A_0 - \sigma_{\mathbb{R}}) + S_{b.f.}$$
 (A.42)

Этот дополнительный член создает нетривиальный электрический заряд, изменяющий условие закона Гаусса (А.27):

$$\rho_{\rm bdry} = \left(F_{01} + Q_{\chi}\bar{\chi}\chi - \kappa + \theta\right)\delta\left(x^1 - x^1_{\rm bdry}\right). \tag{A.43}$$

Суперзаряд модифицируется соответствующим образом за счет смещения граничного значения:

$$\bar{\mathcal{Q}}_B \to \bar{\mathcal{Q}}_B + \bar{\mathcal{Q}}_{bdry}, \quad \bar{\mathcal{Q}}_{bdry} = \frac{i}{\sqrt{2}} \chi V(\phi) \Big|_{bdry}.$$
 (A.44)

Граничный суперзаряд  $\bar{Q}_{bdry}$  определяет комплекс векторных расслоений на граничной бране [88].

Простой и канонический пример такой идентификации следующий. Рассмотрим неособое многообразие X и подмногообразие  $Y \hookrightarrow X$  коразмерности 1, заданное алгебраическим уравнением:

$$V(\phi_1, \dots, \phi_n) = 0, \tag{A.45}$$

где  $\phi_i$  – координаты X. Граничный суперзаряд (А.44) определяет каноническое проективное разрешение структурного пучка на Y на основе его дивизора Вейля.

#### А.3.2 Граничные условия, отвечающие бране

Граничные условия браны, отвечающие В-твисту, для векторного мультиплета естественным образом следуют из условия  $Q_B^2 = 0$ . Они окажутся в специальном лагранжевом локусе для твистованного кирального поля  $\Sigma$ . Однако, граничные условия для киральных полей при этом остаются неопределенными.

Прежде чем продолжить, нам нужно наложить граничные условия для других полей, определяющих соответствующие В-браны.

Давайте еще раз рассмотрим суперсимметрию  $\mathcal{N} = (2, 2)$  в терминах суперполей [64; 260]. Помимо реальных пространственно-временных координат  $x^0$ и  $x^1$  суперпространство также включает в себя грассмановы координаты:

$$\theta^{\pm}, \quad \bar{\theta}^{\pm}.$$

Суперзаряды порождают следующие векторные поля:

$$\mathcal{Q}_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \theta^{\pm}} + i\bar{\theta}^{\pm}\partial_{\pm}, \quad \bar{\mathcal{Q}}_{\pm} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\pm}} - i\theta^{\pm}\partial_{\pm},$$
(A.46)

где

$$\partial_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \partial_0 \pm \partial_1 \right), \quad x^{\pm} = x^0 \pm x^1.$$

Ковариантные производные определяются следующим образом:

$$D_{\pm} = \frac{\partial}{\partial \theta^{\pm}} - \mathrm{i}\bar{\theta}^{\pm}\partial_{\pm}, \quad \bar{D}_{\pm} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\pm}} + \mathrm{i}\theta^{\pm}\partial_{\pm}.$$

Киральное суперполе определено следующим условием:

$$\bar{D}_{\pm}\Phi = 0. \tag{A.47}$$

Как и ранее, произведем замену переменных:

$$\theta^{\pm} = \frac{\zeta^{\pm \frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \left(\theta_1 \mp \theta_2\right), \quad \bar{\theta}^{\pm} = \frac{\zeta^{\pm \frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \left(\bar{\theta}_1 \mp \bar{\theta}_2\right). \tag{A.48}$$

В этих терминах поля суперзарядов переписываются следующим образом:

$$\mathcal{Q}_B = \sqrt{2} \left( \frac{\partial}{\partial \theta_1} + i\bar{\theta}_1 \partial_0 \right) + \sqrt{2} i\bar{\theta}_2 \partial_1,$$
  

$$\bar{\mathcal{Q}}_B = -\sqrt{2} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} + i\theta_1 \partial_0 \right) - \sqrt{2} i\theta_2 \partial_1.$$
(A.49)

Определим новые эффективные одномерные суперзаряды:

$$\mathcal{Q}_0 = \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \mathrm{i} \bar{\theta}_1 \partial_0, \quad \bar{\mathcal{Q}}_0 = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_1} - \mathrm{i} \theta_1 \partial_0$$

Также мы определяем одномерные киральные и супермультиплеты Ферми, преобразуемые одномерными суперзарядами:

$$\Phi_{1d} = \phi + \theta_1 \psi_1 - \frac{i}{2} \theta_1 \bar{\theta}_1 \partial_0 \phi,$$
  

$$\Psi_{1d} = \psi_2 - \theta_1 F - \frac{i}{2} \theta_1 \bar{\theta}_1 \partial_0 \psi_2.$$
(A.50)

Двумерный киральный мультиплет может быть разложен в терминах одномерного мультиплета:

$$\Phi = \Phi_{1d} + \theta_2 \left( \Psi_{1d} + \frac{i}{2} \bar{\theta}_1 \partial_1 \Phi_{1d} \right) + \frac{i}{2} \theta_1 \bar{\theta}_2 \partial_1 \Phi_{1d} - \frac{i}{2} \theta_2 \bar{\theta}_2 \left( \partial_0 \Phi_{1d} + \theta_1 \partial_1 \Psi_{1d} + \frac{i}{2} \theta_1 \bar{\theta}_1 \partial_1^2 \Phi_{1d} \right).$$
(A.51)

Суперзаряды действуют на этих полях следующими преобразованиями:

$$\mathcal{Q}_B \Phi_{1d} = \mathcal{Q}_0 \Phi_{1d}, \quad \bar{\mathcal{Q}}_B \Phi_{1d} = \bar{\mathcal{Q}}_0 \Phi_{1d},$$
  
$$\mathcal{Q}_B \Psi_{1d} = \mathcal{Q}_0 \Psi_{1d}, \quad \bar{\mathcal{Q}}_B \Psi_{1d} = \bar{\mathcal{Q}}_0 \Psi_{1d} + i\partial_1 \Phi_{1d}.$$
 (A.52)

Следовательно, согласно [66], естественным выбором явно суперсимметричных инвариантных граничных условий для кирального мультиплета является следующий:

$$\Psi_{1d}\Big|_{bdry} = \partial_1 \Phi_{1d}\Big|_{bdry} = 0.$$
 (A.53)

## А.4 Одномерная $\mathcal{N}=4$ суперсимметричная матричная квантовая механика

В этом приложении мы резюмируем некоторые основные свойства калибровочной  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной квантовой механики, следуя [98; 145]. Эта теория также получается размерной редукцией из четырехмерной  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричной теории Янга-Миллса.

Лагранжиан калибровочных полей имеет следующий вид:

$$L_G = \operatorname{Tr}\left[\frac{1}{2}(\mathcal{D}_0 X^i)^2 + \frac{1}{4}\left[X^i, X^j\right]^2 - \mathrm{i}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^0\mathcal{D}_0\lambda + \bar{\lambda}\bar{\sigma}^i\left[X^i, \lambda\right] + \frac{1}{2}D^2 - \theta D\right],\tag{A.54}$$

где все поля находятся в присоединенном представлении U(N).

Суперзаряды в этой теории составляют следующую супералгебру:

$$\{Q_{\alpha}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = -2\sigma^{0}_{\alpha\dot{\alpha}}H - 2i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\hat{G}(X_{\mu}) ,$$
  
$$\{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} = 8\bar{q}_{a} \left[ \left(\sigma^{0i}\right)_{\alpha}{}^{\gamma}\epsilon_{\gamma\beta}X^{i} \right] F_{a} ,$$
  
(A.55)

где H – гамильтониан системы, и мы обозначили  $X^{\mu} = (A, X^1, X^2, X^3).$ 

Суперзаряд может быть представлен в терминах дифференциальной формы ( $\Phi=X^1+\mathrm{i} X^3)$ 

$$\bar{Q}_{\dot{1}} = e^{-\mathfrak{H}} \left( d_{X^3} + \bar{\partial}_{\Phi,q} + \iota_V + dW \wedge \right) e^{\mathfrak{H}} , \qquad (A.56)$$

где мы определяем функцию высоты:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{Tr} X^{3} \left( \frac{1}{2} \left[ \Phi, \bar{\Phi} \right] - D \right) , \qquad (A.57)$$

и действие векторного поля на киральных полях:

$$V(q) = \Phi \cdot q \; \frac{\partial}{\partial q} \;. \tag{A.58}$$

В этих терминах основные состояния отождествляются с калибровочно-инвариантными гармоническими формами.

Суперсимметричная квантовая механика имеет две глобальные симметрии:  $SU(2)_J$ , покрывающую SO(3), вращающую компактифицированные направления, полученные от редукции четырехмерной теории, и *R*-симметрия суперзарядов. Поля образуют представления этих двух симметрий, описанные в таблице А.2. Генераторы этих симметрий задаются соответствующими нетеров-

Таблица А.2 – Заряды полей в суперсимметричной квантовой механике

Поле	A	$X_i$	$\lambda_{lpha}$	D	q	$\psi_{lpha}$	F
$SU(2)_J$	1	3	2	1	1	2	1
$U(1)_R$	0	0	1/2	0	r	r - 1/2	r-1

скими токами:

$$J_{i} = \operatorname{Tr} \left[ -\mathrm{i}\epsilon_{ijk}X_{j}\frac{\partial}{\partial X_{k}} + \bar{\lambda}\bar{\sigma}^{0}\sigma^{0i}\lambda + \sum_{a}\bar{\psi}_{a}\bar{\sigma}^{0}\sigma^{0i}\psi_{a} \right],$$

$$R = \operatorname{Tr} \left[ \frac{1}{2}\bar{\lambda}\bar{\sigma}^{0}\lambda + r\sum_{a} \left( q_{a}\frac{\partial}{\partial q_{a}} - \bar{q}_{a}\frac{\partial}{\partial \bar{q}_{a}} \right) + \left( r - \frac{1}{2} \right) \sum_{a}\bar{\psi}_{a}\bar{\sigma}^{0}\psi_{a} \right].$$
(A.59)

Суперзаряды коммутируют с оператором углового момента следующим образом:

$$[J_k, Q_\alpha] = (\sigma^{k0})_\alpha{}^\beta Q_\beta , \quad [J_k, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = \bar{Q}_{\dot{\beta}} (\bar{\sigma}^{k0})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} . \tag{A.60}$$

В частности, имеем:

$$[J_3, Q_1] = -\frac{1}{2}Q_1 , \quad [J_3, Q_2] = \frac{1}{2}Q_2 , \quad [J_3, \bar{Q}_1] = \frac{1}{2}\bar{Q}_1 , \quad [J_3, \bar{Q}_2] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_2 .$$

Коммутаторы с *R*-зарядом имеют следующий вид:

$$[R, Q_{\alpha}] = \frac{1}{2}Q_{\alpha} , \quad [R, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{\alpha}} .$$
 (A.61)

Используя эти соотношения, легко построить два непертурбативных оператора:

$$\mathcal{J}_{+} = J_3 + R , \quad \mathcal{J}_{-} = J_3 - R , \qquad (A.62)$$

коммутирующие с половиной полной суперсимметрии:

$$[Q_1, \mathcal{J}_+] = [\bar{Q}_1, \mathcal{J}_+] = 0, \quad [Q_2, \mathcal{J}_-] = [\bar{Q}_2, \mathcal{J}_-] = 0.$$

Для расчета защищенного спинового характера мы будем использовать описание [83], где составные состояния БПЗ представлены «молекулами» взаимодействующих элементарных дионов. Заметим, что более строгий подход [145] предполагает выбор любого из гамильтоновых представлений:  $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \{Q_1, \bar{Q}_1\}$ или  $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \{Q_2, \bar{Q}_2\}$ . В этих двух случаях суперсимметричные индексы, включающие вклад спинов, имеют следующий вид:

$$\Omega_{+} = \operatorname{Tr}(-1)^{F} e^{\beta \frac{1}{2} \{Q_{1}, \bar{Q}_{1}\}} y^{J_{3}+R}, \quad \Omega_{-} = \operatorname{Tr}(-1)^{F} e^{\beta \frac{1}{2} \{Q_{2}, \bar{Q}_{2}\}} y^{J_{3}-R}.$$
(A.63)

К счастью, благодаря теореме об отсутствии экзотики [154], результирующие состояния БПЗ являются *R*-синглетами. Таким образом, без ограничения общности мы могли бы выбрать любой из суперзарядов, чтобы определить дифференциал в пространстве полей.

### А.5 $\mathcal{N} = (0,2)$ суперсимметричная эффективная теория D8-D0 бран

Эффективная теория системы бран D8-D0, обертывающей четырехмерное многообразие Калаби-Яу, представляет собой двумерную  $\mathcal{N} = (0, 2)$  суперсимметричную эффективную теорию [263]. В этом приложении мы резюмируем основные особенности этой  $\mathcal{N} = (0, 2)$  двумерной теории, следуя [264].

В этой теории есть три вида мультиплетов:

- Киральный мультиплет:

$$\Phi = \phi + \sqrt{2}\theta^+ \chi_+ - i\,\theta^+ \bar{\theta}^+ \,\partial_+ \phi\,. \tag{A.64}$$

- Мультиплет Ферми:

$$\Psi = \psi_{-} - \sqrt{2}\theta^{+}G - \mathrm{i}\,\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\,\partial_{+}\psi_{-} - \sqrt{2}\bar{\theta}^{+}E\,,\qquad(\mathrm{A.65})$$

где *Е* – голоморфная функция киральных полей  $\phi$ .

- Векторный мультиплет:

$$V = A_{-} - 2i\theta^{+}\lambda_{-} - 2i\bar{\theta}^{+}\bar{\lambda}_{-} + 2\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\mathbf{D}, \qquad (A.66)$$

где  $A_{\pm} = \frac{1}{2} (A_0 \pm A_1).$ 

Лагранжиан содержит пять членов:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\Phi} + \mathcal{L}_{\Psi} + \mathcal{L}_{\text{FI}} + \mathcal{L}_J, \qquad (A.67)$$

Калибровочный лагранжиан имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \frac{1}{8e^2} \int d^2\theta \ \bar{\Lambda}\Lambda = \frac{1}{e^2} \left( \frac{1}{2} F_{01}^2 + \mathrm{i}\,\bar{\lambda}_-\partial_+\lambda_- + \frac{1}{2} \mathbf{D}^2 \right) ; \qquad (A.68a)$$

киральный лагранжиан имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\Phi} = -\frac{i}{2} \int d^{2}\theta \ \bar{\Phi}_{i} \nabla_{-} \Phi^{i} =$$

$$= -|D_{\mu}\phi_{i}|^{2} + 2i \,\bar{\chi}_{+i} D_{-} \chi^{i}_{+} - i q_{i} \,\bar{\phi}_{i} \lambda_{-} \chi^{i}_{+} + i q_{i} \,\phi^{i} \bar{\chi}_{+i} \bar{\lambda}_{-} + q_{i} \,|\phi_{i}|^{2} \mathbf{D} ;$$
(A.68b)

лагранжиан Ферми имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\Psi} = -\frac{1}{2} \int d^2 \theta \ \bar{\Psi}_a \Psi^a =$$

$$= 2i \ \bar{\psi}_{-a} D_+ \psi^a_- + |G_a|^2 - |E_a(\phi)|^2 - \bar{\psi}_{-a} \frac{\partial E^a}{\partial \phi_i} \chi_{+i} - \bar{\chi}_{+i} \frac{\partial \bar{E}_a}{\partial \bar{\phi}_i} \psi^a_-; \qquad (A.68c)$$

лагранжиан Файе-Иллиополуса имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{\rm FI} = \frac{t}{4} \int d\theta^+ \Lambda \Big|_{\bar{\theta}^+=0} + \text{c.c.} = -r\mathbf{D} + \frac{\theta}{2\pi}F_{01}.$$
(A.68d)

Наконец, *J*-лагранжиан, заменяющий канонический F-член, имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_{J} = \int d\theta^{+} W_{J}(\Psi, \Phi) \Big|_{\bar{\theta}^{+}=0} + \text{c.c.} = \int d\theta^{+} \Psi_{a} J^{a}(\Phi) \Big|_{\bar{\theta}^{+}=0} + \text{c.c.} =$$

$$= G_{a} J^{a}(\phi) + \frac{1}{2} \psi_{-a} \chi_{+i} \frac{\partial J^{a}}{\partial \phi^{i}} + \text{c.c.} \qquad (A.68e)$$

Действие инвариантно (по модулю граничных членов) относительно следующих преобразований суперсимметрии:

$$\delta A_{0} = \frac{i}{2} \bar{\epsilon}_{-} \lambda_{-} + \frac{i}{2} \epsilon_{-} \bar{\lambda}_{-}, \qquad \delta \phi^{i} = -\epsilon_{-} \chi^{i}_{+},$$

$$\delta A_{1} = -\frac{i}{2} \bar{\epsilon}_{-} \lambda_{-} - \frac{i}{2} \epsilon_{-} \bar{\lambda}_{-}, \qquad \delta \chi^{i}_{+} = 2i \bar{\epsilon}_{-} D_{+} \phi^{i},$$

$$\delta \lambda_{-} = i \epsilon_{-} (\mathbf{D} - iF_{01}), \qquad \delta \psi^{a}_{-} = \epsilon_{-} G^{a} + \bar{\epsilon}_{-} E^{a},$$

$$\delta \mathbf{D} = -\bar{\epsilon}_{-} D_{+} \lambda_{-} + \epsilon_{-} D_{+} \bar{\lambda}_{-}, \qquad \delta G^{a} = -2i \bar{\epsilon}_{-} D_{+} \psi^{a}_{-} + \bar{\epsilon}_{-} \frac{\partial E^{a}}{\partial \phi^{i}} \chi^{i}_{+}.$$
(A.69)

Полная инвариантность по отношению к суперсимметрии накладывает на *E*- и *J*-поля следующее ограничение:

$$\sum_{a} E_a(\Phi_i) J^a(\Phi_i) = 0. \qquad (A.70)$$

И, наконец, существует дополнительное условие на устранение аномалий:

Tr 
$$\gamma^3 GG = \sum_{i: \text{ киральные}} q_i^2 - \sum_{a: \Phi \text{ерми}} q_a^2 = 0.$$
 (A.71)