

**УТВЕРЖДАЮ**

Директор Федерального  
государственного бюджетного  
учреждения науки  
Института теоретической  
физики им. Л.Д. Ландау РАН  
док.физ.-мат.наук

Колоколов И.В.

«15» марта 2024 г.

**Отзыв**

ведущей организации на диссертационную работу

**Ланиной Елены Николаевны** «Симметричный подход к изучению петель Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 — теоретическая физика.

**Актуальность направления исследований.** В диссертационной работе Ланиной Е.Н. изучаются связанные вопросы по трехмерной топологической теории Черна–Саймонса, квантовым инвариантам узлов и квантовым б $\mathcal{J}$ -символам. Трехмерная теория Черна–Саймонса интересна по ряду причин. В частности, заслуживают внимания ее калибровочно-инвариантные наблюдаемые – петли Вильсона, известные в теории узлов как цветные полиномы ХОМФЛИ. Цветные полиномы ХОМФЛИ «раскрашены» представлением алгебры  $sl(N)$ , а контуром интегрирования может являться произвольный узел / зацепление. Важным аспектом связи теории Черна–Саймонса с квантовыми инвариантами узлов является возможность непертурбативного вычисления петель Вильсона для произвольного представления и узла. С точки зрения теории узлов цветные полиномы ХОМФЛИ привлекают большое внимание, так как гипотетически являются полными инвариантами узлов, то есть могут различить любые два узла. Теория Черна–Саймонса также важна из-за ее связей с другими направлениями теоретической физики, такими как двумерные конформные модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена и топологическая теория струн. В связи с вышесказанным, направление диссертационного исследования Е.Н. Ланиной, несомненно, является важным и актуальным для современной теоретической физики.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы из 165 наименований. **Во введении (первая глава)** обосновывается актуальность диссертационного исследования, формулируются его цели и задачи. В этом же разделе приводятся положения, выносимые на защиту, информация о новизне и значимости исследования, об апробации работы и о публикации ее результатов.

**Во второй главе** вводится понятие цветного полинома ХОМФЛИ как петли Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса с калибровочной группой  $SU(N)$  и калибровочными полями в произвольном представлении; в качестве контура интегрирования выбирается узел / зацепление. В этой же главе устанавливается связь цветных полиномов ХОМФЛИ с другими объектами теоретической и математической физики, которые используются в рамках диссертационного исследования. В частности, обсуждается конструкция интеграла Концевича, из которого можно получать квантовые инварианты узлов, ассоциированные с различными простыми алгебрами Ли. Также, вводится метод непertурбативного вычисления петель Вильсона с использованием подхода Решетихина–Тураева и вводятся другие основные объекты исследования – квантовые  $6j$ -символы.

**Третья глава** посвящена методу вычисления групповых факторов петель Вильсона в теории Черна–Саймонса. Удивительным свойством петель Вильсона является тот факт, что при определенной нормировке они являются полиномами по двум переменным  $q = \exp(\hbar)$ ,  $A = q^N$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка. Pertурбативным разложением в данном случае называется разложение этих полиномов в формальные ряды по постоянной Планка. Интересной особенностью такого разложения является разделение зависимостей от узла и представления в каждом порядке pertурбативного разложения. Зависящие от представления множители как раз и называются групповыми факторами, а зависящие от узла – инвариантами Васильева. В данной главе соискателем представлен алгоритм вычисления групповых факторов в произвольном порядке pertурбативного разложения и для произвольного представления алгебры  $sl(N)$  и выписаны групповые факторы явно вплоть до 13-го порядка pertурбативного разложения.

**В четвертой главе** изложены приложения полученной групповой структуры pertурбативного разложения цветных полиномов ХОМФЛИ. Один из самых главных результатов этой главы – доказательство недавно открытой симметрии «тяги–крюк» цветных полиномов узлов ХОМФЛИ. Другое важное применение алгоритма получения групповых факторов произвольного порядка – возможность вычисления инвариантов Васильева порядков выше ранее достигнутого шестого порядка. Инварианты узлов Васильева крайне интересны с точки зрения теории узлов. В частности, есть гипотеза, что они являются полными инвариантами узлов, то есть набор всех инвариантов Васильева позволяет различать любые два узла. Важно уметь получать инварианты Васильева высших порядков, потому что известно, например, что инварианты Васильева меньших порядков не различают узлы-мутанты. Среди других полученных соискателем следствий – новый метод получения рекурсивных (по представлению) соотношений для квантовых инвариантов узлов и ряд утверждений касательно частного случая полиномов ХОМФЛИ – полиномов Александера.

**Четвертая глава** содержит результаты исследований дифференциального разложения цветных полиномов ХОМФЛИ и инварианта узла, называемого дефектом. Дифференциальное разложение является следствием наличия групповых симметрий цветных полиномов ХОМФЛИ. Основным результатом данной главы является доказательство интересной связи между дефектом дифференциального разложения и одним из простейших инвариантов узлов – максимальной степени полинома Александера в фундаментальном представлении. Также в этой главе получен ряд следствий для полиномов Александера и дефекта.

**В пятой главе** обсуждается симметрия квантовых  $6j$ -символов – симметрия «тяги–крюк». Квантовые  $6j$ -символы являются компонентами цветных полиномов ХОМФЛИ согласно подходу Решетихина–Тураева вычисления квантовых инвариантов узлов. Поэтому естественно, что квантовые  $6j$ -символы наследуют симметрии цветных полиномов ХОМФЛИ. В рамках

диссертационного исследования была доказана симметрия «тяги-крюк» полиномов ХОМФЛИ для случая узлов. Она спускается и на уровень квантовых  $6j$ -символов. Важной особенностью симметрии «тяги-крюк» квантовых  $6j$ -символов является ее применимость к любым представлениям, включая представления с вырождениями. Более того, это первая открытая симметрия  $6j$ -символов, применимая к представлениям с вырождениями. В диссертации также приведены явные нетривиальные примеры равенства квантовых  $6j$ -символов для представлений с вырождениями, связанных преобразованием «тяги-крюк». Получены и другие сопутствующие результаты, такие как симметрия «тяги-крюк» цветных полиномов ХОМФЛИ, но теперь в случае зацеплений, а также подтверждения гипотезы о собственных значениях.

**В заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

**Результаты исследований** были опубликованы в 3 статьях в физических журналах, относящихся к первому квартилю списка Web of Science, и были доложены на российских и международных конференциях.

Полученные соискателем результаты представляют **научную и практическую значимость**. Они описывают новые свойства и подходы к изучению квантовых  $6j$ -символов и петель Вильсона в теории Черна–Саймонса и могут использоваться как в дальнейшем исследовании перечисленных объектов, так и при работе в смежных темах теоретической и математической физики, например, в теории узлов, топологической теории струн, конформной теории Весса–Зумино–Новикова–Виттена и топологических квантовых компьютерах. **Результаты диссертации** могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Курчатовском комплексе теоретической и экспериментальной физики НИЦ Курчатовский институт, МФТИ, Институте теоретической физики им. Ландау, Физическом институте РАН, Математическом институте РАН, Институте теоретической и математической физики МГУ, а также в других научных учреждениях, где ведутся работы по современной теоретической и математической физике.

#### **Замечания по диссертационной работе:**

- 1) В шестой главе была сформулирована гипотеза о наличии симметрии «тяги-крюк» цветных полиномов ХОМФЛИ для случая зацеплений. Было бы интересно проверить ее справедливость на явных примерах полиномов зацеплений ХОМФЛИ.
- 2) В пятой главе обсуждается множество целочисленных коэффициентов полинома Александра для узлов фиксированного дефекта. Очевидным продолжением данного исследования является более глубокий анализ. Какие именно целочисленные коэффициенты могут встречаться в полиноме Александра? В каких параметрах узлов удобнее всего описывать это множество коэффициентов? Можно ли по набору целочисленных коэффициентов в полиноме Александра определить (один из) узлов, который ему соответствует?
- 3) В четвертой главе предъясняется новый метод поиска рекуррентных по представлению соотношений на квантовые инварианты узлов. В качестве конкретного примера применения этого алгоритма приводится получение рекурсивных соотношений для полиномов Джонса в симметрических представлениях для торических двухнитевых узлов. Как было отмечено соискателем, этот результат не является новым и только лишь иллюстрирует предъясненный алгоритм. Интересно было бы попробовать получить ранее не известные рекурсивные соотношения предложенным методом.

Сделанные замечания содержат предложения для дальнейших научных исследований и не влияют на общую высокую оценку диссертационной работы. Проведенные исследования имеют высокий научный уровень и полностью соответствуют цели диссертации. **Достоверность** полученных результатов основывается на их согласии с уже известными в литературе данными и логической непротиворечивостью результатов. В тексте содержится описание различных методов проверки на всех этапах вычислений. Все результаты, полученные в диссертации, являются **новыми, обоснованными и корректными**. По своей направленности выполненное диссертационное исследование соответствует специальности 1.3.3 – теоретическая физика. Список цитированной литературы соответствует теме исследования. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

По своей актуальности, новизне, достоверности, научному уровню, фундаментальной и практической значимости диссертационная работа «Симметричный подход к изучению петель Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса» полностью удовлетворяет требованиям пп. 9–14 «Положения о присуждении ученых степеней», а ее автор, Ланина Елена Николаевна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

Отзыв был заслушан и утвержден на заседании Ученого совета Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН 15 марта 2024 г., протокол № 2

**Отзыв составил:** 

Пархоменко Сергей Евгеньевич  
кан.физ.мат. наук, научный сотрудник сектора Квантовая теория поля

тел.+7 495(702-93-17)  
spark@itp.ac.ru

**Сведения о ведущей организации:**

Федеральное государственное бюджетное учреждения науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

142432, Московская обл., г.Черноголовка,  
просп. академика Семенова, д. 1А  
тел. +7(495)702-93-17  
office@itp.ac.ru

Ученый секретарь ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН 

к.х.н.

 Крашаков С.А.

Список основных публикаций работников ведущей организации по тематике диссертации:

Список основных публикаций работников ведущей организации по тематике диссертации:

1. Lashkevich M., Lisovyy O., Ushakova T. Semiclassical approach to form factors in the sinh-Gordon model //arXiv preprint arXiv:2303.11933. – 2023.
2. Lashkevich M. The free field representation for the GL (1|1) WZW model revisited //Physica Scripta. – 2022. – Т. 98. – №. 1. – С. 015025.
3. Lashkevich M. et al. Lattice models, deformed Virasoro algebra and reduction equation //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2020. – Т. 53. – №. 24. – С. 245202.
4. Fateev V. A., Litvinov A. V. Integrability, duality and sigma models //Journal of High Energy Physics. – 2018. – Т. 2018. – №. 11. – С. 1-29.
5. Elizaveta C., Alexey L., Orlov P. Affine Yangian of  $gl(2)$  and integrable structures of superconformal field theory //Journal of High Energy Physics. – 2022. – Т. 2022. – №. 3.
6. Litvinov A., Vilkoviskiy I. Liouville reflection operator, affine Yangian and Bethe ansatz //Journal of High Energy Physics. – 2020. – Т. 2020. – №. 12. – С. 1-49.
7. Kolyaskin D., Litvinov A., Zhukov A. R-matrix formulation of affine Yangian of  $\hat{gl}(1|1)$  //Nuclear Physics B. – 2022. – Т. 985. – С. 116023.
8. Adler V. E., Kolesnikov M. P. Non-Abelian Toda lattice and analogs of Painlevé III equation //Journal of Mathematical Physics. – 2022. – Т. 63. – №. 10.
9. Belavin A. A., Eremin B. A. Partition Functions of  $N=(2, 2)$  Supersymmetric Sigma Models and Special Geometry on the Moduli Spaces of Calabi-Yau Manifolds //Theoretical and Mathematical Physics. – 2019. – Т. 201. – №. 2. – С. 1606-1613.
10. Artemev A. A., Belavin A. A. Five-Point Correlation Numbers in Minimal Liouville Gravity //JETP Letters. – 2022. – Т. 116. – №. 9. – С. 600-607.
11. Artemev A., Belavin A. Five-point correlation numbers in minimal Liouville gravity and matrix models //Nuclear Physics B. – 2022. – Т. 985. – С. 116019.
12. Bogdanov L. V. Matrix extension of multidimensional dispersionless integrable hierarchies //Theoretical and Mathematical Physics. – 2021. – Т. 209. – №. 1. – С. 1319-1330.