Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

На правах рукописи

Колганов Никита Михайлович

Физика ранней Вселенной: модифицированные теории гравитации и неравновесные явления

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена в Отделении теоретической физики им. И.Е. Тамма Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Научный руководитель:	**Барвинский Андрей Олегович** доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Физического института им. П.Н. Лебедева РАН
Официальные оппоненты:	**Ляхович Семён Леонидович** доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Лаборатории теоретической и математической физики Физического факультета Томского государственного университета, профессор
	Фурсаев Дмитрий Владимирович доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований
Ведущая организация:	Институт ядерных исследований Российской академии наук

Защита состоится 14 октября 2024 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 24.1.262.04 при Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте www.lebedev.ru.

Автореферат разослан “___” _________ 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 24.1.262.04,
канд. физ.-мат. наук Чернышов Дмитрий Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Общая теория относительности (ОТО) [5], предложенная Эйнштейном в качестве теории гравитации уже более ста лет назад, имеет огромную предсказательную силу на масштабах от лабораторных до галактических, что подтверждается многочисленными физическими экспериментами. Однако на малых (планковских), а также на больших (сверхгалактических) масштабах ОТО приобретает некоторые патологии, что на данный момент не позволяет считать её окончательной теорией гравитации.

В частности, на планковских масштабах, т.е. масштабах, на которых становятся существенными квантовые эффекты, ОТО страдает от проблемы неперенормироемости, а именно невозможности избежать бесконечных вкладов в физические ответы для наблюдаемых величин за счёт добавления конечного количества вспомогательных слагаемых (контрчленов) в действие теории, как это сделано, например, в Стандартной модели элементарных частиц. Кроме того, на сверхгалактических масштабах возникают проблемы тёмной энергии и тёмной материи, физических субстанций, предсказываемых в классической и квантовой космологии и необходимых для описания кривых вращения галактик и позднего ускоренного расширения Вселенной, и которые должны тем или иным способом быть включены в теорию гравитации, что не сделано единственным и естественным образом до сих пор.

Для решения обозначенных проблем обычно предлагается модифицировать (или дополнить) ОТО таким образом, чтобы модификация не испортила предсказательную её силу на тех масштабах, на которых есть совпадение с наблюдаемыми данными, и при этом теория допускала бы непротиворечивое квантование и/или согласованно объясняла бы явления темной энергии и тёмной материи. Такие теории обычно называют модифицированными теориями гравитации, и несмотря на большой прогресс в создании таких моделей, проблема далека от окончательного решения.

Наиболее простой способ модифицировать общую теорию относительности — добавить дополнительные степени свободы помимо метрических и полей материи. Примером таких модификаций являются теории Хорндески или DHOST, в которых дополнительной степенью свободы является скалярное поле [6], взаимодействующее с метрикой, но не с полями материи. Большинство ныне существующих модифицированных теорий гравитации устроены именно таким образом, и даже в тех случаях, когда новые степени свободы не добавляются явно, довольно часто теория может быть переформулирована в терминах общей теории относительности, взаимодействующей с некоторыми дополнительными полями (как происходит, например, в $f(R)$-гравитации [7; 8]).

Менее очевидным источником дополнительных степеней свободы является нарушение общековариантной симметрии действия. В ОТО за счет инвариантности действия относительно диффеоморфизмов из десяти независимых компонент метрики физическими являются только две, соответствующие двум поляризациям гравитона. Если симметрия относительно диффеоморфизмов тем или иным образом нарушена, количество физических степеней свободы может увеличиться. Несмотря на то, что общая ковариантность (независимость от выбора системы координат), а также лоренц-ковариантность наблюдаемых физических законов на данный момент с высокой точностью проверены на эксперименте [9], даже небольшое нарушение такой инвариантности может позволить решить некоторые проблемы общей теории относительности.

Примером, когда нарушение общей ковариантности приводит к интересным физическим следствиям, является теория Хоравы-Лифшица [10; 11]. Инвариантность относительно диффеоморфизмов пространства-времени в этой теории нарушена до инвариантности относительно трёхмерных диффеоморфизмов и репараметризаций времени, а лоренц-инвариантность нарушена до инвариантности относительно трёхмерных поворотов. Нарушение достигается за счёт введения анизотропного масштабирования по Лифшицу, которое состоит в неоднородном изменении времени и координат при их масштабировании. Это позволяет эффективно обезразмерить гравитационную постоянную и сделать теорию гравитации перенормируемой с конечным числом контрчленов [12; 13]. Кроме того, есть явные указания на то, что при низких энергиях лоренц-инвариантность теории Хоравы-Лифшица может быть восстановлена [14]. Нарушение общей ковариантности в теории Хоравы-Лифшица приводит к одной дополнительной степени свободы — скалярному гравитону [10; 15].

Также нарушение лоренц-инвариантности используется при построении массивных теорий гравитации, имеющих применение при модификации ОТО на больших масштабах. Известно, что в лоренц-инвариантном случае массивный гравитон на плоском фоне в линейном порядке единственным образом описывается теорией Паули-Фирца. Однако эта теория не имеет хорошего предела при стремящейся к нулю массе гравитона, в частности, наблюдаемые величины, такие как угол отклонения луча света гравитирующим телом, после взятия такого предела не совпадают с соответствующими предсказаниями общей теории относительности. Данный результат имеет название скачка ван Дама-Вельтмана-Захарова [16; 17] и существенно усложняет построение непротиворечивой массивной теории гравитации. Преодолеть данную проблему можно за счёт введения лоренц-неинвариантного массового члена для линеаризованного действия гравитона [18; 19]. В зависимости от параметров модели, нарушение лоренц-инвариантности, влекущее за собой также нарушение инвариантности относительно диффеоморфизмов, приводит к появлению до четырёх степеней свободы, дополнительных к двум поляризациям безмассового гравитона.

Примером модифицированной теории гравитации, количество и природа степеней свободы в которой совпадает с ОТО, является унимодулярная гравитация [20—22]. Данная модифицированная теория гравитации может быть получена из теории Эйнштейна наложением связи, приравнивающей единице детерминант метрики. Такая связь нарушает общую ковариантность системы до инвариантности относительно диффеоморфизмов, сохраняющих объем. Известно, что наложение связи на теорию может привести как к увеличению, так и к уменьшению числа степеней свободы, в зависимости от её рода [23]. Оказывается, что в случае унимодулярной гравитации модификация не меняет число локальных степеней свободы, но добавляет одну глобальную степень свободы с тривиальной динамикой, имеющую смысл космологической постоянной.

Попыткой обобщить данную модель с целью придать космологической «постоянной» нетривиальную динамику является модель обобщенной унимодулярной гравитации [24]. Эта модель отличается от общей теории относительности наложением связи на метрику, приравнивающей 00-компоненту обратной метрики некоторой функции от детерминанта пространственной части метрики, являющейся функциональным параметром теории. Данный специальный выбор связи выделен тем, что эффективный тензор энергии-импульса, возникающий из-за её наложения, имеет вид тензора энергии-импульса некоторой идеальной жидкости с произвольным баротропным уравнением состояния, в котором баротропный параметр определяется функциональным параметром модели. Таким образом, в зависимости от выбора параметра, обобщённая унимодулярная гравитация может выступать как в качестве модели тёмной материи, так и в качестве модели тёмной энергии со значением баротропного параметра, отличного от -1.

В главе 1 данной диссертации мы проводим исследование обобщённой унимодулярной гравитации в трёх её аспектах. Во-первых, мы вычисляем количество степеней свободы в данной модели и обнаруживаем, что в теории может появиться степень свободы, дополнительная к двум степеням свободы ОТО. Во-вторых, мы строим космологическую теорию возмущений в обобщённой унимодулярной гравитации и обнаруживаем, что при подходящем выборе функционального параметра возникающая в модели дополнительная степень свободы может генерировать правдоподобный спектр реликтового излучения. В-третьих, мы получаем ковариантную формулировку обобщённой унимодулярной гравитации, с помощью которой реинтерпретируем модель в терминах скалярной теории поля с нестандартным кинетическим членом (k-эссенции), минимально взаимодействующей с гравитацией, что позволяет использовать произвольные физически обоснованные координаты, связанные, например, с внешними пробными телами, а не со степенями свободы, присущими системе. Все указанные результаты получены нами впервые в работах [1; 2; 25].

Задача выделения физических степеней свободы является нетривиальной, так как наложение связи в обобщённой унимодулярной гравитации явно нарушает как лоренц-инвариантность, так и общую ковариантность теории. Для решения этой задачи мы применяем наиболее общий метод, а именно формализм гамильтоновых систем со связями, позволяющий определить количество физических степеней свободы в теории на нелинейном уровне, исследуя количество связей и их род [23]. Как было упомянуто выше, мы получаем, что в ситуации общего положения количество степеней свободы в обобщённой унимодулярной гравитации равно трём. Однако также мы обнаруживаем, что при специальном выборе начальных условий количество степеней свободы уменьшается до двух.

Степени свободы модифицированных теорий гравитации, дополнительные к имеющимся в теории Эйнштейна, оставляют отпечаток на спектре и амплитуде реликтового радиационного и гравитационного излучения, сгенерированных на ранних стадиях эволюции Вселенной, и наблюдаемых на эксперименте в настоящее время [26]. Этот факт позволяет исследовать применимость модифицированных теории гравитации, сравнивая соответствующие теоретические предсказания с экспериментом.

Для этого мы строим космологическую теорию возмущений для обобщённой унимодулярной гравитации, т.е. сначала решаем классические уравнения движения теории в космологическом анзаце, строим теорию возмущений на фоне найденного решения, а затем вычисляем наблюдаемые величины, простейшими из которых являются одновременны́е двухточечные корреляционные функции в скалярном и тензорном секторах, задающие амплитуду и спектр соответствующих возмущений [27; 28]. Мы получаем, что дополнительная степень свободы в обобщённой унимодулярной гравитации на космологическом фоне имеет скалярную природу (ввиду метрического происхождения мы называем её скалярным гравитоном) и может вносить основной вклад в космологические возмущения в скалярном секторе, сгенерированные на инфляционной стадии. Мы обнаруживаем, что можно подобрать функциональный параметр модели таким образом, чтобы обеспечить как инфляционную стадию достаточной продолжительности, так и спектр и амплитуду скалярных и тензорных возмущений, согласующиеся с экспериментом [26].

Явное нарушение общей ковариантности в модифицированной теории гравитации может быть интерпретировано, как специальный выбор системы координат в некоторой ковариантной теории. Чтобы обеспечить возможность использовать произвольные физически обоснованные координаты, мы строим ковариантную формулировку обобщённой унимодулярной гравитации. Для этого мы используем общий метод получения ковариантной формулировки (ковариантизации) модифицированных теорий гравитации, имеющих алгебраическую зависимость от метрики в нековариантной части действия [19; 29]. Он основан на введении набора из четырёх (по размерности пространства-времени) вспомогательных скалярных полей, называемых Штюкельберговскими, с помощью которых можно преобразовать нековариантную часть действия в скаляр. Мы применяем данную конструкцию к обобщённой унимодулярной гравитации, таким образом ковариантизуя часть действия, соответствующую связи. Кроме того, мы получаем, что на уравнениях движения три из четырёх Штюкельберговских полей, исключаются путём явного решения соответствующих уравнений движения, в результате чего действие теории принимает вид специальной модели k-эссенции [30; 31], в котором роль скаляра k-эссенции играет Штюкельберговское поле, соответствующее «временно́й» координате.

В главе 2 мы переходим к построению общей техники для вычисления наблюдаемых величин в достаточно произвольных моделях квантовой космологии. Эти наблюдаемые величины, например, обсуждавшийся в главе 1 спектр реликтового излучения, вычисляются с помощью методов квантовой теории поля (КТП) [27; 28]. Наиболее общими наблюдаемыми, вычисляемыми в КТП, является корреляционные функции полей. При изучении неравновесных и нестационарных явлений используют in-in корреляционные функции, которые представляют собой произведение упорядоченных и антиупорядоченных по времени гейзенберговских операторов, усредненных по некоторой матрице плотности [32; 33]. Процесс инфляционного расширения в ранней Вселенной является существенно нестационарным процессом, ввиду чего наблюдаемые в квантовой космологии задаются именно in-in корреляционными функциями с достаточно общим начальным состоянием. В этой части диссертации мы строим производящий функционал таких корреляционных функций и применяем его к специальному классу начальных состояний, задаваемых так называемой евклидовой матрицей плотности. В результате, мы обнаруживаем, что для данного класса состояний корреляционные функции обладают дополнительными аналитическими свойствами, в частности, удовлетворяют условию Кубо-Мартина-Швингера [34; 35], которое наблюдалось ранее только для систем в термодинамическом равновесии. Выполнение этого свойства для неравновесных систем впервые было получено нами в работе [14].

Корреляционные функции можно вычислить точно только для узкого класса точнорешаемых систем, поэтому для их расчета в реальных задачах обычно применяют теорию возмущений, и соответствующая ей диаграммную техника. В частности, для вычисления in-in корреляционных функций используется так называемая техника Швингера-Келдыша [32; 33]. Несмотря на то, что такая техника построена для достаточно широкого класса систем [36], для общего класса полевых систем и состояний, возникающих в задачах квантовой космологии, не разработана. В данной работе мы вычисляем производящий функционал для произвольной нестационарной теории поля, действие которой квадратично по полям, а матрица плотности, задающее начальное состояние, задано в координатном представлении как общее гауссово распределение. Чтобы пертурбативно учесть нелинейности действия и негауссовости состояния, мы вводим соответствующие источники в определение действия модели и матрицы плотности.

Чтобы использовать полученный нами производящий функционал для предсказания наблюдаемых величин в квантовой космологии, нам необходимо выбрать начальное состояние, ассоциируемое с начальным состоянием Вселенной. Для этого мы воспользуемся принципом естественности, согласно которому предпочтительными являются состояния, определяемые теоретико-полевой моделью Вселенной, а не какими-либо свободно изменяемыми начальными условиями. Одним из способов «естественно» задать начальное состояние в моделях пространственно замкнутой космологии является прескрипция Хартла-Хокинга [37], которая, в частности, обобщает понятие волновой функции основного состояния на гравитационные системы. В частности, состояние Хартла-Хокинга является физически оправданным, так как приводит к спектру реликтового излучения и другим космологическим наблюдаемым, согласующимся с экспериментальными данными [38; 39].

В данной работе в качестве начального состояния мы используем обобщение волновой функции Хартла-Хокинга на случай смешанных состояний, которое можно интерпретировать как определение микроканонического ансамбля для гравитационных систем [40]. В формализме Баталина-Фрадкина-Вилковыского такое состояние определяется как евклидов функциональный интеграл по траекториям, где евклидово действие получено из обычного поворотом Вика [14]. Используя специальные аналитические свойства, следующие из постановки задачи, мы получаем, что для рассматриваемых состояний корреляционные функции обладают дополнительными аналитическими свойствами, а именно удовлетворяют также упомянутому условию квазипериодичности Кубо-Мартина-Швингера. С одной стороны, выполнение этого условия обычно приводит к техническим преимуществом при пертурбативном вычислении корреляционных функций, позволяя использовать процедуру аналитического продолжения как инструмент при вычислении. С другой стороны, оно указывает на то, что несмотря на явную нестационарность системы, система имеет свойства, близкие к свойствам систем в термодинамическом равновесии.

В главе 3 мы вычисляем корреляционные функциями в квантовомеханических системах, в которых проявляются эффекты туннелирования. Простейшими системами, в которых реализуются такие эффекты, являются системы, классическая потенциальная энергия в которых имеет несколько локальных и/или вырожденных минимумов. В этой части работы мы строим производящий функционал для корреляционных функций в системах с конечным количеством степеней свободы, и находящихся в состоянии термодинамического равновесия, а потенциальная энергия которых имеет вырожденные минимумы.

Мы имеем две основных мотивации для вычисления корреляционных функций в системах с перечисленными свойствами. Первая мотивация происходит из желания учесть динамику фона в рассматриваемой в главе 2 задаче вычисления корреляционных функций в неравновесных системах с евклидовой матрицей плотности. Второй мотивацией является необходимость вычислять корреляционные функции в системах, проявляющих эффекты туннелирования, явно в вещественном времени, т.е. избегая процедуры аналитического продолжения.

Системы, находящиеся в состоянии термодинамического равновесия, обладают отличительным свойством, а именно их корреляционные могут быть вычислены в мнимом времени, а затем аналитически продолжены в вещественное время [41; 42]. Этот факт может давать заметное техническое преимущество, так как вычисление корреляционных функций в мнимом времени обычно является более простой задачей. Однако, если корреляционные функции в мнимом времени вычислены с помощью какой либо численной процедуры, это преимущество нивелируется, так как численное аналитическое продолжение является математически плохо поставленной задачей и трудно реализуется на практике [43]. Таким образом, вычисление корреляционных функций напрямую в вещественном времени может оказаться неизбежным даже в случае систем в термодинамическом равновесии.

Несмотря на то, что для широкого класса систем для вычисления таких корреляционных функций может быть использована готовая и уже упоминавшаяся выше техника Швингера-Келдыша [36], для систем с туннелированием такая техника в литературе не была известна и впервые построена нами в работе [3]. Технические трудности возникают даже при вычислении корреляционных функций мнимого времени ввиду наличия в таких системах нетривиальных решений евклидовых уравнений движения (инстантонов). Инстантоны являются перевальными точками в формализме функционала по траекториям, задающего производящий функционал, и приводят к появлению нулевой моды оператора, отвечающего за динамику линейных флуктуаций на фоне инстантонных решений, и как следствие — к наивной расходимости функционального интеграла. В данной ситуации проблема нулевой моды обычно решается с помощью процедуры, аналогичной методу Фаддеева-Попова в калибровочных теориях, фиксирующей инвариантность действия относительно сдвигов мнимого времени [44; 45]. При вычислении производящего функционала корреляционных функций в вещественном времени проблема нулевой моды усложняется тем, что инвариантность действия относительно сдвигов мнимого времени оказывается (как мы показываем, наивно) нарушена, а метод Фаддеева-Попова (также наивно) — неприменим. Мы разрабатываем процедуру, с помощью которой восстанавливаем указанную симметрию. После этого мы учитываем нулевую моду обычным образом, в результате чего вычисляем производящий функционал корреляционных функций в вещественном времени и выводим следующую из него диаграммную технику.

Таким образом, **целями** данной диссертационной работы являются:

1. Выделение физического сектора теории обобщенной унимодулярной гравитации, нахождение числа физических степеней свободы.
2. Установление естественной физической интерпретации дополнительной степени свободы в контексте инфляционного расширения Вселенной.
3. Нахождение эквивалентной ковариантной формулировки обобщенной унимодулярной гравитации.
4. Построение диаграммной техники Швингера-Келдыша для произвольных нестационарных теорий поля и для произвольных смешанных начальных состояний.

5. Разработка процедуры аналитического продолжения евклидовых функций Грина в вещественное время для начальных состояний, задаваемых евклидовой матрицей плотности.
6. Построение процедуры пертурбативного вычисления корреляционных функций в вещественном времени для квантовомеханических систем, допускающих эффекты туннелирования, находящихся в равновесных состояниях.

Для достижения поставленных целей были сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. Построить алгебру гамильтоновых связей в обобщенной унимодулярной гравитации, выделить связи первого и второго рода.
2. Построить теорию космологических возмущений в обобщенной унимодулярной гравитации, исследовать спектр скалярных и тензорных возмущений.
3. Произвести ковариантизацию обобщенной унимодулярной гравитации с помощью Штюкельберговских полей, выделить среди них нединамические и разрешить соответствующие им уравнения движения явно.
4. Вычислить производящую функцию in-in корреляционных функций для неравновесных гауссовых теорий поля и гауссовых начальных состояния, для чего поставить соответствующую краевую задачу на функцию Грина и решить, выбрав удобный набор базисных функций.
5. Исследовать аналитические свойства базисных функций в случае евклидовой матрицы плотности, с их помощью установить связь между функциями Грина в мнимом и вещественном времени.
6. Решить проблему непертурбативного учёта нулевой моды дифференциального оператора, задающего квадратичное действие на аналитически продолженном инстантонном фоне в функциональном интеграле с контуром типа Швингера-Келдыша.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построен гамильтонов формализм теории со связями в обобщённой унимодулярной гравитации, выделены связи первого и второго рода, найдено количество физических степеней свободы.

2. Разработана теория космологических возмущений в обобщенной унимодулярной гравитации, найден критерий отсутствия массовых и градиентных нестабильностей скалярной моды.
3. Вычислен спектр скалярных возмущений, генерируемый на инфляционной стадии эволюции Вселенной скалярным гравитоном.
4. Функциональный параметр обобщённой унимодулярной гравитации подобран из условия соответствия спектров и амплитуд космологических возмущений наблюдаемым данным.
5. Найдена эквивалентная ковариантная формулировка обобщенной унимодулярной гравитации, установлена связь модели с теорией k-эссенции.
6. Построена диаграммная техника для in-in функций Грина для произвольных нестационарных теорий поля и смешанных начальных состояний.
7. Установлено условие Кубо-Мартина-Швингера на функции Грина в случае евклидовой матрицы плотности и построена процедура аналитического продолжение евклидовых функций Грина в вещественное время.
8. Разработана техника вычисления in-in корреляционных функций в системах в тепловом равновесии, допускающих эффекты туннелирования.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в исследовании модифицированных теорий гравитации и нестационарных квантовых эффектов в ранней Вселенной. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Приведенные в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

Научная и практическая значимость. Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики, а также теории конденсированного состояния. Полученные в работе результаты могут быть применены для построения моделей динамической тёмной энергии и тёмной материи, а также для объяснения природы наблюдаемых космологических возмущений с помощью исключительно гравитационной модели. Построенные в работе диаграммные методы могут быть использованы для вычисления наблюдаемых величин в широком классе систем, описывающихся нестационарными и неравновесными квантовополевыми моделями, также допускающими эффекты туннелирования, и включающих в себя модели квантовой космологии и физики твёрдого тела.

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в 4 [1—4] статьях в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Кроме того, основные результаты докладывались на семинарах ОТФ ФИАН, на международных конференциях “Supersymmetries and Quantum Symmetries” (SQS’22) в Дубне, “Models in Quantum Field Theory” (MQFT-2022) в Санкт-Петербурге, “Quantum Field Theory and Gravity” (QFTG 2023) в Томске, “Iternational Conference on Particle Physics and Cosmology” в Ереване.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, излагаются цели, ставятся задачи, формулируется научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Целью **первой главы**, основанной на работах [1; 2] является исследование калибровочных свойств обобщённой унимодулярной гравитации, и применение в контексте космологии ранней Вселенной.

Обобщённая унимодулярная гравитация была предложена в работе [24] как попытка построить динамическую модель тёмной энергии с тензором энергии-импульса имеющим вид тензора энергии-импульса идеальной жидкости. Действие обобщенной обобщённой унимодулярной гравитации отличается от эйнштейновского наложением связи

$$S_{\mathrm{GUMG}}[g_{\mu\nu},\lambda] = \int d^4x\,\Big[\sqrt{-g}R - \lambda\big((-g^{00})^{-\frac{1}{2}} - N(\gamma)\big)\Big] \qquad (1)$$

где λ есть лагранжев множитель, γ обозначает детерминант пространственной части метрики γ_{ij}, а функция $N(\gamma)$ является функциональным параметром модели. Уравнения движения в такой теории имеют вид уравнений Эйнштейна, тензор энергии-импульса в правой части которых сгенерирован слагаемым, соответствующим связи

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}\,T_{\mu\nu}, \qquad T_{\mu\nu} = (\rho + p)\,v_\mu v_\nu + p\,g_{\mu\nu}. \qquad (2)$$

а также самого уравнения связи $(-g^{00})^{-\frac{1}{2}} = N(\gamma)$. Плотность, давление и сопутствующая скорость соответствующей идеальной жидкости являются функциями только метрических степеней свободы, в частности, $v_\mu = -\delta^0_\mu N(\gamma)$, а баротропный параметр w, связывающий плотность и давление, выражается через функциональный параметр модели как $w = p/\rho = 2\, d\ln N(\gamma)/d\ln\gamma$.

Для исследования физических степеней свободы мы используем теорию гамильтоновых систем со связями [21], позволяющую, в частности, найти их количество не апеллируя к какому-либо фоновому решению. Построим гамильтоново действие теории, для чего произведём преобразование Лежандра исходного действия (1), в котором мы предварительно явно разрешили связь. В результате получаем

$$S_T[\gamma_{ij}, \pi^{ij}, \mathcal{N}^i, P_i, u^i_1] = \int dt\, d^3x\, \big(\pi^{ij}\dot\gamma_{ij} + P_i \dot{\mathcal{N}}^i - NH_\perp - N^i H_i - u^i_1 P_i\big), \quad (3)$$

где $H_\perp$ и H_i есть известные функционалы переменных γ_{ij} и π^{ij}, совпадающие с аналогичными величинами в ОТО, и задающие гамильтониан $\mathcal{H} = \int d^3x\, (NH_\perp + \mathcal{N}^i H_i)$. Фазовое пространство теории состоит из пространственной метрики γ_{ij}, функции сдвига N^i и сопряженных им импульсов π^{ij} и P_i. Вырожденность гессиана действия (1) по скоростям $\dot{\mathcal{N}}^i$ ведёт к появлению первичной связи $P_i = 0$, добавленной в действие с лагранжевым множителем u^i_1.

Условие сохранения первичных связей во времени, т.е. условие зануления скобки Пуассона связи с полным гамильтонианом $\mathcal{H} + \int d^3x\, u^i_1 P_i$ может привести к появлению вторичных связей, сохранение вторичных — к появлению третичных и т.д. Процедура заканчивается, когда условие сохранения очередного поколения связей приводит к условию на лагранжев множитель u^i_1, а не на фазовые переменные. Мы показываем, что для обобщённой унимодулярной гравитации в ситуации общего положения полный набор связей имеет четыре поколения, а именно

$$P_i = 0, \qquad H_i = 0, \qquad T_i \equiv \partial_i T = 0, \qquad S_i \equiv \partial_i S = 0, \quad (4)$$

где T и S, как и H_i, являются известными функционалами фазовых переменных. Связи $S_i = 0$ и $T_i = 0$ являются продольными векторами, поэтому эффективно задают по одной связи, т.е. обобщенная унимодулярная гравитация имеет восемь связей. Если начальные условия подобраны так, что

$T = 0$, четвертичная связь $S_i = 0$ не возникает, т.е. набор связей оказывается различным в зависимости от начальных условий. Такое явление называется бифуркацией связей. Мы показываем, что случай $T = 0$ оказывается эквивалентным ОТО и не представляет большого физического интереса.

Гамильтоновы связи разделяются на связи первого и второго рода. Связи первого рода находятся в инволюции друг с другом, связями второго рода и с гамильтонианом, т.е. соответствующие скобки Пуассона зануляются на поверхности связей. В свою очередь, матрица попарных скобок Пуассона связей второго рода на поверхности связей является невырожденной. Знание количества связей первого и второго рода позволяет однозначно определить количество локальных степеней в системе [21]. Мы показываем, что не существует локальных линейных комбинаций связей (4), выделяющих связи первого и второго рода, поэтому ищем связи первого рода в виде нелокальной линейной комбинации

$$\phi_A = \int d^3x \big[a^j_A(x) P_j(x) + b^j_A(x) H_j(x) + c^j_A(x) T_j(x) + d^j_A(x) S_j(x)\big], \qquad (5)$$

где $a^j_A(x)$, $b^j_A(x)$, $c^j_A(x)$, $d^j_A(x)$ есть набор вспомогательных функций. Требуя зануления $\{\phi_A, \phi_B\} = 0$, мы находим, что связями первого рода являются следующие комбинации

$$P_A = \int d^3x\, e^i_A(x)\, P_i(x), \qquad H_A = \int d^3x\, e^i_A(x) \big(H_i(x) + \partial_k N^k(x)\, P_i(x)\big), \quad (6)$$

где $e^i_A(x)$, $A = 1, 2$ составляют базис в пространстве поперечных функций, т.е. таких что $\partial_i e^i_A = 0$. Таким образом, мы имеем четыре связи первого рода и столько же связей второго рода, что даёт количество физических степеней свободы равным трём.

Далее, мы развиваем теорию возмущений на однородном изотропном фоне типа фридмановского, который в плоском случае имеет вид

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \qquad (7)$$

где $N = N(a^6)$. В теории Эйнштейна уравнение Фридмана, задающее фоновую космологическую эволюцию Вселенной, получается варьированием по функции хода, которая не является независимой переменной. Однако уравнение, соответствующее варьированию по γ_{ij} в случае (7) имеет первый интеграл C, дающий аналог уравнения Фридмана в обобщённой унимодулярной гравитации

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_P^2}, \qquad \rho = \frac{M_P^2 C}{N a^3}, \tag{8}$$

и определяющий эффективную плотность энергии. Рассматривая произвольные возмущения метрики

$$\delta\gamma_{ij} = a^2(-2\psi\,\sigma_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j E + 2\nabla_{(i}F_{j)} + t_{ij}), \qquad \delta N^i = (\nabla^i B + V^i)N/a \tag{9}$$

$$t^i{}_i = \nabla^i t_{ij} = \nabla_i F^i = \nabla_i V^i = 0, \tag{10}$$

и исключая нединамические компоненты E, F_i, B и V^i, мы получаем квадратичное действие скалярных возмущений

$$S_s[\psi] = \frac{M_P^2}{2}\int d\eta\, d^3x\, \theta^2\Big(\psi'^2 + c_s^2\,\psi\Delta\psi\Big), \quad c_s^2 = \frac{w}{\Omega}(1+w), \;\; \theta^2 = 3a^2\frac{\Omega}{w} \tag{11}$$

соответствующих возмущениям дополнительной степени свободы в обобщённой унимодулярной гравитации. Заменой $\vartheta = \theta\,\psi$ это действие сводится к виду действия Муханова-Сасаки для скалярных возмущений в инфлатонной модели. Квадратичное действие тензорных возмущений оказывается совпадающим с соответствующим действием в ОТО.

Далее, мы вычисляем спектр возмущений поля ψ в квазиклассическом приближении и используя его пропорциональность потенциалу Бардина $\Phi = \psi/(p+1)$, $p \sim 1$ на постинфляционных стадиях мы получаем задаваемый им спектр скалярных возмущений

$$\delta_\Phi^2(k,\eta) = \frac{1}{12\pi^2(p+1)^2}\sqrt{\frac{\Omega}{w(1+w)^3}}\,\frac{H^2}{M_P^2}\bigg|_{c_s k = Ha}. \tag{12}$$

и соответствующий наклон спектра $n_s - 1 = d\ln\delta_\Phi^2(k)/d\ln k$. Аналогично мы получаем спектр δ_t^2 тензорных возмущений.

Далее, требуя отсутствие нестабильностей, т.е. положительность θ^2 и c_s^2, наличие инфляционной стадии достаточной продолжительности, а также плоскостность спектра скалярных возмущений $n_s - 1 \simeq -0.04$, диктуемых экспериментальными данными [26], мы однозначно фиксируем лидирующее поведение функционального параметра модели

$$N(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left[1 + A\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0}} + B\left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^{3/2 - 4(1-n_s)/3}\right], \tag{13}$$

где $\gamma_0 = a_0^6$ определяется масштабным фактором a_0 в конце инфляционной стадии, а A, B есть безразмерные параметры порядка единицы. Также мы проверяем, что отношение амплитуд тензорных и скалярных возмущений $r = \delta_t^2/\delta_\Phi^2$ удовлетворяет экспериментальным ограничениям $r < 0.001$.

Наконец, мы строим ковариантную формулировку обобщенной унимодулярной гравитации. Для этого мы используем технику, применяющуюся, в частности, в контексте эффективных теорий массивных теориях гравитации [19; 29].

Мы представляем связь обобщенной унимодулярной гравитации в виде $U(g^{\mu\nu}) = 0$, где U выражается через функциональный параметр $N(\gamma)$ (например, $U(g^{\mu\nu}) = (-g^{00})^{-1/2} - N(\gamma))$, и добавляем в её в действие с лагранжевым множителем Λ как $\int d^4x\sqrt{-g}\,\Lambda U(g^{\mu\nu})$. Далее, мы вводим набор из четырёх вспомогательных Штюкельберговских полей ϕ^A и производим диффеоморфизм $x^A \mapsto \phi^A(x)$, в результате чего действие обобщённой унимодулярной гравитации принимает общековариантный вид

$$S_{\rm GUMG}[g_{\mu\nu}, \Lambda, \phi^A] = S_{\rm EH}[g_{\mu\nu}] + \int d^4x\sqrt{-g}\,\Lambda\, U(C^{AB}), \tag{14}$$

где $C^{AB} = g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^A\partial_\nu\phi^B$ является скаляром. Мы показываем, что уравнения движения для вспомогательных полей следуют из уравнений Эйнштейна и уравнения связи, если $\det\partial_\mu\phi^A \neq 0$, т.е. в этом случае Штюкельберговские поля не вносят новой динамики в систему. Возврат к исходной нековариантной формулировке осуществляется подстановкой $\phi^A \mapsto x^A$.

Оказывается, что специальный вид связи $U(g^{\mu\nu}) = 0$ в обобщенной унимодулярной гравитации приводит к тому, что поля $\phi^a(x)$, $a = 1, 2, 3$, соответствующие пространственным координатам, являются нединамическими и могут быть исключены из действия. Мы показываем это, параметризовав связь обобщенной унимодулярной гравитации как $U(C^{AB}) = P(X) - Z = 0$, где $X = C^{00}$, $Z = \sqrt{-\det C^{AB}}$, а функция $P(X)$ известным образом выражается через функциональный параметр $N(\gamma)$. Далее, мы находим, что тензор энергии-импульса выражается как

$$T_{\mu\nu} = \Lambda\,(P\,g_{\mu\nu} + 2P_X X v_\mu v_\nu), \qquad v_\mu = -\frac{\partial_\mu\phi^0}{\sqrt{-X}} \tag{15}$$

а проекция тождества Бьянки $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ на подпространство, ортогональное сопутствующему вектору v_μ даёт уравнение

$$(\delta^\nu_\sigma + v^\nu v_\sigma)\nabla^\mu T_{\mu\nu} = P(X)(\delta^\nu_\sigma + v^\nu v_\sigma)\partial_\mu \Lambda = 0 \tag{16}$$

решением которого является $\Lambda = K(\phi^0)$, для некоторой функции K. Подстановка этого равенства в уравнения Эйлера-Лагранжа для Штюкельберговских полей дают тождественное равенство для полей ϕ^a, $a = 1, 2, 3$, а в случае поля ϕ^0 оказываются эквивалентны уравнениям Эйлера-Лагранжа для функционала действия $\int d^4x\sqrt{-g}\,K(\phi^0)P(X)$. Это означает, что поля ϕ^a могут быть исключены посредством решения уравнений движения, а действие, задающее динамику метрики и поля ϕ^0 записывается как

$$S_k[g_{\mu\nu}] = S_{\text{EH}}[g_{\mu\nu}] + \int d^4x\sqrt{-g}\,K(\phi^0)P(X). \tag{17}$$

Второе слагаемое есть частный случай действия теории k-эссенции [30; 31], описывающей динамику скалярного поля с нестандартным кинетическим членом. Таким образом, на уровне классических уравнений движения обобщённая унимодулярная гравитация оказывается экваивалентна теории k-эссенции со специальным видом действия (17).

Целью **второй главы**, основанной на работе [4], является построение техники Швингера-Келдыша [32; 33] для вычисления и корреляционных функций в достаточно общей неравновесной системе, начальное состояние в которой задано также общей матрицей плотности, и приложение полученной конструкции к системе со специальным начальным состоянием, определяемой динамическими характеристиками системы, а именно, евклидовым действием модели. Мотивацией для такого выбора начального служит «принцип естественности» в квантовой космологии, предполагающий что начальное состояние Вселенной должно определятся не какими-либо свободно изменяемыми начальными условиями, внутренне задаваться теоретико-полевой моделью Вселенной.

Мы рассматриваем общую квадратичную теория поля с действием

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int dt\Big(\dot\phi^T A\dot\phi + \dot\phi^T B\phi + \phi^T B^T\dot\phi + \phi^T C\phi\Big) \tag{18}$$

где индекс I включает в себя как пространственные координаты так и возможные дискретные индексы полей ϕ^I. Величины $A = A^T \equiv A_{IJ}$, $B \equiv B_{IJ}$ и $C = C^T \equiv C_{IJ}$ являются операторными коэффициентами, явно зависящими от времени t. Волновой оператор, задающий линейные уравнения движения теории, определяется гессианом действия как $\delta^2 S[\phi]/\delta\phi(t)\,\delta\phi(t') = F\delta(t-t')$ и имеет вид

$$F = -\frac{d}{dt}A\frac{d}{dt} - \frac{d}{dt}B + B^T\frac{d}{dt} + C. \tag{19}$$

Для построения техники Швингера-Келдыша мы вычисляем производящий функционал in-in корреляционных функций, т.е. произведений T-упорядоченных анти-T-упорядоченных гейзенберговских операторов, являющийся функционалом двух источников

$$Z[J_1, J_2] = \mathrm{tr}\left[\hat{U}_{J_1}(T,0)\,\hat{\rho}\,\hat{U}^{\dagger}_{-J_2}(T,0)\right], \tag{20}$$

след вычислен в пространстве состояний, заданного канонически квантованным полем $\hat{\phi}$, а оператор унитарной эволюции $\hat{U}_J(T,0)$ от времени $t=0$ до $t=T$ определяется зависящим от времени гамильтонианом, полученным из действия (18) сдвинутого на слагаемое с источником $-J^T(t)\phi(t)$.

В качестве начального состояния мы выбираем матрицу плотности, матричный элемент которого $\langle\varphi_+|\,\hat{\rho}\,|\varphi_-\rangle = \rho(\varphi_+, \varphi_-)$ в координатном представлении имеет вид гауссова распределения

$$\begin{gathered}\rho(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{const}\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{j}^T\boldsymbol{\varphi}\right\}, \\ \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix}\varphi_+\\ \varphi_-\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{j} = \begin{bmatrix}j_+\\ j_-\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix}R & S\\ S^* & R^*\end{bmatrix},\end{gathered} \tag{21}$$

где матрица $\boldsymbol{\Omega}$ и столбец $j_\pm$ являются параметрами состояния. Требование эрмитовости матрицы плотности накладывает на них условия $R = R^T$, $S = S^\dagger$ и $j_+ = j_-^* \equiv j$, соответственно. В случае, когда матрица $\boldsymbol{\Omega}$ является блочно-диагональной а $\boldsymbol{j} = 0$, матрица плотности $\hat{\rho}$ задаёт чистое состояние, которое можно ассоциировать с вакуумным состоянием соответствующего фоковского пространства. Ненулевое значение $\boldsymbol{j}$ задаёт ненулевое квантово-механическое среднее полевого оператора. С другой стороны, варьирование по «источнику» $\boldsymbol{j}$ позволяет пертурбативно сгенерировать негауссовости в начальном состоянии.

Производящий функционал (20) мы записываем в формализме функционального интеграла, а затем вычисляем методом перевала, дающим точный ответ, так как подынтегральное выражение имеет вид функционального гауссово распределения. Результат вычисления записывается как

$$Z[\boldsymbol{J}] = \mathrm{const} \times \exp\biggl\{ -\frac{i}{2}\int_0^T dt\, dt'\, \boldsymbol{J}^T(t)\boldsymbol{G}(t,t')\boldsymbol{J}(t) \\ - \int_0^T dt\, \boldsymbol{J}^T(t)\boldsymbol{G}(t,0)\,\boldsymbol{j} + \frac{i}{2}\boldsymbol{j}^T\boldsymbol{G}(0,0)\,\boldsymbol{j} \biggr\}, \quad (22)$$

где $\boldsymbol{J} = [J_1,\ \ J_2]^T$. Входящее в полученное выражение интегральное ядро $\boldsymbol{G}(t,t')$ задаёт решение краевой задачи, которая может быть получена из условия на перевальную точку соответствующего функционального интеграла, и имеет блочное представление

$$\boldsymbol{G}(t,t') = \begin{bmatrix} G_{\mathrm{T}}(t,t') & G_{<}(t,t') \\ G_{>}(t,t') & G_{\bar{\mathrm{T}}}(t,t') \end{bmatrix}, \quad (23)$$

блоки которого имеют обычную квантово-полевую интерпретацию, а именно $G_{\mathrm{T}}(t,t')$, $G_{\bar{\mathrm{T}}}(t,t')$ и $G_{\gtrless}(t,t')$ есть фейнмановская, антифейнмановская и вайтмановские функции Грина, соответственно.

Чтобы получить явное выражение для $\boldsymbol{G}(t,t')$ используем базисные функции $v(t)$, $v^*(t)$, являющиеся решением системы

$$Fv(t) = 0, \qquad (iW-\omega)v(t)\big|_{t=0} = 0, \quad (iW+\omega^*)v^*(t)\big|_{t=0} = 0, \quad (24)$$

где оператор $W = A\frac{d}{dt} + B$ называют оператором Вронского. Матрица ω является параметром, задающим частотность базисных функций в начальный момент времени, и должна иметь положительно определённую вещественную часть.

Для произвольного выбора ω ответ для $\boldsymbol{G}(t,t')$ в терминах базисных функций является громоздким и сложно интерпретируемым. Для решения этой проблемы мы выбираем ω так, чтобы соответствующие операторы рождения/уничтожения имели корпускулярную интерпретация. Для этого введём неаномальное ν и аномальное κ средние как

$$\nu = \mathrm{tr}\bigl[\hat\rho\,\hat a^\dagger \hat a\bigr], \qquad \kappa = \mathrm{tr}\bigl[\hat\rho\,\hat a\,\hat a\bigr], \quad (25)$$

а затем потребуем зануление аномального среднего κ. Это требование эквивалентно некоторому матричному уравнению на ω, для которого в случае вещественного блока S в (21) мы получаем явное решение

$$\omega = R^{1/2}\sqrt{I-\sigma^2}R^{1/2}, \quad \sigma \equiv R^{-1/2}SR^{-1/2}. \tag{26}$$

Для данного выбора ω выражение для среднего числа частит ν имеет простой вид

$$\nu = \frac{1}{2}\varkappa\biggl(\sqrt{\frac{I-\sigma}{I+\sigma}}-I\biggr)\varkappa^T, \tag{27}$$

где матрица $\varkappa \equiv \bigl[\omega^{1/2}R^{-1}\omega^{1/2}\bigr]^{1/2}\omega^{-1/2}R^{1/2}$ ортогональна, а блочные элементы $\boldsymbol{G}(t,t')$ имеют простые выражения в терминах базисных функций и среднего числа частиц, в частности

$$iG_>(t,t') = v(t)\,\bigl(\nu+I\bigr)\,v^\dagger(t') + v^*(t)\,\nu\,v^T(t'). \tag{28}$$

В полученных выражениях для функций Грина легко распознать вид, возникающий в термополевой динамике равновесных систем [46]. Действительно, в случае равновесной матрицы плотности получаем, что в энергетическом представлении все матричные величины диагонализуются, а элементы ν являются числами заполнения, например, статистики Бозе-Эйнштейна в случае термального состояния. Таким образом, мы получили, что картина чисел заполнения эффективно обобщается также и на случай неравновесных систем с также неравновесным начальным состоянием (21), а роль чисел заполнения играют собственные значения матрицы ν.

Далее мы рассматриваем специальной случай так называемой евклидовой матрицы плотности, задаваемой евклидовым функциональным интегралом

$$\rho_E(\varphi_+,\varphi_-;J_E] = \frac{1}{Z}\int\limits_{\phi(\tau_\pm)=\varphi_\pm} D\phi\,\exp\biggl\{-S_E[\phi]-\int_{\tau_-}^{\tau_+}d\tau\,J_E(\tau)\phi(\tau)\biggr\}, \tag{29}$$

где евклидово действие $iS[\phi(t)]\big|_{t=-i\tau} = -S_E[\phi_E(\tau)]$ задаётся виковским поворотом, т.е. состояние системы динамически определяется её действием.

В общем случае оператор, задаваемый своим матричным элементом как в (29), не является эрмитовым. Чтобы матрица плотности удовлетворяла этому свойству, операторные коэффициенты евклидового действия, полученные аналитическим продолжением соответствующих коэффициентов (18) как

$$A_E(\tau) = A(-i\tau), \qquad B_E(\tau) = -iB(-i\tau), \qquad C_E(\tau) = -C(-i\tau), \tag{30}$$

должны подчиняться условиям

$$A_E(\beta-\tau)=A_E^*(\tau), \quad B_E(\beta-\tau)=-B_E^*(\tau), \qquad C_E(\beta-\tau)=C_E^*(\tau), \quad (31)$$

для некоторого периода $\beta=\tau_+-\tau_-$. Так как (29) задан гауссовым интегралом, результат вычисления является также гауссовым распределением вида (21), параметры которой выражаются через граничные значения евклидовой функции Грина и её производных, а также евклидов источник J_E.

Мы показываем, что в случае евклидовой матрицы плотности специальный выбор базисный функции с параметром (26), приводит к дополнительным аналитическим свойствам соответствующих базисных функций, а именно, закону монодромии при сдвиге их аргумента мнимый период

$$v(t-i\beta)=v(t)\frac{\nu+I}{\nu}, \qquad v^*(t-i\beta)=v^*(t)\frac{\nu}{\nu+I}. \quad (32)$$

Так как матричные коэффициенты в законе преобразования базисных функций являются взаимно обратными матрицами, вайтмановские функции Грина $G_>(t,t')$ и $G_<(t,t')=G_>^T(t',t)$, определённые в (28), удовлетворяют равенству

$$G_>(t-i\beta,t')=G_<(t,t'). \quad (33)$$

Это равенство оказывается известным условием Кубо-Мартина-Швингера [34; 35]. Неожиданным результатом является то, что это условие выполняется в достаточно общей неравновесной системе при специальном выборе начального состояния (29), несмотря на отсутствия закона сохранения полной энергии и других свойств, присущим равновесным системам.

В результате, мы построили формализм Швингера-Келдыша для общих неравновесных систем с также общим смешанным начальным состоянием. Для этого мы вычислили производящий функционал in-in корреляционных функций, выражаемый через многокомпонентную функцию Грина, удовлетворяющую специальной краевой задаче на контуре Швингера-Келдыша. Мы выразили эту функцию в терминах однокомпонентных базисных функций классических уравнений движения и нашли специальных базис, для которого соответствующее фоковское пространство допускает корпускулярную интерпретацию. Затем мы рассмотрели специальный случай евклидовой матрицы плотности и обнаружили, что базисные функции приобретают аналитические свойства квазипериодичности относительно сдвига на мнимый период, что приводит к выполнению вайтмановской функцией Грина условия Кубо-Мартина-Швингера, несмотря на неравновесную природу рассматриваемой модели.

Целью **третьей главы**, основанной на работе [3] является обобщение диаграммной техники типа Швингера-Келдыша для вычисления корреляционных функций в системах, допускающих эффекты туннелирования.

Как и в предыдущей главе, мы будем вычислять производящий функционал in-in корреляционных функций, а именно

$$Z[j_+, j_-] = \mathrm{tr}\Big[e^{-\beta\hat{H}}\;\hat{U}^\dagger_{j_-}(T,0)\,\hat{U}_{j_+}(T,0)\Big], \tag{34}$$

где оператор эволюции с гамильтонианом, модифицированным членом с источником задаётся как $\hat{U}_j(T,0) = \mathrm{T}e^{-i\int_0^T dt\, j(t)\hat{x}(t)}$. Однако теперь эволюция системы задаётся независящим от времени квантовомеханическим гамильтонианом $H = p^2/2 + V(x)$, а состояние определяется тепловой матрицей плотности, пропорциональной $e^{-\beta\hat{H}}$.

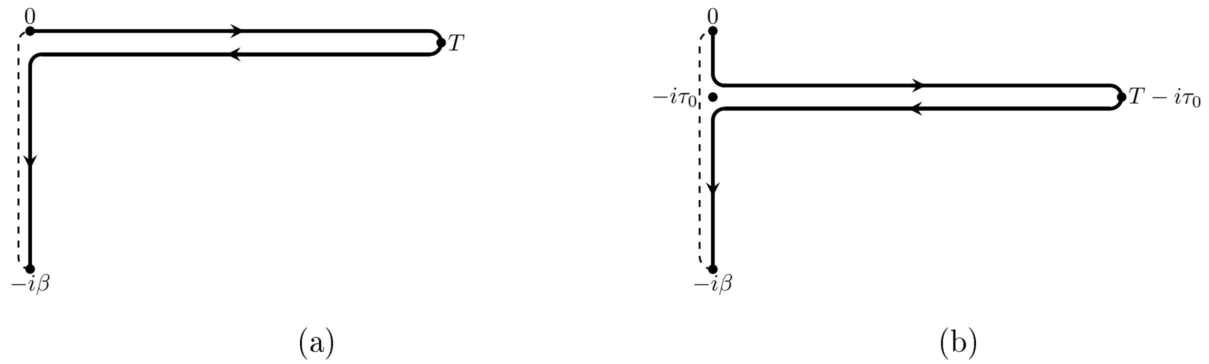

Рис. 1: (a) Обычный контур Швингера-Келдыша C в плоскости комплексного времени $z = t - i\tau$. (b) Контур Швингера-Келдыша C^{τ_0}, сдвинутый на $-i\tau_0$.

Основой трюка, позволившего нам построить теорию возмущений для данного производящего функционала, является циклическое свойство следа, благодаря которому можно эквивалентно записать производящий функционал в виде

$$Z^{\tau_0}[j_+, j_-] = \mathrm{tr}\Big[e^{-(\beta-\tau_0)\hat{H}}\;\hat{U}^\dagger_{j_-}(T,0)\,\hat{U}_{j_+}(T,0)\;e^{-\tau_0\hat{H}}\Big] \tag{35}$$

для произвольного τ_0, который мы будем ограничивать как $0 \leq \tau_0 \leq \beta$. Таким образом, временна́я эволюция в выражении под знаком следа осуществляется вдоль контура C^{τ_0}, показанном на Рис. 1b, а вариационные производные по источникам j_+, и j_- соответствуют вставке операторов на верхнем и нижнем сегментах контура. Случай $\tau_0 = 0$ соответствует обычному контуру Швингера-Келдыша C, показанному на Рис. 1a, в то время как ненулевое τ_0 приводит к контуру C^{τ_0} в котором сегменты эволюции по вещественному времени сдвинуты на $-i\tau_0$. Производящая функция имеет представление в виде функционального интеграла по утроенному набору функциональных координат, соответствующему трём сегментам контура C^{τ_0}

$$Z^{\tau_0}[j_+, j_-] = \int\limits_{x_e(0)=x_e(\beta)} \mathcal{D}x_e \int\limits_{\substack{x_\pm(0)=x_e(\tau_0\mp 0)\\ x_+(T)=x_-(T)}} \mathcal{D}x_+\,\mathcal{D}x_- \\ \times e^{-S_e[x_e]+iS[x_+]-iS[x_-]+i\int_0^T dt\, j_+(t)x_+(t)-i\int_0^T dt\, j_-(t)x_-(t)}. \quad (36)$$

Здесь $S[x] = \int_0^T dt\,[\dot{x}^2/2 - V(x)]$ есть действие теории, а S_e обозначает его евклидову версию, отличающуюся знаком при потенциале.

Мы показываем, что для достаточно гладких потенциалов $V(x)$ при нулевых источниках $j_\pm$ перевальные конфигурации $\bar{x}_e$, $\bar{x}_\pm$ функционального интеграла (36), необходимые для построения теории возращений, могут быть заданы единственной аналитической функцией, удовлетворяющей уравнению с периодическим граничным условием

$$\partial_z^2\bar{x}(z) + V'(\bar{x}) = 0, \qquad \bar{x}(z - i\beta) = \bar{x}(z), \quad (37)$$

с помощью следующих отождествлений

$$\bar{x}_e(\tau) = \bar{x}(-i\tau), \qquad \bar{x}_\pm(t) = \bar{x}(t - i\tau_0) =: \bar{x}^{\tau_0}(t). \quad (38)$$

Функция $\bar{x}(x)$ может трактоваться как аналитическое продолжение периодического решения евклидовых уравнений движения, имеющего смысл инстантонного решения.

Далее, следуя общей стратегии теории возмущений мы должны перейти к интегралу по возмущениям $\eta_e(\tau) = x_e(\tau) - \bar{x}_e(\tau)$, $\eta_\pm(t) = x_\pm(t) - \bar{x}_\pm(t)$ около перевальных траекторий. Однако оказывается, что дифференциальный оператор, определяющий квадратичную часть разложения суммарного действия $S_e[x_e] - iS[x_+] + iS[x_-]$ в ряд по возмущениям имеет нулевую моду, задаваемую аналитической функцией $\eta_0(z) = -i\partial_z\bar{x}(z)/\|\dot{\bar{x}}\|$ с помощью отождествлений, аналогичных (38). Данное явление ведёт к необратимости соответствующего оператора и расходимости однопетлевого вклада в производящий функционал, что существенно усложняет построение теории возмущений. Эта проблему обычно и называют проблемой нулевой моды.

Проблема нулевой моды встречается в уже при вычислении чисто евклидового функционального интеграла, задающего статсумму или производящий функционал корреляционных функций в мнимом времени. Однако в этих случаях проблему удаётся решить методами калибровочных теорий поля [44; 45]. В частности проблема нулевой моды может быть интерпретирована как следствие «калибровочной» симметрии евклидового действия относительно сдвигов мнимого времени, т.е. $S_e[x_e(\tau+\tau')] = S_e[x_e(\tau)]$, а нулевая мода, в свою очередь задаёт касательный вектор к орбите «калибровочной группы», которая в данном случае изоморфна группе вращений окружности. Используя метод Фаддеева-Попова, а именно вводя калибровку, нарушающую симметрию и выделяя интегрированию по орбите группы, можно получить «калибровочно фиксированный» функциональный интеграл, в котором симметрия отсутствует, а оператор, задающий квадратичную по возмущениям часть действия является положительно определённым.

Однако в случае производящего функционала (36) симметрия, включавшая бы в себя преобразование $x_e(\tau) \mapsto x_e(\tau+\tau')$ отсутствует, так как контур C^{τ_0}, а именно его часть, соответствующая эволюции в вещественном времени, явно её нарушает. Иными словами, не существует локального преобразования x_e, $x_\pm$, включающего сдвиги аргумента x_e, и сохраняющего граничных условий, диктуемых мерой функционального интегрирования в определении (36). Это означает, что мы не можем буквально применить технику фиксации калибровки, применяемую в чисто евклидовом случае.

Для преодоления этой трудности, мы предлагаем трюк, позволяющий восстановить инвариантность (36) относительно сдвигов мнимого времени. Для этого мы используем тот факт, что Z^{τ_0} на самом деле не зависит от параметра τ_0. Это позволяет произвести усреднение производящего функционала по τ_0, не влияющее на результат, и определить усреднённый функционал

$$Z[j_+, j_-] = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau_0\, Z^{\tau_0}[j_+, j_-] = Z^{\tau_0}[j_+, j_-], \tag{39}$$

Включая интегрирование τ_0 в определение меры функционального интегрирования, мы обнаруживаем что подынтегральное выражение вместе с граничными условиями в мере интегрирования инвариантны относительно преобразования

$$x_e(\tau) \;\mapsto\; x_e^{\tau_1}(\tau) = x_e(\tau+\tau_1), \qquad x_\pm(t) \mapsto x_\pm(t), \qquad \tau_0 \;\mapsto\; \tau_0^{\tau_1} = \tau_0-\tau_1. \quad (40)$$

После восстановления инвариантности мы можем применить тот же метод для учета нулевой моды, что и в чисто евклидовом случае, а именно метод Фаддеева-Попова.

Выбирая удобную калибровку, нарушающую симметрию (40), однако сохраняющую аналитические свойства калибровочно фиксированного действия, производя интегрирование по возмущениям, формально вынося нелинейности действия за знак функционального интегрирования, мы получаем следующую виковскую форму производящего функционала

$$\begin{aligned} Z[j_+,j_-] = Z_{\text{1-loop}}\frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau_0\; e^{i\int_0^T dt\,(j_+(t)-j_-(t))\bar{x}^{\tau_0}(t)} \\ \times \exp\left\{\frac{1}{2}\left\langle\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{G}_\xi^{\tau_0}\frac{\delta}{\delta\boldsymbol{\eta}}\right\rangle\right\}\;\left[1-\frac{1}{\|\dot{\bar{x}}\|}\langle\partial_{\tau_0}\boldsymbol{\eta}_0^{\tau_0}, s\boldsymbol{\eta}\rangle\right] \qquad (41) \\ \times \exp\left\{-S_e^{\text{int}}[\bar{x}_e^{\tau_0},\eta_e] + iS^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0},\eta_+] - iS^{\text{int}}[\bar{x}^{\tau_0},\eta_-] + \langle\boldsymbol{\eta}, s\boldsymbol{j}\rangle\right\}\Bigg|_{\substack{j_e=0\\ \boldsymbol{\eta}=0}}, \end{aligned}$$

где $Z_{\text{1-loop}}$ есть однопетлевой вклад в статсумму, $\boldsymbol{G}_\xi^{\tau_0}$ обозначает трёхкомпонентную функцию Грина оператора, задающего квадратичную часть суммарного действия на фоне заданном решением $\bar{x}(z)$ уравнения (37) с помощью идентификации (38), $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{j}$ задают трёхкомпонентные столбцы (например, $\boldsymbol{j} = [j_e(\tau), j_+(t), j_-(t)]^T$), s задаёт операцию $s\boldsymbol{j} = [j_e(\tau), ij_+(t), -ij_-(t)]$, а $\langle\bullet,\bullet\rangle$ обозначает обычное скалярное произведение на пространстве трёхкомпонентных функций.

Таким образом, мы построили теорию возмущений для in-in корреляционных функций тепловых состояний для систем с инстантонами, работая непосредственно в вещественном времени. Пертурбативное разложение закодировано в производящем функционале (41) и может быть воспроизведено в терминах трёхкомпонентной диаграммной техники. Основная трудность заключалась в том, чтобы правильно учесть нулевую моду, поскольку замкнутый контур Швингера-Келдыша наивно нарушает инвариантность относительно сдвигов мнимого времени, ответственных за нулевую моду. Мы произвели подходящее тождественное преобразование производящего функционала, а именно усреднили его по точке склейки лоренцевой части контура

Швингера-Келдыша с евклидовой частью, так что указанная инвариантность восстановилась, после чего применили стандартную процедуру учёта нулевой моды с помощью метода Фаддеева-Попова.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Построен гамильтонов формализм теории со связями в обобщённой унимодулярной гравитации, в частности, выделены связи первого и второго рода, найдены структурные функции алгебры гамильтоновых связей. Выполнен подсчёт количества физических степеней свободы модели, обнаружена дополнительная степень свободы, отсутствующая в ОТО.
2. Модель обобщённой унимодулярной гравитации применена в контексте квантовой космологии, а именно построена теория космологических возмущений, вычислен спектр скалярных возмущений, генерируемый на инфляционной стадии эволюции Вселенной дополнительной степенью свободы — скалярным гравитоном.
3. В предположении, что дополнительная степень свободы вносит основной вклад в спектр неоднородностей реликтового излечения, подобран функциональный параметр обобщённой унимодулярной гравитации из условия соответствия спектров и амплитуд космологических возмущений наблюдаемым данным.
4. Произведена ковариантизация обобщенной унимодулярной гравитации с помощью четырёх вспомогательных Штюкельберговских полей, в результате явного разрешения классических уравнений для части из них построена эквивалентная ковариантная формулировка модели в терминах специальной теории k-эссенции.
5. Для произвольных нестационарных теорий поля и смешанных начальных состояний построена теория возмущений для in-in корреляционных функций, а именно вычислен производящий функционал таких функций в терминах многокомпонентной функции Грина. Для этой функции Грина сформулирована краевая задача и решена в терминах базисных функций, удовлетворяющих классическим уравнениям движения, а также найден специальный набор таких функций, удовлетворяющий

условиям положительной/отрицательной частотности, в терминах которых функции Грина приобретают корпускулярную интерпретацию

6. В случае, когда состояние задано евклидовой матрицей плотности, установлено условие квазипериодичности Кубо-Мартина-Швингера на функции Грина и построена процедура аналитического продолжение евклидовых функций Грина в вещественное время.
7. Для систем, находящихся в термальном состоянии и допускающих эффекты туннелирования, разработана теория возмущений и соответствующая диаграммная техника Швингера-Келдыша для вычисления in-in корреляционных функций.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Barvinsky A. O.*, *Kolganov N.* Inflation in generalized unimodular gravity // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 12. — С. 123510. — DOI: `10.1103/PhysRevD.100.123510`. — arXiv: `1908.05697 [gr-qc]`.
2. *Barvinsky A. O.*, *Kolganov N.*, *Vikman A.* Generalized unimodular gravity as a new form of k-essence // Phys. Rev. D. — 2021. — Т. 103, № 6. — С. 064035. — DOI: `10.1103/PhysRevD.103.064035`. — arXiv: `2011.06521 [gr-qc]`.
3. *Kolganov N.* Real-time diagram technique for instantonic systems // JHEP. — 2023. — Т. 10. — С. 103. — DOI: `10.1007/JHEP10(2023)103`. — arXiv: `2211.05746 [hep-th]`.
4. *Barvinsky A. O.*, *Kolganov N.* Nonequilibrium Schwinger-Keldysh formalism for density matrix states: analytic properties and implications in cosmology // Phys. Rev. D. — 2024. — Т. 109, вып. 2. — С. 025004. — DOI: `10.1103/PhysRevD.109.025004`. — arXiv: `2309.03687 [hep-th]`.

Список литературы

5. *Einstein A.* Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) — 1919. — Т. 1919. — С. 349—356.

6. *Langlois D.* Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar–tensor (DHOST) theories: A review // Int. J. Mod. Phys. D. — 2019. — Т. 28, № 05. — С. 1942006. — DOI: 10.1142/S0218271819420069. — arXiv: 1811.06271 [gr-qc].

7. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity // Phys. Lett. B / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1980. — Т. 91. — С. 99—102. — DOI: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.

8. *De Felice A.*, *Tsujikawa S.* f(R) theories // Living Rev. Rel. — 2010. — Т. 13. — С. 3. — DOI: 10.12942/lrr-2010-3. — arXiv: 1002.4928 [gr-qc].

9. *Kostelecky V. A.*, *Russell N.* Data Tables for Lorentz and CPT Violation // Rev. Mod. Phys. — 2011. — Т. 83. — С. 11—31. — DOI: 10.1103/RevModPhys.83.11. — arXiv: 0801.0287 [hep-ph].

10. *Horava P.* Quantum Gravity at a Lifshitz Point // Phys. Rev. D. — 2009. — Т. 79. — С. 084008. — DOI: 10.1103/PhysRevD.79.084008. — arXiv: 0901.3775 [hep-th].

11. *Wang A.* Hořava gravity at a Lifshitz point: A progress report // Int. J. Mod. Phys. D. — 2017. — Т. 26, № 07. — С. 1730014. — DOI: 10.1142/S0218271817300142. — arXiv: 1701.06087 [gr-qc].

12. *Barvinsky A. O.*, *Blas D.*, *Herrero-Valea M.*, *Sibiryakov S. M.*, *Steinwachs C. F.* Renormalization of Hořava gravity // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 93, № 6. — С. 064022. — DOI: 10.1103/PhysRevD.93.064022. — arXiv: 1512.02250 [hep-th].

13. *Barvinsky A. O.*, *Herrero-Valea M.*, *Sibiryakov S. M.* Towards the renormalization group flow of Horava gravity in (3+1) dimensions // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 2. — С. 026012. — DOI: 10.1103/PhysRevD.100.026012. — arXiv: 1905.03798 [hep-th].

14. *Barvinsky A. O.*, *Kurov A. V.*, *Sibiryakov S. M.* Asymptotic freedom in (3+1)-dimensional projectable Hořava gravity: Connecting the ultraviolet and infrared domains // Phys. Rev. D. — 2023. — Т. 108, № 12. — С. L121503. — DOI: 10.1103/PhysRevD.108.L121503. — arXiv: 2310.07841 [hep-th].

15. *Blas D.*, *Pujolas O.*, *Sibiryakov S.* Consistent Extension of Horava Gravity // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Т. 104. — С. 181302. — DOI: `10.1103/PhysRevLett.104.181302`. — arXiv: `0909.3525 [hep-th]`.

16. *Dam H. van*, *Veltman M. J. G.* Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields // Nucl. Phys. B. — 1970. — Т. 22. — С. 397—411. — DOI: `10.1016/0550-3213(70)90416-5`.

17. *Zakharov V. I.* Linearized gravitation theory and the graviton mass // JETP Lett. — 1970. — Т. 12. — С. 312.

18. *Rubakov V. A.* Lorentz-violating graviton masses: Getting around ghosts, low strong coupling scale and VDVZ discontinuity. — 2004. — Июль. — arXiv: `hep-th/0407104`.

19. *Dubovsky S. L.* Phases of massive gravity // JHEP. — 2004. — Т. 10. — С. 076. — DOI: `10.1088/1126-6708/2004/10/076`. — arXiv: `hep-th/0409124`.

20. *Unruh W. G.* A Unimodular Theory of Canonical Quantum Gravity // Phys. Rev. D. — 1989. — Т. 40. — С. 1048. — DOI: `10.1103/PhysRevD.40.1048`.

21. *Henneaux M.*, *Teitelboim C.* The Cosmological Constant and General Covariance // Phys. Lett. B. — 1989. — Т. 222. — С. 195—199. — DOI: `10.1016/0370-2693(89)91251-3`.

22. *Kuchar K. V.* Does an unspecified cosmological constant solve the problem of time in quantum gravity? // Phys. Rev. D. — 1991. — Т. 43. — С. 3332—3344. — DOI: `10.1103/PhysRevD.43.3332`.

23. *Henneaux M.*, *Teitelboim C.* Quantization of gauge systems. — Princeton university press, 1992.

24. *Barvinsky A. O.*, *Kamenshchik A. Y.* Darkness without dark matter and energy – generalized unimodular gravity // Phys. Lett. B. — 2017. — Т. 774. — С. 59—63. — DOI: `10.1016/j.physletb.2017.09.045`. — arXiv: `1705.09470 [gr-qc]`.

25. *Barvinsky A. O.*, *Kolganov N.*, *Kurov A.*, *Nesterov D.* Dynamics of the generalized unimodular gravity theory // Phys. Rev. D. — 2019. — Т. 100, № 2. — С. 023542. — DOI: `10.1103/PhysRevD.100.023542`. — arXiv: `1903.09897 [hep-th]`.

26. *Aghanim N.* [и др.]. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters // Astron. Astrophys. — 2020. — Т. 641. — A6. — DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. — arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO]. — [Erratum: Astron.Astrophys. 652, C4 (2021)].

27. *Mukhanov V. F.*, *Feldman H. A.*, *Brandenberger R. H.* Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions // Phys. Rept. — 1992. — Т. 215. — С. 203—333. — DOI: 10.1016/0370-1573(92)90044-Z.

28. *Mukhanov V.* Physical Foundations of Cosmology. — Oxford : Cambridge University Press, 2005. — ISBN 978-0-521-56398-7. — DOI: 10.1017/CBO97805117905

29. *Ballesteros G.*, *Comelli D.*, *Pilo L.* Massive and modified gravity as self-gravitating media // Phys. Rev. D. — 2016. — Т. 94, № 12. — С. 124023. — DOI: 10.1103/PhysRevD.94.124023. — arXiv: 1603.02956 [hep-th].

30. *Armendariz-Picon C.*, *Damour T.*, *Mukhanov V. F.* k - inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — Т. 458. — С. 209—218. — DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00603-6. — arXiv: hep-th/9904075.

31. *Garriga J.*, *Mukhanov V. F.* Perturbations in k-inflation // Phys. Lett. B. — 1999. — Т. 458. — С. 219—225. — DOI: 10.1016/S0370-2693(99)00602-4. — arXiv: hep-th/9904176.

32. *Schwinger J. S.* Brownian motion of a quantum oscillator // J. Math. Phys. — 1961. — Т. 2. — С. 407—432. — DOI: 10.1063/1.1703727.

33. *Keldysh L. V.* Diagram technique for nonequilibrium processes // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1964. — Т. 47. — С. 1515—1527.

34. *Kubo R.* Statistical mechanical theory of irreversible processes. 1. General theory and simple applications in magnetic and conduction problems // J. Phys. Soc. Jap. — 1957. — Т. 12. — С. 570—586. — DOI: 10.1143/JPSJ.12.570.

35. *Martin P. C.*, *Schwinger J. S.* Theory of many particle systems. 1. // Phys. Rev. / под ред. K. A. Milton. — 1959. — Т. 115. — С. 1342—1373. — DOI: 10.1103/PhysRev.115.1342.

36. *Arseev P. I.* On the nonequilibrium diagram technique: derivation, some features and applications // Phys. Usp. — 2015. — Т. 58, № 12. — С. 1159—1205. — DOI: 10.3367/UFNe.0185.201512b.1271. — URL: https://ufn.ru/en/articles/2015/12/b/.

37. *Hartle J. B.*, *Hawking S. W.* Wave Function of the Universe // Phys. Rev. D / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1983. — Т. 28. — С. 2960—2975. — DOI: 10.1103/PhysRevD.28.2960.

38. *Halliwell J. J.*, *Hawking S. W.* The Origin of Structure in the Universe // Phys. Rev. D / под ред. L.-Z. Fang, R. Ruffini. — 1985. — Т. 31. — С. 1777. — DOI: 10.1103/PhysRevD.31.1777.

39. *Laflamme R.* The Euclidean Vacuum: Justification From Quantum Cosmology // Phys. Lett. B. — 1987. — Т. 198. — С. 156—160. — DOI: 10.1016/0370-2693(87)91488-2.

40. *Barvinsky A. O.* Why there is something rather than nothing (out of everything)? // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Т. 99. — С. 071301. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.071301. — arXiv: 0704.0083 [hep-th].

41. *Baym G.*, *Mermin N. D.* Determination of thermodynamic Green's functions // Journal of Mathematical Physics. — 1961. — Т. 2, № 2. — С. 232—234. — DOI: 10.1063/1.1703704.

42. *Evans T. S.* N point finite temperature expectation values at real times // Nucl. Phys. B. — 1992. — Т. 374. — С. 340—370. — DOI: 10.1016/0550-3213(92)90357-H.

43. *Tripolt R.-A.*, *Gubler P.*, *Ulybyshev M.*, *Von Smekal L.* Numerical analytic continuation of Euclidean data // Comput. Phys. Commun. — 2019. — Т. 237. — С. 129—142. — DOI: 10.1016/j.cpc.2018.11.012. — arXiv: 1801.10348 [hep-ph].

44. *Polyakov A. M.* Quark Confinement and Topology of Gauge Groups // Nucl. Phys. B. — 1977. — Т. 120. — С. 429—458. — DOI: 10.1016/0550-3213(77)90086-4.

45. *Lowe M.*, *Stone M.* A TWO LOOP CALCULATION ABOUT A QUANTUM MECHANICAL INSTANTON // Nucl. Phys. B. — 1978. — Т. 136. — С. 177—188. — DOI: 10.1016/0550-3213(78)90021-4.

46. *Takahasi Y.*, *Umezawa H.* Thermo field dynamics // Collect. Phenom. / под ред. A. Arimitsu, H. Ezawa, H. Matsumoto, K. Nakamura, Y. Yamanaka. — 1975. — Т. 2. — С. 55—80.