На правах рукописи

Грицаенко Вячеслав Сергеевич

Предсимплектические структуры и минимальные лагранжианы первого порядка для массивных полей

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук» (ФИАН).

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук **Григорьев Максим Анатольевич**
Официальные оппоненты:	**Ляхович Семён Леонидович,** доктор физико-математических наук, Томский государственный университет (ТГУ), главный научный сотрудник
	Катанаев Михаил Орионович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (МИАН), ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	Объединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ)

Защита состоится 19 мая 2025 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 24.1.262.04 при Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте www.lebedev.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53, ученому секретарю диссертационного совета Д 24.1.262.04.

Автореферат разослан ________________ 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 24.1.262.04,
канд. физ.-мат. наук Чернышов Дмитрий Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Лагранжев формализм является крайне эффективным способом работы с теоретикополевыми задачами в физике. Например, в классической физике, где вполне можно обойтись без записи действия, Лагранжев формализм является крайне удобным способом задания взаимодействия в системе, поскольку в отличие от уравнений движения, куда взаимодействия могут входить сложным образом, в Лагранжиан взаимодействие добавляется аддитивно. В то же время в квантовой теории поля решение задач без записи действия (или какого-либо аналога действия) во множестве примеров является крайне затруднительным. В связи с этим оказывается актуальным вопрос о построении действия (или, что эквивалентно, Лагранжиана) по заранее заданным уравнениям движения, которые обычно представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных (PDE). Данная проблема называется обратной вариационной задачей. В более общем смысле она формулируется так: можно ли по заданным уравнениям движения построить функционал, равенство нулю вариационной производной которого воспроизводило бы эти заранее заданные уравнения?

Известно, что PDE могут быть рассмотрены в инвариантных геометерминах терминах, как поверхность на расслоении джетов (стационарная поверхность) и распределение Картана на ней. Подробнее с этим можно ознакомиться в работах [1—3]. С другой стороны, Лагранжева формулировка теории существенно зависит от набора переменных, в которых она строится. Действительно, поиск Лагранжевой формулировки традиционно сопряжён с введением в теорию (или исключением из неё) вспомогательных полей, от выбора которых впоследствии Лагранжева формулировка зависит. В частности, для массивных спиновых теорий при $s \geqslant 2$ Лагранжева формулировка не может быть построена без введения вспомогательных полей, поскольку количество уравнений движения для подобных теорий превышает количество полей, в терминах которых записаны эти уравнения.[4—7] Именно с этой неинвариантностью связана одна из ключевых сложностей обратной вариационной задачи.

Одновременно с этим массивные теории, частным случаем которых являются массивные спиновые теории, являются объектом повышенного интереса в последнее время. Даже с точки зрения классической теории поля массивные поля являются крайне полезными моделями в задачах, в которых предполагается конечный радиус взаимодействия, что, например, актуально в космологии. При этом безмассовые поля естественно рассматривать, как гладкий предел массы к нулю (и, соответственно, радиуса взаимодействия к бесконечности) массивных теорий. В квантовой же теории поля массивные поля зачастую являются даже в большей степени предпочтительными по сравнению с безмассовыми в силу отсутствия в них нетривиальной калибровочной симметрии, благодаря чему для квантования подобных полей не нужно вводить никакие дополнительные структуры. Более того, интерес к массивным теориям также связан и с теорией струн, которая является одним из многообещающих кандидатов на роль единой теории фундаментальных взаимодействий. Этот интерес связан с тем, что спектр теории струн содержит массивные поля в секторе $s \geqslant 2$.[8; 9] Всё это лишь усиливает интерес к методам построения инвариантной Лагранжевой формулировки для массивных теорий.

Существует инвариантный подход к построению Лагранжевой формулировки. Он основан на задании вместе со стационарной поверхностью и распределением Картана дополнительной математической структуры. Естественным кандидатом на роль подобной структуры является симплектическая (или её вырожденный аналог - предсимплектическая) структура. Подробнее об этом подходе можно узнать из работ [10; 11], а также предшествовавших им классических работ [12—15]. В случае механики, когда имеется лишь одна независимая переменная, стационарная поверхность оказывается конечномерной, и роль предсимплектической структуры играет симплектическая форма. Для систем без связей симплектическая форма полностью задаёт динамику. Однако в случае теории поля стационарная поверхность в общем случае бесконечномерна, что существенно усложняет работу с подобным объектом.

Крайне важной в данном направлении является работа [16], в которой показано, что для PDE без дифференциальных следствий низшего порядка можно определить действие на сечениях самой стационарной поверхности (так называемое внутреннее действие), которое воспроизведёт исходную PDE. Таким образом было показано, что для подобных теорий Лагранжева формулировка закодирована в геометрических структурах, а именно в соответствующей стационарную поверхность с определёнными на ней распределением Картана и предсимплектической структурой.

Вместе с тем, Лагранжева формулировка массивных теорий часто содержит дифференциальные следствия низшего порядка. Более того, массивные спиновые теории уже начиная с $s = 2$ содержат дифференциальные следствия нулевого порядка, которые значительно влияют на вид стационарной поверхности. Вследствие этого нет гарантий того, что внутреннее действие для массивных спиновых теорий будет полным, а значит возникает вопрос о построении инвариантной Лагранжевой формулировки для данных теорий.

Тем не менее, существует способ исключить дифференциальные следствия низшего порядка из Лагранжевой формулировки массивных спиновых теорий путём трюка Штюкельберга. Штюкельбергова формулировка теории может быть получена, например, при помощи размерной редукции теории или же напрямую при помощи перевода дифференциальных следствий исходной теории во вспомогательные поля, инвариантные относительно Штюкельберговых (иначе говоря, сдвиговых) калибровочных преобразований.[17] При этом Штюкельбергова калибровочная симметрия является достаточно тривиальной в том смысле, что может быть исключена, например, заменой переменных. В связи с этим возникает более общая задача изучения инвариантных Лагранжевых формулировок для калибровочных теорий. При этом крайне удобным языком для изучения калибровочных систем является формализм Баталина-Вилковыского (BV, [18—21]), который, будучи изначально инструментом для квантования теорий, смог проявить себя также в исследовании симметрий и взаимодействий в теоретикополевых системах в том числе и на классическом уровне. В связи с этим вызывает интерес модель Александрова-Концевича-Шварца-Заборонского (AKSZ, [22]), которая позволяет получить BV-формулировку исходной теории в терминах градуированных многообразий и определённой на них Q-структуры.

Тем не менее, применение модели AKSZ при требовании конечномерности таргет-пространства и локальности ограничено топологическими и диффеоморфизм инвариантными системами. Для того, чтобы обойти данное ограничение, можно заменить в конструкции AKSZ симплектическую структуру на предсимплектическую. Более того, так как Лагранжиан системы не зависит от переменных, находящихся в ядре предсимплектической структуры, от данных переменных можно избавиться, проведя соответствующую факторизацию. В этом заключается предсимплектический BV-AKSZ формализм. Более того, оказывается возможным модифицировать набор аксиом, лежащих в основе предсимплектического BV-AKSZ формализма, заменив требование нильпотентности Q-дифференциала на более общее условие, являющееся аналогом мастер-уравнения формализма BV. Полученная таким образом конструкция называется обобщённым предсимплектическим BV-AKSZ формализмом.[23; 24]

Преимущество обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма раскрывается при рассмотрении приводимых калибровочных теорий, например, электродинамики старших форм. Как известно, калибровочные параметры данной теории оказываются инвариантны относительно собственных калибровочных преобразований, вследствие чего необходимый набор переменных для построения BV формулировки включает в себя помимо полей и духов также духи для духов и все соответствующие антиполя. Таким образом, BV формулировка электродинамики старших форм оказывается крайне громоздкой. А потому оказывается актуальной задача о записи BV-формулировок подобных теорий в более компактном виде, что и позволяет сделать обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм.

Ещё одним примером калибровочной, но в то же время массивной теории, с которой обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм хорошо себя показывает, является массивная гравитация. С начала прошлого века массивная гравитация являлась интересной альтернативой для описания Вселенной на космологических масштабах. Изначальной целью модификации теории гравитации было решение проблемы согласования массы галактик с распределением их скоростей вращения: полагалось, что введение характерного масштаба действия для гравитационного поля способно разрешить возникший парадокс без введения альтернативного вида материи.

Позднее, с развитием методов квантовой теории поля, мотивация развития массивной теории гравитации изменилась. Причиной тому стала так называемая проблема космологической постоянной. Данная проблема состоит в следующем. При помощи методов квантовой теории поля из естественного предположения, что материя, ответственная за ускоренное расширение Вселенной, описывается скалярным полем, следует оценка для космологической постоянной Λ_{QFT}. В то же время из наблюдения следует не согласующаяся с Λ_{QFT} оценка космологической постоянной Λ_{exp}, причём $\frac{\Lambda_{QFT}}{\Lambda_{exp}} \sim 10^{122}$, что является на данный момент самым серьёзным расхождением между квантовой теорией поля и теорией гравитации. Конечно, данную проблему можно решить при помощи перенормирования Λ, однако перенормировка в случае стандартной подели гравитации является аддитивной, и столь тонкая "настройка"космологических параметров сложна с точки зрения интерпретации получаемых результатов. В то же время в случае массивной теории гравитации параметр m, перенормируется мультипликативно, что существенно облегчает интерпретацию.

Однако теория массивной гравитации за свою историю исследования столкнулась с целой массой проблем. Первую подобную проблему в 1970 году описали независимо Х. ван Дам с М. Вельтманом в работе [25] и В.И. Захаров в работе [26]. Дело в том, что теория Фирца-Паули, являясь линеаризованной теорией массивной гравитации, обладает пятью степенями свободы, в то время как обычная линеаризованная гравитация обладает, как известно, двумя. В то же время предел теории Фирца-Паули $m \to 0$ не является гладким, в результате чего в безмассовом пределе остаётся третья, лишняя степень свободы. Она приводит к тому, что в одночастичной амплитуде рассеяния (а следовательно и в законе Ньютона) возникает лишний множитель $\frac{4}{3}$, а значит массивная гравитация в безмассовом пределе описывает более сильное притяжение, чем стандартная, безмассовая гравитация.

Решение данной проблемы предложено А.И. Вайнштейном в работе [27]. Он показал, что линеаризованная массивная гравитация справедлива лишь на очень больших расстояниях. Это расстояние было названо радиусом Вайнштейна, $r_V = (\frac{r_g}{m})^{\frac{1}{5}}$, где r_g - гравитационный радиус, описываемый стандартной общей теорией относительности. Внутри же радиуса

Вайнштейна оставшиеся три степени свободы характеризуются сильным самодействием, а потому не взаимодействуют с оставшимися двумя.

Другое решение данной проблемы предложил М. Поррати в работе [28]. В своей работе он рассмотрел линеаризацию массивной теории гравитации вокруг пространства анти-де Ситтера. В таком случае в одночастичной амплитуде рассеяния возникает дополнительный свободный параметр Λ, и пределы $\Lambda \to 0$ и $m \to 0$ оказываются неперестановочными. Таким образом если в одночастичной амплитуде стремить к нулю сначала m, а затем Λ, то скачок степеней свободы не наблюдается. В противном же случае наблюдается решение ван-Дама-Вельтмана-Захарова.

Тем не менее, в том же 1972 году вышла работа [29] за авторством Д. Бульвара и С. Дезера, которая поставила перед исследователями массивной теории гравитации куда более серьёзную проблему. Проведя разложение Арновитта-Дезера-Мизнера для массивной теории гравитации и посчитав степени свободы, Д. Бульвар и С. Дезер пришли к выводу, что у данной теории не пять, а шесть степеней свободы. Более того, они пришли к выводу, что в общем случае массивной гравитации лишняя степень свободы обладает отрицательной кинетической энергией (то есть является духом), что приводит к неустойчивости решений в этой теории. Данное открытие остановило рассмотрение массивной гравитации, как альтернативной космологической модели, почти на 40 лет.

Ситуация изменилась в 2010 году с выходом работы [30] за авторством К. де Рам, Г. Габададзе и А. Толли. В данной работе авторы обратили внимание на то, что линеаризованная массивная гравитация обладает пятью степенями свободы, и задались вопросом о механизме отщепления данной лишней, духовой степени свободы. Им удалось найти частный случай потенциала в массивной теории гравитации, который теперь в их честь называется потенциалом де Рам-Габададзе-Толли (dRGT).

Потенциал dRGT крайне сложно записывается в метрическом формализме. Однако оказалось, что он приобретает не столь громоздкий вид в реперном формализме. Более того, оказалось, что интерес представляет версия массивной биграватации с потенциалом dRGT, в которой фоновый репер, необходимый для построения массивного потенциала, также является динамической переменной. Таким образом была построена бездуховая массивная биграватация.

Бездуховая массивная биграватация, в отличие от массивной гравитации с потенциалом dRGT, в которой фоновый репер не является динамической переменной, обладает калибровочной симметрией. Однако несмотря на наличие двух различных реперов, описывающих в себя нетривиальным образом пять степеней свободы массивной гравитации и две степени свободы безмассовой, калибровочные преобразования данной теории включают в себя лишь один параметр для диффеоморфизмов и один параметр для преобразований Лоренца.

Несмотря на упрощение вида теории в реперном формализме, данная теория всё ещё является малоизученной. Вместе с тем, обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм предоставляет собой мощный инструмент для исследования калибровочных теорий, а потому его применение к бездуховой массивной биgравитации является актуальной задачей.

Степень проработанности темы. Мультисимплектический подход (стоит напомнить, что внутреннее действие является частным случаем мультисимплектического действия) берёт начало с работы Т. де Дондера [31], в которой автор предложил обобщение Гамильтонового формализма, хорошо зарекомендовавшего себя в одномерном случае - механике, на многомерные системы - теорию поля, и продолжившей её работы Г. Вейля [32], в которой автор развил идею т. де Дондера и обобщил на многомерный Гамильтонов формализм подход Гамильтона-Якоби. В дальнейшем подход де Дондера-Вейля был рассмотрен с на языке расслоения джетов, что позволило, например, в инвариантных терминах сформулировать для обобщённого Гамильтонового формализма аналог преобразований Лежандра. В качестве основных работ в данном направлении можно выделить [33—39]. Особое внимание стоит обратить на работы [40], в которой был представлен набор различных мультисимплектических расслоений, использующихся в мультисимплектическом формализме, [41], в которой обсуждается применение мультисимплектического формализма к гравитации, [42], в которой описана факторизация по ядру в случае вырожденной мультисимплектической формы, а также [16], в которой было введено понятие внутреннего действия и таким образом для большого спектра систем была решена обратная вариационная задача. Однако несмотря на существенный вклад в развитие обобщённого Гамильтонового подхода, сделанного в данных работах, в них рассматривались исключительно неградуированные объекты, что затрудняет систематическое исследование калибровочных систем.

С другой стороны, в области инвариантного геометрического подхода к рассмотрению калибровочных систем нельзя не отметить работу [24], в которой было показано, что, исключив требование невырожденности у симплектической структуры (то есть рассмотрев предсимплектическую структуру), можно обобщить конструкцию AKSZ на нетопологические теории. В дальнейшем данный подход, а именно предсимплектический BV-AKSZ формализм, был развит в работах [43—45]: в частности, на примере гравитации в работе [43] и конформной гравитации в работе [44]. Также важно отметить работы [46—48] в которых не рассматривается Лагранжев формализм, однако исследуется математический аппарат, который сильно связан с предсимплектическим BV-AKSZ формализмом.

Важной работой в области построения минимальных предсимплектических моделей является статья [23], в которой описывается способ ослабить аксиомы предсимплектического BV-AKSZ формализма, а именно заменить требование нильпотентности Q-дифференциала на аналог мастер-уравнения. Таким образом Q-дифференциал, предсимплектическая структура ω и ковариантный Гамильтониан $\mathcal{H}$ оказываются подчинены соотношениям

$$\mathrm{d}\omega = 0\,, \qquad i_Q\omega - \mathrm{d}\mathcal{H} \in \mathcal{I}\,, \qquad i_Q i_Q \omega = 0\,, \qquad i_Q L_Q \omega \in \mathcal{I}\,, \tag{1}$$

где L_Q - производная Ли, а идеал $\mathcal{I}$ порождён формами с базы расслоения (обычно базой является пространство-время). Данный подход является многообещающим в исследовании массивной гравитации, поскольку позволяет получать минимальные предсимплектические формулировки теорий, которые при этом являются BV-полными. В то же время, исследование BV-формулировок массивной гравитации на данный момент ограничивается рассмотрением конечного (и вполне ограниченного) количества поправок к линейной теории (в качестве примера можно привести работы [49; 50]).

Исследование гравитации напрямую связано также с исследованием других спиновых систем с $s \geqslant 2$. В области безмассовых спиновых систем важнейшей работой является статья [51], в которой была предложена Лагранжева формулировка для безмассовой теории произвольного спина. Следующей качественной ступенью в развитии безмассовых спиновых теорий стало появление развёрнутого формализма, в рамках которого удалось построить взаимодействие безмассовых высшеспиновых полей с гравитацией в произвольной размерности. Для этого было рассмотрен случай искривлённого фонового пространства, поскольку как было известно из литературы ранее, в плоском пространстве в принципе невозможно построить теорию калибровочных высших спинов.[52] В качестве основных работ в данном направлении можно выделить статьи [53—56], а также обзор [57]. Также важно отметить, что в работе [58] рамках развёрнутого формализма была решена обратная вариационная задача.

В области массивных спиновых полей нельзя не отметить пионерскую работу [4], в которой был предложен способ построения Лагранжевой формулировки массивной теории спина 2 путём введения вспомогательного поля, которое можно интерпретировать, как след исходнного поля, в терминах которого записаны уравнения движения. Дальнейшее обобщение данного подхода на случай произвольного спина было предложено в работе [5].

Существует также нековариантный подход к построению Лагранжевой формулировки. В работе [59] рамках подобного подхода можно построить действие для массивных спиновых полей без привлечения вспомогательных полей. Однако, помимо того, что подобная Лагранжева формулировка является нековариантной, она также содержит производные вплоть до 20 порядка, а её Лагранжиан вмещается на 30 страницах.

Наконец, интересно отметить киральный подход к рассмотрению массивных высшеспиновых систем, описанный в работе [60]. Данный подход позволяет продвинуться в построении взаимодействия в массивных спиновых системах, однако существенно усложняет учёт симметрий полей. Более того, на данный момент подход, описанный в работе [60], пусть и является многообещающим, на данный момент был применён лишь к массивным теориям спинов $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ и 2.

Цели исследования:

1. Исследовать предсимплектические формулировки теорий с нетривиальными дифференциальными следствиями нулевого порядка в терминах стационарной поверхности.
2. Построить минимальное предсимплектическое действие для массивных теорий спина 2 и 3.
3. Построить в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма минимальные формулировки приводимых калибровочных, а также некалибровочных теорий.
4. Применить обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм к бездуховой массивной теории бигравитации.

Для достижения поставленных целей были сформулированы следующие **задачи исследования**:

1. Построить минимальную предсимплектическую формулировку в терминах стационарной поверхности для массивных спиновых теорий и получить их минимальное расширение для случаев массивных теорий спинов 2 и 3.
2. Исследовать недавно предложенные аксиомы обобщённого предсиммплектического BV-AKSZ формализма и предложить их обобщение.
3. Явно проследить, как в случае, когда Q-дифференциал не содержит информации о калибровочной симметрии теории, предсимплектический BV-AKSZ формализм восстанавливает внутреннее действие.
4. Построить минимальную формулировку электродинамики p-формы и модели Фридмана-Таунсенда в терминах обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма.
5. Построить минимальную формулировку бездуховой массивной бигравитации в терминах обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Найденные расширения стационарной поверхности и предсимплектической структуры для массивных теорий спина 2 и 3 позволяют построить минимальную полную (то есть воспроизводящая все

уравнения движения) предсимплектическую формулировку в терминах стационарной поверхности для массивных теорий спина 2 и 3.
2. Показано, что предсимплектический BV-AKSZ формализм воспроизводит внутреннее действие в случае, когда Q-дифференциал не содержит информации о калибровочной симметрии теории.
3. Обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм позволяет построить минимальные формулировки электродинамики p-формы в произвольной размерности и её неабелевой модификации для $p = 2$, $n = 4$ - модели Фридмана-Таунсенда.
4. Для построения бездуховой массивной теории биграватации в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма необходимо введение нерегулярных связей на слое E расслоения $E \to T[1]X$, приводящих к регулярной симплектической структуре на суперотображениях. Это позволяет получить спектр переменных, необходимых для построения BV-формулировки бездуховой массивной теории биграватации.

Достоверность. Достоверность полученных в рамках диссертационной работы результатов обеспечивается надёжностью математического аппарата, используемого в исследовании, включающего в себя дифференциальную геометрию, теорию супермногообразий и суперотображений.

Научная новизна. Все представленные в диссертационной работе результаты являются новыми. Полученные в диссертационной работе результаты используются в научных исследованиях как российскими, так и зарубежными учёными и научными группами.

Научная значимость. Изучаемые в диссертационной работе проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Полученный в диссертационной работе метод построения минимальных предсимплектических формулировок для массивных теорий спинов 2 и 3 без изменений обобщается на случаи старших спинов. Полученные в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма формулировки электродинамики p-форм, модели Фридмана-Таунсенда и бездуховой массивной биграватации записаны в минимальном наборе переменных и содержат явно определяющие теорию геометрические структуры, что позволяет существенно облегчить их дальнейшее исследование.

Апробация результатов работы. Результаты, полученные в ходе работы над диссертацией, были представлены и обсуждены на международных конференциях:

1. "The International Workshop Supersymmetries and Quantum Symmetries – SQS'22"(Дубна, 2022)
2. "International Conference Quantum Field Theory and Gravity (QFTG 2023)" (Томск, 2023)

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано три работы [61—63], все в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов ВАК и находящемся в белом списке изданий, индексируемых базами данных Scopus и Web of Science.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объем диссертации 118 страниц текста. Список литературы содержит 89 наименований.

Содержание работы

Введение.

Во введении формируется цель исследования, обозначаются объект и цель исследования, а также проводится литературный обзор с целью обосновать актуальность и научную новизну исследования. Также во введении формулируются основные положения, выносимые на защиту.

Первая глава.

В разделе 1.1 даётся развёрнутое определение геометрическим терминам, необходимым для понимания работы. Вводятся понятия k-го расслоения джетов $J^k(\mathcal{F})$, бесконечного расслоения джетов $J^\infty(\mathcal{F})$, распределения Картана D, стационарной поверхности $\mathcal{M}$. Объясняется разделение алгебры внешних форм на вертикальную и горизонтальную компоненты, в связи с чем вводится разбиение комплекса де Рама на бикомплекс. Вводится понятие решения системы дифференциальных уравнений в терминах стационарной поверхности.

В разделе 1.2 в определённых ранее терминах формулируются понятия Лагранжевой теории, эквивалентности Лагранжевых теорий и вводится первая вариационная формула

$$\mathrm{d}_v\mathcal{L} = \mathrm{d}_v\phi^i\delta_i^{EL}\mathcal{L} - \mathrm{d}_h\widehat{\chi}\,, \tag{2}$$

где $\mathcal{L}$ - функция Лагранжа, d_h и d_v - горизонтальный и вертикальный дифференциалы де Рама соответственно, а $\delta_i^{EL} = \frac{\partial}{\partial\phi^i} - \widehat{D}_a\frac{\partial}{\partial\phi^i_a} + \widehat{D}_a\widehat{D}_b\frac{\partial}{\partial\phi^i_{ab}} - \ldots$ - оператор Эйлера-Лагранжа. Данную формулу можно рассматривать, как определение $(n-1{,}1)$-формы $\widehat{\chi}$ - предсимплектического потенциала.

Из данной формулы получается выражение непосредственно для χ. Далее в данном разделе вводится понятие симплектической структуры $\widehat{\omega} = \mathrm{d}_v\widehat{\chi}$. Ограничив симплектическую структуру на стационарную поверхность $\mathcal{M}$, можно получить $\omega = \chi + l$, где $\omega = \widehat{\omega}|_{\mathcal{M}}$, $\chi = \widehat{\chi}|_{\mathcal{M}}$ и l - $(n{,}0)$-форма.

В разделе 1.3 рассматривается общий случай мультисимплектической теории и соответствующего ей мультисимплектического действия и даётся определение естественной системы. После этого определяется внутреннее действие - частный случай мультисимплектического действия, определённого на сечениях стационарной поверхности $\sigma : X \to \mathcal{M}$:

$$S^C[\sigma^*] = \int \sigma^*(\chi + l) \tag{3}$$

Далее в данном разделе рассматривается интерпретация данного действия и указывается, что внутреннее действие является полным (то есть воспроизводящим при варьировании все исходные уравнения движения) для естественных систем.

В разделе 1.4 рассматриваются примеры естественных систем, для которых строится внутреннее действие. В частности, рассматриваются простейшие примеры: Гамильтонова механика, механика со связями, а также уравнение Кортевега-де Фриза. Последний пример представляет интерес тем, что уравнение $\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0$ в терминах функции $u(x,t)$ не может быть получено ни из какого действия вариационным методом, и в этом смысле уравнение Кортевега-де Фриза можно назвать нелагранжевым. Однако Лагранжиан для данного уравнения можно написать в терминах переменной ψ, такой, что $u = \partial_x\psi$.

Далее в этом разделе рассматриваются более сложные приммеры: метрическая гравитация, теория безмассовых бозонных полей произвольного спина (теория Фронсдала), а также теория массивного поля спина 1 (теория Прока). Последняя система в примере является естественной даже несмотря на то, что уравнение $\Box A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu - m^2 A^\mu = 0$, получающееся при варьировании действия Прока по A_μ, содержит дифференциальное следствие $\partial_\nu A^\nu = 0$.

Раздел 1.5 начинается с описания массивной теории поля спина 2. Из действия Фирца-Паули,

$$\begin{aligned} S[\phi_{\mu\nu}] = \int d^n x(-\frac{1}{2}\partial_\lambda\phi^{\mu\nu}\partial^\lambda\phi_{\mu\nu} + \partial^\mu\phi_{\mu\nu}\partial_\lambda\phi^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^\nu_\nu\partial^\mu\phi^\lambda_\lambda - \partial^\lambda\phi_{\lambda\mu}\partial^\mu\phi^\nu_\nu - \\ - \frac{1}{2}m^2(\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} - \phi^\mu_\mu\phi^\nu_\nu))\,, \end{aligned} \tag{4}$$

следует уравнение

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} = (\Box - m^2)\phi_{\alpha\beta} - (\Box - m^2)\phi^\tau_\tau\eta_{\alpha\beta} - \\ - \partial_\alpha\partial^\gamma\phi_{\gamma\beta} - \partial_\beta\partial^\gamma\phi_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta\phi^\gamma_\gamma + \partial_\tau\partial_\rho\phi^{\tau\rho}\eta_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Описано, что дифференциальное следствие данного уравнения $\frac{1}{2-n}\eta^{\alpha\beta}E_{\alpha\beta} + \frac{1}{m^2}\partial^\alpha\partial^\beta E_{\alpha\beta} = 0$ следует алгебраическое уравнение $\phi^\alpha_\alpha = 0$, вследствие чего описываемая теория не является естественной.

Далее описано построение внутреннего действия для данной теории:

$$S^C = \int d^n x(-\partial_\gamma \varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}{}^{|\gamma} + \frac{1}{2}\varphi^{\alpha\beta}{}_{|\gamma}\varphi_{\alpha\beta}{}^{|\gamma} - \frac{1}{2}m^2\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}) \qquad (6)$$

где $\varphi_{\alpha\beta}$ - бесследовая часть $\phi_{\alpha\beta}$, а $\varphi_{\alpha\beta}{}^{|\gamma}$ - вспомогательное поле. Из полученного действия, как и ожидалось, не следует уравнение $\partial^\alpha\phi_{\alpha\beta} = 0$, входящее в систему уравнений Фирца-Паули.

Раздел 1.5 начинается с описания Parent-действия, которое можно интерпретировать, как многомерное расширения действия Остроградского. Данное действие обладает той же мультисимплектической структурой, что и внутреннее действие, но в отличие от последнего не является минимальным. Для случая, когда исходный Лагранжиан не содержит производных старше второго порядка, Parent-действие принимает вид

$$S^P[\phi^i,\phi^i_\alpha,\phi^i_{\alpha\beta},\pi_i^{|\alpha},\pi_i^{|\alpha\beta}] = \int d^n x(\mathcal{L} - \pi_i^{|\alpha}(\partial_\alpha\phi^i - \phi^i_{|\alpha}) - \pi_i^{|\alpha\beta}(\partial_\alpha\phi^i_{|\beta} - \phi^i_{|\alpha\beta}))\,, \qquad (7)$$

где ϕ^i_α,$\phi^i_{\alpha\beta}$, $\pi_i^{|\alpha}$ и $\pi_i^{|\alpha\beta}$ - вспомогательные поля.

Данное действие записывается для случая массивного поля спина 2, после чего из него исключаются лишние (в смысле сохранения у действия мультисимплектического вида) вспомогательне поля, в результате чего получается действие

$$S = \int d^n x(-\phi^{\mu\nu|\lambda}\partial_\lambda\phi_{\mu\nu} + 2\phi^{\lambda\mu}{}_{|\lambda}\partial^\nu\phi_{\nu\mu} + \phi^{\mu|\lambda}_\mu\partial_\lambda\phi^\nu_\nu - \phi^{\lambda\mu}{}_{|\lambda}\partial_\mu\phi^\nu_\nu - \phi^{\mu|\lambda}_\mu\partial^\nu\phi_{\nu\lambda} +$$
$$+\frac{1}{2}\phi_{\alpha\beta|\gamma}\phi^{\alpha\beta|\gamma} - \phi_{\alpha\beta}{}^{|\alpha}\phi^{\gamma\beta}{}_{|\gamma} - \frac{1}{2}\phi^{\alpha|\gamma}_\alpha\phi^\beta_{\beta|\gamma} + \phi^{\gamma\beta}{}_{|\gamma}\phi^\alpha_{\alpha|\beta} - \frac{1}{2}m^2(\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta} - \phi^\alpha_\alpha\phi^\beta_\beta)) \qquad (8)$$

Интересным наблюдением является то, что данное действие в пределе $m \to 0$ совпадает с линеаризованным внутренним действием для метрической гравитации и с внутренним действием Фронсдала в случае $s = 2$. Далее данное действие в целях сравнения с внутренним действием для массивного спина 2 переписывается в неприводимых тензорных полях.

$$S = \int d^n x(-\varphi^{\alpha\beta|\gamma}\partial_\gamma\varphi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varphi^{\alpha\beta|\gamma}\varphi_{\alpha\beta|\gamma} - \frac{1}{2}m^2\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} +$$
$$+\frac{2(n^2-2)}{n^2+n-2}\psi^\beta\partial^\gamma\varphi_{\gamma\beta} - \frac{n^2+n-4}{n^2+n-2}\xi^\beta\partial^\gamma\varphi_{\gamma\beta} + \frac{n-2}{n}\xi_\gamma\partial^\gamma\rho - \frac{n-2}{n}\psi_\gamma\partial^\gamma\rho -$$
$$-\frac{n^2-2}{n^2+n-2}\psi^\alpha\psi_\alpha - \frac{n^2-3}{2(n^2+n-2)}\xi^\alpha\xi_\alpha + \frac{n^2+n-4}{n^2+n-2}\psi^\alpha\xi_\alpha + \frac{1}{2}m^2\frac{n-1}{n}\rho^2) \qquad (9)$$

Первые три слагаемых полученного действия являются внутренним действием для массивной теории спина 2. Таким образом для минимальным расширением стационарной поверхности в случае массивной теории спина 2 является добавлениие к ней координат ψ_μ и ξ_μ, соответствующих дивергенции и градиенту поля $\phi_{\mu\nu}(x)$, а также координаты ρ, соответствующей следу $\phi_{\mu\nu}(x)$.

Раздел 1.6 диссертации посвящён решению аналогичной проблемы для случая массивной теории спина 3. Раздел начинается с описания данной теории, нахождения дифференциальных следствий уравнения, полученного при варьировании действия Сина-Хагена, описания стационарной поверхности данной теории. Выписывается внутреннее действие для массивной теории спина 3:

$$S^C = \int d^n x(-\partial_\gamma \varphi^{\mu\nu\lambda}\varphi_{\mu\nu\lambda}{}^{|\gamma} + \frac{1}{2}\varphi^{\mu\nu\lambda}{}_{|\gamma}\varphi_{\mu\nu\lambda}{}^{|\gamma} - \frac{1}{2}m^2\varphi^{\mu\nu\lambda}\varphi_{\mu\nu\lambda})\,, \qquad (10)$$

где $\varphi_{\mu\nu\lambda}{}^{|\gamma}$ - вспомогательное поле. Данное действие оказывается неполным.

Далее, для нахождения минимальной мультисимплектической формулировки данной теории выписывается соответствующее Parent-действие. После исключения из него вспомогательных полей, которые не влияют на мультисимплектический вид действия, получается минимальное действие для массивной теории спина 3:

$$S = \int d^n x(-\phi^{\mu\nu\lambda}{}_{|\gamma}\partial^\gamma\phi_{\mu\nu\lambda} + 3\phi^{\lambda\mu\nu}{}_{|\lambda}\partial^\gamma\phi_{\mu\nu\gamma} + \frac{3}{2}\phi^{\mu\gamma}_{\mu}{}_{|\gamma}\partial_\lambda\phi^{\nu\lambda}_{\nu} + 3\phi^{\gamma}_{\gamma\mu|\nu}\partial^\nu\phi^{\lambda\mu}_{\lambda} -$$
$$-3\phi^{\lambda\gamma|\mu}_{\lambda}\partial^\nu\phi_{\mu\nu\gamma} - 3\phi^{\mu\nu\gamma}{}_{|\gamma}\partial_\mu\phi^{\lambda}_{\lambda\nu} + \frac{3(n-1)(n-2)}{n^2}\rho^{|\mu}\partial_\mu\rho + \frac{3(n-2)}{2n}m\phi^{\nu}_{\nu\mu}\partial^\mu\rho +$$
$$+\frac{1}{2}\phi_{\mu\nu\lambda}{}^{|\gamma}\phi^{\mu\nu\lambda}{}_{|\gamma} - \frac{3}{2}\phi^{\lambda\mu\nu}{}_{|\lambda}\phi_{\gamma\mu\nu}{}^{|\gamma} - \frac{3}{4}\phi^{\mu\gamma}_{\mu}{}_{|\gamma}\phi^{\nu}_{\nu\lambda}{}^{|\lambda} - \frac{3}{2}\phi^{\gamma}_{\gamma\mu|\nu}\phi^{\lambda\mu|\nu}_{\lambda} + 3\phi^{\lambda\gamma|\mu}_{\lambda}\phi_{\gamma\mu\nu}{}^{|\nu} -$$
$$-\frac{1}{2}m^2\phi_{\mu\nu\lambda}\phi^{\mu\nu\lambda} + \frac{3}{2}m^2\phi^{\nu}_{\nu\mu}\phi^{\lambda\mu}_{\lambda} + \frac{9}{4}m^2\rho^2 - \frac{3(n-1)(n-2)}{2n^2}\rho^\mu\rho_\mu)\,. \qquad (11)$$

Из этого следует, что минимальным расширением стационарной поверхности для случая массивной теории спина 3 является добавление к ней одной скалярной, трёх векторных и двух тензорных переменных.

Вторая глава.

Раздел 2.1 начинается с описания классической BV-системы. Вводятся понятия $\mathbb{Z}_2$-градуировки $|\cdot|$ (Грассманова чётность) и $\mathbb{Z}$-градуировки $\mathrm{gh}(\cdot)$, пространства полей и антиполей, антискобки $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}$, $\mathrm{gh}(\{),\cdot\,\}\cdot = 1$, удовлетворяющей тождествам Лейбница и Якоби, а также понятия BV-действия S_{BV}, БРСТ-дифференциала $s = \{S_{BV}, \cdot\,\}$ и мастер-уравнения $s^2 = 0$.

Далее даётся определение BV-системы в терминах расслоения $\mathcal{E} \to X$ и ассоциированного с ним бесконечного расслоения джетов $J^\infty(\mathcal{E}) \to X$:

BV-системой называется расслоение $J^\infty(\mathcal{E}) \to X$, на котором определены векторное поле s, $\mathrm{gh}(s) = 1$, и $(n,2)$-форма $\overset{n}{\omega} \in \bigwedge^{(n,2)}(J^\infty(\mathcal{E}))$, $\mathrm{gh}(\overset{n}{\omega}) = -1$, причём $\overset{n}{\omega} = \pi^*\omega^{\mathcal{E}}$, $\pi : J^\infty(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ и $\omega^{\mathcal{E}}$ - невырожденная $n+2$-форма на $\mathcal{E}$, причём

$$L_s\overset{n}{\omega} + \mathrm{d_h}(\dots) = 0\,, \tag{12}$$

где L_s - производная Ли вдоль s. Доказывается эквивалентность этого определения данному ранее.

После этого вводятся понятия касательного расслоения со сдвинутой градуировкой $T[1]X$, даётся определение Q-многообразия: *Q-многообразие $(\mathcal{M},Q)$ - это $\mathbb{Z}$-градуированное супермногообразие $\mathcal{M}$, на котором определено нечётное нильпотентное векторное поле Q, $\mathrm{gh}(Q) = 1$.* Затем даётся определение Q-расслоения: *Q-расслоение - это локально-тривиальное расслоение, в котором базой и тотальным пространством называются Q-многообразия $(\mathcal{N},q)$ и $(\mathcal{M},Q)$ а каноническая проекция π согласована с Q-структурой, то есть $\pi^* \circ q = Q \circ \pi^*$.*

Далее в данном разделе описывается модель AKSZ: даются определение модели AKSZ и объяснение, как по информации, содержащейся в модели AKSZ, восстанавливается BV-формулировка теории, выписывается AKSZ-действие

$$S[\widehat{\sigma}] = \int_{T[1]X} \widehat{\sigma}^*(\chi)(d_X) - \widehat{\sigma}^*(\mathcal{H})\,, \tag{13}$$

где $\mathcal{H}$ находится из условия $i_Q\omega = d\mathcal{H}$.

Однако применение модели AKSZ, несмотря на всё своё удобство, ограничено топологическими и диффеоморфизм инвариантными теориями. В противном случае в конструкции AKSZ таргет-пространство становится бесконечномерным.

Затем в данном разделе указывается, что данное ограничение модели AKSZ можно обойти, если вместо сиплектической структуры использовать предсимплектическую структуру, после чего вводится определение предсимплектического BV-AKSZ формализма:

Предсимплектическимм BV-AKSZ формализмом называется Q-расслоение $(E,Q,T[1]X)$ с $\pi : (E,Q),T[1]X,d_X)$, на котором определена предсимплектическая структура ω, удовлетворяющая условиям

$$d\omega = 0, \qquad L_Q\omega \in \mathcal{I}\,, \tag{14}$$

где $\mathcal{I}$ - идеал, порождённый дифференциальными формами поднятыми с базы, $\mathcal{I} = \pi^*(\alpha)$, $\alpha \in \bigwedge^{k>0}(T[1]X)$.

После этого даётся определение решения в рамках предсимплектического BV-AKSZ формализма:

Решением называется сечение $\sigma : T[1]X \to E$*, удовлетворяющее условию*

$$\sigma^* \circ Q = d_X \circ \sigma^* \tag{15}$$

Калибровочное преобразования в рамках предсимплектического BV-AKSZ формализма записывается в виде $\delta\sigma^* = \sigma^* \circ [Q, Y]$, где $\mathrm{gh}(Y) = -1$.

Далее показывается, что этих данных достаточно для построения AKSZ действия. Более того, указывается, что AKSZ действие может быть построено в том числе и в более общем случае, когда тотальное пространство не является Q-многообразием в силу нарушения условия нильпотентности Q, и даётся определение обобщённому предсимплектическому BV-AKSZ формализму:

Обобщённый предсиплектический BV-AKSZ формализм $(E,Q,T[1]X)$ *- это* $\mathbb{Z}$*-градуированное расслоение* $\pi : E \to T[1]X$*, на котором определены* 2*-форма* ω, $\mathrm{gh}(\omega) = n - 1$, 0*-формма* $\mathcal{H}$, $\mathrm{gh}(\mathcal{H}) = n$, *и векторное поле* Q, $\mathrm{gh}(Q) = 1$, $\pi^* \circ d_X = Q \circ \pi^*$, *удовлетворяющие соотношениям:*

$$d\omega = 0, \qquad i_Q\omega - d\mathcal{H} \in \mathcal{I}, \qquad \frac{1}{2}i_Q i_Q\omega - Q\mathcal{H} = 0\,. \tag{16}$$

После этого указывается, что в литературе до этого была известна версия обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма, в котором вместо соотношений (16) был написан менее общий набор аксиом:

$$d\omega = 0, \qquad i_Q\omega - d\mathcal{H} \in \mathcal{I}, \qquad \frac{1}{2}i_Q i_Q\omega\,, \qquad i_Q L_Q\omega \in \mathcal{I}. \tag{17}$$

Для этого менее общего набора аксиом известно доказательство факта, что предсимплектический BV-AKSZ формализм воспроизводит BV-формулировку теории. В данном разделе это доказательство модифицируется на случай аксиом (16).

В конце раздела 2.1 обсуждается взаимосвязь между градуированным и неградуированным языками. Для этого вводятся два расслоения: градуированное расслооение $E \to T[1]X$, параметризованное координатами x^a, θ^a и ϕ^i, и неградуированное расслоение $\tilde{E} \to X$. Также предполагается, что на $\tilde{E}$ есть плоская связность Эресманна, благодаря чему дифференциал де Рама разбивается на горизонтальную и вертикальную компоненты, $d = \mathrm{d}_h + \mathrm{d}_v$, и что отображение $\Pi : T[1]X \to X$ может быть использовано для поднятия форм с $\tilde{E}$ на E: $E = \Pi^*\tilde{E}$. Утверждается, что в данном описаном случае существует отображение $\Upsilon : \bigwedge^\bullet(E) \to \bigwedge^\bullet(\tilde{E})$, которое в локальных координатах действует следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\Upsilon(d\psi^A) &= \mathrm{d}_v\psi^A\,,\\
\Upsilon(\theta^a) &= dx^a\,,\\
\Upsilon(dx^a) &= 0 = \Upsilon(d\theta^a)\,,\\
\Upsilon(f(x,\psi)) &= f(x,\psi)\,,\\
\mathrm{d}_h\Upsilon([a]) &= \Upsilon([L_D a])\,.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где $a \in \bigwedge^\bullet(E)$, $[a]$ - класс эквивалентности формы a, $D = \theta^a D_a$ и D_a - горизонтальный подъём $\frac{\partial}{\partial x^a}$, то есть $\mathrm{d}_h = dx^a D_a$.

В разделе 2.2 обсуждается случай системы, у которой Q-дифференциал не содержит в себе информации о калибровочной симметрии теории. При этом делается упор на то, что это не означает отсутствие калибровочных симметрий у рассматриваемой системы. Данная ситуация является частным примером неполной BV-системы.

Утверждается, что в данном случае у системы в рамках предсимплектического BV-AKSZ формализма $(E,Q,T[1]X,\omega)$ слой может быть параметризован координатами ψ^A, база координатами x^a и θ^a, причём среди всех переменных ψ^A, x^a и θ^a лишь у θ^a градуировка будет отличной от 0, $\mathrm{gh}(\theta^a) = 1$. В таком случае алгебра функций $C^\infty(E)$ могжет быть без потери общности отождествлена с алгеброй горизонтальных форм на расслоении $\tilde{E} \to X$. А так как Q-дифференциал в данном случае будет линеен по θ^a, он может быть отождествлён с горизонтальным дифференциалом де Рама d_h на $\tilde{E} \to X$, а алгебра функций $C^\infty(E)$ может быть без потери общности отождествлена с алгеброй горизонтальных форм на расслоении $\tilde{E} \to X$ при помощи изоморфизма, обсуждённого ранее. Тогда предсимплектическая структура на $\tilde{E} \to X$ в силу условия $\mathrm{gh}(\omega) = n-1$ может быть записана, как

$$
\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^a_{AB}\mathrm{d}_v\psi^A\mathrm{d}_v\psi^B(\theta)^{(n-1)}_a\,,
\tag{19}
$$

где $\tilde{\omega} = \Upsilon(\omega)$, а аксиомы предсимплектического BV-AKSZ формализмма на $\tilde{E} \to X$ принимают вид

$$
\mathrm{d}_v\tilde{\omega} = 0\,, \qquad \mathrm{d}_h\tilde{\omega} = 0\,, \qquad \tilde{\omega} = \mathrm{d}_v\tilde{\chi}\,.
\tag{20}
$$

Далее, поскольку когомологии d_v тривиальны, утверждается, что предсимплектическая структура $\tilde{\omega}$ может быть записана в виде $\tilde{\omega} = d(\tilde{\chi}+l)$, где $l \in \bigwedge^{n,0}(\tilde{E})$, и тогда можно записать действие

$$
S^C[\sigma^*] = \int \sigma^*(\tilde{\chi} + \tilde{l})\,.
\tag{21}
$$

которое, как утверждается, является внутренним действием и совпадает с AKSZ-действием для описываемой теории, строящемся по описанным ранее аксиомам. Таким образом предсимплектический BV-AKSZ формализм в ситуации, когда Q-дифференциал не содержит в себе информации о калибровочной симметрии теории, восстанавливает внутреннее действие рассматриваемой теории.

После этого в данном разделе рассматривается такая же система, но уже в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма. В данном случае все аксиомы также оказываются удовлетворены. Указывается, что получаемая в таком случае формулировка совпадает с известной в литературе мультисимплектической формулировкой теории с дополнительной структурой в виде связности Эресманна. В данном случае, поскольку требование нильпотентности Q-дифференциала не обязательно выполнено, данная связность необязательно является плоской.

В разделе 2.3 рассматривается применение обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма к случаю электродинамики старших форм. Раздел начинается с описания электродинамики p-формы и обсуждения приводимости калибровочных преобразований данной теории. Далее в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма рассматривается система $(E,Q,T[1]X,\omega)$, координатами слоя которой выступают C, $\mathrm{gh}(C) = p$ и $\mathbf{F}$, $\mathrm{gh}(\mathbf{F}) = p + 1$, и вводитяся предсимплектическая структура и предсимплектический потенциал:

$$\omega = d\chi\,, \qquad \chi = \frac{1}{2}(\star\mathbf{F})dC\,. \tag{22}$$

Далее показывается, что данная предсимплектическая структура вместе с ковариантным Гамильтонианом $\mathcal{H} = \frac{1}{4}\mathbf{F}(\star\mathbf{F})$ и Q-дифференциалом

$$\begin{gathered} Qx^a = \theta^a\,, Q\theta^a = 0 \\ QC = \mathbf{F}\,, \qquad QF^{(p+1)} = 0\,. \end{gathered} \tag{23}$$

удовлетворяет всем аксиомам обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма, после чего строится AKSZ-действие.

Следом рассматривается случай $p = 2$ в размерности $n = 4$, поскольку все остальные случаи различных p и n строятся аналогично. На суперсечениях $\widehat{\sigma} : T_x[1]X \to E$,

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}^*(C) &= \overset{0}{C} + \overset{1}{C}_a\theta^a + \frac{1}{2}A_{ab}\theta^a\theta^b + \frac{1}{6}\overset{3}{C}_{abc}\theta^a\theta^b\theta^c + \dots\,, \\ \widehat{\sigma}^*(F^{abc}) &= F^{abc} + \overset{1}{F}{}^{abc}{}_d\theta^d + \frac{1}{2}\overset{2}{F}{}^{abc}{}_{de}\theta^d\theta^e + \frac{1}{6}\overset{3}{F}{}^{abc}{}_{def}\theta^d\theta^e\theta^f + \dots\,. \end{aligned} \tag{24}$$

выписывается предсимплектическая структура, как форма на $\tilde{E}$, которая после факторизации по ядру с точностью до переобозначения полей, имеет вид

$$\overset{4}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2}(dCdC^* - dC_a dC^{*a} + dA_{ab}dA^{*ab} - dF^*_{abc}dF^{abc})(dx)^4 \qquad (25)$$

Таким образом данная структура является канонической, а градуировки всех входящих в неё переменных можно представить в виде таблицы:

field	A_{ab}	A^{*ab}	F^{abc}	F^*_{abc}	C_a	C^{*a}	C	C^*
$gh(\cdot)$	0	-1	0	-1	1	-2	2	-3

Наконец, выписывается BV-действие данной теории,

$$S_{BV} = \int d^4x(\frac{1}{2}F^{abc}(\partial_a A_{bc} + \partial_b A_{ca} + \partial_c A_{ab}) - \frac{1}{4}F^{abc}F_{abc} + \\ + \frac{1}{2}A^{*ab}(\partial_a C_b - \partial_b C_a) + \frac{1}{2}C^*_a \partial^a C)\,, \qquad (26)$$

которое совпадает с известным в литературе.

Раздел 2.4 начинается с описания модели Фридмана-Таунсенда - неабелевой деформации модели 2-формы - в размерности $n = 4$. Далее, следуя структуре предыдущего раздела на слое расслоения $E \to T[1]X$ вводятся переменные C, $gh(C) = 2$ и A_a, $gh(A_a) = 0$, а также Q-дифференциал, предсимплектическая структура, предсимплектический потенциал и ковариантный Гамильтониан соответственно.

$$Qx^a = \theta^a\,, Q\theta^a = 0\,, \\ QC = -\frac{1}{6}\epsilon_{abcd}A^a\theta^b\theta^c\theta^d - 2[C,A_a]\theta^a\,, QA_a = -[A_a,A_b]\theta^b\,. \qquad (27)$$

$$\omega = d\chi\,, \qquad \chi = -\frac{1}{2}Tr(CdA_a\theta^a)\,. \qquad (28)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}Tr(\frac{1}{2}A^a A_a(\theta)^4 + C[A_a,A_b]\theta^a\theta^b)\,. \qquad (29)$$

Указывается, что данный набор удовлетворяет аксиомам обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма.

После этого вводятся суперсечения $\widehat{\sigma} : T_x[1]X \to E$, а также переменные, необходимые для построения BV формулировки теории, как коэффициенты разложения по θ:

$$\widehat{\sigma}^*(C) = \overset{0}{C} + \overset{1}{C}_a\theta^a + \frac{1}{2}B_{ab}\theta^a\theta^b + \frac{1}{6}\overset{3}{C}_{abc}\theta^a\theta^b\theta^c + \dots\,, \\ \widehat{\sigma}^*(A^a) = A^a + \overset{1}{A^a}_b\theta^b + \frac{1}{2}\overset{2}{A^a}_{bc}\theta^b\theta^c + \frac{1}{6}\overset{3}{A^a}_{bcd}\theta^b\theta^c\theta^d + \dots\,, \qquad (30)$$

Переписав предсимплектическую структуру, как форму на $\tilde{E}$, отфакторизовавшись по ядру и переобозначив переменные, получим

$$\overset{4}{\tilde{\omega}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\frac{1}{6}dCdC^* + \frac{1}{2}dC^a dC^*_a + \frac{1}{6}dA^*_a dA^a + \frac{1}{4}dB^{ab}dB^*_{ab})(dx)^4\,. \tag{31}$$

Данная структура с точностью до переопределения полей совпадает с симплектической структурой из предыдущего раздела. Этого можно было ожидать, так как симплектическая структура не зависит от взаимодействий в теории.

В конце раздела выписывается полное BV-действие данной теории,

$$S_{BV} = \int d^4x \mathrm{Tr}(-\frac{1}{4}\epsilon_{abcd}B^{ab}(\partial^c A^d - \partial^d A^c + [A^c, A^d]) + \frac{1}{4}A^a A_a - \\ - \frac{1}{4}\epsilon^{abcd}C_a \partial_{[b}B^*_{cd]} - \frac{1}{4}C\partial^a C^*_a)\,, \tag{32}$$

которое, как и ожидалось, совпадает с известным в литературе.

Третья глава.

Раздел 3.1 посвящён одной из первых серьёзных проблем, с которой исторически столкнулась массивная теория гравитации: скачком ван Дама-Вельтмана-Захарова. Указывается, что данная проблема имеет несколько решений, а именно решение А.И. Вайнштейна [27] и решение М. Поррати [28], которые в данном разделе также подобно описываются.

Раздел 3.2 посвящён подсчёту степеней свободы в массивной теории гравитации и их анализу, которые были проделаны Д. Бульваром и С. Дезером в работе [29]. Для этого рассматривается Лагранжиан массивной теории гравитации

$$\mathcal{L}[g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}] = \sqrt{g}(\frac{1}{2}R(g) - m^2 U(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}))\,, \tag{33}$$

где $g_{\mu\nu}$ - динамический метрический тензор, $f_{\mu\nu}$ - фоновый метрический тензор, $U(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu})$ - потенциал, описывающий массивный член.

В данном Лагранжиане производится разложение Арновитта-Дезера-Мизнера (ADM):

$$\begin{gathered} ds^2_g = -N^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \\ ds^2_f = -dt^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j\,, \end{gathered} \tag{34}$$

где N называется функцией хода, N^i - функцией сдвига, γ_{ij} - трёхмерный метрический тензор. Также удобно заранее ввести обозначение $N^\mu = (N, N^i)$.

В результате получается Лагранжиан вида

$$\mathcal{L}[N,N^i,\gamma_{ij}] = N\sqrt{\gamma}(\frac{1}{2}(K_{ij}K^{ij} - K^i_i K^j_j + R(\gamma)) - m^2 U(N,N^i,\gamma_{ij})\,, \tag{35}$$

где K_{ij} - вторая фундаментальная форма:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\dot{\gamma}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i)\,, \tag{36}$$

а точкой обозначена производная по времени.

При подсчёте импульсов

$$\begin{gathered}\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}(K^{ij} - K^l_l \gamma^{ij}) \\ p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^\mu} = 0\end{gathered} \tag{37}$$

возникают 4 связи, которые нужно проверить на устойчивость.

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N^\mu} = H_\mu + m^2\sqrt{\gamma}\frac{\partial U}{\partial N^\mu} = 0\,, \tag{38}$$

где $\mathcal{H} = N^\mu H_\mu + m^2\sqrt{\gamma}U + \lambda^\mu p_\mu$ - Гамильтониан с множителями Лагранжа λ^μ, $H_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(2\pi^{ij}\pi_{ij} - \pi^i_i\pi^j_j) - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}R(\gamma)$ и $H_i = -2\nabla_j \pi^j_i$.

В случае $m = 0$ условие (38) приводит к четырём связям первого рода $H_\mu = 0$, а значит в теории остаётся две степени свободы. Однако в ситуации $m \neq 0$ условие (38) сводится к четырём алгебраическим уравнениям на N^μ, которые можно разрешить. Таким образом все 12 переменных γ_{ij} и π^{ij} остаются свободными, а значит в массивной теории гравитации присутствует 6 степеней свободы.

Более того, при подстановке полученного решения уравнения (38) $N^\mu = N^\mu(\gamma_{ij},\pi^{ij})$ обратно в Гамильтониан $\mathcal{H}$, можно убедиться в том, что в общем случае квадратичная форма не будет положительно определена: в Гамильтониане могут присутствовать члены $-\pi_{ij}\pi^{ij}$, а значит решения в рамках массивной теории гравитации оказываются, вообще говоря, неустойчивыми.

Раздел 3.3 посвящён решению проблемы духа Бульвара-Дезера в массивной теории гравитации, полученному К. де Рам, Г. Габададзе и А. Толли. Указывается, что, пусть данное рассуждение справедливо для общего случая потенциала $U(N,N^i,\gamma_{ij})$, оно не может быть контраргументом к утверждению о том, что существует частный случай потенциала, который приводит к наличию в массивной теории гравитации лишь пяти степеней свободы. Более того, поскольку в линеаризованной теории массивной гравитации присутствует как раз 5 степеней свободы, интересно проследить за тем, что в этом частном случае происходит с приводящим к неустойчивости духом.

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}\,, \qquad N = 1 + \nu\,, \qquad N^i = \nu^i\,, \tag{39}$$

где h_{ij}, ν и ν^i - малые поправки.

Далее удобно взять потенциал U в том виде, который приводит к массовому члену Фирца-Паули в действии:

$$U = \frac{1}{8}(S^\mu_\nu S^\nu_\mu - S^\mu_\mu S^\nu_\nu)\,, \tag{40}$$

где $S^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}$.

Разложение S^μ_ν по степеням малости и сохранение лишь линейного вклада даёт $S^0_0 = 2\nu$, $S^0_i = -\nu_i$, $S^i_j = h^i_j$. В результате данного разложения Гамильтониан принимает вид:

$$\mathcal{H} = 2\pi^{ij}\pi_{ij} - \pi^i_i\pi^j_j + \frac{1}{4}h^{ij}(-\frac{1}{2}\Delta h_{ij} + \frac{1}{2}\Delta h^k_k - \partial_i\partial_j h^k_k + \frac{1}{2}\partial_i\partial^k h_{kj} + \\ + \frac{1}{2}\partial_j\partial^k h_{ki}) + \frac{m^2}{8}(h^{ij}h_{ij} - h^i_i h^j_j - 2\nu^i\nu_i) - \nu^i\partial^j\pi_{ij} - \nu^j\partial^i\pi_{ij} + \nu(\frac{1}{2}(\Delta h^i_i - \partial^i\partial^j h_{ij}) - \\ - \frac{m^2}{2}h^i_i) + \lambda^\mu p_\mu \tag{41}$$

Поскольку ν входит в Гамильтониан линейно, в теории появляются две вторичные связи второго рода, которые исключают одну из степеней свободы. Таким образом в массивная теория гравитации описывает 5 степеней свободы в случае, когда потенциал $U(N,N^i,\gamma_{ij})$ линеен по N. Подобный потенциал в терминах матрицы $\tilde{\gamma}$, определяемой соотношением $(\gamma^2)^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu}$ имеет вид:

$$U(\tilde{\gamma}) = \beta_0 + \beta_1 Tr(\tilde{\gamma}) + \frac{1}{2}\beta_2(Tr(\tilde{\gamma})^2 - Tr(\tilde{\gamma}^2)) + \frac{1}{6}\beta_3(Tr(\tilde{\gamma})^3 - 3Tr(\tilde{\gamma}^2)Tr(\tilde{\gamma})) + \\ + \beta_4(Tr(\widehat{\gamma})^4 - 6Tr(\widehat{\gamma}^2)Tr(\widehat{\gamma})^2 + 3Tr(\widehat{\gamma}^2)^2 + 8Tr(\widehat{\gamma})Tr(\widehat{\gamma}^3) - 6Tr(\widehat{\gamma}^4))\,, \tag{42}$$

где $\beta_0,\ldots,\beta_4$ - произвольные константы.

Далее вводится естественное обобщение бездуховой массивной теории гравитации: бездуховая массивная теория биграватации:

$$S[g,f] = \int d^4x(\kappa_1\sqrt{-g}R_{\mu\nu}(g)g^{\mu\nu} + \kappa_2\sqrt{-f}R_{\mu\nu}(f)f^{\mu\nu} + m^2\sqrt{-g}U(\gamma))\,. \tag{43}$$

Данная теория обладает семью степенями свободы, из которых две описывают безмассовый гравитон, а пять - массивный. Распределение этих степеней свободы между полями $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$ описывается параметром η, $tg^2(\eta) = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$.

Раздел 3.4 посвящён описанию бездуховой массивной теории бигравитации на реперном языке:

$$S[e,f] = \int \epsilon_{abcd}(\kappa_1 R^{ab}(e)e^c e^d + \kappa_2 R^{ab}(f) f^c f^d + m^2 A^{abcd}) \,, \qquad (44)$$

где $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu$, $f_{\mu\nu} = \eta_{ab} f^a_\mu f^b_\nu$ и

$$A^{abcd} = C_0 e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + C_1 f^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + C_2 f^a \wedge f^b \wedge e^c \wedge e^d + C_3 f^a \wedge f^b \wedge f^c \wedge e^d + \\ + C_4 f^a \wedge f^b \wedge f^c \wedge f^d \,. \qquad (45)$$

Реперная формулировка бездуховой массивной бигравитации, вообще говоря, не эквивалентна метрической. Требуемая эквивалентность достигается наложением условия симметричности матрицы $f^a_\mu e_{\nu a}$. Данное условие называется калибровкой Дезера-ван Невенхойзена. В случае же действия первого порядка,

$$S[e,\omega, f,\tilde{\omega}] = \int \epsilon_{abcd}(\kappa_1 R^{ab}(\omega)e^c e^d + \kappa_2 R^{ab}(\tilde{\omega}) f^c f^d + m^2 A^{abcd}) \,, \qquad (46)$$

данное условие приводит дополнительно к появлению условия на Лоренц-связности: $(\omega^{ab} - \tilde{\omega}^{ab}) \wedge e_a \wedge f_b = 0$.

Далее в данном разделе указывается, что несмотря на наличие двух реперов, у бездуховой массивной теории бигравитации лишь два калибровочных параметра: один отвечает за диффеоморфизмы теории, другой - за преобразования Лоренца.

В разделе 3.5 приводится последовательный алгоритм размерной редукции через дискретизацию, позволяющий получить действие бездуховой массивной бигравитации в $n = 4$ из действия Картана-Вейля.

Раздел 3.6 посвящён построению формулировки бездуховой массивной теории бигравитации в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма. Важно отметить, что рассматривается лишь частный случай потенциала dRGT, в котором $C_1 = C_3 = 0$. Тем не менее, данный потенциал содержит в том числе и физический (то есть содержащий в спектре решений пространство Минковского и не приводящий к перенормировке массы) случай $C_0 = \frac{3}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$ и $C_4 = -\frac{3}{2}$. Для построения обобщённой предсимплектической BV-AKSZ формулировки рассматриваемой теории вводится расслоение $E \to T[1]X$, слой которого может быть параметризован координатами ξ^a, ρ^{ab}, $\tilde{\xi}^a$ и $\tilde{\rho}^{ab}$, $\mathbb{Z}$-градуировка которых равна 1. После этого выписываются симплектическая структура и Q-дифференциал:

$$\Omega = \epsilon_{abcd}(\kappa_1 d\rho^{ab} d\xi^c \xi^d + \kappa_2 d\tilde{\rho}^{ab} d\tilde{\xi}^c \tilde{\xi}^d) = \Omega_{(e)} + \Omega_{(f)} \tag{47}$$

$$\begin{gathered}
Q\xi^a = \rho^a{}_k \xi^k \\
Q\rho^{ab} = \rho^a{}_k \rho^{kb} + \frac{4C_0 m^2}{\kappa_1}\xi^a\xi^b + \frac{2C_2 m^2}{\kappa_1}\tilde{\xi}^a\tilde{\xi}^b \\
Q\tilde{\xi}^a = \tilde{\rho}^a{}_k \tilde{\xi}^k \\
Q\tilde{\rho}^{ab} = \tilde{\rho}^a{}_k \tilde{\rho}^{kb} + \frac{2C_2 m^2}{\kappa_2}\xi^a\xi^b + \frac{4C_4 m^2}{\kappa_2}\tilde{\xi}^a\tilde{\xi}^b
\end{gathered} \tag{48}$$

Стоит отметить, что Q-дифференциал в данном случае не является нильпотентным, поскольку $Q\rho^{ab}$ и $Q\tilde{\rho}^{ab}$ содержат $\frac{2C_2 m^2}{\kappa_1}\tilde{\xi}^a\tilde{\xi}^b$ и $\frac{2C_2 m^2}{\kappa_2}\xi^a\xi^b$ соответственно.

Ковариантный Гамильтониан $\mathcal{H}$ находится из условия $i_Q\Omega - d\mathcal{H} \in \mathcal{I}$:

$$\mathcal{H} = \epsilon_{abcd}(\frac{1}{2}\kappa_1 \rho^a{}_k \rho^{kb}\xi^c\xi^d + \frac{1}{2}\kappa_2 \tilde{\rho}^a{}_k \tilde{\rho}^{kb}\tilde{\xi}^c\tilde{\xi}^d + C_0 m^2 \xi^a\xi^b\xi^c\xi^d + C_2 m^2 \tilde{\xi}^a\tilde{\xi}^b\xi^c\xi^d + \\ + C_4 m^2 \tilde{\xi}^a\tilde{\xi}^b\tilde{\xi}^c\tilde{\xi}^d) \tag{49}$$

Также доказывается, что и третья аксиома, $\frac{1}{2}i_Q i_Q\Omega - Q\mathcal{H} = 0$, то есть

$$i_Q i_Q \Omega = 4C_2 m^2 \epsilon_{abcd}(\tilde{\xi}^a\tilde{\xi}^b\rho^c{}_k\xi^k\xi^d + \xi^a\xi^b\tilde{\rho}^c{}_k\tilde{\xi}^k\tilde{\xi}^d) = Q\mathcal{H}\,, \tag{50}$$

также оказывается выполненной в силу $i_Q i_Q\Omega = 0$, что удобно увидеть в специальной системе координат.

Для воспроизведения условий Дезера-ван Невенхойзена также вводится система уравнений на переменные теории:

$$\begin{cases} (\rho_{ab} - \tilde{\rho}_{ab})\xi^a\tilde{\xi}^b = 0 \\ \xi^a\tilde{\xi}_a = 0\,. \end{cases} \tag{51}$$

Раздел 3.7 посвящён проверке регулярности поверхности, определяемой продолжением поверхности связей, определяемой (51), на суперсечения $\widehat{\sigma} : T_x[1]X \to E$. Данная поверхность оказывается регулярной.

В конце раздела, в целях выяснить спектр переменных BV-формулировки теории, выписывается симплектическая структура бездуховой массивной биграгитации на сечениях $\widehat{\sigma} : T_x[1]X \to E$ в точке p, определяемой условиями $e^a_\mu = \delta^a_\mu$ и $\xi^a_{\ldots} = \tilde{\xi}^a_{\ldots} = 0$:

$$\bar{\Omega} = (\mathrm{d}\xi^*_c \mathrm{d}\xi^c + \mathrm{d}\omega^{ab}_c \mathrm{d}\omega^{*c}{}_{ab} + \mathrm{d}\rho^{ab}\mathrm{d}\rho^*_{ab} + \mathrm{d}e^{*a}{}_c \mathrm{d}e^c_a + \mathrm{d}\tilde{\omega}^{ab}_c \mathrm{d}\tilde{\omega}^{*c}{}_{ab} + \mathrm{d}f^{*a}{}_c \mathrm{d}f^c_a)\,, \tag{52}$$

где $\xi^*_c = \rho^{ab}_{abc} + \overset{+}{\tilde{\rho}}{}^{ab}_{abc}$, ${\omega^*}^c{}_{ab} = \xi^c_{ba}$, $\rho^*_{ab} = \xi^c_{abc} + \overset{+}{\tilde{\xi}}{}^c{}_{abc}$, ${e^*}^a{}_c = 2\rho^{ab}_{bc}$, $\tilde{\omega}^{ab}_c = \overset{+}{\tilde{\omega}}{}^{ab}_c + \overset{-}{\omega}{}^{ab}_c$, ${\tilde{\omega}^*}{}^c{}_{ab} = \overset{-}{\xi}{}^c{}_{ba} + \overset{+}{\tilde{\xi}}{}^c{}_{ba}$ и ${f^*}^a{}_c = 2\overset{+}{\tilde{\rho}}{}^{ab}_{bc}$.

Наконец, раздел 3.8 посвящён обобщению полученных в главе 3 результатов на случай бигравитации в трёхмерии.

Заключение

В заключении приведены основные результаты работы.

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Построено внутреннее действие для массивных теорий спина 2 и 3 и показано, что оно является неполным в том смысле, что приводит не ко всем уравнениям движения теории: в обоих случаях отсутствует уравнение бездивергентности поля. Для решения данной проблемы рассмотрена Parent-формулировка данных теорий, поскольку она обладает той же предсимплектической формой, что и внутреннее действие. Затем из полученных формулировок исключением части вспомогательных полей, получены необходимые расширения стационарной поверхности и предсимплектической структуры для массивных теорий спина 2 и 3 и выписан соответствующий спектр переменных для обеих теорий.
2. При помощи отображения Υ между алгеброй вертикальных форм на расслоении $E \to T[1]X$ и алгеброй всех форм на расслоении $\tilde{E} \to X$ показано, что предсимплектический BV-AKSZ формализм в случае, когда Q-дифференциал не содержит информации о калибровочной симметрии теории, позволяет получить внутренее действие данной теории. В то же время обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм в ситуации, Q-дифференциал не содержит информации о калибровочной симметрии теории, оказывается эквивалентным известной в литературе мультисимплектической формулировке теории с дополнительной структурой, которую можно интерпретировать, как распределение Картана, не являющееся, вообще говоря, инволютивным на конечномерном расслоении.
3. В рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма построена минимальная формулировка для ряд теорий с приводимыми калибровочными преобразованиями, в частности для электродинамики p-формы и её неабелевой модификации данной теории в случае $p = 2$, $n = 4$ - модели Фридмана-Таунсенда. При этом весь BV-спектр переменных данных теории восстанавливается лишь по двум переменным слоя E расслоения $E \to T[1]X$.

4. В рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма построена минимальная формулировка бездуховой массивной теории биграватации. Получен спектр переменных, необходимых для построения BV-формулировки бездуховой массивной теории биграватации. Полученные результаты обобщены на случай размерности $n = 3$.

Публикации автора по теме диссертации:

1. *Grigoriev, M.* Presymplectic structures and intrinsic Lagrangians for massive fields / Grigoriev, Maxim and Gritzaenko, Vyacheslav // Nucl. Phys. B - Т. 975 - С. 115686.
2. *Dneprov, I* Presymplectic minimal models of local gauge theories / Dneprov, Ivan and Grigoriev, Maxim and Gritzaenko, Vyacheslav // J. Phys. A - Т. 97 - Н. 33 - С. 335402
3. *Grigoriev, M* Presymplectic BV-AKSZ formulation of ghost free massive bigravity / Grigoriev, Maxim and Gritzaenko, Vyacheslav // - JHEP - Т. 2025 - Н. 130

Список литературы

1. *Vinogradov, A. M.* The logic algebra for the theory of linear differential operators [Текст] / A. M. Vinogradov // Sov. Math., Dokl. — 1972. — Т. 13. — С. 1058—1062.
2. *Henneaux, M.* Equations of motion, commutation relations and ambiguities in the Lagrangian formalism [Текст] / M. Henneaux // Annals Phys. — 1982. — Т. 140. — С. 45—64.
3. *Khavkine, I.* Presymplectic current and the inverse problem of the calculus of variations [Текст] / I. Khavkine // J. Math. Phys. — 2012. — Окт. — Т. 54. — С. 111502. — eprint: 1210.0802.
4. *Fierz, M.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field [Текст] / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. Lond. — 1939. — Т. A173. — С. 211—232.
5. *Singh, L. P. S.* Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case [Текст] / L. P. S. Singh, C. R. Hagen // Phys. Rev. — 1974. — Т. D9. — С. 898—909.
6. *Zinoviev, Y. M.* First order formalism for massive mixed symmetry tensor fields in Minkowski and (A)dS spaces [Текст] / Y. M. Zinoviev. — 2003. — arXiv: hep-th/0306292.
7. *Ponomarev, D. S.* Frame-Like Action and Unfolded Formulation for Massive Higher-Spin Fields [Текст] / D. S. Ponomarev, M. A. Vasiliev // Nucl. Phys. — 2010. — Т. B839. — С. 466—498. — arXiv: 1001.0062 [hep-th].

8. *Polchinski, J.* String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string [Текст] / J. Polchinski. — Cambridge University Press, 12.2007. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
9. *Polchinski, J.* String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond [Текст] / J. Polchinski. — Cambridge University Press, 12.2007. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
10. *Hydon, P.* Multisymplectic conservation laws for differential and differential-difference equations [Текст] / P. Hydon // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. Т. 461. — The Royal Society. 2005. — С. 1627—1637.
11. *Saunders, D.* Thirty years of the inverse problem in the calculus of variations [Текст] / D. Saunders // Reports on Mathematical Physics. — 2010. — Т. 66. — С. 43—53.
12. *Kijowski, J.* A Symplectic Framework for Field Theories [Текст] / J. Kijowski, W. Tulczyjew. — Springer Berlin Heidelberg, 1979. — (Lecture Notes in Physics). — URL: https://books.google.de/books?id=d6%5C_vAAAAMAAJ.
13. *Anderson, I. M.* Aspects of the inverse problem to the calculus of variations [Текст] / I. M. Anderson // Archivum Mathematicum. — 1988. — Т. 024, № 4. — С. 181—202. — URL: http://eudml.org/doc/18247.
14. *Anderson, I.* Introduction to the variational bicomplex [Текст] / I. Anderson // Mathematical Aspects of Classical Field Theory. Т. 132 / под ред. M. Gotay, J. Marsden, V. Moncrief. — Amer. Math. Soc., 1992. — С. 51—73. — (Contemporary Mathematics).
15. *Anderson, I.* The variational bicomplex [Текст] : тех. отч. / I. Anderson ; Formal Geometry ; Mathematical Physics, Department of Mathematics, Utah State University. — 1989.
16. *Grigoriev, M.* Presymplectic structures and intrinsic Lagrangians [Текст] / M. Grigoriev. — 2016. — arXiv: 1606.07532 [hep-th].
17. *Abakumova, V. A.* Reducible Stueckelberg symmetry and dualities [Текст] / V. A. Abakumova, S. L. Lyakhovich // Phys. Lett. B. — 2021. — Т. 820. — С. 136552. — arXiv: 2106.09355 [hep-th].
18. *Batalin, I.* Gauge Algebra and Quantization [Текст] / I. Batalin, G. Vilkovisky // Phys.Lett. — 1981. — Т. B102. — С. 27—31.
19. *Batalin, I.* Feynman Rules For Reducible Gauge Theories [Текст] / I. Batalin, G. Vilkovisky // Phys.Lett. — 1983. — Т. B120. — С. 166—170.

20. *Batalin, I. A.* OPERATOR QUANTIZATION OF RELATIVISTIC DYNAMICAL SYSTEMS SUBJECT TO FIRST CLASS CONSTRAINTS [Текст] / I. A. Batalin, E. S. Fradkin // Phys. Lett. — 1983. — Т. 128B. — С. 303—308.

21. *Batalin, I.* A Generalized Canonical Formalism and Quantization of Reducible Gauge Theories [Текст] / I. Batalin, E. Fradkin // Phys. Lett. B. — 1983. — Т. 122. — С. 157—164.

22. The Geometry of the master equation and topological quantum field theory [Текст] / M. Alexandrov [и др.] // Int.J.Mod.Phys. — 1997. — Т. A12. — С. 1405—1430. — eprint: hep-th/9502010.

23. *Grigoriev, M.* Presymplectic gauge PDEs and Lagrangian BV formalism beyond jet-bundles [Текст] / M. Grigoriev // Contemp. Math. — 2023. — Т. 788. — С. 111—134. — arXiv: 2212.11350 [math-ph].

24. *Alkalaev, K. B.* Frame-like Lagrangians and presymplectic AKSZ-type sigma models [Текст] / K. B. Alkalaev, M. Grigoriev // Int. J. Mod. Phys. — 2014. — Т. A29, № 18. — С. 1450103. — arXiv: 1312.5296 [hep-th].

25. *Dam, H. van.* Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields [Текст] / H. van Dam, M. J. G. Veltman // Nucl. Phys. B. — 1970. — Т. 22. — С. 397—411.

26. *Zakharov, V. I.* Linearized gravitation theory and the graviton mass [Текст] / V. I. Zakharov // JETP Lett. — 1970. — Т. 12. — С. 312.

27. *Vainshtein, A. I.* To the problem of nonvanishing gravitation mass [Текст] / A. I. Vainshtein // Phys. Lett. B. — 1972. — Т. 39. — С. 393—394.

28. *Porrati, M.* No van Dam-Veltman-Zakharov discontinuity in AdS space [Текст] / M. Porrati // Phys. Lett. B. — 2001. — Т. 498. — С. 92—96. — arXiv: hep-th/0011152.

29. *Boulware, D. G.* Can gravitation have a finite range? [Текст] / D. G. Boulware, S. Deser // Phys. Rev. D. — 1972. — Т. 6. — С. 3368—3382.

30. *Rham, C. de.* Resummation of Massive Gravity [Текст] / C. de Rham, G. Gabadadze, A. J. Tolley // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Т. 106. — С. 231101. — arXiv: 1011.1232 [hep-th].

31. *Donder, T. de.* Théorie invariantive du calcul des variations [Текст] / T. de Donder. — Gauthier-Villars, 1930. — URL: https://books.google.ru/books?id=3kI7AQAAIAAJ.

32. *Weyl, H.* Geodesic Fields in the Calculus of Variation for Multiple Integrals [Текст] / H. Weyl // Annals of Mathematics. — 1935. — Т. 36, № 3. — С. 607—629. — URL: http://www.jstor.org/stable/1968645 (дата обр. 02.08.2024).

33. *Aldaya, V.* Higher Order Hamiltonian Formalism in Field Theory [Текст] / V. Aldaya, J. A. de Azcarraga // J. Phys. A. — 1980. — Т. 13. — С. 2545.

34. *Echeverria-Enriquez, A.* Geometry of Lagrangian first order classical field theories [Текст] / A. Echeverria-Enriquez, M. C. Munoz-Lecanda, N. Roman-Roy // Fortsch. Phys. — 1996. — Т. 44. — С. 235—280. — arXiv: dg-ga/9505004.

35. Hamiltonian systems in multisymplectic field theories [Текст] / A. Echeverria-Enriquez [и др.] // J. Math. Phys. — 2007. — Т. 48. — С. 112901. — arXiv: math-ph/0506003.

36. *Roman-Roy, N.* Multisymplectic Lagrangian and Hamiltonian formalism of first-order classical field theories [Текст] / N. Roman-Roy // 1st Joint Congress of Mathematics RSME-SCM-SEIO-SEMA (MAT.ES 2005) (In Spanish). — 06.2005. — arXiv: math-ph/0506022.

37. Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory [Текст] / A. Echeverria-Enriquez [и др.] // J. Math. Phys. — 2004. — Т. 45. — С. 360—380. — arXiv: math-ph/0212002.

38. *Gotay, M. J.* Momentum maps and classical relativistic fields. II: Canonical analysis of field theories [Текст] / M. J. Gotay, J. Isenberg, J. E. Marsden. — 2004. — arXiv: math-ph/0411032.

39. *Gaset, J.* Variational principles and symmetries on fibered multisymplectic manifolds [Текст] / J. Gaset, P. D. Prieto-Martínez, N. Román-Roy // Commun. Math. — 2016. — Т. 24, № 2. — С. 137—152.

40. *Echeverria-Enriquez, A.* On the multimomentum bundles and the Legendre maps in field theories [Текст] / A. Echeverria-Enriquez, M. C. Munoz-Lecanda, N. Roman-Roy // Rept. Math. Phys. — 2000. — Т. 45. — С. 85—105. — arXiv: math-ph/9904007.

41. *Gaset, J.* Multisymplectic formulation of Lagrangian models in gravitation [Текст] / J. Gaset, N. Román-Roy //. — 10.2019. — arXiv: 1910.01521 [math-ph].

42. *Gaset, J.* Geometric Gauge Freedom in Multisymplectic Field Theories [Текст] / J. Gaset. — 2022. — Сент. — arXiv: 2209.11212 [math-ph].

43. *Grigoriev, M.* Presymplectic AKSZ formulation of Einstein gravity [Текст] / M. Grigoriev, A. Kotov // JHEP. — 2021. — Т. 09. — С. 181. — arXiv: 2008.11690 [hep-th].

44. *Dneprov*, *I.* Presymplectic BV-AKSZ formulation of conformal gravity [Текст] / I. Dneprov, M. Grigoriev // Eur. Phys. J. C. — 2023. — Т. 83, № 1. — С. 6. — arXiv: 2208.02933 [hep-th].
45. *Sharapov*, *A.* Higher spin gravities and presymplectic AKSZ models [Текст] / A. Sharapov, E. Skvortsov // Nucl. Phys. B. — 2021. — Т. 972. — С. 115551. — arXiv: 2102.02253 [hep-th].
46. *Grigoriev*, *M.* Gauge PDE and AKSZ-type Sigma Models [Текст] / M. Grigoriev, A. Kotov // Fortsch. Phys. — 2019. — arXiv: 1903.02820 [hep-th].
47. *Grigoriev*, *M.* Notes on the L_∞-approach to local gauge field theories [Текст] / M. Grigoriev, D. Rudinsky // J. Geom. Phys. — 2023. — Т. 190. — С. 104863. — arXiv: 2303.08990 [hep-th].
48. *Grigoriev*, *M.* Asymptotic symmetries of gravity in the gauge PDE approach [Текст] / M. Grigoriev, M. Markov. — 2023. — Окт. — arXiv: 2310.09637 [math-ph].
49. Consistent deformations of free massive field theories in the Stueckelberg formulation [Текст] / N. Boulanger [и др.] // JHEP. — 2018. — Т. 07. — С. 021. — arXiv: 1806.04695 [hep-th].
50. Deformations of massive field theories [Текст] / S. Garcia-Saenz [и др.] // 15th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories. — 2022.
51. *Fronsdal*, *C.* Massless Fields with Integer Spin [Текст] / C. Fronsdal // Phys.Rev. — 1978. — Т. D18. — С. 3624.
52. *Weinberg*, *S.* Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's equations [Текст] / S. Weinberg // Phys. Rev. — 1965. — Т. 138. — B988—B1002.
53. *Fradkin*, *E. S.* On the Gravitational Interaction of Massless Higher Spin Fields [Текст] / E. S. Fradkin, M. A. Vasiliev // Phys. Lett. B. — 1987. — Т. 189. — С. 89—95.
54. *Vasiliev*, *M. A.* Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions [Текст] / M. A. Vasiliev // Phys. Lett. — 1990. — Т. B243. — С. 378—382.
55. *Vasiliev*, *M. A.* Properties of equations of motion of interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions [Текст] / M. A. Vasiliev // Class.Quant.Grav. — 1991. — Т. 8. — С. 1387—1417.
56. *Vasiliev*, *M. A.* Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d) [Текст] / M. A. Vasiliev // Phys. Lett. — 2003. — Т. B567. — С. 139—151. — eprint: hep-th/0304049.

57. Nonlinear higher spin theories in various dimensions [Текст] / X. Bekaert [и др.] // 1st Solvay Workshop on Higher Spin Gauge Theories. — 2004. — С. 132—197. — arXiv: hep-th/0503128.

58. *Tarusov, A. A.* On the variational principle in the unfolded dynamics [Текст] / A. A. Tarusov, M. A. Vasiliev // Phys. Lett. B. — 2022. — Т. 825. — С. 136882. — arXiv: 2111.12691 [hep-th].

59. *Sharapov, A.* On auxiliary fields and Lagrangians for relativistic wave equations [Текст] / A. Sharapov, D. Shcherbatov // J. Phys. A. — 2024. — Т. 57, № 1. — С. 015210. — arXiv: 2308.02074 [hep-th].

60. *Delplanque, W.* Symmetric vs. chiral approaches to massive fields with spin [Текст] / W. Delplanque, E. Skvortsov. — 2024. — Май. — arXiv: 2405.13706 [hep-th].

61. *Grigoriev, M.* Presymplectic structures and intrinsic Lagrangians for massive fields [Текст] / M. Grigoriev, V. Gritzaenko // Nucl. Phys. B. — 2022. — Т. 975. — С. 115686. — arXiv: 2109.05596 [hep-th].

62. *Dneprov, I.* Presymplectic minimal models of local gauge theories [Текст] / I. Dneprov, M. Grigoriev, V. Gritzaenko // J. Phys. A. — 2024. — Т. 57, № 33. — С. 335402. — arXiv: 2402.03240 [hep-th].

63. *Grigoriev, M.* Massive bigravity as a presymplectic BV-AKSZ sigma-model [Текст] / M. Grigoriev, V. Gritzaenko // JHEP. — 0130. — Т. 2025, № 130.

Грицаенко Вячеслав Сергеевич

Предсимплектические структуры и минимальные лагранжианы первого порядка для массивных полей

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________