Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех)

На правах рукописи

Ланина Елена Николаевна

Симметрийный подход к изучению петель Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса

Специальность 1.3.3 — Теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Слепцов Алексей Васильевич**,

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник Курчатовского комплекса
теоретической и экспериментальной физики
НИЦ Курчатовский институт

Официальные оппоненты: **Исаев Алексей Петрович**,

доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник
Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова
Объединенного института ядерных исследований

Ландо Сергей Константинович,

доктор физико-математических наук,
профессор факультета математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Защита состоится " 20 " мая 2024 г. в 12:00 на заседании диссертационного совета 24.1.262.04 на базе Физического института им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического института им. П.Н. Лебедева РАН или на сайте www.lebedev.ru.

Автореферат разослан "......" ....2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
24.1.262.04, кандидат физ.-мат. наук Чернышов Дмитрий Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена новому взгляду на пертурбативное исследование корреляторов в топологической теории Черна–Саймонса с калибровочной группой $SU(N)$ [1—3] с действием

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{S^3} \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \tag{1}$$

Трехмерная теория Черна–Саймонса заслуживает внимания по нескольким причинам. Но особенно она интересна своими калибровочно-инвариантными наблюдаемыми – петелями Вильсона, широко известными как цветные полиномы узлов ХОМФЛИ:

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q,a) = \frac{1}{\text{qdim}(R)} \left\langle \text{tr}_R \; P \exp \left(\oint_{\mathcal{K}} A \right) \right\rangle_{\text{CS}}. \tag{2}$$

Цветные полиномы ХОМФЛИ «раскрашены» представлением R алгебры $\mathfrak{sl}_N$, а контуром интегрирования является узел $\mathcal{K}$. Удивительно, но такие средние действительно оказываются аналитическими выражениями: полиномами Лорана по переменным $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{\kappa+N}\right) = e^{\hbar}$ и $a = q^N$. Считается, что операторы петель Вильсона управляют одним из самых интригующих физических явлений, таким как конфайнмент кварков в КХД [4]. Теория Черна–Саймонса может сыграть роль промежуточного шага к полному пониманию физики наблюдаемых петель Вильсона в квантовых теориях поля.

О теории Черна–Саймонса уже многое известно благодаря ее связи с различными разделами современной математической и теоретической физики: квантовыми калибровочными моделями [5], двумерными конформными теориями Весса-Зумино-Виттена [6], топологическими струнами [7, 8] и теорией узлов [9—11]. Эти связи и тот факт, что теория является топологической[1], предоставляют методы и алгоритмы для точного вычисления любого коррелятора петли Вильсона. Существует несколько мощных вычислительных методов, однако результаты получены только для некоторых узлов и представлений.

В диссертации мы изучаем [12] теоретико-групповые составляющие пертурбативного раз-

[1]Под топологической теорией мы понимаем, что ее действие не зависит от метрики.

ложения по $\hbar^2$ петель Вильсона – групповые факторы $\mathcal{G}^R_{n,m}$:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{K}}_R = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_m \mathcal{V}^{\mathcal{K}}_{n,m}\; \mathcal{G}^R_{n,m} \right) \hbar^n \,. \tag{3}$$

Зависящие от узла части $\mathcal{V}^{\mathcal{K}}_{n,m}$ называются инвариантами Васильева. До настоящего времени было известно явное описание групповых факторов только до 6-го порядка по n для фундаментального и симметрического (с диаграммой Юнга [2]) представлений $\mathfrak{sl}_N$ [13], а также для любых представлений $\mathfrak{sl}_2$ [14]. Вычислительная сложность резко возрастает по мере увеличения размера представления. Сложность ограничивает количество доступных результатов, что делает внутреннюю структуру цветных полиномов ХОМФЛИ в целом скрытой на данный момент. В диссертации *представлен конкретный алгоритм* вычисления групповых факторов полинома ХОМФЛИ *в любом порядке* и в *любом неприводимом конечномерном представлении*. Полученные выражения для групповой структуры позволяют найти целый ряд следствий для квантовых инвариантов узлов.

Групповые факторы появляются не только в теории Черна–Саймонса, они возникают в любой неабелевой калибровочной теории (см., например, [15]). Групповые факторы являются естественными компонентами пертурбативных вычислений, в том числе в таких важных примерах, как расчет высших петлевых поправок к бета-функции КХД [16, 17], теорию перенормировок в модели Черна–Саймонса [18], корреляторы в БФ модели [19] и недавние работы по $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории Янга-Миллса [20, 21].

С математической точки зрения цветные полиномы ХОМФЛИ интересно изучать, так как существует гипотеза, что они являются полными инвариантами узлов и зацеплений. Это означает, что для любых двух различных узлов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ существует неприводимое представление R алгебры $\mathfrak{sl}_N$ такое, что $\mathcal{H}^{\mathcal{K}_1}_R \neq \mathcal{H}^{\mathcal{K}_2}_R$. На практике наиболее сложными случаями являются узлы-мутанты [22, 23], для которых полиномы ХОМФЛИ не различаются для неприводимых представлений без вырождений, т.е. для представлений, ассоциированных с прямоугольными диаграммами Юнга [24]. Чем нетривиальнее представление, тем лучше полиномы ХОМФЛИ различают узлы.

Еще одной важной темой исследований в диссертации является изучение одного из строительных блоков квантовых инвариантов узлов – квантовых 6j-символов. Коэффициенты Рака или 6j-символы задают изоморфизм между двумя различными слияниями (двумя естественными базисами) в тензорном произведении трех представлений. Коэффициенты Рака являются распространенными объектами в теоретической и математической физике в связи

[2] Из цветного полинома ХОМФЛИ разложение по $\hbar$ получается подстановкой $q = e^{\hbar}$ и $a = e^{N\hbar}$, где N соответствует рангу алгебры $\mathfrak{sl}_N$, и последующим разложением экспонент в ряд.

с разложением тензорных произведений представлений. Для эффективного решения подобных задач необходимо глубоко понимать внутреннюю структуру коэффициентов Рака и их аналитическую зависимость от параметров.

Коэффициенты Рака возникают уже в задаче сложения трех угловых моментов в квантовой механике [25]. Они являются элементами матрицы перехода между двумя базисами, соответствующими разному порядку сложения моментов. Существует огромный список физических применений 6j-символов: они фигурируют в описании эффекта Ландау-Померанчука-Мигдала в кварк-глюонной плазме [26], в задачах ядерной спектроскопии [27, 28], в решеточной калибровочной теории [29], в задачах, связанных с квантовыми состояниями ультрахолодных атомов щелочноземельных металлов [30], в теории полупроводников для построения кубитов [31]. Более близкими к нашей теме примерами являются преобразования конформных блоков [32, 33] и вычисление наблюдаемых в теории Черна–Саймонса методом Решетихина–Тураева [34—38].

Коэффициенты Рака хорошо определены для конечномерных [39, 40] и некоторых бесконечномерных [41, 42] представлений классических групп Ли, а также для представлений их обобщений – квантовых групп [43]. В последнем случае коэффициенты Рака называются квантовыми. В диссертации мы рассматриваем только неприводимые конечномерные представления квантовой универсальной обертывающей $U_q(\mathfrak{sl}_N)$.

Оказывается, что коэффициенты Рака однозначно определяются нормированными собственными значениями соответствующих $\mathcal{R}$-матриц[3]. Это утверждение называется гипотезой о собственных значениях. Таким образом, два коэффициента Рака равны, если собственные значения $\mathcal{R}$-матриц совпадают. Гипотеза была предложена в [44] для случая узла и далее обобщена на случай зацепления в [45].

Гипотезу о собственных значениях можно сформулировать только для квантовой группы, поскольку в классическом случае $q = 1$ $\mathcal{R}$-матрицы сводятся к матрицам перестановок, имеющей всего 2 различных собственных значения ± 1. Однако следствия гипотезы о собственных значениях справедливы и для классического случая, имеющего большое значение в физике.

Гипотеза о собственных значениях доказана для случая $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ в [46]. Хотя доказательств

[3] $\mathcal{R}$-матрицы $\mathcal{R}_i$, $i = 1, \ldots, m$ определяют представление группы кос Артина $\mathcal{B}_m$ на m нитях:

$$\begin{aligned} &\pi : \mathcal{B}_m \to \mathrm{End}\left(V_{R_1} \otimes \ldots \otimes V_{R_m}\right) , \\ &\pi\left(\sigma_i\right) = \mathcal{R}_i , \end{aligned} \tag{4}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}$ – генераторы группы кос $\mathcal{B}_m$.

для ранга $N > 2$ нет, в некоторых случаях гипотеза проверялась. В случае без вырождений существуют точные выражения для коэффициентов Рака через собственные значения $\mathcal{R}$-матрицы для матриц размером до 5×5 [44] и 6×6 [47] для случая трехнитевого узла, сначала для матриц размера до 3×3 для случая трехнитевого зацепления [45] и для матриц размера до 5×5 для случая 4-нитевого зацепления [48]. Ситуация значительно усложняется при наличии кратностей, но даже в этом случае, когда матрицы Рака можно сделать блочно-диагональными, эти блоки также удовлетворяют гипотезе о собственных значениях [49].

Гипотеза о собственных значениях имеет множество важных приложений. В диссертации мы использовали ее, чтобы найти классы симметрий коэффициентов Рака [50] и квантовых инвариантов узлов. Однако явные симметрии 6j-символов приведены только для симметрических и сопряженных им представлений [46, 51]. Еще одним интересным следствием является связь данной гипотезы со свойством однокрюкового масштабирования цветного многочлена Александе́ра[4] [52], которое связывает эти многочлены для однокрюковых и фундаментального представлений.

Мы исследовали симметрию квантовых 6j-символов, справедливую для случаев представлений с кратностями [53]. Ее наличие влечет несколько важных следствий. В частности, ее независимые подтверждения служат свидетельством в пользу справедливости гипотезы о собственных значениях.

Степень разработанности темы

Ранее явное описание групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ было предъявлено только до 6-го порядка пертурбативного разложения для фундаментального и симметрического (с диаграммой Юнга [2]) представлений $\mathfrak{sl}_N$ в работе [13], а также для любых $\mathfrak{sl}_2$ представлений [14]. Позднее в статье [54] была обнаружена симметрия «тяни-крюк» цветного полинома Александера ($N = 0$), что позволило исследовать его групповую структуру. Аналитического или комбинаторного способа описания групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ для любой алгебры $\mathfrak{sl}_N$, любого порядка пертурбативного разложения и произвольного представления R до работ автора диссретации не существовало.

Инварианты Васильева[5] эффективно вычисляются с помощью пертурбативных разложений цветных полиномов ХОМФЛИ или Кауфмана[6]. Для выполнения таких вычислений,

[4]Цветной полином Александера – частный случай цветного полинома ХОМФЛИ для $a = 1$.

[5]Напомним, что инварианты Васильева – зависящие от узла коэффициенты при соответствующих групповых факторах в пертурбативном разложении цветного полинома ХОМФЛИ (3).

[6]Цветной полином Кауфмана – петля Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса с калибровочной группой $SO(N)$.

во-первых, используются многочлены узлов в различных (достаточно больших) представлениях (посчитаны ранее), а во-вторых, явный вид соответствующих групповых факторов (получено диссертантом и соавторами в [12, 55]). Явный вид групповых факторов полиномов ХОМФЛИ высших порядков ранее был неизвестен, так что инварианты Васильева были получены только до 6-го порядка [56]. Представленный в диссертации результат [12, 55] позволяет вычислять инварианты Васильева *выше 6-го порядка*, что в некоторых случаях имеет решающее значение; например, узлы-мутанты [22—24] имеют одинаковые инварианты Васильева до 10-го порядка.

Считается, что множество всех инвариантов Васильева является полным инвариантом узла; т.е. можно различить любые два узла, зная для них наборы инвариантов Васильева. Однако, как показал П. Вожель [57], *не все инварианты Васильева могут быть получены из одного лишь полинома ХОМФЛИ*. Таким образом, возникает проблема обобщения групповых факторов ХОМФЛИ на все простые алгебры Ли с помощью параметризации Вожеля. Получающиеся полиномы называются универсальными полиномами узлов. Решение этой задачи позволит ответить на вопрос, можно ли получить из универсальных полиномов все инварианты Васильева. Универсальные полиномы узлов для 2- и 3-нитевых торических узлов в присоединенном представлении были построены в работе [58].

С помощью полученных в диссертации выражений для групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ [12], мы также исследуем свойства частных случаев полинома ХОМФЛИ [12] – цветных полиномов Александера и Джонса. Для цветных полиномов Джонса[7] q-голономность (наличие определенных q-разностных уравнений на них) была доказана Ставросом Гаруфалидисом и Тханг Ле в [59]. Позже была доказана и q-голономность цветных полиномов ХОМФЛИ [60]. Однако в случае произвольного представления нет алгоритма вычисления рекурсивных соотношений на цветные полиномы ХОМФЛИ[8], а в известных случаях эти вычисления представляют трудности. Более того, подобные рекурсивные соотношения в принципе неизвестны для несимметрических представлений. В диссертации предложен явный метод нахождения таких соотношений и применяем его к случаю полиномов Джонса в симметрических представлениях для торических узлов $T[2, 2k+1]$.

Наиболее известное соотношение для цветного полинома Александера – скейлинговое со-

[7]Цветной полином Джонса – частный случай цветного полинома ХОМФЛИ для $a = q^2$.

[8]В случае симметрических представлений рекурсивное соотношение на полином ХОМФЛИ можно переписать как действие полинома от двух операторов на полином ХОМФЛИ в фиксированном представлении. Этот полином называется квантовым A-полиномом и также является инвариантом узла. Его классический предел ($q = 1$) задает спектральную кривую теории Черна–Саймонса.

отношение, связывающее полиномы Александера в однокрюковом и фундаментальном представлениях [61]. Интересно, что это соотношение связывает групповые факторы полинома Александера с дисперсионными соотношениями на односолитонную тау-функцию иерархии Кадомцева-Петвиашвилли [62, 63]. Однако обобщения на большее число крюков до сих пор не были исследованы. Предположительно такие скейлинговые соотношения также могут давать неожиданные связи с интегрируемыми или же не интегрируемыми иерархиями.

Альтернативой пертурбативного разложения (3) является дифференциальное разложение. Дифференциальное разложение[9] (ДР) полинома ХОМФЛИ в симметрических представлениях для узла-восьмерки 4_1 было представлено в [61]:

$$\mathcal{H}_{[r]}^{4_1} = \sum_{j=0}^{r} \frac{[r]!}{[j]![r-j]!} F_{[j]}^{\mathcal{K}}(a,q) \prod_{i=0}^{j-1} \{aq^{r+i}\}\{aq^{i-1}\} \tag{5}$$

с полиномами Лорана $F_{[j]}^{\mathcal{K}}(a,q)$. Здесь $\{x\} := x - x^{-1}$ и $[n] := \{q^n\}/\{q\}$. ДР также известно под названием *циклотомическое разложение* [64—67]. В общем случае разложение слабее [68]:

$$\mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}} = \sum_{j=0}^{r} \frac{[r]!}{[j]![r-j]!} G_{[j]}^{\mathcal{K}}(a,q) \{a/q\} \prod_{i=0}^{j-1} \{aq^{r+i}\}\,. \tag{6}$$

Это ДР выводится из теории представлений, и в нем стоит полином $G_{[j]}^{\mathcal{K}}$, а не $F_{[j]}^{\mathcal{K}}$ (5). Дефект [68] характеризует дополнительную факторизацию полиномов $G_{[j]}^{\mathcal{K}}$ в сторону $F_{[j]}^{\mathcal{K}}$. Дефект дифференциального разложения все еще плохо изучен. Недавно была выдвинута гипотеза о сохранении дефекта при антипараллельной эволюции узла и о линейном росте дефекта при параллельной эволюции [69]. Однако, как показано в нашей работе [70], гипотеза требует более аккуратной формулировки. Мы также доказываем гипотезу [68] о связи дефекта дифференциального разложения со степенью фундаментального полинома Александера и получаем несколько важных следствий из этой связи [70].

Отдельное важное направление исследований – квантовые 6j-символы. Симметрии квантовых 6j-символов полностью описаны только для случая $\mathfrak{sl}_2$ [43]. Соответствующая группа симметрии $S_4 \times S_3$, где в контексте квантовых 6j-символов S_4 называют симметрией тетраэдра, а S_3 обозначает симметрию Редже. Для $\mathfrak{sl}_N$, $N > 2$ полная группа симметрии неизвестна. В работе [50] обсужден способ построения новых симметрий с использованием гипотезы о собственных значениях, но явно симметрии были получены только для случаев симметрических и сопряженных им представлений в [46, 51]. В диссертации введена симметрия «тяни-крюк», которая сохраняет коэффициенты Рака [53]. Эта симметрия имеет важное свойство. Она выполняется для любого представления, включая случаи с вырождениями. Это первая обнаруженная симметрия матриц Рака, которая верна вне случаев без вырождений.

[9]Дифференциальное разложение доказано только в случае (анти)симметрических представлений.

Целью работы является построение методов вычисления групповой структуры квантовых инвариантов узлов, а также описание и исследование различных свойств квантовых инвариантов узлов и их составляющих элементов с помощью их симметрий. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1) разработать методы построения групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ для произвольных представлений R алгебры $\mathfrak{sl}_N$ с произвольным N;

2) на основе полученных результатов для групповых факторов исследовать возможные свойства квантовых инвариантов узлов, такие как скейлинговые и рекурсивные соотношения для полиномов ХОМФЛИ, обобщение групповых факторов при помощи параметризации Вожеля, получение инвариантов Васильева высших порядков;

3) доказать недавно сформулированную гипотезу о связи дефекта дифференциального разложения цветного полинома ХОМФЛИ и степени фундаментального полинома Александера; изучить множество значений коэффициентов дифференциального разложения;

4) изучить новую симметрию «тяни-крюк» квантовых 6j-символов $\mathfrak{sl}_N$, применимую для любых представлений, включая случаи с кратностями; изучить следствия этой симметрии.

Научная новизна

Все представленные к защите результаты являются оригинальными и новыми разработками автора диссертации. Результаты опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах, докладывались на конференциях, включая международные. Работы известны в научном сообществе и цитируются в работах других авторов.

Практическая и научная ценность

Теория Черна–Саймонса является простейшим примером трехмерной квантовой теории поля, и ее полное решение для произвольного представления калибровочной группы и узла приведет к значительному прогрессу в теоретической физике, подобному решению конформных теорий поля как простейших примеров двумерных квантовых теорий поля. В ходе исследований мы вплотную подошли к окончательному и исчерпывающему описанию групповой структуры петель Вильсона в теории Черна–Саймонса – цветных полиномов ХОМФЛИ. Кроме того, мы начали работу над обобщением найденной групповой структуры на любую простую алгебру Ли, что позволит лучше понять целый спектр квантовых теорий поля. В частности, с точки зрения квантовой теории поля средние от петель Вильсона важны, поскольку вполне вероятно, что 4d-конфайнмент наиболее естественно объясняется в этих терминах. Таким образом, результаты работы имеют большую теоретическую значимость для исследований квантовых теорий поля.

Кроме того, теория Черна–Саймонса имеет конкретные физические приложения. Например, она предположительно описывает состояния в дробном квантовом эффекте Холла. Более того, теория Черна–Саймонса является одной из наиболее общих топологических квантовых теорий поля в 2+1 измерениях, поэтому она может служить эффективной теорией для двумерных материалов, допускающих топологические возбуждения – анионы. Топологическая природа анионов делает их эволюцию устойчивой по отношению к возмущениям, что дает потенциальную возможность построения квантового компьютера, устойчивого к шумам. Также теория Черна–Саймонса имеет приложения и в математике: недавно была установлена ее связь с классической проблемой построения инвариантов трехмерных многообразий. Таким образом, наши результаты могут иметь приложения как к смежным разделам теоретической и математической физики и математики, так и практические приложения в виде изучения свойств особых материалов и даже построения эффективного квантового компьютера.

Методология и методы диссертационного исследования

Результаты, представленные в диссертации, получены с помощью аналитических и численных вычислений. Для исследования групповой структуры пертурбативного петлевого разложения вильсоновских операторов использовались методы теории групп и конструкция интеграла Концевича, связанная с алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Якоби (и переходящая в цветной полином ХОМФЛИ при помощи отображения весовой системы). Для описания групповых факторов полинома ХОМФЛИ широко использовался подход наложения ограничений на групповую структуру, приходящих из конкретных симметрий цветного полинома ХОМФЛИ. Для вычисления инвариантов Васильева высших порядков использовалось пертурбативное разложение цветных полиномов ХОМФЛИ. Вопрос о различении инвариантов Васильева весовыми системами простых алгебр Ли исследовался методом параметризации П. Вожеля. Вычисление квантового A-полинома для симметрического полинома Джонса для торических узлов $T[2, 2k+1]$ основано на теореме о q-голономности полинома Джонса. Получение свойств полиномов Александера также было проведено с использованием теоретико-групповых соображений. Свойства дефекта цветного полинома ХОМФЛИ были исследованы при помощи дифференциального разложения, следующего из теории представлений и соответствующих симметрий полинома ХОМФЛИ. Для исследования симметрии «тяни-крюк» квантовых 6j-символов было использовано описание квантовых инвариантов узлов через методы теории интегрируемых систем ($\mathcal{R}$-матричный подход к описанию представлений группы кос), а также гипотеза о собственных значениях.

Положения, выносимые на защиту диссертации

- Метод построения групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ в любом порядке пертурбативного разложения с использованием соображений симметрии. Аналитические формулы для мультипликативного базиса групповой структуры полинома ХОМФЛИ для алгебры $\mathfrak{sl}_N$ любого ранга и для ее произвольного представления R; сами групповые факторы вплоть до 13-го уровня пертурбативного разложения. Гипотеза о том, что групповая структура цветных полиномов ХОМФЛИ полностью определяется известными для них симметриями.

- Получение инвариантов Васильева выше 6-го порядка из квантовых инвариантов узлов с использованием найденного базиса групповых факторов. Явное вычисление инвариантов Васильева узла 3_1 до 11-го порядка включительно и узла 5_2 до 10-го порядка включительно.

- Нахождение двух групповых факторов на шестом уровне, неразличимых весовыми системами всех простых алгебр Ли с использованием параметризации П. Вожеля.

- Новый метод нахождения рекурсивных соотношений для цветных полиномов ХОМФЛИ, что эквивалентно вычислению квантовых A-полиномов. Нахождение рекурсивных соотношений для симметрических полиномов Джонса торических узлов $T[2, 2k+1]$ в качестве примера.

- Установление наличия новых симметрий цветного полинома Александера. Предъявление аналитической N-деформации четных групповых факторов цветных полиномов Александера в групповые факторы полиномов ХОМФЛИ. Обобщение однокрюкового скейлингового соотношения цветного полинома Александера на случай произвольного представления.

- Доказательство гипотезы о связи дефекта дифференциального разложения цветного полинома ХОМФЛИ со степенью фундаментального полинома Александера. Исследование множества значений целочисленных параметров симметрических полиномов Александера. Следствия для гипотезы о сохранении дефекта при антипараллельной эволюции. Вычисление C-полиномов для симметрических полиномов Александера. Соотношения на коэффициенты дифференциального разложения цветных полиномов Александера в случае однокрюковых представлений кроме симметрических.

- Доказательство симметрии «тяни-крюк» цветных полиномов ХОМФЛИ в случае узлов. Гипотеза о наличии симметрии «тяни-крюк» у полиномов ХОМФЛИ в случае зацеплений и аргументы в ее пользу. Конкретные примеры наличия симметрии «тяни-крюк» квантовых 6j-символов для нетривиальных случаев (для представлений с вырождениями), что подтверждает гипотезу о собственных значениях.

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается обоснованностью применяемых методов исследования и их сравнением с другими подходами, а также публикациями в престижных международных журналах со строгой рецензионной политикой. Результаты диссертации согласуются с результатами по теме исследований, полученными другими авторами.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на теоретических семинарах ККТЭФ (ранее – ИТЭФ) НИЦ Курчатовский институт, лаборатории математической и теоретической физики МФТИ и кафедры теоретической физики МФТИ, а также на следующих конференциях: Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (ИТЭФ, Москва, 2020, 2021 гг.); XVIII International Conference on Symmetry Methods in Physics (Ереван, Армения, 2022 г.); UK-QFT XI (Кембриджский университет, Великобритания, 2023 г.); десятая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (МИАН и НИУ ВШЭ, Москва, 2023 г.); 65-я Всероссийская научная конференция МФТИ (МФТИ, 2023 г.); International conference "Quantum Field theory and gravity" (ТГПУ, Томск, 2023 г.).

Личный вклад

Все результаты, включенные в диссертацию, получены лично соискателем или при его прямом участии. Соискатель принимал непосредственное участие в выполнении всех работ и написании текстов всех публикаций. Имена соавторов указаны в соответствующих публикациях.

Публикации

По материалам диссертации опубликованы 3 научные работы в рецензируемых журналах.

Структура и объем диссертации

Диссертация включает в себя введение, пять глав основного текста и заключение. Общий объем диссертации составляет 135 страниц, включая 17 рисунков и 12 таблиц. Список литературы содержит 165 ссылок.

Содержание диссертации

Во **Введении (глава 1)** дана общая характеристика диссертационной работы, обоснована актуальность темы, описаны поставленные задачи.

В **главе 2** обсуждаются три эквивалентных способа определения цветного полинома ХОМФЛИ $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q,a)$, которые мы будем использовать в ходе наших исследований. Также вводятся основные изучаемые объекты, из которых строятся квантовые инварианты узлов: групповые факторы, инварианты Васильева, $\mathcal{R}$-матрицы, 6j-символы и т.д.

• Первое определение физическое, так как связывает квантовые полиномы узла с петлями Вильсона трехмерной теории Черна–Саймонса:

$$H_R^{\mathcal{K}}(q,a) = \left\langle \mathrm{tr}_R \; P\exp\left(\oint_{\mathcal{K}} A\right)\right\rangle_{\mathrm{CS}}, \tag{7}$$

где действие Черна–Саймонса задается выражением

$$S_{\mathrm{CS}}[A] = \frac{\kappa}{4\pi}\int_{S^3} \mathrm{tr}\left(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right). \tag{8}$$

Контуром в петле Вильсона является узел $\mathcal{K}$, а R – представление алгебры $\mathfrak{sl}_N$, соответствующее калибровочной группе $SU(N)$. Также вводится нормированный полином ХОМФЛИ:

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}} = \frac{H_R^{\mathcal{K}}}{H_R^{\circ}}, \tag{9}$$

где в знаменателе контуром интегрирования в петле Вильсона служит незаузленная окружность – тривиальный узел. Оказывается, что ответом для (9) является полином от двух переменных q и a, параметризованный следующим образом:

$$q = e^{\hbar}, \qquad a = e^{N\hbar}, \qquad \hbar := \frac{2\pi i}{\kappa + N}. \tag{10}$$

Пертурбативное разложение по $\hbar$ цветного полинома ХОМФЛИ имеет следующую структуру:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \oint dx_1 \int dx_2 ... \int dx_n \langle\, A^{a_1}(x_1) A^{a_2}(x_2) ... A^{a_n}(x_n)\,\rangle \operatorname{tr}_R(T_{a_1} T_{a_2} ... T_{a_n})\, \hbar^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\dim \mathbb{G}_n} \mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}}\ \mathcal{G}_{n,m}^{R} \right) \hbar^n,
\end{aligned} \tag{11}
$$

где $\dim \mathbb{G}_n$ – число линейно независимых $\mathcal{G}_{n,m}^R$ в каждом порядке n. Основное свойство пертурбативного разложения (11) состоит в том, что зависимости от узла и от представления разделяются. Функции $\mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}}$, зависящие от узла, называются инвариантами Васильева. Зависящие от представления функции $\mathcal{G}_{n,m}^R$ называются групповыми факторами.

Согласно (11), групповые факторы вычисляются как следы от произведений генераторов $\mathfrak{sl}_N$ в конкретном представлении R. Можно показать, что такое произведение генераторов всегда лежит в центре универсальной обертывающей $ZU(\mathfrak{sl}_N)$. Прямое вычисление групповых факторов очень трудоемко, и его сложность быстро растет с ростом порядка n пертурбативного разложения и с усложением представления R. Более того, вычисления приходится проводить отдельно для каждой алгебры $\mathfrak{sl}_N$ и представления R. Мы хотим привести более простой и унифицированный метод вычисления групповых факторов в любом порядке n, используя соображения симметрии.

• Второе определение полинома ХОМФЛИ математическое и связывает его с абстрактной алгеброй хордовых диаграмм $\mathcal{D}$ с помощью линейного отображения, называемого весовой системой алгебры Ли, ассоциированной с представлением R:

$$
\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^{R}\left(\mathcal{D}_{n,m}\right) = \mathcal{G}_{n,m}^{R}\,, \quad \mathcal{D}_{n,m} \in \mathcal{D}\,. \tag{12}
$$

Таким образом, если рассмотреть так называемый интеграл Концевича

$$
I^{\mathcal{K}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m} \mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}}\ \mathcal{D}_{n,m} \right) \hbar^n, \tag{13}
$$

то по линейности весовая система $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^{R}$ переведет его в полином ХОМФЛИ:

$$
\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^{R}\left(I^{\mathcal{K}}\right) = \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q,a)\,. \tag{14}
$$

Пространство хордовых диаграмм $\mathcal{D}$ имеет естественную градуировку по количеству хорд $\mathcal{D} = \bigoplus_n \mathcal{D}_n$. Удобно ввести фильтрацию по числу образующих $\mathfrak{sl}_N$ в центре универсальной обертывающей алгебры $ZU(\mathfrak{sl}_N)$:

$$
\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_3 \subset \mathcal{Z}_4 \subset \cdots \subset ZU(\mathfrak{sl}_N)\,, \tag{15}
$$

где $\mathcal{Z}_k$ состоит из произведений не более чем $2k$ образующих. Таким образом, описание групповой структуры полиномов ХОМФЛИ с математической точки зрения эквивалентно описанию вложений $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}_n) \subset \mathcal{Z}_n$.

• Третье определение полинома ХОМФЛИ тоже математическое и опирается на понятие квантовой универсальной обертывающей $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ и следующие две теоремы. Любое зацепление можно представить в виде замыкания соответствующей косы. $\mathcal{R}$-матрицы $\mathcal{R}_i$, $i = 1, \ldots, m$ определяют представление группы кос Артина $\mathcal{B}_m$ на m нитях:

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{B}_m &\to \mathrm{End}\left(V_{R_1} \otimes \ldots \otimes V_{R_m}\right) , \\ \pi\left(\sigma_i\right) &= \mathcal{R}_i \, , \end{aligned} \tag{16}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}$ – генераторы группы кос $\mathcal{B}_m$. Пусть $\mathcal{L}$ – ориентированное зацепление с L компонентами $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_L$, раскрашенное неприводимыми конечномерными представлениями $V_{R_1}, \ldots, V_{R_L}$ из $U_q(\mathfrak{sl}_N)$, а $\beta_L \in \mathcal{B}_m$ – некоторая коса из m нитей, замыкание которой дает $\mathcal{L}$. Тогда цветной полином ХОМФЛИ согласно подходу Решетихина–Тураева можно определить как следующий квантовый инвариант зацепления $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{L}}_{R_1,\ldots,R_L} = \frac{1}{\mathrm{qdim}(R)} \, {}_q\mathrm{tr}_{V_{R_1}\otimes\cdots\otimes V_{R_m}} \left(\pi\left(\beta_{\mathcal{L}}\right)\right) , \tag{17}$$

где ${}_q\,\mathrm{tr}$ – квантовый след, а $\mathrm{qdim}(R)$ – квантовая размерность представления R. Собственные значения $\mathcal{R}$-матриц известны, поэтому практический метод вычисления полиномов ХОМФЛИ через формализм Решетихина–Тураева состоит в диагонализации соответствующих $\mathcal{R}$-матриц при помощи матриц Рака или же их нормированных элементов – 6j-символов.

В **главе 3** изучаются определенные во второй главе вложения $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}_n) \subset \mathcal{Z}_n$ при помощи наложения ограничений, приходящих из симметрий цветных полиномов ХОМФЛИ. Иными словами, вводится метод построения групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ, универсальный для всех алгебр $\mathfrak{sl}_N$ и их представлений R. В силу того, что в групповой структуре полиномов ХОМФЛИ стоят произведения генераторов, лежащих в $ZU(\mathfrak{sl}_N)$, сами полиномы ХОМФЛИ выражаются через собственные значения операторов Казимира $\mathfrak{sl}_N$, поэтому можно переписать пертурбативное разложение (11) в виде

$$\mathcal{H}^{\mathcal{K}}_R = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{|\Delta|\leq n} \mathcal{C}^R_\Delta \sum_{m=0}^{n-|\Delta|} \left(v^{\mathcal{K}}_{\Delta,m}\right)_n N^m \, , \tag{18}$$

где $\mathcal{C}_\Delta = \prod_i \mathcal{C}_{\Delta_i}$ – инварианты Казимира $\mathfrak{sl}_N$, Δ – диаграмма Юнга без единичных элементов (в $ZU(\mathfrak{sl}_N)$ базисом являются $N-1$ оператор Казимира $\hat{\mathcal{C}}_2$, $\hat{\mathcal{C}}_3$, ..., $\hat{\mathcal{C}}_N$); $\left(v^{\mathcal{K}}_{\Delta,m}\right)_n$ также являются инвариантами Васильева и представляют собой линейные комбинации $\mathcal{V}_{n,m}$ (11).

Предел суммирования по m в (18) диктуется ограничениями, которые следуют из известных симметрий полинома ХОМФЛИ.

Мы нашли аналитическую формулу для инвариантов Казимира $\mathfrak{sl}_N$, справедливую для любого N и представления R:

$$\mathcal{C}_n^R = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{n-m}}{N^m} \binom{n}{m} \left(\left(C_{n-m}^R + \theta_{n-m}^N \right) \left(C_1^R + \theta_1^N \right)^m - \theta_{n-m}^N \left(\theta_1^N \right)^m \right) , \tag{19}$$

где $\theta_k^N = \sum\limits_{i=1}^{N} \left(-i + \frac{1}{2} \right)^k$. Здесь мы использовали вложение $ZU(\mathfrak{sl}_N) \subset ZU(\mathfrak{gl}_\infty)$, и C_k^R – инварианты Казимира $ZU(\mathfrak{gl}_\infty)$:

$$C_k^R = \sum_{i=1}^{\infty} (R_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k \,. \tag{20}$$

Заметим, что эта сумма конечна для любой конечной диаграммы Юнга R ($R_i = 0$ для достаточно больших i).

Однако, инварианты Казимира $\mathfrak{sl}_N$ (19) сингулярны при $N \to 0$. В то же время, разложение (18) должно быть регулярно, так как при $N = 0$ оно должно давать цветной полином Александера. Соображения симметрии и условие конечности (18) при $N = 0$ диктуют следующий мультипликативный базис для полиномов ХОМФЛИ:

$$\mathcal{C}_{[2n]}^R := \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{C_k \left(C_{2n-k} + 2\theta_{2n-k} \right)}{2 \cdot k! (2n-k)!} \,. \tag{21}$$

Регуляризацию каждого $\mathcal{C}_{2n_1+1}^R \mathcal{C}_{2n_2+1}^R$ приходится выполнять отдельно, однако мы предъявляем конкретный алгоритм, дающий в малых порядках:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{[3,3]}^R &:= \frac{1}{N} \left(\frac{8\,\mathcal{C}_{[2]}^3 + \frac{1}{4} N^4 \mathcal{C}_3^2}{N^2} - \mathcal{C}_{[2]}^2 - 12\,\mathcal{C}_{[2]} \mathcal{C}_{[4]} \right) , \\
\mathcal{C}_{[5,3]}^R &:= \frac{1}{N^3} \left(\frac{\frac{1}{16} \mathcal{C}_5 \mathcal{C}_3 N^6 - 8\,\mathcal{C}_{[2]}^4}{N^2} + \frac{4}{3} \mathcal{C}_{[2]}^3 + 36\,\mathcal{C}_{[4]} \mathcal{C}_{[2]}^2 \right) - \frac{2\,\mathcal{C}_{[2]} \mathcal{C}_{[3,3]}}{N^2} - \\
&\quad - \frac{1}{N} \left(\frac{10}{3} \mathcal{C}_{[2]}^3 - \frac{\mathcal{C}_{[2]}^2}{24} - 4\,\mathcal{C}_{[4]} \mathcal{C}_{[2]} - 30\,\mathcal{C}_{[6]} \mathcal{C}_{[2]} - 24\,\mathcal{C}_{[4]}^2 \right) .
\end{aligned} \tag{22}$$

Два типа функций $\mathcal{C}_{[2n]}^R$ и $\mathcal{C}_{[2n_1+1,2n_2+1]}^R$ мультипликативно порождают все элементы Казимира, входящие в пертурбативное разложение в качестве групповых факторов полинома ХОМФЛИ. Эти инварианты Казимира мы обозначаем через $\mathcal{C}_\Delta$ (18), например, $\mathcal{C}_{[3,3,2]} = \mathcal{C}_{[3,3]} \mathcal{C}_{[2]}$.

Далее в **главе 3** мы приводим результаты вычисления на компьютере групповых факторов вплоть до 13 порядка и приходим к гипотезе, что групповая структура цветных полиномов ХОМФЛИ полностью определяется их известными симметриями.

В **главе 4** мы переходим к выводу важных следствий из полученной в предыдущей главе групповой структуры полиномов ХОМФЛИ. Перечислим их кратко ниже.

• Ранее групповые факторы цветных полиномов ХОМФЛИ вычислялись посредством применения весовой системы, ассоциированной с представлением R, к соответствующим хордовым диаграммам (12). Сложность данного алгоритма быстро растет с повышением порядка хордовой диаграммы, и вычисления были проделан только вплоть до 6-го порядка. Так как практически инварианты Васильева вычисляются именно через пертурбативное разложение (11), то и они до недавних пор были известны только до 6-го порядка включительно.

Теперь мы можем выписать новый базис групповых факторов (18) в любом порядке пертурбативного разложения. Соответственно, если мы знаем достаточно много полиномов ХОМФЛИ в разных представлениях для фиксированного узла, то из полученной системы линейных уравнений мы можем найти и все инварианты Васильева данного узла фиксированного порядка. Мы применили данный метод для вычисления инвариантов Васильева для узла 3_1 до 11 порядка включительно и для узла 5_2 до 10 порядка включительно.

• Однако, еще из вычисления групповых факторов полинома ХОМФЛИ видно, что не все инварианты Васильева можно извлечь из его пертурбативного разложения. Уже на 6 уровне появляются два совпадающих групповых фактора:

$$\mathcal{G}_{6,2} = \mathcal{G}_{6,3}\,. \tag{23}$$

Оказывается, что это равенство обобщается на любую простую алгебру Ли с помощью введения параметров Вожеля. Но эти групповые факторы не являются примарными, то есть разлагаются в произведения групповых факторов предыдущих порядков. Поэтому и соответствующие инварианты Васильева тоже можно различить.

Однако начиная с 8 уровня весовая система $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$ перестает различать примарные групповые факторы, поэтому мы не можем получить все примарные инварианты Васильева из пертурбативного разложения полинома ХОМФЛИ. Интересно ответить на вопрос, весовые системы всех ли полупростых алгебр Ли не различают примарные инварианты Васильева начиная с 8 уровня, и в идеале при помощи параметризации Вожеля обобщить групповую структуру полиномов ХОМФЛИ на любую полупростую алгебру Ли. Эти вопросы остаются для следующих исследований.

• Другим важным следствием полученной групповой структуры полиномов ХОМФЛИ, представленным в **главе 4**, является доказательство недавно открытой симметрии цветных полиномов узлов ХОМФЛИ – симметрии "тяни-крюк" . Она следует из совпадения действий трансляций и преобразования "тяни-крюк" на инварианты Казимира $\mathfrak{gl}_\infty$ и из условия трансляционной инвариантности инварианты Казимира $\mathfrak{sl}_N$, составляющих групповые факторы цветных полиномов ХОМФЛИ.

• Также в **главе 4** предъявлен метод нахождения рекурсивных соотношений на цветные полиномы ХОМФЛИ. Они интересны тем, что из них можно получить так называемые квантовые A-полиномы, которые сами являются инвариантами узла и классический предел которых задают спектральную кривую в теории Черна–Саймонса. Описанный в данной главе метод применен к нахождению рекурсивных соотношений для симметрических полиномов Джонса для торических узлов $T[2, 2k+1]$:

$$\begin{aligned} & q(q^{2r+1} - q^{-2r-1})\mathcal{J}_{r+1} + (q^{-2r(2k+1)-6k-2}(q^{2r+1} - q^{-2r-1}) - \\ & - q^{-2k}(q^{2r+3} - q^{-2r-3}))\mathcal{J}_r + (q^{-4r(k+1)-4(k+1)} - q^{-4kr-4k+2})\mathcal{J}_{r-1} = 0\,, \end{aligned} \tag{24}$$

Наоборот, зная эти соотношения, можно найти уравнения на инварианты Васильева или на групповые факторы. Инварианты Васильева младших порядков полностью определяются и совпадают с уже известными ответами для торических узлов.

• И наконец, мы получаем несколько следствий для цветных полиномов Александера – полиномов ХОМФЛИ при $a = 1$. Во-первых, мы устанавливаем наличие еще не открытой симметрии для полинома Александера, следующей из ограничений на групповую структуру, получаемых из симметрии сопряжения полинома ХОМФЛИ. Эта симметрия не имеет прямого аналога для случая $N = 0$, поэтому конкретный вид симметрии, накладывающей известные ограничения на полином Александера, еще предстоит найти.

Во-вторых, мы исследовали обратные правила, т.е. N-деформацию полиномов Александера к полиномам ХОМФЛИ:

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) \xrightarrow[\text{rules}]{N} \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}\left(q, q^N\right)\,. \tag{25}$$

А именно, мы нашли аналитическую деформацию части групповых факторов полинома Александера, которая переводит их в групповые факторы полинома ХОМФЛИ $\mathcal{C}_{[2n]}$.

В третьих, для однокрюковых представлений для полинома Александера было известно скейлинговое соотношение:

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) - \mathcal{A}_{[1]}^{\mathcal{K}}\left(q^{|R|}\right) = 0, \qquad \text{где } R = \left[r, 1^L\right]. \tag{26}$$

Мы обобщили его на случай произвольного числа крюков в представлении. Оказывается, что в таком случае красивое соотношение (26) сильно усложняется: в нем появляется бесконечное число достаточно сложных слагаемых. Кроме того, число членов остается бесконечным для любого количества крюков большего одного. Природа этих соотношений все еще остается загадочной.

В **главе 5** мы исследуем свойства дифференциального разложения симметрического полинома ХОМФЛИ:

$$\mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}} = \sum_{j=0}^{r} \frac{[r]!}{[j]![r-j]!} G_{[j]}^{\mathcal{K}}(a,q)\{a/q\} \prod_{i=0}^{j-1}\{aq^{r+i}\}\,, \tag{27}$$

где $G_{[j]}^{\mathcal{K}}(a,q)$ – полиномы Лорана, $\{x\} := x - x^{-1}$ и $[n] := \{q^n\}/\{q\}$. Это разложение является прямым следствием теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}_N$.

Коэффициенты $G_{[k]}$ получается далее разложить на множители. Их степень факторизации зависит от параметра узла $\delta^{\mathcal{K}}$, называемого *дефектом*:

$$G_{[s]}^{\mathcal{K}^{(\delta)}}(a,q) = \mathcal{G}_{[s]}^{\mathcal{K}^{(\delta)}}(a,q) \cdot \prod_{i=1}^{\mathrm{floor}\left(\frac{s-1}{\delta+1}\right)} \left\{aq^{i-1}\right\}\ . \tag{28}$$

Мы доказали гипотезу о том, что степень фундаментального полинома Александера равна $\delta + 1$. Доказательство непосредственно следует из дифференциального разложения (27) и однокрюкового скейлингового соотношения для полинома Александера (26).

В ходе нашего анализа мы получили ряд важных следствий.

Во-первых, оказывается, что коэффициенты дифференциального разложения $G_{[s]}$ симметрического полинома Александера полностью определяются коэффициентами дифференциального разложения фундаментального полинома Александера. Из получающихся соотношений можно найти так называемые квантовые C-полиномы. Оказывается, что они образуют полный набор в случае узлов дефекта 0. Это следует из того факта, что для таких узлов в качестве симметрических полиномов Александера реализуются все возможные целочисленные полиномы Лорана по q. Для узлов больших дефектов вопрос еще не до конца исследован.

Во-вторых, мы исследовали гипотезу о сохранении дефекта. Она гласит, что дефект узла не меняется, если в нем вместо любого пересечения вставить антипараллельную косу. На самом деле, ее формулировка требует уточнения: дефект не может увеличиваться, но иногда может уменьшаться. Как мы установили, особенности дефекта можно детектировать путем изменения степени полинома Александера. Мы классифицировали некоторые случаи уменьшения дефекта и появления дополнительной факторизации коэффициентов $G_{[s]}$, более сильной, чем это обусловлено стандартной формулой (28).

В-третьих, мы исследовалия соотношения между коэффициентами дифференциального разложения в более сложном случае – несимметрических однокрюковых представлений.

В **главе 6** мы обнаруживаем новую симметрию квантовых 6j-символов (и матриц Рака) – симметрию «тяни-крюк». Введем преобразование «тяни-крюк» в терминах диаграмм Юнга. Диаграмма Юнга помещается внутрь подходящего толстого крюка $(K+M|M)$ для некоторых целых чисел K и M. Введем следующие обозначения: первые K строк параметризуем их длиной R_i, $i = 1, \ldots, K$, остальные строки параметризуем переменными $\alpha_i = R_i - (i-K)+1$, $\beta_i = R'_{i-K} - i + 1$, $i = K+1, \ldots, K+M$. Преобразование «тяни-крюк» $\mathbf{T}_\epsilon^{(K+M|M)}$ преобразует диаграмму Юнга внутри толстого крюка:

$$
\begin{aligned}
R_i &\longrightarrow R_i - \epsilon\,,\\
\alpha_i &\longrightarrow \alpha_i - \epsilon\,,\\
\beta_i &\longrightarrow \beta_i + \epsilon\,,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

где ϵ – соответствующий сдвиг диаграммы.

Собственные значения $\mathcal{R}$-матриц выражаются через квадратичные инварианты Казимира $U_q(\mathfrak{sl}_N)$, и как было нами показано при изучении групповой структуры цветных полиномов ХОМФЛИ, они не меняются при преобразовании «тяни-крюк». Гипотеза о собственных значениях утверждает, что матрицы Рака равны в базисах, где $\mathcal{R}$-матрицы диагональны, если два набора нормированных собственных значений соответствующих $\mathcal{R}$-матриц совпадают. Отсюда следует, что и коэффициенты Рака должны быть инвариантны относительно преобразования «тяни-крюк»:

$$
U\left[\begin{array}{cc|c} R_1 & R_2 & R_{12} \\ R_3 & R_{123} & R_{23} \end{array}\right] = U\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{T}_{\epsilon_1}(R_1) & \mathbf{T}_{\epsilon_2}(R_2) & \mathbf{T}_{\epsilon_1+\epsilon_2}(R_{12}) \\ \mathbf{T}_{\epsilon_3}(R_3) & \mathbf{T}_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}(R_{123}) & \mathbf{T}_{\epsilon_2+\epsilon_3}(R_{23}) \end{array}\right]. \tag{30}
$$

Важно подчеркнуть, что симметрия «тяни-крюк» – это первая найденная симметрия матриц Рака, которая действует на любых представлениях и работает для случаев с кратностями.

Гипотеза о собственных значениях была доказана для $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ и в случае узлов для $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ для матриц размером до 5×5 без кратностей. Поэтому в этих случаях и симметрия «тяни-крюк» для квантовых 6j-символов является доказанной.

С другой стороны, симметрия «тяни-крюк» для матриц Рака следует из одноименной симметрии полиномов ХОМФЛИ в случае узлов. И наоборот, теперь уже для случая зацеплений полиномы ХОМФЛИ (17) состоят из квантовых размерностей и собственных значений $\mathcal{R}$-матриц, которые инвариантны относительно преобразования «тяни-крюк». А матрицы Рака оказываются инвариантными относительно этого преобразования согласно гипотезе о собственных значениях. Таким образом, все структурные элементы полинома ХОМФЛИ инвариантны относительно симметрии «тяни-крюк», и мы можем констатировать, что она выполняется и для случая зацеплений – для которого она даже не была сформулирована.

И наконец, в качестве подтверждения наличия симметрии «тяни-крюк» у квантовых 6j-символов мы приводим крайне нетривиальные примеры ее выполнения для случаев представлений с кратностями. А именно мы рассматриваем случай $R = [3,2] \to \mathbf{T}_1^{(2|1)}([3,2]) =$

$[2,1,1] = [3,1]'$. Среди всех получившихся диаграмм Юнга R_{123} есть четыре нетривиальные матрицы с кратностями, которые в сумме дают 99 6j-символов:

1) $V_{[7,5,1,1,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \to V_{[8,2,1,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$;

2) $V_{[8,5,1,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \to V_{[7,2,1,1,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$;

3) $V_{[8,6,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \to V_{[6,2,2,1,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$;

4) $V_{[7,6,1,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \to V_{[7,2,2,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$.

Во всех этих случаях существует базис, в котором соответствующие матрицы Рака равны.

В **Заключении** приводятся результаты работы и основные выводы.

Заключение

В ходе выполнения диссертационной работы исследовались различные свойства петель Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса с калибровочной группой $SU(N)$ и их составляющих – квантовых 6j-символов. В рамках исследований использовались различные структуры и свойства данных петель Вильсона, в частности, их пертурбативное и дифференциальное разложения, а также подход Решетихина–Тураева. В данной диссертационной работе были получены следующие результаты.

- На основе известных симметрий цветных полиномов ХОМФЛИ относительно преобразований представления мы нашли аналитические формулы для мультипликативного базиса групповой структуры полинома ХОМФЛИ для любого ранга алгебры $\mathfrak{sl}_N$ и для ее произвольного представления R. Мультипликативный базис групповых факторов состоит из четных и нечетных собственных значений операторов Казимира $\mathfrak{sl}_N$. Для четных инвариантов Казимира нам удалось найти универсальную формулу, а для нечетных мы предъявляем их алгоритм нахождения в произвольном порядке. В найденном нами базисе групповых факторов мы привели метод построения групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ в любом порядке пертурбативного разложения.

- Мы также посчитали групповые факторы полиномов ХОМФЛИ на компьютере с использованием известных значений полиномов ХОМФЛИ для разных узлов и представлений вплоть до 13 уровня пертурбативного разложения. Все групповые факторы, полученные нами из соображений симметрий полинома ХОМФЛИ, присутствуют в пертурбативном разложении полиномов ХОМФЛИ до 13 порядка включительно. Исходя из этого мы сформулировали гипотезу о том, что групповая структура цветных полиномов ХОМФЛИ полностью фиксируется известными для них симметриями.

- Так как мы предъявили универсальный метод нахождения групповых факторов полиномов ХОМФЛИ и предъявили их явно вплоть до 13 порядка, теперь мы можем находить инварианты Васильева порядков выше ранее достигнутого 6 порядка. Таким образом, мы описали метод нахождения инвариантов Васильева высших порядков с использованием найденного базиса групповых факторов. Мы применили этот метод к вычислению инвариантов Васильева узла 3_1 до 11 порядка включительно и узла 5_2 до 10 порядка включительно.

- В шестом порядке пертурбативного разложения цветных полиномов ХОМФЛИ совпадают два групповых фактора. Иными словами, весовая система алгебры Ли $\mathfrak{sl}_N$ не различает два групповых фактора на шестом уровне. С использованием параметризации П. Вожеля мы показали, что весовая система любой простой алгебры Ли не различает эти два групповых фактора.

- Мы предъявили новый метод нахождения рекурсивных соотношений для цветных полиномов ХОМФЛИ с использованием найденного нами базиса групповых факторов. Из таких рекурсивных соотношений можно получить так называемые квантовые A-полиномы. Мы привели конкретный пример нахождения рекурсивных соотношений для полиномов Джонса торических узлов $T[2, 2k+1]$ в симметрических представлениях.

- Симметрия сопряжения для цветного полинома ХОМФЛИ неприменима напрямую к цветному полиному Александера, однако существенно ограничивает его групповую структуру. Таким образом, мы выявили, что существует еще не открытая симметрии цветного полинома Александера, которая так же ограничивает его групповые факторы, как и симметрия сопряжения полинома ХОМФЛИ. Также, нам удалось найти аналитическую N-деформацию четных групповых факторов цветных полиномов Александера в групповые факторы полиномов ХОМФЛИ. Исходя из того, что полученные нами групповые факторы цветных полиномов ХОМФЛИ меняются простым и универсальным способом относительно определенного перемасштабирования представления мы смогли обобщить однокрюковое скейлинговое соотношение цветного полинома Александера на случай произвольного представления.

- Используя однокрюковое скейлинговое соотношение для полинома Александера и его дифференциальное разложение, мы доказали гипотезу о связи дефекта дифференциального разложения цветного полинома ХОМФЛИ со степенью фундаментального полинома Александера. Мы обсудили полноту целочисленных параметров симметрических полиномов Александера. В частности, в случае дефекта-0 мы нашли, что все целые значения реализуются уже для семейства твистованных узлов. Также, мы получили следствия для гипотезы о сохранении дефекта при антипараллельной эволюции. А именно, мы классифицировали некоторые случаи понижения дефекта при антипараллельной эволюции узлов. Мы вычислили C-полиномы для симметрических полиномов Александера. В случае узлов дефекта-0 набор данных C-полиномов является полным. Также, мы нашли соотношения на коэффициенты дифференциального разложения цветных полиномов Александера в случае однокрюковых представлений, вне симметрических.

- Мы исследовали первую симметрию квантовых 6j-символов, применимую для произвольных представлений, включая случаи с кратностями, – симметрию "тяни-крюк". С одной стороны, мы показали, что эта симметрия следует из гипотезы о собственных значениях. В некоторых случаях, в которых гипотеза о собственных значениях доказана, можно считать доказанной и симметрию "тяни-крюк" квантовых 6j-символов. С другой стороны, так как полиномы ХОМФЛИ содержат в себе квантовые 6j-символы согласно подходу Решетихина–Тураева и мы доказали, что в случае узлов полином ХОМФЛИ симметричен относительно преобразования "тяни-крюк", то и квантовые 6j-символы должны наследовать данную симметрию. И наоборот, показав наличие симметрии "тяни-крюк" у квантовых 6j-символов, мы выдвинули гипотезу о наличии симметрии "тяни-крюк" у полиномов ХОМФЛИ, но уже в случае зацеплений. В последнем случае эта симметрия полиномов ХОМФЛИ не была ни доказана, ни даже наблюдена. Мы привели конкретные примеры справедливости симметрии "тяни-крюк" квантовых 6j-символов для нетривиальных случаев представлений с вырождениями. С помощью непосредственных свидетельств в пользу симметрии "тяни-крюк" для матриц Рака, мы получили подтверждение гипотезы о собственных значениях.

Основные публикации по теме диссертации

1. E. Lanina, A. Sleptsov, N. Tselousov, “Implications for colored HOMFLY polynomials from explicit formulas for group-theoretical structure”, Nuclear Physics B 974, 115644 (2022)

2. E. Lanina, A. Morozov, “Defect and degree of the Alexander polynomial”, The European Physical Journal C 82, 1022 (2022)

3. E. Lanina, A. Sleptsov, “Tug-the-hook symmetry for quantum 6j-symbols”, Physics Letters B 845, 138138 (2023)

Список литературы

[1] M. Alvarez и J.M.F. Labastida. “Numerical knot invariants of finite type from Chern-Simons perturbation theory”. В: *Nucl. Phys. B* 433 (1995), с. 555—596. arXiv: `hep-th/9407076 [hep-th]`.

[2] M. Alvarez и J.M.F. Labastida. “Analysis of observables in Chern-Simons perturbation theory”. В: *Nucl. Phys. B* 395 (1993), с. 198—238. arXiv: `hep-th/9110069 [hep-th]`.

[3] E. Guadagnini, M. Martellini и M. Mintchev. “Perturbative Aspects of the Chern-Simons Field Theory”. В: *Phys. Lett. B* 227 (1989), с. 111—117.

[4] A.M. Polyakov. “Quark Confinement and Topology of Gauge Groups”. В: *Nucl. Phys. B* 120 (1977), с. 429—458.

[5] V.G. Turaev и O.Y. Viro. “State sum invariants of 3 manifolds and quantum 6j symbols”. В: *Topology* 31 (1992), с. 865—902.

[6] P. Ramadevi, T.R. Govindarajan и R.K. Kaul. “Knot invariants from rational conformal field theories”. В: *Nucl. Phys. B* 422 (1994), с. 291—306. arXiv: `hep-th/9312215 [hep-th]`.

[7] H. Ooguri и C. Vafa. “Knot invariants and topological strings”. В: *Nucl. Phys. B* 577 (2000), с. 419—438. arXiv: `hep-th/9912123 [hep-th]`.

[8] J.M.F. Labastida и M. Marino. “Polynomial invariants for torus knots and topological strings”. В: *Commun. Math. Phys.* 217 (2001), с. 423—449. arXiv: `hep-th/0004196 [hep-th]`.

[9] J.W. Alexander. “Topological invariants of knots and links”. В: *Transactions of the American Mathematical Society* 30.2 (1928), с. 275—306.

[10] J.H. Conway. “An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties”. В: *Computational problems in abstract algebra*. 1970, с. 329—358.

[11] V.F.R. Jones. “A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras”. В: *Bull. Am. Math. Soc.* 12 (1985), с. 103—111.

[12] E. Lanina, A. Sleptsov и N. Tselousov. “Implications for colored HOMFLY polynomials from explicit formulas for group-theoretical structure”. В: *Nucl. Phys. B* 974 (2022), с. 115644. arXiv: `2111.11751 [hep-th]`.

[13] A. Sleptsov. “Vassiliev invariants for pretzel knots”. В: *International Journal of Modern Physics A* 31.27 (2016), с. 1650156. arXiv: `1512.07192 [hep-th]`.

[14] S. Chmutov, S. Duzhin и J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*. Cambridge University Press, 2012.

[15] T. Van Ritbergen, A.N. Schellekens и J.A.M. Vermaseren. В: *International Journal of Modern Physics A* 14.01 (1999), с. 41—96. arXiv: `9802376 [hep-ph]`.

[16] T. Van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren и S.A. Larin. “The Four loop beta function in quantum chromodynamics”. В: *Phys. Lett. B* 400 (1997), с. 379—384. arXiv: `hep-ph/9701390 [hep-th]`.

[17] T. Luthe, A. Maier, P. Marquard и Y. Schröder. “Towards the five-loop Beta function for a general gauge group”. В: *JHEP* 07 (2016), с. 127. arXiv: `1606.08662 [hep-ph]`.

[18] E. Guadagnini. “Schwinger–Dyson functional in Chern–Simons theory”. В: *Nucl. Phys. B* 912 (2016), с. 238—248. arXiv: `1602.02936 [hep-th]`.

[19] E. Guadagnini и F. Rottoli. “Perturbative BF theory”. В: *Nucl. Phys. B* 954 (2020), с. 114987. arXiv: `2002.06131 [hep-th]`.

[20] B. Fiol, J. Martfnez-Montoya и A. Rios Fukelman. “The planar limit of $\mathcal{N}=2$ superconformal quiver theories”. В: *JHEP* 08 (2020), с. 161. arXiv: `2006.06379 [hep-th]`.

[21] B. Fiol, J. Martínez-Montoya и A. Rios Fukelman. “Wilson loops in terms of color invariants”. В: *JHEP* 05 (2019), с. 202. arXiv: `1812.06890 [hep-th]`.

[22] L. Bishler, Saswati Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, Vivek Kumar Singh, P. Ramadevi и A. Sleptsov. “Difference of Mutant Knot Invariants and Their Differential Expansion”. В: *JETP Lett.* 111.9 (2020), с. 494—499. arXiv: `2004.06598 [hep-th]`.

[23] L. Bishler, Saswati Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, P. Ramadevi, Vivek Kumar Singh и A. Sleptsov. “Distinguishing Mutant knots”. В: *J. Geom. Phys.* 159 (2021), с. 103928. arXiv: `2007.12532 [hep-th]`.

[24] Hugh R. Morton и Peter R. Cromwell. “Distinguishing mutants by knot polynomials”. В: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 05.02 (1996), с. 225—238.

[25] L. D. Landau и E. M. Lifshitz. *Quantum mechanics: non-relativistic theory.* Т. 3. Elsevier, 2013.

[26] P. Arnold. “Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in sequential bremsstrahlung: From large-N QCD to N=3 via the SU(N) analog of Wigner 6-j symbols”. В: *Physical Review D* 100.3 (2019), с. 034030. arXiv: `1904.04264 [hep-th]`.

[27] K. T. Hecht. “A simple class of U(N) Racah coefficients and their application”. В: *Communications in Mathematical Physics* 41.2 (1975), с. 135—156.

[28] Fo So Chang, J. B. French и To Ho Thio. “Distribution methods for nuclear energies, level densities, and excitation strengths”. В: *Annals of Physics* 66.1 (1971), с. 137—188.

[29] J. M. Aroca, H. Fort и R. Gambini. “Path integral loop representation of 2+1 lattice non-Abelian gauge theories”. В: *Physical Review D* 58.4 (1998), с. 045007. arXiv: `hep-lat/9703007 [hep-lat]`.

[30] A. V. Gorshkov, M. Hermele, V. Gurarie, C. Xu, P. S. Julienne, J. Ye, P. Zoller, E. Demler, M. D. Lukin и A. M. Rey. “Two-orbital SU(N) magnetism with ultracold alkaline-earth atoms”. В: *Nature physics* 6.4 (2010), с. 289—295. arXiv: `0905.2610 [cond-mat.quant-gas]`.

[31] A. C. Durst, G. Yang-Mejia и R. N. Bhatt. “Quadrupolar interactions between acceptor pairs in p-doped semiconductors”. В: *Physical Review B* 101.3 (2020), с. 035202. arXiv: `1910.06480 [cond-mat.mtrl-sci]`.

[32] G. Moore и N. Seiberg. “Classical and quantum conformal field theory”. В: *Communications in Mathematical Physics* 123.2 (1989), с. 177—254.

[33] Zodinmawia и P. Ramadevi. “SU(N) quantum Racah coefficients and non-torus links”. В: *Nuclear Physics B* 870.1 (2013), с. 205—242. arXiv: `1107.3918 [hep-th]`.

[34] N. Yu. Reshetikhin. “Invariants of tangles 1”. В: *unpublished preprint* (1987).

[35] E. Guadagnini, M. Martellini и M. Mintchev. “Chern-Simons holonomies and the appearance of quantum groups”. В: *Physics Letters B* 235.3-4 (1990), с. 275—281.

[36] N. Yu. Reshetikhin и V. G. Turaev. “Ribbon graphs and their invaraints derived from quantum groups”. В: *Communications in Mathematical Physics* 127.1 (1990), с. 1—26.

[37] V. Turaev. “The Yang-Baxter equation and invariants of links”. В: *New Developments in the Theory of Knots* 11 (1990), с. 175.

[38] N. Yu. Reshetikhin и V. G. Turaev. “Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups”. В: *Inventiones mathematicae* 103.1 (1991), с. 547—597.

[39] G. Racah. “Theory of complex spectra. II”. В: *Physical Review* 62.9-10 (1942), с. 438.

[40] E. Wigner. *Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra.* Т. 5. Elsevier, 2012.

[41] B. Ponsot и J. Teschner. “Clebsch–Gordan and Racah–Wigner Coefficients for a Continuous Series of Representations of $U_q(sl(2,R))$”. В: *Communications in Mathematical Physics* 224.3 (2001), с. 613—655. arXiv: `math/0007097 [math.QA]`.

[42] S. E. Derkachov и V. P. Spiridonov. “The 6j-Symbols for the SL(2,C) Group”. В: *Theoretical and Mathematical Physics* 198.1 (2019), с. 29—47. arXiv: `1711.07073 [math-ph]`.

[43] A. N. Kirillov и N. Yu. Reshetikhin. “Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q-orthogonal polynomials and invariants of links”. В: *Infinite dimensional Lie algebras and groups* 7 (1989), с. 285.

[44] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov и And. Morozov. “Eigenvalue hypothesis for Racah matrices and HOMFLY polynomials for 3-strand knots in any symmetric and antisymmetric representations”. В: *International Journal of Modern Physics A* 28.03n04 (2013), с. 1340009. arXiv: `1209.6304 [math-ph]`.

[45] A. Anokhina и And. Morozov. “Cabling procedure for the colored HOMFLY polynomials”. В: *Theoretical and Mathematical Physics* 178.1 (2014), с. 1—58. arXiv: `1307.2216 [hep-th]`.

[46] V. Alekseev, And. Morozov и A. Sleptsov. “Interplay between symmetries of quantum 6j-symbols and the eigenvalue hypothesis”. В: *Letters in Mathematical Physics* 111.2 (2021). arXiv: `1909.07601 [hep-th]`.

[47] A. Mironov и A. Morozov. “Universal Racah matrices and adjoint knot polynomials: Arborescent knots”. В: *Physics Letters B* 755 (2016), с. 47—57. arXiv: `1511.09077 [hep-th]`.

[48] S. Dhara, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh и A. Sleptsov. “Eigenvalue hypothesis for multistrand braids”. В: *Physical Review D* 97.12 (2018). arXiv: `1711.10952 [hep-th]`.

[49] L. Bishler, And. Morozov, Sh. Shakirov и A. Sleptsov. “On the block structure of the quantum R-matrix in the three-strand braids”. В: *International Journal of Modern Physics A* 33.17 (2018), с. 1850105. arXiv: `1712.07034 [hep-th]`.

[50] And. Morozov и A. Sleptsov. "New Symmetries for the $U_q(sl_N)$ 6-j Symbols from the Eigenvalue Conjecture". В: *JETP Letters* 108.10 (2018), с. 697—704. arXiv: 1905.01876 [hep-th].

[51] V. Alekseev, And. Morozov и A. Sleptsov. "Multiplicity-free $U_q(sl_N)$ 6-j symbols: Relations, asymptotics, symmetries". В: *Nuclear Physics B* 960 (2020), с. 115164. arXiv: 1912.13325 [hep-th].

[52] A. Mironov и A. Morozov. "Eigenvalue conjecture and colored Alexander polynomials". В: *Eur. Phys. J. C* 78.4 (2018), с. 284. arXiv: 1610.03043 [hep-th].

[53] E. Lanina и A. Sleptsov. "Tug-the-hook symmetry for quantum 6j-symbols". В: *Physics Letters B* 845 (2023), с. 138138. arXiv: 2210.07874 [hep-th].

[54] V. Mishnyakov, A. Sleptsov и N. Tselousov. "A new symmetry of the colored Alexander polynomial". В: *Annales Henri Poincare* 22.4 (2021), с. 1235—1265. arXiv: 2001.10596 [hep-th].

[55] E. Lanina, A. Sleptsov и N. Tselousov. "Chern-Simons perturbative series revisited". В: *Phys. Lett. B* 823 (2021), с. 136727. arXiv: 2105.11565 [hep-th].

[56] *http://katlas.org*.

[57] P. Vogel. "Algebraic structures on modules of diagrams". В: *Journal of Pure and Applied Algebra* 215.6 (2011), с. 1292—1339.

[58] A. Mironov, R. Mkrtchyan и A. Morozov. "On universal knot polynomials". В: *Journal of High Energy Physics* 2016.2 (2016). arXiv: 1510.05884 [hep-th].

[59] S. Garoufalidis и Thang T.Q. Le. "The colored Jones function is q-holonomic". В: *Geometry Topology* 9.3 (2005), 1253–1293. arXiv: math/0309214 [math.GT].

[60] S. Garoufalidis, Aaron D. Lauda и Thang T. Q. Lê. "The colored HOMFLYPT function is q-holonomic". В: *Duke Math. J.* 167.3 (2018), с. 397—447. arXiv: 1604.08502 [math.GT].

[61] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov и An. Morozov. "HOMFLY and superpolynomials for figure eight knot in all symmetric and antisymmetric representations". В: *JHEP* 07 (2012), с. 131. arXiv: 1203.5978 [hep-th].

[62] A. Mironov, S. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov и A. Sleptsov. "Coloured Alexander polynomials and KP hierarchy". В: *Phys. Lett. B* 783 (2018), с. 268—273. arXiv: 1805.02761 [hep-th].

[63] V. Mishnyakov и A. Sleptsov. “Perturbative analysis of the colored Alexander polynomial and KP soliton τ-functions”. В: *Nuclear Physics B* 965 (2021), с. 115334. arXiv: `1906.05813 [hep-th]`.

[64] Q. Chen. “Cyclotomic expansion and volume conjecture for superpolynomials of colored HOMFLY-PT homology and colored Kauffman homology”. В: (2015). arXiv: `1512.07906 [math.QA]`.

[65] M. Kameyama, S. Nawata, R. Tao и H. Derrick Zhang. “Cyclotomic expansions of HOMFLY-PT colored by rectangular Young diagrams”. В: *Letters in Mathematical Physics* 110.10 (2020), с. 2573—2583. arXiv: `1902.02275 [math.GT]`.

[66] Yu. Berest, J. Gallagher и P. Samuelson. “Cyclotomic Expansion of Generalized Jones Polynomials”. В: (2019). arXiv: `1908.04415 [math.QA]`.

[67] A. Beliakova и E. Gorsky. “Cyclotomic expansions for $\mathfrak{gl}_N$ knot invariants via interpolation Macdonald polynomials”. В: (2021). arXiv: `2101.08243 [math.RT]`.

[68] Ya. Kononov и A. Morozov. “On the defect and stability of differential expansion”. В: *JETP Letters* 101.12 (2015), с. 831—834. arXiv: `1504.07146 [hep-th]`.

[69] A. Morozov и N. Tselousov. “Evolution properties of the knot’s defect”. В: (апр. 2022). arXiv: `2204.05977 [hep-th]`.

[70] E. Lanina и A. Morozov. “Defect and degree of the Alexander polynomial”. В: *Eur. Phys. J. C* 82.11 (2022), с. 1022. arXiv: `2208.01585 [hep-th]`.