

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук»
(ФИАН)



На правах рукописи

Ваховский Владислав Николаевич

**Ковариантные методы в современной квантовой теории
поля и квантовой гравитации**

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Барвинский Андрей Олегович

Москва — 2024

Оглавление

Стр.

Введение	5
Глава 1. Классический метод Швингера-ДеВитта и его обобщения	15
1.1 Метод фонового поля	16
1.2 Метод теплового ядра	19
1.3 Миртовая функция Синга, тензор параллельного переноса и их производные	25
1.4 Классический метод ДеВитта	27
1.5 Ультрафиолетовые расходимости и аномалии	29
1.6 Метод универсальных функциональных следов	31
Глава 2. Обобщенные экспоненциальные функции	33
2.1 Мотивация и исходная идея метода	33
2.1.1 Размерный анализ	34
2.1.2 Тепловое ядро степени лапласиана в плоском пространстве	36
2.2 Свойства обобщенных экспонент	38
2.2.1 Представление через функции Бесселя	38
2.2.2 Интеграл Меллина-Барнса и асимптотическое поведение .	40
2.2.3 Другие свойства обобщенных экспонент	42
2.3 Целые степени лапласиана и квазиклассическое приближение . .	46
2.3.1 Экспоненциальные асимптотики для обобщенных экспонент целого порядка	47
2.3.2 Метод перевала	51
2.3.3 Неоднородность квазиклассического приближения	52
2.4 Степени оператора типа Лапласа	54
Глава 3. Внедиагональные разложения теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка	58
3.1 Обобщенное преобразование Фурье	58
3.1.1 Преобразование Фурье в искривленном пространстве . . .	59
3.1.2 Решение для фурье-образа	60
3.1.3 Интегрирование по импульсам	65

	Стр.
3.1.4	Предел совпадения 69
3.2	Результаты символьных вычислений 71
3.2.1	Сравнение с классическим методом ДеВитта 71
3.2.2	Минимальный оператор четвертого порядка 75
3.3	Теория возмущений 78
Глава 4. Аномальное действие Ригерта-Фрадкина-Цейтлина	
	(RFT) и ковариантная теория возмущений 85
4.1	Конформный оператор Паница Δ_4 и конформная плотность Θ_4 . 85
4.2	Видимое противоречие между RFT-действием и результатами ковариантной теории возмущений 86
4.3	Фиксация конформной калибровки 89
4.3.1	Калибровка Ригерта-Фрадкина-Цейтлина (RFT) 91
4.3.2	Калибровка Фрадкина-Вилковыского (FV) 93
4.4	Конформная аномалия и ковариантное разложение по степеням кривизны 96
4.4.1	Кубический порядок по кривизне 99
4.4.2	Конформное пересуммирование: аномальное действие Фрадкина-Вилковыского 101
4.4.3	Проблема двойных полюсов и глобальные конформные преобразования 105
Глава 5. Приложения нелокального действия 108	
5.1	Тензор энергии-импульса для конформно-связанных пространств 109
5.1.1	Получение конформной аномалии из расходящейся части эффективного действия 110
5.1.2	Минимальная форма действия Весса-Зумино и a -теорема . 113
5.1.3	Перенормированные тензоры энергии-импульса 114
5.2	Конформно-плоское пространство-время 117
5.2.1	Космология, определяемая аномалией 118
5.3	Ренормгруппа и метаморфоза ренормгруппового бега 122
5.3.1	Эффективное действие, формфакторы и ренормгруппа . . 123
5.3.2	Выбор бегущего масштаба μ 125
5.3.3	Возвращение к разложению по кривизне 126

5.3.4 Ренормгрупповой бег квадратичных инвариантов как метаморфоза космологической и гравитационной констант	127
Заключение	133
Список литературы	137
Список рисунков	153
Приложение А. Ψ-функции Фокса-Райта и H-функции Фокса . .	154
А.1 Отношение произведений гамма-функций	156
Приложение Б. Ω-члены	159

Введение

Актуальность темы. В современной квантовой теории поля (КТП) чрезвычайно возросло значение функциональных методов [1; 2]. Функциональный подход в КТП основан на изучении производящих функционалов для корреляторов квантовых полей, кодирующих всю информацию о рассматриваемой модели теории поля. Они являются функционалами фоновых полей, т.е. внешних источников, либо средних полей общего вида. Использование функциональных методов в значительной мере обусловило прогресс в изучении различных моделей КТП.

Более того, поскольку сама геометрия пространства-времени может рассматриваться как такое фоновое поле, это открывает возможность для развития подхода, в котором вначале строится КТП на фиксированном классическом пространственно-временном фоне, а уже на следующем этапе рассматривается обратное воздействие квантовых полей (как полей материи, так и гравитонов) на классический искривленный фон, на котором они живут [1; 3–5]. Хотя такой подход заведомо теряет свою применимость на планковском масштабе, он важен как с практической, так и с общетеоретической точки зрения. С практической — для изучения явлений, в которых существенны как квантовые, так и гравитационные эффекты, но которые далеки от планковского масштаба (например, физики массивных черных дыр и ранних стадий космологической эволюции). С общетеоретической — как необходимый шаг на пути построения полной квантовой гравитации.

Применение функциональных методов в КТП основывается на комбинации двух основных идей: метода фонового поля и метода теплового ядра, позволяющего эффективно описывать особенности квантово-полевых пропагаторов и, далее, регуляризовать и перенормировать фейнмановские интегралы.

В действительности сфера применимости метода теплового ядра выходит далеко за рамки КТП. Можно сказать, что в настоящее время этот метод является одним из ключевых и наиболее употребительных инструментов всей современной математической физики, находящим широкий спектр практических приложений — от физики твердого тела до анализа рынков. С точки зрения чистой математики он глубоко связан с теоремами об индексе, K -теорией, спектральной и некоммутативной геометриями и т.д. Это обусло-

вило интенсивное развитие математического направления в теории теплового ядра, основанного на развитой теории псевдо-дифференциальных операторов [6] и использовании специальных «свойств функториальности», начиная от ранних работ Адамара [7] и Минакшисундарамы [8; 9] до своего полного развития у Сили [10] и Гилки [11–18].

Поскольку метод теплового ядра интересует нас с точки зрения применений в КТП, нам ближе другой, физический подход, берущий свое начало от Фока [19], заметившего, что многие величины в квантовой теории удобно представлять в виде интегралов по вспомогательной переменной «собственного времени» τ , и Швингера [20], использовавшего это наблюдение для перенормировки расходящихся фейнмановских интегралов. Но подлинный прорыв в развитии метода произошел, когда ДеВитт [1], во-первых, показал, что однопетлевое квантовое эффективное действие теории на искривленном пространстве-времени может быть выражено через коэффициенты асимптотического разложения *диагонали* теплового ядра (когда два аргумента теплового ядра совпадают $x = x'$). Это приводит к локальному градиентному разложению эффективного действия по производным фоновых полей возрастающей размерности. Во-вторых, для минимальных операторов 2-го порядка $\hat{F}(\nabla) = \hat{\square} + \dots$, где $\square = -g^{ab}\nabla_a\nabla_b$, ДеВитт предложил простой и эффективный способ вычисления коэффициентов теплового ядра. Этот способ основан на использовании специального анзаца, подсказанного квазиклассическим приближением и представляющим собой *внедиагональное* (т.е. при несовпадающих аргументах $x \neq x'$) разложение теплового ядра по степеням собственного времени τ . Подстановка этого анзаца в уравнение теплопроводности приводит к цепочке рекуррентных соотношений, позволяющую последовательно находить пределы совпадения коэффициентов.

Эти результаты ДеВитта лежат в основе большинства результатов о (не)перенормируемости квантово-полевых моделей, их ренормгрупповом поведении, аномалиях и т.д., что обуславливает исключительную важность метода теплового ядра — известного в физике также как метод собственного времени или техника Швингера-ДеВитта — при анализе калибровочных теорий и моделей модифицированной (супер)гравитации.

Метод Швингера-ДеВитта был успешно применен к полям низших спинов и калибровочным теориям Янга-Миллса [21–23], лежащим в основе современной Стандартной модели физики элементарных частиц, а также к теории

гравитации и супергравитации [24—26]. Обычная эйнштейновская гравитация с действием, линейными по кривизне, как известно [1], перенормируема. Эта проблема решается путем введения в лагранжиан теории членов с высшими производными — в простейшем случае добавлением к действию членов, квадратичных по кривизне [27]. Такие модифицированные модели также анализировались в рамках общего подхода Швингера-ДеВитта. В частности, была изучена их асимптотическая свобода [28; 29]. В рамках техники Швингера-ДеВитта изучались общие свойства размерной и дзета-функциональной регуляризации [24; 30], конформная аномалия различных конформно-инвариантных на классическом уровне моделей в искривленном пространстве [31—34], вычислялось квантовое среднее тензора энергии импульса в метрике общего вида и на пространствах с различного вида симметриями [35—39], включая эффективный потенциал на пространстве де Ситтера [40]. Перенормируемая и, в частности, свободная от вейлевской аномалии конформная супергравитация изучалась в [41; 42].

Хотя R^2 -гравитация служит основой предложенной Старобинским модели космологической инфляции [43], наличие высших производных приводит к появлению духов Остроградского и нарушению унитарности. Для преодоления этой проблемы в последние годы большое внимание привлекли модели типа Хоравы-Лифшица [44], в которых удается одновременно сохранить перенормируемость и унитарность ценой нарушения лоренц-инвариантности при высоких энергиях и которые также анализировались методом Швингера-ДеВитта и его обобщений [45—47].

Существенная трудность состоит в том, что предложенный ДеВиттом способ вычисления коэффициентов теплового ядра непосредственно применим только к минимальным операторам 2-го порядка. Поэтому анализ моделей с высшими производными или неминимальным оператором потребовал развития не прямых методов вычисления, с помощью которых более сложный случай некоторым образом сводится к уже известному девиттовскому. Их изложение, включая так называемый метод универсальных функциональных следов, и применение к квантово-полевым моделям содержатся в работе Барвинского и Вилковыского [48]. Также следует выделить цикл работ Гусынина с соавторами [49—54], вычислявших коэффициенты теплового ядра с помощью преобразования Фурье. Дальнейшие ссылки можно найти в обзорных работах [55—57].

Однако, хотя для моделей с высшими производными или неминимальным волновым оператором непрямые методы позволяют получить локальное градиентное разложение однопетлевого эффективного действия в любом порядке по фоновой размерности, соответствующие вычисления чрезвычайно трудны технически. Кроме того, непрямые методы дают информацию о поведении теплового ядра только на диагонали (т.е. при $x = x'$), что также недостаточно для потенциальных физических приложений — например, если мы захотим учесть вклады высших петель. В связи с этим долгое время ощущалась потребность в некотором обобщении первоначального деВиттовского подхода на этот более общий случай. Однако предпринимаемые время от времени попытки некоторым образом модифицировать деВиттовский анзац, исходя из квазиклассического приближения или других соображений (например, [58]), не увенчались успехом.

Несмотря на это, главы 2 и 3 настоящей работы посвящены решению именно этой стоящей долгое время задачи. Для минимальных операторов высшего порядка $\hat{F}(\nabla) = \hat{1}\square^\nu + \dots$, при $\nu > 1$, нам удалось получить внедиагональное разложение теплового ядра, являющееся непосредственным обобщением деВиттовского анзаца. Отличие от классического случая состоит в двух моментах: во-первых, вместо обычной экспоненты в деВиттовском анзаце наше разложение ведется по системе некоторых новых специальных функций гипергеометрического типа, которые мы называли «обобщенными экспонентами». Свойства этих функций, включая преобразование Меллина, связь с функциями Бесселя, замечательное правило дифференцирования и довольно тонкий вопрос об их асимптотическом поведении и его связи с квазиклассическим приближением, подробно изучены в работе. Эти свойства обобщенных экспонент позволяют эффективно манипулировать нашими обобщенными внедиагональными разложениями. Более того, мы показываем, что выход за пределы диагонали теплового ядра позволяет гораздо более гибко и эффективно использовать технику интегральных преобразований, что, в частности, чрезвычайно упрощает доказательство «свойств функториальности» и позволяет по-новому взглянуть на некоторые проблемы, связанные с дзета-функциональной регуляризацией.

Второе ключевое отличие от классического метода ДеВитта состоит в появлении в обобщенном внедиагональном разложении членов со сколь угодно большими отрицательными степенями собственного времени τ . Все эти члены исчезают в пределе совпадения и потому не видны на диагонали, однако отсутствие «дна» у системы внедиагональных коэффициентов делает невозможным

построение для них цепочки рекуррентных соотношений, аналогичной той, что возникает в методе ДеВитта. Несмотря на это мы разработали сразу два различных алгоритма их получения — на основе обобщенного преобразования Фурье в искривленном пространстве и по теории возмущений — и реализовали эти алгоритмы в системе символьных вычислений *Wolfram Mathematica*. Причем в некотором смысле наши методы дают даже больше, чем классическая техника ДеВитта: если последняя позволяет вычислять только пределы совпадения $x = x'$ коэффициентов, то наши методы генерируют замкнутые выражения для коэффициентов при $x \neq x'$.

Резюмируя, хотя наш метод внедиагональных разложений пока делает свои самые первые шаги, полученных к настоящему моменту результатов достаточно для того, чтобы без преувеличений заключить, что его появление открывает новые перспективы как в исследовании теплового ядра, так и в широком спектре его потенциальных приложений, включая КТП и исследования моделей модифицированной гравитации.

Другая трудность связана с тем, что практически мы можем вычислить только несколько самых первых членов локального градиентного разложения по степеням фоновой размерности. По своим физическим свойствам полученное таким образом локальное выражение может кардинально отличаться от полного однопетлевого эффективного действия, которое является существенно нелокальным функционалом. Поэтому возникает потребность некоторым образом учесть также вклад всех высших членов градиентного разложения.

Сделать это можно двумя способами: во-первых, можно проинтегрировать конформную аномалию по параметру конформного преобразования, получив таким образом генерирующее ее нелокальное аномальное действие. В случае двух измерений эта процедура приводит к известному нелокальному действию Полякова [59], причем, поскольку всякое двумерное пространство локально является конформно-плоским, действие Полякова по существу является полным эффективным действием и, поэтому, например, полностью определяет излучение Хокинга двумерных черных дыр [36]. Для четырехмерья аналогичное аномальное действие было получено в нелокальной форме Ригертом [60] и Фрадкиным и Цейтлиным [41] в локальной форме конформного действия Весса-Зумино, включающего вспомогательное скалярное поле — дилатон. Нелокальность этого аномального действия Ригерта-Фрадкина-Цейтлина (RFT)

связана с наличием в нем оператора, обратного к конформно-инвариантному оператору Паница 4-го порядка [61].

Вторым способом учета нелокальности является ковариантная теория возмущений [62—66], в которой локальное градиентное разложение частично пересуммируется в ряд по степеням кривизны с нелокальными формфакторами. Однако генерируемые этим методом выражения с типичными логарифмическими формфакторами по видимости находятся в радикальном противоречии со структурой RFT-действия [67], что вызвало длительную дискуссию в литературе между сторонниками двух подходов.

Помимо этого RFT-действие вызвало другую критику, связанную с его противоречием конформным тождествам Уорда [68] и с двухполюсной структурой функции Грина оператора Паница [69]. Хотя эти возражения были опровергнуты явным вычислением $\langle TTT \rangle$ -корреляторов в [70], вопрос все еще остается открытым [71]. Тем не менее, существует твердое убеждение [70; 72; 73], что инфракрасные эффекты конформной моды, описываемой RFT-действием, в ряде случаев могут модифицировать гравитацию и определять собой макроскопическую физику, в частности, поведение квантового тензора энергии-импульса вблизи горизонта черной дыры [74], вклад в скалярный сектор гравитационных волн [75] или динамическую вакуумную энергию в эффективной теории гравитации [76].

Все вышесказанное делает крайне актуальной задачу прояснения физического статуса RFT-действия, что и является задачей глав 4 и 5. Для этого мы замечаем, что аномальное действие определено лишь с точностью до некоторого конформно-инвариантного функционала и показываем, что этот произвол может быть параметризован с помощью процедуры фиксации конформной калибровки [77]. Мы подробно рассматриваем две такие калибровки, одна из которых приводит к RFT-действию, а вторая связана с конформным преобразованием, предложенным Фрадкиным и Вилковыским [34], и приводит к другой форме нелокального действия, которую мы называем FV-действием. Затем мы показываем, что FV-действие можно получить в результате некоторой процедуры пересуммирования разложения ковариантной теории возмущений, что разрешает проблему кажущегося противоречия между двумя подходами.

Далее мы рассматриваем два важных физических приложения RFT-действия: вычисление вакуумного тензора энергии-импульса, где мы получаем закон его конформного преобразования, обобщающий известную формулу Бра-

уна-Кэссиди для тензора энергии-импульса в конформно-плоском пространстве [39] на общий случай, и космологию с метрикой Фридмана, определяемую конформной аномалией большого количества конформно-инвариантных полей [78], которая уграет важную роль в модели начальных условий инфляции [79; 80]. Наконец, в последнем разделе главы рассматривается тесно связанная с вопросом нелокального эффективного действия проблема о ренормгрупповом поведении гравитационной G и космологической Λ констант, которая в последнее время активно обсуждается в литературе [81–87].

Таким образом, **целями** данной диссертационной работы являются:

1. Получение внедиагонального разложения теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка, обобщающих стандартный девицковский анзац для минимальных операторов 2-го порядка.
2. Разработка алгоритмов вычисления внедиагональных коэффициентов теплового ядра.
3. Прояснение физического статуса аномального RFT-действия.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Изучение свойств входящих в обобщенное внедиагональное разложение «обобщенных экспоненциальных функций», в частности, получение их экспоненциальных асимптотик в случае целых порядков ν .
2. Развитие техники интегральных преобразований для получения внедиагональных разложений для функций оператора.
3. Применение метода обобщенных преобразований Фурье в искривленном пространстве к вычислению внедиагональных коэффициентов теплового ядра.
4. Реализация алгоритмов вычисления коэффициентов в системе символьных вычислений *Wolfram Mathematica* и проверка их согласованности с ранее полученными результатами.
5. Рассмотрение функционального семейства аномальных действий, получающихся с помощью фиксации конформной калибровки, проверка согласия FV-действия с разложением ковариантной теории возмущений.
6. Вывод закона конформных преобразований тензора энергии-импульса на фоне произвольного искривленного пространства-времени.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Внедиагональное разложение теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка в виде двойного функционального ряда по «обобщенным экспоненциальным функциям» с исчезающими в пределе совпадения нетривиальными членами при сколь угодно больших отрицательных степенях собственного времени.
2. «Обобщенная функториальность» — применение техники интегральных преобразований с учетом свойств «обобщенных экспоненциальных функций» позволяет получить внедиагональные разложения для широкого класса функций от оператора с одинаковыми универсальными внедиагональными коэффициентами.
3. Два алгоритма вычисления внедиагональных коэффициентов теплового ядра — с помощью обобщенного преобразования Фурье в искривленном пространстве и по теории возмущений. Явные выражения пределов совпадения коэффициентов размерности 4 для минимального оператора 4-го порядка общего вида.
4. Согласованность нелокального аномального RFT-действия с нелокальным разложением по степеням кривизны в ковариантной теории возмущений.
5. Закон конформного преобразования вакуумного тензора энергии-импульса, обобщающий известное локальное выражение Брауна-Кэссиди в конформно-плоском пространстве на случай общих пространств с ненулевым тензором Вейля. Параметр конформного преобразования конформно- и асимптотически-плоского пространства в плоское является решением линейного уравнения с оператором Паница и условиями Дирихле на бесконечности.
6. Вакуумная энергия Казимира конформных полей в статической вселенной Эйнштейна выводится из аномального действия Ригерта-Фрадкина-Цейтлина и тем самым определяется их конформной аномалией.
7. Свойства нелокальных формфакторов эффективного действия в перенормируемых моделях гравитации подтверждают известное утверждение об отсутствии ренормгруппового бега у гравитационной G и космологической Λ констант.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к значительному прогрессу в понимании структуры теплового ядра

для минимальных операторов высшего порядка и нелокального аномального действия. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Приведённые в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

Научная и практическая значимость. Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Впервые полученные внедиагональные разложения для минимальных операторов высшего порядка проливают свет на ряд вопросов об общей структуре и поведении теплового ядра: о причине эффективности первоначального метода ДеВитта и неудач предыдущих попыток его обобщения, о природе логарифмических по собственному времени членов в разложениях диагонали теплового ядра и т.д. Также метод может быть относительно легко обобщен на гораздо более широкий важный класс причинных операторов. Дальнейшее развитие метода, в частности, более аккуратный учет свойств производных мировой функции и тензора параллельного переноса, позволит создать более эффективные алгоритмы вычисления коэффициентов теплового ядра и, следовательно, вычисления и анализа эффективного действия сложных моделей КТП и модифицированной гравитации, включая модели типа Хоравы-Лифшица, что имеет большое практическое значение. Результаты, касающиеся аномального RFT-действия, вносят значительный вклад в дискуссию о его физическом статусе и правомерности его применения в широком физическом контексте, включающем физику черных дыр и построение моделей космологической инфляции.

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в 4 [88—91] статьях в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Помимо этого, основные результаты диссертации докладывались на семинаре ОТФ ФИАН и на международных конференциях “Models in Quantum Field Theory” (MQFT-2022) в Санкт-Петербурге и “International Conference on Particle Physics and Cosmology” (2023) в Ереване, Армения.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 2 приложений. Полный объем диссертации составляет 160 страниц, включая 6 рисунков и 0 таблиц. Список литературы содержит 166 наименований.

Глава 1 носит вводный и вспомогательный характер. В ней кратко описываются классические результаты, касающиеся методов фонового поля и теплового ядра и предложенного ДеВиттом способа вычисления коэффициентов теплового ядра для операторов типа Лапласа, о перенормировке УФ-расходимостей, аномалиях и методе универсальных функциональных следов, а также вводятся основные понятия и обозначения, используемые в основной части диссертации.

В **главе 2** обсуждаются мотивация и основная идея метода внедиагональных разложений теплового ядра, а затем подробно исследуются свойства ключевого ингредиента этих разложений — «обобщенных экспоненциальных функций», включая тонкий вопрос о получении экспоненциальных асимптотик в случае целого порядка ν . Также рассматривается основная идея «обобщенной функториальности» на простейшем примере получения внедиагонального разложения теплового ядра степени оператора типа Лапласа с помощью приема с прямым/обратным преобразованием Меллина.

В **главе 3** строятся два алгоритма вычисления внедиагональных коэффициентов теплового ядра — с помощью обобщенного преобразования Фурье в искривленном пространстве и по теории возмущений. Далее приводятся результаты компьютерного символьного вычисления первых коэффициентов и их сравнение с полученными ранее результатами.

Глава 4 посвящена обсуждению статуса нелокального аномального RFT-действия, его связи с разложением ковариантной теории возмущений по степеням кривизны и его физическим приложениям. Рассмотрена неоднозначность в выборе аномального действия, параметризуемая процедурой выбора конформной калибровки, а затем показано, что нелокальное FV-действие, отличающееся от RFT-действия на конформно-инвариантный функционал, может быть получено пересуммированием ряда ковариантной теории возмущений.

Наконец, в **главе 5** рассматриваются приложения аномального RFT-действия к вычислению вакуумного тензора энергии-импульса на искривленном фоне и к модели космологической инфляции, определяемой конформной аномалией, а также обсуждается связанный вопрос о ренормгрупповом поведении гравитационной и космологической констант.

В приложениях **А** и **Б** собраны вспомогательные материалы о свойствах специальных H -функций Фокса и громоздкие результаты вычислений коэффициентов теплового ядра для минимального оператора 4-го порядка общего вида.

Глава 1. Классический метод Швингера-ДеВитта и его обобщения

Данная глава носит вводный и вспомогательный характер. В ней мы кратко напоминаем классические результаты, касающиеся вычисления квантового эффективного действия с помощью методов фонового поля и теплового ядра, что также позволит нам ввести основные понятия и обозначения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Прежде всего любая теория поля живет на некотором пространстве-времени \mathcal{M} , под которым мы будем всюду подразумевать d -мерное (псевдо-)риманово многообразие с заданной на нем метрикой g_{ab} . Хотя настоящая физическая метрика лоренцева, т.е. имеет сигнатуру $(- + \dots +)$, на практике все вычисления обычно проводятся для евклидовой метрики с сигнатурой $(+ + \dots +)$, после чего осуществляется так называемый «виковский поворот», т.е. переход к физическому случаю с помощью аналитического продолжения по комплексной переменной времени x^0 . В соответствии с этим мы всюду далее также рассматриваем евклидову метрику. С метрикой g_{ab} ассоциирована обычная связность Леви-Чивиты ∇_a , для нее метрика ковариантно постоянна $\nabla_a g_{bc} = 0$, кручение отсутствует¹.

Далее, на пространстве-времени \mathcal{M} живет некоторый набор полей $\varphi(x) = \varphi^A(x)$ (с математической точки зрения они являются сечениями векторного расслоения над \mathcal{M}). Их индексы A могут быть произвольной природы: пространственно-временными, спинорными, внутренними или комбинированными. В дальнейшем, где это только возможно, мы будем опускать их, обозначая матрицы в пространстве полей шляпками. В частности, $\hat{1} = \delta_B^A$ будет обозначать просто единичную матрицу. Тензор Римана $R^c{}_{dab}$ и кривизна в расслоении $\hat{\mathcal{R}}_{ab}$ определяются стандартным образом через коммутаторы ковариантных производных ∇_a :

$$[\nabla_a, \nabla_b]v^c = R^c{}_{dab}v^d, \quad (1.1)$$

$$[\nabla_a, \nabla_b]\varphi = \hat{\mathcal{R}}_{ab}\varphi. \quad (1.2)$$

¹Хотя обсуждаемые далее методы могут быть относительно легко распространены на более общий аффинно-метрический случай с ненулевыми кручением и неметричностью, в данной работе мы не будем касаться этих вопросов.

Наконец, на классическом уровне поля должны удовлетворять некоторым *уравнениям движения*. Предполагается, что эти уравнения определяются принципом наименьшего действия. При этом крайне удобно дополнительно ввести вспомогательные внешние источники поля $J(x) = J_A(x)$, с ними уравнения движения теории примут вид:

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = -J, \quad (1.3)$$

где $S[\varphi]$ есть функционал классического действия теории.

1.1 Метод фонового поля

В основе метода фонового поля лежит разбиение полного квантового поля $\varphi_{\text{tot}}(x)$ на две части, соответствующие фоновому полю $\Phi(x) = \langle \varphi_{\text{tot}}(x) \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ есть квантовое среднее в присутствии внешних источников поля $J(x)$, и малым квантовым флуктуациям $\varphi(x)$

$$\varphi_{\text{tot}} = \Phi + \varphi. \quad (1.4)$$

Классическое действие удобно разложить в функциональный ряд Тейлора по малым возмущениям:

$$S[\Phi + \varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} S_n[\Phi] \cdot \varphi^n, \quad (1.5)$$

где мы используем следующие сокращенные обозначения:

$$S_n[\Phi|x_1, \dots, x_n] = \left. \frac{\delta^n S[\varphi]}{\delta \varphi(x_1) \cdots \delta \varphi(x_n)} \right|_{\varphi=\Phi}, \quad (1.6)$$

$$S_n[\Phi] \cdot \varphi^n = \int dx_1 \cdots dx_n S_n[\Phi|x_1, \dots, x_n] \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n). \quad (1.7)$$

Тогда классическое линейризованное уравнение для малых возмущений $\varphi(x)$, распространяющихся на заданном фоне $\Phi(x)$, определяется вторыми вариационными производными действия

$$\hat{F}(\nabla)\varphi = 0, \quad \text{где} \quad \hat{F}(\nabla)\delta(x,y) = S_2[\Phi|x,y]. \quad (1.8)$$

а «классические вершины» $S[\Phi|x_1, \dots, x_n]$ — это n -точечные функции, определяющие нелинейное взаимодействие флуктуаций. Важно отметить, что как оператор $\hat{F}(\nabla)$, так и вершины $S_n[\Phi]$ являются функционалами среднего фонового поля $\Phi(x)$.

На квантовом уровне все вакуумные корреляторы квантовых полей $\langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle$ кодируются одним-единственным объектом — производящим функционалом:

$$\begin{aligned} Z[J]/Z[0] &= \langle \exp(\varphi \cdot J) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle J(x_1) \cdots J(x_n), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}, \quad (1.10)$$

который в свою очередь определяется фейнмановским функциональным интегралом²

$$Z[J] = \int D\varphi \exp \frac{1}{\hbar} \left(-S[\varphi] - \varphi \cdot J \right). \quad (1.11)$$

Далее последовательно вводятся производящий функционал связанных корреляционных функций

$$W[J] = -\hbar \ln Z[J] \quad (1.12)$$

и его преобразование Лежандра — *эффективное действие*

$$\Gamma[\Phi] = \left(W[J] - \Phi \cdot J \right)_{J=J[\Phi]}, \quad (1.13)$$

где $J[\Phi]$ есть обращение функциональной зависимости $\Phi[J] = \delta W[J]/\delta J$. Тогда уравнение, описывающее обратное воздействие квантовых поправок на классический фон $\Phi(x)$, примет вид

$$\Gamma_1[\Phi|x] = \frac{\delta \Gamma[\Phi]}{\delta \Phi(x)} = -J(x). \quad (1.14)$$

Поэтому среднее поле $\Phi(x)$, эффективное действие $\Gamma[\Phi]$ и уравнение (1.14) являются квантовыми аналогами классического поля $\varphi(x)$, действия $S[\varphi]$ и уравнений движения (1.3).

²Заметим, что, как мы обсуждали выше, мы записываем все выражения для евклидовой КТП, поэтому они отличаются от, возможно, более привычных лоренцевых обозначений отсутствием дополнительных мнимых единиц i .

Наконец, квазиклассическое (петлевое) разложение эффективного действия по степеням постоянной Планка \hbar

$$\Gamma[\Phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)}[\Phi], \quad \text{где } \Gamma^{(0)}[\Phi] = S[\Phi], \quad (1.15)$$

позволяет получить выражения для каждого порядка $\Gamma^{(n)}[\Phi]$ в виде пространственно-временных интегралов от классического пропагатора $\hat{G}(x, y)$, определяющегося как ядро оператора, обратного к (1.8),

$$\hat{F}(\nabla) \hat{G}(x, x') = \frac{\hat{1}}{\sqrt{g(x)}} \delta(x, x'), \quad (1.16)$$

и классических вершин $S_n[\Phi]$ (1.6). Для этого выражение (1.11) переписывается в виде

$$\exp\left(-\frac{\Gamma[\Phi]}{\hbar}\right) = \int D\varphi \exp \frac{1}{\hbar} \left(-S[\Phi + \varphi] + \Gamma_1[\Phi] \cdot \varphi \right), \quad (1.17)$$

затем в него подставляются разложения (1.5) и (1.15) и приравниваются члены при одинаковых степенях \hbar . В получающихся выражениях континуальные интегралы являются уже гауссовыми, а потому легко берутся по теореме Вика.

Полученные таким путем результаты удобно представлять графически в виде (пространственно-временных) диаграмм Фейнмана, на которых классическая вершина $S_n[\Phi]$ обозначается жирной точкой с n выходящими из нее линиями, а классический пропагатор $\hat{G}(x, x')$ — линией, соединяющей соответствующие вершины. При этом оказывается, что член $\Gamma_1[\Phi] \cdot \varphi$ в (1.17) обеспечивает систематическое вычитание одночастично-приводимых диаграмм. Поэтому каждый n -петлевой вклад дается совокупностью одночастично-неприводимых (ОЧН) вакуумных диаграмм с n петлями. В частности, можно показать, что

$$\Gamma^{(1)}[\Phi] = \frac{1}{2} \ln \text{Det } \hat{F}(\nabla) = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{F}(\nabla) = \frac{1}{2} \bigcirc, \quad (1.18)$$

$$\Gamma^{(2)}[\Phi] = \frac{1}{8} \bigcirc \bigcirc + \frac{1}{12} \bigcirc \bullet \bigcirc, \quad (1.19)$$

где Det и Tr обозначают функциональный определитель и функциональный след.

Важно еще раз подчеркнуть, что полученные таким образом выражения представляют собой не функции импульсов частиц и констант связи, а

функционалы всех средних фоновых полей рассматриваемой модели (которые могут включать скалярные, спинорные, векторные, метрику и т.д. $\varphi = \varphi(x), \psi(x), A_a(x), g_{ab}(x), \dots$). Поэтому данная форма диаграммной техники определена уже не на тривиальном фоне плоского пространства-времени и исчезающих средних полей, а на произвольном фиксированном фоне.

1.2 Метод теплового ядра

Однако, как и следует ожидать, соответствующие фейнмановским диаграммам пространственно-временные интегралы, полученные в методе фонового поля, оказываются расходящимися, и поэтому нуждаются в процедуре регуляризации и перенормировки. Универсальным инструментом для этого является основанный на идеях Фока [19] и Швингера [20] и затем развитый ДеВиттом [1] метод теплового ядра (или собственного времени).

Его основная идея состоит в наблюдении, что любую степень оператора \hat{F} можно представить в виде так называемого швингеровского представления — как интеграл от операторной экспоненты $e^{-\tau\hat{F}}$ по дополнительному параметру τ , называемому «*собственным временем*»:

$$\hat{F}^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} e^{-\tau\hat{F}}, \quad (1.20)$$

где $\Gamma(s)$ есть стандартная гамма-функция Эйлера. Здесь \hat{F} может быть произвольным положительно-определенным дифференциальным (или даже псевдо-дифференциальным) оператором, а показатель степени может принимать произвольные комплексные значения, кроме целых отрицательных $s \neq 0, -1, -2, \dots$. Для $s \in \mathbb{N}$ это соотношение может быть непосредственно проверено попеременным действием оператора \hat{F} и интегрированием по частям s раз. При этом из представления (1.20), используя свойства гамма-функций, несложно получить свойства, которые естественно было бы ожидать от комплексной степени, например, $\hat{F}^a \hat{F}^b = \hat{F}^{a+b}$.

Обратное преобразование дается формулой

$$e^{-\tau\hat{F}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} \frac{\tau^{-s}\Gamma(s)}{\hat{F}^s} ds, \quad (1.21)$$

где интегрирование ведется по контуру, параллельному мнимой оси при достаточно большом положительном w . Это последнее выражение легко понять следующим образом: гамма-функция $\Gamma(s)$ имеет в точках $s_n = -n$ простые полюса с вычетами $(-1)^n/n!$. Тогда интеграл по s сводится к сумме вычетов в этих полюсах, что в точности воспроизводит стандартное разложение в ряд Тейлора для операторной экспоненты $e^{-\tau\hat{F}}$.

Далее оказывается удобным перейти от операторов к их ядрам. Собственно, *тепловым ядром* $\hat{K}_F(\tau|x, x')$ оператора $\hat{F}(\nabla)$ принято называть ядро его операторной экспоненты $e^{-\tau\hat{F}}$:

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = e^{-\tau\hat{F}(\nabla)} \frac{\hat{1}}{\sqrt{g(x)}} \delta(x, x'). \quad (1.22)$$

Это двухточечная (т.е. зависящая от двух пространственно-временных точек x и x') матрично-значная функция. Очевидно, она является решением дифференциального уравнения теплопроводности

$$(\partial_\tau + \hat{F}_x) \hat{K}_F(\tau|x, x') = 0 \quad (1.23)$$

с начальным условием

$$\hat{K}_F(0|x, x') = \frac{\hat{1}}{\sqrt{g(x)}} \delta(x, x'). \quad (1.24)$$

Устоявшаяся в литературе терминология («уравнение теплопроводности», «тепловое ядро» и т.д.) исторически обусловлено тем обстоятельством, что для случая трехмерного плоского пространства $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$, одного скалярного поля $\varphi(x)$ и ковариантного лапласиана в качестве оператора $F(\nabla) = \square = -g^{ab}\nabla_a\nabla_b$ ³ уравнение (1.23) действительно совпадает со стандартным уравнением теплопроводности.

³Заметим, что мы определяем ковариантный лапласиан со знаком минус, что может быть несколько непривычным, для того, чтобы этот оператор был положительно определенным. Также мы вместо обычно принятой для евклидова случая Δ используем обозначение \square , как более подходящее в свете интересующих нас приложений, а кроме того освобождающее символ Δ для определителя Паули-Ван Флека-Моретт (1.49).

Если теперь мы перейдем в соотношениях (1.20) и (1.21) от операторов к их ядрам, то получим, что тепловое ядро $\hat{K}_F(\tau|x,x')$ и функция Грина $\hat{G}_{F^s}(x,x') = \hat{F}^{-s}\delta(x,x')/\sqrt{g(x)}$ связаны прямым и обратным преобразованием Меллина:

$$\hat{G}_{F^s}(x,x') = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \hat{K}_F(\tau|x,x'), \quad (1.25)$$

$$\hat{K}_F(\tau|x,x') = \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} ds \tau^{-s} \Gamma(s) \hat{G}_{F^s}(x,x'). \quad (1.26)$$

Эти преобразования оказывается удобным использовать для регуляризации различных расходящихся величин. Замечательно, что при этом можно одинаково успешно применять и комбинировать различные методы ковариантной регуляризации: размерную (когда размерность пространства-времени формально полагается отличающейся от физической на малую величину $d = 4 + \varepsilon$), ζ -функциональную (основанную на некотором специальном аналитическом продолжении), метод раздвижки точек и т.д. (подробное обсуждение и сравнение различных методов регуляризации можно найти, например, в [4]).

Использование функционального следа позволяет определить важные глобальные величины — след теплового ядра и так называемую *операторную дзета-функцию*:

$$\text{Tr} e^{-\tau\hat{F}} = \int \sqrt{g} d^d x \text{tr} \hat{K}_F(\tau|x,x), \quad (1.27)$$

$$\zeta_F(s) = \text{Tr} \hat{F}^{-s} = \int \sqrt{g} d^d x \text{tr} \hat{G}_{F^s}(x,x). \quad (1.28)$$

Рассмотрим вначале случай компактного многообразия \mathcal{M} . Математики, занимающиеся спектральной геометрией и смежными областями, обычно ограничиваются только им по причине значительного упрощения, связанного с дискретностью спектра оператора $\hat{F}(\nabla)$. Действительно, тогда в случае строго положительного эллиптического дифференциального оператора $\hat{F}(\nabla)$ существует дискретный ортонормированный базис собственных функций

$$|n\rangle = \varphi_n(x), \quad \hat{F}|n\rangle = \lambda_n|n\rangle, \quad \lambda_n > 0, \quad (1.29)$$

а сам оператор и его функции могут быть простым образом выражены через его собственные числа и собственные функции:

$$\hat{F} = \sum_n \lambda_n |n\rangle \langle n|, \quad e^{-\tau \hat{F}} = \sum_n e^{-\tau \lambda_n} |n\rangle \langle n|, \quad (1.30)$$

$$\frac{1}{\hat{F} + q} = \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{\lambda_n + q}, \quad F^{-s} = \sum_n \lambda_n^{-s} |n\rangle \langle n|. \quad (1.31)$$

В этом случае след теплового ядра и операторная дзета-функция выражаются только через собственные числа:

$$\text{Tr} e^{-\tau F} = \sum_n e^{-\tau \lambda_n}, \quad \zeta_F(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}. \quad (1.32)$$

В свою очередь, последнее соотношение позволяет получить элегантное выражение для функционального определителя:

$$\zeta'_F(0) = - \sum_n \ln \lambda_n \quad \Rightarrow \quad \text{Det} \hat{F} = \prod_n \lambda_n = \exp(-\zeta'_F(0)). \quad (1.33)$$

Заметим, что для некомпактных многообразий и многообразий с границами, представляющими главный интерес для физических приложений, простые представления (1.32) неприменимы ввиду непрерывности спектра оператора. Однако, в действительности уже для компактного случая приведенное выше формальное определение дзета-функции через функциональный след (1.28) плохо определено.

Действительно, предположим, что обратный пропагатор теории $\hat{F}(\nabla)$ является минимальным оператором порядка 2ν , т.е. его старший член может быть представлен в виде ν -й степени ковариантного лапласиана:

$$\hat{F}(\nabla) = \hat{\square}^\nu + \hat{P}(\nabla), \quad (1.34)$$

$$\text{где } \hat{P}(\nabla) = \sum_{k=0}^{2\nu-1} \hat{P}_k^{a_1 \dots a_k} \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_k} \quad (1.35)$$

включает все члены низшего порядка по производным. Тогда хорошо известно, что функция Грина $\hat{G}_{F^s}(x, x')$ при $\text{Re } s \leq d/2\nu$ стремится к бесконечности в пределе совпадения $x' \rightarrow x$. Соответственно, и определение операторной дзета-функции (1.28) (или (1.32) в компактном случае) не имеет смысла при достаточно малых $\text{Re } s \leq d/2\nu$.

Из этого затруднительной ситуации можно выйти следующим образом: заметим, что функциональный след теплового ядра $\text{Tr} e^{-\tau \hat{F}}$ (1.27) во всяком

случае хорошо определен при любом $\tau > 0$. Если теперь в соотношении (1.25) перейти к пределу совпадения $x' \rightarrow x$ и взять интеграл по пространству-времени, то придем к формальному выводу, что операторная дзета-функция должна являться преобразованием Меллина следа теплового ядра

$$\zeta_F(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \text{Tr} e^{-\tau \hat{F}}. \quad (1.36)$$

Последний интеграл сходится всюду в области $\text{Re } s > d/2\nu$ и определяет в ней аналитическую функцию. Поэтому поступим следующим образом: вместо расходящегося выражения (1.28) будем считать (1.36) новым регуляризованным определением дзета-функции в области сходимости, а в области $\text{Re } s \leq d/2\nu$ определим ее с помощью аналитического продолжения. Тогда выражение (1.33) для функционального определителя можно точно так же считать не проверяемым соотношением, а новым регуляризованным определением (в математике оно даже часто служит исходным определением, см., например, [92]).

Тогда однопетлевое эффективное действие теории с обратным пропагатором $\hat{F}(\nabla)$ будет следующим образом выражаться только через диагональные элементы $x = x'$ теплового ядра $\hat{K}_F(\tau|x, x')$ ⁴:

$$\Gamma^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{F}(\nabla) \stackrel{\text{reg}}{=} -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \text{Tr} e^{-\tau \hat{F}}. \quad (1.37)$$

В случае минимального оператора (1.34) и многообразия без границы $\partial\mathcal{M} = \emptyset$ хорошо известно, что в пределе совпадения $x = x'$ тепловое ядро имеет степенную асимптотику при малых значениях собственного времени $t \rightarrow 0$:

$$\hat{K}_F(\tau|x, x) = \tau^{-d/2\nu} \sum_{m=0}^\infty \tau^{m/\nu} \cdot \hat{A}_m(F|x), \quad (1.38)$$

где коэффициенты теплового ядра $\hat{A}_m(F|x)$ (известные в литературе под самыми разными названиями, связанными с именами Адамара [7], Швингера [20], ДеВитта [1], Минакшисундарама [8; 9], Сили [10], Гилки [11] в различных комбинациях), построены из коэффициентов оператора $\hat{P}_k^{a_1 \dots a_k}$, тензора Римана R^a_{bcd} и кривизны в расслоении $\hat{\mathcal{R}}_{ab}$.

⁴Заметим, что если мы захотим посчитать таким же образом вклады высших петель, то в них, вообще говоря, войдут уже недиагональные элементы с $x \neq x'$.

Общий вид асимптотического разложения (1.38) диагонали теплового ядра определяется размерными соображениями. Действительно, ведь в пределе совпадения единственной величиной с отрицательной размерностью является собственное время τ . Для минимального оператора (1.34) порядка 2ν имеем

$$\dim \tau = -2\nu. \quad (1.39)$$

Тогда в разложении (1.38) общий префактор $\tau^{-d/2\nu}$ отвечает за полную размерность теплового ядра $\dim \hat{K}_F(\tau|x, x') = d$, а каждое произведение под знаком суммы безразмерно, откуда имеем

$$\dim \hat{A}_m(F|x) = 2m. \quad (1.40)$$

Кроме этого, в пределе совпадения положительными размерностями обладают производные фоновых полей:

$$\mathfrak{R} = \{R^a{}_{bcd}, \hat{\mathcal{R}}_{ab}, \hat{P}_k^{a_1 \dots a_k}\}, \quad \text{где} \quad (1.41)$$

$$\dim \nabla = 1, \quad \dim R^a{}_{bcd} = \dim \hat{\mathcal{R}}_{ab} = 2, \quad \dim \hat{P}_k^{a_1 \dots a_k} = 2\nu - k. \quad (1.42)$$

Тогда коэффициенты теплового ядра в пределе совпадения строятся из сверток производных фоновых полей с учетом общей фоновой размерности

$$\hat{A}_m(F|x) \propto \sum \nabla^l \mathfrak{R}^k, \quad \text{где} \quad \dim(\nabla^l \mathfrak{R}^k) = 2m. \quad (1.43)$$

Таким образом, с точки зрения размерного анализа разложение (1.38) можно рассматривать как разложение по возрастающим степеням фоновой размерности, а собственное время τ — просто как параметр, осуществляющий градуировку по размерности локальных членов $\nabla^l \mathfrak{R}^k$.

Итак, вычисление однопетлевого эффективного действия теории с помощью метода теплового ядра сводится к вычислению коэффициентов $\text{tr} \hat{A}_m(F|x)$ как функций фоновых полей \mathfrak{R} . В случае, если оператор $\hat{F}(\nabla)$ является оператором типа Лапласа, т.е. минимальным 2го порядка, простой и элегантный метод нахождения коэффициентов теплового ядра был предложен ДеВиттом, он будет описан в разделе 1.4. Но этот метод напрямую неприменим к тем теориям, для которых $\hat{F}(\nabla)$ есть оператор высшего порядка, либо неминимален. Этому более общему случаю будет посвящен раздел 1.6.

Прежде чем двигаться дальше необходимо сделать еще несколько замечаний касательно математического подхода к теории теплового ядра.

Он хорош для доказательства общих теорем и оценок, но кажется слишком абстрактным и не вполне удобен для вычислений в приложениях. Кроме того, можно отметить еще два недостатка математического подхода: во-первых, как мы отмечали выше, он с самого начала ограничен рассмотрением только компактных многообразий \mathcal{M} и, во-вторых, интересуется только функциональным следом $\text{Tr} e^{-t\hat{F}}$. Ясно, что и то, и другое недостаточно для физических приложений: для физика наиболее интересен как раз некомпактный случай физического пространства-времени \mathcal{M} , кроме того, для него имеет значение и то, что происходит вне предела совпадения при $x \neq x'$.

1.3 Мировая функция Синга, тензор параллельного переноса и их производные

Прежде чем мы перейдем к обсуждению метода ДеВитта, введем еще несколько стандартных определений из области дифференциальной геометрии, которыми будем постоянно пользоваться в дальнейшем. Предел совпадения $x = x'$ для некоторой двухточечной функции $f(x, x')$ мы будем всюду обозначать квадратными скобками:

$$[f(x, x')] = f(x, x). \quad (1.44)$$

Мы считаем, что точки x и x' достаточно близки, чтобы между ними существовала единственная геодезическая. Тогда важная мировая функция Синга $\sigma(x, x')$ определяется как половина квадрата геодезического расстояния между этими точками. Введем следующее сокращенное обозначение для производных мировой функции

$$\sigma_{a_1 \dots a_n} = \nabla_{a_n} \dots \nabla_{a_1} \sigma. \quad (1.45)$$

В частности, $\sigma^a(x, x') = \nabla^a \sigma$ есть просто вектор в точке x , касательный к геодезической между точками x и x' , длина которого пропорциональна геодезическому расстоянию между ними. Тогда определение мировой функции можно переписать в виде

$$\sigma_a \sigma^a = 2\sigma. \quad (1.46)$$

Дифференцируя это основное соотношение, можно получить другое важное свойство

$$\sigma^b \sigma^a{}_b = \sigma^a. \quad (1.47)$$

В пределе совпадения, очевидно, будем иметь

$$[\sigma] = 0, \quad [\sigma^a] = 0, \quad [\sigma^a{}_b] = \delta_b^a. \quad (1.48)$$

Можно показать, что определитель Паули-Ван Флека-Моретт

$$\Delta(x, x') = \frac{\det(-\nabla_a \nabla_{b'} \sigma)}{\sqrt{g(x) g(x')}} \quad (1.49)$$

связан со скоростью расхождения геодезических $\sigma^a{}_a$ следующим соотношением:

$$\sigma^a \nabla_a \Delta = \Delta(d - \sigma^a{}_a). \quad (1.50)$$

Аналогично, определим тензор параллельного переноса $\hat{\mathcal{I}}(x, x')$ вдоль геодезической, соединяющей точки x и x' , соотношениями

$$\sigma^a \nabla_a \hat{\mathcal{I}} = 0, \quad [\hat{\mathcal{I}}] = \hat{1}, \quad (1.51)$$

и введем следующие сокращенные обозначения для его производных:

$$\hat{\mathcal{I}}_{a_1 \dots a_n} = \nabla_{a_n} \dots \nabla_{a_1} \hat{\mathcal{I}}. \quad (1.52)$$

Множественно действуя на уравнения (1.47) и (1.51) оператором $\sigma^c \nabla_c$ и упрощая полученные выражения с помощью (1.47), можно получить важные соотношения

$$\sigma^{a_1} \dots \sigma^{a_n} \sigma^b{}_{a_1 \dots a_n} = 0, \quad n \geq 2, \quad (1.53)$$

$$\sigma^{a_1} \dots \sigma^{a_k} \hat{\mathcal{I}}_{a_1 \dots a_n} = 0. \quad (1.54)$$

Пределы совпадения $[\sigma_{a_1 \dots a_n}]$ и $[\hat{\mathcal{I}}_{a_1 \dots a_n}]$ могут быть вычислены следующим образом: продифференцируем (1.47) и (1.51) достаточное количество раз, перейдем в полученных выражениях к пределу совпадения и упорядочим ковариантные производные, пользуясь правилами их коммутации (1.1)–(1.2). В результате для простейших пределов совпадения получим:

$$[\sigma_{abc}] = 0, \quad [\sigma_{abcd}] = \frac{2}{3} R_{a(cd)b}, \quad [\sigma_{abcde}] = \frac{3}{2} \nabla_{(c} R_{|a|de)b}, \quad (1.55)$$

$$[\hat{\mathcal{I}}_a] = 0, \quad [\hat{\mathcal{I}}_{ab}] = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{R}}_{ab}, \quad [\hat{\mathcal{I}}_{abc}] = \frac{2}{3} \nabla_{(a} \hat{\mathcal{R}}_{b)c}. \quad (1.56)$$

1.4 Классический метод ДеВитта

Предложенный ДеВиттом способ позволяет вычислять коэффициенты теплового ядра для оператора типа Лапласа (т.е. минимального (1.34) второго порядка $\mathbf{v} = 1$). Такой оператор стандартно записывается в виде:

$$\hat{F}(\nabla) = \hat{1}\square + \hat{P} + \frac{\hat{1}}{6}R, \quad (1.57)$$

где «потенциальный член» $\hat{P}(x)$ не содержит производных, т.е. является просто матрично-значной функцией (т.к. от члена с производными первого порядка всегда можно избавиться переопределением ковариантной производной ∇_a), а член с $R/6$ традиционно добавляется в целях удобства.

Основная идея метода ДеВитта очень проста: в случае оператора типа Лапласа (1.57) воспользуемся следующим анзацем

$$\hat{K}_F(\tau|x,x') = \frac{\Delta^{1/2}(x,x')}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\sigma(x,x')}{2\tau}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \tau^m \cdot \hat{a}_m(F|x,x'), \quad (1.58)$$

где двухточечные матрично-значные функции $\hat{a}_m(F|x,x')$ (не зависящие от собственного времени τ) мы будем называть HaMiDeW-коэффициентами или просто коэффициентами теплового ядра.

Вид девиттовского анзаца (1.58) мотивирован квазиклассическим приближением. Для решения уравнения теплопроводности (или уравнения Шредингера в мнимом времени) (1.23) квазиклассическое приближение начинается с анзаца Паули-Ван Флека (или ВКБ) [93]

$$\sqrt{\det\left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S(\tau|x,x')}{\partial x^a \partial x'^b}\right)} \exp(-S(\tau|x,x')), \quad (1.59)$$

где $S(\tau|x,x')$ есть главная функция Гамильтона-Якоби частицы, движущейся в x -пространстве и нефизическом мнимом времени τ с гамильтонианом $F(\mathbf{p})$ ⁵, т.е. решение уравнения Гамильтона-Якоби

$$-\partial_\tau S + F(-\nabla S) = 0. \quad (1.60)$$

⁵Оператор $F(\nabla)$, в котором пространственно-временные производные ∇ заменены на канонические импульсы \mathbf{p} . Отсутствие мнимой единицы i объясняется тем, что мы работаем в евклидовом времени. Вывод для гамильтониана общего вида, не обязательно полиномиального по производным (импульсам) может быть найден в Приложении С работы [94].

В случае гамильтониана $F(\mathbf{p}) = -\mathbf{p}^2$ будем иметь

$$S(\tau|x,x') = \frac{\sigma(x,x')}{2\tau}, \quad \det \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2 S(\tau|x,x')}{\partial x^a \partial x'^b} \right) = \frac{\Delta(x,x')}{(2\tau)^d}, \quad (1.61)$$

что сразу же приводит к девицтовскому анзацу (1.58). Поэтому разложение по степеням собственного времени τ соответствует обычному квазиклассическому разложению по степеням \hbar ⁶.

Отметим замечательное свойство разложения (1.58): оно изолирует существенно сингулярную по τ часть теплового ядра в экспоненциальном префакторе, исчезающем в пределе совпадения $x = x'$, в то время как вся физически важная информация содержится в HaMiDeW-коэффициентах $a_n[F|x,x']$ регулярного степенного ряда.

Теперь подставим анзац (1.58) в уравнение теплопроводности (1.23) для оператора (1.57), потребуем, чтобы члены при различных степенях собственного времени τ независимо обращались в ноль, и упростим полученные уравнения с помощью соотношений (1.47) и (1.50). Тогда мы получим бесконечную цепочку рекуррентных соотношений:

$$(m + \sigma^a \nabla_a) \hat{a}_m = -\Delta^{-1/2} \hat{F}(\nabla) \Delta^{1/2} \hat{a}_{m-1}, \quad (1.62)$$

с начальным условием

$$\hat{a}_0 = \hat{\mathcal{I}}. \quad (1.63)$$

Если мы будем дифференцировать рекуррентные соотношения (1.62), а затем брать предел совпадения $x = x'$, то можем выразить $[\nabla^k \hat{a}_{m+1}]$ через $[\nabla^l \hat{a}_m]$, $l \leq k + 2$, и пределы $[\sigma_{a_1 \dots a_n}]$ и $[\hat{\mathcal{I}}_{a_1 \dots a_n}]$. Последовательно вычисляя величины $[\nabla^k \hat{a}_m]$ мы получим точные локальные выражения для них в виде комбинаций сверток ковариантных производных фоновых полей \mathfrak{R} (1.41).

В частности, для простейших пределов совпадения этот метод позволяет получить следующие известные выражения (они могут быть найдены в [1])

⁶Заметим, однако, что такая квазиклассическая интерпретация анзаца (1.58) вовсе не является обязательной — в принципе фактор $\Delta^{1/2}$ можно было бы изменить или вовсе убрать, переопределив коэффициенты $\hat{a}_m(F|x,x')$. Как мы увидим в дальнейшем, метод обобщенного преобразования Фурье действительно порождает разложение (3.46), в которое определитель входит как Δ^{-1} .

или в [48]):

$$[\hat{a}_0] = \hat{1}, \quad [\nabla_a \hat{a}_0] = 0, \quad [\nabla_a \nabla_b \hat{a}_0] = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{R}}_{ab}, \quad (1.64)$$

$$[\hat{a}_1] = -\hat{P}, \quad [\nabla_a \hat{a}_1] = -\frac{1}{2} \nabla_a \hat{P} - \frac{1}{6} \nabla^b \hat{\mathcal{R}}_{ba}, \quad (1.65)$$

$$[\hat{a}_2] = \frac{1}{180} (R_{abcd} R^{abcd} - R_{ab} R^{ab} - \square R) \hat{1} + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{12} \hat{\mathcal{R}}_{ab} \hat{\mathcal{R}}^{ab} + \frac{1}{6} \square \hat{P}. \quad (1.66)$$

Метод ДеВитта не позволяет получить замкнутые выражения для коэффициентов $\hat{a}_m(x, x')$ вне предела совпадения. Однако они могут быть восстановлены по пределам совпадения $[\nabla^k \hat{a}_m]$ с помощью разложения в ковариантный ряд Тейлора. То, что эта процедура может быть последовательно проведена, подтверждает корректность исходного выбора анзаца (1.58).

В пределе совпадения $x = x'$ экспонента и определитель $\Delta^{1/2}$ в разложении (1.58) исчезают и мы получаем известную асимптотику для диагонали теплового ядра (1.38) с коэффициентами

$$\hat{A}_m(F|x) = (4\pi)^{-d/2} [\hat{a}_m(F|x, x')]. \quad (1.67)$$

1.5 Ультрафиолетовые расходимости и аномалии

Будем пользоваться размерной регуляризацией, формально полагая размерность пространства равной 2ω , а четную физическую размерность d , не обязательно равную 4, считая фиксированной. Тогда снятие регуляризации будет соответствовать пределу $\omega \rightarrow d/2$. Кроме того, для устранения инфракрасных расходимостей введем в оператор теории (1.34) дополнительное постоянное массовое слагаемое $\hat{1} m^2$. Тогда взятие интеграла по собственному времени τ в выражении (1.37) с учетом асимптотического разложения для диагонали теплового ядра (1.38), (1.67) приведет к следующему разбиению однопетлевого эффективного действия на расходящуюся, логарифмическую и конечную части [1; 48; 95]:

$$\Gamma^{(1)} = \Gamma_{\text{div}} + \Gamma_{\text{log}} + \Gamma_{\text{fin}}, \quad (1.68)$$

каждая из которых представима в виде разложения по обратным степеням m^2 :

$$\Gamma_{\text{div}} = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \sum_{n=0}^{d/2} \left(\frac{1}{\omega - \frac{d}{2}} - \psi\left(\frac{d}{2} - n + 1\right) \right) \frac{(-m^2)^{\frac{d}{2}-n}}{(\frac{d}{2} - n)!} \int \sqrt{g} d^d x \text{tr}[\hat{a}_n], \quad (1.69)$$

$$\Gamma_{\text{log}} = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \ln \frac{m^2}{\mu^2} \sum_{n=0}^{d/2} \frac{(-m^2)^{\frac{d}{2}-n}}{(\frac{d}{2} - n)!} \int \sqrt{g} d^d x \text{tr}[\hat{a}_n], \quad (1.70)$$

$$\Gamma_{\text{fin}} = -\frac{m^d}{2(4\pi)^{d/2}} \sum_{n=d/2+1}^{\infty} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{m^{2n}} \int \sqrt{g} d^d x \text{tr}[\hat{a}_n]. \quad (1.71)$$

$\psi(z)$ в выражении для Γ_{div} есть дигамма-функция (логарифмическая производная гамма-функции), а μ^2 в выражении для Γ_{log} есть некоторый массовый параметр, отражающий неоднозначность процедуры перенормировки.

Очевидно, это асимптотическое разложение для эффективного действия имеет смысл только в том случае, когда $[\hat{a}_n] \ll m^{2n}$, т.е. когда, ввиду (1.43), фоновые поля и их производные малы по сравнению с соответствующей степенью массового параметра $\nabla^l \mathcal{X}^n \ll m^{2n+l}$.

Важным приложением локального разложения является вычисление аномалии в следе тензора энергии-импульса, связанной с нарушением локальной вейлевской инвариантности при перенормировке ультрафиолетовых расходимостей. В случае четной размерности d расходящаяся часть действия и аномалия следа определяются коэффициентом $\text{tr}[\hat{a}_{d/2}]$. В частности, при $d = 4$ имеем

$$\Gamma_{\text{div}} = -\frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{2 - \omega} \int \sqrt{g} d^4 x \text{tr}[\hat{a}_2], \quad (1.72)$$

$$\langle T_a^a \rangle = \frac{2g_{ab}}{\sqrt{g}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g_{ab}} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \text{tr}[\hat{a}_2]. \quad (1.73)$$

Точное вычисление показывает [4; 48], что для конформно-инвариантной теории с N_0 вещественными скалярными полями, $N_{1/2}$ дираковскими фермионами и N_1 векторными мультиплетами (включая соответствующие вклады духов Фадеева-Попова) искомый коэффициент может быть записан в виде

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \text{tr}[\hat{a}_2] = cW^2 - aE + b\Box R, \quad \text{где} \quad (1.74)$$

$$W^2 = W_{abcd}W^{abcd} \quad \text{— квадрат конформного тензора Вейля,} \quad (1.75)$$

$$E = R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2 \quad \text{— плотность Гаусса-Бонне.} \quad (1.76)$$

Коэффициенты a и c определяются простыми формулами (показывающими, что вклад каждой частицы в аномалию определяется только ее типом):

$$a = \frac{1}{360(4\pi^2)}(N_0 + 11N_{1/2} + 62N_1), \quad (1.77)$$

$$c = \frac{1}{120(4\pi^2)}(N_0 + 6N_{1/2} + 12N_1). \quad (1.78)$$

а коэффициент b при $\square R$ оказывается схемозависимым (он равен $-2c/3$ при размерной регуляризации и $-c$ при дзета-функциональной).

1.6 Метод универсальных функциональных следов

Однако, описанная выше техника ДеВитта существенно опирается на выбор анзаца (1.58) и непосредственно применима исключительно к операторам типа Лапласа (1.57), но не к минимальным операторам (1.34) высшего порядка $\nu > 1$, а тем более не к неминимальным операторам, т.е. таким, которые не могут быть представлены в виде (1.34).

Действительно, как легко можно непосредственно проверить, наивная подстановка девиттовского анзаца (1.58) в уравнение теплопроводности (1.23) для минимального оператора высшего порядка (1.34) приводит к противоречивым уравнениям. А предпринимавшиеся время от времени попытки модифицировать анзац (1.58) (например, [58]), исходя из квазиклассического приближения или других соображений, не увенчались успехом⁷.

Однако эти более общие операторы также чрезвычайно важны для приложений: при регуляризации высшими ковариантными производными и в теориях с высшими производными. А именно, в моделях модифицированной R^2 -гравитации [28; 29], нелокальных суперперенормируемых моделях [96; 97] и моделях типа Хоравы-Лифшица [45; 98]. Типичным примером являются так называемые «конформно-ковариантные дифференциальные операторы», такие, как оператор Паница 4го порядка (4.6) и его аналоги, изучению операторов этого типа посвящена обширная литература, см., например, [61; 99; 100]. Неминимальные операторы возникают уже в простейшем случае электродинамики,

⁷Как мы увидим в Главе 3, полученные нами результаты о наличии в этом случае слагаемых при сколь угодно больших отрицательных степенях τ проясняют причину, по которой эти попытки изначально были обречены на неудачу.

рассматриваемой в общей лоренц-ковариантной калибровке, с оператором

$$\hat{F}(\nabla) = F_b^a(\nabla) = \delta_b^a \square - \lambda \nabla^a \nabla_b + \dots, \quad (1.79)$$

для широкого класса таких калибровок в обычной эйнштейновской гравитации [48] и в моделях модифицированной гравитации [28; 29].

Важность минимальных операторов высшего порядка и неминимальных операторов обусловила развитие непрямых методов, которые тем или иным образом сводят задачу вычисления коэффициентов теплового ядра для этих классов операторов к более простой задаче для операторов типа Лапласа, которую уже можно решить методом ДеВитта. Наиболее общим из таких непрямых методов является так называемый метод «универсальных функциональных следов» [48; 101].

Сущность этого метода может быть пояснена на примере теории с высшими производными, обратный пропагатор которой дается оператором (1.34). Однопетлевой функциональный детерминант такой теории

$$\text{Tr} \ln (\hat{1} \square^\nu + \hat{P}(\nabla)) = \nu \text{Tr} \ln \square + \text{Tr} \ln \left(\hat{1} + \hat{P}(\nabla) \frac{1}{\square^\nu} \right) \quad (1.80)$$

может быть разложен в ряд по степеням нелокального возмущения $\hat{P}(\nabla)/\square^\nu$. Если мы после этого прокоммутируем все степени $P(\nabla)$ налево, а все обратные степени \square — направо, то получим, что результат может быть выражен в виде бесконечного ряда пределов совпадения

$$\left[\nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_n} \frac{1}{\square^m} \delta(x, x') \right], \quad (1.81)$$

свернутых с некоторыми тензорами возрастающей размерности. Универсальные функциональные следы (1.81) уже могут быть вычислены с помощью метода ДеВитта, поскольку m -ая степень обратного лапласиана может быть легко получена в виде интеграла по собственному времени от его теплового ядра оператора \square (см. формулу (1.25)).

Метод универсальных функциональных следов показал себя чрезвычайно эффективным, в частности, при вычислении бета-функций $(3+1)$ -мерной проективной модели гравитации типа Хоравы [46; 47]. Эту задачу в настоящее время невозможно решить с помощью обычной диаграммной техники в импульсном пространстве над плоским фоном — в силу необходимости вычисления сотен тысяч фейнмановских диаграмм.

Глава 2. Обобщенные экспоненциальные функции

2.1 Мотивация и исходная идея метода

Физика теоретико-полевых моделей с высшими производными и нелокальных моделей резко отличается от более привычных локальных моделей КТП с волновым оператором второго порядка. Это проявляется прежде всего в нарушении унитарности, связанном с появлением так называемых духов Остроградского [27], а также в нарушении лоренц-инвариантности и своеобразных причинных свойствах моделей типа Хоравы-Лифшица (которые сами мотивированы попыткой устранить проблему с унитарностью в перенормируемых моделях модифицированной гравитации), нецелых размерностях конформных операторов в конформных теориях поля и т.д. Все эти особенности глубоко укоренены в математическом формализме моделей с высшими производными и, следовательно, должны некоторым образом проявляться на уровне теплового ядра, как одного из основных строительных блоков теории.

Несмотря на то, что для таких моделей с высшими производными метод универсальных функциональных следов в принципе позволяет вычислить все необходимое (по крайней мере в однопетлевом приближении), он обладает одним очень существенным недостатком — как видно из выражения (1.81), он непосредственно оперирует только с пределами совпадения. Однако структура теплового ядра $\hat{K}_F(\tau|x,x')$ вне его диагонали при $x \neq x'$ также может быть важна (например, если мы захотим вычислить вклады высших петель).

Кроме того, как ясно из рассмотрения метода ДеВитта в Разделе 1.4, коэффициенты $\hat{a}_m(x,x')$ входят в рекуррентные соотношения (1.62) именно как двухточечные функции, а не как пределы совпадения $[\hat{a}_m]$. Вычисление даже только пределов совпадения $[\hat{a}_m]$ требует знания пределов совпадения от производных низших коэффициентов $[\nabla^k \hat{a}_l]$, $l < m$. Таким образом, диагональ теплового ядра определяется его общей структурой вне диагонали при $x \neq x'$. Поэтому естественно ожидать, что прояснение и учет деталей этой структуры могут помочь в разработке новых, более эффективных методов вычисления даже пределов совпадения $x = x'$. Разработанные к настоящему моменту непрямые методы просто не интересуются структурой теплового ядра вне диагонали.

Это именно тот пробел, на заполнение которого направлено исследование вне-диагональных разложений.

2.1.1 Размерный анализ

Несколько лучше природу тех трудностей, с которыми мы сталкиваемся при попытке обобщить метод ДеВитта на случай операторов высшего порядка, можно понять с помощью размерного анализа. Как мы отмечали в обсуждении после формулы (1.38), общий вид асимптотического разложения диагонали теплового ядра определяется размерными соображениями.

Однако, вне предела совпадения при $x \neq x'$ ситуация становится гораздо более сложной — поскольку в этом случае, помимо собственного времени τ , появляются две другие величины отрицательной размерности:

$$\dim \sigma = -2 \quad \text{и} \quad \dim \sigma^a = -1, \quad (2.1)$$

из которых можно построить безразмерные комбинации

$$z = \frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}} \quad \text{и} \quad \frac{\sigma^a}{\tau^{1/2\nu}}. \quad (2.2)$$

Их появление не запрещено размерными соображениями, а потому в разложение теплового ядра вне диагонали в принципе могут входить члены со сколь угодно высокими степенями этих безразмерных комбинаций. Но это, очевидно, приводило бы к появлению сколь угодно больших отрицательных степеней собственного времени τ .

Если мы вернемся в свете этих рассуждений к девиттовскому анзацу (1.58) для случая $\nu = 1$, то поймем, что в появлении отрицательных степеней τ вне предела совпадения в действительности нет ничего странного, оно и в самом деле происходит — для этого достаточно разложить в ряд экспоненциальный фактор $\exp(-\sigma/2\tau)$! Некоторое чудо заключается как раз в обратном: в том, что в случае операторов типа Лапласа разложение теплового ядра вне предела совпадения устроено замечательным образом — все отрицательные степени τ пересуммируются в один-единственный экспоненциальный множитель $\exp(-\sigma/2\tau)$, регулярный в пределе совпадения $x = x'$ (так что, как это и должно быть, отрицательные степени τ в нем исчезают), но имеющий существенную

особенность при $\tau \rightarrow 0$. Во всяком случае, существование девиттовского анзаца никак не следует из размерных соображений, а потому с точки зрения одного анализа размерностей кажется просто случайным фактом.

Поэтому мы не можем *a priori* ожидать, что для минимальных операторов высшего порядка обязательно должно иметь место аналогичное пересуммирование. Это дает простор для широкого спектра различных мнений. С одной стороны, оптимист мог бы заявить, что возможность такого пересуммирования должна следовать из квазиклассического приближения. Это означало бы, что общая схема метода ДеВитта может быть без существенных изменений перенесена на случай операторов высшего порядка. С другой стороны, пессимист мог бы столь же обоснованно высказать сомнения в существовании какой-либо обозримой структуры вне предела совпадения, указав на то, что степени выражения $\sigma^a/\tau^{1/2\nu}$ могут приводить ко все более сложным тензорным выражениям при все более низких степенях τ .

Разрешить этот воображаемый спор способно только конкретное исследование структуры теплового ядра вне предела совпадения, что обуславливает важность рассматриваемой задачи. Полученные нами результаты показывают, что истина, как это обычно бывает, находится точно посередине — с одной стороны, пересуммирование безразмерных комбинаций $\sigma/\tau^{1/\nu}$ в некоторые новые спецфункции, аналогичные экспоненте в девиттовском анзаце, действительно происходит, и это приводит к по-своему красивой структуре внедиагональных разложений теплового ядра. Однако, с другой стороны, это пересуммирование больше не является полным — разложение осуществляется теперь в виде функционального ряда по специальным функциям, и при этом остаются члены, в которых отрицательные степени τ сохраняются в качестве свободных множителей.¹

Таким образом, обобщение девиттовского разложения (1.58) на случай минимальных операторов высшего порядка может быть построено. Причем оно может рассматриваться как градиентное разложение по фоновой размерности — т.е. как именно то, что необходимо для эффективной квантовой теории поля.

¹Что касается квазиклассического приближения, то его неприменимость в случае операторов высшего порядка была установлена нами в работе [89] и будет обсуждаться ниже в Разделе 2.3. Дело оказывается в том, что асимптотики теплового ядра можно получить методом перевала [102] в пределе $z = \sigma/2\tau^{1/\nu} \rightarrow \infty$. Однако при $\nu > 1$ в пределе совпадения $\sigma \rightarrow 0$ соответствующие функции оказываются сингулярными и поэтому не могут быть использованы в качестве анзаца.

Однако наличие в нем членов со сколь угодно большими отрицательными степенями τ делает невозможным построение системы рекуррентных соотношений на их коэффициенты, аналогичной (1.62). Несмотря на это, мы разработали сразу два согласованных друг с другом алгоритма для вычисления этих обобщенных коэффициентов — на основе так называемого «обобщенного преобразования Фурье» и по теории возмущений. В некотором смысле, наши методы дают даже больше, чем метод ДеВитта, ведь последний позволяет получать ответы в виде пределов совпадений $[\nabla^k \hat{a}_m]$, в то время, как мы способны сразу получать замкнутые выражения для коэффициентов, как двухточечных функций при $x \neq x'$.

2.1.2 Тепловое ядро степени лапласиана в плоском пространстве

Начнем с объяснения очень простой идеи, которая, тем не менее, стала стартовой точкой для всего последующего исследования. Сначала, в девиттовском анзаце (1.58) переопределим коэффициенты $\hat{a}_m(F|x, x')$, спрятав в них общий префактор $\Delta^{1/2}(x, x')$, а затем запишем разложение в виде функционального ряда:

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{K}_{d/2-m}(\tau, \sigma) \cdot \hat{a}_m(F|x, x'), \quad (2.3)$$

$$\text{где } \mathbb{K}_{\alpha}(\tau, \sigma) = \frac{\tau^{-\alpha}}{(4\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2\tau}\right). \quad (2.4)$$

Пока это просто переписывание, в котором нет ничего нового и которое поэтому не выглядит особенно полезным.

Однако теперь мы можем заметить, что, во-первых, функции $\mathbb{K}_{d/2-m}(\tau, \sigma)$ последовательным действием ковариантной производной ∇_a сводятся к единственной основной функции $\mathbb{K}_{d/2}(\tau, \sigma)$. И что, во-вторых, последняя есть просто тепловое ядро ковариантного лапласиана $\square = -g^{ab}\nabla_a\nabla_b$ в плоском d -мерном пространстве:

$$\mathbb{K}_{d/2}(\tau, \sigma) = e^{-\tau\square}\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \exp(-k^2\tau + i\mathbf{k}\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2\tau}\right), \quad (2.5)$$

где $\mathbf{x} = x^a$ и $\mathbf{k} = k_a$ есть d -мерные векторы, $\sigma = \mathbf{x}^2/2$, $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{\mathbf{k}^2}$ и $\mathbf{k}\mathbf{x} = k_a x^a$.

Соответственно, если мы хотим получить какое-то обобщение деви́ттовского разложения (1.58) на случай минимальных операторов высшего порядка, естественно вначале найти тепловое ядро для его члена старшего порядка, т.е. для степени лапласиана \square^ν , в плоском d -мерном пространстве. Оно также очевидным образом представляется в виде интеграла Фурье:

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \mathbf{x}) = e^{-\tau \square^\nu} \delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \exp(-k^{2\nu} \tau + i \mathbf{k}\mathbf{x}). \quad (2.6)$$

Прежде всего заметим, что тепловое ядро (2.6) инвариантно относительно $O(d)$ -вращений и однородно

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \mathbf{x}) = \mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \sigma), \quad (2.7)$$

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(c^{2\nu} \tau, c\mathbf{x}) = c^{-d} \mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \mathbf{x}), \quad (2.8)$$

где c есть произвольная константа. Поэтому оно должно иметь форму

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \sigma) = \frac{1}{(4\pi\tau^{1/\nu})^{d/2}} \mathcal{E}_{\nu, d/2} \left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}} \right), \quad (2.9)$$

где $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(-z)$ есть некоторая неизвестная пока функция отношения $z = \sigma/2\tau^{1/\nu}$. Поскольку она стоит на месте экспоненциальной функции в обычном выражении для теплового ядра (2.5), мы называем ее *обобщенной экспоненциальной функцией (ОЭФ)*.

Найдем разложение обобщенной экспоненты $\mathcal{E}_{\nu, d/2}(z)$ в ряд Тейлора с помощью следующего приема. Используя соотношения

$$\partial_a \sigma^k = k \sigma^{k-1} x_a, \quad \partial_a (\sigma^k x^a) = (d + 2k) \sigma^k, \quad (2.10)$$

легко проверить по индукции, что для произвольной функции $f(c\sigma)$, где c есть константа, имеет место следующее правило дифференцирования

$$\square^m f(c\sigma) = (2c)^m \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\Gamma(d/2 + m)}{\Gamma(d/2 + k)} (c\sigma)^k f^{(m+k)}(c\sigma), \quad (2.11)$$

где $f^{(k)}(z) = d^k f(z)/dz^k$, $\binom{m}{k} = m!/k!(m-k)!$ есть биномиальные коэффициенты, а $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера. Тогда для $f(z) = \mathcal{E}_{\nu, d/2}(z)$ и $c = -1/2\tau^{1/\nu}$ мы получим при $\sigma = 0$

$$\square^m \mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \sigma) \Big|_{\sigma=0} = \frac{\tau^{-\frac{d/2+m}{\nu}} \Gamma(d/2 + m)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d/2)} \mathcal{E}_{\nu, d/2}^{(m)}(0). \quad (2.12)$$

С другой стороны, эти величины могут быть легко вычислены непосредственно

$$\square^m \mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}) \Big|_{\boldsymbol{\sigma}=0} = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} k^{2m} \exp(-k^{2\nu} \boldsymbol{\tau}) = \frac{\boldsymbol{\tau}^{-\frac{d/2+m}{\nu}} \Gamma\left(\frac{d/2+m}{\nu}\right)}{(4\pi)^{d/2} \nu \Gamma(d/2)}. \quad (2.13)$$

Сравнивая между собой выражения (2.12) и (2.13), мы найдем все производные $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z)$ в $z = 0$ и таким образом получим ее разложение в ряд Тейлора

$$\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z) = \frac{1}{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+m}{\nu}\right)}{\Gamma(\alpha+m)} \frac{z^m}{m!}. \quad (2.14)$$

При $\nu = 1$ эти новые обобщенные экспоненты очевидным образом сводятся к обычной экспоненте

$$\mathcal{E}_{1, \alpha}(z) = \exp(z), \quad (2.15)$$

что обеспечивает согласованность результатов.

Следует заметить, что тепловое ядро степени лапласиана в плоском пространстве (2.6) впервые появилось в [103] и [51] в контексте теорий с высшими производными, последняя статья даже содержит разложение в ряд Тейлора (2.14). Позднее эти функции использовались в теории аномальной диффузии [104] и в приложении к моделям Хоравы-Лифшица [105]. Однако до наших работ [88; 89] не было проведено систематического исследования их свойств и отсутствовало понимание их потенциальной роли при обобщении девицтовской техники.

2.2 Свойства обобщенных экспонент

2.2.1 Представление через функции Бесселя

Другое интегральное представление выражает обобщенные экспоненциальные функции $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z)$ через функцию Бесселя $J_{\alpha}(z)$ или функцию Бесселя-Клиффорда $\mathcal{C}_{\alpha}(z)$. Последняя определяется рядом Тейлора

$$\mathcal{C}_{\alpha}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1+m)} \frac{z^m}{m!} \quad (2.16)$$

и связана с обычной функцией Бесселя $J_\alpha(z)$ уравнением, которое удаляет ее точку ветвления при $z = 0$

$$J_\alpha(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \mathcal{C}_\alpha(-z^2/4). \quad (2.17)$$

Поэтому функции Бесселя-Клиффорда не имеют особых точек и являются однозначными целыми функциями на всей комплексной плоскости z .

Представление $\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \sigma)$ через функции Бесселя следует из интегрирования по углам в интеграле по импульсному пространству (2.6), которое имеет вид

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \sigma) = \frac{S_{d-2}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dk k^{d-1} \exp(-k^{2\nu}\tau) \int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{d-2} e^{ikx \cos \theta}, \quad (2.18)$$

где $S_{d-2} = 2\pi^{(d-1)/2}/\Gamma(\frac{d-1}{2})$ есть объем $(d-2)$ -мерной единичной сферы, θ есть угол между векторами \mathbf{x} и \mathbf{k} в (2.6) и $x = |\mathbf{x}|$. Разлагая в ряд $\exp(ikx \cos \theta)$ и интегрируя по θ с учетом

$$2 \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{2\alpha-1} (\cos \theta)^{2\beta-1} d\theta = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \quad (2.19)$$

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z + 1) = 4^z \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \Gamma(z + 1), \quad (2.20)$$

получим

$$\int_0^\pi d\theta (\sin \theta)^{d-2} e^{ikx \cos \theta} = \sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \mathcal{C}_{\frac{d}{2}-1}(-k^2\sigma/2). \quad (2.21)$$

В результате тепловое ядро имеет следующее интегральное представление через функцию Бесселя-Клиффорда

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \sigma) = \frac{2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty k^{d-1} \exp(-k^{2\nu}\tau) \mathcal{C}_{\frac{d}{2}-1}(-k^2\sigma/2) dk. \quad (2.22)$$

После замены переменной интегрирования $\mu = k^{2\nu}\tau$ сравнение этого выражения с (2.9) приводит к соответствующему интегральному представлению для обобщенной экспоненты

$$\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z) = \frac{1}{\nu} \int_0^\infty d\mu \mu^{\alpha/\nu-1} e^{-\mu} \mathcal{C}_{\alpha-1}(z\mu^{1/\nu}). \quad (2.23)$$

Заметьте, что подстановка разложения (2.16) функции Бесселя-Клиффорда в (2.23) сразу же приводит обратно к разложению (2.14), что подтверждает правильность этого представления.

Другое наблюдение состоит в том, что функции $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ и $\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \mathbf{x})$ напрямую связаны с функциями Бесселя-Клиффорда (2.16) и Бесселя (2.17) в пределе $\nu \rightarrow \infty$. Действительно, заменяя в этом пределе $\Gamma((\alpha + m)/\nu)$ на $\nu/(\alpha + m)$ в разложении (2.14), мы имеем

$$\mathcal{E}_{\infty,\alpha}(z) = \mathcal{C}_{\alpha}(z), \quad (2.24)$$

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(\infty)}(\tau, \sigma) = \frac{1}{(2\pi x)^{d/2}} J_{d/2}(x). \quad (2.25)$$

Любопытно, что тепловое ядро оператора \square^{∞} перестает зависеть от параметра собственного времени τ в силу очевидного предела $\tau^{1/\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 1$.

2.2.2 Интеграл Меллина-Барнса и асимптотическое поведение

Различные свойства обобщенных экспонент следуют из представления этих функций через интеграл Меллина-Барнса. Это представление может быть получено превращением ряда Тейлора (2.14) в такой контурный интеграл по комплексной плоскости вспомогательного параметра s , что вычеты в простых полюсах подинтегрального выражения в точности порождают члены исходного ряда. Легко угадать, что такой интеграл должен иметь вид

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \varepsilon_{\nu,\alpha}(s) z^{-s}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{\nu,\alpha}(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{\alpha-s}{\nu}\right)}{\nu\Gamma(\alpha-s)}. \quad (2.26)$$

Тогда обратное преобразование Меллина очевидным образом дает

$$\int_0^{\infty} dz z^{s-1} \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z) = \varepsilon_{\nu,\alpha}(s). \quad (2.27)$$

Расположение полюсов функции $\varepsilon_{\nu,\alpha}(s)$ и контура C на комплексной плоскости s схематически изображены на рис. 2.1. Функция $\Gamma(s)$ имеет последовательность полюсов $l_k = -k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, уходящих налево, с вычетами

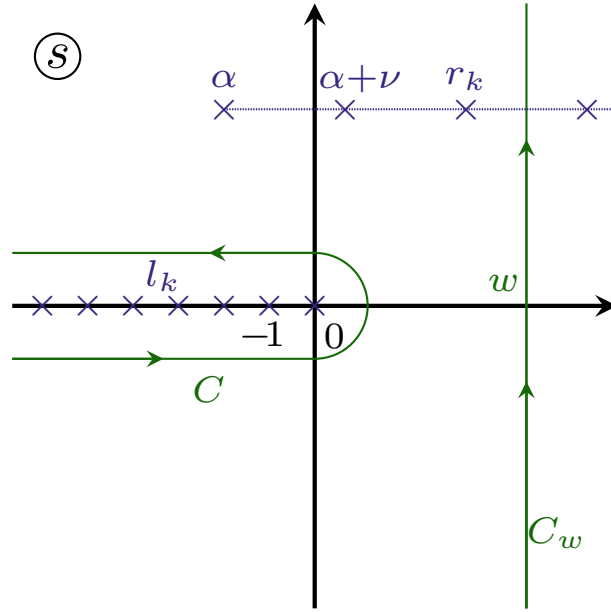


Рисунок 2.1 — Расположение полюсов функции $\varepsilon_{\nu,\alpha}(s)$ и контуров C и C_w на комплексной плоскости s .

$(-1)^k/k!$. А функция $\Gamma((\alpha - s)/\nu)$ имеет полюса в $r_k = \alpha + k\nu$, уходящие направо. Контур C начинается в $-\infty - i\varepsilon$, проходит под отрицательной вещественной полуосью, огибает 0 и возвращается назад в $-\infty + i\varepsilon$. Тогда интеграл (2.26) равен сумме вычетов в полюсах l_k , что в точности дает ряд Тейлора (2.14).

Возможно, однако, что не все точки $r_k = \alpha + k\nu$ являются полюсами функции $\varepsilon_{\nu,\alpha}(s)$, поскольку они могут сокращаться с полюсами функции $\Gamma(\alpha - s)$ в знаменателе. В частности, точка $r_0 = \alpha$ никогда не является полюсом $\varepsilon_{\nu,\alpha}(s)$. Возможно три случая:

1. если ν иррационально, то все остальные точки r_k являются полюсами;
2. если $\nu = p/q$ есть несократимая дробь, то сокращаются полюсы r_{qk} ;
3. если ν целое, то сокращаются все без исключения полюсы r_k .

Чтобы определить асимптотическое поведение функции $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z)$, мы деформируем контур интегрирования C в контур C_w , проходящий вертикально из $w - i\infty$ в $w + i\infty$, где $w \neq \operatorname{Re} r_k$, $w > 0$ (см. рис. 2.1). Тогда имеем

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z) = - \sum_{\operatorname{Re} r_k < w} \operatorname{Res}_{s=r_k} [\varepsilon_{\nu,\alpha}(s)z^{-s}] + \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} ds \varepsilon_{\nu,\alpha}(s)z^{-s}. \quad (2.28)$$

При $z \rightarrow \infty$ вычеты спадают как степени z^{-r_k} , в то время как оставшийся интеграл можно, очевидно, оценить как $O(z^{-w})$ в силу постоянного множителя z^{-w} в подинтегральном выражении. Тогда для нецелых ν , устремляя $w \rightarrow +\infty$,

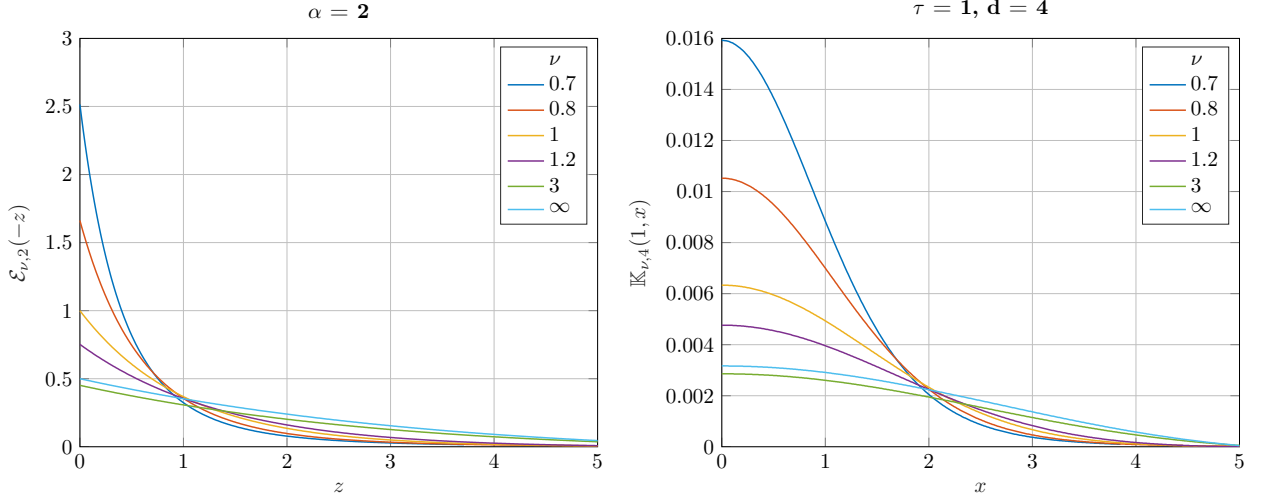


Рисунок 2.2 — Графики функций $\mathcal{E}_{\nu,2}(-z)$ и $\mathbb{K}_2^{(\nu)}(1,x)$ для различных значений параметра ν . Для $\nu = \infty$ функции даны формулами (2.24) и (2.25).

мы получим сумму всех вычетов, как степенной асимптотический ряд при $z \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z) = -z^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + m\nu)}{\Gamma(-m\nu)} \frac{(-z^{-\nu})^m}{m!} + O(z^{-\infty}). \quad (2.29)$$

Заметим, что сокращение полюсов в образе при преобразовании Меллина (2.27) приводит к исчезновению соответствующего члена в разложении (2.29). В случае целых ν все без исключения члены исчезают. Это означает, что в этом случае функция $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z)$ спадает быстрее любой степени z , т.е. экспоненциальным образом. Тогда функция $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z)$ в точности равна интегралу по контуру C_w для любого положительного w , и ее экспоненциальное асимптотическое поведение определяется этим интегралом. Этот случай является очень выделенным, и мы детально рассмотрим его далее в разделе 2.3.

2.2.3 Другие свойства обобщенных экспонент

Свойства определенных выше обобщенных экспонент тесно связаны со свойствами отношений гамма-функций и их произведений, которые в действительности являются частью теории Ψ -функций Фокса–Райта [106; 107] и более общих H -функций Фокса [108–112]. Именно, наши обобщенные экспоненциальные функции, определенные своим рядом Тейлора (2.14), являются частным

случаем функций Фокса–Райта ${}_p\Psi_q\left[\begin{smallmatrix}(a,A) \\ (b,B)\end{smallmatrix}\middle|z\right]$ с параметрами, определяемыми следующим образом

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z) = \frac{1}{\nu} {}_1\Psi_1\left[\begin{smallmatrix}(\alpha/\nu, 1/\nu) \\ (\alpha, 1)\end{smallmatrix}\middle|z\right]. \quad (2.30)$$

Для полноты мы кратко излагаем основные факты об этих функциях в Приложении А, в частности потому, что их теория дает тонкие детали об области параметров ν и α , при которых функция $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ хорошо определена.

Для обобщенной экспоненциальной функции $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ мы имеем представление через интеграл Меллина–Барнса (2.26) и два степенных ряда: первый ряд (2.14) по степеням z вблизи 0 и второй ряд (2.29) по степеням $1/z$ вблизи ∞ . Как следует из общей теории H -функций (см. формулы (A.5)–(A.6) и утверждение после них), возможны три случая:

1. При $\nu > 1/2$ первый ряд абсолютно сходится на всей комплексной плоскости z , и поэтому $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ есть целая функция и имеет существенную особенность при $z = \infty$, в то время как второй ряд расходится и является асимптотическим при $z \rightarrow \infty$.
2. Когда $\nu < 1/2$ ситуация прямо противоположна: ряд (2.29) абсолютно сходится на всей комплексной плоскости z , кроме существенной особенности в точке $z = 0$, а ряд (2.14) расходится и является асимптотическим при $z \rightarrow 0$.
3. Наконец, для критического значения $\nu = 1/2$ ряд (2.14) сходится внутри круга $|z| < 1/4$ и расходится вне его, и наоборот ряд (2.29) сходится вне этого круга и расходится внутри него.

Оказывается, что для критического значения $\nu = 1/2$ ряд (2.14) может быть просуммирован аналитически². Действительно, используя формулу удвоения Лежандра (2.20) и известное разложение

$$(1 - z)^{-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma(\gamma + m) \frac{z^m}{m!}, \quad (2.31)$$

мы можем легко найти, что

$$\mathcal{E}_{\frac{1}{2},\alpha}(z) = \frac{4^\alpha}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2} + m\right) \frac{(4z)^m}{m!} = \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{2\sqrt{\pi} (1/4 - z)^{\alpha+1/2}}. \quad (2.32)$$

Таким образом, при $\nu = 1/2$ обобщенная экспонента не только имеет степенную асимптотику, но и в действительности является степенной функцией. Ряд

²Автор благодарен за указание на этот факт анонимному рецензенту Phys. Rev. D.

(2.14) сходится внутри круга $|z| > 1/4$ в силу существования полюса в точке $z = 1/4$. Нетрудно проверить, что в этом случае все четные члены ряда (2.29) исчезают, а нечетные действительно сходятся к функции (2.32) вне круга $|z| > 1/4$. В результате оператор $\sqrt{\square}$ в плоском d -мерном пространстве имеет следующее тепловое ядро

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(1/2)}(\tau, \sigma) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{\tau}{(\tau^2 + 2\sigma)^{\frac{d+1}{2}}}. \quad (2.33)$$

Это выражение связано с приложениями эффективного действия к голографии [113; 114] и миру-на-бране [115–117], поскольку оно представляет собой безмасштабный предел простейшего brane-to-bulk пропагатора $e^{-\tau\sqrt{M^2+\square}}\delta(\mathbf{x})$, $M \rightarrow 0$, [116; 117], и может быть интересно в контексте дискуссии о дробных степенях лапласиана в [118].

Члены ряда Тейлора (2.14) функции $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ хорошо определены при всех комплексных значениях

$$\alpha \neq -n - k\nu, \quad \text{где } n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

Заметим, однако, что особенности в точках $\alpha = -n$ (а потому и во всех точках при целых ν) являются устранимыми, поскольку полюсы гамма-функций в числителе и знаменателе взаимно сокращаются. Используя разложение $\Gamma(-n + \varepsilon) \sim (-1)^n/n!\varepsilon$, мы можем переопределить коэффициенты в (2.14)

$$\frac{\Gamma(-n/\nu)}{\nu\Gamma(-n)} = \begin{cases} (-1)^{-n+n/\nu} \frac{n!}{(n/\nu)!}, & \text{если } n/\nu = 0, 1, \dots, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.35)$$

Таким образом, для целых ν функция $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ является целой функцией переменной z при всех значениях параметра α , а для нецелых $\nu > 1/2$ это целая функция при всех значениях α кроме $\alpha = -n - k\nu \neq -m$, где k, n и m целые положительные. Следовательно, функции $\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \sigma)$ хорошо определены не только для целых ν и d , но также для нецелых ν и d , удовлетворяющим этим условиям.

Графики функций $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ и $\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \mathbf{x})$ для различных значений их параметров, полученные численным суммированием ряда (2.14) в системе MATLAB, показаны на рис. 2.2–2.4. Важное отличие от обычного случая монотонного экспоненциального падения при $\nu = 1$ состоит в том, что тепловые ядра при $\nu \neq 1$ начинают осциллировать как функции параметра $z = \sigma/2\tau^{1/\nu}$.

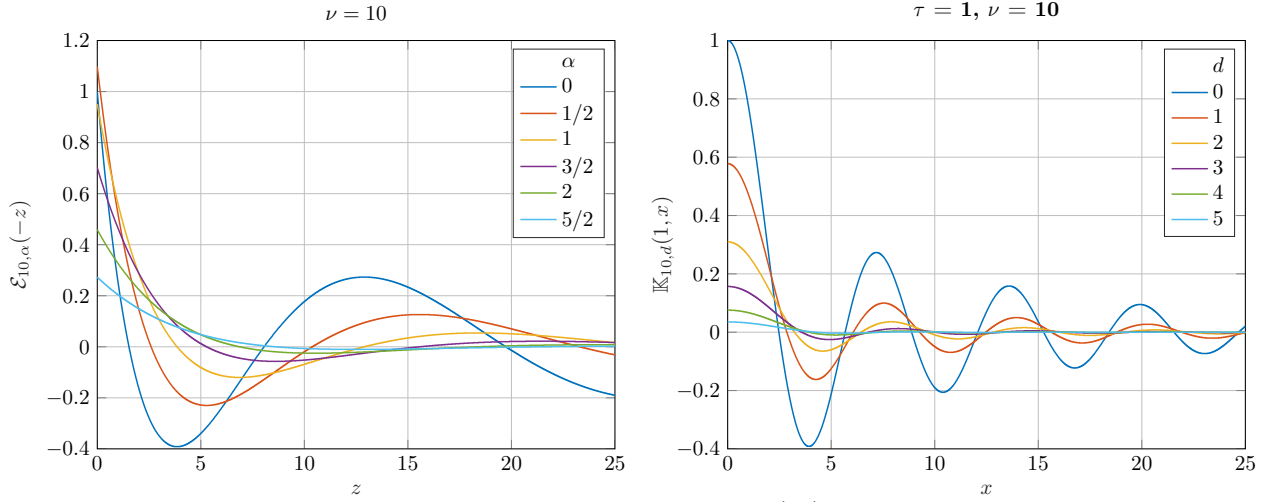


Рисунок 2.3 — Графики функций $\mathcal{E}_{10, \alpha}(-z)$ и $\mathbb{K}_{d/2}^{(10)}(1, x)$ при разных значениях параметров α и d .

Другое интересное свойство функций $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z)$ заключается в следующем простом правиле дифференцирования

$$\frac{d^\beta}{dz^\beta} \mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z) = \mathcal{E}_{\nu, \alpha + \beta}(z). \quad (2.36)$$

Для целых β оно может быть проверено непосредственно дифференцированием определения (2.30). Однако это соотношение имеет смысл также для всех таких β , что $\mathcal{E}_{\nu, \alpha + \beta}(z)$ является хорошо определенной функцией для нецелых ν (и вообще для всех комплексных β , если ν целое). Для целых отрицательных β оно дает значение главного интеграла функции $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z)$. Для нецелых β символ d^β/dz^β следует понимать как некоторую операцию дробного интегро-дифференцирования. Таким образом, для каждого ν в диапазоне $1/2 < \nu \leq \infty$ семейство функций $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z)$ является замкнутым относительно операции интегро-дифференцирования.

При нецелых ν выражение (2.9) есть решение уравнения теплопроводности, в котором локальный оператор \square^ν следует понимать как псевдо-дифференциальный оператор, определенный с помощью преобразования Фурье [119]. Соответствующие уравнения называются уравнениями аномальной диффузии и широко обсуждались, например, в [104; 120–123]. Однако во всех этих работах уравнения с дробными производными обычно рассматривались в $(1+1)$ -мерном (τ, \mathbf{x}) -пространстве, т.е. в случае $d = 1$ в наших обозначениях.

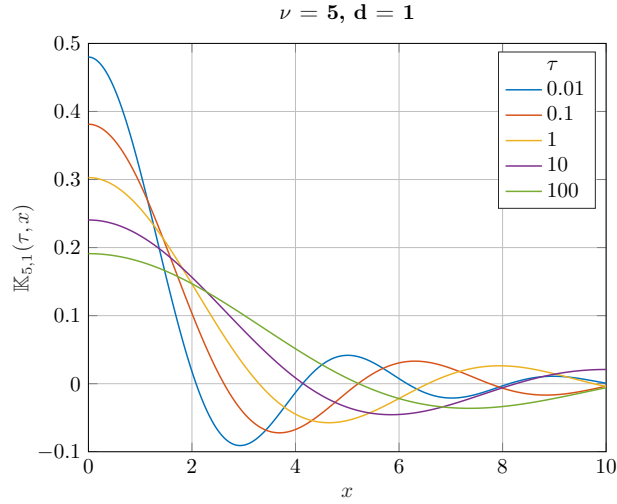


Рисунок 2.4 — Графики функции $\mathbb{K}_{1,2}^{(5)}(\tau, x)$ для различных значений параметра собственного времени τ .

2.3 Целые степени лапласиана и квазиклассическое приближение

Как мы видим, асимптотическое поведение обобщенных экспонент $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(-z)$ при $z \rightarrow \infty$ кардинально различается для случаев нецелых и целых значений параметра ν . Оно имеет степенной характер для нецелых ν , соответствующих нелокальным псевдо-дифференциальным операторам \square^ν , и экспоненциальный характер $O(z^{-\infty})$ для целых ν , соответствующих локальным дифференциальным операторам порядка 2ν .

Но для теплового ядра (2.9) этот предел связан с квазиклассическим пределом $z = \mathbf{x}^2/4\tau^{1/\nu} \rightarrow \infty$, в котором параметр собственного времени $\tau \rightarrow 0$ играет роль постоянной Планка \hbar . Как мы обсуждали в Разделе 1.4, квазиклассическое приближение начинается с анзаца Паули-Ван Флека (1.59), который определяется полной функцией Гамильтона-Якоби $S(\tau|\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для частицы с гамильтонианом $F(\mathbf{p})$. Для степени лапласиана этот гамильтониан равен $F(\mathbf{p}) = (-\mathbf{p}^2)^\nu$, откуда сразу же получаем

$$S(\tau|\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (-1)^{\frac{\nu-1}{2\nu-1}} (2\nu-1) \left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{4\nu^2\tau^{1/\nu}} \right)^{\frac{\nu}{2\nu-1}}, \quad (2.37)$$

что, в свою очередь, приводит к следующему абсолютному значению предэкспоненциального фактора

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left| \det \frac{\partial^2 S(\tau|\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial x^a \partial y^b} \right|^{1/2} = \frac{1}{(4\pi\tau^{1/\nu})^{d/2}} \left(\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}{4\tau^{1/\nu}} \right)^{-\frac{d}{2} \frac{\nu-1}{2\nu-1}} \frac{\nu^{-\frac{d}{2} \frac{1}{2\nu-1}}}{\sqrt{2\nu-1}}. \quad (2.38)$$

Относительно фазового множителя, который следует задать здесь с помощью правильного выбора ветви дробной степени, алгоритм Паули–Ван Флека не дает никакой информации, что резко отличается от тривиального случая $\nu = 1$. Также он не предписывает никакой определенной линейной комбинации этих ветвей в асимптотике теплового ядра. Ниже она будет получена применением двух различных подходов — общей техники H -функций Фокса и метода перевала.

Заметим, что в виду обсуждения в Разделе 2.2.2 это квазиэкспоненциальное поведение в принципе невозможно для нецелых ν , характеризующихся степенным поведением. Таким образом, кажется правдоподобным, что стандартное квазиклассическое приближение полностью неприменимо к нелокальным операторам \square^ν . Поэтому всюду далее в этом разделе мы будем рассматривать исключительно случай целых положительных степеней. Чтобы подчеркнуть это, далее мы будем обозначать степень лапласиана как N , когда она целая, и как ν , когда она может быть как целой, так и нецелой. Цель этого раздела состоит в том, чтобы найти асимптотическое разложение теплового ядра для случая с высшими производными с помощью альтернативного метода, который позволит выделять правильные комплексные ветви, и сравнить их с квазиклассическим результатом приведенного выше вида.

2.3.1 Экспоненциальные асимптотики для обобщенных экспонент целого порядка

Асимптотическое разложение интеграла (2.26) является частью общей теории Ψ -функций Фокса–Райта и H -функций Фокса, кратко очерченной в Приложении А. Идея этого разложения состоит в использовании преобразования Меллина гамма-функций

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} ds \Gamma(\mu s - K) z^{-s} = \frac{1}{\mu} z^{-K/\mu} \exp\left(-z^{1/\mu}\right), \quad (2.39)$$

которое для $\mu > 0$ и растущего $K > 0$ будет генерировать убывающие члены экспоненциального разложения при $z \rightarrow \infty$. Однако выражение, стоящее под интегралом в (2.26), — это не просто гамма-функция, как в формуле выше,

а их нетривиальное отношение. Это отношение $\varepsilon_{N,\alpha}(s)$, которое определяется формулой (2.27), тем не менее может быть разложено в ряд по гамма-функциям приведенного выше типа, так что интегрирование по вспомогательной переменной s может быть успешно проведено. Для этого мы, прежде всего, воспользуемся формулой отражения Эйлера

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad (2.40)$$

чтобы сделать коэффициенты перед переменной интегрирования s в аргументах всех гамма-функций положительными (как это имеет место в формуле (2.39)),

$$\varepsilon_{\nu,\alpha}(s) = \frac{1 \sin \pi(s - \alpha)}{\nu \sin \frac{\pi}{\nu}(s - \alpha)} \tilde{\varepsilon}_{\nu,\alpha}(s), \quad (2.41)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\nu,\alpha}(s) = \nu \frac{\Gamma(s)\Gamma(s - \alpha)}{\Gamma\left(\frac{s-\alpha}{\nu}\right)}. \quad (2.42)$$

После этого последовательность полюсов каждой гамма-функции убегает по комплексной плоскости s налево.

Для целых N отношение синусов сводится к сумме комплексных экспонент

$$\frac{\sin(N\varphi)}{\sin \varphi} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(2j+1-N)\varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi}{N}(s - \alpha), \quad (2.43)$$

Подстановка (2.41) в преобразование Меллина (2.26) приводит к сумме

$$\mathcal{E}_{N,\alpha}(-z) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i\omega_j \alpha} \tilde{\mathcal{E}}_{N,\alpha}(-e^{i\omega_j} z), \quad (2.44)$$

$$\omega_j = \pi \frac{1 - N + 2j}{N}, \quad (2.45)$$

с фазовыми множителями, стоящими одновременно в коэффициентах суммы и в аргументах новых функций $\tilde{\mathcal{E}}_{\nu,\alpha}(-e^{i\omega_j} z)$, которые могут быть названы *обобщенными экспоненциальными функциями второго рода*. Они имеют вид

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\nu,\alpha}(-z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \tilde{\varepsilon}_{\nu,\alpha}(s) z^{-s}, \quad \text{где} \quad (2.46)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\nu,\alpha}(s) = \int_0^\infty dz z^{s-1} \tilde{\mathcal{E}}_{\nu,\alpha}(-z) = \nu \frac{\Gamma(s)\Gamma(s - \alpha)}{\Gamma\left(\frac{s-\alpha}{\nu}\right)}. \quad (2.47)$$

Ключевой момент вычисления состоит в том, что теперь можно применить формулу (A.7) из Приложения A, чтобы разложить отношение гамма-функций в асимптотический ряд по отдельным гамма-функциям с убывающими аргументами. Параметры задачи имеют вид $p = 1$, $A_1 = 1/\nu$, $a_1 = -\alpha/\nu$, $q = 2$, $B_1 = B_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = -\alpha$, что приводит к следующим значениям параметров (A.5), (A.6) и (A.8), определенных в Приложении,

$$\mu = \frac{2\nu - 1}{\nu}, \quad a = \alpha \frac{\nu - 1}{\nu}, \quad C = \frac{(2\nu - 1)^{\alpha \frac{\nu-1}{\nu} + \frac{1}{2}}}{\nu^{1+\alpha}}. \quad (2.48)$$

Тогда формула (A.7) генерирует асимптотическое разложение

$$\tilde{\epsilon}_{\nu,\alpha}(s) = \frac{(2\nu - 1)^{a-\mu s+1/2}}{\nu^{\alpha-2s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} E_m \Gamma(\mu s - a - m), \quad (2.49)$$

в котором коэффициенты E_m не зависят от переменной интегрирования s . Эти коэффициенты начинаются с $E_0 = 1$ и могут быть систематически вычислены с помощью процедуры, описанной в Приложении A.1. Сущность этого разложения состоит в том, что для больших s оно состоит из убывающих членов, каждый из которых меньше предыдущего в силу очевидного соотношения $\Gamma(\mu s - a - m - 1) = \Gamma(\mu s - a - m)/(\mu s - a - m - 1)$.

Преобразование Меллина (2.46) выражения (2.49) с учетом (2.39) приводит к следующему асимптотическому разложению обобщенных экспонент второго рода

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\nu,\alpha}(-z) = \nu \frac{(\nu z^{1-\nu})^{-\frac{\alpha}{2\nu-1}}}{\sqrt{2\nu-1}} \exp \left[-(2\nu - 1) \left(\frac{z}{\nu^2} \right)^{\frac{\nu}{2\nu-1}} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_m}{(2\nu - 1)^m} \left(\frac{\nu^2}{z} \right)^{\frac{m\nu}{2\nu-1}}. \quad (2.50)$$

В отличие от обобщенных экспонент первого рода $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$, которые не имеют особенностей, функция $\tilde{\mathcal{E}}_{\nu,\alpha}(z)$ имеет особую точку в $z = 0$. Однако она всегда имеет простое экспоненциальное (т.е. не степенное) асимптотическое поведение (2.50) при $z \rightarrow \infty$. Во-вторых, она монотонна при $-\infty < z < 0$ без осцилляций, характерных для обобщенных экспонент первого рода. Более того, можно сказать что источником этих осцилляций являются синусы в (2.41) и фазовые множители в (2.45).

Таким образом, в силу разложения (2.45) асимптотический ряд для обобщенных экспонент первого рода целого порядка N окончательно принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{N,\alpha}(-z) &= \frac{N^{-\frac{\alpha}{2N-1}} z^{-\alpha \frac{N-1}{2N-1}}}{\sqrt{2N-1}} \sum_{j=0}^{N-1} \exp \left[-(2N-1) e^{i\varphi_j} \left(\frac{z}{N^2} \right)^{\frac{N}{2N-1}} + i\varphi_j \alpha \right] \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_m}{(2N-1)^m} \left(\frac{N^2}{z} \right)^{\frac{mN}{2N-1}} e^{-i\varphi_j m}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где как амплитуды, так и фазы зависят от комплексных множителей (2.45)

$$\varphi_j = \frac{N}{2N-1} \omega_j = \pi \frac{1-N+2j}{2N-1}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.52)$$

Следовательно, выражение (2.9) с $z = \sigma/2\tau^{1/N}$ приводит к асимптотикам теплового ядра про фиксированном τ и $\sigma \rightarrow \infty$ или при фиксированном σ и $\tau \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{d/2}^{(N)}(\tau, \sigma) &= \frac{1}{(4\pi\tau^{1/N})^{d/2}} \left(\frac{\sigma}{2\tau^{1/N}} \right)^{-\frac{d}{2} \frac{N-1}{2N-1}} \frac{N^{-\frac{d}{2} \frac{1}{2N-1}}}{\sqrt{2N-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_m}{(2N-1)^m} \\ &\times \left(\frac{2N^2\tau^{1/N}}{\sigma} \right)^{\frac{mN}{2N-1}} \sum_{j=0}^{N-1} \exp \left[-(2N-1) e^{i\varphi_j} \left(\frac{\sigma}{2N^2\tau^{1/N}} \right)^{\frac{N}{2N-1}} \right] e^{i\varphi_j (\frac{d}{2} - m)}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Здесь фазовые множители $e^{i\varphi_j}$ совпадают со множеством дробных степеней $(-1)^{(N-1)/(2N-1)}$ в коэффициенте функции Гамильтона–Якоби (2.37). Это подтверждает правильность квазиклассического анзаца (1.59) вместе с установлением конкретной линейной комбинации его комплексных ветвей.

Ведущий порядок этого разложения состоит из двух комплексно-сопряженных ветвей, соответствующих максимальной вещественной части экспоненты с $j = 0$ и $j = N-1$ и фазовыми множителями $\exp(\mp i\varphi)$,

$$\varphi = \varphi_{N-1} = -\varphi_0 = \pi \frac{N-1}{2N-1}, \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{d/2}^{(N)}(\tau, \sigma) &\simeq \frac{1}{(4\pi\tau^{1/N})^{d/2}} \left(\frac{\sigma}{2\tau^{1/N}} \right)^{-\frac{d}{2} \frac{N-1}{2N-1}} \frac{N^{-\frac{d}{2} \frac{1}{2N-1}}}{\sqrt{2N-1}} \\ &\times \exp \left[-(2N-1) e^{i\varphi} \left(\frac{\sigma}{2N^2\tau^{1/N}} \right)^{\frac{N}{2N-1}} + \frac{i\varphi d}{2} \right] + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.55)$$

с поправками в виде растущих дробных степеней $\tau^{1/(2N-1)} \rightarrow 0$.

2.3.2 Метод перевала

Альтернативно этот результат может быть воспроизведен методом перевала, который является основой квазиклассического приближения с малым параметром $\tau \rightarrow 0$. Замена переменных $\mathbf{p} = \tau^{1/N} \mathbf{k}$, $\mathbf{y} = \tau^{(N-1)/N} \mathbf{x}$, приводит интеграл по импульсному пространству (2.6) к форме

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(N)}(\tau, \sigma) = \frac{1}{(2\pi\tau^{1/N})^d} \int d^d p e^{-S(\mathbf{p})/\tau}, \quad \text{где } S(\mathbf{p}) = p^{2N} - i\mathbf{p}\mathbf{y}. \quad (2.56)$$

Его асимптотики в пределе $\tau \rightarrow 0$ следуют из седловых точек комплексного действия $S(\mathbf{p})$ в которых оно стационарно, $\partial S(\mathbf{p})/\partial p_a = 0$. Эти $2N - 1$ точек имеют вид

$$\mathbf{p}_j = \left[i^{\frac{1}{2N-1}} \right]_j \left(\frac{\tau^{\frac{N-1}{N}} |\mathbf{x}|}{2N} \right)^{\frac{1}{2N-1}} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad (2.57)$$

где $\left[i^{\frac{1}{2N-1}} \right]_j$, $j = 0, 1, \dots, 2N - 2$, есть $2N - 1$ корней из мнимой единицы i . Ведущий вклад от каждой такой седловой точки дается стандартным выражением

$$\mathbb{K}_{N,d}^{(j)}(\tau, \sigma) = \frac{e^{-S(\mathbf{p})/\tau}}{(2\pi\tau^{1/N})^d} \left(\det \frac{1}{2\pi\tau} \frac{\partial^2 S(\mathbf{p})}{\partial p_a \partial p_b} \right)^{-1/2} \Bigg|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_j}, \quad (2.58)$$

что дает

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{N,d}^{(j)}(\tau, \sigma) &= \frac{1}{(4\pi\tau^{1/N})^{d/2}} \left(\frac{\sigma}{2\tau^{1/N}} \right)^{-\frac{d}{2} \frac{N-1}{2N-1}} \frac{N^{-\frac{d}{2} \frac{1}{2N-1}}}{\sqrt{2N-1}} \\ &\times \exp \left[-(2N-1) e^{i\varphi_j} \left(\frac{\sigma}{2N^2 \tau^{1/N}} \right)^{\frac{N}{2N-1}} + \frac{i\varphi_j d}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.59)$$

где множество фазовых множителей определяется соотношениями

$$e^{i\varphi_j} = -i \left[i^{\frac{1}{2N-1}} \right]_j, \quad \varphi_j = \pi \frac{1 - N + 2j}{2N - 1}, \quad (2.60)$$

$j = 0, 1, \dots, 2N - 2$, при этом количество точек в (2.52) фактически возрастает до $2N - 1$.

Наиболее сложной частью метода перевала является доказательство существования правильного контура наискорейшего спуска, вдоль которого

осуществляется интегрирование, и выбор соответствующих седловых точек, которые должны давать вклад в искомую асимптотику [124]. В частном случае интеграла (2.6) имеется очевидная подсказка для их выбора, подтверждаемая строгим анализом в [124]. Она состоит в том, что точки с $\cos \varphi_j < 0$, $j \geq N$ дают вклады, экспоненциально растущие вместе с σ , что противоречит известному $\sigma^{-\infty}$ спаду при $\sigma \rightarrow \infty$. Поэтому только оставшиеся N точек с $j \leq N - 1$ могут давать вклад в асимптотику интеграла. Заметим, что их фазовые множества совпадают с теми, что были ранее определены соотношениями (2.45) и (2.52). Таким образом, они соответствуют множеству членов в разложении обобщенных экспонент первого рода по обобщенным экспонентам второго рода. Поэтому метод перевала приводит в точности к тому же самому результату, что и применение преобразования Меллина в теории H -функций Фокса.

2.3.3 Неоднородность квазиклассического приближения

Квазиклассическое разложение (2.55) ясно демонстрирует кардинальное отличие операторов высшего порядка от случая операторов второго порядка $N = 1$. Для $N > 1$ в разложении по малому собственному времени (2.55), $\tau \rightarrow 0$, невозможно перейти к пределу $\sigma \rightarrow 0$, поскольку в разложение входят отрицательные степени σ .

В частности, оно не воспроизводит начальное условие $\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(0, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$. Само собой разумеется, что точное тепловое ядро удовлетворяет этому условию, т.к. для каждой гладкой функции $f(\mathbf{x})$

$$\int d^d x \mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int d^d y \mathcal{E}_{\nu, \frac{d}{2}} \left(-\frac{\mathbf{y}^2}{4} \right) f(\tau^{1/\nu} \mathbf{y}) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} f(0), \quad (2.61)$$

поскольку

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int d^d y \mathcal{E}_{\nu, \alpha} \left(-\frac{\mathbf{y}^2}{4} \right) = \frac{1}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dz z^{\frac{d}{2}-1} \mathcal{E}_{\nu, \alpha}(-z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-d/2}{\nu}\right)}{\nu \Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \frac{d}{2}} 1, \quad (2.62)$$

где мы использовали свойство (2.27). Интересно, что при воспроизведении этого результата для целого N каждый из N членов разложения (2.45) вносит

в него равную долю $1/N$, поскольку их зависимость от ω_j выпадает в пределе $\alpha \rightarrow d/2$,

$$\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int d^d y \frac{e^{i\alpha\omega_j}}{N} \tilde{\mathcal{E}}_{\nu,\alpha} \left(-e^{i\omega_j} \frac{\mathbf{y}^2}{4} \right) = \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha-d/2}{N}\right)} e^{i\omega_j(\alpha-d/2)} \xrightarrow{\alpha \rightarrow d/2} \frac{1}{N}. \quad (2.63)$$

В то же самое время, если мы пытаемся воспроизвести этот результат используя N ветвей (2.59) квазиклассического разложения, соответствующим различным членам приведенного выше разложения

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(N)}(\tau, \sigma) = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{K}_{N,d}^{(j)}(\tau, \sigma) \left[1 + O\left(\tau^{\frac{1}{2N-1}}\right) \right], \quad (2.64)$$

то результат будет совершенно другим. Каждая ветвь $\mathbb{K}_{N,d}^{(j)}(\tau, \sigma)$ имеет особенность в $\sigma = 0$, но эта особенность интегрируема. Однако результат этого интегрирования отличается от (2.63)

$$\int d^d x \mathbb{K}_{N,d}^{(j)}(\tau, \sigma) = \frac{N^{\frac{d}{2}-1}}{(2N-1)^{\frac{d-1}{2}}}. \quad (2.65)$$

Хотя все $\mathbb{K}_{N,d}^{(j)}(\tau, \sigma)$ с $j \neq 0$ и $j \neq N-1$ являются экспоненциально подавленными, и поэтому должны быть отброшены в асимптотическом разложении, все их интегралы (2.65) равны между собой.

Даже более вопиющее несоответствие между точным тепловым ядром и его асимптотикой состоит в том, что, хотя все члены последней сингулярны в пределе $\sigma \rightarrow 0$, сама обобщенная экспонента (2.14) и точное ядро $\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \mathbf{x})$ хорошо определены в этом пределе

$$\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, 0) = \frac{1}{(4\pi\tau^{1/\nu})^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2\nu)}{\nu\Gamma(d/2)}. \quad (2.66)$$

Разложение по малому параметру собственного времени в этом пределе совпадения, нахождение которого является основной целью техники Сили–Гилки [10–12; 18], осуществляется по степеням $\tau^{1/\nu}$, в то время как разложение (2.55) идет по совсем другим дробным степеням $\tau^{1/(2N-1)}$.

Все эти многочисленные несоответствия проистекают просто из того, что рассмотренное выше квазиклассическое приближение описывает поведение точного ядра $\mathbb{K}_{d/2}^{(N)}(\tau, \sigma)$ (2.9) в пределе $z = \sigma/2\tau \rightarrow \infty$, а потому, вообще говоря, вовсе не обязательно применимо в противоположном ему пределе совпадения

$\sigma \rightarrow 0$. Исключением тут является только очень специальный случай операторов типа Лапласа $N = 1$ просто потому, что для него точное ядро (2.5) совпадает с квазиклассическим приближением к нему, которое поэтому регулярно в пределе совпадения $\sigma \rightarrow 0$. Во всех же остальных случаях при $N \neq 1$ хотя, как мы показали в этом разделе, согласованное квазиклассическое приближение при $\sigma \rightarrow \infty$ тоже можно построить, оно не имеет большого физического интереса, поскольку не описывает интересующий нас предел совпадения $\sigma \rightarrow 0$. Но в этом нет никакой беды, поскольку теперь у нас в руках имеется гораздо более мощный инструмент — точные ядра $\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \sigma)$, построенные в терминах обобщенных экспонент $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z)$ и потому одинаково хорошо описывающих оба противоположных предела, как $\sigma \rightarrow \infty$, так и $\sigma \rightarrow 0$.

Заметим, что важным преимуществом рассматриваемого метода является то, что он непосредственно применим не только при целых, но и при произвольных нецелых ν . Это может быть важно, в частности, в нелокальных суперперенормируемых моделях модифицированной гравитации [96; 97; 125; 126], при аналитической регуляризации фейнмановских интегралов [127] или для вычисления контрчленов в моделях типа Хоравы-Лифшица. Например, в $(3 + 1)$ -мерной гравитации Хоравы кубические по пространственной кривизне контрчлены получаются из теплового ядра квадратного корня из неминимального дифференциального оператора бго порядка [45].

2.4 Степени оператора типа Лапласа

Однако может возникнуть вопрос: даже если мы знаем, что обобщенная экспонента возникает в тепловом ядре $\mathbb{K}_{d/2}^{(\nu)}(\tau, \sigma)$ (2.9) степени лапласиана в случае плоского пространства, откуда возникает уверенность, что эти функции играют важную роль в общем случае произвольных минимальных операторов на искривленном фоне? Частичным ответом на него является задача о нахождении разложения теплового ядра для степени оператора типа Лапласа (которая, помимо этого, ляжет в основу метода, развиваемого в разделе 3.3).

Итак, пусть нам дан некоторый оператор типа Лапласа $\hat{H}(\nabla)$ (1.57), разложение теплового ядра которого имеет вид (2.3). Мы хотим получить аналогичное разложение теплового ядра для степени этого оператора $\hat{F}(\nabla) = \hat{H}^\nu(\nabla)$.

Это можно довольно просто сделать с помощью технического приема с прямым/обратным преобразованиями Меллина (1.25)-(1.26).

Вначале, подставив разложение (2.3) в преобразование (1.25) и проинтегрировав ряд почленно, получим разложение для функции Грина:

$$\hat{G}_{H^s}(x, x') = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{G}_{d/2-m}(s, \sigma) \cdot \hat{a}_m(H|x, x'), \quad (2.67)$$

где базисные функции Грина $\mathbb{G}_{\alpha}(s, \sigma)$ даются легко берущимся интегралом

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\alpha}(s, \sigma) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{s-1} \mathbb{K}_{\alpha}(\tau, \sigma) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(s)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{s-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\sigma}{2\tau}\right) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(s)} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{s-\alpha} \int_0^{\infty} dz z^{\alpha-s-1} e^{-z} = \frac{\Gamma(\alpha-s)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(s)} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{s-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Здесь при переходе от первой ко второй строке мы сделали замену $z = \sigma/2\tau$, а затем воспользовались определением гамма-функции.

Теперь в свою очередь подставим уже разложение (2.67) в преобразование (1.26) для степени оператора \hat{H}^{ν} . Проинтегрировав ряд почленно, найдем следующее разложение теплового ядра:

$$\hat{K}_{H^{\nu}}(\tau|x, x') = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{K}_{d/2-m}^{(\nu)}(\tau, \sigma) \cdot \hat{a}_m(H|x, x'), \quad (2.69)$$

где новые базисные ядра $\mathbb{K}_{\alpha}^{(\nu)}(\tau, \sigma)$ даются интегралом

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{\alpha}^{(\nu)}(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} ds \tau^{-s} \Gamma(s) \mathbb{G}_{\alpha}(\nu s, \sigma) \\ &= \frac{(4\pi)^{-\frac{d}{2}}}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} ds \tau^{-s} \Gamma(\alpha - \nu s) \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\nu s)} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{\nu s - \alpha} \\ &= \frac{\tau^{-\alpha/\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{w}-i\infty}^{\tilde{w}+i\infty} d\mu \frac{\Gamma(\mu) \Gamma\left(\frac{\mu-\alpha}{\nu}\right)}{\nu \Gamma(\mu - \alpha)} z^{-\mu} = \frac{\tau^{-\alpha/\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \mathcal{E}_{\nu, \alpha} \left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}}\right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Здесь при переходе от второй к третьей строчке мы совершили замены $z = \sigma/2\tau^{1/\nu}$ и $\mu = \alpha - \nu s$, а при переходе к последней строчке — воспользовались представлением обобщенной экспоненты в виде интеграла Меллина-Барнса (2.39).

Таким образом, мы убедились в том, что тепловое ядро для степени оператора типа Лапласа \hat{H}^ν вне диагонали $x \neq x'$ имеет разложение (2.69) аналогичное по форме девицтовскому разложению (2.3) для исходного оператора. Более того, в качестве коэффициентов в разложении для степени выступают те же самые НаМиДеW-коэффициенты $\hat{a}_m(H|x, x')$ исходного оператора $\hat{H}(\nabla)$.

Различие возникает только в том, что исходные базисные ядра (2.4) заменяются в нем на новые базисные ядра (2.70). Причем если в каждое исходное базисное ядро $\mathbb{K}_\alpha(\tau, \sigma)$ входила одна и та же экспонента $\exp(-\sigma/2\tau)$, которая поэтому могла быть вынесена за знак суммы, и разложение (2.3) становилось степенным рядом по собственному времени τ , то в каждое новое базисное ядро $\mathbb{K}_\alpha^{(\nu)}(\tau, \sigma)$ входит уже своя собственная обобщенная экспонента $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(-\sigma/2\tau^{1/\nu})$. Эти различные функции уже не могут быть вынесены за знак суммирования, и поэтому разложение (2.69) является уже не степенным, а функциональным рядом.

Если теперь в разложении для степени \hat{H}^ν мы перейдем к пределу совпадения $x = x'$, подставляя значения обобщенных экспонент в нуле $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(0) = \Gamma(\alpha/\nu)/\nu\Gamma(\alpha)$, то получим

$$\hat{K}_{H^\nu}(\tau|x, x) = \tau^{-\frac{d}{2\nu}} \sum_{m=0}^{\infty} \tau^{\frac{m}{\nu}} \cdot \hat{A}_m(H^\nu|x), \quad (2.71)$$

$$\hat{A}_m(H^\nu|x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d/2-m}{\nu}\right)}{\nu\Gamma(d/2-m)} \hat{A}_m(H|x). \quad (2.72)$$

Эта формула есть полученная новым способом хорошо известная формула Фегана-Гилки [14], а свойство коэффициентов теплового ядра сохранять свою форму при возведении оператора в степень как раз и называется в математической литературе «свойством функториальности».

Рассмотрение разложений теплового ядра вне диагонали $x \neq x'$ существенно упрощает доказательство соответствующих свойств по сравнению с обычно принятым в математической литературе подходом, оперирующим с операторными ζ -функциями исключительно в пределе совпадения $x = x'$. При этом в нашем подходе не возникает ничего похожего на появление загадочных членов, логарифмических по собственному времени τ . Вокруг них долгое время существует определенная дискуссия в литературе (см., например, [118]), однако в свете нашего похода они, по-видимому, представляют собой просто артефакт использовавшегося метода.

Более того, приведенные выше преобразования являются только самым простым примером общей схемы рассуждений, которая может без существенных трудностей распространена на существенно более широкую область: с операторов типа Лапласа — на общие минимальные операторы высшего порядка и даже некоторые типы неминимальных (причинных) операторов, от теплового ядра степени оператора $\exp(-\tau \hat{H}^\nu)$ — к функциям гораздо более общего вида, например, $\hat{H}^{-\mu} \exp(-\tau \hat{H}^\nu)$ или $(\hat{H}^\mu + \lambda^\mu)^{-1}$ и т.д.

Степень оператора типа Лапласа $\hat{F}(\nabla) = \hat{H}^\nu(\nabla)$ является простейшим минимальным оператором высшего порядка 2ν . Поэтому возникает сильное искушение попробовать использовать полученное для нее разложение (2.69) в качестве замены девиттовского анзаца для случая минимальных дифференциальных операторов общего вида (1.34). Однако нетрудно непосредственно убедиться, что подстановка разложения (2.69) в уравнение теплопроводности (1.23) не приводит к непротиворечивой цепочке рекуррентных соотношений. Из этого следует сделать тот вывод, что для минимального оператора, который не представим в виде степени, разложение в действительности имеет более сложную структуру, которая, однако, некоторым образом сводится к (2.69) в частном случае степени оператора типа Лапласа.

В следующей главе мы подтвердим этот предварительный вывод, получив разложение для общего минимального оператора сразу двумя методами: с помощью так называемого «обобщенного преобразования Фурье», а также, используя результаты этого раздела, по теории возмущений над степенью оператора. Помимо двух вычислительных алгоритмов, которые интересно сравнить как между собой, так и с методом универсальных функциональных следов, это позволит нам ответить на вопрос о причине неудач обобщения девиттовского метода и невозможности построить обобщенные рекуррентные соотношения в координатном представлении.

Глава 3. Внедиагональные разложения теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка

3.1 Обобщенное преобразование Фурье

Использование преобразования Фурье лежит в основе изучения (псевдо)дифференциальных операторов и их спектральной геометрии (см., например, [10; 11]). Однако в большинстве математических текстов оно применяется в не слишком удобной координатной форме. В полностью ковариантной форме метод преобразования Фурье на искривленном пространстве-времени был развит в виде «символического исчисления» Гарольда Видома [128–130]. В этой форме он был успешно применен к вычислению пределов совпадения коэффициентов теплового ядра Гусыниным с соавторами [49–54].

В отличие от этих работ, мы используем обобщенное преобразование Фурье для выяснения структуры теплового ядра вне диагонали при $x \neq x'$. Соответствующий алгоритм в связи с обобщенными экспоненциальными функциями был подробно рассмотрен нами в работе [90].

Заметим, что рассматриваемые нами методы допускают относительно простое обобщение со случая риманова пространства (с ковариантно-постоянной метрикой и без кручения) на случай общих аффинно-метрических теорий, в которых метрика и аффинная связность выступают в качестве двух независимых динамических переменных (см, например, [55; 131; 132]). Тогда геодезические определяются уже не как кривые наименьшей длины, а как такие кривые, касательный вектор к которым переходит в себя при параллельном переносе вдоль кривой. А касательный вектор к геодезической $\sigma^a(x, x')$ определяется не как производная от мировой функции Синга $\sigma(x, x')$, а непосредственно соотношениями (1.47) и (1.48). В дальнейшем, однако, мы не будем касаться этих вопросов, сконцентрировавшись на римановом случае и отсылая за деталями к нашей работе [90].

Прежде чем перейти к обсуждению самого метода, введем в целях удобства следующее сокращенное обозначение, которым будем часто пользоваться в дальнейшем. Мы будем систематически опускать свертки по повторяющимся

индексам, записывая вместо этого

$$\hat{F}_k * \nabla^k = \hat{F}_k^{a_1 \dots a_k} \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_k}. \quad (3.1)$$

Тогда произвольный дифференциальный оператор порядка N (действующий на набор полей $\varphi(x) = \varphi^A(x)$, о чем напоминают шляпки) может быть записан в виде

$$\hat{F}(\nabla) = \sum_{k=0}^N \hat{F}_k(x) * \nabla^k. \quad (3.2)$$

3.1.1 Преобразование Фурье в искривленном пространстве

Вектор $\sigma^{a'}(x, x')$ можно рассматривать как обобщение вектора $x' - x$ между точками в плоском пространстве. Метод обобщенного преобразования Фурье в искривленном пространстве основывается на ковариантном представлении дельта-функции в виде интеграла по «плоским волнам»

$$\exp\left(ik_b \sigma^{b'}(x, x')\right), \quad (3.3)$$

где k_b есть кокасательный вектор в точке x' .¹ Это представление имеет вид

$$\hat{1}\delta(x, x') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp\left(ik_{a'} \sigma^{a'}\right) \hat{\mathcal{I}}(x, x'). \quad (3.4)$$

В действительности вместо тензора параллельного переноса $\hat{\mathcal{I}}(x, x')$ мы, конечно же, могли бы выбрать любую другую матрично-значную двуточечную функцию, дающую в пределе совпадения единичную матрицу $\hat{1}$, а кроме того обладающую правильными трансформационными свойствами по обоим аргументам x и x' (по этой причине постоянная матрица $\hat{1}$ не подходит для ковариантного формализма). Поэтому методу присуща некоторая неустранимая

¹Заметим, что альтернативно мы могли бы с таким же успехом пользоваться разложением по функциям $\exp(ik_b \sigma^b)$. Хотя, в силу определенных причин, мы предпочитаем выбирать (3.3), и хотя вне предела совпадения эти два возможных выбора приводят к различным выражениям для коэффициентов, после перехода к пределу совпадения оба дают одинаковые локальные выражения. Поэтому сравнение результатов, полученных этими двумя способами, можно даже использовать как средство поиска ошибок.

неоднозначность, которая, тем не менее, не должна влиять на окончательные ответы, полученные интегрированием по импульсам. В связи с этим наш выбор с тензором $\hat{\mathcal{I}}(x, x')$ представляется наиболее простым и естественным.

Подействуем операторной экспонентой $e^{-\tau \hat{F}(\nabla)}$ на представление (3.4) и прокоммутируем плоские волны с оператором $\hat{F}(\nabla)$ согласно соотношению

$$e^{-ik_b \sigma^b} \hat{F}(\nabla_a) e^{ik_b \sigma^b} = \hat{F}(\nabla_a + ik_b \sigma_a^b), \quad (3.5)$$

где $\sigma_a^b(x, x') = \nabla_a \sigma^b(x, x')$. В результате получим следующее интегральное представление для теплового ядра

$$\hat{K}(\tau|x, x') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp(ik_a \sigma^a) \hat{K}(\tau, \mathbf{k}|x, x'), \quad (3.6)$$

$$\hat{K}(\tau, \mathbf{k}|x, x') = \exp\left(-\tau \hat{F}(\nabla_a + ik_b \sigma_a^b)\right) \hat{\mathcal{I}}(x, x'). \quad (3.7)$$

Фурье-образ $\hat{K}(\tau, \mathbf{k}|x, x')$, который мы всюду далее будем обозначать жирным курсивом, очевидно, является решением следующей задачи Коши

$$\left(\partial_\tau + \hat{F}(\nabla_a + ik_b \sigma_a^b)\right) \hat{K}(\tau, \mathbf{k}|x, x') = 0, \quad (3.8)$$

$$\hat{K}(0, \mathbf{k}|x, x') = \hat{\mathcal{I}}(x, x'). \quad (3.9)$$

Казалось бы, выражение (3.7) уже само по себе является решением для фурье-образа теплового ядра в замкнутой форме, и мы могли бы просто разложить соответствующую операторную экспоненту в степенной ряд. Такой способ действия, однако, не приведет нас к нашей конечной цели — разложению по степеням фоновой размерности $1/l$, поскольку оператор $\hat{F}(\nabla_a + ik_b \sigma_a^b)$ содержит в себе старший член, имеющий нулевую фоновую размерность $\dim \hat{F}_N^{a_1 \dots a_N}(x) = 0$. Поэтому наша задача состоит в том, чтобы явно выделить из операторной экспоненты $O(1/l^0)$ -члены, в явном виде найдя решение нулевого порядка, а уже над ним строить теорию возмущений по $1/l$.

3.1.2 Решение для фурье-образа

Чтобы сделать это, прежде всего заметим, что оператор $\hat{F}(\nabla_a + ik_b \sigma_a^b)$ является полиномом степени N по импульсу \mathbf{k} . Разложим его в явном виде на

однородные компоненты:

$$\hat{F} \left(\nabla_a + ik_{b'} \sigma_a^{b'} \right) = \sum_{m=0}^N \{\hat{F}\}_m, \quad (3.10)$$

где $\{\hat{F}\}_m = \{\hat{F}\}_m(\nabla, \mathbf{k})$ является оператором порядка $N - m$ и *однородным* полиномом по \mathbf{k} степени m^2 .

Правило вычисления операторов $\{\hat{F}\}_m$ следует из их определения (3.10),

$$\{\hat{F}\}_m = \sum_{k=m}^N \hat{F}_k(x) * \{\nabla^k\}_m, \quad (3.11)$$

где мы используем соглашение об опускании сворачиваемых индексов (3.1), а действие операции $\{\dots\}_m$ на набор ковариантных производных $\nabla^k = \nabla_{a_1} \dots \nabla_{a_k}$ состоит из $\binom{k}{m}$ всевозможных замен m из них вида $\nabla_a \rightarrow ik_{b'} \sigma_a^{b'}$ с сохранением порядка следования (при $m > k$ полагаем $\{\nabla^k\}_m = 0$).

В частности, для нашего оператора порядка N (3.1) объект $\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) = \{\hat{F}\}_N$ будет уже не оператором, а только скалярной матрично-значной двухточечной функцией и однородным полиномом по \mathbf{k} степени N

$$\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) = \{\hat{F}\}_N = \hat{F}_N^{a_1 \dots a_N} (ik_{b'_1} \sigma_{a_1}^{b'_1}) \dots (ik_{b'_N} \sigma_{a_N}^{b'_N}). \quad (3.12)$$

Он играет роль главного символа оператора $\hat{F}(\nabla)$, обычно используемого в фурье-анализе (псевдо)дифференциальных операторов.

При подсчете фоновой размерности мы не должны учитывать размерность вспомогательных импульсов \mathbf{k} , поэтому

$$\dim\{\hat{F}\}_m = N - m. \quad (3.13)$$

Следовательно, чтобы построить эффективное разложение по степеням фоновой размерности, достаточно разложить $\hat{\mathbf{K}}(\tau, \mathbf{k}|x, x')$ по степеням $\{\hat{F}\}_m$ для $m \leq N - 1$, при этом учитывая ведущий член $\hat{\mathcal{F}}$ точно. Это, конечно, возможно, поскольку $\hat{\mathcal{F}}$ является уже не дифференциальным оператором, а просто

²Заметим, что в работе [90] мы выделяли импульсы \mathbf{k} в явном виде, а независимые от \mathbf{k} операторы с дополнительными m симметризованными верхними индексами обозначали двойными квадратными скобками $[[\hat{F}]]_m$. Однако оказывается, что несколько удобнее работать непосредственно с однородными компонентами, которые мы здесь обозначаем фигурными скобками $\{\hat{F}\}_m$ (освобождая двойные квадратные скобки для используемых далее вложенных коммутаторов).

матрицей, и решение уравнения (3.8) в нулевом приближении дается матричной экспонентой

$$\hat{\mathbf{K}}_0(\tau, \mathbf{k}) = \exp\left(-\tau\hat{\mathcal{F}}\right)\hat{\mathcal{I}}. \quad (3.14)$$

Поэтому мы будем искать решение задачи Коши (3.8)–(3.9) в виде

$$\hat{\mathbf{K}}(\tau, \mathbf{k}) = \exp\left(-\tau\hat{\mathcal{F}}\right)\hat{\mathbf{T}}(\nabla)\hat{\mathcal{I}}, \quad (3.15)$$

где $\hat{\mathbf{T}}(\nabla) \equiv \hat{\mathbf{T}}(\nabla, \tau, \mathbf{k}|x, x')$ есть некоторый неизвестный оператор, которые нам и необходимо найти.

Подставляя анзац (3.15) в уравнение (3.8), мы можем видеть, что коммутирование операторов $\{\hat{F}\}_m$ с экспонентой $\exp(-\tau\hat{\mathcal{F}})$ вновь приводит к удлинению производных

$$\nabla_a \rightarrow \tilde{\nabla}_a = \nabla_a - \tau\hat{D}_a(\tau, \mathbf{k}). \quad (3.16)$$

В интересующем нас случае минимального оператора на римановом пространстве времени скалярная матричнозначная двухточечная функция

$$\hat{D}_a(\tau, \mathbf{k}) = \nabla_a \hat{\mathcal{F}} \quad (3.17)$$

является однородным полиномом степени N по импульсам \mathbf{k} и не зависит от τ (обсуждение более общего случая можно найти в [90]).

Получающиеся в результате операторы могут, в свою очередь, быть разложены в ряд по собственному времени τ ,

$$\{\hat{F}\}_m(\tilde{\nabla}, \mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{N-m} \tau^n \{\hat{F}\}_{m,n}(\nabla, \mathbf{k}), \quad (3.18)$$

что приводит нас к новому набору операторов порядка $N - m - n$, являющихся однородными полиномами по \mathbf{k} степени $m + Nn$

$$\{\hat{F}\}_{m,n} = \sum_{k=m+n}^N \hat{F}_k(x) * \{\nabla^k\}_{m,n}, \quad (3.19)$$

$$\dim\{\hat{F}\}_{m,n} = N - m. \quad (3.20)$$

Операторы $\{\nabla^k\}_{m,n}$ строятся по той же самой схеме, что и $\{\nabla^k\}_m$: они состоят из $\binom{k}{m,n} = k!/m!n!(k-m-n)!$ всевозможных членов, получающихся в результате m замен вида $\nabla_a \rightarrow ik_b \sigma_a^b$ и n замен вида $\nabla_a \rightarrow -\nabla_a \hat{\mathcal{F}}$ с сохранением

порядка следования. Легко видеть, что $\{\hat{F}\}_{m,0} = \{\hat{F}\}_m$. Кроме того, $\{\hat{F}\}_{m,N-m}$ есть не дифференциальные операторы, а просто скалярные матрично-значные функции точек x и x' .

После проведения всех необходимых коммутаций мы получим следующую задачу на оператор $\hat{T}(\nabla, \tau, \mathbf{k})$

$$\left(\partial_\tau + \hat{F}\right) \hat{T}(\nabla, \tau, \mathbf{k}) = 0, \quad (3.21)$$

$$\hat{T}(\nabla, 0, \mathbf{k}) = \hat{1}, \quad (3.22)$$

где новый оператор $\hat{F}(\nabla) \equiv \hat{F}(\nabla, \tau, \mathbf{k}|x, x')$ записывается в виде

$$\hat{F}(\nabla, \tau, \mathbf{k}) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-m} \tau^n \{\hat{F}\}_{m,n} \quad (3.23)$$

и имеет положительную размерность $\dim \hat{F}(\nabla) \geq 1$.

Теперь разложим оператор $\hat{T}(\nabla, \tau, \mathbf{k})$ ряд по степеням τ и выделим однородные компоненты по \mathbf{k} :

$$\hat{T}(\nabla, \tau, \mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{0 \leq l \leq L_n} \tau^n \hat{T}_{n,l}(\nabla, \mathbf{k}), \quad (3.24)$$

где $\hat{T}_{n,l}(\nabla, \mathbf{k}) = \hat{T}_{n,l}(\nabla, \mathbf{k}|x, x')$ есть некоторые неизвестные операторно-значные коэффициенты, являющиеся однородными полиномами по \mathbf{k} степени l , а L_n есть некоторая неубывающая последовательность целых чисел.

Найдем разрешимые рекуррентные соотношения для этих коэффициентов. Дифференцирование ∂_τ в (3.21) понижает степень собственного времени τ на единицу. А члены в разложении (3.23) оператора \hat{F} , наоборот, повышают степень τ на n и в то же время — степень импульса \mathbf{k} на $m + Nn$. Поэтому если мы подставим (3.23) и (3.24) в уравнение (3.21), а затем потребуем равенства нулю членов при каждой степени $\tau^n \mathbf{k}^l$, то получим следующую систему рекуррентных соотношений на операторы $\hat{T}_{n,l}(\nabla, \mathbf{k})$

$$(n+1)\hat{T}_{n+1,l} = - \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-p} \{\hat{F}\}_{p,q} \hat{T}_{n-q,l-p-Nq}, \quad (3.25)$$

$$\hat{T}_{0,0} = \hat{1}, \quad \hat{T}_{0,l} = 0, \quad l > 0. \quad (3.26)$$

В этой записи предполагается, что $\hat{T}_{k,l} = 0$ при $k < 0$ или $l < 0$. Как это и должно быть, композиция оператора $\{\hat{F}\}_{p,q}$ степени $(p+Nq)$ с оператором $\hat{T}_{n-q,l-p-Nq}$

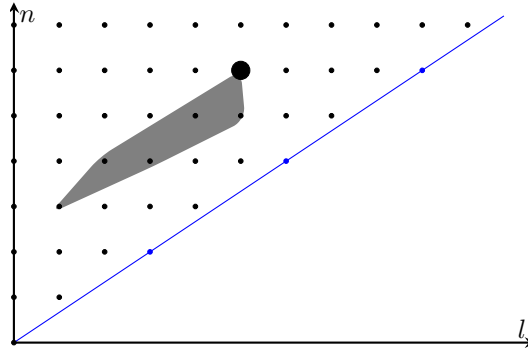


Рисунок 3.1 — Операторы $\hat{T}_{n,l}$ для случая $N = 2$. Голубая линия показывает максимальное значение l , $L_n(N) = (N - 1/2)n$. Каждая точка на плоскости в положении (n,l) обозначает оператор $\hat{T}_{n,l}$. Затененная область показывает паттерн, по которому вычисляется оператор в левой части рекуррентных соотношений (3.25) (в данном примере $\hat{T}_{6,5}$).

степени $(l - p - Nq)$ в правой части уравнения порождает оператор степени l в левой части. Начальные значения (3.26) следуют из начального условия (3.22) и позволяют последовательно разрешить рекуррентные соотношения для всех $\hat{T}_{n,l}$. Пример вычисления этих операторов по операторам низших порядков приведен на рис. 3.1 для случая $\hat{T}_{6,5}(\nabla)$ и $N = 2$.

Заметим, что отношение приращения индекса l к приращению индекса n при переходе от правой к левой стороне соотношений (3.25) максимально при $q = 1$ и $p = N - 1$

$$\frac{\Delta l}{\Delta n} = \frac{p + Nq}{q + 1}, \quad \max_{p,q} \frac{\Delta l}{\Delta n} = N - \frac{1}{2}. \quad (3.27)$$

Это означает, что рекурсивное вычисление операторов $\hat{T}_{n,l}$, начинаясь с $\hat{T}_{0,0}$, для данного n включает только значения l ниже границы

$$L_n(N) = \left(N - \frac{1}{2}\right)n, \quad (3.28)$$

что определяет верхний предел суммирования по индексу l , введенный в (3.24).

Заметим, что с помощью соотношения

$$\{\hat{A}\hat{B}\}_n = \sum_{k=0}^n \{\hat{A}\}_k \{\hat{B}\}_{n-k}, \quad (3.29)$$

которое справедливо для любых дифференциальных операторов $\hat{A}(\nabla)$ и $\hat{B}(\nabla)$, можно разрешить рекуррентные соотношения (3.25) для некоторых операторов

$\hat{T}_{k,l}$, получив следующее замкнутое выражения

$$\hat{T}_{k,l} = \frac{1}{k!} \left\{ (-\hat{F})^k \right\}_l, \quad l < N. \quad (3.30)$$

Кроме того, лежащие на границе операторы $\hat{T}_{2k,(2N-1)k}$ также даются точной формулой

$$\hat{T}_{2k,(2N-1)k} = \frac{1}{2^k k!} \left(-\{\hat{F}\}_{N-1,1} \right)^k. \quad (3.31)$$

Однако произвольный оператор $\hat{T}_{k,l}$ не может быть получен с помощью таких простых формул. Наибольшее, что мы можем сказать о нем, — это что он представим в виде суммы членов (с некоторыми коэффициентами) вида

$$\{\hat{F}^{k_1}\}_{m_1, n_1} \cdots \{\hat{F}^{k_p}\}_{m_p, n_p}, \quad (3.32)$$

где

$$\sum_{i=1}^p (k_i + n_i) = k, \quad \sum_{i=1}^p (N n_i + m_i) = l. \quad (3.33)$$

3.1.3 Интегрирование по импульсам

После того, как получено разложение для фурье-образа $\hat{K}(\nabla, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{k})$, чтобы найти требуемое разложение теплового ядра, остается только проинтегрировать его по импульсам \mathbf{k} . Подставляя выражения (3.15) и (3.24) в интеграл (3.6), мы получаем следующий основной результат для теплового ядра общего положительно-определенного дифференциального оператора порядка N :

$$\hat{K}(\boldsymbol{\tau}|x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\tau}^n \sum_{0 \leq l \leq L_n} \hat{S}_l(\boldsymbol{\tau}) * \hat{O}_{n,l}(\nabla) \hat{I}(x, x'), \quad (3.34)$$

где операторы $\hat{O}_{n,l}(\nabla) = \hat{O}_{n,l}^{b'_1 \dots b'_l}(\nabla)$ получаются удалением из $\hat{T}_{n,l}(\nabla, \mathbf{k})$ импульсов $(i\mathbf{k})^l = i^l k_{b'_1} \cdots k_{b'_l}$, а функции $\hat{S}_l(\boldsymbol{\tau}) = \hat{S}_{l, b'_1 \dots b'_l}(\boldsymbol{\tau}|x, x')$ — интегрированием по этим импульсам

$$\hat{S}_l(\boldsymbol{\tau}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (i\mathbf{k})^l \exp \left(-\boldsymbol{\tau} \hat{\mathcal{F}}(\mathbf{k}) + i k_{a'} \sigma^{a'} \right). \quad (3.35)$$

Прежде всего заметим, что замена переменной интегрирования

$$k_{a'} \mapsto p_a = \sigma_a^{b'} k_{b'}, \quad (3.36)$$

с импульса $k_{a'}$, принадлежащего кокасательному пространству в точке x' , на импульс p_a , кокасательный в точке x , приводит к выражению

$$\begin{aligned} \hat{S}_{l,b_1\dots b_l}(\tau|x,x') &= (\det \bar{\sigma}_{b'}^a) \bar{\sigma}_{b_1}^{a_1} \dots \bar{\sigma}_{b_l}^{a_l} \\ &\times \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} i^l p_{a_1} \dots p_{a_l} \exp\left(-\tau \hat{\mathcal{F}}(\mathbf{p}) + ip_a \sigma^a\right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

где через $\bar{\sigma}_{b'}^a = \bar{\sigma}_{b'}^a(x,x')$ мы обозначили тензор, обратный к тензору $\sigma_a^{b'}$ (т.е. $\bar{\sigma}_{b'}^a \sigma_c^{b'} = \delta_c^a$), а $\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{p})$ есть просто матрично-значный главный символ оператора $\hat{F}(\nabla)$

$$\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{p}) = i^l \hat{F}_N^{a_1 \dots a_N}(x) p_{a_1} \dots p_{a_N}. \quad (3.38)$$

При переходе к (3.37) мы использовали соотношение $\bar{\sigma}_{b'}^a \sigma^{b'} = \sigma^a$.

Важно отметить, что разложение (3.34) является эффективным с точки зрения квантовой теории поля, поскольку с ростом k фоновая размерность соответствующего члена также монотонно возрастает. Действительно, из рекуррентных соотношений (3.25), размерностей операторов $\{\hat{F}\}_{m,n}$ (3.20) и верхнего предела суммирования по индексу l вытекает следующая оценка размерностей операторов $\hat{T}_{n,l}(\nabla)$

$$\dim \hat{T}_{n,l}(\nabla) = nN - l \geq \frac{n}{2}. \quad (3.39)$$

Таким образом, (3.34) действительно является разложением по степеням кривизны пространства-времени и размерных фоновых полей.

Для минимальных операторов (1.34) произвольного четного порядка $N = 2\nu$ их главный символ (3.38) упрощается до выражения

$$\hat{\mathcal{F}}(\mathbf{p}) = p^{2\nu} \hat{1}, \quad p^2 = g^{ab}(x) p_a p_b. \quad (3.40)$$

Тогда степени импульса ip_b в (3.37) могут быть порождены дифференцированием по отношению к σ^b :

$$\hat{S}_{l,a'_1\dots a'_l}(\tau|x,x') = \det(\bar{\sigma}_{b'}^a) \prod_{j=1}^l \bar{\sigma}_{a'_j}^{b_j} \frac{\partial}{\partial \sigma^{b_j}} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \exp(-\tau p^{2\nu} + ip_a \sigma^a). \quad (3.41)$$

Таким образом, весь набор интегралов (3.37) выражается через единственный основной интеграл (2.6), вновь приводящий нас к обобщенным экспонентам.

Пользуясь основным свойством дифференцирования обобщенных экспонент (2.36), нетрудно получить, как на них будут действовать дифференцирования по σ^b :

$$\left(\prod_{j=1}^l \bar{\sigma}_{a'_j}^{b_j} \frac{\partial}{\partial \sigma^{b_j}} \right) \mathcal{E}_{\nu, \frac{d}{2}} \left(-\frac{\sigma^b \sigma_b}{4\tau^{1/\nu}} \right) = \sum_{p \geq \frac{l}{2}}^l \frac{S_{p, l, a'_1 \dots a'_l}}{(-2\tau^{1/\nu})^p} \mathcal{E}_{\nu, \frac{d}{2}+p} \left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}} \right), \quad (3.42)$$

где

$$S_{r, l} = S_{r, l, a'_1 \dots a'_l}(x, x'), \quad r \geq 0, \quad l = r, \dots, 2r, \quad (3.43)$$

есть некоторая новая последовательность тензорных коэффициентов. Они являются полностью симметричными ковариантными тензорами валентности l , состоящими из $2r - l$ множителей вида $\sigma_{a'}$ и $l - r$ множителей вида $\gamma_{a'b'} = \bar{\sigma}_{a'}^c g_{cd} \bar{\sigma}_{b'}^d$, с комбинаторными коэффициентами, равными количеству различных членов при симметризации по l индексам. Например,

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= \sigma_{a'}, & S_{1,2} &= \gamma_{a'b'}, & S_{2,2} &= \sigma_{a'} \sigma_{b'}, \\ S_{2,3} &= 3\gamma_{(a'b'} \sigma_{c')}, & S_{2,4} &= 3\gamma_{(a'b'} \gamma_{c'd')} \\ S_{3,3} &= \sigma_{a'} \sigma_{b'} \sigma_{c'}, & S_{3,4} &= 6\gamma_{(a'b'} \sigma_{c'} \sigma_{d')} \end{aligned} \quad (3.44)$$

и так далее. Они обладают следующим важным свойством: в пределе совпадения, $\sigma^{a'} = 0$, они не исчезают только при $l = 2r$.

Подстановка в (3.41) соотношения $\det(-\bar{\sigma}_{b'}^a) = \Delta(x, x') \sqrt{g(x')/g(x)}$ и интеграла (2.6), с последующим использованием (3.42) приводят к следующему окончательному выражению для функций $\hat{S}_l(\tau)$:

$$\hat{S}_{l, a'_1 \dots a'_l}(\tau) = \frac{\Delta^{-1}(x, x')}{(4\pi\tau^{1/\nu})^{d/2}} \sum_{r \geq \frac{l}{2}}^l \frac{S_{r, l, a'_1 \dots a'_l}}{(-2\tau^{1/\nu})^r} \mathcal{E}_{\nu, \frac{d}{2}+r} \left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}} \right) \hat{1}. \quad (3.45)$$

Если теперь мы подставим (3.45) в разложение (3.34) и произведем пересуммирование (за деталями которого мы вновь отсылаем к работе [90]), то получим следующий основной результат для разложения теплового ядра общего минимального дифференциального оператора порядка 2ν :

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \Delta^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \geq N_m}^{\infty} \mathbb{K}_{m, n}^{(\nu, d)}(\sigma, \tau) \cdot \hat{b}_{m, n}(x, x'), \quad (3.46)$$

где мы ввели новые базисные ядра

$$\mathbb{K}_{m, n}^{(\nu, d)}(\sigma, \tau) = \frac{\tau^{\frac{m-d/2}{\nu}}}{(4\pi)^{d/2}} \mathcal{E}_{\nu, \frac{d}{2}+n\nu-m} \left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}} \right). \quad (3.47)$$

Здесь нижний предел суммирования по индексу n в m -ом порядке разложения по $\tau^{1/\nu}$ дается формулой

$$N_m(\nu) = \begin{cases} m/\nu, & m > 0, \\ \frac{2|m|}{2\nu-1}, & m < 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Двухточечные матрично-значные функции $\hat{b}_{m,n}(x,x')$ мы называем *обобщенными НаМиДеW-коэффициентами*. Они даются в виде конечных сверток введенных выше дифференциальных операторов $\hat{O}_{n,l}(\nabla)$ и тензорных коэффициентов $S_{p,l}(x,x')$:

$$\hat{b}_{m,n}(x,x') = \frac{1}{(-2)^{\nu n - m}} \sum_{l=\nu n - m}^{[L_{m,n}]} S_{\nu n - m, l}(x,x') * \hat{O}_{n,l}(\nabla) \hat{\mathcal{I}}(x,x'), \quad (3.49)$$

где верхний предел суммирования по индексу l есть целая часть выражения

$$L_{m,n} = 2\nu n - \max \left\{ 2m, \frac{n}{2} \right\}. \quad (3.50)$$

В частном случае коэффициентов с индексами $m = \nu n$, как это следует из (3.31), они выражаются особенно простым образом

$$\hat{b}_{\nu n, n}(x,x') = \hat{T}_{n,0}(\nabla) \hat{\mathcal{I}} = \frac{1}{n!} (-\hat{F})^n \hat{\mathcal{I}}. \quad (3.51)$$

Наиболее существенное отличие разложения (3.46) от разложения (1.58) для оператора второго порядка состоит в появлении сколь угодно малых отрицательных степеней τ и в отсутствии общего экспоненциального фактора перед степенным рядом по собственному времени. Вместо этого, каждый обобщенный НаМиДеW-коэффициент $\hat{b}_{m,n}$ при степени $\tau^{m/\nu}$ умножается на свою собственную обобщенную экспоненциальную функцию, явно зависящую от обоих индексов m и n двойного бесконечного ряда.

В силу появления сколь угодно больших отрицательных степеней τ , разложение (3.46) уже невозможно интерпретировать как разложение по малому параметру собственного времени $\tau \rightarrow 0$. Вместо этого его следует понимать, как разложение по фоновой размерности — а это как раз и есть то, что требуется нам для перенормировки и эффективной теории поля. Действительно, как следует из (3.39) размерности коэффициентов $\hat{b}_{m,n}(x,x')$ всегда положительны и растут вместе с индексами m и n :

$$\dim \hat{b}_{m,n} \geq \min_{\{l\}} (\dim \hat{T}_{n,l}) = \max \left\{ 2m, \frac{n}{2} \right\}. \quad (3.52)$$

Обратим внимание на следующее существенное отличие метода обобщенного преобразования Фурье от классического метода ДеВитта. В последнем, чтобы вычислить предел совпадения $[\hat{a}_m]$, необходимо знать пределы совпадения для всех низших коэффициентов, а также некоторого количества их производных. В отличие от этого, в нашем методе рекуррентная процедура осуществляется не для самих обобщенных коэффициентов $\hat{b}_{m,n}$, а для операторов $\hat{T}_{n,l}(\nabla, \mathbf{k})$. А коэффициенты получаются независимо друг от друга в каждом порядке в виде свертки этих операторов с тензорами $S_{r,l}$ (3.49). Более того, эта процедура генерирует не пределы совпадения $[\hat{b}_{m,n}]$, а коэффициенты $\hat{b}_{m,n}(x, x')$ как точные двухточечные функции с $x \neq x'$.

3.1.4 Предел совпадения

Наиболее физически интересным и чаще всего рассматриваемым является предел совпадения теплового ядра. Он включает частное значение обобщенной экспоненты $\mathcal{E}_{\nu, \frac{d}{2} + \nu n - m}(0)$ и пределы совпадения внедиагональных коэффициентов $[\hat{b}_{m,n}]$. Замечательно, что при фиксированном m последние исчезают при достаточно больших значениях n ,

$$[\hat{b}_{m,n}] = 0 \quad \text{при} \quad n > 4m, \quad (3.53)$$

и, как следствие, они исчезают при всех отрицательных значениях m , поскольку индекс суммирования n в (3.46) всегда положителен. Это свойство следует из замечания после формулы (3.44), что $[S_{l,p}] \neq 0$ только при $l = 2p$, так что неисчезающий вклад в сумму (3.49) по l возможен только когда $l = 2(\nu n - m) \leq L_n(2\nu) = (2\nu - 1/2)n$.

Таким образом, предел совпадения теплового ядра имеет только конечное число слагаемых с отрицательными степенями τ , и в нем мы вновь возвращаемся к хорошо известному асимптотическому разложению (1.38) для диагонали теплового ядра при $\tau \rightarrow 0$. В нем диагональные коэффициенты Сили-Гилки $\hat{A}_m(x)$ [10–12] определяются формулой

$$\hat{A}_m(x) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{n \geq m/\nu}^{4m} \frac{\Gamma\left(\frac{d/2 - m}{\nu} + n\right)}{\nu \Gamma\left(\frac{d}{2} - m + \nu n\right)} [\hat{b}_{m,n}], \quad (3.54)$$

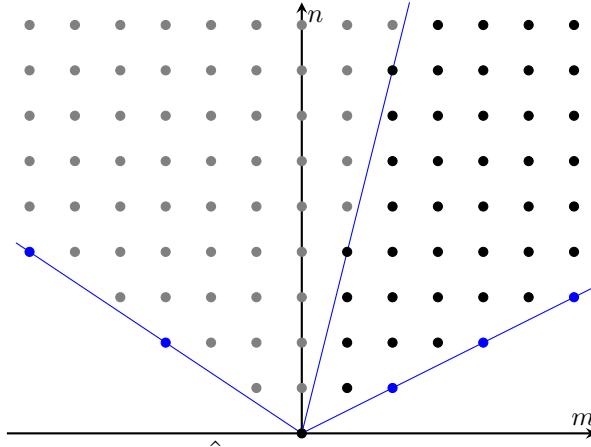


Рисунок 3.2 — Коэффициенты $\hat{b}_{m,n}$ для случая $\nu = 2$. Синие линии слева и справа даны выражениями (3.48) для $N_m(2)$. Черные точки обозначают существенные коэффициенты, а серые — маргинальные, они разделены синей линией, определенной условием (3.53).

(обычно они даются в виде следа по индексам в расслоении и проинтегрированными по всему многообразию, что приводит к потере членов, являющихся полными производными). Как мы видим, предел совпадения приводит к существенному упрощению разложения (3.46), поскольку коэффициент при каждой степени τ дается лишь конечным числом слагаемых.

Как будет показано позднее, некоторые из коэффициентов $\hat{b}_{m,n}(x, x')$ исчезают тождественно при всех x и x' в силу свойств $\sigma(x, x')$ и $\hat{I}(x, x')$. Такие коэффициенты в разложении (3.46) мы будем называть *ложными*. Истинные коэффициенты, в свою очередь, могут быть исчезающими в пределе совпадения $x = x'$ — в этом случае мы будем называть их *существенными*. Другие истинные коэффициенты исчезают при $x' = x$, $[\hat{a}_{m,n}] = 0$, их мы будем называть *маргинальными*. Таким образом, в области индексов (3.53) все коэффициенты, очевидно, маргинальны. Существенные и маргинальные коэффициенты для случая $\nu = 2$ показаны на рис. 3.2.

Коэффициенты с $m < 0$ в разделенных точках x и x' не исключаются автоматически из разложения (3.46) даже в случае оператора типа Лапласа $\nu = 1$, что кажется противоречащим стандартному разложению Швингера–ДеВитта (1.58). Это означает, что по крайней мере в случае $\nu = 1$ все такие коэффициенты в действительности являются ложными. Это будет явно проверено нами ниже для нескольких низших коэффициентов. С другой стороны, разложение (3.46) прекрасно проходит проверку на согласие с разложением

Швингера–ДеВитта(1.58), поскольку все его различные обобщенные экспоненты при $\nu = 1$ вырождаются в одну единственную функцию $\exp(-\sigma/2\tau)$ в силу свойства $\mathcal{E}_{1,\mu}(z) = e^z$.

3.2 Результаты символьных вычислений

3.2.1 Сравнение с классическим методом ДеВитта

В этом подразделе мы приведем результаты вычисления внедиагональных коэффициентов $\hat{b}_{m,n}(x,x')$ и их пределов совпадения для оператора типа Лапласа (1.57). В этом случае все различные обобщенные экспоненты $\mathcal{E}_{\nu,d/2-n}(-\sigma/2\tau^{1/\nu})$ вырождаются в обычный общий экспоненциальный фактор $\exp(-\sigma/2\tau)$, который может быть вынесен за знак суммирования, что дает следующий ответ:

$$\hat{K}(\tau|x,x') = \frac{\Delta^{-1}(x,x')}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2\tau}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tau^m \hat{b}_m(x,x'), \quad (3.55)$$

где каждый коэффициент $\hat{b}_m(F|x,x')$ дается суммой бесконечного числа коэффициентов $\hat{b}_{m,n}(F|x,x')$

$$\hat{b}_m(x,x') = \sum_{n \geq N_m}^{\infty} \hat{b}_{m,n}(x,x'), \quad N_m = \begin{cases} m, & m > 0, \\ -2m, & m < 0. \end{cases} \quad (3.56)$$

Прежде всего, используя формулы (3.10) и (3.18), найдем операторы $\{\hat{F}\}_{m,n}$:

$$\begin{aligned} \{\hat{F}\}_1 &= -k_{a'}(2\sigma^{a'b}\nabla_b + \sigma^{a'b}_b), \\ \{\hat{F}\}_2 &= k_{a'_1}k_{a'_2}\sigma^{a'_1b}\sigma^{a'_2b}, \\ \{\hat{F}\}_{1,1} &= 2ik_{a'_1}k_{a'_2}k_{a'_3}\sigma^{a'_1b_1}\nabla_{b_1}(\sigma_{b_2}^{a'_2}\sigma^{a'_3b_2}), \\ \{\hat{F}\}_{0,2} &= -k_{a'_1}k_{a'_2}k_{a'_3}k_{a'_4}\nabla_{b_3}(\sigma_{b_1}^{a'_1}\sigma^{a'_2b_1})\nabla^{b_3}(\sigma_{b_2}^{a'_3}\sigma^{a'_4b_2}), \\ \{\hat{F}\}_{0,1} &= k_{a'_1}k_{a'_2}(2\nabla^{b_2}(\sigma_{b_1}^{a'_1}\sigma^{a'_2b_1})\nabla_{b_2} + \nabla_{b_2}\nabla^{b_2}(\sigma_{b_1}^{a'_1}\sigma^{a'_2b_1})). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Далее по формуле (3.25) последовательно вычислим операторы $\hat{T}_{k,l}$ вплоть до требуемого порядка (при этом операторы с $l = 0,1$ даются формулой (3.29), а операторы вида $\hat{T}_{2k,3k}$ — формулой (3.31))

$$\begin{aligned}\hat{T}_{2,2} &= \frac{1}{2} \left(\{\hat{F}\}_1^2 - \{\hat{F}\}_{0,1} \right), \\ \hat{T}_{3,2} &= -\frac{1}{3!} \left(\hat{F}\{\hat{F}\}_1^2 + \{\hat{F}\}_1\{\hat{F}^2\}_1 - \hat{F}\{\hat{F}\}_{0,1} - 2\{\hat{F}\}_{0,1}\hat{F} \right), \\ \hat{T}_{3,3} &= -\frac{1}{3!} \left(\{\hat{F}\}_1^3 - \{\hat{F}\}_1\{\hat{F}\}_{0,1} - 2\{\hat{F}\}_{0,1}\{\hat{F}\}_1 - \hat{F}\{\hat{F}\}_{1,1} - 2\{\hat{F}\}_{1,1}\hat{F} \right), \\ \hat{T}_{3,4} &= \frac{1}{3!} \left(\{\hat{F}\}_1\{\hat{F}\}_{1,1} + 2\{\hat{F}\}_{1,1}\{\hat{F}\}_1 - 2\{\hat{F}\}_{0,2} \right),\end{aligned}\quad (3.58)$$

Отрицательные степени. Разложение (3.55) отличается от обычного девиттовского анзаца (1.58) наличием отрицательных степеней τ ($m < 0$). Это кажущееся противоречие разрешается тем, что все коэффициенты $\hat{b}_{m,n}$ при $m < 0$ в действительности являются ложными, т.е. тождественно исчезают не только в пределе совпадения, но и для всех разделенных точек $x \neq x'$. Хотя мы не можем доказать это свойство во всей общности, мы проверили его выполнение прямым вычислением для первых четырех коэффициентов этого вида (т.е. для $\hat{b}_{-1,2}$, $\hat{b}_{-1,3}$, $\hat{b}_{-1,4}$ и $\hat{b}_{-2,4}$). Оказывается, что в силу соотношения $\sigma_{a'bc}\sigma^b\sigma^c \equiv 0$ (1.53) и других более сложных соотношений того же типа, эти четыре коэффициента действительно тождественно исчезают. Вот их явные выражения

$$\begin{aligned}\hat{b}_{-1,2} &= -\frac{1}{4}\sigma_{a'bc}\sigma^{a'}\sigma^b\sigma^c\hat{\mathcal{I}} \equiv 0, \\ \hat{b}_{-1,3} &= \frac{1}{12}\sigma^{a'_1}\sigma^{a'_2}\sigma^{b_1}\sigma^{b_2}(\sigma_{a'_1}{}^c{}_{b_1}\sigma_{a'_2cb_2} + \sigma_{a'_1b_1}{}^c\sigma_{a'_2cb_2} + \sigma_{a'_1b_1}{}^c\sigma_{a'_2b_2c})\hat{\mathcal{I}} \equiv 0, \\ \hat{b}_{-2,4} &= \frac{1}{32}\left(\sigma_{a'bc}\sigma^{a'}\sigma^b\sigma^c\right)^2\hat{\mathcal{I}} \equiv 0.\end{aligned}\quad (3.59)$$

Мы не будем приводить здесь явное выражение для коэффициента $\hat{b}_{-1,4}$ в силу его сложности, а только отметим, что он содержит свертки вида

$$\sigma^{a'_1}\sigma^{a'_2}\sigma^{a'_3}\sigma^{b_1}\sigma^{b_2}\sigma_{a'_1b_1c_1}\sigma_{a'_2b_2c_2}\sigma_{a'_3}{}^{c_1c_2}.\quad (3.60)$$

Все члены этого типа тождественно обращаются в нуль.

Положительные степени. Теперь перейдем к обсуждению положительных степеней. Другое расхождение между нашим разложением (3.55) и девиттовским анзацем (1.58) состоит в том, что вместо стандартного префактора

$\Delta^{1/2}(x, x')$ в нашем разложении стоит обратный определитель $\Delta^{-1}(x, x')$. Поэтому обычные коэффициенты Швингера-ДеВитта и наши должны быть связаны соотношением

$$\hat{a}_m(x, x') = \Delta^{-3/2}(x, x') \hat{b}_m(x, x') = \Delta^{-3/2}(x, x') \sum_{n \geq N_m}^{\infty} \hat{b}_{m,n}(x, x'), \quad m \geq 0. \quad (3.61)$$

Заметим, что если мы интересуемся только пределами совпадения, то, как следует из (3.54), только первые $3m + 1$ членов (вплоть до $n = 4m$) из всего бесконечного ряда (3.56) будут давать вклад в $[\hat{b}_m]$. (На самом деле, как мы увидим далее, их число даже еще меньше.)

Теперь мы сравним результаты, полученные с помощью метода обобщенного преобразования Фурье, с хорошо известными для операторов типа Лапласа пределами совпадения (1.64)-(1.66) НаМиДеW-коэффициентов и их производных. Для того, чтобы сравнивать пределы совпадения для производных коэффициентов, нам понадобятся пределы совпадения для определителя Паули-Ван Флека-Моретт $\Delta^{-3/2}$ в (3.61),

$$[\Delta] = 1, \quad [\nabla_a \Delta] = 0, \quad [\nabla_a \nabla_b \Delta] = \frac{1}{3} R_{ab}. \quad (3.62)$$

Начнем с коэффициентов с $m = 0$. Двухточечные выражения для трех низших $\hat{b}_{0,n}(x, x')$ имеют вид

$$\hat{b}_{0,0} = \hat{\mathcal{I}}, \quad \hat{b}_{0,1} = -\frac{1}{2} \sigma_{a'} \sigma^{a'b} \hat{\mathcal{I}}, \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_{0,2} = \frac{1}{2} \sigma^{b'} \sigma^c (\sigma_{b'ac} + \sigma_{b'ca}) \hat{\mathcal{I}}_a + \frac{1}{8} \left(\sigma^{a'} (4\sigma_{a'b}{}^b + \sigma^{b'} (2\sigma_{a'}{}^{cd} \sigma_{b'cd} + \sigma_{a'c}{}^c \sigma_{b'd}{}^d) \right. \\ \left. + 2\sigma^{b'} (\sigma_{a'bc}{}^c + \sigma_{a'c}{}^c b) \right) + 4\sigma^a \bar{\sigma}_{cb'} (\sigma_{a'}{}^c + \sigma^{b'c}{}_a) \hat{\mathcal{I}}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Из этих выражений сразу же могут быть получены пределы совпадения для них и их ковариантных производных

$$[\hat{b}_{0,0}] = \hat{1}, \quad [\nabla_a \hat{b}_{0,0}] = 0, \quad [\nabla_a \nabla_b \hat{b}_{0,0}] = \frac{1}{2} \hat{\mathcal{R}}_{ab}, \quad (3.65)$$

$$[\hat{b}_{0,1}] = 0, \quad [\nabla_a \hat{b}_{0,1}] = 0, \quad [\nabla_a \nabla_b \hat{b}_{0,1}] = \frac{2}{3} R_{ab} \hat{1}, \quad (3.66)$$

$$[\hat{b}_{0,2}] = 0, \quad [\nabla_a \hat{b}_{0,2}] = 0, \quad [\nabla_a \nabla_b \hat{b}_{0,2}] = -\frac{1}{6} R_{ab}. \quad (3.67)$$

Мы не приводим явных выражений для коэффициентов $\hat{b}_{0,3}$ и $\hat{b}_{0,4}$ в силу их чрезвычайной сложности (например, выражение для последнего содержит около 750 слагаемых), однако для их пределов совпадения вычисление дает:

$$[\hat{b}_{0,3}] = [\hat{b}_{0,4}] = 0, \quad (3.68)$$

$$[\nabla_a \hat{b}_{0,3}] = [\nabla_a \hat{b}_{0,4}] = 0, \quad (3.69)$$

$$[\nabla_a \nabla_b \hat{b}_{0,3}] = [\nabla_a \nabla_b \hat{b}_{0,4}] = 0. \quad (3.70)$$

Объединяя эти результаты, получим для $m = 0$

$$[\hat{b}_0] = \hat{1}, \quad [\nabla_a \hat{b}_0] = 0, \quad [\nabla_a \nabla_b \hat{b}_0] = \frac{1}{2}(\hat{\mathcal{R}}_{ab} + \hat{1}R_{ab}). \quad (3.71)$$

Используя связь (3.61) между коэффициентами $\hat{a}_m(x, x')$ и $\hat{b}_m(x, x')$ и пределы совпадения (3.62), мы можем воспроизвести отсюда стандартные выражения (1.64), хорошо известные из решения рекуррентных соотношений ДеВитта.

Аналогично, точные выражения для первых двух коэффициентов $\hat{b}_{1,n}(x, x')$

$$\hat{b}_{1,1} = -\hat{F}(\nabla)\hat{\mathcal{I}}, \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_{1,2} = & -\frac{1}{2}\sigma_a(\hat{\mathcal{I}}^{ab}{}_b + \hat{\mathcal{I}}_b{}^{ba}) - \frac{1}{2}(2 + \sigma^{a'}\sigma_{a'b}{}^b)\hat{\mathcal{I}}_c{}^c - \sigma^{a'}\sigma_{a'bc}\hat{\mathcal{I}}^{bc} \\ & - \frac{1}{2}\left(\sigma^{a'}(\sigma_{a'bc}{}^c + \sigma_{a'c}{}^cb) + 2\sigma^{a'c}{}_c\bar{\sigma}_{ba'} + 2(\sigma_{a'bc} + \sigma_{a'cb})\bar{\sigma}^{ca'}\right)\hat{\mathcal{I}}^b \\ & - \frac{1}{4}\left(2(\sigma^{a'bc}{}_c + \sigma^{a'c}{}_c{}^b)\bar{\sigma}_{ba'} + \sigma^{a'}\sigma_{a'b}{}^{bc}{}_c + (\sigma^{a'c}{}_c\sigma_{b'd}{}^d + 2\sigma^{a'cd}\sigma_{b'cd})\bar{\sigma}_{ea'}\bar{\sigma}^{eb'}\right)\hat{\mathcal{I}} \\ & + \frac{1}{2}\left(\sigma^{a'}\sigma_{a'b}{}^b(\hat{P} + \frac{\hat{1}}{6}R) + \sigma^a(\nabla_a\hat{P} + \frac{\hat{1}}{6}\nabla_a R)\right)\hat{\mathcal{I}}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

приводит к пределам совпадения

$$[\hat{b}_{1,1}] = -\hat{P} - \frac{\hat{1}}{6}R, \quad [\nabla_a \hat{b}_{1,1}] = -\nabla_a \hat{P} - \frac{\hat{1}}{6}\nabla_a R - \frac{1}{3}\nabla^b \hat{\mathcal{R}}_{ab}, \quad (3.74)$$

$$[\hat{b}_{1,2}] = \frac{\hat{1}}{6}R, \quad [\nabla_a \hat{b}_{1,2}] = \frac{1}{2}\nabla_a \hat{P} + \frac{\hat{1}}{3}\nabla_a R + \frac{1}{6}\nabla^b \hat{\mathcal{R}}_{ab}. \quad (3.75)$$

Мы не будем приводить точные выражения для коэффициентов $\hat{b}_{1,3}$ и $\hat{b}_{1,4}$ (например, выражение для последнего содержит около 3500 слагаемых), однако их пределы совпадения очень просты:

$$[\hat{b}_{1,3}] = [\hat{b}_{1,4}] = 0, \quad (3.76)$$

$$[\nabla_a \hat{b}_{1,3}] = -\frac{\hat{1}}{6}\nabla_a R, \quad [\nabla_a \hat{b}_{1,4}] = 0. \quad (3.77)$$

Объединяя эти результаты в (3.56), получим для $m = 1$

$$[\hat{b}_1] = -\hat{P}, \quad [\nabla_a \hat{b}_1] = -\frac{1}{2} \nabla_a \hat{P} + \frac{1}{6} \nabla^b \hat{\mathcal{R}}_{ab}, \quad (3.78)$$

что вновь находится в согласии с выражениями (1.65) для HaMiDeW-коэффициента $\hat{a}_1(x, x')$.

Наконец, приведем результаты для пределов совпадения первых коэффициентов $\hat{b}_{2,n}(x, x')$, необходимых для проверки известного результата для $\hat{a}_2(x, x)$:

$$[\hat{b}_{2,2}] = \frac{1}{2} \left(\hat{P} + \frac{1}{6} R \right)^2 - \frac{1}{2} \square \left(\hat{P} + \frac{1}{6} R \right) + \frac{1}{4} \hat{\mathcal{R}}_{ab} \hat{\mathcal{R}}^{ab}, \quad (3.79)$$

$$[\hat{b}_{2,3}] = \frac{1}{540} \left(12 R_{abcd} R^{abcd} - 12 R_{ab} R^{ab} - 15 R^2 + 102 \square R \right) \hat{1} - \frac{1}{6} \left(\hat{\mathcal{R}}_{ab} \hat{\mathcal{R}}^{ab} + R \hat{P} - 2 \square \hat{P} \right), \quad (3.80)$$

$$[\hat{b}_{2,4}] = \frac{1}{360} \left(-6 R_{abcd} R^{abcd} + 6 R_{ab} R^{ab} + 5 R^2 - 36 \square R \right), \quad (3.81)$$

$$[\hat{b}_{2,5}] = [\hat{b}_{2,6}] = [\hat{b}_{2,7}] = [\hat{b}_{2,8}] = 0. \quad (3.82)$$

Сумма этих выражений в точности воспроизводит хорошо известное выражение (1.66), которое играет чрезвычайно важную роль, поскольку оно исчерпывает однопетлевые расходимости 4-мерной теории поля общего вида. Таким образом, наша проверка показывает, что метод обобщенного преобразования Фурье приводит к результатам, совпадающим с полученными с помощью стандартной техники ДеВитта.

3.2.2 Минимальный оператор четвертого порядка

Здесь мы рассмотрим минимальный оператор четвертого порядка общего вида

$$\hat{F}(\nabla) = \square^2 + \hat{\Omega}^{abc} \nabla_a \nabla_b \nabla_c + \hat{D}^{ab} \nabla_a \nabla_b + H^a \nabla_a + \hat{P}, \quad (3.83)$$

где $\hat{\Omega}^{abc} = \hat{\Omega}^{(abc)}$ и $\hat{D}^{ab} = \hat{D}^{(ab)}$. Соответствующие вычисления и в особенности представление окончательных результатов чрезвычайно усложняются в случае, ненулевого коэффициента $\hat{\Omega}^{abc}$, $\dim \hat{\Omega}^{abc} = 1$. Поэтому мы представим

здесь результаты для случая $\hat{\Omega}^{abc} = 0$, а результаты для общего случая ненулевого коэффициента $\hat{\Omega}^{abc}$ приведем отдельно в Приложении Б. Кроме того, цепочка дифференциальных операторов $\hat{T}_{n,l}(\nabla)$ и точные выражения для обобщенных НаМиДеW-коэффициентов $\hat{b}_{m,n}(x, x')$ становятся слишком сложными и громоздкими, чтобы приводить их здесь. Поэтому мы пропустим начальные вычислительные шаги и сразу перейдем непосредственно к результатам для пределов совпадения нескольких низших коэффициентов. Для коэффициентов размерности 2 они очень просты ($\hat{D} = \hat{D}_a^a$):

$$[\hat{b}_{1,1}] = \frac{1}{2}\hat{D} - \frac{1}{3}R, \quad (3.84)$$

$$[\hat{b}_{1,2}] = \frac{1}{6}(d+2)(d+4)R, \quad (3.85)$$

$$[\hat{b}_{1,3}] = [\hat{b}_{1,4}] = 0, \quad (3.86)$$

но в размерности 4 они включают в себя уже все коэффициенты оператора и имеют вид:

$$[\hat{b}_{2,1}] = -\hat{P} - \frac{1}{2}\hat{\mathcal{R}}_{ab}\hat{\mathcal{R}}^{ab}, \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} [\hat{b}_{2,2}] &= \frac{1}{15}(2d+7)\left(R_{ab}^2 - R_{abcd}^2 + 6\Box R\right) + \frac{1}{6}R^2 + \frac{1}{4}(d+2)(d+4)\hat{\mathcal{R}}_{ab}^2 + \frac{1}{8}\hat{D}^2 \\ &+ \frac{1}{4}\hat{D}_{ab}\hat{D}^{ab} - \frac{1}{3}(d+3)\hat{D}^{ab}R_{ab} - \frac{1}{6}\hat{D}R + \frac{1}{2}(d+2)\nabla_a\hat{H}^a \\ &+ \nabla_a\nabla_b\hat{D}^{ab} - \frac{1}{4}(d+4)\Box\hat{D}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} [\hat{b}_{2,3}] &= -(d+4)(d+6)\left(\frac{d+11}{45}(R_{ab}^2 - R_{abcd}^2 + 6\Box R)\hat{1} + \frac{1}{6}R^2\right. \\ &\left. + \frac{1}{6}(d+2)\hat{\mathcal{R}}_{ab}^2 - \frac{1}{6}\hat{D}^{ab}R_{ab} - \frac{1}{12}\hat{D}R + \frac{1}{3}\nabla_a\nabla_b\hat{D}^{ab} - \frac{1}{6}\Box\hat{D}\right), \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$[\hat{b}_{2,4}] = (d+4)(d+6)(d+8)(d+10)\left(\frac{1}{60}(R_{ab}^2 - R_{abcd}^2 + 6\Box R) + \frac{1}{72}R^2\right), \quad (3.90)$$

$$[\hat{b}_{2,5}] = [\hat{b}_{2,6}] = [\hat{b}_{2,7}] = [\hat{b}_{2,8}] = 0. \quad (3.91)$$

Эти результаты показывают, что пределы совпадения $[\hat{b}_{m,n}]$ при фиксированном m начинают исчезать значительно раньше, чем при $n > 4m$. Это происходит в силу свойств симметризованных ковариантных производных мировой функции Синга. Как следует из альтернативного метода вычислений по теории возмущений над степенью оператора, пределы совпадения исчезают уже при $n > 2m$.

Таким образом, мы получаем коэффициенты Сили–Гилки (3.54) для диагонали теплового ядра минимального оператора четвертого порядка. В коэффициент размерности два вносят вклад неисчезающие пределы совпадения $[\hat{b}_{1,1}]$ и $[\hat{b}_{1,2}]$, что дает

$$\hat{E}_2(x) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d/2-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)} \left\{ \frac{1}{2d} \hat{D} + \frac{\hat{1}}{6} R \right\}. \quad (3.92)$$

Коэффициент размерности четыре включает неисчезающие вклады от приведенных выше пределов совпадения $[\hat{b}_{2,1}]$, \dots , $[\hat{b}_{2,4}]$ и равен

$$\begin{aligned} \hat{E}_4(x) = & \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \left\{ (d-2) \left(\frac{\hat{1}}{90} R_{abcd}^2 - \frac{\hat{1}}{90} R_{ab}^2 + \frac{\hat{1}}{36} R^2 + \frac{1}{6} \hat{\mathcal{R}}_{ab}^2 - \frac{\hat{1}}{15} \square R \right) \right. \\ & + \frac{1}{d+2} \left(\frac{1}{2} \hat{D}_{ab} \hat{D}^{ab} + \frac{1}{4} \hat{D}^2 - \frac{2}{3} (d+1) \nabla_a \nabla_b \hat{D}^{ab} - \frac{1}{6} (d+4) \square \hat{D} \right) \\ & \left. - \frac{1}{3} \hat{D}^{ab} R_{ab} + \frac{1}{6} \hat{D} R - 2\hat{P} + \nabla_a \hat{H}^a \right\}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Оба выражения полностью соответствуют результатам работ [48; 50]. Работа [48] помимо этого также содержит вклад от ненулевого Ω^{abc} , однако без учета полных производных. В виду большой громоздкости выражений с Ω^{abc} их полный вклад мы приводим в Приложении Б.

Точные выражения для коэффициентов вне диагонали теплового ядра (3.83) оказываются слишком сложными, чтобы приводить их здесь даже для низших порядков. Поэтому мы приведем только ту их часть, которая иллюстрирует такую важную новую особенность операторов высшего порядка как появление отрицательных степеней по собственному времени. Это маргинальный (т.е. исчезающий на диагонали теплового ядра, но ненулевой вне его) коэффициент $\hat{b}_{-1,1}(x, x')$ при отрицательной степени τ .

Используя (3.49) и (3.50), мы имеем целую часть $[L_{-1,1}] = 3$, поэтому

$$\hat{b}_{-1,1}(x, x') = -\frac{1}{8} S_{3,3} * O_{1,3}(\nabla) \mathcal{I}(x, x'), \quad (3.94)$$

где тензор $S_{3,3}$ определен в (3.44), а дифференциальный оператор $O_{1,3}(\nabla)$ получается удалением импульсов из $T_{1,3}(\nabla, \mathbf{k}) = -\{F(\nabla)\}_3$, как следует из (3.25)–(3.26). Таким образом, имеем

$$O_{1,3}^{a'b'c'}(\nabla) = -4\sigma^{a'b} \sigma_b^{b'} \sigma^{c'e} \nabla_c - 2\sigma^{a'b} \sigma_b^{b'} \sigma^{c'd} - 4\sigma^{a'bc} \sigma_b^{b'} \sigma_c^{c'} - \Omega^{abc} \sigma_a^{a'} \sigma_b^{b'} \sigma_c^{c'}. \quad (3.95)$$

Поэтому, с учетом уравнения (1.51) на тензор параллельного переноса $\mathcal{I}(x, x')$ и соотношения $\sigma^{ab'}\sigma_{b'} = \sigma^a$, получим

$$\hat{b}_{-1,1}(x, x') = \frac{1}{8} (-4\sigma\sigma_{a'}\square\sigma^{a'} + \hat{\Omega}^{abc}\sigma_a\sigma_b\sigma_c)\hat{\mathcal{I}}(x, x'). \quad (3.96)$$

Приведенное выражение очевидным образом не равно нулю при $x \neq x'$. Это доказывает, что отрицательные степени собственного времени не просто являются артефактом нашего метода, но и действительно присутствуют в разложении (3.46) вне диагонали теплового ядра при $\nu > 1$.

Вычисления этого и предыдущего подразделов показывают, что их сложность гораздо выше, чем у рекуррентной процедуры в технике Швингера–ДеВитта. Без использования компьютерных символьных вычислений, которые мы проводили с помощью системы *Wolfram Mathematica* и пакетов тензорной алгебры *xAct* и *xTras*, завершение приведенных выше проверок было бы невозможно. Очевидно, уровень сложности вычислений возрастает при переходе к операторам высшего порядка с $\nu > 1$.

3.3 Теория возмущений

Перейдем теперь ко второму способу вычисления коэффициентов теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка. Как мы видели в разделе 2.4, если $\hat{H}(\nabla)$ есть произвольный оператор типа Лапласа (1.57), то прием с прямым/обратным преобразованием Меллина позволяет сразу же получить разложение теплового ядра (2.69) для его произвольной степени $\hat{H}^\nu(\nabla)$. Поскольку минимальный дифференциальный оператор общего вида $\hat{F}(\nabla)$ порядка 2ν (1.34), вообще говоря, не может быть представлен в виде ν -ой степени оператора второго порядка, то и разложение теплового ядра для него не обязано иметь вид (2.69). Действительно, полученное с помощью обобщенного преобразования Фурье разложение (3.46), хотя и по-прежнему содержит обобщенные экспоненты $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-\sigma/2\tau^{1/\nu})$, все же имеет несколько более сложный вид: в нем появляются двойное суммирование и бесконечный ряд членов с отрицательными степенями по собственному времени.

Однако произвольный минимальный оператор $\hat{F}(\nabla)$ порядка 2ν (1.34) во всяком случае можно представить в виде

$$\hat{F}(\nabla) = \hat{H}^\nu(\nabla) + \hat{W}(\nabla), \quad (3.97)$$

где $\hat{H}(\nabla)$ есть оператор типа Лапласа (1.57), а $\hat{W}(\nabla)$ представляет собой некоторую добавку — произвольный дифференциальный оператор низшего порядка $2\nu - 1$. Основная идея нашего второго метода очень проста и естественна: давайте будем рассматривать в разложении (3.97) член $\hat{H}^\nu(\nabla)$ как «невозмущенную часть» оператора, а член $\hat{W}(\nabla)$ — как «возмущение», и далее будем искать разложение теплового ядра $\hat{K}_F(\tau|x, x')$ полного оператора $\hat{F}(\nabla)$ по теории возмущений по степеням $\hat{W}(\nabla)$ над уже известным нам «невозмущенным ядром» оператора $\hat{H}^\nu(\nabla)$.

Итак, пользуясь аналогией с теорией возмущений в квантовой механике, перейдем в «представление взаимодействия». В нем возмущение начинает зависеть от собственного времени τ

$$\hat{W}_\tau = e^{\tau\hat{H}^\nu} \hat{W}(\nabla) e^{-\tau\hat{H}^\nu}, \quad (3.98)$$

а «оператор эволюции»

$$\hat{U}_\tau = e^{\tau\hat{H}^\nu} e^{-\tau\hat{F}} \quad (3.99)$$

будет удовлетворять уравнению

$$\left(\partial_\tau + \hat{W}_\tau\right) \hat{U}_\tau = 0, \quad \hat{U}_0 = \hat{1}. \quad (3.100)$$

Тогда мы можем разложить оператор эволюции в ряд по степеням возмущения \hat{W}_τ :

$$\begin{aligned} \hat{U}_\tau &= \hat{1} - \int_0^\tau dt \hat{W}_t \hat{U}_t = \bar{T} \exp\left(-\int_0^\tau dt \hat{W}_t\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\{\tau\}} d^n t \hat{W}_{t_n} \cdots \hat{W}_{t_1}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

где \bar{T} — операция анти-хронологического упорядочения, а интегрирование ведется по n -мерной гиперпирамиде $0 < t_1 < \dots < t_n < \tau$,

$$\int_{\{\tau\}} d^n t = \int_0^\tau dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \cdots \int_0^{t_2} dt_1. \quad (3.102)$$

Далее заметим, что, как ясно из определения (3.98), коммутация операторов \hat{W}_t и $e^{-\tau\hat{H}^\nu}$ сводится просто к сдвигу параметра собственного времени

$$e^{-\tau\hat{H}^\nu} \hat{W}_t = \hat{W}_{t-\tau} e^{-\tau\hat{H}^\nu}. \quad (3.103)$$

Из этого наблюдения и (3.99) следует, что

$$e^{-\tau\hat{F}} = e^{-\tau\hat{H}^\nu} \hat{U}_\tau = \hat{U}'_\tau e^{-\tau\hat{H}^\nu}, \quad (3.104)$$

где в новом операторе \hat{U}'_τ анти-хронологическое упорядочение заменяется на хронологическое

$$\begin{aligned} \hat{U}'_\tau &= \bar{T} \exp \left(- \int_0^\tau dt \hat{W}_{t-\tau} \right) = T \exp \left(- \int_0^\tau dt \hat{W}_{-t} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{\{\tau\}} d^n t \hat{W}_{-t_1} \cdots \hat{W}_{-t_n}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

На языке ядер соотношение (3.104) примет вид

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \hat{U}'_\tau \hat{K}_{H^\nu}(\tau|x, x'). \quad (3.106)$$

Таким образом, \hat{U}'_τ представляет собой оператор деформации теплового ядра, вызванной введением в оператор возмущения $\hat{W}(\nabla)$. Операторы \hat{W}_{-t} и \hat{U}'_τ являются интегральными, однако если разложить их в ряд по степеням τ , то коэффициенты этого разложения будут дифференциальными операторами.

Вначале сделаем это для оператора \hat{W}_{-t} . Для этого воспользуемся хорошо известным соотношением

$$e^{-tB} A e^{tB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [[A, B]]_k, \quad (3.107)$$

где $[[\dots, \dots]]_k$ означает вложенный коммутатор k -го порядка, определяемый соотношениями³

$$[[A, B]]_0 = A, \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} [[A, B]]_k &\equiv [[A, B]_{k-1}, B] \\ &= [\dots [A, B], B], \dots, B], \quad k > 0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Из соотношения (3.107) сразу же следует, что

$$\hat{W}_{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \hat{V}_k(\nabla), \quad \text{где} \quad \hat{V}_k(\nabla) = [[\hat{W}, \hat{H}^\nu]]_k \quad (3.112)$$

есть дифференциальные операторы порядка $(2\nu - 1)(k + 1)$ и размерности $2\nu(k + 1)$.

Теперь подставим разложение (3.112) в представление (3.105). Интеграл по собственному времени берется тривиальным образом⁴

$$\int_{\{t\}} dt^n t^\alpha = \frac{\tau^{n+|\alpha|}}{c(\alpha)}, \quad (3.113)$$

$$c(\alpha) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2) \cdots (|\alpha| + n). \quad (3.114)$$

Отсюда получаем следующее разложение оператора деформации теплового ядра \hat{U}'_τ в ряд по степеням τ :

$$\hat{U}'_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \hat{U}_k(\nabla), \quad (3.115)$$

где

$$\hat{U}_k(\nabla) = \sum_{n+|\alpha|=k} \frac{(-1)^n}{\alpha! c(\alpha)} \hat{V}_{\alpha_n}(\nabla) \cdots \hat{V}_{\alpha_1}(\nabla) \quad (3.116)$$

³Заметим, что вложенные коммутаторы $[[A, B]]_n$ и обычные коммутаторы $[A, B^n]$ выражаются друг через друга с помощью симметрично выглядящих формул

$$[[A, B]]_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} [A, B^k] B^{n-k}, \quad (3.108)$$

$$[A, B^n] = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} [[A, B]]_k B^{n-k}. \quad (3.109)$$

⁴Здесь мы используем стандартные мультииндексные обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$

есть дифференциальные операторы порядка $(2\nu - 1)k$ и размерности $2\nu k$.

Теперь мы хотим представить тепловое ядро $\hat{K}_F(\tau|x, x')$ возмущенного оператора $\hat{F}(\nabla)$ в виде функционального ряда по обобщенным экспонентам. Для этого подставим разложения для невозмущенного ядра (2.69) и оператора деформации ядра (3.115) в формулу (3.106) и прокоммутируем операторы $\hat{U}_k(\nabla)$ с обобщенными экспоненциальными функциями $\mathcal{E}_{\nu, \frac{d}{2}-m}(-\sigma/2\tau^{1/\nu})$. С учетом правила дифференцирования обобщенных экспонент (2.36), введем следующее обозначение для результата коммутации дифференциального оператора порядка N с обобщенной экспонентой:

$$\hat{F}(\nabla) \mathcal{E}_{\nu, \alpha} \left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}} \right) = \sum_{n=0}^N \tau^{-\frac{n}{\nu}} \mathcal{E}_{\nu, \alpha+n} \left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}} \right) \cdot \langle \hat{F} \rangle_n. \quad (3.117)$$

Операция $\langle \dots \rangle_n$ очень похожа на введенные нами ранее фигурные скобки $\{ \dots \}_n$ (3.19) с той только разницей, что n ковариантных производных ∇_a заменяются не на $ik_b \sigma_a^b$, а на функции вида $-\sigma_a/2$. В остальном их свойства и правила вычисления совпадают.

После перекоммутирования всех обобщенных экспонент налево и необходимого пересуммирования (детали которого мы вновь опустим), получим искомое разложение теплового ядра вне диагонали:

$$\hat{K}_F(\tau|x, x') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n \geq K_m}^{\infty} \mathbb{K}_{m,n}^{(\nu, d)}(\sigma, \tau) \cdot \hat{a}_{m,n}(F|x, x'), \quad (3.118)$$

где двойное суммирование ведется по тем же самым базисным ядрам (3.47), что и в разложении (3.46). А новые обобщенные коэффициенты $\hat{a}_{m,n}(F|x, x')$ получаются действием деформирующих операторов $\langle \hat{U}_n(\nabla) \rangle_k$ на HaMiDeW-коэффициенты исходного оператора типа Лапласа $\hat{H}(\nabla)$:

$$\hat{a}_{m,n}(F|x, x') = \sum_{l \geq L_{m,n}}^{m+(\nu-1)n} \langle \hat{U}_n(\nabla) \rangle_k \hat{a}_l(H|x, x'), \quad (3.119)$$

где $k = \nu n + l - m$. Нижние пределы суммирования по индексам n и l даются выражениями

$$K_m = \max\{0, -m/(\nu - 1)\}, \quad (3.120)$$

$$L_{m,n} = \max\{0, m - \nu n\}. \quad (3.121)$$

Индекс n здесь может быть интерпретирован как порядок теории возмущений по степеням $\hat{W}(\nabla)$.

Точно так же, как в случае разложения (3.46), пределы совпадений коэффициентов при отрицательных степенях τ равны нулю. Действительно, поскольку $[\sigma_a] = 0$ и $[\sigma_{ab}] = g_{ab}$, оператор $\langle \hat{U}_n(\nabla) \rangle_k$ будет давать ненулевой вклад в предел совпадения только в том случае, если каждая из k содержащихся в нем функций σ_a будет дополнительно продифференцирована по крайней мере еще один раз. Поскольку оператор $\hat{U}_n(\nabla)$ имеет порядок $(2\nu - 1)n$, выживут только члены с $k \leq (\nu - 1/2)n$. А так как $k = \nu n + l - m$ и $l \geq 0$, это в свою очередь приводит к ограничению

$$[\hat{a}_{m,n}] = 0 \quad \text{при} \quad n > 2m, \quad (3.122)$$

существенно более сильному, чем аналогичное условие (3.53).

Как видим, хотя использованные методы — обобщенного разложения Фурье и теории возмущений — сильно различаются, полученные с их помощью внедиагональные ($x \neq x'$) разложения (3.46) и (3.118) для минимальных операторов высшего порядка 2ν ведутся по одним и тем же базисным ядрам $\mathbb{K}_{m,n}^{(\nu,d)}(\sigma, \tau)$ (3.47) и совпадают по форме. Соответствующий двойной функциональный ряд является прямым обобщением разложения ДеВитта (1.58) для минимальных операторов 2го порядка: в нем степени безразмерного отношения $z = \sigma/2\tau^{1/\nu}$ частично пересуммируются в «обобщенные экспоненциальные функции» $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z)$, обобщающие обычную экспоненту $\exp(-z)$ в (1.58). Обобщенные экспоненты точно так же имеют существенную особенность в пределе $\tau \rightarrow 0$, но регулярны в пределе совпадения $x = x'$, что позволяет воспроизвести хорошо известное асимптотическое разложение диагонали теплового ядра (1.38). При этом хотя отсутствие «дна» у системы коэффициентов $\hat{b}_{m,n}$ (т.е. появление нетривиальных коэффициентов при сколь угодно больших отрицательных степенях τ) и делает невозможным построение цепочки рекуррентных соотношений à la ДеВитт, развитые методы дают в некотором смысле больше — позволяют получить замкнутые выражения для обобщенных коэффициентов $\hat{b}_{m,n}(x, x')$ при $x \neq x'$.

В то же самое время можно заметить, что пределы суммирования в (3.46) и (3.118) различаются, так же как и вид входящих в них обобщенных коэффициентов $\hat{b}_{m,n}$ и $\hat{a}_{m,n}$. Причина этого состоит в том, что оба используемых

нами алгоритма являются не слишком «умными», в том смысле, что механически генерируемые ими выражения могут быть существенно улучшены. Примером является появление ложных коэффициентов: очевидно, более внимательный учет соотношений типа (1.53)–(1.54), существующих между тензорами $\sigma^b_{a_1\dots a_n}$ и $\hat{\mathcal{I}}_{a_1\dots a_n}$, позволил бы упростить многие обобщенные коэффициенты, а все ложные коэффициенты при этом бы занулились⁵. Другим примером является наличие членов, в которые мировая функция $\sigma(x, x')$ входит в качестве множителя. Оказывается, что при заданном целом ν различные обобщенные экспоненты $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z)$ связаны дополнительными соотношениями, с помощью которых можно систематически устранять такие члены, приводя разложение к некоторому наиболее простому каноническому виду.

⁵Кажется, что метод теории возмущений в этом плане лучше преобразования Фурье, т.к. исходит из разложения ДеВитта для оператора типа Лапласа $\hat{H}(\nabla)$, в котором ложных коэффициентов нет.

Глава 4. Аномальное действие Ригерта-Фрадкина-Цейтлина (RFT) и ковариантная теория возмущений

4.1 Конформный оператор Паница Δ_4 и конформная плотность Θ_4

На четырехмерном римановом многообразии \mathcal{M} существуют две крайне важные плотности. Во-первых, это плотность Гаусса-Бонне

$$E = R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2, \quad (4.1)$$

обладающая хорошими топологическими свойствами. Для компактных многообразий без границы интеграл

$$e_E = \frac{1}{32\pi^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} E(x) \quad (4.2)$$

есть эйлерова характеристика многообразия, являющаяся конформным инвариантом.

Во-вторых, это так называемая Q -кривизна Брансона

$$Q_4 = \sqrt{g} \left(-\frac{1}{2} R_{ab} R^{ab} + \frac{1}{6} R^2 + \frac{1}{6} \square R \right), \quad (4.3)$$

обладающая хорошими конформными свойствами. Именно, при конформных (вейлевских преобразованиях) метрики

$$g_{ab} \mapsto \tilde{g}_{ab} = e^{2\sigma} g_{ab} \quad (4.4)$$

Q -кривизна Брансона преобразуется линейно по параметру конформного преобразования σ :

$$\tilde{Q}_4 = Q_4 + \Delta_4 \sigma, \quad \text{где} \quad (4.5)$$

$$\Delta_4 = \sqrt{g} \left(\square^2 + 2R^{ab} \nabla_a \nabla_b + \frac{2}{3} R \square + \frac{1}{3} (\nabla^a R) \nabla_a \right) \quad (4.6)$$

есть так называемый конформный оператор Паница [61], не изменяющийся при конформных преобразованиях

$$\tilde{\Delta}_4 = \Delta_4. \quad (4.7)$$

Заметим, однако, что, вообще говоря, плотность Гаусса-Бонне не обладает хорошими конформными свойствами, преобразуясь нелинейно по σ , а Q -кривизна Брансона не обладает хорошими топологическими свойствами, не порождая при интегрировании топологический инвариант. С другой стороны, свойства этих величин определяют их неоднозначно: очевидно, плотность Гаусса-Бонне определена лишь с точностью до полной производной, а Q -кривизна Брансона — с точностью до конформного инварианта. Поэтому возможно построить некоторую единственную комбинацию этих величин, которая одновременно обладала хорошими топологическими и конформными свойствами. Именно, если мы определим

$$\Theta_4 \equiv \sqrt{g} \left(E + \frac{2}{3} \square R \right) = 4Q_4 + \sqrt{g} W^2, \quad (4.8)$$

то эта величина будет отличаться от плотности Гаусса-Бонне на полную производную $\frac{2}{3} \square R$, а от Q -кривизны Брансона — на конформный инвариант $\sqrt{g} W_{abcd} W^{abcd}$ (здесь W_{abcd} — конформный тензор Вейля). Поэтому она обладает замечательными свойствами, в частности, имеет линейный закон конформных преобразований

$$\tilde{\Theta}_4 = \Theta_4 + 4\Delta_4 \sigma, \quad (4.9)$$

и будет играть ключевую роль во всех последующих рассуждениях.

4.2 Видимое противоречие между RFT-действием и результатами ковариантной теории возмущений

В современной литературе считается, что статус локальных конформных аномалий полностью решен. Однако, в отличие от простого критерия непротиворечивости квантования конформно-инвариантных на классическом уровне теорий, вопрос об их значимости для конкретных физических эффектов часто остается предметом дискуссий. Проявление конформной аномалии в физических приложениях обычно происходит в рамках формализма эффективного действия, и на протяжении многих лет ведутся споры о структуре этого действия между пионерами конформной аномалии и приверженцами теории возмущений. Суть этой дискуссии состоит в видимом противоречии между

известным выражением аномального действия и формой нелокального эффективного действия, полученной с помощью диаграммной техники Фейнмана.

Как хорошо известно, однопетлевая конформная аномалия для конформно-инвариантной на классическом уровне 4-мерной теории, имеющей в евклидовом искривленном пространстве-времени ковариантно перенормированное эффективное действие $\Gamma[g_{ab}]$, имеет вид [31–33; 62; 133–135]

$$\langle T_a^a \rangle \equiv \frac{2 g_{ab}}{\sqrt{g}} \frac{\delta \Gamma}{\delta g_{ab}} = \frac{1}{16\pi^2} (\alpha W^2 + \beta E - \gamma \square R), \quad (4.10)$$

где E есть плотность Гаусса-Бонне (4.1), W^2 — это квадрат тензора Вейля, а α , β и γ — некоторые численные коэффициенты, определяющиеся составом полей теории с различным спином.¹

Аномальное действие $\Gamma_A[g_{\mu\nu}]$, порождающая эту аномалию, было впервые получено в нелокальной форме Ригертом [60] и Фрадкиным и Цейтлиным [41] в локальной форме конформного действия Весса-Зумино, включающего вспомогательное скалярное поле — дилатон, отвечающее за связь двух конформно-связанных метрик. Нелокальная форма действия Ригерта-Фрадкина-Цейтлина (RFT), записанная через Θ -плотность (4.8) и оператор $1/\Delta_4$, обратный к конформному оператору Паница (4.6) (т.е. $\frac{1}{\Delta_4}\psi(x) = \int d^4y \mathcal{G}(x,y)\psi(y)$, $\Delta_4\mathcal{G}(x,y) = \delta(x,y)$), имеет вид

$$\Gamma_A[g] = \frac{1}{64\pi^2} \int d^4x \left(\alpha W^2 + \frac{\beta}{2} \Theta_4 \right) \frac{1}{\Delta_4} \Theta_4 - \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{9} \right) \Gamma_{R^2}[g], \quad (4.11)$$

где $\Gamma_{R^2}[g] = \int d^4x \sqrt{g} R^2$.

Через некоторое время после открытия RFT-действия внимание к нему привлекли Антониадис, Мазур и Моттола в связи с несколькими приложениями в теории гравитации [72; 73]. Однако выражение (4.11) встретило серьёзную критику [67] ввиду его радикального структурного отличия от перенормированного эффективного действия, построенного в рамках теории возмущений по степеням кривизны пространства-времени. Соответствующее разложение [62] начинается с

$$\Gamma_{\text{ren}} = \frac{1}{32\pi^2} \int dx \sqrt{g} \left[-\alpha W_{abcd} \ln \left(\frac{\square}{\mu^2} \right) W^{abcd} - \frac{\gamma}{6} R^2 \right] + O(\mathfrak{R}^3), \quad (4.12)$$

¹Для простоты мы не включаем в аномалию вклад F_{ab}^2 векторного калибровочного поля и вклад φ^4 самодействующего конформного скалярного поля.

где \mathfrak{R} коллективно обозначает тензоры Римана, Риччи и скалярную кривизну. Последнее выражение совершенно не похоже на (4.11). Кроме того, как было показано в [68], для генерируемых RFT-действием корреляторов тензора энергии-импульса их поведение на малых расстояниях противоречит конформным тождествам Уорда. Другая критика была связана с возражениями против двухполюсной структуры функции Грина оператора (4.6), $\sim 1/\square^2$ [69]. Хотя эти возражения были опровергнуты в [70] явными вычислениями корреляторов $\langle TTT \rangle$, вопрос, возможно, все еще остается нерешенным в литературе [71].

Целью данной главы будет обсуждение статуса эффективных действий, ответственных за возникновение конформной аномалии. Вначале мы сосредоточимся на широком семействе нелокальных аномальных действий, включающем в себя RFT-действие. Идея этой конструкции аналогична фиксации калибровочной неоднозначности конформного расщепления метрики, как аргумента функционала действия, довольно давно предложенной в [77]. Полученный класс аномальных действий будет параметризован конформной калибровкой, выбирающей представителя на орбите локальной конформной группы. Мы явно продемонстрируем, что разность членов этого класса представляет собой конформно-инвариантный функционал. Будут рассмотрены две конкретные калибровки, одна из которых в точности соответствует RFT-действию (4.11), а другая связана с конформно-инвариантным нелокальным перемасштабированием метрики, предложенным Фрадкиным и Вилковским [34]. Это перемасштабирование, которое непосредственно применимо в асимптотически плоском пространстве-времени, является аналогом проблемы Ямабе о локальном конформном преобразовании переводящим заданную метрику в метрику с нулевой скалярной кривизной.

Затем мы покажем, что в первых трех порядках разложения по степеням кривизны аномальное действие Фрадкина-Вилковского (FV) совпадает с разложением однопетлевого эффективного действия с помощью ковариантной теории возмущений. Мы обсудим связанный с этим механизм частичного суммирования членов этого разложения со скалярной кривизной [136], а также проблему двойного полюса для функции Грина оператора Паница (4.6).

4.3 Фиксация конформной калибровки

Расщепление перенормированного эффективного действия конформно-инвариантной на классическом уровне теории на аномальную часть Γ_A , порождающую конформную аномалию (4.10), и конформно-инвариантную часть Γ^{conf} , $g_{ab}\delta\Gamma^{\text{conf}}/\delta g_{ab} = 0$,

$$\Gamma_{\text{ren}} = \Gamma_A + \Gamma^{\text{conf}}, \quad (4.13)$$

очевидным образом неоднозначно и определено с точностью до некоторого конформно-инвариантного функционала W^{conf}

$$\Gamma_A \rightarrow \Gamma_A + W^{\text{conf}}, \quad \Gamma^{\text{conf}} \rightarrow \Gamma^{\text{conf}} - W^{\text{conf}}, \quad (4.14)$$

$$g_{ab} \frac{\delta W^{\text{conf}}}{\delta g_{ab}} = 0. \quad (4.15)$$

Свобода выбора $W^{\text{conf}}[g_{ab}]$ возникает как функциональная константа интегрирования для вариационного уравнения первого порядка, которое можно записать для $\Gamma_A[g_{ab}]$ или для перенормированного эффективного действия $\Gamma[g_{ab}] \equiv \Gamma_{\text{ren}}[g_{ab}]$. На орбите конформной группы, проходящей через метрику g_{ab} (аргумент эффективного действия) и параметризованной локальным конформным параметром $\sigma = \sigma(x)$,

$$g_{ab} = e^{2\sigma} \bar{g}_{ab}, \quad (4.16)$$

перенормированное действие $\Gamma_{\text{ren}}[e^{2\sigma}\bar{g}]$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}[e^{2\sigma}\bar{g}]}{\delta \sigma} = \frac{\sqrt{\bar{g}}}{16\pi^2} (\alpha C^2 + \beta E - \gamma \square R) \Big|_{g_{ab}=e^{2\sigma}\bar{g}_{ab}}. \quad (4.17)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано, что приводит к конформному действию Весса-Зумино [41]

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma[\bar{g}, \sigma] &\equiv \Gamma_{\text{ren}}[g] - \Gamma_{\text{ren}}[\bar{g}] = \Gamma_A[g] - \bar{\Gamma}_A[\bar{g}] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x [(\alpha\sqrt{\bar{g}}\bar{W}^2 + \beta\bar{\Theta}_4) \sigma + 2\beta\sigma\Delta_4\sigma] - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{9} \right) \Gamma_{R^2} \Big|_{\bar{g}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x [(\alpha\sqrt{g}W^2 + \beta\Theta_4) \sigma - 2\beta\sigma\Delta_4\sigma] - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{9} \right) \Gamma_{R^2} \Big|_g, \quad (4.19)$$

где две метрики g_{ab} и \bar{g}_{ab} связаны соотношением (4.16) и все величины с черточками построены по метрике \bar{g}_{ab} .

Существует также третья форма действия Весса-Зумино, которая будет представлена ниже в уравнении (5.24). Она существует при специальной перенормировке, обращающей в ноль коэффициент γ члена $\square R$ в (4.10), и лежит в основе доказательства так называемой a -теоремы для монотонного ренормгруппового потока коэффициента $a = \beta/16\pi^2$ топологического члена в кофрмной аномалии [137; 138].

По модулю исчезающей конформной аномалии все точки на орбите конформной группы (4.16) физически эквивалентны. С этой типичной ситуацией нарушения локальной калибровочной инвариантности можно справиться, введя калибровочное условие, однозначно выбирающее \bar{g}_{ab} как представитель класса эквивалентности метрик (4.16). Если обозначить это калибровочное условие как $\chi[\bar{g}] = 0$, то этот представитель должен однозначно выбираться решением уравнения для конформного параметра σ ,

$$\chi[\bar{g}] = \chi[e^{-2\sigma} g] = 0. \quad (4.20)$$

Решение этого уравнения зависит от выбора калибровки χ и является функционалом метрики \bar{g} , поэтому мы будем обозначать его символом $\Sigma_\chi[\bar{g}]$. Представитель конформной орбиты $\bar{g}_{ab}[g]$ как функционал от заданной метрики g_{ab} (через которую проходит орбита) является конформным инвариантом,

$$\bar{g}_{ab}[g] \equiv g_{ab} e^{-2\Sigma_\chi[\bar{g}]}, \quad g_{cd} \frac{\delta \bar{g}_{ab}[g]}{\delta g_{cd}} = 0, \quad (4.21)$$

поскольку при любом конформном преобразовании $g_{ab} \rightarrow e^{2\sigma} g_{ab}$ конформный параметр преобразуется как $\Sigma_\chi[g] \rightarrow \Sigma_\chi[g] + \sigma$ в силу тождества $\chi[ge^{-\Sigma_\chi[g]}] \equiv 0$. Поэтому

$$\delta_\sigma \Sigma_\chi[\bar{g}] = \sigma, \quad (4.22)$$

где δ_σ есть оператор конформной вариации

$$\delta_\sigma \equiv 2 \int d^4x \sigma(x) g_{ab}(x) \frac{\delta}{\delta g_{ab}(x)}. \quad (4.23)$$

Для единственности такой процедуры фиксации конформной калибровки (в пространстве-времени и хотя бы в некоторой конечной области пространства метрик) оператор Фаддеева-Попова $Q_\chi = Q_\chi(x, y)$, соответствующий калибровке $\chi[g]$, $\delta_\omega \chi(x) = \int d^4y Q_\chi(x, y) \omega(y)$, должен быть невырожденным.

Итак, члены (4.19)

$$W^{\text{conf}}[g] = \Gamma_A[\bar{g}] + \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{9} \right) \Gamma_{R^2}[\bar{g}], \quad (4.24)$$

вычисленные на метрике $\bar{g}_{ab}[g]$, могут рассматриваться как конформно-инвариантная «постоянная интегрирования», в то время как оставшиеся члены могут быть отождествлены с аномальным действием после подстановки $\sigma = \Sigma_\chi[g]$. Это приводит к следующему семейству аномальных действий $\Gamma_A[g] \equiv \Gamma_\chi[g]$, параметризованному выбором калибровочного условия χ ,

$$\Gamma_\chi[g] = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x \left[(\alpha\sqrt{g}W^2 + \beta\Theta_4) \Sigma_\chi - 2\beta\Sigma_\chi\Delta_4\Sigma_\chi \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{9} \right) \Gamma_{R^2}[g]. \quad (4.25)$$

Разность между двумя действиями из этого семейства является, разумеется, конформно-инвариантным функционалом. Для двух произвольных конформных калибровок имеем

$$\Gamma_{\chi_1} - \Gamma_{\chi_2} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x (\Sigma_{\chi_1} - \Sigma_{\chi_2}) \left[\alpha\sqrt{g}W^2 + \beta\Theta_4 - 2\beta\Delta_4(\Sigma_{\chi_1} + \Sigma_{\chi_2}) \right]. \quad (4.26)$$

Конформная вариация этого выражения исчезает $\delta_\sigma(\Gamma_{\chi_1} - \Gamma_{\chi_2}) = 0$ в силу закона конформных преобразований (4.22) для $\Sigma_{1,2}$, конформной инвариантности плотности $\sqrt{g}W^2$, и соотношения (4.9), которое в инфинитезимальной форме имеет вид

$$\delta_\sigma\Theta_4 = 4\Delta_4\sigma. \quad (4.27)$$

Заметим, что при нашем определении аномального действия (4.25) полное квантовое действие может быть представлено в виде

$$\Gamma[g] = \Gamma_\chi[g] + \Gamma[\bar{g}] + \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{9} \right) \Gamma_{R^2}[\bar{g}], \quad (4.28)$$

где $\bar{g}_{ab}[g] = e^{-2\Sigma_\chi[g]}g_{ab}$.

4.3.1 Калибровка Ригерта-Фрадкина-Цейтлина (RFT)

Очевидным выбором конформной калибровки, связанным с плотностью Гаусса-Бонне и кривизной Брансона, является калибровка Ригерта-Фрадкина-Цейтлина

$$\chi_{\text{RFT}}[\bar{g}] \equiv \bar{\Theta}_4 = 0. \quad (4.29)$$

Ее можно применить для топологически простых пространственно-временных многообразий с исчезающей объемной частью эйлеровой характеристики (см. уравнение (4.46) и сноску 3 ниже). В частности, это свойство справедливо для асимптотически плоских пространств, которые мы в основном рассматриваем. Преимущество этой калибровки в том, что она точно разрешима благодаря закону преобразования (4.9). Применяя эту калибровку и используя уравнение (4.7), получаем линейное уравнение на Σ_{RFT} , которое имеет решение в терминах обратного оператора Паница

$$\Sigma_{\text{RFT}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta_4} \Theta_4. \quad (4.30)$$

Формально подставляя это выражение в (4.25) мы получим в точности RFT-действие (4.11).

Обратный оператор Паница и определенное с его помощью RFT-действие корректно определены на асимптотически-плоском пространстве-времени с граничными условиями Дирихле на бесконечности, если рассматривать их в рамках теории возмущений в степенях кривизн \mathfrak{R} . Действительно, в этом случае

$$\frac{1}{\Delta_4} = \frac{1}{\square^2} + O(\mathfrak{R}), \quad (4.31)$$

и действие этого оператора на функции типа Θ_4 хорошо определено. Из-за двухполюсной природы оператора $1/\square^2$ его действие на функции общего вида может быть плохо определено из-за инфракрасных расходимостей. Однако если функция имеет структуру полной производной, то под действием $1/\square^2$ она порождает мультипольное разложение, в четырехмерьи хорошо определенное на пространственно-временной бесконечности [64].² Но плотность Гаусса-Бонне и $\sqrt{g} \square R$ локально являются полными производными, что делает $1/\Delta_4$ хорошо определенным в выражении (4.30) для Σ_{RFT} . Фактически это означает обратимость оператора Фаддеева-Попова в этой калибровке, который с точностью до коэффициента совпадает с оператором Панейца $Q_{\text{RFT}} = 4\Delta_4$, что тем самым гарантирует локальную единственность процедуры фиксации конформной калибровки.

² Как обсуждалось в [64], оператор $1/\square^n$ в d -мерном пространстве с $d < 2n$ плохо определен, если только функции, на которые он действует, не имеют вида $\partial^m j(x)$, $m = 2n - d + 1$ с функцией $j(x)$, имеющей асимптотическое поведение $j(x) = O(1/|x|^d)$, $|x| \rightarrow \infty$. Это свойство можно объяснить тем, что при мультипольном разложении $\frac{1}{\square} \partial^m j(x)$ первые несколько мультиполей исчезают, что улучшает скорость убывания результата на бесконечности и делает возможным повторное действие $1/\square$.

Более того, приведенное выше наблюдение служит контраргументом против утверждения в [69] о опасной роли двойных полюсов в RFT-действии. Отсутствие опасных двойных полюсов в инфракрасной области очевидно в низшем порядке разложения по кривизне для Σ_{RFT} , которое имеет вид

$$\Sigma_{\text{RFT}} = \frac{1}{6\Box} R + O(\mathfrak{R}^2), \quad (4.32)$$

ввиду того, что плотность Гаусса-Бонне квадратична по кривизне $\sqrt{g}E = O(\mathfrak{R}^2)$. Высшие порядки этого разложения также безопасны из-за того, что $\sqrt{g}E$ является полной производной. Что касается квадратичной части низшего порядка по кривизне, то в приведенном выше приближении для Σ_{RFT} она равна

$$\Gamma_{\text{RFT}}[g] = -\frac{\gamma}{192\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} R^2 + O(\mathfrak{R}^3), \quad (4.33)$$

потому что все члены, зависящие от параметра β , полностью сокращаются, а то, что остается, совпадает с последним квадратичным членом (4.12). Это полностью совпадает с линейной по кривизне частью конформной аномалии (4.10) (ее γ -члена), порожденной квадратичным действием (4.12). Действительно, конформное преобразование ее нелокального вейлевского члена дает вклад только в $O(\mathfrak{R}^2)$ часть аномалии, поскольку только ее формфактор $\ln(\Box/\mu^2)$ не является конформно-инвариантным, и весь γ -член аномалии целиком происходит из R^2 -части (4.12).

4.3.2 Калибровка Фрадкина-Вилковыского (FV)

Другая конформная калибровка возникает в контексте конформного расширения эйнштейновской гравитации вне массовой оболочки, предложенного в [34], и соответствует четырехмерной версии проблемы Ямабе. Представителем орбиты конформной группы выбрана метрика с исчезающей скалярной кривизной

$$\chi_{\text{FV}}[\bar{g}] = \bar{R}, \quad (4.34)$$

откуда следует нелинейное, но все же явно решаемое уравнение для Σ_{FV} ,

$$R[e^{-2\Sigma_{\text{FV}}} g_{ab}] = e^{3\Sigma_{\text{FV}}} (R + 6\Box) e^{-\Sigma_{\text{FV}}} = 0. \quad (4.35)$$

Это решение имеет вид

$$\Sigma_{\text{FV}} = -\ln\left(1 - \frac{1}{6\Box + R/6}R\right), \quad \lim_{|x|\rightarrow\infty} e^{-\Sigma_{\text{FV}}} = 1 \quad (4.36)$$

в терминах оператора, обратного к конформному оператору второго порядка $\Box + \frac{1}{6}R$ при нулевых граничных условиях на бесконечности. Этот обратный оператор также допускает ковариантное разложение по кривизне и в низшем порядке дает функцию Σ_{FV} , совпадающую с функцией RFT-калибровки (4.32),

$$\Sigma_{\text{FV}} = \Sigma_{\text{RFT}} + O(\mathfrak{R}^2). \quad (4.37)$$

Следовательно, в квадратичном порядке он порождает то же выражение для аномального действия

$$\Gamma_{\text{FV}} = \Gamma_{\text{RFT}} + O(\mathfrak{R}^3). \quad (4.38)$$

Используя уравнения (4.26) и (4.30) легко видеть, что разность RFT- и FV-действий дается точным выражением

$$\Gamma_{\text{RFT}} - \Gamma_{\text{FV}} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4x (\Sigma_{\text{RFT}} - \Sigma_{\text{FV}}) \left[\alpha\sqrt{g}W^2 + 2\beta \Delta_4(\Sigma_{\text{RFT}} - \Sigma_{\text{FV}}) \right], \quad (4.39)$$

билинейным по квадрату тензора Вейля и конформно-инвариантному нелокальному функционалу

$$\Sigma_{\text{RFT}} - \Sigma_{\text{FV}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta_4} \Theta_4 + \ln\left(1 - \frac{1}{6\Box + R/6}R\right) = O(\mathfrak{R}^2). \quad (4.40)$$

Поэтому в рамках теории возмущений эти два действия совпадают вплоть до кубического порядка и различаются лишь начиная с четвертого порядка по кривизне.

С точки зрения теории возмущений оба члена (4.40) порождают сходные нелокальные древо-подобные структуры, то есть члены, характерные для древесного приближения в теории поля. Такие члены состоят из степеней обратных даламберианов, действующих на тензорные структуры кривизны или на произведения аналогичных нелокальных тензорных структур, построенных по той же схеме. Однако, взятые по отдельности как точные выражения, они обладают существенно разными типами нелокальности. В формализме RFT-действия используется функция Грина оператора Паница четвертого порядка, тогда как FV-версия действия основана на функции Грина оператора второго

порядка $\square + \frac{1}{6}R$. Оба оператора конформно-ковариантны, но преобразование Вейля $\square + \frac{1}{6}R$ отличается от (4.7):

$$\square + \frac{1}{6}R = e^{-3\sigma} (\bar{\square} + \frac{1}{6}\bar{R}) e^\sigma. \quad (4.41)$$

Более того, формализм FV-действия предполагает особую логарифмическую нелинейность, отсутствующую при фиксации RFT-калибровки. Действие производных оператора Панейца в (4.25) может разрушить эту логарифмическую структуру, но $\Sigma_{\text{FV}}W^2$ -член в Γ_{FV} по-прежнему будет содержать ее нетронутой.

Дальнейшее сравнение RFT- и FV-действий можно провести на основе их «естественности». RFT-калибровка (4.29) является естественной с точки зрения конформной теории, т.к. она основана на фундаментальных объектах — плотности Θ_4 и конформном операторе Паница Δ_4 , которые возникают при конформных преобразованиях аномального действия (4.18). Наоборот, FV-калибровка (4.34) основана на кажущейся посторонней сущности — скалярной кривизне R , выделенной только тем, что она является носителем метрической конформной моды. В результате преимуществом FV-калибровки является то, что она не включает производные выше второго порядка и не создает двухполюсных нелокальностей. Еще одним преимуществом является то, что уравнение (4.28), отделяющее аномальное FV-действие от полного эффективного действия, с учетом $\bar{R} = 0$ становится значительно проще

$$\Gamma[g] = \Gamma_{\text{FV}}[g] + \Gamma[\bar{g}], \quad (4.42)$$

где $\bar{g}_{ab}[g] = e^{-2\Sigma_{\text{FV}}[g]}g_{ab}$, что, очевидно, согласуется с тем, что $\Gamma_{\text{FV}}[\bar{g}] = 0$, поскольку $\Sigma_{\text{FV}}[\bar{g}] \equiv 0$.

К числу технических недостатков RFT-калибровки и действия по сравнению с FV-версией относится наличие производных четвертого порядка в операторе Паница. В связи с этим RFT-версия оказывается уязвимой с точки зрения возможных обобщений. Например, модификация калибровки (4.29) дополнительным членом с квадратом тензора Вейля, $\chi_{\text{RFT}} \rightarrow \chi_{\text{RFT}} + a\sqrt{g}W^2$ не будет работать, поскольку соответствующая модификация $\Sigma_{\text{RFT}} \rightarrow \Sigma_{\text{RFT}} + a(2\Delta_4)^{-1}W^2$ плохо определена по причинам, описанным выше в сноске 2 — дополнительный член должен иметь структуру полной производной.

Обобщение на пространство-время с нетривиальной топологией также не является простым, поскольку условие (4.29) не должно противоречить ненулевой эйлеровой характеристике многообразия e_E (4.2). Так, для компактного

многообразия конечного объема $V = \int d^4x \sqrt{g}$ калибровку (4.29) можно выбрать

$$\chi[\bar{g}] = \bar{\Theta}_4 - 32\pi^2 \frac{e_E}{V} \sqrt{\bar{g}}, \quad (4.43)$$

но это приводит к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению для соответствующего Σ

$$4\Delta_4\Sigma = \Theta_4 - 32\pi^2 \frac{e_E}{V} \frac{e^{-4\Sigma}}{\langle e^{-4\Sigma} \rangle} \sqrt{g}, \quad (4.44)$$

$$\langle e^{-4\Sigma} \rangle \equiv \frac{1}{V} \int d^4x \sqrt{g} e^{-4\Sigma}, \quad (4.45)$$

которую, по-видимому, можно решить аналитически только по теории возмущений по e_E/V .

Если не указано иное, ниже мы рассматриваем асимптотически-плоское пространство-время с тривиальной топологией, эйлерову характеристику которого следует модифицировать граничным членом. Для обычных четырехмерных многообразий с гладкой границей она имеет вид

$$e_E = \frac{1}{32\pi^2} \left(\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} E(x) + \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{\gamma} \Omega(x) \right), \quad (4.46)$$

где $\gamma = \det \gamma_{ij}$ и γ_{ij} — индуцированная метрика на $\partial\mathcal{M}$. Для асимптотически плоского случая из-за вклада $\partial\mathcal{M}$ на бесконечности $|x| \rightarrow \infty$ он равен 1, так что всюду далее объемная часть эйлеровой характеристики равна $\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} E(x) \equiv e'_E = e_E - 1 = 0$.³

4.4 Конформная аномалия и ковариантное разложение по степеням кривизны

Несмотря на разнообразие нелокальных структур RFT- и FV-версий аномального действия, кажется, что ни одна из них не фигурирует в традиционной теории возмущений для квантового эффективного действия. Ковариантная

³ Явное и простое выражение для граничного члена эйлеровой характеристики в четырехмерном случае можно найти в [28], $\Omega = \frac{1}{4} R_{a\perp b\perp} K^{ab} + 16 \det K_b^a$, где $K_{ab} = \nabla_a n_b$ — внешняя кривизна границы, а \perp обозначает проекцию на направленный наружу вектор нормали n^a . Последний член в Ω в точности воспроизводит значение числа Эйлера $e_E = 1$ для плоских и асимптотически плоских пространств [139].

форма этой теории возмущений в искривленном пространстве-времени (4.12) была впервые предложена в [62], но ее логарифмический нелокальный форм-фактор совсем не похож на нелокальные операторы RFT-действия (4.11). Здесь мы показываем, что, несмотря на эти расхождения, аномальное действие возникает из ковариантной теории возмущений [63; 64; 66].

Эта теория возмущений возникла как конкретная реализация идей [62] как разложение по степеням ковариантных тензоров кривизны пространства-времени, кривизны в расслоении и других ковариантных фоновых полей. Это разложение полностью эквивалентно стандартной диаграммной технике Фейнмана и представляет собой ее пересуммирование, преобразующее исходный ряд теории возмущений по нековариантным объектам, таких как возмущения полей материи и метрики на фоне плоского и пустого пространства-времени, в ряд по степеням ковариантных напряженностей полей, совместно обозначенных ниже как \mathfrak{R} .

В ковариантной теории возмущений однопетлевое эффективное действие разлагается по степеням кривизны

$$G = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln F(\nabla) = \overbrace{\Gamma_0 + \Gamma_1}^{\text{local power div}} + \Gamma_2 + \Gamma_3 + O(\mathfrak{R}^4), \quad (4.47)$$

где $\Gamma_n \sim \mathfrak{R}^n$. В рамках размерной регуляризации 2ω -мерного пространства-времени, $\omega \rightarrow 2$, члены нулевого и первого порядка разложения представляют собой чисто степенные расходимости (обратите внимание, что мы рассматриваем случай безмассовой теории или теории, в которой массовая матрица включена в потенциальный член \hat{P} и рассматривается как возмущение), так что эти два члена убираются регуляризацией, а член второго порядка задается выражением [63]

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{dim reg}}^{(2)} = & -\frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega+1)\Gamma(\omega-1)}{2(4\pi)^\omega\Gamma(2\omega+2)} \mu^{4-2\omega} \int dx \sqrt{g} \text{tr} \left\{ R_{ab} \square^{\omega-2} R^{ab} \hat{1} \right. \\ & - \frac{1}{18} (4-\omega)(\omega+1) R \square^{\omega-2} R \hat{1} - \frac{2}{3} (2-\omega)(2\omega+1) \hat{P} \square^{\omega-2} R \\ & \left. + 2(4\omega^2-1) \hat{P} \square^{\omega-2} \hat{P} + (2\omega+1) \hat{\mathcal{R}}_{ab} \square^{\omega-2} \hat{\mathcal{R}}^{ab} \right\}, \quad (4.48) \end{aligned}$$

где $\omega = \frac{d}{2} \rightarrow 2$. Здесь tr обозначает матричный след, а конкретные коэффициенты реализуют первоначально предполагаемую структуру размерно регуляризованного эффективного действия, $\mathfrak{R} \square^{\omega-2} \mathfrak{R}$, которая была разработана в [62]. Следует особо подчеркнуть, что под $\square = -g^{ab} \nabla_a \nabla_b$ здесь

подразумевается полный ковариантный даламбертиан, действующий на соответствующий скаляр R , тензоры R_{ab} и $\hat{\mathcal{R}}_{ab}$ и объекты \hat{P} .

Для краткости будем рассматривать случай одного конформного скалярного поля с $\hat{1} = 1$, $\hat{P} = 0$, $\hat{\mathcal{R}}_{ab} = 0$ и следующими значениями коэффициентов конформной аномалии⁴:

$$\alpha = -\frac{1}{120}, \quad \beta = \frac{1}{360}, \quad \gamma = -\frac{1}{180}, \quad (4.49)$$

для которого действие (4.48) принимает форму — частный случай (4.12),

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ren}}^{(2)} &= \frac{1}{32\pi^2} \int dx \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{60} \left[R_{ab} \gamma(\square) R^{ab} - \frac{1}{3} R \gamma(\square) R \right] + \frac{R^2}{1080} \right\} \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int dx \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{120} W_{abcd} \gamma(\square) W^{abcd} + \frac{R^2}{1080} \right\} + O(\mathfrak{R}^3). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Здесь $\gamma(\square)$ — нелокальный формфактор (в схеме минимального вычитания с $\ln(4\pi)$ и постоянной Эйлера, спрятанными в μ)

$$\gamma(\square) = \ln \left(\frac{\square}{\mu^2} \right) - \frac{16}{15}, \quad (4.51)$$

а переход к последней строке справедлив вплоть до членов более высокого порядка по кривизне и основан на нелокальном обобщении тождества

$$\int d^4x \sqrt{g} W^2 = 2 \int d^4x \sqrt{g} (R_{ab} R^{ab} - \frac{1}{3} R^2) \quad (4.52)$$

полученном в [64; 66] путём интегрирования по частям и использования нелокального представления тензора Римана через тензор Риччи (см. сноску 5 ниже).

Первый член этого действия, очевидно, конформно-инвариантен в квадратичном порядке, так что линейная по кривизне часть аномалии возникает из последнего члена, который является RFT-действием (или FV-) (4.33) в квадратичном приближении с $\gamma = -1/180$. Таким образом, RFT- или FV-действие в этом приближении полностью восстанавливается из теории возмущений и, как и ожидалось, оказывается локальным.

⁴Коэффициенты имеют знак, противоположный знаку $b = -\alpha/16\pi^2$ и $b' = -\beta/16\pi^2$ в [33], поскольку в нашем случае тензор энергии-импульса определен для евклидова эффективного действия $\Gamma = -i\Gamma_L$ в отличие от определения $T^{ab} = 2g^{-1/2}\delta\Gamma_L/\delta g_{ab}$ в лоренцевом пространстве-времени [33]. При сравнении с [133] следует также учитывать дополнительный знак, связанный с определением тензора энергии-импульса как вариации по контравариантной метрике.

4.4.1 Кубический порядок по кривизне

Квадратичный порядок ковариантного разложения по кривизне на самом деле является тривиальным обобщением выражений для операторов собственной энергии в диаграммной технике Фейнмана в плоском пространстве, поскольку $\ln(\square/\mu^2)$ — это просто замена типичного формфактора в импульсном пространстве $\ln(p^2/\mu^2)$ на его пространственно-временную версию. В более высоких порядках ситуация становится намного более сложной и обычно представляется в терминах корреляторов тензора энергии-импульса и других наблюдаемых, записанных в импульсном представлении; см. [140–142] для рассмотрения общих конформных теорий поля. Эти корреляторы, конечно, содержатся в разложении эффективного действия по кривизне, которое по соображениям общей ковариации мы предпочитаем рассматривать в пространственно-временном представлении.

В этом представлении эффективное действие в каждом порядке N по кривизне представляется в виде суммы нелокальных мономов

$$\int d^4x_1 \cdots d^4x_N F(x_1, \dots, x_N) \nabla \dots \nabla \mathfrak{R}(x_1) \dots \mathfrak{R}(x_N) \quad (4.53)$$

с нелокальными многоточечными коэффициентами и ковариантными производными, некоторым образом действующими на произведение кривизн в их различных точках. Отсутствие удобного и общековариантного импульсного представления вынуждает работать с пространственно-временным представлением с помощью специального языка, упрощающего формализм [63; 64; 66]. Этот язык основан на операторном представлении нелокальных формфакторов,

$$F(x_1, \dots, x_N) = \Gamma(\nabla_1, \dots, \nabla_N) \delta(x_1, x_2) \cdots \delta(x_1, x_N), \quad (4.54)$$

где $\Gamma(\nabla_1, \dots, \nabla_N)$ есть операторно-значная функция N независимых ковариантных производных ∇_i , каждая из которых действует на свою точку x_i . Это позволяет записать разложение теории возмущений в виде

$$I^{(N)} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \sum_M \Gamma_M(\nabla_1, \dots, \nabla_N) I_M(x_1, \dots, x_N) \Big|_{\{x\}=x}, \quad (4.55)$$

где суммирование ведется по всем инвариантным мономам заданного n -го порядка по кривизне

$$I_M(x_1, \dots, x_N) \sim \nabla \cdots \nabla \mathfrak{R}(x_1) \cdots \mathfrak{R}(x_N) \quad (4.56)$$

а после действия всех независимых производных на их аргументы все эти аргументы $\{x\} = \{x_1, \dots, x_N\}$ должны быть отождествлены.

В кубическом порядке для полного набора кривизн имеется 29 таких инвариантных структур, построенных из этих кривизн и их ковариантных производных с полностью свернутыми друг с другом индексами. Более того, ввиду скалярной природы формфакторов (отсутствия у них свободных индексов) и формального тождества $\nabla_1 + \nabla_2 + \nabla_3 = 0$ (отражающего возможность интегрирования по частям без поверхностных членов, что является аналогом сохранения импульса) формфакторы $\Gamma^{(3)}$ можно записать как функции трех даламберианов \square_1 , \square_2 и \square_3 , независимо действующих на три аргумента величин $I_M(x_1, x_2, x_3)$. Таким образом, кубический порядок имеет вид

$$\Gamma^{(3)} = \frac{1}{2(4\pi)^2} \int dx \sqrt{g} \sum_{M=1}^{29} \Gamma_M(\square_1, \square_2, \square_3) I_M(x_1, x_2, x_3) \Big|_{\{x\}=x}. \quad (4.57)$$

Список кубических инвариантов и их формфакторов может быть найден в [66; 77; 136]. Он очень длинный и, поскольку его подробности для наших целей не существенны, мы не будем приводить его здесь полностью. Приведем лишь общую структуру нелокальных формфакторов этих инвариантов. Она может быть представлена в виде суммы трех различных групп членов:

$$\Gamma_M(\square_1, \square_2, \square_3) = A_M \Gamma(\square_1, \square_2, \square_3) + \sum_{1 \leq i < k}^3 \frac{D_M^{ik}}{(\square_k - \square_i)} \ln \frac{\square_i}{\square_k} + B_M. \quad (4.58)$$

Здесь $\Gamma(\square_1, \square_2, \square_3)$ есть фундаментальный кубический формфактор, соответствующий треугольной диаграмме Фейнмана безмассовой теории с единичными вершинами [65],

$$\Gamma(\square_1, \square_2, \square_3) = \int_{\alpha \geq 0} \frac{d^3 \alpha \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)}{\alpha_1 \alpha_2 \square_3 + \alpha_1 \alpha_3 \square_2 + \alpha_2 \alpha_3 \square_1}, \quad (4.59)$$

его нельзя выразить через элементарные функции. Операторно-значные коэффициенты A_M , B_M и D_M^{ik} являются рациональными функциями трёх аргументов \square с полиномиальным числителем $P(\square_1, \square_2, \square_3)$ и знаменателем, содержащим вместе с произведением $\square_1 \square_2 \square_3$ также степени специальной квадратичной формы этих аргументов D ,

$$A_M, D_M^{ik}, B_M \sim \frac{P(\square_1, \square_2, \square_3)}{\square_1 \square_2 \square_3 D^L}, \quad L \leq 6, \quad (4.60)$$

$$D = \square_1^2 + \square_2^2 + \square_3^2 - 2\square_1 \square_2 - 2\square_1 \square_3 - 2\square_2 \square_3. \quad (4.61)$$

В этом кубическом порядке разложения по кривизне конформная аномалия (4.10), квадратичная по кривизне, была явно получена путем прямого варьирования по метрике в [143]. Хотя этот вывод и продемонстрировал нетривиальную локализацию нелокальных членов, он все же оставался довольно техническим и не очень информативным, поскольку не выявил аномальной части действия. Однако оказывается, что переход к другому базису инвариантов кривизны, предложенный в [77; 136], позволяет явно разбить эффективное действие на аномальную и конформно-инвариантную части.

4.4.2 Конформное пересуммирование: аномальное действие Фрадкина-Вилковского

Восстановление аномальной части действия и ее конформно-инвариантной части основано на простой идее, что последняя должна состоять из некоторых конформно-инвариантных структур. Построение конформных инвариантов можно выполнить с помощью процедуры фиксации калибровки описанного выше типа — выбора представителя на орбите группы путем наложения конформной калибровки. Очевидно, что набор инвариантов, выживших после введения этой калибровки, будет минимальным, если калибровка явно аннулирует максимальное число инвариантов в их исходном полном наборе. По этой причине FV-калибровку (4.34) гораздо проще использовать для разделения всего набора инвариантов на конформные инварианты и те, которые исчезают после наложения калибровочного условия. Поскольку R является одной из кривизн множества \mathfrak{R} , FV-калибровка более полезна для такого разделения, чем RFT-калибровка (4.29), которая нелинейно переплетает все кривизны. Интуитивно это понятно еще и потому, что R , в отличие от W^a_{bcd} , является носителем конформной моды.

В чисто метрическом секторе такое разделение достигается переходом к новому базису кривизн [136],

$$\mathfrak{R} = (R^a_{bcd}, R_{ab}, R) \rightarrow \tilde{\mathfrak{R}} = (W^a_{bcd}, R), \quad (4.62)$$

путем выражения тензора Риччи через тензор Вейля и скалярную кривизну.⁵ Это выражение следует из свернутого тождества Бьянки, которое для тензора Вейля имеет вид

$$\nabla^b \nabla^a W_{abcd} = -\frac{1}{2} \square R_{cd} - \frac{1}{6} \nabla_c \nabla_d R + \frac{g_{cd}}{12} \square R + O(\mathfrak{R}^2). \quad (4.63)$$

Это уравнение можно решить последовательными приближениями для тензора Риччи в терминах нелокальных рядов по степеням двух объектов — скалярной кривизны R и нового бесследового (и до квадратичного порядка поперечного) тензора W_{ab} , который сам является нелокальной производной тензора Вейля,

$$W_{ab} = -\frac{2}{\square} \nabla^d \nabla_c W^c{}_{adb}. \quad (4.64)$$

Получающийся таким образом ряд начинается с

$$R_{ab} = W_{ab} - \frac{1}{3} \nabla_a \nabla_b \frac{1}{\square} R + \frac{1}{6} g_{ab} R + O(\tilde{\mathfrak{R}}^2). \quad (4.65)$$

Переразложение эффективного действия подразумевает переход от $I_M(x_1, \dots, x_n)$ к новому базису инвариантов,

$$\tilde{I}_M(x_1, \dots, x_n) \sim \nabla \cdots \nabla \tilde{\mathfrak{R}}(x_1) \cdots \tilde{\mathfrak{R}}(x_n), \quad (4.66)$$

которые можно разделить на множество мономов $I_W(x_1, \dots, x_n)$, содержащих только W_{ab} , и множество мономов $I_R(x_1, \dots, x_n)$, содержащее по крайней мере одну скалярную кривизну,

$$I_W(x_1, \dots, x_n) \sim \nabla \cdots \nabla W(x_1) \cdots W(x_n), \quad (4.67)$$

$$I_R(x_1, \dots, x_n) \sim \nabla \cdots \nabla R(x_1) W(x_2) \cdots W(x_n), \\ \nabla \cdots \nabla R(x_1) R(x_2) W(x_3) \cdots W(x_n), \dots \quad (4.68)$$

Разложение по новому базису инвариантов подразумевает, конечно, переход к новому набору соответствующих формфакторов

$$\Gamma_M(\nabla_1, \dots, \nabla_n) \rightarrow \Gamma_W(\nabla_1, \dots, \nabla_n), \Gamma_R(\nabla_1, \dots, \nabla_n). \quad (4.69)$$

⁵ Фактически исходный базис и разложение по кривизне в [63; 64; 66] состояли из R_{ab} и R , поскольку в асимптотически плоском евклидовом пространстве-времени тензор Римана можно выразить в виде нелокального степенного ряда по тензору Риччи: $R_{abcd} = \frac{1}{\square} (\nabla_d \nabla_a R_{bc} - \nabla_c \nabla_a R_{bd}) - (a \leftrightarrow b) + O(\mathfrak{R}^2)$ — это следствие свернутых тождеств Бьянки.

Тогда новое разложение принимает вид

$$\Gamma = W + \Gamma_R, \quad (4.70)$$

где W есть вейлевская, а Γ_R — смешанная Вейль-скалярная часть полного разложения, которые мы запишем сокращенно (опуская множественные пространственно-временные аргументы и операцию их приравнивания)

$$W = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} \sum_{n,W} \Gamma_W^{(n)} I_W^{(n)}, \quad (4.71)$$

$$\Gamma_R = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} \sum_{n,R} \Gamma_R^{(n)} I_R^{(n)}. \quad (4.72)$$

(Заметим, что W и его базисные вейлевские инварианты не являются конформно-инвариантными, поскольку помимо тензоров Вейля содержат ковариантные производные и нетривиальные формфакторы, не обладающие свойствами конформной инвариантности.)

Основное утверждение о конформной декомпозиции эффективного действия [136] состоит в том, что

$$\Gamma[g] = \Gamma_{\text{FV}}[g] + W[\bar{g}], \quad (4.73)$$

где $\bar{g}_{ab} = e^{-2\Sigma_{\text{FV}}[g]} g_{ab}$, а $\Gamma_{\text{FV}}[g]$ — это в точности введенное выше аномальное FV-действие.⁶ Конформно-инвариантная часть получается «конформизацией» W , а остальная часть эффективного действия исчерпывается аномальным действием Фрадкина-Вилковиского.

Инвариантный смысл этого представления состоит в том, что Риччи-часть полного действия не является независимой, а полностью определяется аномальной и вейлевской частями действия. Это реализация уравнения (4.42) в рамках теории возмущений по кривизне. Этот результат, вероятно, разрешит давнюю дискуссию между сторонниками RFT-действия и разложения эффективного действия по теории возмущений в плоском пространстве с типичными нелокальными логарифмическими формфакторами вида (4.51). Обратите внимание, что эти формфакторы не вносят вклада в аномалию, хотя их коэффициенты напрямую связаны с ее выражением (4.10). Скорее, они становятся конформными инвариантами при подстановке \bar{g}_{ab} в качестве их функционального аргумента.

⁶Можно проверить, что последние четыре строки уравнения (24) в [136] образуют точное выражение для $\Gamma_{\text{FV}}[g]$, учитывая, что функция Z в этом уравнении совпадает с $-\Sigma_{\text{FV}}$ и удовлетворяет уравнению $-\square Z + \frac{1}{2}(\nabla Z)^2 = \frac{1}{3}R$.

Справедливость представления (4.73) проверялась в кубическом приближении для эффективного действия в [136]. Переход к новому базису инвариантов второго порядка приводит к [см. вторую строку уравнения (4.50)]

$$W^{(2)}[g] = \frac{1}{32\pi^2} \int dx \sqrt{g} \frac{1}{120} W_{abcd} \gamma(\square) W^{abcd}, \quad (4.74)$$

$$\Gamma_R^{(2)}[g] = \frac{1}{32\pi^2} \int dx \sqrt{g} \frac{1}{1080} R^2. \quad (4.75)$$

Тогда как в третьем порядке переход к новому базису приводит к значительному упрощению «риччевских» формфакторов $\Gamma_R^{(3)}$ по сравнению с исходными — они становятся значительно проще и, более того, в их выражениях типа (4.58) коэффициенты A , D_M^{ik} , B_M (4.60) полностью теряют степени функции D в знаменателе. Таким образом, по модулю вкладов $\ln(\square_i/\square_k)/(\square_k - \square_i)$ формфакторы $\Gamma_R^{(3)}$ приобретают древоподобную структуру. Члены с этими множителями, однако, полностью поглощаются с точностью $O(\mathfrak{R}^4)$ с помощью замены $W^{(2)}[g_{ab}] \rightarrow W^{(2)}[barg_{ab}]$ ввиду следующего соотношения [66]:

$$\begin{aligned} & W^{(2)}[g] - W^{(2)}[\bar{g}] \\ & \sim \int dx \sqrt{g} W_{abcd} \left[\ln(\square) - \ln(\bar{\square}) \right] W^{abcd} \\ & = \int dx \sqrt{g} \frac{\ln(\square_1/\square_2)}{\square_2 - \square_1} [\bar{\square}_2 - \square_2] W_{1abcd} W_2^{abcd} + O(\mathfrak{R}^4), \\ & \bar{\square}_2 - \square_2 \sim \text{Re}_3 + O(\mathfrak{R}^2), \end{aligned} \quad (4.76)$$

где правая часть представляет собой набор соответствующих членов кубического порядка с указанным выше множителем, действующим на два тензора Вейля из трех кривизн в инвариантах типа RCC . В секторе кубических $\Gamma_R^{(3)}$ -инвариантов остаётся набор древовидных нелокальных формфакторов, составляющих разложение FV-действия по кривизне до порядка \mathfrak{R}^3 включительно. Это наблюдение, сделанное в [136], можно формализовать в виде следующей последовательности тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} \Gamma[g] &= W^{(2+3)}[g] + \Gamma_R^{(2+3)}[g] + O(\mathfrak{R}^4) = W^{(2+3)}[\bar{g}] \\ &+ \underbrace{\Gamma_R^{(2+3)}[g] + (W^{(2)}[g] - W^{(2)}[\bar{g}])}_{\Gamma_{\text{FV}}^{(2+3)} + O(\mathfrak{R}^4)} + O(\mathfrak{R}^4), \end{aligned} \quad (4.77)$$

где группа последних трёх слагаемых образует аномальное действие Фрадкина-Вилковиского, разложенное с точностью \mathfrak{R}^3 . Явно кубическая часть Γ_{FV} для

модели одного конформного скалярного поля с (4.49) имеет вид [136]

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{FV}}^{(3)} = & -\frac{1}{32\pi^2} \int dx \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{19440} \left(-\frac{2}{\square_3} + \frac{\square_1}{\square_2 \square_3} \right) R_1 R_2 R_3 \right. \\
& + \frac{1}{1620 \square_2 \square_3} W_1^{ab} \nabla_a R_2 \nabla_b R_3 \\
& + \frac{1}{540} \left(-\frac{4}{\square_2} + \frac{1}{\square_3} + \frac{2\square_1}{\square_2 \square_3} + \frac{\square_3}{\square_1 \square_2} \right) W_1^{ab} W_{2ab} R_3 \\
& + \frac{1}{135} \left(\frac{1}{\square_1 \square_2} - \frac{2}{\square_2 \square_3} \right) \nabla^a W_1^{bc} \nabla_b W_{2ac} R_3 \\
& \left. + \frac{1}{135 \square_1 \square_2 \square_3} \nabla_a \nabla_b W_1^{cd} \nabla_c \nabla_d W_2^{ab} R_3 \right\} \Big|_{\{x\}=x}, \tag{4.78}
\end{aligned}$$

где W_{ab} есть «вейлевская» часть (4.64) тензора Риччи (4.65).

4.4.3 Проблема двойных полюсов и глобальные конформные преобразования

Выражение (4.78) показывает, что в кубическом порядке аномальное эффективное действие свободно от двухполюсных нелокальных членов. Для FV-действия это, очевидно, верно для всех порядков разложения по кривизне, поскольку все его нелокальности древесного типа возникают из функции Грина конформного скалярного оператора $\square + \frac{1}{6}R$. Однако для RFT-действия двойные полюса формально появляются, начиная с четвертого порядка по кривизне, поскольку вариация по метрике $\Sigma_\chi = \Sigma_{\text{RFT}}$ в (4.25) приводит к действию обратного оператора Паница на квадрат тензора Вейля W^2 в силу формального правила варьирования

$$\int d^4x \sqrt{g} W^2 \delta \Sigma_{\text{RFT}} = \int d^4x \sqrt{g} (\Delta_4^{-1} W^2) \delta(\dots). \tag{4.79}$$

Эта операция не определена строго, поскольку W^2 не является полной производной, а повторное действие $1/\square$ на пробные функции общего вида при $d = 4$ приводит к ИК-расходящимся интегралам — см. сноску 2. В кубическом порядке Γ_{RFT} эта проблема не возникает из-за дополнительного множителя \square в $\square R$, как это было проверено в [70] путем явного вычисления корреляторов $\langle TTT \rangle$, но от этой трудности нельзя избавиться для корреляторов более высокого порядка.

Фактически это типичная ситуация для ИК-расходимостей в двух измерениях, когда ядро оператора $1/\square$ имеет логарифмическое поведение на бесконечности, корреляторы недифференцированных конформных полей φ УФ-расходятся, однако корреляторы $\langle \partial\varphi(x)\partial\varphi(y)\cdots \rangle$ остаются хорошо определенными. По-видимому, это же свойство в четырех измерениях лежит в основе отсутствия унитарности в двухполюсных теориях с пропагаторами типа $1/\square^2$, недавно обсуждавшихся в [144]. Механизм перехода от операторов к их производным в сдвиго-симметричных теориях фактически помогает обосновать применимость RFT-действия для получения хорошо определенных корреляторов тензоров энергии-импульса и расширяет применимость результатов [70] на все высшие порядки.

Это следует из наблюдения, что оператор Паница может быть переписан следующим образом

$$\Delta_4 = \partial_a \left[\sqrt{g} (\nabla^a \nabla^b + 2R^{ab} - \frac{2}{3} Rg^{ab}) \right] \partial_b \quad (4.80)$$

и, поэтому, по теории возмущений над плоским фоном может быть представлен в виде

$$\Delta_4 = \tilde{\square}^2 + V, \quad \tilde{\square} = -\delta^{ab} \partial_a \partial_b, \quad V = \overrightarrow{\partial_a V^{ab} \partial_b}, \quad (4.81)$$

где возмущение $V = O(\mathfrak{R})$ имеет специальный вид — дифференциального оператора V^{ab} , стоящего между двумя производными, причем все производные действуют вправо (что указано стрелкой). В рамках теории возмущений по степеням V действие обратного оператора Паница на пробную функцию ψ общего вида — скалярную плотность — можно понимать как разложение

$$\varphi = \frac{1}{\Delta_4} \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\tilde{\square}^2} \left(V \frac{1}{\tilde{\square}^2} \right)^n \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\tilde{\square}^2} \left(\overrightarrow{\partial_a V^{ab} \frac{1}{\tilde{\square}^2} \partial_b} \right)^n \psi, \quad (4.82)$$

где мы переставили множители ∂_b и $1/\tilde{\square}^2$, используя их формальную коммутативность, чтобы обеспечить действие $1/\tilde{\square}^2$ на функцию, являющуюся полной производной. Таким образом, все члены этого разложения, кроме первого, становятся ИК-конечными. Однако первый член $(1/\tilde{\square}^2)\psi$ делает эту функцию φ плохо определенной. Напротив, его производная $\partial_a \varphi$ становится хорошо определенной, если понимать первый член разложения как $(1/\tilde{\square}^2)\partial_a \psi$. Таким образом,

предписание для действия $\partial_a(1/\Delta_4)$ на пробную функции, не являющуюся полной производной, имеет вид

$$\partial_a \frac{1}{\Delta_4} \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\tilde{\square}^2} \partial_a \left(\overrightarrow{\partial_b V^{bc}} \frac{1}{\tilde{\square}^2} \partial_c \right)^n \Psi. \quad (4.83)$$

С учетом этого предписания член $W^2 \Sigma_{\text{RFT}}$ в RFT-действии становится хорошо определенным для всех порядков разложения теории возмущений. Действительно, этот член с Σ_{RFT} , заданным (4.30) ввиду структуры полной производной $\Theta_4 = \sqrt{g}(E + \frac{2}{3}\square R) = \partial_\alpha E^\alpha$ можно проинтегрировать по частям и переписать в виде

$$4 \int d^4x \sqrt{g} W^2 \Sigma_{\text{RFT}} = - \int d^4x \sqrt{g} E^\alpha \partial_\alpha \frac{1}{\Delta_4} (\sqrt{g} W^2). \quad (4.84)$$

Это подтверждает, что все порождаемые RFT-действием многоточечные корреляторы тензора энергии-импульса хорошо определены.

Наконец, стоит обсудить поведение эффективного действия при глобальных конформных преобразованиях с $\sigma_0 = \text{const}$. Члены высшего порядка в разложении эффективного действия по кривизне перемасштабируются как отрицательные степени e^{σ_0} и, следовательно, несущественны в ИК-пределе. В [145] это было основным аргументом в пользу доминирующей роли действия Весса-Зумино (4.18) в этом пределе, поскольку $\Delta\Gamma[g, \sigma]$ ведет себя линейно по σ_0 . Действительно,

$$\Delta\Gamma[g, \sigma + \sigma_0] = \Delta\Gamma[g, \sigma] + \sigma_0 \left(\frac{\gamma}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} W^2 + \beta e'_E \right), \quad (4.85)$$

где e'_E есть объемная часть эйлеровой характеристики многообразия (см. сноску 3). Однако заметим, что это поведение не может быть отражено в нелокальной RTF-форме аномального действия (4.11), поскольку оно справедливо только при граничных условиях Дирихле для функции Грина Δ_4 (которые нарушаются сдвигом на σ_0). Другими словами, в выражении (4.11) отсутствует вклад нулевой моды оператора Паница, который, наоборот, явно присутствует в (4.85). Для компактных многообразий с возможно нетривиальной топологией глобальные преобразования Вейля не будут противоречить граничным условиям. Поэтому эти преобразования, очевидно, проявятся в обобщенной RFT-калибровке (4.43) как неоднозначность решения уравнения (4.45), $\Sigma \rightarrow \Sigma + \sigma_0$.

Глава 5. Приложения нелокального действия

Разумеется, неоднозначность выбора аномального действия, определенного только с точностью до конформно-инвариантного функционала, ставит вопрос о его недостаточности для конкретных физических приложений. Иначе говоря, обеспечивает ли RFT-действие или какая-то его модификация из вышеуказанного класса оптимальное описание рассматриваемой физической ситуации? Например, хорошо известно, что в двумерии конформная аномалия и связанное с ней нелокальное действие Полякова полностью ответственны за излучение Хокинга двумерных черных дыр [36]. Напротив, в высших измерениях аномального действия недостаточно для описания этого явления. Тем не менее, существует твердое убеждение [70; 72; 73], что на расстояниях порядка гравитационного радиуса теория гравитации существенно модифицируется из-за сильных инфракрасных эффектов конформной моды, описываемой действием (4.11). На таких масштабах эти эффекты могут определять макроскопическую физику, например, поведение квантового тензора энергии-импульса вблизи горизонта черной дыры [74], вклад в скалярный сектор гравитационных волн [75] или динамическую вакуумную энергию в эффективной теории гравитации [76]. Хотя не совсем ясно, насколько полной является постановка этих задач, существуют физические ситуации, когда конформный режим действительно является определяющим, и мы рассматриваем в качестве примера применения RFT-действия (4.11) две такие задачи. Это расчет порождаемого метрикой тензора энергии-импульса для конформно-плоского пространства-времени общего вида [39] и космология с метрикой Фридмана, управляемая конформной аномалией конформно-инвариантных полей [78]. Последняя играет важную роль в модели начальных условий инфляционной космологии [79; 80].

С проблемой нелокального эффективного действия тесно связан вопрос о ренормгрупповом потоке гравитационной G и космологической Λ констант. Хотя проблема бегущего масштаба и ее связь с проблемой космологической постоянной уже стала притчей во языцех в современной литературе, становится все более очевидным, что этот бег не следует интерпретировать в обычном смысле теории ренормгруппы [81; 82]. Понятие «масштаба» настолько неоднозначно в физике, что его бегущий характер фактически теряет универсальность в применении к различным физическим контекстам, например, к связи космо-

логической инфляции с ренормгрупповым потоком [83]. Серьезные аргументы против бегущей природы G и Λ в [81; 82] привели к понятию «партнеров» этих констант [84], интерпретированному в [85] в терминах разделения масштабов или декаплинга тяжелых мод [86; 87]. Тем не менее, в перенормируемых моделях гравитации принято рассматривать нетривиальные решения ренормгрупповых уравнений [28; 29] с Λ и G , зависящими от бегущего масштаба. Поэтому возникает естественный вопрос о том, как следует интерпретировать эти решения, когда соответствующие члены имеют структуру «головастиков», что исключает их фактическую зависимость от импульса [82].

Поэтому второй целью данной главы является попытка прояснить этот вопрос с помощью определенной конкретизации понятия «масштаба». В этой интерпретации бег констант Λ и G предстает в виде их превращения или метаморфозы в их нелокальные партнеры, подобные тем, которые были введены Дж. Донохью в [84]. В рамках теории возмущений космологический и эйнштейновский члены начинают проявляться как нелокальные квадратичные по кривизне члены, сильно отличающиеся от своей первоначальной формы.

5.1 Тензор энергии-импульса для конформно-связанных пространств

Уравнения (4.28) и (4.42) показывают, что аномальное действие имеет смысл как объект, задающий разность эффективных действий на конформно связанных метриках. Вне этого контекста это действие, определенное лишь с точностью до произвольного конформно-инвариантного функционала $W^{\text{conf}}[g]$, как в уравнении (4.14), не очень информативно, потому что такой сдвиг может включать важную физическую информацию о конформно-инвариантных степенях свободы. Аномальное действие Γ_χ , или лучше сказать, действие типа Весса-Зумино (4.18) — производящий функционал Γ_χ — действительно полезно в ситуациях, когда физика конформно связанного пространства-времени с метрикой $\bar{g}_{\mu\nu}$ полностью известна. Тогда эффективное действие в точке g_{ab} можно полностью восстановить по конформной аномалии.

Простейшим случаем является класс конформно-плоских пространств, когда g_{ab} можно конформно преобразовать в плоскую метрику \bar{g}_{ab} , для которой

все инварианты кривизны обращаются в нуль, и $\Gamma[\bar{g}]$ либо в точности равна нулю, либо вычислима для полей квантовой материи в плоском пространстве-времени. В частности, таким образом может быть вычислена фундаментальная наблюдаемая — УФ-перенормированное среднее тензора энергии-импульса конформно-инвариантных на классическом уровне полей:

$$\sqrt{g} \langle T^{ab} \rangle = 2 \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta g_{ab}}. \quad (5.1)$$

При этом мы считаем, что $\langle \bar{T}^{ab} \rangle = 0$, либо известен для заданных фоновых полей на плоском пространстве-времени. В этом разделе мы получаем из (4.18) выражение для разности (домноженных на \sqrt{g}) тензоров энергии-импульса $\sqrt{g} \langle T_b^a \rangle - \sqrt{\bar{g}} \langle \bar{T}_b^a \rangle$, которое для конформно плоского пространства-времени совпадает с известным выражением Брауна-Кэссиди [39] и обобщает его на случай ненулевого тензора Вейля.

5.1.1 Получение конформной аномалии из расходящейся части эффективного действия

Чтобы получить закон конформных преобразований перенормированного тензора энергии-импульса, мы, во-первых, должны проследить возникновение конформной аномалии в результате вычитания УФ-расходимостей из ковариантно-регуляризованного эффективного воздействия, $\Gamma_{\text{ren}} = \Gamma_{\text{reg}} - \Gamma_{\infty}$. В размерной регуляризации $\Gamma_{\text{reg}} = {}^{(d)}\Gamma$ эти расходимости определяются выражением

$$\Gamma_{\infty} = -\frac{1}{16\pi^2\varepsilon} \int d^d x \sqrt{g} a_2 = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon} \int d^d x \sqrt{g} (\alpha {}^{(4)}W^2 + \beta {}^{(4)}E), \quad (5.2)$$

где $\varepsilon = 4-d$, ${}^{(4)}W^2$ и ${}^{(4)}E$ — четырёхмерные инварианты, формально продолженные в нецелую размерность d , а a_2 — второй коэффициент Швингера-ДеВитта разложения теплового ядра для волнового оператора теории [1; 48; 57]

$$a_2 = -(\alpha {}^{(4)}W^2 + \beta {}^{(4)}E - \gamma \square R), \quad (5.3)$$

$${}^{(4)}W^2 = R_{abcd}^2 - 2R_{ab}^2 + \frac{1}{3}R^2, \quad (5.4)$$

$${}^{(4)}E = R_{abcd}^2 - 4R_{ab}^2 + R^2. \quad (5.5)$$

Такая структура a_2 следует из локальной конформной инвариантности вычета Γ_∞ в полюсе $d = 4$ и связана с условием интегрируемости конформной аномалии. Он включает топологическую плотность Гаусса-Бонне $\sqrt{g}E$, квадрат тензора Вейля и член с полной производной $\square R$.

Конформная аномалия возникает как вклад конформного преобразования однопетлевого контрчлена (5.2), вычтенного из регуляризованного эффективного действия

$$\sqrt{g} \langle T_a^a \rangle = -2g_{ab} \frac{\delta \Gamma_\infty}{\delta g_{ab}}, \quad (5.6)$$

поскольку регуляризованное (но еще не перенормированное вычитанием контрчленов) действие Γ_{reg} предполагается конформно инвариантным.¹ $\square R$ не дает вклада в расходимости, но появляется в конформной аномалии вследствие конформного преобразования члена с квадратом тензора Вейля, продолженного в размерность d . Более того, в рамках описанной схемы вычитания коэффициент γ в аномалии оказывается определяемым коэффициентом α вейлевского члена [33].

Действительно, в размерности d конформный тензор Вейля может быть определен вычитанием из тензора Римана его следовой части, определяющейся тензором Схоутена P_{ab} :

$${}^{(d)}W_{abcd} = R_{abcd} + 2P_{d[a}g_{b]c} - 2P_{c[a}g_{b]d}, \quad (5.7)$$

$${}^{(d)}W^a{}_{bcd} = {}^{(d)}\bar{W}^a{}_{bcd}, \quad (5.8)$$

$$P_{ab} = \frac{1}{d-2} \left(R_{ab} - \frac{Rg_{ab}}{2(d-1)} \right). \quad (5.9)$$

В силу соотношения между ${}^{(d)}W^2 \equiv {}^{(d)}W^2_{abcd}$ и $W^2 \equiv {}^{(4)}W^2_{abcd}$ мы имеем [39]

$$W^2 = {}^{(d)}W^2 - \frac{\varepsilon}{2} (E - W^2 - \frac{1}{9}R^2) + O(\varepsilon^2), \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta g_{ab}} \int d^d x \sqrt{g} W^2 &= \frac{\delta}{\delta g_{ab}} \int d^d x \sqrt{g} {}^{(d)}W^2 \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \frac{\delta}{\delta g_{ab}} \int d^d x \sqrt{g} (W^2 + \frac{1}{9}R^2) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

¹ Или нарушение конформной инвариантности размерно-регуляризованного действия Γ_{reg} пропорционально ε^2 , как это происходит для случая спина 1 [33], так что оно не дает вклада в вычет простого полюса по размерности.

Тогда, поскольку тензор ${}^{(d)}W_{abcd}$ конформно-ковариантен в любой размерности d , $g_{ab}(\delta/\delta g_{ab}) \int d^d x \sqrt{g} {}^{(d)}W^2 = -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{g} {}^{(d)}W^2$, мы имеем

$$\frac{1}{\varepsilon} g_{ab} \frac{\delta}{\delta g_{ab}} \int d^d x \sqrt{g} W^2 = -\frac{1}{2} \sqrt{g} \left(W^2 - \frac{2}{3} \square R \right) + O(\varepsilon). \quad (5.12)$$

Подстановка этого выражения в (5.6) восстанавливает члены с W^2 и $\square R$ в выражении для аномалии

$$\sqrt{g} \langle T_a^a \rangle = -\frac{1}{16\pi^2} \sqrt{g} a_2, \quad (5.13)$$

с параметрами γ и α , связанными соотношением [33]

$$\gamma = \frac{2}{3} \alpha. \quad (5.14)$$

Это простое выражение для конформной аномалии через второй коэффициент Швингера-ДеВитта также следует из дзета-функциональной регуляризации [146].

Член в аномалии с плотностью Гаусса-Бонне следует из конформной вариации слагаемого ${}^{(4)}E$ в расходящейся части действия. При формальном продолжении в нецелую размерность d интеграл $\int d^d x \sqrt{g} {}^{(4)}E$ больше не является топологическим инвариантом, и его вариация по метрике нетривиальна. Поэтому, переписывая (аналогично (5.10)) размерно продолженную плотность Гаусса-Бонне через ${}^{(d)}W^2$, мы получим

$${}^{(4)}E = R_{abcd}^2 - 4R_{ab}^2 + R^2 = {}^{(d)}W^2 - (2 - 3\varepsilon) \left(R_{ab}^2 - \frac{1}{3} R^2 \right) + O(\varepsilon^2), \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\delta}{\delta g_{ab}} \int d^d x \sqrt{g} {}^{(4)}E = -\sqrt{g} \left(\frac{1}{2} W^{ab} + {}^{(3)}H^{ab} + 2R_{cd} C^{cadb} \right) + O(\varepsilon), \quad (5.16)$$

где возникают два новых тензора:

$${}^{(3)}H^{ab} = R^{ac} R_c^b - \frac{2}{3} R R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R_{cd}^2 + \frac{1}{4} g^{ab} R^2, \quad (5.17)$$

$$W^{ab} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(4 {}^{(d)}W^a{}_{cde} {}^{(d)}W^{bcde} - g^{ab} {}^{(d)}W^2 \right). \quad (5.18)$$

Предел $d = 4$ для тензора W^{ab} хорошо определен, поскольку при $d = 4$ имеет место важное соотношение

$$4 {}^{(4)}W^a{}_{cde} {}^{(4)}W^{bcde} = g^{ab} {}^{(4)}W^2, \quad (5.19)$$

которое может быть доказано антисимметризацией по пяти индексам в четырехмерном пространстве [147]. Тензоры ${}^{(3)}H^{ab}$ и W^{ab} имеют следующие следы:

$${}^{(3)}H_a^a = \frac{1}{3}R^2 - R_{ab}^2 = \frac{1}{2}(E - W^2), \quad W_a^a = W^2. \quad (5.20)$$

Поэтому из (5.16) и (5.20) мы имеем соотношение

$$\frac{2}{\varepsilon}g_{ab}\frac{\delta}{\delta g_{ab}}\int d^d x \sqrt{g} {}^{(4)}E = -\sqrt{g} {}^{(4)}E + O(\varepsilon), \quad (5.21)$$

которое восстанавливает вклад E -члена в конформную аномалию (5.13) с выражением (5.3) для коэффициента Швингера-ДеВитта a_2 .

5.1.2 Минимальная форма действия Весса-Зумино и a -теорема

Конечно, в приведенном выше аналитическом продолжении четырехмерных объектов в нецелую размерность d есть большая неоднозначность. Она сводится к конечной перенормировке контрчленами $\int d^4 x \sqrt{g} R_{abcd}^2$, $\int d^4 x \sqrt{g} R_{ab}^2$ и $\int d^4 x \sqrt{g} R^2$ размерности 4. Однако, поскольку из этих величин можно построить топологический инвариант $\int d^4 x \sqrt{g} E$ и конформный инвариант $\int d^4 x \sqrt{g} W^2$, остается всего одна комбинация, которая может нарушить конформную инвариантность и изменить коэффициент γ при члене $\square R$ в конформной аномалии. В качестве такого контрчлена можно выбрать квадрат скалярной кривизны, удовлетворяющий условию

$$g_{ab}\frac{\delta}{\delta g_{ab}}\int d^4 x \sqrt{g} R^2 = 6\sqrt{g}\square R. \quad (5.22)$$

Поэтому этот *конечный локальный* контрчлен можно использовать для изменения коэффициента γ и, в частности, его устранения с помощью специальной конечной перенормировки:

$$\Gamma_{\text{ren}}[g] \rightarrow \Gamma_{\text{ren}}[g] + \frac{\gamma}{192\pi^2}\int d^4 x \sqrt{g} R^2. \quad (5.23)$$

Зависимость коэффициента γ от схемы регуляризации и вычитания проявляется в нарушении соотношения (5.14) для размерно регуляризованного электромагнитного поля [133], но в конечном итоге не меняет физики теории

из-за локальности ковариантного контрчлена $\int d^4x \sqrt{g} R^2$, точку вычитания которого необходимо определять из сравнения с наблюдаемым значением его константы связи. В рассматриваемом ниже космологическом примере указанная выше перенормировка (5.23) соответствует фиксации константы связи в R^2 -модели Старобинского [148].

Перенормировка (5.23) имеет важное следствие: при $\gamma = 0$ члены с производными четвертой степени от σ , входящие в комбинацию $\frac{\beta}{16\pi^2} \int d^4x (4 \sigma \Delta_4 \sigma - \frac{1}{9} \sqrt{g} R^2)$ в (4.18), полностью сокращаются. Тогда для получающегося таким образом *минимального* действия Весса-Зумино не появляется дополнительных степеней свободы, связанных с высшими производными

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ren}}[g] - \Gamma_{\text{ren}}[\bar{g}] &= \frac{\alpha}{16\pi^2} \int d^4x \sqrt{\bar{g}} \bar{W}_{abcd}^2 \sigma + \frac{\beta}{16\pi^2} \int d^4x \sqrt{\bar{g}} \left\{ \bar{E} \sigma \right. \\ &\quad \left. - 4 (\bar{R}^{ab} - \frac{1}{2} \bar{g}^{ab} \bar{R}) \partial_a \sigma \partial_b \sigma + 4 \bar{\square} \sigma (\bar{\nabla}^a \sigma \bar{\nabla}_a \sigma) - 2 (\bar{\nabla}^a \sigma \bar{\nabla}_a \sigma)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Эта минимальная версия действия для дилатонного поля σ обсуждалась в [137] и использовалась при выводе a -теоремы в [138; 149] — утверждении о монотонном убывании коэффициента $a = \beta/16\pi^2$ при движении вдоль ренорм-группового потока теории из ультрафиолетовой в инфракрасную область. Эта теорема основана на знаке последнего члена взаимодействия четвертой степени для этого поля, связанного с сечением прямого дилатонного рассеяния $2 \rightarrow 2$, которое должно быть положительным в унитарной теории, а его унитарность связана с отсутствием порожденных высшими производными духов в (5.24).

5.1.3 Перенормированные тензоры энергии-импульса

Закон конформного преобразования тензора энергии-импульса можно получить, используя коммутативность следующих функциональных вариаций:

$$\left[g_{ab}(y) \frac{\delta}{\delta g_{ab}(y)}, g_{de}(x) \frac{\delta}{\delta g_{ce}(x)} \right] = 0, \quad (5.25)$$

что позволяет написать

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \sigma(y)} \sqrt{g} \langle T_b^a(x) \rangle &= 2g_{bc}(x) \frac{\delta}{\delta g_{ac}(x)} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \sigma(y)} \Big|_{g_{ab}=e^{2\sigma} \bar{g}_{ab}} \\ &= g_{bc}(x) \frac{\delta}{\delta g_{ac}(x)} \sqrt{g}(y) \langle T_d^d(y) \rangle \Big|_{g_{ab}=e^{2\sigma} \bar{g}_{ab}}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Имея в виду, что $g_{bc}\delta/\delta g_{ac} = \bar{g}_{bc}\delta/\delta \bar{g}_{ac}$ при фиксированном σ , и функционально интегрируя это соотношение по σ , получим

$$\sqrt{g} \langle T_b^a \rangle - \sqrt{\bar{g}} \langle \bar{T}_b^a \rangle = 2\bar{g}_{bc} \frac{\delta}{\delta \bar{g}_{ac}} \Delta\Gamma[\bar{g}, \sigma], \quad (5.27)$$

где $\Delta\Gamma[\bar{g}, \sigma] = \Gamma_{\text{ren}} - \bar{\Gamma}_{\text{ren}}$ определяется выражением (4.18).

Прежде чем вычислять эту разность вариацией $\Delta\Gamma[\bar{g}, \sigma]$ по метрике, поучительно получить ее непосредственно из расходящейся части действия, как это было сделано в [39]. Обратите внимание, что $\Gamma_{\text{ren}} - \bar{\Gamma}_{\text{ren}} = -(\Gamma_\infty - \bar{\Gamma}_\infty)$, поскольку Γ_{reg} не вносит вклад в аномалию (см. сноску 1). Поэтому,

$$\sqrt{g} \langle T_b^a \rangle \Big|_{\bar{g}}^g = -2 g_{bc} \frac{\delta \Gamma_\infty}{\delta g_{ac}} \Big|_{\bar{g}}^g \quad (5.28)$$

Чтобы вычислить вклад члена ${}^{(4)}W^2$ в Γ_∞ , перепишем его в терминах ${}^{(d)}W^2$ и воспользуемся уравнением (5.11). Это приводит к следующему вкладу первого члена уравнения (5.11):

$$\frac{\delta}{\delta g_{ab}} \int d^d x \sqrt{g} {}^{(d)}W^2 = -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{g} W^{ab} - 4\sqrt{g} {}^{(d)}B^{ab}, \quad (5.29)$$

$${}^{(d)}B^{ab} = \left(\frac{1}{d-2} R_{cd} + \nabla_{(c} \nabla_{d)} \right) W^{abcd}, \quad (5.30)$$

где тензор W^{ab} определяется уравнением (5.18), а ${}^{(d)}B^{ab}$ есть d -мерный тензор Баха. Объединив это выражение со вторым членом уравнения (5.11), мы получаем соотношение:

$$\frac{1}{\varepsilon} g_{bc} \frac{\delta}{\delta g_{ac}} \int d^d x \sqrt{g} {}^{(4)}W^2 \Big|_{\bar{g}}^g = -\sqrt{g} \left[\frac{4}{\varepsilon} {}^{(d)}B_b^a + \frac{1}{18} {}^{(1)}H_b^a \right] \Big|_{\bar{g}}^g + O(\varepsilon), \quad (5.31)$$

где тензор ${}^{(1)}H_b^a$ дается выражением

$${}^{(1)}H_b^a = \frac{1}{\sqrt{g}} g^{ac} \frac{\delta}{\delta g^{bc}} \int d^d x \sqrt{g} R^2 = -\frac{1}{2} \delta_b^a R^2 + 2R R_b^a - 2\delta_b^a \square R - 2\nabla^a \nabla_b R, \quad (5.32)$$

и мы учли, что обе тензорные плотности $\sqrt{g} W_b^a$ и $\sqrt{g} B_b^a$ при $d = 4$ конформно-инвариантны. При $d \neq 4$ закон конформного преобразования тензора Баха имеет вид (здесь, как и выше, $g_{ab} = e^{2\sigma} \bar{g}_{ab}$)

$$\sqrt{g} {}^{(d)}B_b^a \Big|_{\bar{g}}^g = -\frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\bar{g}} (\bar{R}^{cd} + 2\bar{\nabla}^{(c} \bar{\nabla}^{d)}) (\sigma \bar{W}^a{}_{cbd}) + O(\varepsilon^2), \quad (5.33)$$

что делает первый член в правой части (5.31) корректно определенным при $d \rightarrow 4$. Обратите внимание, что выражение $\sqrt{\bar{g}} (\bar{R}^{cd} + 2\bar{\nabla}^{(c} \bar{\nabla}^{d)}) (\sigma \bar{C}^a{}_{cbd})$, рассматриваемое как функционал от независимых \bar{g}_{ab} и σ , конформно-инвариантно

относительно локальных конформных преобразований метрики \bar{g}_{ab} . Это можно легко вывести из инвариантности уравнения (5.33) при замене $g_{ab} \leftrightarrow \bar{g}_{ab}$ и $\sigma \rightarrow -\sigma$ или напрямую проверяя конформное преобразование \bar{g}_{ab} (с фиксированным скаляром σ).

Вклад члена Гаусса-Бонне в конформное преобразование тензора энергии-импульса получается с помощью (5.16)–(5.17). Объединяя этот вклад с вкладом от члена с квадратом тензора Вейля (5.31), мы наконец получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \langle T_b^a \rangle \Big|_{\bar{g}}^g &= -\frac{\alpha}{4\pi^2} \sqrt{\bar{g}} (\bar{R}^{cd} + 2\bar{\nabla}^{(c} \bar{\nabla}^{d)}) (\sigma \bar{W}^a{}_{cbd}) \\ &+ \frac{1}{8\pi^2} \sqrt{g} \left[\beta {}^{(3)}H_b^a + \frac{\alpha}{18} {}^{(1)}H_b^a + 2\beta R^{cd} W^a{}_{cbd} \right]_{\bar{g}}^g. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Это обобщение формулы Брауна-Кэссиди на случай ненулевого тензора Вейля. Первый член этого выражения конформно-инвариантен ввиду сделанного выше замечания и поэтому может быть представлен тем же выражением без черточек.

Проверка соответствия этой формулы исходному выражению для конформной аномалии тривиальна ввиду ${}^{(3)}H_a^a = (E - W^2)/2$, ${}^{(1)}H_a^a = -6\Box R$ и бесследовости тензора Вейля,

$$\sqrt{g} \langle T_a^a \rangle \Big|_{\bar{g}}^g = \frac{\sqrt{g}}{16\pi^2} [\beta E - \beta W^2 - \frac{2\alpha}{3} \Box R]_{\bar{g}}^g = -\frac{\sqrt{g}}{16\pi^2} a_2 \Big|_{\bar{g}}^g, \quad (5.35)$$

где последнее равенство следует из конформной инвариантности плотности $\sqrt{g} W^2$ и соотношения (5.14) между коэффициентами γ и α , $\alpha = \frac{3}{2}\gamma$.

Восстановление формулы (5.34) прямой вариацией действия Весса-Зумино (5.27) по метрике происходит следующим образом. Используем следующие формулы для вариации по метрике

$$\frac{\delta}{\delta g_{ab}} \int d^4x \sqrt{g} W^2 \sigma = -2\sqrt{g} (R_{cd} + 2\nabla_{(c} \nabla_{d)}) (\sigma W^{abcd}), \quad (5.36)$$

$$\frac{\delta}{\delta g_{ab}} \int d^4x \Theta_4 \sigma = \sqrt{g} \Delta^{ab} \sigma, \quad (5.37)$$

$$\frac{\delta}{\delta g_{ab}} \int d^4x \varphi \Delta_4 \sigma = -\frac{\sqrt{g}}{2} D^{ab} [\varphi, \sigma], \quad (5.38)$$

которые справедливы для произвольных скалярных пробных функций σ и φ , где Δ^{ab} есть следующий дифференциальный оператор

$$\begin{aligned} \Delta_{ab} &= \frac{1}{3} (g_{ab} \Box + \nabla_a \nabla_b) \Box + [2(g_{ab} P_{cd} - g_{ac} P_{bd} - g_{ad} P_{bc}) + \frac{8}{3} g_{cd} P_{ab} + 2P g_{ac} g_{bd} \\ &- \frac{5}{3} P g_{ab} g_{cd} - 2W_{abcd}] \nabla^c \nabla^d + (g_{ab} g_{cd} - g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) (\nabla^c P) \nabla^d, \end{aligned} \quad (5.39)$$

а $D^{ab}[\varphi, \sigma]$ есть следующая билинейная форма

$$\begin{aligned} D_{ab}[\varphi, \sigma] &= -\frac{1}{2}g_{ab}\square\varphi\square\sigma + 2\sigma_{ab}\square\varphi - 2\sigma_a\square\varphi_b + \frac{1}{3}g_{ab}\sigma_c\square\varphi^c - \frac{2}{3}\varphi_{c(ab)}\sigma^c \\ &+ \left[2W_{abcd} + \frac{1}{3}(g_{cd}R_{ab} - g_{ac}g_{bd}R) \right] \varphi^{(c}\sigma^{d)} \\ &+ \frac{1}{3}\left(4\varphi_{ac}\sigma_b^c - g_{ab}\varphi_{cd}\sigma^{cd} \right) + (\varphi \leftrightarrow \sigma), \end{aligned} \quad (5.40)$$

(здесь $\varphi_a \equiv \nabla_a\varphi$, $\sigma_{ab} \equiv \nabla_b\nabla_a\sigma$, $\varphi_{abc} \equiv \nabla_c\nabla_b\nabla_a\varphi$ и т.д.). Заметим, что след оператора Δ^{ab} совпадает с оператором Паница $\sqrt{g}\Delta_a^a = \Delta_4$, что соответствует конформной вариации (4.9), а билинейная форма $D^{ab}(\varphi, \sigma)$ бесследова в силу конформной инвариантности Δ_4 .

Используя эти соотношения, мы получаем из (5.27) и (4.18)

$$\begin{aligned} \sqrt{g}\langle T_b^a \rangle \Big|_{\bar{g}}^g &= -\frac{\alpha}{4\pi^2}\sqrt{g}(R^{cd} + 2\nabla^{(c}\nabla^{d)}) (\sigma W^a{}_{cbd}) \\ &+ \frac{\sqrt{g}\beta}{8\pi^2}\left(2\Delta_b^a\sigma + D_b^a[\sigma, \sigma] \right) + \sqrt{g}\left(\frac{\gamma}{12} + \frac{\beta}{18} \right) {}^{(1)}H_b^a \Big|_{\bar{g}}^g. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Член в первой строке здесь совпадает с его версией с чертой в (5.34) — это легко следует из отношения (5.36), где подинтегральная функция может быть заменена на версию с чертой. Член $\frac{\gamma}{12} {}^{(1)}H_\beta^\alpha$ здесь соответствует члену $\frac{\alpha}{18} {}^{(1)}H_\beta^\alpha$ в (5.34) ввиду соотношения $\alpha = \frac{3}{2}\gamma$. И, наконец, выполнено тождество:

$$\sqrt{g}\left[{}^{(3)}H_b^a + \frac{1}{18} {}^{(1)}H_b^a + 2R^{cd}W^a{}_{cbd} \right] \Big|_{\bar{g}}^g = \sqrt{g}\left(2\Delta_b^a\sigma + D_b^a[\sigma, \sigma] \right), \quad (5.42)$$

что полностью согласовывает два выражения (5.34) и (5.41) для конформного преобразования тензора энергии-импульса.

5.2 Конформно-плоское пространство-время

Обобщение (5.34) формулы Брауна-Кэссиди на случай ненулевого тензора Вейля может быть не слишком полезным, поскольку в общем случае мало что можно сказать о $\langle T_b^a \rangle \Big|_{\bar{g}}$. Поэтому мы ограничимся случаем конформно плоского пространства-времени, для которого конформное преобразование метрики может привести к метрике \bar{g}_{ab} плоского пространства-времени, где $\langle \bar{T}_b^a \rangle$ либо равен нулю, либо известен для заданных фоновых полей в плоском пространстве. Интересно, что в этом случае параметр конформного преобразования σ ,

осуществляющего этот переход, удовлетворяет уравнению

$$\Delta_4 \sigma = \frac{1}{4} \Theta_4 \quad (5.43)$$

и в асимптотически-плоском случае с граничными условиями Дирихле имеет единственное решение (4.30), $\sigma = \Sigma_{\text{RFT}}$. Этот, по-видимому, не очень известный факт можно доказать, используя уравнение конформного преобразования четырехмерного тензора Схоутена ($g_{ab} = e^{2\sigma} \bar{g}_{ab}$)

$$P_{ab} - \bar{P}_{ab} = -\sigma_{ab} - \sigma_a \sigma_b + \frac{1}{2} \sigma_c \sigma^c g_{ab}, \quad (5.44)$$

где $\sigma_a \equiv \nabla_a \sigma$ и $\sigma_{ab} \equiv \nabla_b \nabla_a \sigma$. Предполагая, что \bar{g}_{ab} есть метрика плоского пространства с $\bar{P}_{ab} = 0$, продифференцируем дважды и снова используем это соотношение, чтобы выразить P_{ab} через производные от σ , получим

$$\nabla^a \nabla^b \left(P_{ab} + \sigma_{ab} + \sigma_a \sigma_b - \frac{1}{2} \sigma_c \sigma^c g_{ab} \right) = \Delta_4 \sigma - \frac{1}{4} \Theta_4 = 0, \quad (5.45)$$

откуда следует, что конформно-инвариантная метрика (4.21) в RFT-калибровке (4.29) на самом деле является метрикой плоского пространства, когда тензор Вейля равен нулю:

$$\bar{R}^a{}_{bcd} = 0, \quad \bar{g}_{ab} = e^{-2\Sigma_{\text{RFT}}[g]} g_{ab} \Big|_{W_{abcd}=0}. \quad (5.46)$$

5.2.1 Космология, определяемая аномалией

Применение конформной аномалии в космологическом контексте имеет долгую историю; см., например, [41; 43; 78; 150–153]. В частности, космология с метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW) представляет ситуацию, когда аномальное действие $\Delta\Gamma[\bar{g}, \sigma]$ полностью определяет физику полевой модели и через эффективные уравнения движения оказывает нетривиальное обратное воздействие квантовой материи на динамический метрический фон. Самым интересным примером, пожалуй, является случай, когда $\Gamma[\bar{g}]$ в (4.18) не просто служит инертным фоном плоского пространства, а нетривиально способствует этому эффекту обратного воздействия.

Это пространственно замкнутая космология, движимая конформной теорией поля из начального состояния в виде специальной микроканонической

матрицы плотности, которая была первоначально предложена в [79] и недавно рассмотрена в [154]. С матрицей плотности, определенной как проектор на пространство решений уравнений Уиллера-ДеВитта [80; 155], статсумма в этой модели имеет представление в виде евклидова функционального интеграла квантовой гравитации

$$Z = \int D[g, \varphi] e^{-S[g, \varphi]}, \quad (5.47)$$

где интегрирование ведется по метрике g_{ab} и полям материи φ , периодическим в евклидовом пространстве-времени с топологией $S^1 \times S^3$ (время τ компактифицировано на окружность S^1).

Когда в классическом действии $S[g, \varphi]$ преобладает большое количество конформных полей Φ с действием $S_{\text{СФТ}}[g, \Phi]$ статистическая сумма может быть аппроксимирована вкладом седловой точки этого интеграла. Это экстремум суммарного действия, включающего древесное гравитационное действие Эйнштейна-Гильберта $S_{\text{EH}}[g]$ и эффективное действие $\Gamma[g]$ этих конформных полей²,

$$\Gamma_{\text{tot}}[g] = S_{\text{EH}}[g] + \Gamma[g], \quad e^{-\Gamma[g]} = \int D\Phi e^{-S_{\text{СФТ}}[g, \Phi]}. \quad (5.48)$$

Выбирая в качестве g_{ab} FRW-метрику с масштабным фактором $a(\tau)$ и функцией хода N ($\Omega_{(3)}^2$ — это метрика трехмерной сферы единичного радиуса),

$$ds^2 = N^2 d\tau^2 + a^2 d\Omega_{(3)}^2 = a^2(\tau)(d\eta^2 + d\Omega_{(3)}^2), \quad (5.49)$$

можно немедленно получить, что в терминах переменной конформного времени η , связанной с евклидовым временем τ соотношением $d\eta = d\tau/a(\tau)$, эта метрика конформно-эквивалентна метрике $\bar{g}_{ab} \equiv g_{ab}^{\text{EU}}$ статической эйнштейновской вселенной с трехмерными сферами постоянного радиуса a_0 в качестве пространственных сечений,

$$d\bar{s}^2 = a_0^2(d\eta^2 + d\Omega_{(3)}^2) \equiv g_{ab}^{\text{EU}} dx^a dx^b, \quad (5.50)$$

$$ds^2 = e^{2\sigma} d\bar{s}^2, \quad g_{ab} = e^{2\sigma} g_{ab}^{\text{EU}}, \quad \sigma = \ln \frac{a}{a_0}. \quad (5.51)$$

²Игнорирование гравитонных петель может быть оправдано преобладанием конформных полей, численно превосходящих метрику, а сохранение члена Эйнштейна-Гильберта очевидно следует из того факта, что этот член с *перенормированными* гравитационной G и космологической Λ константами индуцируются из квантового конформного сектора.

Поэтому эффективное действие конформных полей выражается в терминах того же действия на фоне статической эйнштейновской вселенной $\Gamma[g^{\text{EU}}] \equiv \Gamma_{\text{EU}}$ и действия Весса-Зумино (4.18) с приведенным выше конформным параметром σ

$$\Gamma[g] = \Delta\Gamma[g^{\text{EU}}, \sigma] + \Gamma_{\text{EU}}. \quad (5.52)$$

Вычисление Γ_{EU} сильно облегчается статичностью фона, но все равно дает нетривиальный результат ввиду компактификации времени на S^1 . Для начала заметим, что хотя g_{ab}^{EU} явно зависит от радиуса a_0 сферы S^3 , значение Γ_{EU} не зависит от a_0 при фиксированном периоде по конформному времени $\eta = \oint d\eta$. Это следует из инвариантности эффективного действия относительно глобальных конформных преобразований (4.85) для конформно-плоского пространства-времени с нулевой объемной частью эйлеровой характеристики (что имеет место для $S^1 \times S^3$). Это также можно подтвердить, используя масштабные свойства конформных полей. Действительно, энергии конформных квантов на статическом пространстве-времени имеют масштаб $1/a_0$, а их гамильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \sum_{\omega} \frac{\omega}{a_0} \left(\hat{a}_{\omega}^{\dagger} \hat{a}_{\omega} \pm \frac{1}{2} \right), \quad (5.53)$$

где суммирование проводится по всем квантовым числам (и спинам) энергии ω/a_0 всех мод полевых осцилляторов на статической трехмерной сфере радиуса a_0 , а $\hat{a}_{\omega}^{\dagger}$ и \hat{a}_{ω} есть соответствующие операторы рождения/уничтожения (знаки \pm отвечают бозонам и фермионам). Функциональный интеграл по (анти)периодическим конформным (фермионным) бозонным полям с периодом $\mathcal{T} = \oint d\tau N$ на статическом фоне берется точно и равен равновесной статсумме при температуре $1/\mathcal{T}$, которая выражается как функция периода по конформному времени $\eta = \mathcal{T}/a_0$

$$e^{-\Gamma_{\text{EU}}} = \int D\Phi e^{-S_{\text{CFT}}[g^{\text{EU}}, \Phi]} = \text{Tr} e^{-\mathcal{T}\hat{H}} = \exp(-\eta E_{\text{vac}} - F(\eta)). \quad (5.54)$$

Здесь $F(\eta)$ есть свободная энергия газа конформных частиц, а E_{vac} есть УФ-расходящаяся вакуумная энергия Казимира, которая должна быть ковариантно перенормирована:

$$F(\eta) = \sum_{\omega} \left[\pm \ln(1 \mp e^{-\omega\eta}) \right], \quad (5.55)$$

$$E_{\text{vac}} = \left(\sum_{\omega} \frac{\pm \omega}{2} \right)_{\text{ren}}. \quad (5.56)$$

Таким образом, зависимость от a_0 поглощается зависимостью от η , которую необходимо зафиксировать при перемасштабировании a_0 . Обратите внимание, что именно η должна оставаться фиксированной при глобальном конформном преобразовании, которое одновременно перемасштабирует функцию хода N и a_0 в определении конформного инварианта $\eta = \oint d\tau N/a_0$.

Примечательно, что ковариантная перенормировка вакуумной энергии Казимира E_{vac} также следует из закона конформного преобразования эффективного действия. Вселенная Эйнштейна, простирающаяся от $-\infty$ до $+\infty$ по переменной η , отображается в плоское пространство переходом к радиальной координате ρ ,

$$\eta \mapsto \rho = a_0 e^\eta, \quad -\infty < \eta < +\infty, \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad (5.57)$$

со следующим конформным преобразованием между двумя метриками

$$ds_{\text{EU}}^2 = e^{2\sigma} ds_{\text{flat}}^2, \quad \sigma = -\eta = \ln \frac{a_0}{\rho}, \quad (5.58)$$

$$ds_{\text{flat}}^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_{(3)}^2. \quad (5.59)$$

Для вакуумного состояния (предел $\eta \rightarrow \infty$ и $F(\eta) \rightarrow 0$ в формуле (5.54)) $\Gamma_{\text{EU}} \rightarrow E_{\text{vac}}\eta$. С другой стороны, из (4.18) с учетом приведенного выше выражения для σ следует

$$\Delta\Gamma[g_{\text{flat}}, \sigma] = \frac{\beta}{8\pi^2} \int d^4x \sqrt{g_{\text{flat}}} (\square_{\text{flat}} \sigma)^2 - \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{9} \right) \int d^4x \sqrt{g_{\text{EU}}} R_{\text{EU}}^2. \quad (5.60)$$

Учитывая, что $\square_{\text{flat}} \sigma = 2/\rho^2$, $\int d^4x \sqrt{g_{\text{flat}}} \mapsto 2\pi^2 \int d\rho \rho^3$, $R_{\text{EU}} = 6/a_0^2$ и $\int d^4x \sqrt{g_{\text{EU}}} \mapsto 2\pi^2 a_0^4 \int d\eta$, получим

$$\Gamma_{\text{EU}} - \Gamma_{\text{flat}} = \Delta\Gamma[g_{\text{flat}}, \sigma] = \beta \int \frac{d\rho}{\rho} - \left(\frac{3}{8}\gamma + \frac{\beta}{4} \right) \int d\eta = \frac{3}{4} \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right) \int d\eta. \quad (5.61)$$

Поэтому при естественном предположении $\Gamma_{\text{flat}} = 0$ будем иметь

$$E_{\text{vac}} = \frac{3}{4} \left(\beta - \frac{\gamma}{2} \right). \quad (5.62)$$

Другими словами, после перенормировки ковариантными контрчленами энергия Казимира приобретает значение, совместимое с законом конформного преобразования перенормированного эффективного действия (или с формулой Брауна-Кэссиди для вакуумного тензора энергии-импульса). Эта совместимость действительно была проверена путем прямой перенормировки УФ-расходящейся суммы по полевым модам в (5.56) [35; 156–158].

На следующем этапе необходимо учесть вклад конформного преобразования (5.52) от статической эйнштейновской вселенной к FRW-метрике. Оказывается, что это можно сделать пользуясь свободой в выборе конечной перенормировки (5.23) и положив $\gamma = 0$ (что на космологическом языке соответствует изменению константы связи в R^2 -действии Старобинского [43], играющем важную роль в теории инфляции и темной энергии). Это приводит к тому, что из уравнений Фридмана полностью выпадает зависимость от вакуумной энергии Казимира, а остается только зависимость от полной плотности энергии ϵ через эффективную планковскую массу $M_{\pm}^2(\epsilon)$. При этом выражение для последней имеет две ветви, из которых одна имеет бесконечное действие и поэтому не дает вклада в общую статсумму, а вторая приводит к так называемым *гирляндам* — космологическим инстантонам с периодически осциллирующим масштабным фактором $a(\tau)$. После перехода к физическому лоренцеву пространству-времени эти гирлянды могут служить начальным условием космологической эволюции, что позволяет воспроизвести конечную стадию инфляции. Подробное исследование этой интересной космологической модели, определяемой конформными полями можно найти в работах [79; 148; 159] и недавнем обзоре [154].

5.3 Ренормгруппа и метаморфоза ренормгруппового бега

Этот раздел носит по существу дискуссионный характер и связан с ковариантной теорией возмущений. Одной из причин этой дискуссии является то, что, несмотря на широко распространенную концепцию бегущих космологической Λ и гравитационной G констант, особенно популярную в рамках подхода асимптотической безопасности, существует очень глубокая и убедительная критика этой концепции [82]. Она основана на многочисленных аргументах в пользу того, что космологический и эйнштейновский члены имеют структуру «головастика». Эти аргументы основаны на конкретных результатах для амплитуд рассеяния гравитонов [81], которые невозможно интерпретировать в терминах универсального перемасштабирования Λ и G и т.д.

В то же самое время в моделях перенормируемой гравитации со множеством констант связи решение полной системы ренормгрупповых уравнений

включает в себя бегущие космологическую Λ и гравитационную G константы [28]. Поэтому возникает вопрос, как интерпретировать их бег с изменением масштаба. Здесь мы предпринимаем попытку сделать это с помощью ковариантного разложения по кривизне, разработанного в [63; 64; 66].

5.3.1 Эффективное действие, формфакторы и ренормгруппа

Мы начнем с классического действия, которое представимо в виде суммы локальных инвариантов кривизны растущей массовой размерности $(4 + m)$

$$S[g] = \sum_{m,N} \Lambda_N^{(m)} \int d^4x \sqrt{g} \mathfrak{R}_N^{(4+m)}(x). \quad (5.63)$$

Они являются мономами N -ой степени по тензорам кривизны, на которые дополнительно действуют ковариантные производные,

$$\mathfrak{R}_N^{(m)}(x) = \overbrace{\nabla \cdots \nabla}^{m-2N} \overbrace{\mathfrak{R}(x) \cdots \mathfrak{R}(x)}^N, \quad (5.64)$$

$$\dim \mathfrak{R}_N^{(m)}(x) \equiv [\mathfrak{R}_N^{(m)}(x)] = m. \quad (5.65)$$

Эти мономы входят в действие в комбинации с константами связи $\Lambda_N^{(m)}$ убывающей (с ростом m) размерности

$$[\Lambda_N^{(m)}] = d - m, \quad m = 0, 1, \dots \quad (5.66)$$

Суммирование в (5.63) может вестись по конечному набору членов, обеспечивающих перенормируемость теории, или быть формально распространено на бесконечное множество в рамках обобщенной теории ренормгруппы с бесконечным набором констант связи $\{\Lambda\} = \Lambda_N^{(m)}$.

В рамках теории возмущений полная метрика разлагается в сумму плоской метрики пространства-времени \tilde{g}_{ab} и возмущения h_{ab} ,

$$g_{ab} = \tilde{g}_{ab} + h_{ab}, \quad (5.67)$$

так что каждый инвариант кривизны разлагается в бесконечный ряд по степеням h_{ab} , образуя новый набор h -мономов на фоне плоского пространства

$$\int d^4x \sqrt{g} \mathfrak{R}_N^{(m)} = \sum_{M=N}^{\infty} \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} I_M^{(m)}(h),$$

$$I_M^{(m)}(h) \propto \underbrace{\tilde{\nabla} \cdots \tilde{\nabla}}_m \underbrace{h(x) \cdots h(x)}_M. \quad (5.68)$$

Тогда в обозначениях ковариантной теории возмущений вычисление перенормированного эффективного действия приводит к той же последовательности мономов, на которые действуют операторно-значные формфакторы $\Gamma_n^{(i)}(\{\Lambda\}, \tilde{\nabla}_1, \dots, \tilde{\nabla}_M)$, что делает их нелокальными, $\{\Lambda\}$ обозначает полный набор констант связи (5.66). В рамках размерной регуляризации эти перенормированные константы связи перемасштабируются с помощью параметра μ и выражаются через их безразмерные аналоги $\lambda_N^{(m)}(\mu)$

$$\Lambda_N^{(m)} = \mu^{d-m} \lambda_N^{(m)}(\mu). \quad (5.69)$$

Формфакторы также выражаются как функции безразмерных аргументов

$$\Gamma_M^{(m)}(\{\Lambda\}, \tilde{\nabla}_1, \dots, \tilde{\nabla}_M) = \mu^{d-m} \gamma_M^{(m)}(\{\lambda(\mu)\}, \frac{\tilde{\nabla}_1}{\mu}, \dots, \frac{\tilde{\nabla}_M}{\mu}) \quad (5.70)$$

Соответственно, эффективное действие принимает вид

$$\Gamma[g] = \sum_{(m)} \mu^{d-m} \sum_{M=0}^{\infty} \int d^d x \sqrt{\tilde{g}} \times \gamma_M^{(m)}(\{\lambda(\mu)\}, \frac{\tilde{\nabla}_1}{\mu}, \dots, \frac{\tilde{\nabla}_M}{\mu}) I_M^{(m)}(h_1, h_2, \dots, h_M) \Big|_{\{x\}=x}, \quad (5.71)$$

где $I_M^{(m)}(h_1, h_2, \dots, h_M)$ — это аналоги инвариантов (5.68) с разделенными пространственно-временными аргументами. Типичное предположение теории ренормгруппы о независимости перенормированного действия от бегущего масштаба приводит к системе уравнений для $\lambda_N^{(m)}(\mu)$ с бета-функциями, следующими из вычетов в полюсах по размерности пространства-времени в формфакторах $\Gamma_M^{(m)}(\{\lambda(\mu)\}, \{\tilde{\nabla}/\mu\})$,

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma[g] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_N^{(m)}(\mu) = \beta_N^{(m)}(\mu, \{\lambda(\mu)\}). \quad (5.72)$$

5.3.2 Выбор бегущего масштаба μ

Критическим шагом теперь является выбор бегущего масштаба, который мог бы описывать высокоэнергетический предел теории и охватывать одновременное перемасштабирование всех формфакторов и инвариантных мономов (5.71). Тогда замена параметра μ на этот масштаб приведет эффективное действие к виду, явно выявляющему его УФ-предел. Выбор этого объекта перемасштабирования может сильно различаться в зависимости от конкретной физической ситуации. Если в теории имеется размерное скалярное поле φ с ненулевым и медленно меняющимся средним значением, то было бы естественно отождествить масштабный параметр μ с φ . Это привело бы к нетривиальному «бегу» в зависимости от φ космологического $\Lambda \rightarrow \Lambda(\varphi)$ и эйнштейновского $G \rightarrow G(\varphi)$ членов (конечно, с поправкой в виде ряда по производным φ), но, разумеется, эти члены приобретают интерпретацию потенциала типа Коулмана-Вайнберга и неминимальной связи φ со скалярной кривизной.

Нас, однако, интересует УФ-масштабирование всех производных $\tilde{\nabla} \rightarrow \infty$, которые в импульсном представлении амплитуд рассеяния традиционно представляются высокоэнергетическими инвариантами Мандельштама или некоторыми другими комбинациями внешних импульсов. В пространственно-временном представлении ковариантной теории возмущений [63; 64; 66] роль этого масштаба должен играть некоторый оператор. Поэтому мы предлагаем в качестве кандидата на этот объект следующий нелокальный оператор \tilde{D} , который также формально стремится к бесконечности в пределе $\tilde{\nabla} \rightarrow \infty$ и фактически осуществляет одновременное масштабирование всех инвариантных мономов в (5.71),

$$\tilde{D} \equiv \left(\sum_{N=1}^{\infty} \tilde{\square}_N \right)^{1/2}, \quad \tilde{\square}_N \equiv -\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b. \quad (5.73)$$

Пусть и формально, этот оператор хорошо определен в каждом порядке по N , поскольку он усекается до конечной суммы при воздействии на моном N возмущений h_1, \dots, h_N , а при $N = 0$ это просто ноль из-за его действия на независимую от x константу,

$$\tilde{D}_N \equiv \left(\sum_{M=1}^N \tilde{\square}_M \right)^{1/2}, \quad \tilde{D}_0 = 0. \quad (5.74)$$

В УФ-области $\tilde{\nabla}_n \rightarrow \infty$, когда $\tilde{\nabla}_n/\tilde{D}_N = O(1)$, $n \leq N$, формфакторы в каждом N -м порядке становятся после замены $\mu \rightarrow \tilde{D}$ функциями одной операторной переменной \tilde{D}_N ,

$$\begin{aligned} \mu^{4-m} \Upsilon_N^{(m)}(\lambda(\mu) \mid \frac{\tilde{\nabla}_1}{\mu}, \dots, \frac{\tilde{\nabla}_N}{\mu}) \Big|_{\mu \rightarrow \tilde{D}_N} \rightarrow \\ (\tilde{D}_N)^{4-m} \Upsilon_N^{(m)}(\lambda(\tilde{D}_N) \mid O(1)) \equiv (\tilde{D}_N)^{4-m} \lambda_N^{(m)}(\tilde{D}_N), \end{aligned} \quad (5.75)$$

а разложение формально независящего от μ действия принимает вид

$$\Gamma[g] \Big|_{\mu \rightarrow \tilde{D}} \rightarrow \sum_m \sum_{N=0}^{\infty} \int d^4x \sqrt{\tilde{g}}(\tilde{D}_N)^{4-m} \lambda_N^{(m)}(\tilde{D}_N) I_N^{(m)}(h_1, \dots, h_N) \Big|_{\{x\}=x}. \quad (5.76)$$

5.3.3 Возвращение к разложению по кривизне

Следующий шаг состоит в восстановлении ковариантной формы разложения в терминах исходной кривизны пространства-времени. Любопытно, что, несмотря на то, что ковариантная теория возмущений [63; 64; 66] довольно часто упоминается в литературе, тонкими деталями этого шага обычно пренебрегают, что приводит к вводящим в заблуждение утверждениям о неоднозначности этой процедуры, зависимости от калибровки, с помощью которой возмущение метрики h_{ab} связано с кривизной [85] и т.д. В то же время единственность этой процедуры означает, что \tilde{g}_{ab} и $\tilde{\nabla}_a$ надо рассматривать не как декартовы δ_{ab} и ∂_a , а как определенные в общей системе координат и использующие только инвариантные утверждения о равенстве нулю кривизны, вычисленной по метрике с тильдой $\tilde{R}^a{}_{bcd} = 0$. Это ковариантное уравнение на \tilde{g}_{ab} в терминах искривленной метрики g_{ab} и ее кривизны $R^a{}_{bcd}$, решение которого существует как разложение теории возмущений по степеням $R^a{}_{bcd}$ и также требует наложения калибровки [63; 64]. Но результат подстановки этого решения обратно в явно нековариантный (двойной по полям) ряд (5.68) не зависит от калибровки из-за неявной инвариантности левой части (5.68).

В удобной калибровке типа ДеВитта $\tilde{\nabla}^b h_{ab} - \frac{1}{2} \nabla_a h = O[h^2]$, $h \equiv \tilde{g}^{ab} h_{ab}$, решение для h_{ab} и $\tilde{\nabla}_a$ в терминах g_{ab} и ∇_a в низшем порядке имеет вид [63; 64]

$$h_{ab} = \frac{2}{\square} R_{ab} + O[\mathfrak{R}^2], \quad \tilde{\nabla}_a = \nabla_a + O[\mathfrak{R}]. \quad (5.77)$$

Используя его в (5.76), мы получаем замену мономов по h мономами по ковариантной кривизне вместе с заменой \tilde{D}_N на D_N ,

$$I_N^{(m)}(h_1, \dots, h_N) \rightarrow \frac{1}{\square_1 \cdots \square_N} \mathfrak{R}_N^{(m+2N)}(x_1, \dots, x_N) + O[\mathfrak{R}^{N+1}], \quad (5.78)$$

$$\tilde{D}_N \rightarrow D_N + O[\mathfrak{R}], \quad (5.79)$$

где D_N , очевидно, определяется (5.74) в терминах полноценных ковариантных даламбертианов $\square = -g^{ab}\nabla_a\nabla_b$, и мы вносим коэффициент 2^n в символическое определение ковариантного монома N -го порядка — аналога локального $\mathfrak{R}_N^{(m)}(x)$ (см. уравнение (5.64)), с N разделенными пространственно-временными аргументами

$$\mathfrak{R}_N^{(m)}(x_1, \dots, x_N) = \underbrace{\nabla \cdots \nabla}_{m-2N} \mathfrak{R}(x_1) \cdots \mathfrak{R}(x_N), \quad N \geq 1. \quad (5.80)$$

При $N = 0$ этот моном можно определить как несущественную константу, не вносящую вклада в УФ-предел.

Таким образом, УФ-предел эффективного действия принимает вид

$$\Gamma[g] \rightarrow \int d^4x \sqrt{g} \sum_{m, N \geq 0}^{\infty} \frac{\lambda_N^{(m)}(D_N) (D_N)^{4-m}}{\square_1 \cdots \square_N} \mathfrak{R}_N^{(m+2N)}(x_1, \dots, x_N) \Big|_{\{x\}=x}, \quad (5.81)$$

где, напомним, безразмерные формфакторы $\lambda_N^{(m)}(D_N)$ получаются из бегущих констант связи теории $\lambda_N^{(m)}(\mu)$ заменой μ оператором D_N .

5.3.4 Ренормгрупповой бег квадратичных инвариантов как метаморфоза космологической и гравитационной констант

Рассмотрим применение этого результата к сектору космологических постоянных, включающему инварианты метрики размерности $m = 0$ и $\Lambda_0^{(4)} = \Lambda/16\pi G$. Этот классический космологический член порождает бесконечное множество инвариантов нулевой размерности

$$\int d^4x \sqrt{g} = \sum_{n=0}^{\infty} \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} I_n^{(0)}(\tilde{g}, h), \quad (5.82)$$

$$I_0^{(0)}(\tilde{g}, h) = 1, \quad I_1^{(0)}(\tilde{g}, h) = -\frac{1}{2}h, \quad I_2^{(0)}(\tilde{g}, h) = \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{2}h_{ab}^2, \dots \quad (5.83)$$

(индексы сворачиваются с помощью плоской метрики и $h = \tilde{g}^{ab}h_{ab}$), тогда как на квантовом уровне они порождают последовательность высокоэнергетических $m = 0$ структур из (5.81)

$$\int d^4x \sqrt{g} \sum_{N=2}^{\infty} \lambda_N^{(0)}(D_N) \frac{(D_N)^4}{\square_1 \dots \square_N} \mathfrak{R}_N^{(2N)}(x_1, \dots, x_N) \Big|_{\{x\}=x}, \quad (5.84)$$

где член нулевого порядка равен нулю ввиду $D_0 = 0$ (см. уравнение (5.73)), а член первого порядка также отсутствует из-за его головастичной природы (он является полной производной) — напомним, что $D_1 = \sqrt{\square_1}$ и $D_1^4/\square_1 = \square_1$ действует на $\mathfrak{R}_1^{(2)}(x_1)$.³

Разложение начинается с $N = 2$ с члена, который имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} & 4 \sum \int d^4x \sqrt{g} \mathfrak{R}^{(2)}(x) \lambda_2^{(0)}(\sqrt{2\square}) \mathfrak{R}^{(2)}(x) \\ & = \int d^4x \sqrt{g} \left(R_{ab} F_1(\square) R^{ab} + R F_2 - \square R \right) + O[\mathfrak{R}^3]. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Здесь мы учли, что набор инвариантов $\mathfrak{R}_2^{(4)}(x_1, x_2)$ можно представить в виде суммы слагаемых, разложенных на произведения тензоров Риччи и скалярной кривизны с некоторыми коэффициентами⁴ a и b ,

$$\mathfrak{R}_2^{(4)}(x_1, x_2) = a R_{ab}(x_1) R^{ab}(x_2) + b R(x_1) R(x_2), \quad (5.86)$$

а также использовал очевидное следствие интегрирования по частям,

$$\int d^4x \sqrt{g} F(\square_1, \square_2) \mathfrak{R}(x_1) \mathfrak{R}(x_2) \Big|_{\{x\}=x} = \int d^4x \sqrt{g} \mathfrak{R}(x) F(\square, \square) \mathfrak{R}(x). \quad (5.87)$$

Замечательная особенность выражения (5.85) состоит в том, что степенной оператор в $(D_N)^4/\square_1 \dots \square_N$ при $N = 2$ полностью компенсируется, что дает

³Здесь необходимо сделать важное предупреждение об исчезновении членов типа полных производных. Поверхностные члены на бесконечности должны обращаться в нуль, что эквивалентно хорошему ИК-поведению нелокального формфактора $\lambda_1^{(0)}(D_1)$ при $\square \rightarrow 0$. Мы предположим это свойство на основе максимальной логарифмической особенности $\lambda_1^{(0)}(D_1)$, которая является функцией $\log \square$, решающей ренормгрупповое уравнение. То же самое относится и к интегрированим по частям, рассматриваемым далее. В противном случае потребуется процедура вычитания граничных членов, подобная поверхностному действию Гиббонса-Хокинга на асимптотически плоской бесконечности, что мы кратко обсудим ниже.

⁴Члены, билинейные по римановой кривизне, под знаком интегрирования также сводятся к билинейным комбинациям R_{ab} и R при использовании выражения для тензора Римана через тензор Риччи [63; 64]; см. сноску 5.

безразмерные формфакторы $F_1(\square)$ и $F_2(\square)$, которые возникают как линейные комбинации соответствующих бегущих выражений $\lambda_2^{(0)}(\sqrt{2\square})$, полученных решением ренормгруппового уравнения. Еще более примечательно то, что этот нелокальный член квадратичен по кривизне, хотя он и произошел из сектора космологического члена, развернутого в ряд инвариантов нулевой размерности. Это то, что можно назвать преобразованием или *метаморфозой* в т. н. высокоэнергетические партнеры космологической постоянной, предложенной Дж. Донохью в [84]. Их структура является прямым следствием размерных аргументов в рамках ренормгруппового подхода. Возникающие формфакторы квадратичных по кривизне членов являются потомками бегущих констант связи нульмерных инвариантов, которые участвуют в разложении члена космологической постоянной.

Фактически, та же самая структура (5.85) воспроизводится для вклада любой размерности m в разложение (5.81). Для четной размерности⁵ $m \rightarrow 2m$ это легко продемонстрировать, разложив любой $(2m+4)$ -мерный квадратичный инвариант как это было сделано выше:

$$\mathfrak{R}_2^{(2m+4)}(x_1, x_2) = \sum_{m_1+m_2=2m} \mathfrak{R}_1^{(m_1+2)}(x_1) \mathfrak{R}_1^{(m_2+2)}(x_2). \quad (5.88)$$

Используя это в (5.81), можно полностью исключить размерный коэффициент $(D_2)^{4-2m}/\square^2 \sim \square^{-m}$ в выражении

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{g} \sum_{m_1+m_2=2m} \mathfrak{R}_1^{(m_1+2)}(x) \lambda_2^{(2m)}(D_2) \frac{(D_2)^{4-2m}}{\square^2} \mathfrak{R}_1^{(m_2+2)}(x) \\ &= \int d^4x \sqrt{g} \left(R_{ab} F_1(\square) R^{ab} + R F_2(\square) R \right) + O[\mathfrak{R}^3]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Заметим, что при $\mathfrak{R}_1^{(m+2)} = \overbrace{\nabla \dots \nabla}^m \mathfrak{R}_1^{(2)}$ это следует из интегрирования по частям и использование различных следствий свернутых тождеств Бьянки ($\nabla^b R_{ab} = \frac{1}{2} \nabla_a R$ и т.д.),

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{g} \sum_{m_1+m_2=2m} \underbrace{\nabla \dots \nabla}_{m_1} \mathfrak{R}(x) F(\square) \underbrace{\nabla \dots \nabla}_{m_2} \mathfrak{R}(x) \\ &= \int d^4x \sqrt{g} \left(R_{ab} \square^m F_1(\square) R^{ab} + R \square^m F_2(\square) R \right) + O[\mathfrak{R}^3]. \end{aligned} \quad (5.90)$$

⁵Для множества кривизн \mathfrak{R} размерности 2 в разложение (5.81) входят только четные m , но это всегда можно обобщить на случай нечетномерной «кривизны», такой как, например, внешняя кривизна в гравитационных моделях Хоравы.

Здесь операторы $F_1(\square)$ и $F_2(\square)$ имеют ту же размерность, что и $F(\square)$, и получаются из $F(\square)$ с помощью алгебры свертки индексов ковариантных производных. Используя это соотношение в левой части (5.89), получаем правую часть с полностью сокращенными степенями \square .

Таким образом, уравнение (5.89) с $m = 2$ подразумевает преобразование константы гравитационного взаимодействия в безразмерные формфакторы эйнштейновских партнеров. Эти партнеры имеют ту же структуру, что и квадратичные по кривизне космологические партнеры. Это снова метаморфоза ренормгруппового потока вида $1/16\pi G(\mu) = \mu^2 \lambda_2^{(2)}(\mu) \rightarrow F_{1,2}(\square)$.

Заметим, что все это происходит в УФ-пределе, где все кривизны в мономах быстро меняются в пространстве-времени со своими производными $\nabla \rightarrow \infty$. При промежуточных энергиях, когда становится значимым массовый масштаб M , масштабирование (5.75) теряет смысл и его, грубо говоря, следует заменить на $D \sim M$, а вместо (5.85) получают именно партнеры космологической постоянной Донохью [84], которые имеют структуру

$$M^4 \int d^4x \sqrt{g} \left(R_{ab} \frac{F_1^{\text{part}}(\square)}{\square^2} R^{ab} + R \frac{F_2^{\text{part}}(\square)}{\square^2} R \right). \quad (5.91)$$

Безразмерные формфакторы $F_{1,2}^{\text{part}}(\square)$ здесь включают петлевые поправки с нелокальными логарифмическими структурами вида

$$F^{\text{part}}(\square) \sim \ln \frac{M^2 + \square}{M^2}. \quad (5.92)$$

Обратите внимание, что эти партнеры все еще находятся в области высоких энергий $\square \geq M^2$, но они являются субдоминантными по сравнению с ведущим вкладом (5.85) с безразмерными формфакторами, включающими логарифмически бегущие решения ренормгрупповых уравнений. Это связано с тем, что партнеры (5.91) подавлены *степенными* факторами M^4/\square^2 . Точная форма этих формфакторов на промежуточных масштабах была получена в однопетлевом порядке в [85] для довольно общей теории массивных полей с использованием метода теплового ядра [63; 64]. В инфракрасной области $\square \ll M^2$ их, конечно, можно разложить в локальный градиентный ряд, отражающий явление отщепления Appelqvist-Karaczon [85–87].

Точно так же партнер гравитационной постоянной в инфракрасной области выглядит как

$$M^2 \int d^4x \sqrt{g} \left(R_{ab} \frac{F_1(\square)}{\square} R^{ab} + R \frac{F_2(\square)}{\square} R \right), \quad (5.93)$$

что напоминает конструкцию нелокального действия для модификаций теории гравитации на больших масштабах в [160; 161]. Он отличается от партнера космологической постоянной другой степенью M и степенью \square в знаменателе.

Здесь следует быть более осторожным — хотя случай (5.93) хорошо определен в асимптотически плоском пространстве-времени, партнер космологической постоянной (5.91) расходится в инфракрасной области по причинам, рассмотренным выше. Действие $1/\square^2$ плохо определено в четырёх измерениях (или, что то же самое, $\int d^4x \sqrt{g} (\frac{1}{\square} \mathfrak{R})^2$ инфракрасно расходится), так что разложение теории возмущений в секторе нулевой размерности должно быть критически пересмотрено. Чтобы проследить причину этой трудности, обратите внимание, что первые три члена разложения космологического члена (5.82) расходятся, тогда как аналогичное разложение для эйнштейновского члена становится хорошо определенным только после вычитания поверхностного члена Гиббонса-Хокинга $\int_{\infty} d^3\sigma^a (\partial_a h - \partial^b h_{ab})$ на бесконечности асимптотически плоского пространства-времени. Благодаря этому вычитанию мы можем записать для интеграла от инварианта $\mathfrak{R}_1^{(2)}(x) = -R(x)$, входящего в действие Эйнштейна с коэффициентом $L_1^{(2)} = 1/16\pi G$, корректно определенное разложение (5.68), начинающееся с квадратичного порядка по h_{ab} ,

$$\int d^4x \sqrt{g} (-R) - \int_{\infty} d^3\sigma^a (\partial_a h - \partial^b h_{ab}) = \sum_{M=2}^{\infty} \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} I_M^{(2)}(\tilde{g}, h), \quad (5.94)$$

$$I_2^{(2)}(\tilde{g}, h) = \frac{1}{4} h_{ab} \tilde{\square} h^{ab} - \frac{1}{8} h \tilde{\square} h - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}^b h_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \tilde{h})^2. \quad (5.95)$$

Тогда описанная выше стратегия вычислений приводит к эффективному действию (5.93), чей инфракрасный предел на древесном уровне должен соответствовать физике низких энергий с обрезанием на планковской массе M^2 и формфакторами $F_1(0) = 1$ и $F_2(0) = 1/2$. Этот ответ на древесном уровне с точностью до поправок \mathfrak{R}^3 напрямую соответствует приведенному выше выражению для $I_2^{(2)}(\tilde{g}, h)$ с h_{ab} , заданному уравнением (5.77) в терминах метрики искривленного пространства g_{ab} [160; 161].

Насколько нам известно, такое вычитание для разложения космологического члена (5.82) неизвестно, так что его строгое рассмотрение еще только предстоит. Интересно, может ли регуляризация этого инфракрасного поведения породить новые структуры. По-видимому, это должно быть основано на аналоге конструкции Грэма-Феффермана для асимптотически анти-де Ситтеровых (AdS) пространств [162; 163] и заслуживает дальнейшего изучения.

В любом случае, ультрафиолетовое поведение партнеров как космологической, так и гравитационной постоянных, которое не должно быть чувствительным к инфракрасной области, определяется квадратичными по кривизне членами (5.85) с бегущими безразмерными «константами связи». Их формфакторы $F_1(\square)$ и $F_2(\square)$ следуют из ренормгруппового бега соответствующих констант $\lambda_2^{(0)}(\mu)$ и $\lambda_2^{(2)}(\mu)$, но переход $\lambda_2^{(0,2)}(\mu) \rightarrow F_{1,2}(\square)$ не является прямым и опосредован уравнениями (5.85) и (5.89)–(5.90).

Заключение

Перечислим основные результаты диссертационной работы:

1. Для минимальных операторов высшего порядка на искривленном пространстве-времени впервые получено внедиагональное разложение теплового ядра, являющееся прямым обобщением известного девицтовского анзаца для операторов типа Лапласа. Оно имеет вид двойного функционального ряда по «обобщенным экспонентам» — некоторым новым спецфункциям гипергеометрического типа. Отличительной особенностью этого внедиагонального разложения является наличие в нем исчезающих в пределе совпадения членов при сколь угодно больших отрицательных степенях собственного времени, что делает невозможным построение для коэффициентов системы рекуррентных соотношений, аналогичной той, которая возникает в методе ДеВитта.
2. Были подробно изучены свойства «обобщенных экспонент» $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(-z)$: их представление в виде интеграла Меллина-Барнса, правило дифференцирования, области определения, связь с функциями Бесселя и т.д. Интересно, что, в отличие от обычной экспоненты, при $z \rightarrow \infty$ обобщенные экспоненты убывают не монотонно, а осциллирующим образом, имея степенную асимптотику при нецелых значениях порядка ν и экспоненциальную при целых ν . В последнем случае нахождение асимптотического разложения является нетривиальной задачей, но нами было показано, что в этом случае ответ согласуется с квазиклассическим приближением и методом перевала.
3. Показано, что выход за пределы диагонали теплового ядра вместе со свойствами обобщенных экспонент открывает возможность для очень эффективного использования техники интегральных преобразований. В частности, зная внедиагональное разложение для некоторого оператора можно простым образом получить внедиагональные разложения для любой его степени — что является далеко идущим обобщением формулы Фегана-Гилки и «свойства функториальности».
4. На основе метода обобщенного преобразования Фурье в искривленном пространстве-времени и теории возмущений разработано два алгоритма для получения замкнутых выражений для внедиагональных

- коэффициентов теплового ядра вне предела совпадения в виде сверток коэффициентов оператора с производными мировой функции Синга и тензора параллельного переноса. Соответствующие вычисления являются очень объемными и могут быть осуществлены только с применением современных систем символьных вычислений. Оба алгоритма были реализованы в системе *Wolfram Mathematica*, была проверена согласованность нашего метода с техникой ДеВитта, а также вычислены коэффициенты для минимального оператора 4-го порядка общего вида. При этом выяснилось, что в силу дополнительных соотношений, существующих между производными мировой функции и тензора параллельного переноса некоторые коэффициенты, генерируемые нашими методами, тождественно исчезают, а для оператора типа Лапласа исчезают все члены при отрицательных степенях собственного времени. Именно это обстоятельство лежит в основе эффективности первоначальной техники ДеВитта.
5. Нами был рассмотрен широкий класс аномальных действий, получающихся в результате процедуры фиксации конформной калибровки, и два выделенных представителя этого класса — аномальные действия Ригерта-Фрадкина-Цейтлина (RFT) и Фрадкина-Вилковыского (FV), отличающиеся на некоторый конформно-инвариантный функционал. Далее было показано, что FV-действие может быть получено некоторым пересуммированием нелокального разложения ковариантной теории возмущений по степеням кривизны. Эти результаты ставят точку в длительной дискуссии о кажущемся противоречии между структурой RFT-действия и разложения ковариантной теории возмущений.
 6. Аномальное RFT-действие было использовано нами для вывода закона конформного преобразования вакуумного тензора энергии-импульса на искривленном пространственно-временном фоне. Этот результат является обобщением известного локального выражения Брауна-Кэссиди для тензора энергии-импульса в конформно-плоском пространстве на случай пространств с ненулевым тензором Вейля.
 7. Приложение идей ренормгруппы к ковариантному нелокальному разложению эффективного действия по степеням кривизны пространства-времени показало, что космологическая и гравитационная константы

не подлежат бегу в силу их природы «головастиком», в то время как дополнительный ренормгрупповой бег квадратичных по кривизне инвариантов — партнеров космологического и эйнштейновского членов — возникает как метаморфоза якобы «бегущих» космологической и гравитационной констант.

Метод внедиагональных разложений теплового ядра может быть относительно легко обобщен на гораздо более широкий важный класс неминимальных операторов — так называемые причинные операторы. Также могут быть существенно усилены результаты, касающиеся «обобщенной функториальности» и использования техники интегральных преобразований. Эти задачи будут решены в дальнейших статьях, готовящихся к публикации. Другим важным направлением исследований должно стать улучшение полученных внедиагональных разложений путем детального учета соотношений, существующих между обобщенными экспонентами, также как между производными мировой функции и тензора параллельного переноса. Автор надеется, что дальнейшая работа области изучения внедиагональной структуры теплового ядра приведет к созданию новых, гораздо более эффективных алгоритмов вычисления его коэффициентов, что крайне важно для анализа сложных моделей модифицированной гравитации, включая модели типа Хоравы-Лифшица.

Благодарности

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю А. О. Барвинскому за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит А. В. Курова за плодотворные обсуждения и помощь в проведении символьных вычислений; А. Е. Казанцева, А. А. Лобашева и М. М. Попову за стимулирующие обсуждения на начальном этапе работы; О. И. Маричева за помощь в нахождении экспоненциальных асимптотик Ψ -функций Фокса-Райта. Помимо этого автор выражает глубокую признательность Даррену Грассо за указание на ошибку в матричной алгебре, анонимному рецензенту за конструктивный совет по расширению полученных результатов, а также всем, кто сделал настоящую работу возможной. Работы, на основе которых написана данная диссертация были поддержаны

грантами РФФИ №17-02-00651 и №20-02-00297, грантом РФФИ №23-12-00051 и Фондом развития теоретической физики и математики «Базис».

Список литературы

1. *ДеВитт, Б. С.* Динамическая теория групп и полей [Текст] / Б. С. ДеВитт. — Москва : «Наука», 1987.
2. *Васильев, А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике [Текст] / А. Н. Васильев. — Ленинград : Издательство Ленинградского университета, 1976.
3. *Gibbons, G. W.* Quantum field theory in curved spacetime [Текст] / G. W. Gibbons // General Relativity. An Einstein Centenary Survey. — Cambridge, England : Cambridge University Press, 1979. — С. 639—679.
4. *Биррелл, Н.* Квантовые поля в искривленном пространстве-времени [Текст] / Н. Биррелл, П. Девис. — Москва : «Мир», 1984.
5. *Wald, R. M.* Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics [Текст] / R. M. Wald. — Chicago, London : The University of Chicago Press, 1994.
6. *Шубин, М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория [Текст] / М. А. Шубин. — Москва : Добросвет, 2005.
7. *Адамар, Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа [Текст] / Ж. Адамар. — Москва : «Наука», 1978.
8. *Minakshisundaram, S.* Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds [Текст] / S. Minakshisundaram, A. Pleijel // Can. J. Math. — 1949. — Т. 1. — С. 242—256.
9. *Minakshisundaram, S.* Eigenfunctions on Riemannian manifolds [Текст] / S. Minakshisundaram // J. Indian Math. Soc. — 1953. — Т. 17, № 4. — С. 158—165.
10. *Seeley, R. T.* Complex powers of an elliptic operator [Текст] / R. T. Seeley // Singular Integrals. Т. 10. — Chicago, Ill : Amer. Math. Soc., 1967. — С. 288—307. — (Proc. Sympos. Pure Math.)
11. *Gilkey, P. B.* The spectral geometry of a Riemannian manifold [Текст] / P. B. Gilkey // J. Differ. Geom. — 1975. — Т. 10. — С. 601—618.

12. *Gilkey, P. B.* Recursion relations and the asymptotic behavior of the eigenvalues of the Laplacian [Текст] / P. B. Gilkey // *Compositio Math.* — 1979. — Т. 38, № 2. — С. 201—240.
13. *Gilkey, P. B.* The spectral geometry of the higher order Laplacian [Текст] / P. B. Gilkey // *Duke Math. J.* — 1980. — Т. 47, № 3. — С. 511—528.
14. *Fegan, H. D.* Invariants of the heat equation [Текст] / H. D. Fegan, P. B. Gilkey // *Pac. J. Math.* — 1985. — Т. 117, № 2. — С. 233—254.
15. *Gilkey, P. B.* Heat equation asymptotics of “nonminimal” operators on differential forms [Текст] / P. B. Gilkey, T. P. Branson, S. A. Fulling // *J. Math. Phys. (N.Y.)* — 1991. — Т. 32, № 8. — С. 2089—2091.
16. *Gilkey, P. B.* Logarithmic terms in asymptotic expansions of heat operator traces [Текст] / P. B. Gilkey, G. Grubb // *Commun. Partial Differ. Equations.* — 1998. — Т. 23, № 5/6. — С. 777—792.
17. *Gilkey, P. B.* Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem [Текст] / P. B. Gilkey. — Boca Raton, Florida : CRC Press, 1995.
18. *Gilkey, P. B.* Asymptotic Formulae in Spectral Geometry [Текст] / P. B. Gilkey. — Boca Raton, London, New York, Washington, DC : Chapman, Hall/CRC, 2003.
19. *Fock, V.* Die Eigenzeit in der Klassischen- und in der Quantenmechanik [Текст] / V. Fock // *Phys. Z. Sowjetunion.* — 1937. — Т. 12. — С. 404—425.
20. *Schwinger, J.* On gauge invariance and vacuum polarization [Текст] / J. Schwinger // *Phys. Rev.* — 1951. — Т. 82, № 5. — С. 664—679.
21. *Deser, S.* One-loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields [Текст] / S. Deser, P. van Nieuwenhuizen // *Phys. Rev. D.* — 1974. — Т. 10, № 2—15. — С. 401.
22. *Deser, S.* Nonrenormalizability of the quantized Dirac-Einstein system [Текст] / S. Deser, P. van Nieuwenhuizen // *Phys. Rev. D.* — 1974. — Т. 10, № 2—15. — С. 411.
23. *Deser, S.* One-loop divergences of the Einstein-Yang-Mills system [Текст] / S. Deser, P. Tsao H.-Sh. van Nieuwenhuizen // *Phys. Rev. D.* — 1974. — Т. 10, № 10—15. — С. 3337.

24. *'t Hooft, G.* One loop divergencies in the theory of gravitation [Текст] / G. 't Hooft, M. Veltman // Ann. Inst. Henri Poincare. — 1974. — A20. — C. 69—94.
25. *Christensen, S. M.* Axial and conformal anomalies for arbitrary spin in gravity and supergravity [Текст] / S. M. Christensen, M. J. Duff // Phys. Lett. B. — 1978. — Т. 76, № 5. — С. 571—574.
26. Chirality, self-duality, and supergravity counterterms [Текст] / S. M. Christensen [и др.] // Phys. Lett. B. — 1979. — Т. 84, № 4. — С. 411—415.
27. *Stelle, K. S.* Renormalization of higher-derivative quantum gravity [Текст] / K. S. Stelle // Phys. Rev. — 1977. — Т. D16, № 4. — С. 953—969.
28. *Fradkin, E. S.* Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity [Текст] / E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin // Nucl. Phys. B. — 1982. — Т. B201, № 3. — С. 469—491.
29. *Avramidy, I. G.* Asymptotic freedom in higher-derivative quantum gravity [Текст] / I. G. Avramidy, A. O. Barvinsky // Phys. Lett. B. — 1985. — Т. 159, № 4—6. — С. 269—274.
30. *Hawking, S. W.* Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime [Текст] / S. W. Hawking // Comm. Math. Phys. — 1977. — Т. 55. — С. 133—148.
31. *Capper, D. M.* Trace anomalies in dimensional regularization [Текст] / D. M. Capper, M. J. Duff // Nuovo Cim. A. — 1974. — Т. 23, № 1. — С. 173—183.
32. *Capper, D. M.* Conformal anomalies and the renormalizability problem in quantum gravity [Текст] / D. M. Capper, M. J. Duff // Phys. Lett. A. — 1975. — Т. 53, № 5. — С. 361—362.
33. *Duff, M. J.* Observations on Conformal Anomalies [Текст] / M. J. Duff // Nucl. Phys. B. — 1977. — Т. 125. — С. 334—348.
34. *Fradkin, E. S.* Conformal off-mass-shell extension and elimination of conformal anomalies in quantum gravity [Текст] / E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky // Phys. Lett. B. — 1978. — Т. 73, № 2. — С. 209—213.
35. *Dowker, J. S.* Covariant Casimir calculations [Текст] / J. S. Dowker, R. Critchley // J. Phys. A. — 1976. — Т. 9, № 4. — С. 535—540.

36. *Christensen, S. M.* Trace anomalies and the Hawking effect [Текст] / S. M. Christensen, S. A. Fulling // Phys. Rev. D. — 1977. — Т. 15, № 8. — С. 2088—2104.
37. *Bunch, T. S.* Stress tensor and conformal anomalies for massless fields in a Robertson–Walker universe [Текст] / T. S. Bunch, P. C. Davies // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1977. — Т. 356. — С. 569—574.
38. *Adler, S. L.* Regularization of the stress-energy tensor for vector and scalar particles propagating in a general background metric [Текст] / S. L. Adler, J. Lieberman, Y. J. Ng // Ann. Phys. — 1977. — Т. 106, № 2. — С. 279—321.
39. *Brown, L. S.* Stress tensors and their anomalies in conformally flat space-time [Текст] / L. S. Brown, J. P. Cassidy // Phys. Rev. D. — 1977. — Т. 16, № 6. — С. 1712—1716.
40. *Fradkin, E. S.* One-loop effective potential in gauged $O(4)$ supergravity and the problem of the Λ term [Текст] / E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin // Nucl. Phys. B. — 1984. — Т. 234, № 2. — С. 472—508.
41. *Fradkin, E. S.* Conformal anomaly in Weyl theory and anomaly free superconformal theories [Текст] / E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin // Phys. Lett. B. — 1984. — Т. 134, № 3/4. — С. 187—193.
42. *Fradkin, E. S.* Conformal supergravity [Текст] / E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin // Phys. Rep. — 1985. — Т. 119, № 4/5. — С. 233—362.
43. *Starobinsky, A. A.* A new type of isotropic cosmological models without singularity [Текст] / A. A. Starobinsky // Phys. Lett. B. — 1980. — Т. 91, № 1. — С. 99—102.
44. *Horava, P.* Quantum gravity at a Lifshitz point [Текст] / P. Horava // Phys. Rev. D. — 2009. — Т. 79. — С. 084008. — arXiv: [0901.3775](https://arxiv.org/abs/0901.3775) [hep-th].
45. Hořava gravity is asymptotically free in $2 + 1$ dimensions [Текст] / A. O. Barvinsky [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 21. — С. 211301. — arXiv: [1706.06809](https://arxiv.org/abs/1706.06809) [hep-th].
46. *Barvinsky, A. O.* Beta functions of $(3 + 1)$ -dimensional projectable Hořava gravity [Текст] / A. O. Barvinsky, A. V. Kurov, S. M. Sibiryakov // Phys. Rev. — 2022. — Т. D105. — С. 044009. — arXiv: [2110.14688](https://arxiv.org/abs/2110.14688) [hep-th].

47. *Barvinsky, A. O.* Asymptotic freedom in $(3 + 1)$ -dimensional projectable Hořava gravity: connecting ultraviolet to infrared [Текст] / A. O. Barvinsky, A. V. Kurov, S. M. Sibiryakov. — 2022.
48. *Barvinsky, A. O.* The generalized Schwinger–DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity [Текст] / A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky // Phys. Rep. — 1985. — Т. 119, № 1. — С. 1–74.
49. *Gusynin, V. P.* New algorithm for computing the coefficients in the heat kernel expansion [Текст] / V. P. Gusynin // Phys. Lett. — 1989. — Т. B225, № 3. — С. 233–239.
50. *Gusynin, V. P.* Seeley–Gilkey coefficients for fourth-order operators on a Riemannian manifold [Текст] / V. P. Gusynin // Nucl. Phys. — 1990. — Т. B333, № 1. — С. 296–316.
51. *Gusynin, V. P.* Asymptotics of the heat kernel for nonminimal differential operators [Текст] / V. P. Gusynin // Ukr. Math. J. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1432–1441.
52. *Gusynin, V. P.* Local heat kernel asymptotics for nonminimal differential operators [Текст] / V. P. Gusynin, E. V. Gorbar // Phys. Lett. — 1991. — Т. B270, № 1. — С. 29–36.
53. *Gusynin, V. P.* Heat kernel expansion for nonminimal differential operations and manifolds with torsion [Текст] / V. P. Gusynin, E. V. Gorbar, V. V. Romankov // Nucl. Phys. — 1991. — Т. B362, № 1/2. — С. 449–471.
54. *Gorbar, E. V.* Heat kernel expansion for operators containing a root of the Laplace operator [Текст] / E. V. Gorbar // J. Math. Phys. (N.Y.) — 1997. — Т. 38, № 3. — С. 1692–1699. — arXiv: [9602018](https://arxiv.org/abs/9602018) [hep-th].
55. *Buchbinder, I. L.* Effective Action in Quantum Gravity [Текст] / I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, I. L. Shapiro. — Bristol, Philadelphia : Institute of Physics Publishing, 1992.
56. *Vassilevich, D. V.* Heat kernel expansion: user’s manual [Текст] / D. V. Vassilevich // Phys. Rep. — 2003. — Т. 388, № 5/6. — С. 279–360. — arXiv: [0306138](https://arxiv.org/abs/0306138) [hep-th].
57. *Barvinsky, A. O.* Heat kernel expansion in the background field formalism [Текст] / A. O. Barvinsky. — 2015. — [Scholarpedia](https://www.sciencedirect.com/journal/Scholarpedia), 10(6):31644.

58. *Carinhas, P. A.* Computational asymptotics of fourth-order operators [Текст] / P. A. Carinhas, S. A. Fulling // Asymptotic and computational analysis: conference in honor of Frank W.J. Olver's 65th birthday. — New York : MARCEL DEKKER, Inc., 1990. — (Proc. Sympos. Pure Math.)
59. *Polyakov, A. M.* Quantum Geometry of Bosonic Strings [Текст] / A. M. Polyakov // Phys. Lett. B. — 1981. — Т. 103. — С. 207—210.
60. *Riegert, R. J.* A nonlocal action for the trace anomaly [Текст] / R. J. Riegert // Phys. Lett. B. — 1984. — Т. 134, № 1/2. — С. 56—60.
61. *Paneitz, S. M.* A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds (summary) [Текст] / S. M. Paneitz // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). Т. 4. — 2008. — arXiv: [0803.4331](https://arxiv.org/abs/0803.4331) [[math.DG](https://arxiv.org/archive/math)].
62. *Deser, S.* Nonlocal conformal anomalies [Текст] / S. Deser, M. J. Duff, C. J. Isham // Nucl. Phys. B. — 1976. — Т. 111, № 1. — С. 45—55.
63. *Barvinsky, A. O.* Beyond the Schwinger–DeWitt technique: Converting loops into trees and in-in currents [Текст] / A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky // Nucl. Phys. B. — 1987. — Т. 282. — С. 163—188.
64. *Barvinsky, A. O.* Covariant perturbation theory (II). Second order in the curvature. General algorithms [Текст] / A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky // Nucl. Phys. B. — 1990. — Т. 333, № 2. — С. 471—511.
65. *Barvinsky, A. O.* Covariant perturbation theory (III). Spectral representations of the third-order form factors [Текст] / A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky // Nucl. Phys. B. — 1990. — Т. 333, № 2. — С. 512—524.
66. Covariant Perturbation Theory (IV). Third order in the curvature [Текст] : тех. отч. / A. O. Barvinsky [и др.] ; Report of the University of Manitoba. — Winnipeg, 1993. — SPIRES-HEP: PRINT-93—0274. — arXiv: [0911.1168](https://arxiv.org/abs/0911.1168) [[hep-th](https://arxiv.org/archive/hep)].
67. *Deser, S.* Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions [Текст] / S. Deser, A. Schwimmer // Phys. Lett. B. — 1993. — Т. 309, № 3/4. — С. 279—284. — arXiv: [hep-th/9302047](https://arxiv.org/abs/hep-th/9302047) [[hep-th](https://arxiv.org/archive/hep)].

68. *Erdmenger, J.* Conserved currents and the energy momentum tensor in conformally invariant theories for general dimensions [Текст] / J. Erdmenger, H. Osborn // Nucl. Phys. B. — 1997. — Т. 483. — С. 431–474. — arXiv: [hep-th/9605009](https://arxiv.org/abs/hep-th/9605009).
69. *Deser, S.* Closed form effective conformal anomaly actions in $D \geq 4$ [Текст] / S. Deser // Phys. Lett. B. — 2000. — Т. 479, № 1–3. — С. 315–320. — arXiv: [hep-th/9911129](https://arxiv.org/abs/hep-th/9911129) [[hep-th](#)].
70. *Coriano, C.* TTT in CFT: trace identities and the conformal anomaly effective action [Текст] / C. Coriano, M. M. Maglio, E. Mottola // Nucl. Phys. B. — 2019. — Т. 942. — С. 303–328. — arXiv: [1703.08860](https://arxiv.org/abs/1703.08860) [[hep-th](#)].
71. *Duff, M. J.* Weyl, Pontryagin, Euler, Eguchi and Freund [Текст] / M. J. Duff // J. Phys. A: Math. Theor. — 2020. — Т. 53. — С. 301001. — arXiv: [2003.02688](https://arxiv.org/abs/2003.02688) [[hep-th](#)].
72. *Antoniadis, I.* Four-dimensional quantum gravity in the conformal sector [Текст] / I. Antoniadis, E. Mottola // Phys. Rev. D. — 1992. — Т. 45. — С. 2013.
73. *Antoniadis, I.* Scaling behavior of quantum four-geometries [Текст] / I. Antoniadis, P. O. Mazur, E. Mottola // Phys. Lett. B. — 1994. — Т. 323, № 3/4. — С. 284–291. — arXiv: [hep-th/9301002](https://arxiv.org/abs/hep-th/9301002) [[hep-th](#)].
74. *Mottola, E.* Macroscopic effects of the quantum trace anomaly [Текст] / E. Mottola, R. Vaulin // Phys. Rev. D. — 2006. — СЕНТ. — Т. 74, ВЫП. 6. — С. 064004. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.064004>.
75. *Mottola, E.* Scalar Gravitational Waves in the Effective Theory of Gravity [Текст] / E. Mottola // JHEP. — 2017. — Т. 07. — С. 043. — arXiv: [1606.09220](https://arxiv.org/abs/1606.09220) [[gr-qc](#)]. — [Erratum: JHEP 09, 107 (2017)].
76. *Mottola, E.* The effective theory of gravity and dynamical vacuum energy [Текст] / E. Mottola // JHEP. — 2022. — Т. 11. — С. 037. — arXiv: [2205.04703](https://arxiv.org/abs/2205.04703) [[hep-th](#)].
77. *Barvinsky, A. O.* Conformal decomposition of the effective action and covariant curvature expansion [Текст] / A. O. Barvinsky, A. G. Mirzabekian, V. V. Zhytnikov. — 1995.

78. *Fischetti, M. V.* Quantum effects in the early universe. I. Influence of trace anomalies on homogeneous, isotropic, classical geometries [Текст] / M. V. Fischetti, J. B. Hartle, B. L. Hu // Phys. Rev. D. — 1979. — Т. 20, № 8. — С. 1757–1771.
79. *Barvinsky, A. O.* Cosmological landscape from nothing: some like it hot [Текст] / A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik // JCAP. — 2006. — Т. 09, № 014. — arXiv: [hep-th/0605132](https://arxiv.org/abs/hep-th/0605132) [hep-th].
80. *Barvinsky, A. O.* Why there is something rather than nothing: Cosmological constant from summing over everything in Lorentzian quantum gravity [Текст] / A. O. Barvinsky // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Т. 99. — С. 071301. — arXiv: [0704.0083](https://arxiv.org/abs/0704.0083) [hep-th].
81. *Anber, M. M.* Running of the gravitational constant [Текст] / M. M. Anber, J. F. Donoghue // Phys. Rev. D. — 2012. — Т. 85. — С. 104016. — arXiv: [1111.2875](https://arxiv.org/abs/1111.2875) [hep-th].
82. *Donoghue, J. F.* A critique of the asymptotic safety program [Текст] / J. F. Donoghue // Front. Phys. — 2020. — Т. 8, № 56. — arXiv: [1911.02967](https://arxiv.org/abs/1911.02967) [hep-th].
83. *Woodard, R. P.* Cosmology is not a renormalization group flow [Текст] / R. P. Woodard // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Т. 101. — С. 081301. — arXiv: [0805.3089](https://arxiv.org/abs/0805.3089) [gr-qc].
84. *Donoghue, J. F.* Non-local partner to the cosmological constant [Текст] / J. F. Donoghue // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 105. — С. 105025. — arXiv: [2201.12217](https://arxiv.org/abs/2201.12217) [hep-th].
85. *Gorbar, E. V.* Nonlocality of quantum matter corrections and cosmological constant running [Текст] / E. V. Gorbar, I. L. Shapiro // JHEP. — 2022. — Т. 7, № 103. — arXiv: [2203.09232](https://arxiv.org/abs/2203.09232) [gr-qc].
86. *Appelquist, T.* Infrared Singularities and Massive Fields [Текст] / T. Appelquist, J. Carazzone // Phys. Rev. D. — 1975. — Т. 11. — С. 2856.
87. *Gorbar, E. V.* Renormalization group and decoupling in curved space [Текст] / E. V. Gorbar, I. L. Shapiro // JHEP. — 2003. — Т. 02, № 021. — arXiv: [hep-ph/0210388](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210388) [hep-ph].

88. *Wachowski, W. N.* The evolution function of the operator $-(-\Delta)^\nu$ [Текст] / W. N. Wachowski, P. I. Pronin // Moscow University Physics Bulletin. — 2019. — Т. 74, № 1. — С. 17–23.
89. *Barvinsky, A. O.* Heat kernel for higher-order differential operators and generalized exponential functions [Текст] / A. O. Barvinsky, P. I. Pronin, W. Wachowski // Phys. Rev. — 2019. — Т. D100. — С. 105004. — arXiv: [1908.02161](https://arxiv.org/abs/1908.02161) [hep-th].
90. *Barvinsky, A. O.* Heat kernel expansion for higher order minimal and nonminimal operators [Текст] / A. O. Barvinsky, W. Wachowski // Phys. Rev. — 2022. — Т. D105. — С. 065013. — arXiv: [2112.03062](https://arxiv.org/abs/2112.03062) [hep-th].
91. *Barvinsky, A. O.* Notes on conformal anomaly, nonlocal effective action, and the metamorphosis of the running scale [Текст] / A. O. Barvinsky, W. Wachowski // Phys. Rev. — 2023. — Т. D108. — С. 045014. — arXiv: [2306.03780](https://arxiv.org/abs/2306.03780) [hep-th].
92. *Berline, N.* Heat Kernels and Dirac Operators [Текст] / N. Berline, E. Getzler, M. Vergne. — Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1992.
93. *DeWitt-Morette, C.* The semiclassical expansion [Текст] / C. DeWitt-Morette // Ann. Phys. (N.Y.) — 1976. — Т. 97. — С. 367–399.
94. *Barvinsky, A. O.* Unitarity approach to quantum cosmology [Текст] / A. O. Barvinsky // Phys. Rep. — 1993. — Т. 230, № 5/6. — С. 237–367.
95. *Barvinsky, A. O.* New nonlocal effective action [Текст] / A. O. Barvinsky, V. F. Mukhanov // Phys. Rev. — 2002. — Т. D66. — С. 065007. — arXiv: [hep-th/0203132](https://arxiv.org/abs/hep-th/0203132) [hep-th].
96. *Tomboulis, E. T.* Superrenormalizable gauge and gravitational theories [Текст] : тех. отч. / E. T. Tomboulis. — 1997. — UCLA/97/TEP/2. — arXiv: [9702146](https://arxiv.org/abs/9702146) [hep-th].
97. *Modesto, L.* Super-renormalizable multidimensional quantum gravity [Текст] / L. Modesto // Astron. Rev. — 2013. — Т. 8, № 2. — С. 4–33. — arXiv: [1202.3151](https://arxiv.org/abs/1202.3151) [hep-th].
98. Heat kernel methods for Lifshitz theories [Текст] / A. O. Barvinsky [и др.] // J. High Energy Phys. — 2017. — Т. 2017, № 6. — arXiv: [1703.04747](https://arxiv.org/abs/1703.04747) [hep-th].

99. *Branson, T. P.* An anomaly associated with 4-dimensional quantum gravity [Текст] / T. P. Branson // Commun. Math. Phys. — 1996. — Т. 178, № 2. — С. 301—309.
100. *Erdmenger, J.* Conformally covariant differential operators: properties and applications [Текст] / J. Erdmenger // Class. Quantum Grav. — 1997. — Т. 14, № 8. — С. 2061—2084.
101. *Jack, I.* Background field calculations in curved spacetime (I). General formalism and application to scalar fields [Текст] / I. Jack, H. Osborn // Nucl. Phys. — 1984. — Т. B234. — С. 331—364.
102. *Maslov, V. P.* Semi-classical approximation in quantum mechanics [Текст] / V. P. Maslov, M. V. Fedoriuk. — Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1981.
103. *Lee, H. W.* Higher-derivative operators and DeWitt's WKB ansatz [Текст] / H. W. Lee, P. Y. Pac // Phys. Rev. — 1986. — Т. D33, № 4. — С. 1012.
104. *Zolotarev, V. M.* Superdiffusion and stable laws [Текст] / V. M. Zolotarev, V. V. Uchaikin, V. V. Saenko // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1999. — Т. 115, № 4. — С. 1411—1425.
105. *Mamiya, A.* Heat kernel for flat generalized Laplacians with anisotropic scaling [Текст] / A. Mamiya, A. Pinzul // J. Math. Phys. (N.Y.) — 2014. — Т. 55, № 6. — arXiv: [1308.2706 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1308.2706).
106. *Wright, E. M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function [Текст] / E. M. Wright // J. London Math. Soc. — 1935. — Т. 10, № 4. — С. 286—293.
107. *Wright, E. M.* The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function [Текст] / E. M. Wright // Proc. London Math. Soc. — 1940. — Т. 46, № 2. — С. 389—408.
108. *Braaksma, B. L. J.* Asymptotic expansions and analytic continuations for a class of Barnes-integrals [Текст] / B. L. J. Braaksma // Compositio Math. — 1964. — Т. 15. — С. 239—341. — URL: http://www.numdam.org/item/CM_1962-1964__15__239_0.
109. *Marichev, O. I.* Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions: Theory and Algorithmic Tables [Текст] / O. I. Marichev. — Chichester : Ellis Horwood Limited, 1983.

110. *Srivastava, H. M.* A Treatise on Generating Functions [Текст] / H. M. Srivastava, H. L. Manocha. — New York : Ellis Horwood Limited, 1984.
111. *Mathai, A. M.* The H -Function: Theory and Applications [Текст] / A. M. Mathai, R. K. Saxena, H. J. Haubold. — New York, Dordrecht, Heidelberg, London : Springer, 2010.
112. *Kilbas, A. A.* H -Transforms: Theory and Applications [Текст] / A. A. Kilbas, M. Saigo. — Boca Raton, London, New York, Washington, DC : Chapman, Hall/CRC, 2004.
113. *Witten, E.* Anti-de Sitter space and holography [Текст] / E. Witten // Adv. Theor. Math. Phys. — 1998. — Т. 2, IASSNS-HEP-98—15. — С. 253—291. — arXiv: [9802150](https://arxiv.org/abs/9802150) [hep-th].
114. *Liu, H.* $D = 4$ super Yang–Mills, $D = 5$ gauged supergravity and $D = 4$ conformal supergravity [Текст] / H. Liu, A. A. Tseytlin // Nucl. Phys. B. — 1998. — Т. 533, № 1—3. — С. 88—108. — arXiv: [hep-th/9804083](https://arxiv.org/abs/hep-th/9804083) [hep-th].
115. *Luty, M. A.* Strong interactions and stability in the DGP model [Текст] / M. A. Luty, M. Porrati, R. Rattazzi // JHEP. — 2003. — Т. 09. — С. 029. — arXiv: [hep-th/0303116](https://arxiv.org/abs/hep-th/0303116) [hep-th].
116. *Barvinsky, A. O.* Quantum effective action in spacetimes with branes and boundaries [Текст] / A. O. Barvinsky, D. V. Nesterov // Phys. Rev. — 2006. — Т. D73, № 6. — С. 066012. — arXiv: [hep-th/0512291](https://arxiv.org/abs/hep-th/0512291) [hep-th].
117. *Barvinsky, A. O.* Schwinger–DeWitt technique for quantum effective action in brane induced gravity models [Текст] / A. O. Barvinsky, D. V. Nesterov // Phys. Rev. — 2010. — Т. D81, № 8. — С. 085018. — arXiv: [0911.5334](https://arxiv.org/abs/0911.5334) [hep-th].
118. *Bär, C.* Heat kernel asymptotics for roots of generalized Laplacians [Текст] / C. Bär, S. Moroianu // Int. J. Math. — 2003. — Т. 14, № 04. — С. 397—412.
119. *Samko, S. G.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications [Текст] / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — Singapore : Gordon, Breach, 1993.
120. *Pskhu, A. V.* Partial Differential Equations of Fractional Order [Текст] / A. V. Pskhu. — Moscow : Nauka, 2005. — (in Russian).

121. *Mainardi, F.* The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation [Текст] / F. Mainardi // Appl. Math. Lett. — 1996. — Т. 9, № 6. — С. 23—28.
122. *Gorenflo, R.* Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation [Текст] / R. Gorenflo, Y. Luchko, F. Mainardi // Journal of computational and applied mathematics. — 2000. — Т. 118. — С. 175—191.
123. *Mainardi, F.* The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation [Текст] / F. Mainardi, Y. Luchko, G. Pagnini // Fractional Calculus Appl. Anal. — 2001. — Т. 4, № 2. — С. 153—192. — arXiv: [0702419 \[cond-mat\]](#).
124. *Fedoriuk, M. V.* Asymptotics: Integrals and Series [Текст] / M. V. Fedoriuk. — Moscow : Nauka, 1987. — (in Russian).
125. *Talaganis, S.* Towards understanding the ultraviolet behavior of quantum loops in infinite-derivative theories of gravity [Текст] / S. Talaganis, T. Biswas, A. Mazumdar // Classical Quantum Gravity. — 2015. — Т. 32, № 21. — С. 215017. — arXiv: [1412.3467 \[hep-th\]](#).
126. *Biswas, T.* Consistent higher derivative gravitational theories with stable de Sitter and anti-de Sitter backgrounds [Текст] / T. Biswas, A. S. Koshelev, A. Mazumdar // Phys. Rev. — 2017. — Т. D95, № 4. — С. 043533. — arXiv: [1606.01250 \[gr-qc\]](#).
127. *Tarasov, V. E.* Fractional Derivative Regularization in QFT [Текст] / V. E. Tarasov // Adv. High Energy Phys. — 2018. — Т. 2018. — arXiv: [1805.08566 \[hep-th\]](#). — Article ID 7612490.
128. *Widom, H.* Families of pseudodifferential operators [Текст] / H. Widom // Topics in functional analysis: Essays dedicated to M.G. Krein on the occasion of his 70th birthday. Т. 3. — New York, San Francisco, London : Academic press, 1978. — С. 345—395. — (Adv. in Math. Suppl. Stud.)
129. *Widom, H.* Szegő's theorem and a complete symbolic calculus for pseudodifferential operators [Текст] / H. Widom // Seminar on Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations. — Princeton : Princeton Univ. Press, 1979. — С. 261—283.

130. *Widom, H.* A complete symbolic calculus for pseudodifferential operators [Текст] / H. Widom // Bulletin des Sciences Mathématiques. — 1980. — Т. 104, № 1. — С. 19—63.
131. *Пономарев, В. Н.* Геометро-динамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий [Текст] / В. Н. Пономарев, А. О. Барвинский, Ю. Н. Обухов. — Москва : Энергоатомиздат, 1985.
132. *Katanayev, M. O.* String model with dynamical geometry and torsion [Текст] / M. O. Katanayev, I. V. Volovich // Phys. Lett. B. — 1986. — Т. 175, № 4. — С. 413—416.
133. *Birrell, N. D.* Quantum fields in curved space [Текст] / N. D. Birrell, P. C. W. Davies. — New York : Cambridge University Press, 1982.
134. *Duff, M. J.* Twenty years of the Weyl anomaly [Текст] / M. J. Duff // Class. Quant. Grav. — 1994. — Т. 11, № 1. — С. 1387—1403. — arXiv: [hep-th/9308075](https://arxiv.org/abs/hep-th/9308075) [hep-th].
135. *Deser, S.* Conformal anomalies — Recent progress [Текст] / S. Deser // Helv. Phys. Acta. — 1996. — Т. 69. — С. 570—581. — arXiv: [hep-th/9609138](https://arxiv.org/abs/hep-th/9609138) [hep-th].
136. *Mirzabekian, A. G.* Partial summation of the nonlocal expansion for the gravitational effective action in 4 dimensions [Текст] / A. G. Mirzabekian, G. A. Vilkovisky, V. V. Zhytnikov // Phys.Lett. B. — 1996. — Т. 369, № 3/4. — С. 205—220. — arXiv: [hep-th/9510205](https://arxiv.org/abs/hep-th/9510205) [hep-th].
137. *Jack, I.* Analogs of the c -theorem for four-dimensional renormalisable field theories [Текст] / I. Jack, H. Osborn // Nucl. Phys. B. — 1990. — Т. 343, № 3. — С. 647—688.
138. *Komargodski, Z.* On renormalization group flows in four dimensions [Текст] / Z. Komargodski, A. Schwimmer // JHEP. — 2011. — Т. 12. — С. 099. — arXiv: [1107.3987](https://arxiv.org/abs/1107.3987) [hep-th].
139. *Christensen, S. M.* Flat space as a gravitational instanton [Текст] / S. M. Christensen, M. J. Duff // Nucl. Phys. B. — 1978. — Т. 146. — С. 11—19.
140. *Bzowski, A.* Implications of conformal invariance in momentum space [Текст] / A. Bzowski, P. McFadden, K. Skenderis // JHEP. — 2014. — Т. 03. — С. 111. — arXiv: [1304.7760](https://arxiv.org/abs/1304.7760) [hep-th].

141. *Bzowski, A.* Renormalised 3-point functions of stress tensors and conserved currents in CFT [Текст] / A. Bzowski, P. McFadden, K. Skenderis // JHEP. — 2018. — Т. 11. — С. 153. — arXiv: [1711.09105 \[hep-th\]](#).
142. *Bzowski, A.* Conformal correlators as simplex integrals in momentum space [Текст] / A. Bzowski, P. McFadden, K. Skenderis // JHEP. — 2021. — Т. 01. — С. 192. — arXiv: [2008.07543 \[hep-th\]](#).
143. The one-loop effective action and trace anomaly in four dimensions [Текст] / A. O. Barvinsky [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1995. — Т. 439, № 3. — С. 561–582. — arXiv: [hep-th/9404187 \[hep-th\]](#).
144. *Tseytlin, A. A.* Comments on 4-derivative scalar theory in 4 dimensions [Текст] / A. A. Tseytlin. — 2022.
145. *Mazur, P. O.* Weyl cohomology and the effective action for conformal anomalies [Текст] / P. O. Mazur, E. Mottola // Phys. Rev. D. — 2001. — Т. 64. — С. 104022. — arXiv: [hep-th/0106151 \[hep-th\]](#).
146. *DeWitt, B. S.* Quantum gravity: the new synthesis [Текст] / B. S. DeWitt // General Relativity: An Einstein centenary survey / под ред. S. W. Hawking, W. Israel. — Cambridge University Press, 1979. — С. 680–745.
147. The basis of nonlocal curvature invariants in quantum gravity theory. Third order [Текст] / A. O. Barvinsky [и др.] // J. Math. Phys. — 1994. — Т. 35. — С. 3525–3542. — arXiv: [gr-qc/9404061 \[gr-qc\]](#).
148. *Barvinsky, A. O.* Origin of inflation in CFT driven cosmology: R^2 -gravity and non-minimally coupled inflaton models [Текст] / A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik, D. V. Nesterov // Eur. Phys. J. C. — 2015. — Т. 75, № 12. — С. 584. — arXiv: [1510.06858 \[hep-th\]](#).
149. *Komargodski, Z.* On renormalization group flows in four dimensions [Текст] / Z. Komargodski // JHEP. — 2012. — Т. 07. — С. 069. — arXiv: [1112.4538 \[hep-th\]](#).
150. *Hawking, S. W.* Trace anomaly driven inflation [Текст] / S. W. Hawking, T. Hertog, H. S. Reall // Phys. Rev. D. — 2001. — Т. 63. — С. 083504. — arXiv: [hep-th/0010232 \[hep-th\]](#).
151. *Pelinson, A. M.* On the stability of the anomaly-induced inflation [Текст] / A. M. Pelinson, I. L. Shapiro, F. I. Takakura // Nucl. Phys. B. — 2003. — Т. 648, № 1/2. — С. 417–445. — arXiv: [hep-ph/0208184 \[hep-ph\]](#).

152. *Kokksma, J. F.* Effect of the trace anomaly on the cosmological constant [Текст] / J. F. Kokksma, T. Prokopec // Phys. Rev. D. — 2008. — Т. 78, № 2. — С. 023508. — arXiv: [0803.4000 \[gr-qc\]](#).
153. From stable to unstable anomaly-induced inflation [Текст] / T. P. Netto [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2016. — Т. 76. — С. 544. — arXiv: [1509.08882 \[hep-th\]](#).
154. *Barvinsky, A. O.* Nonminimal Higgs inflation and initial conditions in cosmology [Текст] / A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik // Handbook of quantum gravity / под ред. C. Bambi, L. Modesto, I. Shapiro. — Springer, 2023. — arXiv: [2212.13077 \[hep-th\]](#).
155. *Barvinsky, A. O.* BRST technique for the cosmological density matrix [Текст] / A. O. Barvinsky // JHEP. — 2013. — Т. 10. — С. 051. — arXiv: [1308.3270 \[hep-th\]](#).
156. *Mamaev, S. G.* Particle reaction from vacuum near a homogeneous isotopic singularity [Текст] / S. G. Mamaev, V. M. Mostepanenko, A. A. Starobinsky // Sov. Phys. JETP. — 1976. — Т. 70, № 5. — С. 1577—1591.
157. *Ford, L. H.* Quantum vacuum energy in a closed universe [Текст] / L. H. Ford // Phys. Rev. D. — 1976. — Т. 14, № 12. — С. 3304—3313.
158. *Candelas, P.* Field theories on conformally related space-times: Some global considerations [Текст] / P. Candelas, J. S. Dowker // Phys. Rev. D. — 1979. — Т. 19, № 10. — С. 2902—2906.
159. *Barvinsky, A. O.* New type of hill-top inflation [Текст] / A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik, D. V. Nesterov // JCAP. — 2016. — Т. 01. — С. 036. — arXiv: [1509.07270 \[hep-th\]](#).
160. *Barvinsky, A. O.* Nonlocal action for long-distance modifications of gravity [Текст] / A. O. Barvinsky // Phys. Lett. B. — 2003. — Т. 572. — С. 109—116. — arXiv: [hep-th/0304229 \[hep-th\]](#).
161. *Barvinsky, A. O.* Covariant long-distance modifications of Einstein theory and strong coupling problem [Текст] / A. O. Barvinsky // Phys. Rev. D. — 2005. — Т. 71, № 8. — С. 084007. — arXiv: [hep-th/0501093 \[hep-th\]](#).
162. *Henningson, M.* The holographic Weyl anomaly [Текст] / M. Henningson, K. Skenderis // JHEP. — 1998. — Т. 07. — С. 023. — arXiv: [hep-th/9806087 \[hep-th\]](#).

163. *Haro, S. de.* Holographic reconstruction of spacetime and renormalization in the AdS/CFT correspondence [Текст] / S. de Haro, K. Skenderis, S. N. Solodukhin // Commun. Math. Phys. — 2001. — Т. 217. — С. 595—622. — arXiv: [hep-th/0002230](https://arxiv.org/abs/hep-th/0002230) [[hep-th](#)].
164. *Kilbas, A. A.* On the generalized Wright function [Текст] / A. A. Kilbas, M. Saigo, J. J. Trujillo // Fractional Calculus Appl. Anal. — 2002. — Т. 5, № 4. — С. 437—460.
165. *Kilbas, A. A.* Fractional calculus of the generalized Wright function [Текст] / A. A. Kilbas // Fractional Calculus Appl. Anal. — 2005. — Т. 8, № 2. — С. 113—126.
166. *Lavault, C.* Fractional calculus and generalized Mittag-Leffler type functions [Текст] : тех. отч. / C. Lavault. — 2017. — LIPN, Université Paris 13. — arXiv: [1703.01912](https://arxiv.org/abs/1703.01912) [[math](#)].

Список рисунков

- 2.1 Расположение полюсов функции $\varepsilon_{\nu,\alpha}(s)$ и контуров C и C_w на комплексной плоскости s 41
- 2.2 Графики функций $\mathcal{E}_{\nu,2}(-z)$ и $\mathbb{K}_2^{(\nu)}(1,x)$ для различных значений параметра ν . Для $\nu = \infty$ функции даны формулами (2.24) и (2.25). . . 42
- 2.3 Графики функций $\mathcal{E}_{10,\alpha}(-z)$ и $\mathbb{K}_{d/2}^{(10)}(1,x)$ при разных значениях параметров α и d 45
- 2.4 Графики функции $\mathbb{K}_{1,2}^{(5)}(\tau,x)$ для различных значений параметра собственного времени τ 46
- 3.1 Операторы $\hat{T}_{n,l}$ для случая $N = 2$. Голубая линия показывает максимальное значение l , $L_n(N) = (N - 1/2)n$. Каждая точка на плоскости в положении (n,l) обозначает оператор $\hat{T}_{n,l}$. Затененная область показывает паттерн, по которому вычисляется оператор в левой части рекуррентных соотношений (3.25) (в данном примере $\hat{T}_{6,5}$). 64
- 3.2 Коэффициенты $\hat{b}_{m,n}$ для случая $\nu = 2$. Синие линии слева и справа даны выражениями (3.48) для $N_m(2)$. Черные точки обозначают существенные коэффициенты, а серые — маргинальные, они разделены синей линией, определенной условием (3.53). 70

Приложение А

Ψ -функции Фокса-Райта и H -функции Фокса

Ψ -функции Фокса-Райта ${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a,A) \\ (b,B) \end{matrix} \middle| z \right]$ зависят от двух множеств параметров $A_j, a_j, j = 1, \dots, p$, и $B_i, b_i, i = 1, \dots, q$, где A_k и B_j есть действительные положительные числа. Эти функции определяются рядами Тейлора

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a,A) \\ (b,B) \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j + A_j k)}{\prod_{i=1}^q \Gamma(b_i + B_i k)} \frac{z^k}{k!}. \quad (\text{A.1})$$

Они являются одним из возможных обобщений обобщенных гипергеометрических функций, ${}_pF_q[a; b; z] = {}_p\Psi_q[(a,1); (b,1); z]\Gamma(b)/\Gamma(a)$, и находят приложения, в частности, в дробном анализе [119–123; 164–166]. Они были введены Е. М. Райтом, который изучил их асимптотическое поведение [106; 107].

В свою очередь Ψ -функции Фокса-Райта являются частным случаем еще более общих H -функций Фокса $H_{p,q}^{m,n} \left[z \middle| \begin{matrix} (a,A) \\ (b,B) \end{matrix} \right]$, которые определяются через интегралы Меллина-Барнса

$$H_{p,q}^{m,n} \left[z \middle| \begin{matrix} (a,A) \\ (b,B) \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_C h_{p,q}^{m,n}[s] z^{-s} ds, \quad (\text{A.2})$$

$$h_{p,q}^{m,n}[s] = \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i + B_i s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - A_j s)}{\prod_{i=m+1}^q \Gamma(1 - b_i - B_i s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + A_j s)}, \quad (\text{A.3})$$

также с действительными положительными A_i и B_j . Полюсы $l_{i,k}$ гамма-функций $\Gamma(b_i + B_i s)$, $i = 1, \dots, m$, убегают по комплексной плоскости переменной s налево, в то время как полюсы $r_{j,k}$ гамма-функций $\Gamma(1 - a_j - A_j s)$, $j = 1, \dots, n$, убегают направо (натуральное число k нумерует полюсы каждой функции). При этом предполагается, что параметры A_j, a_j, B_i и b_i таковы, что эти полюсы не совпадают друг с другом, $l_{i,k} \neq r_{j,l}$. Тогда контур интегрирования C выбирается проходящим из $-i\infty$ в $i\infty$ и разделяющим полюсы $l_{i,k}$ и $r_{j,k}$.

H -функции Фокса находятся к Ψ -функциям Фокса-Райта в точно таком же отношении в каком известные G -функции Мейера находятся к обобщенным

гипергеометрическим функциям. Именно, очевидным образом выполнено

$${}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a,A) \\ (b,B) \end{matrix} \middle| z \right] = H_{p,q+1}^{1,p} \left[-z \middle| \begin{matrix} (1-a,A) \\ (0,1),(1-b,B) \end{matrix} \right]. \quad (\text{A.4})$$

Общая теория H -функций и H -преобразований может быть найдена в [108—112]. Здесь мы лишь кратко перечислим их основные свойства и укажем на способ нахождения их асимптотического поведения. Оно определяется следующими тремя комбинациями параметров функций

$$\mu = \sum_{j=1}^q B_j - \sum_{k=1}^p A_k, \quad \beta = \frac{\prod_{k=1}^p A_k^{A_k}}{\prod_{j=1}^q B_j^{B_j}}, \quad (\text{A.5})$$

$$a = \sum_{k=1}^p a_k - \sum_{j=1}^q b_j + \frac{1}{2}(q - p - 1), \quad (\text{A.6})$$

Заметим, что структура выражения (A.3) позволяет перебрасывать гамма-функции между числителем и знаменателем с помощью формулы отражения Эйлера (2.40). В ходе этой операции изменяются только параметры m и n , в то время как параметры p , q , μ , β и a , как легко видеть, остаются неизменными.

Основной результат, получающийся из использования формула Стирлинга, состоит в следующем: при $\mu > 0$ контур C в (A.2) может быть замкнут в комплексной плоскости z слева, тогда ряд Тейлора функции получается суммированием вычетов в полюсах $l_{i,k}$. Он будет абсолютно сходиться на всей комплексной плоскости z , определяя, вообще говоря, многозначную функцию с существенной особенностью в точке $z = \infty$. Если в этом случае мы формально замкнем контур C справа, то сумма вычетов в полюсах $r_{j,k}$ будет определять асимптотический (расходящийся) степенной ряд при $z \rightarrow \infty$. При $\mu < 0$ ситуация в точности противоположна: сумма вычетов в полюсах $r_{j,k}$ будет абсолютно сходиться при $z \neq 0$, а расходящийся ряд вычетов в полюсах $l_{i,k}$ будет определять асимптотическое поведение функции при $z \rightarrow 0$. Наконец, в случае критического значения $\mu = 0$ ряд, полученный замыканием контура C слева, будет сходиться внутри круга $|z| < \beta^{-1}$, а ряд, полученный замыканием контура C справа, будет сходиться вне этого круга.

Экспоненциальное асимптотическое поведение при $z \rightarrow \infty$ возникает, когда $h_{p,q}^{m,n}[s]$ не имеет уходящих вправо полюсов $r_{j,k}$, т.е. когда в выражении (A.3) функции $\Gamma(1 - a_j - A_j s)$ в числителе либо вовсе отсутствуют ($n = 0$),

либо их полюсы сокращаются с полюсами функций $\Gamma(1 - b_i - B_i s)$ в знаменателе (как это происходит в случае функций $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(z)$ при целых ν). Общий рецепт нахождения экспоненциальных асимптотик, который детально разъяснен в [108], состоит в следующем: вначале необходимо с помощью формулы отражения Эйлера переместить гамма-функции таким образом, чтобы оставались только уходящие влево полюсы, т.е. преобразовать выражение (A.3) к такой форме, когда все гамма-функции с коэффициентами A_j стоят в знаменателе, а все гамма-функции с коэффициентами B_i — в числителе. После этого необходимо воспользоваться следующей формулой для асимптотического разложения отношения произведений гамма-функций

$$\frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(B_j s + b_j)}{\prod_{k=1}^p \Gamma(A_k s + a_k)} = C(\beta \mu^\mu)^{-s} \sum_{m=0}^{\infty} E_m \Gamma(\mu s - a - m), \quad (\text{A.7})$$

которая получается с помощью метода, кратко описанного ниже в подразделе A.1. Здесь $|s| \rightarrow \infty$, $|\pi - \arg s| > \varepsilon$, параметры μ , β и a определены выше в (A.5) и (A.6),

$$C = (2\pi)^{(q-p-1)/2} \mu^{a+1/2} \prod_{k=1}^p A_k^{1/2-a_k} \prod_{j=1}^q B_j^{b_j-1/2}, \quad (\text{A.8})$$

$E_0 = 1$, а остальные коэффициенты E_m могут быть систематически вычислены с помощью алгоритма, также набросанного в подразделе A.1. Наконец, применение обратного преобразования Меллина (2.39) приводит к требуемому асимптотическому разложению. Эта процедура была использована в разделе 2.3 для получения асимптотического разложения обобщенных экспоненциальных функций при больших z и соответствующих тепловых ядер.

A.1 Отношение произведений гамма-функций

Здесь мы кратко обсудим детали специального асимптотического разложения при $s \rightarrow \infty$ для отношения произведений гамма-функций в (A.7). Если мы обозначим это отношение за $R(s)$ и поделим его на $\Gamma(\mu s - a)$, тогда в силу

разложения Стирлинга

$$\Gamma(s+x) = \sqrt{2\pi} e^{-s} s^{s+x-1/2} \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} B_{k+1}(x) s^{-k} \right], \quad (\text{A.9})$$

(здесь $B_k(x)$ есть многочлены Бернулли), результат будет иметь вид

$$\frac{R(s)}{\Gamma(\mu s - a)} = C (\beta \mu^\mu)^{-s} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} D_n s^{-n} \right], \quad (\text{A.10})$$

где параметры μ , β , a и C определены в (A.5), (A.6) и (A.8), а коэффициенты D_n равны

$$D_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \left(\sum_{j=1}^q \frac{B_{n+1}(b_j)}{B_j^n} - \sum_{k=1}^p \frac{B_{n+1}(a_k)}{A_k^n} - \frac{B_{n+1}(-a)}{\mu^n} \right). \quad (\text{A.11})$$

Множитель в виде гамма-функции $\Gamma(\mu s - a)$ был добавлен в левую сторону (A.10) специально для того, чтобы сократить степени s и s^s .

Теперь экспоненциальный множитель в (A.10) можно переразложить по отрицательным степеням s , получив

$$\exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} D_n s^{-n} \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n s^{-n}, \quad (\text{A.12})$$

где каждый коэффициент C_k однозначно определяется по первым k коэффициентам D_1, \dots, D_k , $C_1 = D_1$, $C_2 = D_2 + D_1^2/2!$, $C_3 = D_3 + D_1 D_2 + D_1^3/3!$, и т.д.

Следующий шаг состоит в том, чтобы перейти от $1/s$ -разложения к разложению по обратным символам Похгаммера для специального выбора аргумента $x = a + 1 - \mu s$, построенного из параметров s , μ и a ,

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+k)} = \prod_{n=1}^k \frac{1}{x+n-1}. \quad (\text{A.13})$$

Этот символ может быть разложен по обратным степеням s ,

$$\frac{\Gamma(a+1-\mu s)}{\Gamma(a+1-\mu s+k)} = (-1)^k \frac{\Gamma(\mu s - a - k)}{\Gamma(\mu s - a)} = (-1)^k \sum_{j=1}^{\infty} d_{kj} s^{-j}, \quad (\text{A.14})$$

где коэффициенты бесконечной нижне-треугольной матрицы $[d_{kj}]$ зависят от μ и a , $d_{kj} = 0$ для $j < k$, $d_{kk} = \mu^{-k}$. Обращение этого соотношения позволяет нам разложить s^{-k} в терминах последовательности таких символов

$$s^{-k} = \sum_{j=1}^{\infty} d_{kj}^{-1} \frac{\Gamma(\mu s - a - j)}{\Gamma(\mu s - a)}, \quad (\text{A.15})$$

где d_{kj}^{-1} есть коэффициенты обратной матрицы, $d_{kj}^{-1} = 0$ for $j < k$, $d_{kk}^{-1} = \mu^k$. Используя соотношения (A.14) и (A.15) мы можем преобразовать разложение по степеням $1/s$ в разложение по $\Gamma(\mu s - a - j)/\Gamma(\mu s - a)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k s^{-k} = \sum_{j=1}^{\infty} E_j \frac{\Gamma(\mu s - a - j)}{\Gamma(\mu s - a)}, \quad E_j = \sum_{k=1}^{\infty} C_k d_{kj}^{-1}. \quad (\text{A.16})$$

Тогда подставляя (A.12) и (A.16) в (A.10) и домножая результат на $\Gamma(\mu s - a)$ мы окончательно получаем разложение (A.7).

Приложение Б

Ω -члены

Дополнительные вклады к коэффициентам Сили-Гилки \hat{E}_2 и \hat{E}_4 минимального оператора четвертого порядка (3.83), обусловленные ненулевым $\hat{\Omega}^{abc}$, которые мы обозначим \hat{E}_2^Ω и \hat{E}_4^Ω , могут быть записаны в относительно компактной форме с помощью полностью симметричных тензоров

$$g_{a_1 \dots a_{2n}} = [S_{n,2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} g_{(a_1 a_2 \dots a_{2n-1} a_{2n})}, \quad (\text{Б.1})$$

где симметризация проводится по всем $2n$ индексам (с коэффициентом $1/(2n)!$).

Введем также вспомогательные обозначения для свертки коэффициентов оператора с метрикой:

$$\hat{\Omega}^a = g_{bc} \hat{\Omega}^{abc}, \quad \hat{D} = g_{ab} \hat{D}^{ab}. \quad (\text{Б.2})$$

Выражение для \hat{E}_2^Ω устроено довольно просто

$$\hat{E}_2^\Omega = -\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{3\Gamma\left(\frac{d/2-1}{2}\right)}{8d\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)} \left\{ \frac{1}{4(d+4)} \left(2\hat{\Omega}_{abc} \hat{\Omega}^{abc} + 3\hat{\Omega}_a \hat{\Omega}^a \right) + \nabla_a \hat{\Omega}^a \right\}, \quad (\text{Б.3})$$

в то время как \hat{E}_4^Ω можно представить в виде суммы четырех слагаемых, представляющих вклады одного только $\hat{\Omega}^{abc}$ и совместно с тензором Риччи, кривизной в расслоении и коэффициентами оператора \hat{D}^{ab} и \hat{H}^a ,

$$\hat{E}_4^\Omega = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \left\{ \hat{B}_\Omega + \hat{B}_{\Omega R} + \hat{B}_{\Omega \mathcal{R}} + \hat{B}_{\Omega D H} \right\}. \quad (\text{Б.4})$$

По отдельности эти вклады выглядят следующим образом. Наиболее сложен первый член \hat{B}_Ω , который представляет собой многочлен четвертой степени

по $\hat{\Omega}^{abc}$ и ее производным,

$$\begin{aligned}
\hat{B}_\Omega = & -\frac{1}{8}(\nabla_a \square + \square \nabla_a) \hat{\Omega}^a + \frac{d}{8(d+2)}(\nabla_b \nabla_a \nabla^b \hat{\Omega}^a + 2\nabla_a \nabla_b \nabla_c \hat{\Omega}^{abc}) \\
& + \frac{1}{32(d+2)(d+6)} \left\{ 3(d+4) \left(2\hat{\Omega}^{abc} \nabla_a \nabla_b \hat{\Omega}_c + 2(\nabla_a \nabla_b \hat{\Omega}_c) \hat{\Omega}^{abc} + 2(\nabla_c \nabla^d \hat{\Omega}_{abd}) \hat{\Omega}^{abc} \right. \right. \\
& + 2(\nabla^d \nabla_c \hat{\Omega}_{abd}) \hat{\Omega}^{abc} + 2(\nabla_a \nabla_b \hat{\Omega}^{abc}) \hat{\Omega}_c + (\nabla_b \nabla_a \hat{\Omega}^b) \hat{\Omega}^a + (\nabla_a \nabla_b \hat{\Omega}^b) \hat{\Omega}^a \left. \right) \\
& + (d+8) \left(-3\hat{\Omega}^a \nabla_a \nabla_b \hat{\Omega}^b - 6(\nabla_a \hat{\Omega}^{abc}) \nabla_b \hat{\Omega}_c - 6\hat{\Omega}^{abc} \nabla_c \nabla^d \hat{\Omega}_{abd} - 3(\nabla_a \hat{\Omega}_b) \nabla^b \hat{\Omega}^a \right. \\
& - 3(\nabla_a \hat{\Omega}_b) \nabla^a \hat{\Omega}^b - 3\hat{\Omega}^a \nabla_b \nabla_a \hat{\Omega}^b - 6\hat{\Omega}^{abc} \nabla^d \nabla_c \hat{\Omega}_{abd} - 2\hat{\Omega}_{abc} \square \hat{\Omega}^{abc} - 3\hat{\Omega}_a \square \hat{\Omega}^a \\
& - 2(\square \hat{\Omega}_{abc}) \hat{\Omega}^{abc} - 3(\square \hat{\Omega}_a) \hat{\Omega}^a - 6(\nabla_d \hat{\Omega}_{abc}) \nabla^c \hat{\Omega}^{abd} - 2(\nabla_d \hat{\Omega}_{abc}) \nabla^d \hat{\Omega}^{abc} \left. \right) \\
& + 3(3d+16) \left(2(\nabla_a \hat{\Omega}^{acd}) \nabla^b \hat{\Omega}_{bcd} + 2(\nabla_a \hat{\Omega}_b) \nabla_c \hat{\Omega}^{abc} + (\nabla_a \hat{\Omega}^a)^2 + 2\hat{\Omega}_a \nabla_b \nabla_c \hat{\Omega}^{abc} \right) \left. \right\} \\
& - \frac{g_{abcdefgh}}{32(d+2)(d+6)} \left(\hat{\Omega}^{iab} \hat{\Omega}^{cde} \nabla_i \hat{\Omega}^{fgh} + \hat{\Omega}^{abc} \hat{\Omega}^{ide} \nabla_i \hat{\Omega}^{fgh} + \hat{\Omega}^{iab} (\nabla_i \hat{\Omega}^{cde}) \hat{\Omega}^{fgh} \right) \\
& + \frac{g_{abcdefghij}}{384(d+2)(d+6)} \left((\nabla^a \hat{\Omega}^{bcd}) \hat{\Omega}^{efg} \hat{\Omega}^{hij} + 2\hat{\Omega}^{abc} (\nabla^d \hat{\Omega}^{efg}) \hat{\Omega}^{hij} + 3\hat{\Omega}^{abc} \hat{\Omega}^{def} \nabla^g \hat{\Omega}^{hij} \right) \\
& + \frac{g_{abcdefghijkl}}{1536(d+2)(d+6)(d+10)} \hat{\Omega}^{abc} \hat{\Omega}^{def} \hat{\Omega}^{ghi} \hat{\Omega}^{jkl}, \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Перекрестные члены имеют вид

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{\Omega R} = & -\frac{1}{8}R \nabla_a \hat{\Omega}^a + \frac{1}{4}R_{ab} \nabla_c \hat{\Omega}^{abc} + \frac{1}{32(d+2)} \left(6R_{ab} \hat{\Omega}^{abc} \hat{\Omega}_c + 6R_{ab} \hat{\Omega}_c \hat{\Omega}^{abc} \right. \\
& \left. - 3R \hat{\Omega}_a \hat{\Omega}^a - 2R \hat{\Omega}_{abc} \hat{\Omega}^{abc} + 4\hat{\Omega}^a \nabla_a R + 8R_{ab} \nabla^a \hat{\Omega}^b \right), \tag{B.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{\Omega \mathcal{R}} = & -\frac{1}{16(d+2)} \left(4(d+4) (\nabla_b \hat{\Omega}_a) \hat{\mathcal{R}}^{ab} - 8\hat{\Omega}_b \nabla_a \hat{\mathcal{R}}^{ab} - 6\hat{\Omega}_{acd} \hat{\Omega}_b^{cd} \hat{\mathcal{R}}^{ab} - 3\hat{\Omega}_a \hat{\Omega}_b \hat{\mathcal{R}}^{ab} \right), \tag{B.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{\Omega DH} = & \frac{3}{8(d+2)} \left(\hat{H}_a \hat{\Omega}^a + \hat{\Omega}^a \hat{H}_a \right) + \frac{1}{8(d+2)} \left(-4\hat{\Omega}_a \nabla_b \hat{D}^{ab} - 2(\nabla_a \hat{D}^{ab}) \hat{\Omega}_b \right. \\
& + 2\hat{D}^{ab} \nabla_a \hat{\Omega}_b - 2(\nabla_a \hat{\Omega}_b) \hat{D}^{ab} + \hat{\Omega}^a \nabla_a \hat{D} - (\nabla_a \hat{D}) \hat{\Omega}^a - 4\hat{D}_{ab} \nabla_c \hat{\Omega}^{abc} \\
& - 2\hat{D} \nabla_a \hat{\Omega}^a - 2(\nabla_a \hat{\Omega}^{abc}) \hat{D}_{bc} - (\nabla_a \hat{\Omega}^a) \hat{D} + 2\hat{\Omega}^{abc} \nabla_a \hat{D}_{bc} - 2(\nabla_a \hat{D}_{bc}) \hat{\Omega}^{abc} \left. \right) \\
& - \frac{g_{abcdefgh}}{96(d+2)(d+6)} \left(\hat{D}^{ab} \hat{\Omega}^{cde} \hat{\Omega}^{fgh} + \hat{\Omega}^{abc} \hat{D}^{de} \hat{\Omega}^{fgh} + \hat{\Omega}^{abc} \hat{\Omega}^{def} \hat{D}^{gh} \right). \tag{B.8}
\end{aligned}$$