

ОТЗЫВ

официального оппонента, доктора физико-математических наук Михаила Орионовича Катанаева, на диссертацию Владислава Николаевича Ваховского на тему "Ковариантные методы в современной квантовой теории поля и квантовой гравитации", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3–теоретическая физика.

Диссертация посвящена решению двух актуальных проблем теоретической физики.

Первая из них связана с изучением свойств ядра уравнения теплопроводности для дифференциальных операторов порядка выше 2-го. Для псевдо-дифференциального оператора на римановом многообразии ядро уравнения теплопроводности является матрично-значной функцией, зависящей от двух точек многообразия, а также дополнительного параметра «собственного времени». В пределе совпадающих точек асимптотическое разложение ядра уравнения теплопроводности при стремящемся к нулю собственном времени давно известно и подробно изучено в обширной литературе, однако вне этого предела разложение до сих пор было известно лишь для операторов типа Лапласа. С помощью метода, основанного на символическом исчислении Г. Видома, впервые получено обобщение этого разложения на случай операторов, старший член которых пропорционален степени оператора Лапласа, а также построен алгоритм для вычисления коэффициентов этого разложения. Поскольку эти коэффициенты необходимы для вычисления квантового эффективного действия, то полученные результаты имеют важное прикладное значение. Отметим, что работа имеет также и математическое значение. А именно, в ней впервые введен и исследован новый класс специальных функций гипергеометрического типа, названных «обобщенными экспоненциальными функциями», по которым ведутся построенные разложения. Ряд рассмотренных вопросов, в частности, об интегральных представлениях и асимптотическом поведении введенных функций, представляет интерес для теории специальных функций. Более того, свойства «обобщенных экспонент» позволяют развить эффективную технику интегральных преобразований, позволяющих более просто получить известные «функториальные свойства», важные в теории ядра уравнения теплопроводности. Учитывая то значение, которое эта теория имеет в современной математике, ее связи со спектральной геометрией, теоремами об индексе и т.д., это делает работу интересной с математической точки зрения.

Вторая из решенных в диссертации проблем связана с кажущимся противоречием между разложением однопетлевого эффективного действия по степеням кривизны, полученным в рамках ковариантной теорией возмущений, и действием Ригерта-Фрадкина-Цейтлина (RFT), полученным интегрированием конформной аномалии. Аномальное действие определено с точностью до конформно-инвариантного функционала. Этот произвол подробно рассмотрен в работе с помощью процедуры «фиксации конформной калибровки», которая позволяет получать другие формы аномального действия, среди которых особое значение имеет «действие Фрадкина-Вилковского». Также показано, что последнее совпадает с конформно-неинвариантной частью разложения по степеням кривизны после замены базиса инвариантов, по которым ведется разложение. Это доказывает, что никакого противоречия между RFT-действием и результатами ковариантной теории возмущений в действительности

нет и, по-видимому, ставит точку в длительной дискуссии на эту тему в литературе.

Помимо этого, в диссертации рассматривается ряд других вопросов, связанных с нелокальным эффективным действием: его приложение к космологии, вывод закона конформных преобразований перенормированного тензора энергии-импульса и т.д.

Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения и 2 приложений. Полный объем диссертации 160 страниц текста, включая 6 рисунков. Список литературы содержит 166 наименований.

Во **введении** дается обзор литературы, отражающий степень разработанности и актуальности темы диссертационной работы, а также ее место в современной теоретической физике.

Первая глава носит вводный характер. В ней кратко обсуждаются методы фонового поля и ядра уравнения теплопроводности, вводятся необходимые геометрические объекты и излагается классический способ вычисления коэффициентов разложения ядра уравнения теплопроводности для операторов типа Лапласа, его приложения к вычислению эффективного действия, ограничения этого метода и альтернативный непрямой метод универсальных функциональных следов.

Во **второй главе** проводится детальное исследование введенных «обобщенных экспоненциальных функций», включая их интегральные представления, представление в виде интеграла Меллина-Барнса, связь с функциями Бесселя, разложение в ряд Тейлора, правила дифференцирования и тонкий вопрос об их асимптотическом поведении.

Эти результаты используются в **третьей главе** для построения «внедиагонального разложения» ядра уравнения теплопроводности для операторов, старший символ которых является степенью оператора Лапласа. Также приводятся результаты компьютерных символьных вычислений коэффициентов разложения, полученные с помощью предложенного алгоритма.

Четвертая глава посвящена сравнению аномального действия Ригерта-Фрадкина-Цейтлина и разложения эффективного действия по степеням кривизны в рамках ковариантной теории возмущений. С помощью процедур «фиксации конформной калибровки» и «конформного пересуммирования» доказывается, что противоречие между указанными выражениями отсутствует.

В заключительной **пятой главе** рассматриваются некоторые приложения нелокального эффективного действия, включая вывод конформных преобразований перенормированного тензора энергии-импульса, модель космологической инфляции, вызванной конформной аномалией некоторого количества полей, а также дискуссионный вопрос о ренормгрупповом поведении гравитационной к космологической константе.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертации. Наиболее важными из которых представляются следующие:

1) Для операторов высшего порядка, старший член которых является некоторой степенью оператора Лапласа-Бельтрами, впервые построено разложение ядра уравнения теплопроводности вне предела совпадающих точек в виде двойного функционального ряда по новым «обобщенным экспоненциальным функциям», на основе символьного исчисления Видома разработан алгоритм вычисления коэффициентов этого разложения.

2) Свойства «обобщенных экспонент» исследованы достаточно подробно и полно, включая тонкие вопросы об их экспоненциальном асимптотическом поведении в случае целого порядка и его связи с методом перевала.

3) Разработана эффективная техника интегральных преобразований, позволяющая более простым образом получать важные «функциональные свойства». Полученные результаты могут представлять интерес для математических приложений теории ядра уравнения теплопроводности.

4) Разрешен длительное время обсуждавшийся в литературе вопрос о кажущемся противоречии между аномальным действием Ригерта-Фрадкина-Цейтлина и разложением эффективного действия по степеням кривизны в теории возмущений.

5) Получено обобщение известной формулы Брауна-Кэссиди для конформного преобразования тензора энергии-импульса на случай пространств, не являющихся конформно-плоскими.

В качестве замечаний к диссертации отметим следующее.

1) Некоторые важные математические вопросы, например, вопросы сходимости возникающих рядов не исследованы.

2) Используемая автором терминология не всегда соответствует устоявшейся в русскоязычной математической литературе. Например, вместо общепринятых терминов «ядро оператора теплопроводности», «оператор Лаплас-Бельтрами», «функция действия» используются, соответственно, «тепловое ядро», «оператор Лапласа», «главная функция Гамильтона».

3) Определение мировой функции Синга и ее исследование в разделе 1,3 требует уточнения.

Сделанные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертации, в рамках которой получены новые актуальные научные результаты. Методы, разработанные в работе, и ее результаты могут иметь применение в исследованиях по квантовой гравитации. Отметим также достаточно высокий математический уровень работы. Диссертацию написана ясно и на высоком научном уровне, ее результаты опубликованы в ведущих рецензируемых научных журналах и докладывались на семинарах и конференциях по теоретической физике. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

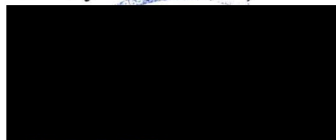
Считаю, что рассматриваемая работа удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Владислав Николаевич Ваховский, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 — теоретическая физика.

Михаил Орионович Катанаев



26.09.2024

доктор физико-математических наук
ведущий научный сотрудник «Математического института
им. В.А. Стеклова Российской академии наук» (МИАН)
119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
e-mail: katanaev@mi-ras.ru



Подпись Михаила Орионовича Катанаева заверяю

Ученый секретарь



С.А. Толмачев