На правах рукописи

Корибут Анатолий Валериевич

АЛГЕБРА ДЕФОРМИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ И СПИН-ЛОКАЛЬНОСТЬ В ТЕОРИИ ВЫСШИХ СПИНОВ

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Васильев Михаил Андреевич**
Официальные оппоненты:	**Зиновьев Юрий Михайлович,** доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова Национальный исследовательского центра «Курчатовский институт», главный научный сотрудник
	Иванов Евгений Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, начальник сектора
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита состоится 20 мая 2024 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета 24.1.262.04 на базе Физического института им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, Москва, Ленинский проспект, д.53..

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического института им. П.Н. Лебедева РАН или на сайте lebedev.ru.

Автореферат разослан   года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.262.04, кандидат физ.-мат. наук   Чернышев Дмитрий Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Важной задачей современной теоретической физики фундаментальных взаимодействий является построение теории квантовой гравитации, т.е. теории, которая должна описывать гравитационные явления на сверхвысоких энергиях. Данная задача уже давно стоит перед теоретической физикой: одной из первых работ по квантовой гравитации является пионерская работа Матвея Бронштейна 1936 года [1], где им также был предложен способ квантования линеаризованной общей теории относительности. Энергетический масштаб, на котором вклад эффектов квантовой гравитации становится соизмеримым с вкладом других взаимодействий, называется планковским $\sim 10^{19}$ ГэВ. Современные ускорители частиц ограничены масштабом в $\sim 10^4$ ГэВ. Поэтому пока что эффекты квантовой гравитации могут проявляться лишь в космических явлениях. Поскольку на энергиях порядка планковской вклад от всех взаимодействий, включая гравитационное, становится одного порядка, то предполагается, что на этом масштабе физика явлений будет описываться некоторой единой теорией. На роль такой единой теории в настоящий момент имеется несколько претендентов: теория струн, теория высших спинов, супергравитация и др. Несмотря на отсутствие расходимостей в петлях [2] в низших порядках максимальная теория супергравитации $\mathcal{N} = 8$, $d = 4$ не может являться удовлетворительной версией единой теории, поскольку даже при крайне обширном спектре в нее невозможно вложить взаимодействия стандартной модели. Теория струн лишена последней проблемы, но такая теория существует лишь в 10 измерениях. Для описания физических явлений в 4-х измерениях пространства-времени «лишние измерения» нужно скомпактифицировать. Оказывается, что способов сделать это чрезвычайно много, что подрывает предсказательную силу теории. Спектр теории струн включает поля всех спинов. При этом он устроен так, что поля спина $s > 2$ являются массивными с массой порядка планковской. Последнее обстоятельство объясняет, почему эти поля не наблюдаются в современных экспериментах, но с другой стороны, это дает возможность рассматривать теорию струн как нарушенную фазу более симметричной теории, например, теории высших спинов, спектр которой это безмассовые поля всех спинов.

Несмотря на многочисленные экспериментальные подтверждения общей теории относительности, например, недавнее обнаружение гравитационных волн [3], она не обладает удовлетворительной квантовой версией – является неперенормируемой. Т.е. для описания физических явлений в такой теории необходимо задание бесконечного числа параметров. С подобного рода проблемой теоретическая физика уже сталкивалась в попытках описать слабое взаимодействие. При рассмотрении массивных полей в качестве переносчиков взаимодействия в расчете физических наблюдаемых появлялись неконтролируемые расходимости. Проблему удалось решить путем повышения симметрии теории, рассматривая W и Z бозоны как безмассовые поля в присоединенном представлении некоторой дополнительной группы симметрий. Экспериментально наблюдаемая массивность W и Z бозонов в этом подходе обеспечивалась за счет механизма Хиггса [4]. Аналогичным образом может быть расширена алгебра локальных симметрий ОТО, максимальным таким расширением является алгебра высших спинов (определенная ниже) (см. например [5]). Теории, в которых такие симметрии реализованы как калибровочные, называют *калибровочными теориями высших спинов*. Богатая алгебра симметрий сильно ограничивает теорию. Вайнбергом даже была доказана известная «мягкая теорема», которая утверждает, что в плоском пространстве таких теорий не существует [6]. В частности, в этой работе было показано, что законы сохранения, следующие из симметрий высших спинов в плоском пространстве, оказываются настолько ограничительными, что единственный способ им удовлетворить – это положить константу взаимодействия равную нулю. Тем не менее, если отказаться от предположения плоского пространства, то такую теорию можно построить [7]. Изучение суперсимметричных обобщений общей теории относительности привели к построению супергравитации [8], но как уже отмечалось выше, несмотря на богатый спектр даже в максимальную теорию супергравитации невозможно вложить взаимодействия стандартной модели. Расширить спектр можно, увеличив количество суперсимметрий, но это приведет к появлению в спектре полей высших спинов $s > 2$, а для совместности соответствующих уравнений движения необходимо введение полей всех спинов, динамику которых естественней описывать в рамках калибровочных теорий высших спинов.

Интерес к теории высших спинов также возрос в контексте AdS/CFT соответствия, впервые предложеного Хуаном Малдасеной в [9] (см. также [10]). Это соответствие указывает на возможную однозначную связь между наблюдаемыми в теории гравитации в $(d+1)$-мерном пространстве AdS и наблюдаемыми в некоторой конформной теории поля на границе этого пространства. В оригинальной же работе исследовалась взаимосвязь IIB теории суперструн на фоне $AdS_5 \times S_5$ и максимально суперсимметричной теорией Янга-Миллса в пространстве Минковского с $d = 4$. AdS/CFT соответствие предоставляет новый инструмент для исследования, с помощью которого явления, присущие так называемому режиму сильной связи, могут быть исследованы с помощью анализа конформной теории в режиме слабой связи по теории возмущений и наоборот. В настоящий момент существует множество примеров подобного рода дуальностей, но наиболее интересной в контексте теории высших спинов является так называемая гипотеза Клебанова-Полякова [10], которая предполагает, что существует связь между взаимодействующей теорией высших спинов в пространстве AdS_4 и конформными векторными моделями в 3-х мерном пространстве. Подобные дуальности изучались, например, в [11], где впервые было проверено соответствие между кубическими вершинами в теории Васильева (речь о которой пойдет дальше) и корреляторами в свободной и критической $O(N)$ конформных теориях поля.

Подводя итог, можно сказать, что теория высших спинов реализует естественное развитие идей квантовой теории поля, где увеличение числа (супер)симметрий приводило к улучшению квантового поведения теории. Кроме того, теория высших спинов является теорией гравитации, которая представляет интерес в контексте задач о построении теории квантовой гравитации и исследовании AdS/CFT соответствия.

Степень разработанности темы. Первые работы по теории полей высших спинов появились еще 1930-х годах [12]. Свободная теория безмассовых полей произвольного целого спина была впервые описана Фронсдалом [13] в основе этой работ лежит статья по массивным полям произвольного целого спина [14]. Безмассовое поле спина s описывалось полностью симметричным дважды бесследовым тензором ранга s, т.е.

$$\phi^{a_1 a_2 \ldots a_{s-4} mn}{}_{mn}(x) = 0. \tag{1}$$

Далее для краткости мы будем использовать следующее обозначение для симметризованных индексов, которые приниают четыре значения,

$$\phi^{a(s)} := \phi^{a_1 \dots a_s} \,. \tag{2}$$

Это поле подчинено уравнению

$$F^{a(s)} := \Box \phi^{a(s)}(x) - s\partial^a \partial_m \phi^{ma(s-1)}(x) + \frac{s(s-1)}{2} \partial^a \partial^a \phi^{a(s-2)m}{}_m(x) = 0. \tag{3}$$

Последнее уравнение обладает абелевой калибровочной симметрией

$$\delta \phi^{a(s)}(x) = \partial^a \xi^{a(s-1)}(x), \;\; \xi^{a(s-3)m}{}_m(x) = 0. \tag{4}$$

Здесь $\xi^{a(s-1)}$ – произвольные бесследовые тензоры ранга $s-1$. Согласно классификации Вигнера унитарных неприводимых представлений группы Пуанкаре в четырех измерениях число степеней свободы безмассового поля спина s должно быть равно двум. Такой же результат получается при подсчете числа степеней у симметричного тензора ранга s после наложения условий (1),(3),(4). Для уравнений Фронсдала также существует действие

$$\begin{aligned} S = -\frac{1}{2} \int d^4x \Bigg(& \partial_m \phi^{a(s)} \partial^m \phi_{a(s)} - \frac{s(s-1)}{2} \partial_m \phi^n{}_n{}^{a(s-2)} \partial^m \phi^k{}_{ka(s-2)} + \\ & + s(s-1) \partial^m \phi^n{}_n{}^{a(s-2)} \partial^k \phi_{kma(s-2)} - s\partial_m \phi^{ma(s-1)} \partial^n \phi_{na(s-1)} - \\ & - \frac{s(s-1)(s-2)}{4} \partial_m \phi^n{}_n{}^{ma(s-3)} \partial^p \phi_p{}^k{}_{ka(s-3)} \Bigg). \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнения Фронсдала и действия допускают обобщение на случай пространства постоянной кривизны [15].

Подобно тому, как в общей теории относительности от описания взаимодействия в терминах метрического тензора можно перейти к тетраде $e^a_{\underline{m}}$

$$e^a_{\underline{m}} e^b_{\underline{n}} \eta_{ab} = g_{\underline{mn}} \tag{6}$$

и спин-связности $\omega_{\underline{m}}{}^{a}{}_{b}$[1](так называемая тетрадная формулировка гравитации), динамика симметричных дважды бесследовых полей Фронсдала может быть переписана через их обобщения [16]

$$\phi^{a(s)} \to \{e_{\underline{m}}{}^{a(s-1)}, \omega_{\underline{m}}{}^{a(s-1),b}, \ldots, \omega_{\underline{m}}{}^{a(s-1),b(s-1)}\}\,. \tag{7}$$

В этом наборе поля Фронсдала после фиксации всех калибровок отождествляются с обобщенной тетрадой $e_{\underline{m}}{}^{a(s-1)}$. В тетрадной формулировке гравитации у поля тетрады количество степеней свободы больше, чем у метрического тензора, что обусловлено локальной лоренцевой симметрией (6). Чтобы сохранить эту симметрию и на динамических уравнениях, содержащих производные тетрадного поля, необходимо ввести калибровочное поле – спин-связность. В тетрадной формулировке уравнений Фронсдала оказывается, что у аналогов спин-связности $\omega_{\underline{m}}{}^{a(s-1),b}$ есть свои локальные степени свободы, с которыми ассоциируют соответствующие калибровочные поля $\omega_{\underline{m}}{}^{a(s-1),bb}$. Последняя процедура может быть повторена со всеми возможными локальными симметриями до тех пор, пока с ними не будут связаны соответствующие калибровочные поля. В четырех измерениях очень удобным оказывается спинорный формализм, в котором от векторных индексов переходят к спинорным, сворачивая первые с матрицами Паули. В этом подходе весь набор полей, необходимый для тетрадной формулировки, может быть записан через единую производящую функцию

$$\omega(Y,x) = \sum_{n,m} \mathrm{d}x^{\underline{m}} \omega_{\underline{m}\;\alpha_1\ldots\alpha_n,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_m}(x) y^{\alpha_1}\ldots y^{\alpha_n} \bar{y}^{\dot{\alpha}_1}\ldots \bar{y}^{\dot{\alpha}_m}\,, \tag{8}$$

где набор полей, отвечающих конкретному спину, соответствует значениям индексов $m+n = 2(s-1)$, а точечные и неточечные спинорные индексы принимают два значения. Аналогичным образом вводится производящая функция для напряженностей: тензоров электромагнитного поля, тензора Вейля и их аналогов для старших спинов, а также производных от них

$$C(Y,x) = \sum_{n,m} C_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_m}(x) y^{\alpha_1}\ldots y^{\alpha_n} \bar{y}^{\dot{\alpha}_1}\ldots \bar{y}^{\dot{\alpha}_m}\,. \tag{9}$$

[1]Здесь подчеркнутые индексы – индексы базы, а неподчеркнутые – индексы слоя.

Набор полей, отвечающий спину s, выделяется значением индексов суммирования $|m-n|=2s$. Для работы с подобного рода производящими функциями удобен формализм звездочного произведения

$$(f*g)(y,\bar{y})=\int\frac{d^2u\,d^2v\,d^2\bar{u}\,d^2\bar{v}}{(2\pi)^4}e^{iu_\alpha v^\alpha+i\bar{u}_{\dot\alpha}\bar{v}^{\dot\alpha}}f(y+u,\bar{y}+\bar{u})g(y+v,\bar{y}+\bar{v})\,. \quad (10)$$

Динамические уравнения эквивалентные уравнениям Фронсдала в пространстве AdS_4

$$\Box_{AdS}\phi^{\underline{a}(s)}-\nabla^{\underline{a}}\nabla_{\underline{b}}\phi^{\underline{ba}(s-1)}+\frac{1}{2}\nabla^{\underline{a}}\nabla^{\underline{a}}\phi^{\underline{a}(s-2)\underline{b}}{}_{\underline{b}}-m^2\phi^{\underline{a}(s)}+2\Lambda g^{\underline{aa}}\phi^{\underline{a}(s-2)\underline{b}}{}_{\underline{b}}=0 \quad (11)$$

в терминах (8) и (9) имеют вид

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_x\omega-\omega_0^{\alpha\beta}y_\alpha\frac{\partial}{\partial y^\beta}\omega-\bar\omega_0^{\dot\alpha\dot\beta}\bar{y}_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{y}^{\dot\beta}}\omega-e_0^{\alpha\dot\alpha}\left(y_\alpha\frac{\partial}{\partial\bar{y}^{\dot\alpha}}+\bar{y}_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)\omega=\\ =\frac{i}{4}e_{0\alpha}{}^{\dot\alpha}e_0{}^{\alpha\dot\beta}\frac{\partial^2}{\partial\bar{y}^{\dot\alpha}\partial\bar{y}^{\dot\beta}}C\Big|_{y=0}+\frac{i}{4}e_0{}^{\alpha}{}_{\dot\alpha}e_0{}^{\beta\dot\alpha}\frac{\partial^2}{\partial y^\alpha\partial y^\beta}C\Big|_{\bar{y}=0}\,,\end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathrm{d}_xC-\omega_0^{\alpha\beta}y_\alpha\frac{\partial}{\partial y^\beta}C-\bar\omega_0^{\dot\alpha\dot\beta}\bar{y}_{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar{y}^{\dot\beta}}C+ie_0{}^{\alpha\dot\alpha}\left(y_\alpha\bar{y}_{\dot\alpha}-\frac{\partial^2}{\partial y^\alpha\partial\bar{y}^{\dot\alpha}}\right)C=0\,. \quad (13)$$

Здесь поля $e_0^{\alpha\dot\alpha}$ и $\omega_0^{\alpha\beta}$, $\bar\omega_0^{\dot\alpha\dot\beta}$ – это фоновые один-формы тетрады и спин-связности пространства AdS_4. Для описания свободной динамики поля спина s в тетрадной формулировке используется бесконечный набор полей и, кроме того, значительно расширена калибровочная симметрия. Тем не менее, уравнения (12),(13) эквивалентны уравнениям Фронсдала в AdS_4. Последний нетривиальный результат известен в литературе как *центральная теорема о массовой оболочке* [17].

Уравнения типа (12),(13) являются представителями так называемого класса развернутых уравнений [18]

$$\mathrm{d}_xW^\Lambda(x)=G^\Lambda(W(x)). \quad (14)$$

Здесь мульти-индекс Λ у дифференциальной формы W параметризует все поля теории (в том числе и вспомогательные). Функция G в правой части уравнения имеет вид

$$G^{\Lambda}(W(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{\Lambda}{}_{\Upsilon_1\dots\Upsilon_n} W^{\Upsilon_1}(x)\dots W^{\Upsilon_n}(x). \tag{15}$$

Совместность уравнения (14) ($\mathrm{d}_x^2 = 0$) накладывает ограничения на функцию $G^{\Lambda}(W(x))$

$$\mathrm{d}_x^2 = 0 \iff G^{\Upsilon}(W(x))\frac{\delta G^{\Lambda}(W(x))}{\delta W^{\Upsilon}(x)} = 0. \tag{16}$$

Развернутые уравнения (14) допускают калибровочную симметрию

$$\delta W^{\Lambda}(x) = \mathrm{d}_x \epsilon^{\Lambda} - \epsilon^{\Upsilon}\frac{\delta G^{\Lambda}(W(x))}{\delta W^{\Upsilon}(x)}, \tag{17}$$

где ϵ^{Λ} – дифференциальная форма градуировки на единицу меньше градуировки W^{Λ}.

После описания свободной динамики следующим естественным шагом было построение взаимодействующей теории. В [7] данная задача была решена следующим образом. Рассмотрим следующую совместную систему уравнений

$$\mathrm{d}_x W + W * W = 0\,, \tag{18}$$

$$\mathrm{d}_x B + W * B - B * W = 0\,. \tag{19}$$

Здесь в отличие от полей ω и C, которые являются функциями только y и $\bar{y}$, поля $W(z,\bar{z},y,\bar{y})$, $B(z,\bar{z},y,\bar{y})$ являются также функциями от дополнительных спинорных переменных z и $\bar{z}$. Кроме того расширено введенное ранее звездочное произведение (10)

$$(f * g)(z,y,\bar{z},\bar{y}) = \int \frac{d^2u\, d^2v\, d^2\bar{u}\, d^2\bar{v}}{(2\pi)^4} e^{iu_\alpha v^\alpha + i\bar{u}_{\dot\alpha}\bar{v}^{\dot\alpha}} \times \\ \times f(z+u,y+u,\bar{z}+\bar{u},\bar{y}+\bar{u})g(z-v,y+v,\bar{z}-\bar{v},\bar{y}+\bar{v})\,. \tag{20}$$

Система уравнений (18),(19) уже является нелинейной. Далее совместным образом нужно добавить уравнения, описывающие эволюцию полей W и B по новым вспомогательным спинорным переменным z и $\bar{z}$, так, чтобы из уравнений (18),(19) следовала центральная теорема о массовой оболочке (12),(13). Таким образом получившиеся поправки к свободной динамике автоматически будут совместными. Недостающие уравнения, описывающие эволюцию по z, $\bar{z}$ были найдены в работе [7] и подробней обсуждаются в третьей и четвертой главах Диссертации. Найденная в [7] система уравнений будет далее называться *производящей системой Васильева.*

В настоящий момент полная нелинейная динамика для полей высших спинов сформулирована только в терминах производящей системы Васильева. После разрешения зависимости по вспомогательным переменным z, $\bar{z}$ динамические уравнения теории высших спинов схематически могут быть записаны в виде

$$\mathrm{d}_x\omega + \omega * \omega = \Upsilon(\omega,\omega,C) + \Upsilon(\omega,\omega,C,C) + \dots, \tag{21}$$

$$\mathrm{d}_x C + [\omega, C]_* = \Upsilon(\omega,C,C) + \Upsilon(\omega,C,C,C) + \dots \tag{22}$$

Поскольку теория высших спинов содержит бесконечное количество полей, а количество производных в калибровочно-инвариантных вершинах взаимодействия (функции Υ из (21),(22)) растет со спином [19], то теория высших спинов не является локальной в обычном смысле. Тем не менее, естественным выглядит требование, чтобы вершина, вовлекающая поля конкретных спинов, содержала лишь конечное число производных. Данное требование в младших порядках теории возмущений эквивалентно тому, что вершина взаимодействия содержит лишь конечное число сверток между полями C по точечным или неточечным спинорным индексам, которое далее будем называть *спин-локальностью.* Действительно, уравнение (13) можно представить в виде

$$D^L C = -ie_0{}^{\alpha\dot{\alpha}}\left(y_\alpha \bar{y}_{\dot{\alpha}} - \frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial \bar{y}^{\dot{\alpha}}}\right) C, \quad D^L := \mathrm{d}_x - \omega_0^{\alpha\beta} y_\alpha \frac{\partial}{\partial y^\beta} - \bar{\omega}_0^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\dot{\beta}}}\,. \tag{23}$$

Т.е. лоренцева коваринатная производная от поля C пропорциональна производной по спинорным переменным $D^L \sim \frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial \bar{y}^{\dot{\alpha}}}$. В старших порядках взаимосвязь между спин-локальностью и пространственно-временной локальностью не так проста, но поскольку теория Васильева естественным образом формулируется именно в терминах производящих функций типа (8),(9), то в литературе [20, 21] исследуют вершины взаимодействия именно на предмет спиновой локальности. Получить же сами вершины взаимодействия можно из производящей системы Васильева, в которой для получения динамических уравнений типа (21),(22) предстоит еще разрешить зависимость от дополнительных вспомогательных спинорных переменных $z, \bar{z}$. Неудачная схема разрешения зависимости от этих вспомогательных переменных может привести к тому, что вершины взаимодействия могут не быть спин-локальными[2]. Если теория все же допускает спин-локальные вершины взаимодействия, то к ним, например, можно прийти путем нелокального переопределения полей [22]. В настоящей же диссертации описан способ разрешения зависимости по вспомогательным переменным в производящей системе Васильева, который сразу приводит к спин-локальным выражениям для вершин, не требуя дальнейшего переопределения полей.

Введенные выше поля ω и C реализуют присоединенное и твистованно-присоединенное представления алгебры высших спинов соответственно. Эта алгебра является неабелевым обобщением калибровочных симметрий (4) и на линейном уровне реализуется как универсальная обертывающая от алгебры симметрий пространства-времени, отфакторизованная по соответствующим образом построенным идеалам [5]. Таким образом, алгебра высших спинов – это простая бесконечномерная алгебра Ли. В настоящей диссертации исследуется алгебра высших спинов в 3-х измерениях. Ее формальное определение имеет вид

$$\mathfrak{hs}[\lambda] := \mathcal{U}(\mathfrak{sp}(2))/\mathcal{I}_{C_2,\lambda}, \tag{24}$$

т.е. это универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{sp}(2)$, отфакторизованная по идеалу, порожденному квадратичным оператором Казимира. В [23] было показано, что эта алгебра может быть представлена с помощью так называемых деформированных осцилляторов.

Впервые возможность деформации канонических коммутационных соотношений

$$[y_\alpha, y_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}, \ \ \alpha,\beta = \overline{1,2}\,, \tag{25}$$

которая бы приводила к эквидистантному энергетическому спектру гармонического осциллятора, изучалась Вигнером [24]. Им было обнаружено, что существует однопараметрическое семейство деформированных коммутацион-

[2]Важно отметить, что совместность системы гарантирована при любом способе разрешения зависимости от вспомогательных переменных $z, \bar{z}$

ных соотношений. С помощью дополнительного антикоммутирующего оператора алгебра деформированных осцилляторов Вигнера может быть представлена в виде [23]

$$[y_\alpha, y_\beta] = 2i\epsilon_{\alpha\beta}(1 + \nu\mathcal{K}), \ \{y_\alpha, \mathcal{K}\} = 0, \ \mathcal{K}^2 = 1. \tag{26}$$

Здесь $\nu \in \mathbb{C}$ – произвольный параметр, а $\mathcal{K}$ – так называемый оператор Клейна. $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ – это ассоциативная алгебра, порожденная как универсальная обертывающая алгебра этих (анти)коммутационных соотношений. Общий элемент алгебры $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ может быть записан в виде формального степенного ряда

$$f(y,\mathcal{K}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{A=0}^{1} f_A^{\alpha_1\ldots\alpha_n} y_{\alpha_1}\ldots y_{\alpha_n}\mathcal{K}^A, \tag{27}$$

где тензоры $f_A^{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ полностью симметричны по верхним индексам. Если рассмотреть только четные по y выражения, а в качестве скобки Ли рассмотреть коммутатор по отношению к ассоциативному произведению в $\mathsf{Aq}(2,\nu)$, то получившаяся алгебра будет изоморфна $\mathfrak{hs}[\lambda]$ [23]. Здесь и далее предполагается Вейлевское упорядочение осцилляторов. В настоящей диссертации построено произведение в этой алгебре, в том числе и звездочное произведение, аналогичное выражению (10).

Таким образом, **целями** данной Диссертации являются:

1. Нахождение структурных констант ассоциативного умножения в алгебре деформированных осцилляторов $\mathsf{Aq}(2,\nu)$
2. Построение обобщения звездочного произведения (10) на случай ненулевого значения параметра деформации ν.
3. Обобщение применявшихся ранее способов разрешения зависимости от вспомогательных переменных Z в производящей системе Васильева
4. Получение спин-локальных вершин из производящей системы.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Вывести рекуррентные уравнения на структурные константы ассоциативного умножения $\mathsf{Aq}(2,\nu)$.

2. Показать, что предложенные ранее выражения в [25] для умножения четных мономов, действительно решают эти уравнения. Решить уравнения на ранее неизвестные структурные константы.
3. С помощью представления Похгаммера для бета-функции Эйлера получить интегральные представления для найденных в предыдущих пунктах структурных констант.
4. Продолжить развитие техники сдвиговых гомотопий, введенных в [26], для разрешения зависимости от вспомогательных переменных Z в производящей системе Васильева.
5. С помощью техники сдвиговых гомотопий получить в явно спин-локальном виде вершины $\Upsilon^{\eta}(\omega,\omega,C)$, $\Upsilon^{\eta}(\omega,C,C)$ и $\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}(\omega,\omega,C,C)$.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Найден полный набор структурных констант ассоциативного умножения алгебры $\mathsf{Aq}(2,\nu)$, позволяющий умножать любые формальные ряды по осцилляторам y.
2. Обобщение звездочного произведения на случай отличного от ноля значения параметра деформации ν.
3. Новые относительно [26] результаты по технике сдвиговых гомотопий, позволяющие в терминах новых операторов выписывать вершины (в частности, было получено тождество треугольника и формула звездочной перестановочности).
4. Спин-локальные выражения для вершин $\Upsilon^{\eta}(\omega,\omega,C)$, $\Upsilon^{\eta}(\omega,C,C)$ и $\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}(\omega,\omega,C,C)$.

Научная новизна:. Все представленные в Диссертации результаты являются новыми.

Практическая значимость. Научные результаты Диссертации позволили продвинуться в понимании структуры взаимодействий полей высших спинов и алгебр высших спинов. Изучаемые в работе проблемы представляют конкретный интерес как для математической физики, так и для теоретической физики фундаментальных взаимодействий. Алгебра деформированных осцилляторов проявляется в многочисленных контекстах:

1. Симметрии свободных полей в AdS_3 [27],
2. Деформированные коммутационные соотношения (26) определяют вид полной нелинейной системы Васильева [7].

3. Алгебра $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ естественным образом появляется в двумерных конформных теориях поля [25].
4. Алгебра деформированных осцилляторов также возникает в контексте AdS_3/CFT_2 соответствия [28].

Несмотря на то что структурные константы для алгебры Ли $\mathfrak{hs}[\lambda]$ и лежащего в ее основе ассоциативного произведения известны из работы [25], строгое доказательство их справедливости ранее отсутствовало и впервые было дано автором Диссертации [29]. Построение звездочного произведения в алгебре $\mathsf{Aq}(2,\nu)$, выполненное автором в [30] важно, например, в контексте голографии, предложенной в [31]. В данной работе было построено соответствие между полем в AdS_4 и конформным током на границе. Анализ такого рода дуальности для случая AdS_3/CFT_2 для массивных полей в AdS_3 до сих пор отсутствует, в основном из-за отсутствия удобной формы для произведения в алгебре $\mathsf{Aq}(2,\nu)$. Следует также заметить, что голоморфный сектор полной нелинейной калибровочной теории высших спинов тесно связан с трехмерной теорией высших спинов [32]. В этом свете изучение алгебры деформированных осцилляторов важно для анализа (анти)голоморфного сектора нелинейной системы, предложенной в [7] в случае ненулевого вакуумного значения мастер-поля ноль-форм ($B_0 \neq 0$).

Одним из важнейших результатов исследований по нелинейной теории высших спинов является появление понятия *спин-локальности*. Данное требование фиксирует допустимый функциональный класс в разрешении от вспомогательных переменных Z и оказывается весьма естественным в контексте производящей системы Васильева. В контексте голографии данное требование было оправдано в [33], где из теории высших спинов были восстановлены соответствующие конформные корреляторы без необходимости введения различного рода регуляризаций, вводимых, например, в [11]. Первоначально получить взаимодействие в спин-локальной форме удалось с помощью переопределения полей [22]. Развитая в Диссертации методика сдвиговых гомотопий позволяет получать спин-локальные вершины взаимодействий без необходимости в дополнительном переопределении полей. С помощью этой техники и ее обобщений впервые были получены вершины взаимодействий в фоно-независимом виде, некоторые из которых были ранее известны только в пространстве AdS_4.

Достоверность. Достоверность полученных результатов обеспечивается надежностью применяемого в Диссертации математического аппарата теоретической физики (включающего теорию дифференциальных уравнений, дифференциальную геометрию, комплексную геометрию, теорию алгебр Ли и ассоциативных алгебр). Одним из основных методов исследования является метод сдвиговых гомотопий, впервые введенный в [26] и впоследствии успешно обобщенный для решения других задач [21].

Апробация работы. Результаты диссертационных исследований докладывались семинарах по квантовой теории поля ФИАН и на международных конференциях:

1. «Higher Spin Theory and Holography – HSTH-3» (Москва, 23-25 ноября 2015),
2. «Higher Spin Theory and Holography – HSTH-7» (Москва, 4-6 июня 2018) .

Личный вклад. Все представленные в Диссертации результаты были получены либо лично автором, либо при его непосредственном участии.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет **134** страницы текста с **1** рисунком. Диссертация не содержит таблиц. Список литературы содержит **134** наименования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава основана на первой статье из списка публикаций автора диссертации и посвящена изучению ассоциативной алгебры $\mathsf{Aq}(2,\nu)$, введенной выше. Во введении главы обсуждаются различные подходы к изучению этой алгебры и ее проявления в различных приложениях. Предметом изучения настоящей главы являются структурные константы ассоциативного умножения мономов $\mathsf{H}(m,n,p,\nu\mathcal{K})$, в терминах которых произведение имеет вид

$$y_{(\alpha_1}\dots y_{\alpha_m)} * y_{(\beta_1}\dots y_{\beta_n)} = \sum_{p=0}^{\min(m,n)} i^p \epsilon_{\alpha_1\beta_1}\dots\epsilon_{\alpha_p\beta_p} y_{(\alpha_1}\dots y_{\alpha_{m-p}} y_{\beta_1}\dots y_{\beta_{n-p})} \times \\ \times \mathsf{H}(m,n,p,\nu\mathcal{K}), \quad (28)$$

где осцилляторы в левой и правой частях полностью симметризованы, т.е.

$$y_{(\alpha_1}\dots y_{\alpha_m)} = \frac{1}{m!}(y_{\alpha_1}\dots y_{\alpha_m} + \textit{все возможные перестановки}). \quad (29)$$

Вид структурных констант зависит от четности умножаемых мономов, и полный набор приведен в разделе 1.2. Наиболее простой вид из них имеют константы умножения четного монома на четный. Для четных m и n

$$\mathsf{H}(m,n,p,\nu\mathcal{K}) = A(m,n,p,\nu\mathcal{K}) = \\ = i^p \frac{m!n!}{(m-p)!\,(n-p)!p!}\, {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix}; 1\right]. \quad (30)$$

Здесь обобщенная гипергеометрическая функция ${}_4F_3$ задается рядом

$${}_4F_3\left[\begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & \end{matrix}; z\right] := \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(a)_q\,(b)_q\,(c)_q\,(d)_q}{(e)_q\,(f)_q\,(g)_q} \frac{z^q}{q!}, \quad (a)_q := \frac{\Gamma(a+q)}{\Gamma(a)}\,. \quad (31)$$

Структурные константы для других четностей однозначно выражаются через функции $A(m,n,p,\nu\mathcal{K})$. Эти функции впервые были предложены в [25], но в оригинальной работе отсутствовало обоснование их ассоциативности. Тем не менее, алгебра $\mathsf{Aq}(2,\nu)$ является ассоциативной по построению. В разделе 1.3 выведен набор рекуррентных уравнений, которым должны подчиняться структурные константы для четно-четного умножения. Идея довольно проста, рассмотрим равенство

$$f^{\alpha(m)}\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_{\alpha)}}^{m}*g^{\beta(n)}\overbrace{y_{(\beta}\cdots y_{\beta)}}^{n}=$$
$$=f^{\alpha(m)}\overbrace{y_{(\alpha}\cdots y_{\alpha)}}^{m}*g^{\beta(n-2)\gamma_1\gamma_2}\overbrace{y_{(\beta}\cdots y_{\beta)}}^{n-2}*y_{\gamma_1}y_{\gamma_2}, \quad (32)$$

которое должно быть выполнено в силу ассоцативности умножения. Левая часть может быть вычислена с помощью набора функций $A(m,n,p,\nu\mathcal{K})$, в то время как правая будет выражаться через функции $A(m,n-2,p,\nu\mathcal{K})$. Приравняв коэффициенты перед соответствующими мономами, мы получим набор рекуррентных уравнений, связывающих $A(m,n,p,\nu\mathcal{K})$ с $A(m,n-2,p,\nu\mathcal{K})$. Найденные уравнения единственным образом восстанавливают четно-четные структурные константы по функции $A(m,2,p,\nu\mathcal{K})$, которая может быть вычислена непосредственно из (анти)коммутационных соотношений (26). Далее с помощью равенства, аналогичного (32), через $A(m,n,p,\nu\mathcal{K})$ выводятся структурные константы для остальных четностей. В выводах к главе резюмируются основные результаты.

Вторая глава основана на второй статье из списка публикаций автора диссертации и является продолжением изучения произведения в алгебре $\mathsf{Aq}(2,\nu)$. При отстутствии деформации произведение двух формальных рядов f и g может быть записано в форме так называемого произведения Мояла

$$f(y)*_{\mathbf{M}}g(y)=f(y)\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta}\right)^p g(y). \quad (33)$$

В главе построено обобщение этого произведения на случай отличного от ноля значения параметра деформации, которое схематично имеет вид

$$f(y)*g(y)=\int d\tau_1\,d\tau_2\,f(\tau_1 y)\,\mathsf{Ker}_\nu\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y_\alpha}\epsilon_{\alpha\beta}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y_\beta},\tau_1,\tau_2\right)g(\tau_2 y)\,. \quad (34)$$

Основная трудность построения такого произведения сопряжена с тем, что интегральное представление для гипергеометрической функции (см. (30)) через представление Эйлера для бета-функции не применимо. В представлении

Эйлера

$$B(x,y) = \int_0^1 dt\, t^{x-1}(1-t)^{y-1} \tag{35}$$

необходимо, чтобы аргументы x и y были положительными, а для представления гипергеометрической функции необходимо, чтобы нижний аргумент был ограничен верхним, т.е., например, при $d > g > 0$ справедливо следующее интегральное представление

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} a & b & c & d \\ e & f & g & \end{matrix}\middle| z\right] = \frac{\Gamma(g)}{\Gamma(d)\Gamma(g-d)} \int_0^1 dt\, t^{d-1}(1-t)^{g-d-1} {}_3F_2\left[\begin{matrix} a & b & c \\ e & f & \end{matrix}\middle| tz\right]. \tag{36}$$

Из (30) видно, что удовлетворить критериям для интегрального представления Эйлера нельзя. Однако эту трудность удалось обойти с помощью рассмотрения так называемого представления Похгаммера для бета-функции Эйлера

$$\oint_C dz\, z^{x-1}(1-z)^{y-1} = \left(1-e^{2\pi x}\right)\left(1-e^{2\pi y}\right)B(x,y), \tag{37}$$

где x и y – произвольные комплексные числа, а интегрирование ведется по контуру Похгаммера (Рис. 1) на римановой поверхности, определяемой подынтегральным выражением. Кроме того, представление Похгаммера дает

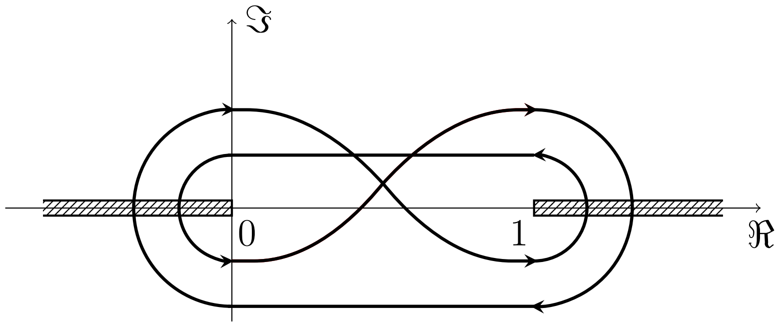

Рис. 1 — Контур Похгаммера

аналитическое продолжение бета-функции на всю комплексную плоскость. С его помощью удалось построить интегральное представление для гипергеометрической функции, входящей в (30). Разложив по определению гипергеометрическую функцию в ряд

$$ {}_4F_3\left[\begin{matrix} 1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{\nu\mathcal{K}}{2} & \frac{-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-m}{2} & \frac{1-n}{2} & \frac{m+n-2p+3}{2} & \end{matrix}\middle| 1\right] = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q \left(\frac{\nu\mathcal{K}}{2}\right)_q \left(-\frac{p}{2}\right)_q \left(\frac{1-p}{2}\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q \left(\frac{1-n}{2}\right)_q \left(\frac{m+n-2p+3}{2}\right)_q q!}, \tag{38}$$

мы видим, что от m и n зависят только символы Похгаммера в знаменателях[3]. Далее продемонстрируем, как, например, восходящий символ Похгаммера

$$\frac{1}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}+q\right)} \tag{39}$$

может быть получен с помощью представления Похгаммера. Рассмотрим два интеграла

$$I_1 = \oint_C dz\, z^{\frac{1-m}{2}-\xi-1}(1-z)^{q+\xi-1} = -2i\sin(2\pi\xi)\frac{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}-\xi\right)\Gamma\left(q+\xi\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}+q\right)}, \tag{40}$$

$$I_2 = \oint_C dz\, z^{\frac{1-m}{2}-1}(1-z)^{-\xi-1} = 2\left(1-e^{-2\pi i\xi}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}\right)\Gamma\left(-\xi\right)}{\Gamma\left(\frac{1-m}{2}-\xi\right)}. \tag{41}$$

Здесь ξ – произвольное нечетное число. В знаменателе (40) и в числителе (41) содержатся гамма-функции, совпадающие с (39). Произведение интегралов (40) и (41) дает

$$I_1 I_2 = -\frac{8\pi}{\xi}\sin\left(2\pi\xi\right)e^{-i\pi\xi}\frac{\left(\xi\right)_q}{\left(\frac{1-m}{2}\right)_q}. \tag{42}$$

Так можно представить все символы Похгаммера из разложения в ряд гипергеометрической функции, определяющей константы $A(m,n,p,\nu\mathcal{K})$ (38) и в конечном счете построить обобщение произведения (33) в виде (34). Кроме того, в главе исследуются возможности упрощения вида произведения за счет специфического выбора произвольных нецелых параметров, аналогичных ξ, появившихся в (40),(41). Также исследуется аналитическая структура произведения по параметру деформации. В частности, показано, что при $\nu = 0$ деформированное произведение переходит в (33), и к нему найдена линейная по ν поправка. В выводе к главе предлагаются другие способы упрощения произведения, и обсуждается потенциальные применения полученной формулы.

Третья глава основана на третьей статье из списка публикаций автора диссертации и посвящена решению производящей системы Васильева с помощью так называемых операторов *сдвиговых гомотопий*, введенных в [26], и исследованию свойств последних. В начале главы дается обзор литера-

[3]Напоминаем, что (30) – это структурные константы для умножения четных мономов, поэтому m и n – четные числа.

туры по вопросу локальности в теории высших спинов, в частности, особое внимание уделяется голографической гипотезе Клебанова-Полякова [10], по которой теория Васильева дуальна векторным моделям на трехмерной границе пространства AdS_4. Далее в главе приводится краткий набор сведений о системе Васильева и ее пертурбативном разложении. Сама система имеет вид

$$\mathrm{d}_x W + W * W = 0\,, \tag{43}$$
$$\mathrm{d}_x S + W * S + S * W = 0\,, \tag{44}$$
$$\mathrm{d}_x B + [W,B]_* = 0\,, \tag{45}$$
$$S * S = i(\theta^A \theta_A + \eta B * \gamma + \bar{\eta} B * \bar{\gamma})\,, \tag{46}$$
$$[S,B]_* = 0\,. \tag{47}$$

Здесь уравнения (43) и (45) совпадают с уравнениями (18) и (19), а новые уравнения описывают эволюцию полей W и B по дополнительным спинорным переменным z,$\bar{z}$. У системы (43)-(47) есть точное решение в виде пустого пространства AdS_4

$$B_0 = 0\,,\;\; S_0 = \theta^A Z_A\,,\;\; W_0 = \Omega = \frac{i}{4}(\omega_0{}^{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta + \bar{\omega}_0{}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{y}_{\dot{\alpha}} \bar{y}_{\dot{\beta}} + 2 e_0{}^{\alpha\dot{\alpha}} y_\alpha \bar{y}_{\dot{\alpha}})\,. \tag{48}$$

Здесь Ω – AdS_4 плоская связность. Далее изучается пертурбативное разложение над этим фоном

$$B = B_0 + B_1 + B_2 + \ldots, S = S_0 + S_1 + \ldots, W = W_0 + W_1 + \ldots \tag{49}$$

Уравнения, с помощью которых систематически находятся пертурбативные поправки, имеют вид

$$\mathrm{d}_Z \Phi_n = J(\Phi_{n-1},\Phi_{n-2},\ldots \Phi_0), \tag{50}$$

где Φ_n – это любое поле порядка n из набора B_n,S_n,W_n, а d_Z – дифференциал де Рама по дополнительным спинорным переменным z, $\bar{z}$ определенный как

$$\mathrm{d}_Z := \theta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\dot{\alpha}}}\,. \tag{51}$$

Здесь θ^α и $\bar\theta^{\dot\alpha}$ – базисные один-формы по спинорным направлениям z и $\bar z$ соответственно. Поля ω и C появляются как когомологии оператора d_Z при решении уравнений типа (50) для полей W и B соответственно. Уравнения типа (50) появляются, например, в электродинамике

$$\mathrm{d}_x A = F\,. \tag{52}$$

Как известно, векторный потенциал по тензору электромагнитного может быть найден в частном случае по формуле

$$A_{\underline{m}} = \int_0^1 d\tau\, \tau x^{\underline{n}} F_{\underline{nm}}(\tau x)\,, \tag{53}$$

а общее решение является добавлением к (53) градиента произвольной скалярной функции. С помощью формулы типа (53) систематически могут быть решены уравнения производящей системы, тем не менее, вершины при этом подходе могут не оказаться спин-локальными. Последнее отнюдь не является патологией теории, и добавлением когомологий оператора d_Z, которые являются Z-независимыми выражениями, реализующими переопределения полей, можно добиться того, что вершины уже будут обладать желаемыми свойствами [22]. Задача ставится следующим образом: найти способ решения уравнений (50), чтобы без добавления когомологических слагаемых или точных форм полученные вершины обладали свойством спин-локальности. Для решения поставленной задачи в [26] был предложен слудующий подход. Для оператора d_Z выберем нильпотентный оператор ∂ в виде

$$\partial = (Z+Q)^A \frac{\partial}{\partial\theta^A}. \tag{54}$$

Здесь Q – это Z-независимый спинор, который может быть и оператором. Антикоммутатор d_Z и ∂ дает

$$N = \{\mathrm{d}_Z, \partial\} = \theta^A \frac{\partial}{\partial\theta^A} + (Z^A + Q^A)\frac{\partial}{\partial Z^A}\,. \tag{55}$$

Этот оператор можно «обратить» (у оператора N очевидно ненулевое ядро, но поскольку он диагонализуем, то его ядром являются d_Z-когомологии)

$$N^* g(Z;Y;\theta) := \int_0^1 \frac{dt}{t}\, g(tZ - (1-t)Q; Y; t\theta)\,. \tag{56}$$

Оператор сдвиговой гомотопии определяется как

$$\triangle_Q := \partial N^*\,, \quad \triangle_Q\, g(Z;Y;\theta) = (Z^A + Q^A)\frac{\partial}{\partial \theta^A} \int\limits_0^1 dt \frac{1}{t} g\left(tZ - (1-t)Q; Y; t\theta\right)\,. \tag{57}$$

В силу разложения единицы

$$\{\mathrm{d}_Z,\, \triangle_Q\} = 1 - h_Q, \quad h_Q f(Z,\theta) = f(-Q,0)\,, \tag{58}$$

с помощью оператора $\triangle_Q$ можно решить уравнение (50). Если применить этот оператор для решения уравнения (52), то частное решение будет иметь вид

$$A_{\underline{m}} = \int_0^1 d\tau\, \tau (x^{\underline{n}} + q^{\underline{n}}) F_{\underline{nm}}(\tau x - (1-\tau) q)\,, \tag{59}$$

где $q^{\underline{m}}$ – произвольный постоянный вектор.

Далее в главе проводится анализ различных свойств операторов $\triangle_Q$, важнейшим их которых является свойство звездочной перестановочности: для гомотопического оператора, который действует только на голоморфные переменные

$$\triangle_q\, g(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta}) = (z^\alpha + q^\alpha)\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \int_0^1 dt \frac{1}{t} g\left(tz - (1-t)q, \bar{z}, t\theta, \bar{\theta}\right)\,, \tag{60}$$

справедливо следующее соотношение

$$\triangle_{q+\alpha y}\left(C(y) * \phi(z,y)\right) = C(y) * \triangle_{q+(1-\alpha)p+\alpha y}\, \phi(z,y) \tag{61}$$

Здесь q – y-независимый оператор, а $\phi(z,y)$ – произвольная функция, и приняты следующие обозначения для производной по голоморфному аргументу $p_\alpha := -i\frac{\partial}{\partial y^\alpha} C(y,\bar{y};K)$.

В последующих разделах решаются уравнения производящей системы с помощью операторов сдвиговых гомотопий. При выборе параметров соответствующим образом удается получить вершины $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ и $\Upsilon(\omega,C,C)$ в спин-локальной форме.

Вершины взаимодействия, появляющиеся в правых частях (21), (22) при решении соответствующих уравнений производящей системы, можно разделить на три типа: голоморфные, антиголоморфные и вершины смешанного типа. В выражениях для антиголоморфных вершин свертки по неточечным (голоморфным) индексам производящих функций для потенциалов и напряженностей полей высших спинов устроены тривиально, т.е. реализованы звездочным произведением по переменным y (33). Аналогичном образом устроены голоморфные вершины, в вершинах смешанного типа нетривиально устроены свертки как по точечным, так и по неточным индексам. В (анти)голоморфных вершинах число сверток по (не)точечным индексам существенно бесконечно из-за звездочного произведения. Полученные в настоящей главе вершины взаимодействия являются (анти)голоморфными, и для их спин-локальности необходимо, чтобы между полями C было конечное число сверток по (не)точечным индексам, что и было достигнуто.

В **четвертой главе**, основанной на четвертой статье из списка публикаций автора диссертации, исследуются вершины смешанного сектора в младшем порядке по взаимодействию. Как и в главе 3, эти вершины получены из производящей системы (43)-(47). Уравнения на поля W,B,S в этом секторе уже определяют нетривиальную зависимоть как от z, так и от $\bar{z}$

$$\mathrm{d}_Z\Phi(z,\bar{z}) = J(z,\bar{z}). \tag{62}$$

В главе обсуждается несколько способов решения таких уравнений, но наиболее удачным в контексте спин-локальности оказалось обобщение техники сдвиговых гомотопий (60) из третьей главы. Вершины смешанного сектора являются суммой слагаемых, в которых нетривиальным образом между полями устроены свертки как по точечным, так и по неточечным индексам. В каждом из таких слагаемых удается добиться того, что конечным оказывается число сверток либо по точечным индексам, либо по неточечным.

Определим оператор

$$\triangle_{q\bar{q}} := \frac{1}{2}(\triangle_q + \bar{\triangle}_{\bar{q}}), \tag{63}$$

где оператор $\bar{\triangle}_{\bar{q}}$ аналогично (60) действует только на антиголоморфные переменные. Оператор $\triangle_{q\bar{q}}$ подчиняется следующему аналогу разложения единицы (58) из главы 3

$$\{\mathrm{d}_Z, \triangle_{q\bar{q}}\} = 1 - h_{q\bar{q}}, \tag{64}$$

где оператор $h_{q\bar{q}}$ дается выражением

$$h_{q\bar{q}} = \frac{1}{2}(h_q + \bar{h}_{\bar{q}}), \quad h_q f(z,\bar{z},\theta,\bar{\theta}) = f(-q,\bar{z},0,\bar{\theta}). \tag{65}$$

Отсюда сразу же видно, что $h_{q\bar{q}}$ не является проектором d_Z-когомологии, в чем и состоит ключевое отличие (58) от (64). Таким образом, в общем случае решить уравнение (62) с помощью (63) с произвольной d_Z-замкнутой правой частью не удастся. Тем не менее, если J удовлетворяет условию

$$h_{q\bar{q}} J = 0, \tag{66}$$

то $\Phi = \triangle_{q\bar{q}}\, J$ – является решением уравнения (62). Последнее оказывается возможным за счет специфического решения уравнений производящей системы в младших порядках. Кроме того, выбирая параметры $q,\bar{q}$ так, чтобы проектор аннигилировал правую часть, решение уравнения $\triangle_{q\bar{q}}\, J$ обладает необходимым свойством для того, чтобы следующие из него вершины взаимодействия были спин-локальными. Таким образом в спин-локальной форме были получены смешанные вершины второго порядка по обобщенной кривизне в секторе один-форм.

В **Приложении А** доказывается, что функции (30) действительно решают рекуррентные уравнения на структурные константы ассоциативного умножения в $\mathsf{Aq}(2,\nu)$, полученные в первой главе.

В **Приложении Б** показано, что применение предельной резольвенты $\triangle_{q,\beta}$, введенной в [21], в рамках анализа вершин смешанного сектора $\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}(\omega,\omega,C,C)$ сводится к использованию операторов сдвиговых гомотопий $\triangle_q$ из Главы 3.

В **заключении** приведены основные результаты работы.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Были найдены все структурные константы ассоциативного умножения в алгебре $\mathsf{Aq}(2,\nu)$. С их помощью могут быть перемножены любые формальные ряды. Из условия ассоциативности были выведены рекуррентные уравнения, однозначно определяющие структурные константы для четно-четного случая. С помощью этих уравнений была показана справедливость предложенных ранее частных выражений.
2. Построено обобщение произведения Мояла на случай ненулевого значения параметра деформации. Полученная формула основана на интегральном представлении Похгаммера для бета-функции Эйлера. Сформулированное таким образом произведение потенциально может быть применено к функциям, выходящим за рамки класса формальных рядов. С помощью полученной формулы была проанализирована аналитическая структура произведения по параметру деформации в младших порядках. Также была предложена техника пертурбативного разложения структурных констант по параметру деформации.
3. Получены важные соотношения звездочной перестановочности, связывающие звездочное произведение и операторы сдвиговых гомотопий. Эти соотношения позволяют свести анализ локальности теории возмущений в младших порядках к анализу структур типа $\Delta\Delta\ \gamma$, $\Delta\Delta\ \gamma * \bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{\gamma}$, ... В этих структурах изучение (не)локальности сводится к анализу индексов в операторах сдвиговых гомотопий и соответствующих им когомологическим проекторам.
4. С помощью сдвиговых гомотопий над произвольным фоном были получены вершины $\Upsilon(\omega,\omega,C)$ и $\Upsilon(\omega,C,C)$, которые являются ультра-локальными и спин-локальными соответственно. Благодаря правильному выбору сдвиговых параметров у гомотопических операторов никакого переопределения полей не понадобилось.
5. После модификации техники сдвиговых гомотопий из производящей системы были получены вершины смешанного сектора $\Upsilon^{\eta\bar{\eta}}(\omega,\omega,C,C)$, которые также являются спин-локальными.

Публикации автора по теме диссертации

[1] A. V. Korybut. “Covariant structure constants for a deformed oscillator algebra”. В: *Theor. Math. Phys.* 193.1 (2017), с. 1409—1419. DOI: 10.1134/S0040577917100014. arXiv: 1409.8634 [hep-th].

[2] Anatoly Korybut. “Star product for deformed oscillator algebra Aq (2,ν)”. В: *J. Phys. A* 54.50 (2021), с. 505202. DOI: 10.1088/1751-8121/ac367e. arXiv: 2006.01622 [hep-th].

[3] A. V. Korybut и др. “Homotopy Properties and Lower-Order Vertices in Higher-Spin Equations”. В: *J. Phys. A* 51.46 (2018), с. 465202. DOI: 10.1088/1751-8121/aae5e1. arXiv: 1807.00001 [hep-th].

[4] A. V. Korybut и др. “Limiting Shifted Homotopy in Higher-Spin Theory and Spin-Locality”. В: *JHEP* 12 (2019), с. 086. DOI: 10.1007/JHEP12(2019)086. arXiv: 1909.04876 [hep-th].

Список литературы

[1] Matvei P Bronstein. “Quantentheorie schwacher gravitationsfelder”. В: *Phys. Z. Sowjetunion* 9.2-3 (1936), с. 140—157.

[2] Z. Bern и др. “Unexpected Cancellations in Gravity Theories”. В: *Phys. Rev. D* 77 (2008), с. 025010. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.025010. arXiv: 0707.1035 [hep-th].

[3] B. P. Abbott и др. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. В: *Phys. Rev. Lett.* 116.6 (2016), с. 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv: 1602.03837 [gr-qc].

[4] Peter W. Higgs. “Broken symmetries, massless particles and gauge fields”. В: *Phys. Lett.* 12 (1964), с. 132—133. DOI: 10.1016/0031-9163(64)91136-9.

[5] M.A. Vasiliev. “Higher spin superalgebras in any dimension and their representations”. В: *JHEP* 12 (2004), с. 046. DOI: 10.1088/1126-6708/2004/12/046. arXiv: hep-th/0404124.

[6] Steven Weinberg. “Photons and Gravitons in S-Matrix Theory: Derivation of Charge Conservation and Equality of Gravitational and Inertial Mass”. В: *Phys. Rev.* 135 (1964), B1049—B1056. DOI: 10.1103/PhysRev.135.B1049.

[7] Mikhail A. Vasiliev. “More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions”. В: *Phys. Lett. B* 285 (1992), с. 225—234. DOI: 10.1016/0370-2693(92)91457-K.

[8] Daniel Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen и S. Ferrara. “Progress Toward a Theory of Supergravity”. В: *Phys. Rev. D* 13 (1976), с. 3214—3218. DOI: 10.1103/PhysRevD.13.3214.

[9] Juan Martin Maldacena. “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity”. В: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), с. 231—252. DOI: 10.1023/A:1026654312961. arXiv: hep-th/9711200.

[10] I. R. Klebanov и A. M. Polyakov. “AdS dual of the critical O(N) vector model”. В: *Phys. Lett. B* 550 (2002), с. 213—219. DOI: 10.1016/S0370-2693(02)02980-5. arXiv: hep-th/0210114.

[11] Simone Giombi и Xi Yin. “Higher Spin Gauge Theory and Holography: The Three-Point Functions”. В: *JHEP* 09 (2010), с. 115. DOI: 10.1007/JHEP09(2010)115. arXiv: 0912.3462 [hep-th].

[12] Ettore Majorana. “Relativistic theory of particles with arbitrary intrinsic angular momentum”. В: *Nuovo Cim.* 9 (1932), с. 335—344. DOI: 10.1007/BF02959557.

[13] Christian Fronsdal. “Massless Fields with Integer Spin”. В: *Phys. Rev. D* 18 (1978), с. 3624. DOI: 10.1103/PhysRevD.18.3624.

[14] L. P. S. Singh и C. R. Hagen. “Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case”. В: *Phys. Rev. D* 9 (1974), с. 898—909. DOI: 10.1103/PhysRevD.9.898.

[15] Christian Fronsdal. “Singletons and Massless, Integral Spin Fields on de Sitter Space (Elementary Particles in a Curved Space. 7.” В: *Phys. Rev. D* 20 (1979), с. 848—856. DOI: 10.1103/PhysRevD.20.848.

[16] Mikhail A. Vasiliev. “Free Massless Fields of Arbitrary Spin in the De Sitter Space and Initial Data for a Higher Spin Superalgebra”. В: *Fortsch. Phys.* 35 (1987), с. 741—770.

[17] Mikhail A. Vasiliev. “Higher spin gauge theories: Star product and AdS space”. В: (окт. 1999). Под ред. Mikhail A. Shifman, с. 533—610. DOI: 10.1142/9789812793850_0030. arXiv: hep-th/9910096.

[18] Mikhail A. Vasiliev. “Equations of Motion of Interacting Massless Fields of All Spins as a Free Differential Algebra”. В: *Phys. Lett. B* 209 (1988), с. 491—497. DOI: 10.1016/0370-2693(88)91179-3.

[19] Anders K. H. Bengtsson, Ingemar Bengtsson и Lars Brink. “Cubic Interaction Terms for Arbitrary Spin”. В: *Nucl. Phys. B* 227 (1983), с. 31—40. DOI: 10.1016/0550-3213(83)90140-2.

[20] V. E. Didenko и др. “Homotopy Properties and Lower-Order Vertices in Higher-Spin Equations”. В: *J. Phys. A* 51.46 (2018), с. 465202. DOI: 10.1088/1751-8121/aae5e1. arXiv: 1807.00001 [hep-th].

[21] V. E. Didenko и др. “Limiting Shifted Homotopy in Higher-Spin Theory and Spin-Locality”. В: *JHEP* 12 (2019), с. 086. DOI: 10.1007/JHEP12(2019)086. arXiv: 1909.04876 [hep-th].

[22] M. A. Vasiliev. “Current Interactions and Holography from the 0-Form Sector of Nonlinear Higher-Spin Equations”. В: *JHEP* 10 (2017), с. 111. DOI: 10.1007/JHEP10(2017)111. arXiv: 1605.02662 [hep-th].

[23] Mikhail A Vasiliev. “Higher spin algebras and quantization on the sphere and hyperboloid”. В: *International Journal of Modern Physics A* 6.07 (1991), с. 1115—1135.

[24] Eugene P Wigner. “Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations?” В: *Physical Review* 77.5 (1950), с. 711.

[25] C. N. Pope, L. J. Romans и X. Shen. “W(infinity) and the Racah-wigner Algebra”. В: *Nucl. Phys.* B339 (1990), с. 191—221. DOI: 10.1016/0550-3213(90)90539-P.

[26] O. A. Gelfond и M. A. Vasiliev. “Homotopy Operators and Locality Theorems in Higher-Spin Equations”. В: *Phys. Lett. B* 786 (2018), с. 180—188. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.09.038. arXiv: 1805.11941 [hep-th].

[27] Mikhail A. Vasiliev. "Unfolded representation for relativistic equations in (2+1) anti-De Sitter space". B: *Class. Quant. Grav.* 11 (1994), c. 649—664. DOI: 10.1088/0264-9381/11/3/015.

[28] Matthias R. Gaberdiel и Rajesh Gopakumar. "Minimal Model Holography". B: *J. Phys.* A46 (2013), c. 214002. DOI: 10.1088/1751-8113/46/21/214002. arXiv: 1207.6697 [hep-th].

[29] A. V. Korybut. "Covariant structure constants for a deformed oscillator algebra". B: *Theor. Math. Phys.* 193.1 (2017), c. 1409—1419. DOI: 10.1134/S0040577917100014. arXiv: 1409.8634 [hep-th].

[30] Anatoly Korybut. "Star product for deformed oscillator algebra Aq (2,ν)". B: *J. Phys. A* 54.50 (2021), c. 505202. DOI: 10.1088/1751-8121/ac367e. arXiv: 2006.01622 [hep-th].

[31] Mikhail A. Vasiliev. "Holography, Unfolding and Higher-Spin Theory". B: *J. Phys. A* 46 (2013), c. 214013. DOI: 10.1088/1751-8113/46/21/214013. arXiv: 1203.5554 [hep-th].

[32] S. F. Prokushkin и Mikhail A. Vasiliev. "Higher spin gauge interactions for massive matter fields in 3-D AdS space-time". B: *Nucl. Phys. B* 545 (1999), c. 385. DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00839-6. arXiv: hep-th/9806236.

[33] V. E. Didenko и M. A. Vasiliev. "Test of the local form of higher-spin equations via AdS / CFT". B: *Phys. Lett. B* 775 (2017), c. 352—360. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.09.091. arXiv: 1705.03440 [hep-th].