

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ.
П.Н. ЛЕБЕДЕВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Ильин Антон Сергеевич

Стохастический транспорт в изотропных потоках

Специальность 1.3.3– теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени доктора
физико–математических наук

Москва 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

Соколов Дмитрий Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Кичатинов Леонид Леонидович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник института солнечной и земной физики РАН (сибирское отделение).

Петросян Аракел Саркисович, доктор физико-математических наук, профессор, зав. сектором Теоретических исследований отдела Физики планет Московского физико-технического института (физтех).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук

Защита состоится 27.05.2024 в 12.00 на заседании диссертационного совета 24.1.262.04 при Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53. С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте www.lebedev.ru.

Автореферат разослан « » 2024 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

24.1.262.04 , к.ф.-м.н.

Чернышов Д.О.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Гладкий стохастический поток – это случайное гладкое векторное поле, заданное в 3х-мерном евклидовом пространстве \mathbb{E}^3 . Каждая реализация такого поля порождает семейство гладких отображений \mathbb{E}^3 в себя. Такое семейство формально описывает континуальную совокупность «вмороженных жидких частиц», движущихся в потоке. В нашей работе мы ограничимся рассмотрением изотропных потоков, вероятностная мера которых инвариантна относительно группы движений \mathbb{E}^3 . Важным приложением этой абстрактной математической конструкции является теория однородной и изотропной турбулентности, последовательное построение которой по мнению многих авторов является последней нерешенной задачей классической физики¹.

Сама по себе эта задача очень сложна, поэтому большое значения имеют модели, позволяющие приблизиться к ее решению. К таким моделям можно, например, отнести т.н. турбулентность «без давления» Бюргерса² [2].

Другие важные модели приходят из теории турбулентного транспорта, где поток считается заданным стохастическим полем и изучается эволюция вспомогательных пассивных (т.е. не влияющих на поток) полей, которые могут диффундировать и одновременно переноситься стохастическим потоком. Важность таких моделей для теории турбулентности состоит, например, в том, что с их помощью были получены теоретические доказательства существования аномального скейлинга структурных функций

¹ U.Frisch, "Turbulence. The Legacy of A.N.Kolmogorov" Cambridge University Press, (1995)

² Polyakov A M Phys. Rev. E 52 6183 (1995)

транспортируемых полей и показано, что, вообще говоря, он никак не связан с каскадом турбулентного потока³.

Однако, не следует думать, что турбулентный транспорт является лишь «полигоном» для теории турбулентности. Важнейшее практическое значение теории турбулентного транспорта заключается, например, в объяснении природы мелкомасштабных магнитных полей у астрофизических объектов: звезд, галактик, галактических кластеров и т.д.⁴ Хорошо известно, что материя, из которой состоят эти объекты (электрически нейтральная плазма), часто допускает описание в рамках магнитной гидродинамики⁵, более того, если мы интересуемся лишь самой возможностью генерации (т.н. турбулентное динамо), на начальном этапе эволюции можно считать, что магнитное поле мало и не оказывает обратного влияния на среду. Формальная постановка задачи такова:

1. Среда представляет собой проводящую жидкость, в которой возбуждены турбулентные пульсации различных масштабов, на фоне этой жидкости эволюционирует «пассивное» магнитное поле.

2. Уравнение эволюции при имеет вид

$$\partial_t B^p + (u^k \partial_k) B^p - (B^k \partial_k) u^p - \kappa \partial^2 B^p = 0, \quad (1)$$

где $u^k(r, t)$ – случайное поле скоростей потока, $B^k(r, t)$ – вектор магнитной индукции, $\kappa = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ – коэффициент магнитной диффузии, σ – проводимость жидкости, c – скорость света.

³ G. Falkovich, K. Gawędzki, and M. Vergassola Rev. Mod. Phys. 73, 913 (2001)

⁴ E. N. Parker, Cosmic Magnetic Fields, Their Origin and Activity (Clarendon, Oxford, 1979)

⁵ Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитные поля в астрофизике. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, (2006).

Основной вопрос теории турбулентного динамо теперь можно сформулировать так: каковы должны быть условия на поле скоростей и коэффициент магнитной диффузии, чтобы флуктуации магнитного поля становились неустойчивыми и происходил их экспоненциальный рост?

В случае бесконечной проводимости (нулевой диффузии) и гладкого поля скоростей ответ дается теоремой Альфвена⁶, линии индукции магнитного поля в таких условиях оказываются заморожены в поток, при этом длина замороженной линии в гладком потоке экспоненциально растет⁷, вместе с ней растет и вектор магнитной индукции. Однако, наличие сколь угодно малой диффузии может в корне поменять ситуацию; теперь линии индукции уже не заморожены, из-за диффузионного перезамыкания генерация поля может быть подавлена. На этот эффект впервые обратил внимание Дж. Бэтчелор⁸. Таким образом для ответа на вопрос о возможности динамо необходимо подробно исследовать стохастическое уравнение (1).

Другой важной задачей теории турбулентного транспорта является теория пассивного скаляра⁹. В качестве скалярного поля, может выступать поле температуры, поле пассивной примеси, концентрация бактерий и т.д. Простейшее уравнение, описывающее эволюцию такого поля, имеет вид

$$(\partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\partial} - \kappa \partial^2) \phi = 0.$$

Это уравнение описывает затухание плотности скаляра в процессе молекулярной диффузии и турбулентной адвекции. По аналогии с теорией стохастической турбулентности Навье-Стокса можно рассмотреть уравнение с внешней накачкой

⁶ H. Alfvén, Nature. 150 (3805): 405 (1942)

⁷ J. M. Ottino, W. E. Ranz, C. W. Macosko, AIChE J, 27 565 (1981)

⁸ G.K. Batchelor, Proc. Roy. Soc. London A 261, 405 (1950)

⁹ G.K. Batchelor, J. Fluid. Mech. 5, 113 (1959)

$$(\partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\partial} - \kappa \partial^2) \phi = f,$$

где накачка f определяет рождение и смерть частиц в системе (или потока подводимого извне тепла, в случае поля температуры). В отличие от уравнения без накачки, для такого уравнения существует статистически стационарное случайное решение $\phi(\vec{r}, t)$. Анализ такого решения демонстрирует его нетривиальные свойства, в частности, весьма неожиданно оказалось, что аномальный скейлинг структурной функции скалярного поля присутствует даже в гауссовой модели поля скоростей¹⁰. Таким образом стало понятно, что он, вообще говоря, никак не связан с каскадом в самом турбулентном потоке.

С задачами турбулентного транспорта связана еще одна классическая проблема: изучение явления перемежаемости¹¹. Как известно, с точки зрения теории случайных процессов, классическая термодинамика имеет дело с аддитивными шумами, для которых, в силу центральной предельной теоремы, всегда работает приближение гауссовости и дельта-коррелированности, причем флуктуации наблюдаемых малы в термодинамическом пределе. Однако, многие явления в естественной природе, экономике и даже в социологии, являются мультипликативными, в том смысле, что наблюдаемые представляются не как сумма независимых случайных величин, а как их произведение. Характерным свойством таких систем является перемежаемость; наблюдаемые в них определяются экспоненциально редкими, но чрезвычайно сильными флуктуациями. Простейшей мультипликативной системой является стохастический поток, эволюцию которого можно представить как последовательность композиций

¹⁰ M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev Phys. Rev. E 51, 5609 (1995)

¹¹ Зельдович Я. Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. УФН. 152 1 (1987)

случайных отображений. По этой причине стохастические потоки являются естественным инструментом для изучения явления перемежаемости.

Современное состояние исследований.

Первой успешной попыткой построения самосогласованной теории динамо в однородном и изотропном потоке с ненулевой диффузией принадлежит Р. Крайчнану¹² и А. Казанцеву¹³. В качестве модельного потока они выбрали гауссово, дельта-коррелированное по времени однородное и изотропное случайное поле.

$$\langle u_i(r, t) u_j(r', t') \rangle = D_{ij}(r - r') \delta(t - t'),$$

Из условия изотропии и несжимаемости следует, что тензор D_{ij} зависит от одной скалярной функции $K(r)$:

$$D_{ij}(r) = 2K(r)\delta_{ij} - rK'(r)(\delta_{ij} - n_i n_j), \quad n_i = r_i/r.$$

С. Вайнштейн и Л. Кичатинов¹⁴ определили эту функцию соотношением

$$K(0) - K(r) = S_2(r),$$

где $S_2(r) = \int dt \left\langle \left(\left(\vec{V}(r, t) - \vec{V}(0, 0) \right) \vec{n} \right)^2 \right\rangle$ – интегральная структурная

функция реального (не модельного) потока $V(r, t)$, с ненулевым корреляционным временем $\tau_c(r)$, зависящем от масштаба и определенным так, что $S_2(r) = \tau_c(r) s_2(r)$, где $s_2(r)$ - одновременная колмогоровская структурная функция потока $V(r, t)$:

$$s_2(r) = \left\langle \left(\left(\vec{V}(r, t) - \vec{V}(0, 0) \right) \vec{n} \right)^2 \right\rangle.$$

¹² R. Kraichnan, Phys. Fluids 10 1417 (1967)

¹³ А.П. Казанцев, ЖЭТФ, 53(5 (11)), 1806, (1967)

¹⁴ S. I. Vainshtein, L. L. Kichatinov, J. Fluid Mech. 168, 73 (1986)

Сам Казанцев с помощью развитой им диаграммной техники получил замкнутое уравнение, связывающее парный коррелятор магнитных флуктуаций с функцией $S_2(r)$. Это уравнение теперь называется уравнением Казанцева. Современный способ его вывода основывается не на диаграммной технике, а на более удобном формализме, который впервые применил Е. Новиков для вывода закона Колмогорова в рамках функционального подхода к теории однородной и изотропной турбулентности¹⁵. С точки зрения теории стохастических процессов, это своеобразное «континуальное интегрирование по частям» которое позволяет «расщеплять» корреляции гауссового, дельта-коррелированного шума с его произвольными функционалами. Известно обобщения этого формализма на случай негауссовых и не дельта-коррелированных шумов¹⁶. Ответ получается в результате некоторого остроумного «пересуммирования» ряда Тейлора для аналитического функционала; он имеет вид бесконечного функционального ряда из средних значений вариационных производных, со связными корреляционными функциями шума, в качестве коэффициентных функций.

Уравнение Казанцева является однородным параболическим уравнением, его традиционный анализ заключается в замене переменных, благодаря которой оно сводится к евклидовому уравнению Шредингера с массой, зависящей от пространственной переменной. Наличие отрицательных уровней энергии говорит об экспоненциальном росте начальных флуктуаций. Известно, что для степенной интегральной структурной функции $S_2(r) \sim r^\xi$, с показателем скейлинга $\xi > 1$, уравнение Казанцева имеет растущие моды¹⁷. Например, при большом числе Прандтля (малой диффузии), когда определяющую роль играет поведение $S_2(r)$ на вязком масштабе

¹⁵ E. A. Novikov, J. Exptl. Theoret. Phys. (U.S.S.R.) 47, 1919 (1965) [Sov. Phys. JETP 20, 1290 (1965)]

¹⁶ V. I. Klyatskin, Dynamics of Stochastic Systems (Elsevier, Amsterdam, 2005)

¹⁷ А.П. Казанцев, ЖЭТФ, 53(5 (11)), 1806, (1967)

турбулентности, где $\xi = 2$, модель Казанцева-Крайчнана предсказывает экспоненциальный рост магнитных флуктуаций. Для расчетов в рамках теории Казанцева при малом числе Прандтля и большом числе Рейнольдса необходимо знать поведение интегральной структурной функции в инерционном интервале турбулентного потока. В рамках модели Вайнштейна-Кичатинова, эффективный показатель скейлинга интегральной структурной функции $S_2(r)$ в инерционном интервале турбулентности полагается равным $\xi = 4/3$. Это число получается из предположения о колмогоровского скейлинге структурной функции $s_2(r) \sim r^{2/3}$ и о колмогоровском скейлинге корреляционного времени $\tau_c(r) \sim r^{2/3}$. Так как $4/3 > 1$ теория Казанцева здесь также предсказывает экспоненциальный рост флуктуаций. Заметим, что чаще всего получение точных аналитических результатов в этих моделях связано с предположением о возможности выделения главного масштаба, с постоянным скейлингом. Однако это, во всяком случае, не верно при конечных числах Прандтля и Рейнольдса. Поэтому аналитическое описание процесса генерации магнитного поля в этих случаях часто сталкивается с техническими сложностями¹⁸.

С другой стороны, для обычного евклидова уравнения Шредингера с фиксированной массой давно существует формализм, упрощающий поиск и анализ вакуумного решения (нулевой моды). Он носит название «стохастического квантования»¹⁹ и сводится к установлению связи между уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова для некоторого нелинейного стохастического уравнения Ланжевена и евклидовым уравнением Шредингера. Возникает естественное желание найти аналогичную связь с параболическим уравнением Казанцева.

¹⁸ J. Schober, D. Schleicher, S. Bovino, & R.S. Klessen, Phys. Rev. E 86(6), 066412 (2012)

¹⁹ G. Parisi, Y.S. Wu, Sci. Sinica, 24 483 (1981), В.Я. Файнберг, ТМФ, 149 3 2006

Несмотря на успешное применение модели Казанцева-Крайчнана для объяснения природы мелкомасштабного динамо, есть причины, по которым она не может считаться до конца удовлетворительной. Как видно из (1) задача динамо имеет дело с мультипликативным шумом; из простейших одномерных примеров известно, что для таких систем «не работает центральная предельная теорема», в том смысле, что влияние высших куммулянтов шума не исчезает при $t \rightarrow \infty$. Так как реальное поле скорости, соответствующее, например, потоку Навье-Стокса, негауссово, модель Казанцева-Крайчнана не является асимптотически точной при $t \rightarrow \infty$.

Для того, чтобы работать с негауссовыми гладкими полями скорости существует альтернативный формализм, он носит название «метод квази-лагранжевых траекторий». Впервые он был представлен в работе В. Белиничера и В. Львова²⁰, и далее нашел широкое применение как в теории турбулентного транспорта, так и в некоторых моделях турбулентности.²¹ Этот метод позволяет следить за «вмороженной» эволюцией или за эволюцией локализованных возмущений транспортируемого поля (т.н. блобов) при малой диффузии и на начальном, вязком этапе, пока размер возмущения не превышает Колмогоровского диссипативного масштаба потока и можно пользоваться линейным разложением поля скоростей вблизи центра блоба. В работе²² авторы используют это же приближение для описания эволюции безграничных однородных и изотропных мелкомасштабных флуктуаций, однако, в такой постановке метод требует более тщательного обоснования, так как не ясно, почему в таких условиях можно пользоваться линейным разложением. Идея такого обоснования была уже у Х. Моффата и П.

²⁰ V. I. Belinicher and V. S. L'vov, Sov. Phys. JETP 66, 303 (1987).

²¹ K. P. Zybin, V. A. Sirota, A. S. Il'in, and A. V. Gurevich, Sov. Phys. JETP 105, 455 (2007); K. P. Zybin, V.A. Sirota, Physics-USpekhi, 58 6 (2015)

²² M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov and M. Vergassola Phys. Rev. Lett. 83, 4065 (1999)

Саффмана²³ которые, собственно, и ввели понятие «блоб», рассмотрев на качественном уровне начальный этап развития однородных и изотропных флуктуаций как эволюцию ансамбля невзаимодействующих блобов. Далее, на примере простейшей модели эта же идея развивается И. Колоколовым²⁴. Полное и последовательное обоснование метода «стохастической декомпозиции» дано в работе [10].

Задача транспорта на вязком этапе сводится к описанию замороженного в поток касательного репера, который в процессе движения подвергается случайным линейным преобразованиям.

Точнее говоря, нас будет интересовать эволюция флага репера, т.е. последовательности вложенных друг в друга его гиперграней s_k с возрастающими размерностями $k = 1, 2, 3$.

В работе²⁵ было показано, что однородные и изотропные флуктуации слабо диффузного скалярного поля в 3d-несжимаемом потоке на вязком этапе эволюции выражаются через элементы флага:

$$\varphi^2(t) \sim \min\{s_1^{-1}(t), s_2^{-1}(t)\},$$

а, в работе²⁶[8] найдено выражение для однородных и изотропных мелкомасштабных флуктуаций магнитного поля в среде с высокой проводимостью; оно также содержит элементы флага:

$$B^2(t) \sim \min\left\{\frac{s_1^2(t)}{s_2(t)}, \frac{s_2^2(t)}{s_1(t)}\right\}.$$

Таким образом, описание эволюции флага необходимо для решения задач стохастического транспорта.

²³ H.K. Moffat and P.J. Saffman, Phys. Fluids 7 (1), 155 (1964)

²⁴ I.V. Kolokolov, J. Phys. A: Math. Theor. 50, 155501 (2017)

²⁵ E. Balkovsky and A. Fouxon, Phys. Rev. E 60, 4164 (1999)

²⁶ M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov and M. Vergassola Phys. Rev. Lett. 83, 4065 (1999)

Человеческий опыт говорит, что для лучшего понимания какого-либо явления, имеет смысл рассмотреть его в максимальной общности, поэтому, в дальнейшем, мы не будем ограничиваться 2d и 3d-потоками и будем говорить об эволюции флага в любых размерностях. Движение замороженного в поток репера следует описывать с помощью т.н. оператора эволюции P , он действует в касательных пространствах d -мерного евклидова пространства \mathbb{E}^d и, с математической точки зрения, является дифференциалом потока (матрицей Якоби) $P_p^k(x, t) = \frac{\partial r^k(x, t)}{\partial x^p}$ (рис.1.).

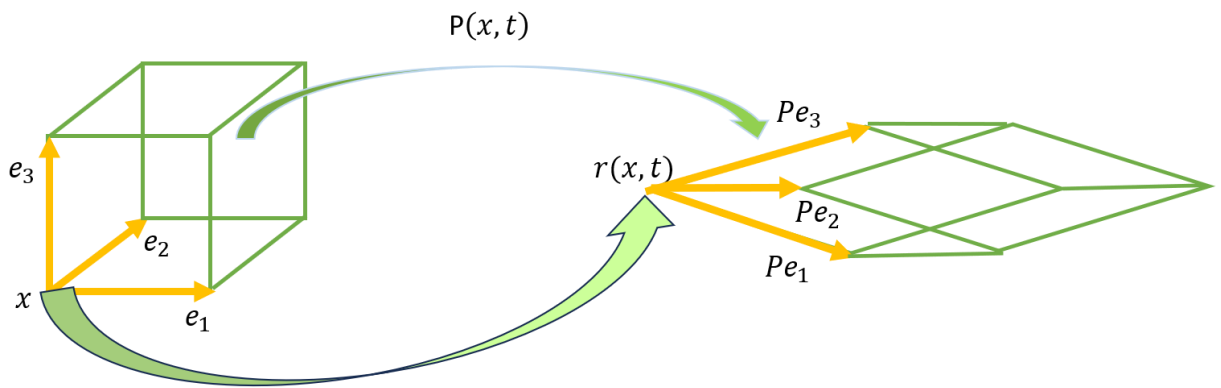


Рис.1

Уравнение для оператора эволюции имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \mathcal{A}(x, t) P(x, t), \quad (2)$$

где $\mathcal{A}_p^k(x, t) = \partial_p u^k(r(x, t), t)$ – лагранжев тензор градиентов скорости потока, т.е. обычный эйлеров тензор $\partial_p u^k(r, t)$, взятый на траектории замороженной частицы $r(x, t)$, с начальной координатой x . Для несжимаемых, изотропных и стационарных потоков, $\mathcal{A}(x, t)$ является стационарным изотропным матричным процессом, его статистика не зависит от x . Таким образом, уравнение эволюции (2) является стохастическим дифференциальным уравнением со стационарным матричным мультипликативным шумом.

Главными величинами, необходимыми для описания стохастической эволюции замороженного флага являются его характеристические корреляторы $\langle s_1^{m_1}(t) \dots s_d^{m_d}(t) \rangle$; квадраты площадей гиперграней флага равны угловым минорам матрицы Грамма $P^T P$ (рис.2)

$$s_1^2(t) = \|P(t)e_1\|^2,$$

$$s_2^2(t) = \|P(t)e_1 \wedge P(t)e_2\|^2, \dots,$$

$$s_k^2(t) = \|P(t)e_1 \wedge \dots \wedge P(t)e_k\|^2$$

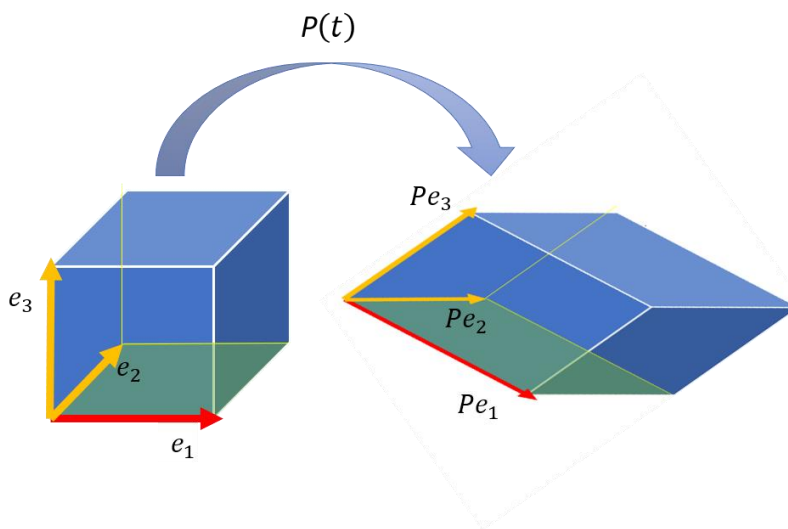


Рис.2.

Вычисление этих корреляторов должно проходить в два этапа:

1.) По известной статистике поля скоростей находится статистика $\mathcal{A}(x, t)$.
2.) По известной статистике $\mathcal{A}(x, t)$ находятся характеристические корреляторы.

Аналитическое решение 1.) возможно лишь для «максимально стохастических потоков», когда скорости в разные моменты времени независимы. В работе [10] показано, что такие потоки являются асимптотически точными, во всяком случае, для систем с большими числами

Прандтля. В других случаях их можно считать, если и не асимптотически точными, то достаточно реалистичными моделями поля скоростей.

Формальное решение задачи 2.) также хорошо известно, это т.н. мультипликативный интеграл Вольтерра²⁷, континуальное произведение матриц, или, в квантово-механической терминологии, Т-экспонента:

$$P(t) = \mathcal{T} \left\{ e^{\int_0^t \mathcal{A}(\tau) d\tau} \right\} = \prod_{\tau=0}^t (1 + \mathcal{A}(\tau) d\tau).$$

Это решение никак не ограничено предположениями о корреляционном времени процесса $\mathcal{A}(\tau)$, однако, из-за некоммутативности матричного произведения, получение из него информации о характеристических корреляторах является сложной задачей.

Первое соображение, позволяющее судить о характере непрерывной эволюции флага, состоит в следующем: если разбить время эволюции на большое число N одинаковых непересекающихся интервалов, размер которых, тем не менее, превышает характерное корреляционное время потока, то мультипликативный интеграл Вольтерра от стационарного случайного матричного процесса $\mathcal{A}(x, t)$ приближенно можно представить в виде произведения одинаково распределенных случайных независимых матриц, равных интегралу Вольтера по каждому интервалу:

$$P(t) = \prod_{k=1}^N Q_k, \text{ где } Q_k = \prod_{\tau=t_{k-1}}^{t_k} (1 + \mathcal{A}(\tau) d\tau).$$

Описание предельных свойств таких произведений является классической математической проблемой, рассмотренной еще Г. Ферстенбергом²⁸ и В. Тутубалиным²⁹. Они описали некоторые предельные свойства случайного флага, в частности, доказали «некоммутативный закон больших чисел»,

²⁷ Gantmacher, F.R.: Matrix Theory, 2nd edn. AMS, Providence (1990)

²⁸ Furstenberg, H.: Trans. Am. Math. Soc. 108, 377 (1963)

²⁹ Tutubalin, V.N.: Theory Probab. Appl. 22, 203 (1978)

утверждающий, что с вероятностью единица существуют неслучайные пределы

$$\lambda_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \frac{s_k(N)}{s_{k-1}(N)}, \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d.$$

Набор $\{\lambda_k\}$ называется ляпуновским спектром.

Другое определение ляпуновского спектра было дано В. Оселедцем в его работе, посвященной мультипликативной эргодической теореме³⁰, вскоре С. Молчанов и В. Тутубалин³¹ показали, что оба определения совпадают.

Явное вычисление ляпуновского спектра изотропно распределенных матриц было впервые проделано Н. Ньюманом³², который показал, в этом случае

$$\lambda_k = \langle \ln \frac{s_k(1)}{s_{k-1}(1)} \rangle.$$

Несмотря на то, что качественные свойства эволюция флага становятся ясны из решения задачи в дискретном времени, остаётся не ясно, как найти точное решение задачи 2.), иными словами, как определить статистику матриц Q_k , по известной статистике $\mathcal{A}(x, t)$.

Для решения этой задачи необходимо перейти к описанию флага в непрерывном времени. Явное выражение для ляпуновского спектра в непрерывном времени для изотропных, гауссовых и дельта-коррелированных потоков было получено в работе П. Баксендэйла и Т. Е. Харрисса³³, в рамках регуляризации Ито. Позже этот результат был повторен А. Гамбой и И. Колоколовым³⁴ в рамках теоретико-полевого подхода с использованием регуляризации Стратоновича.

³⁰ Oseledets, V.I.: Trans. Moscow Math. Soc. 19, 197–231 (1968)

³¹ Молчанов С.А., Тутубалин В.Н., Теория вероятности и ее приложения, 29 2 (1984)

³² N. Newman, Commun. Math. Phys. 103, 121 (1986)

³³ P. Baxendale, T.E. Harris, Ann. Probab, 14 4 (1986)

³⁴ Gamba, A., Kolokolov, I.: J. Stat. Phys. 85, 489 (1996)

Оказалось, что в несжимаемом случае оба способа регуляризации дают одинаковые ответы

$$\lambda_k = 2D \left(\frac{d+1}{2} - k \right).$$

Однако, в сжимаемом случае ответы оказываются разными. Заметим, что регуляризацию Стратоновича следует считать более корректной с физической точки зрения. Это связано с так называемой теоремой Вонга-Закаи³⁵, из которой следует что регуляризация Стратоновича соответствует предельному переходу, в котором рассматривается шум с конечным корреляционным временем, которое в конце вычислений стремится к нулю.

Подводя итог, можно сказать, что программа явного вычисления характеристических корреляторов флага по статистике поля скоростей потока была в полной мере решена лишь для гауссовой модели Крайчнана.

Однако, хорошо известно, что реальный турбулентный поток является негауссовым. Например, в трехмерной гауссовой модели Крайчнана $\lambda_2 = 0$, в то время, как численные эксперименты³⁶ показывают, что в турбулентности Навье-Стокса $\lambda_2/\lambda_1 \approx 0.25$. Как мы уже упоминали, исследование негауссовых потоков представляется очень важной задачей.

Перейдем теперь еще к одной важной особенности процессов, происходящих в стохастических потоках - перемежаемости. С этим явлением оказываются связаны некоторые специфические законы сохранения. Из теоремы Оселедца известно, что площади граней замороженного флага в среднем экспоненциально растут, однако, всегда существуют экспоненциально редкие лагранжевы траектории, на которых некоторые элементы флага убывают. Это происходит из-за мультипликативности

³⁵ E. Wong, M. Zakai, Ann. Math. Statist. 36 5 (1965)

³⁶ Johnson P. L., Meneveau C., Physics of Fluids, 27 8 (2015)

процесса переноса в потоке. В результате, достаточно высокие отрицательные степени $\langle s_k^{-m_k}(t) \rangle$ должны расти. Граничные показатели M_k соответствуют так называемым «стохастическим интегралам движения» $\langle s_k^{-M_k}(t) \rangle = 1$. Я.Б. Зельдовичем, А.А. Рузмайкиным, С.А. Молчановым и Д.Д. Соколовым в работе³⁷ был найден один универсальный (т.е. независимый от свойств потока) асимптотический стохастический интеграл движения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle s_1^{-d}(N) \rangle = 1.$$

Позднее Г. Фалькович и А. Фришман³⁸ показали, что этот интеграл является на самом деле не асимптотическим, а точным, кроме того, он остается таковым даже в нестационарных несжимаемых потоках. Нахождение других стохастических интегралов для сжимаемых и несжимаемых потоков, крайне важно для понимания динамики замороженных структур, так как их существование накладывает сильные ограничения на возможный вид характеристических корреляторов флага [10].

В математической традиции явление перемежаемости в системах с мультипликативным шумом обычно связывают с теорией больших уклонений.³⁹ Основной вопрос этой теории – связь эргодического среднего (т.е. среднего по времени) $\bar{\xi}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) dt$ и матожидания $\langle \xi \rangle$ (т.е. среднего по ансамблю) некоторого стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Еще Крамер показал⁴⁰, что для при выполнении некоторых, не слишком обременяющих условий на вероятностную меру, выборочное среднее дискретной последовательности независимых, одинаково распределенных случайных величин $\xi(n)$

³⁷ Ya. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin, S. A. Molchanov and D. D. Sokoloff J. Fluid Mech. 144,1 (1984)

³⁸ G. Falkovich, A. Frishman, PRL 110, 214502 (2013)

³⁹ S. R. S. Varadhan, Ann. Probab. 36, 397 (2008)

⁴⁰ Cramér, Harald (1938). Colloque consacré à la théorie des probabilités, Part 3, Actualités scientifiques et industrielles (in French). 731: 5–23.

$$\bar{\xi}(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi(n)$$

«удовлетворяет принципам больших уклонений» в том смысле, что его плотность вероятности

$$\langle \delta(x - \bar{\xi}(N)) \rangle \sim e^{-TJ(x)}, \text{ где}$$

где J - т.н. функция Крамера, выпуклая функция у которой точка минимума совпадает с матожиданием $\langle \xi \rangle$.

Аналогично дискретному случаю, для процессов в непрерывном времени, при выполнении вполне естественных требований (сводящихся, в сущности, к конечности корреляционного времени процесса $\xi(t)$), плотность вероятности эргодического среднего также имеет вид

$$\langle \delta(x - \bar{\xi}(T)) \rangle \sim e^{-TJ(x)},$$

где выпуклую функцию J , с минимумом в матожидании $\langle \xi \rangle$ тоже называют функцией Крамера (или rate function).

Из этого свойства плотности вероятности, в первую очередь следует собственно эргодичность, т.е. сходимость по вероятности эргодического среднего $\bar{\xi}(T)$ к матожиданию $\langle \xi \rangle$, при $T \rightarrow \infty$, и центральная предельная теорема, т.е. утверждение о гауссовости малых отклонений $\bar{\xi}(T)$ от $\langle \xi \rangle$. Но, что более важно, функция Крамера позволяет оценивать вероятности экспоненциально редких событий, когда при больших, но конечных T разность $\bar{\xi}(T) - \langle \xi \rangle$ не мала. В системах с мультипликативным шумом именно такие события определяют наблюдаемые величины⁴¹.

В теории стохастического транспорта, соответствующие эргодические средние называются обобщенными ляпуновскими показателями (finite time Lyapunov exponents) и определяются как

⁴¹ N. G. Van Kampen, Physica 74, 215 (1974)

$$\bar{\xi}_k(T) = \frac{1}{T} \ln \frac{s_k(T)}{s_{k-1}(T)}.$$

Их совместная функция Крамера оказывается важнейшей характеристикой потока, она связана преобразованием Лежандра с нормированным на T логарифмом характеристических корреляторов флага и ее нахождение крайне полезно для описания стохастической эволюции флага.

Еще одной темой, затронутой в диссертации, является поведение систем типа «реакция-диффузия», помещенных в турбулентный поток. Обычные уравнения типа «реакция-диффузия» описывают эволюцию одно- или многокомпонентных скалярных полей с локальным нелинейным взаимодействием и диффузией. Они естественным образом возникают при описании процессов реакции в химии, биологии, экологии, теории горения, плазме, ядерной физике и т.д. Одним из наиболее известных примеров является уравнение Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова (Фишера-КПП)⁴². Важной особенностью этих систем является наличие бегущих волн, соответствующих переходу между различными фазовыми состояниями. Что будет, если такую систему погрузить в вязкий случайный поток?

Вязкая эволюция скалярных локализованных возмущений без самодействия изучалась в работе⁴³. Авторами было обнаружено явление насыщения инкрементов высших моментов поля; оно возникает благодаря сильной перемежаемости: высшие моменты плотности определяются экспоненциально редкими событиями, когда объем скалярного «блоба» сохраняется, в результате инкремент убывания моментов плотности оказывается равен инкременту убывания вероятности таких событий.

⁴² A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii, and N. S. Piskunov, Bulletin of Moscow State University Series A: Mathematics and Mechanics 1, 1 (1937).

⁴³ Balkovsky, E., Fouxon, A.: Phys. Rev. E 60, 4164 (1999)

Интересно рассмотреть влияние турбулентного переноса на скорость реакции и на распространение волны “переключения”, с одной стороны, и влияние динамической нелинейности на свойства статистических моментов плотности, с другой.

Цели диссертационной работы

Настоящая диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Развитие формализма, аналогичного «стохастическому квантованию», который бы упрощал анализ асимптотики решений уравнения Казанцева-Крайчана для конечных чисел Прандтля и Рейнольдса.
2. Дальнейшее развитие метода Лагранжевых траекторий для негауссовых потоков.
3. Дальнейшее развитие теории больших уклонений для эргодических средних наблюдаемых величин, эволюционирующих в негауссовых гладких изотропных потоках.
4. Развитие методов, позволяющих судить об эволюции локализованных возмущений магнитного поля (блобов) на инерционном этапе.
5. Изучение характера эволюции систем типа реакция-диффузия в гладких стохастических потоках.
6. Описание геометрии гладких гиперповерхностей, эволюционирующих в d -мерных изотропных потоках.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие

Задачи

1. Найти условия на коэффициентные функции параболического уравнения, при выполнении которых существует замена переменных, сводящее его к уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова для

- некоторого вспомогательного нелинейного стохастического уравнения Ланжевена.
2. Проанализировать с этой точки зрения уравнения Казанцева-Крайчнана для пассивного вектора и пассивного скаляра.
 3. Определить инкременты затухания (роста) для различных интегральных структурных функций потока.
 4. Найти явные решения уравнений, описывающих развитие локализованных возмущений скалярного и магнитного полей в гладком потоке на вязком этапе эволюции.
 5. Найти статистику обобщенных ляпуновских экспонент произведений изотропно распределенных случайных матриц в дискретном времени.
 6. Для произведений в непрерывном времени, найти замену переменных в пространстве матричных функций и соответствующий функциональный якобиан, позволяющие в явном виде перенести вероятностную меру с компонент лагранжевого тензора градиентов на обобщенные ляпуновские показатели эволюционирующего флага.
 7. Построить «некоммутативную теорию больших уклонений» при конечном корреляционном времени, т.е. найти связь функции Крамера компонент лагранжевого тензора градиентов и функции Крамера обобщенных ляпуновских показателей флага.
 8. Доказать асимптотическую точность дельта-приближения для матричного уравнения эволюции изотропного флага.
 9. Построить дельта-модель поля скоростей, обобщающую гауссову модель Крайчнана на случай T-неинвариантного потока (V3-модель).
 10. Провести явные вычисления статистических моментов флага и эволюционирующих полей в рамках V3-модели.
 11. Доказать теорему о «стохастической декомпозиции», утверждающую, что однородные и изотропные флуктуации могут быть представлены в

- виде некогерентной суммы блобов, локализованных в разных точках пространства.
12. Найти связь между плотностью энергии изотропных флуктуаций и энергии изолированного блоба.
 13. Выявить топологическую природу турбулентного динамо на инерционном этапе при малой диффузии (больших числах Прандтля).
 14. Вычислить моменты скалярного поля с самодействием типа «реакция-диффузия» в гладком случайном изотропном поле скоростей, на вязком этапе эволюции.
 15. Объяснить природу насыщения моментов плотности и популяции в разных режимах адвекции.
 16. Доказать универсальное свойство симметрии характеристических моментов случайного изотропного флага.
 17. Основываясь, на этом свойстве, получить серию точных стохастических интегралов движения случайного флага в изотропном потоке.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Критерий существования стохастического уравнения Ланжевена, для которого уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова заменой переменных может быть сведено к уравнению Казанцева.
2. Новый способ нахождения инкремента роста и затухания решений уравнения Казанцева для скаляра и вектора, в случае произвольной интегральной структурной функции потока.
3. Выражения для характеристических корреляторов произведения случайных, изотропно распределенных матриц в дискретном времени.
4. Связь функции Крамера матричных элементов лагранжевого тензора градиентов и функции Крамера обобщенных ляпуновских показателей в непрерывном времени.

5. Теорема об асимптотической точности дельта-моделей при вычислении характеристических моментов флага.
6. V3-модель T-неинвариантного потока.
7. Выражения для моментов полей, эволюционирующих в V3-потоке.
8. Теорема о стохастической декомпозиции безграничных изотропных флуктуаций.
9. «Энергетическое соответствие», связывающее плотность энергии однородных флуктуаций с энергией блага на вязком и инерционном этапе эволюции.
10. Выявление механизмов мелкомасштабного динамо на вязком и инерционном этапах эволюции. Указание на принципиально разную природу этих механизмов, несмотря на близкий инкремент роста.
11. Описание эволюции локализованного блага на инерционном этапе.
12. Объяснение отличия в характере эволюции 3d и квази-2d флуктуаций.
13. Выражение для моментов скалярной плотности и полной популяции при турбулентной адвекции систем типа «реакция-диффузия».
14. Эффект насыщения инкрементов высших моментов и объяснение его причин.
15. Теорема об универсальных свойствах симметрии характеристических показателей изотропного флага.
16. Универсальные интегралы движения гиперповерхностей в изотропных многомерных потоках.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора

Все результаты, изложенные в данной диссертации, являются оригинальными. Новизна рассматриваемых проблем, а также достоверность результатов привело к существенному продвижению в понимании природы турбулентного динамо, свойств матричных уравнений с изотропным мультипликативным шумом, влияния T-необратимости

потока на эффект динамо, особенностей турбулентной адвекции в системах типа «реакция-диффузия», природы и свойств перемежаемости в изотропных гладких стохастических потоках, геометрической природы лагранжевых интегралов движения гиперповерхностей в многомерных изотропных потоках.

Полученные автором результаты регулярно используются и далее развиваются российскими и зарубежными научными группами. Приведенные в диссертации результаты получены самим автором или при его непосредственном участии и легли в основу научных статей, сделанных в соавторстве с российскими и иностранными коллегами.

Практическая значимость

Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для исследования и описания широкого круга явлений в теории турбулентного переноса, для валидации численного счета в теории турбулентности, для построения различных моделей турбулентности, для описания галактического, солнечного и земного магнетизма, в теории матричных уравнений с мультипликативным шумом, в теории больших уклонений и перемежаемости, при изучении асимптотики временных средних для потоков переноса и схожих систем, в эргодической теории и наконец, в теории лагранжевой турбулентности.

Публикации и апробация работы

Основные результаты по теме диссертации получены в 2015–2023 годах и изложены в 12 публикациях в рекомендованных ВАК периодических изданиях для диссертаций (Physics Letters A – 1 статья, Успехи Физических Наук – 1 статья, Physica Scripta – 1 статья, Europhysics Letters – 1 статья, Journal of Statistical Physics – 2 статьи, Physics of Fluids – 2 статьи, Physical Review E – 4 статьи.)

Результаты работ, которые легли в основу данной диссертации, доклады вались на семинарах и конференциях, проводимых в различных ведущих научных центрах:

На научных сессиях Совета РАН по нелинейной динамике XXVI-XXX, Москва, 2019-22,

на XIII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, СПб 2023,

а также на семинарах ОТФ ФИАН, матфака ВШЭ, на семинаре центра перспективных исследований им. И.М. Кричевера (Сколтех) и семинаре по проблемам солнечно-земной физики в Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн имени Н. В. Пушкова РАН.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 11 глав и заключения. Для удобства, вспомогательные справочные материалы, а также некоторые технические детали вычислений сосредоточены в 3-х приложениях. Полный объём диссертации с приложениями составляет 169 страниц с двумя рисунками и одной таблицей. Список литературы содержит 79 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение

посвящено обоснованию актуальности исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, обзору научной литературы по изучаемым проблемам, формулировкам целей, задач, а также научной новизны и практической значимости представляемой работы.

В первой главе содержится формальная постановка задач теории турбулентного транспорта.

Вторая глава посвящена более простому, по сравнению с оригинальным, выводу уравнения Казанцева-Крайчнана (КК), для транспорта скаляра и вектора в гауссовом и дельта-коррелированном по времени потоке. Это уравнение является дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа и связывает интегральную структурную функцию поля скоростей $S_2(r)$ и инвариантный парный коррелятор транспортируемого поля:

$$\partial_t \phi(r, t) = \left(\frac{4S(r)}{r} + 2S'(r) \right) \phi'(r, t) + 2S(r) \phi''(r, t) - \text{пассивный скаляр}$$

$$\frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} = 2 \left(S''(r) + \frac{4}{r} S'(r) \right) Q(r, t) + \left(2S'(r) + \frac{8}{r} S(r) \right) Q'(r, t) +$$

$$2S(r) Q''(r, t) - \text{пассивное магнитное поле,}$$

$$\langle B_i(\vec{x}, t) B_j(\vec{y}, t) \rangle = 2Q(r, t) \delta_{ij} - rQ'(r, t) (\delta_{ij} - n_i n_j),$$

$$S(r) = \kappa + \frac{1}{4} S_2(r), \kappa - \text{коэффициент диффузии.}$$

Смысл повторять заново вывод известного уравнения заключается в том, что способ, представленный в диссертации, далее был обобщен на негауссовы потоки⁴⁴.

Третья глава посвящена разработке нового метода нахождения асимптотик уравнения КК. Обычный метод его анализа заключается в сведении к евклидовому уравнению Шредингера с массой, зависящей от масштаба. В настоящей работе предложен альтернативный метод анализа, который основывается на изучении критерия возможности сведения уравнения КК к уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова, описывающего эволюцию плотности вероятности решений некоторого вспомогательного

⁴⁴ Копыев А В, Киселев А М, Ил'ян А С, Сирота В А and Зыбин К Р АрЖ 927 172 (2022)

стохастического нелинейного уравнения Ланжевена. Для этого, после обсуждения правильной последовательности предельных переходов в стохастических дифференциальных уравнениях выводится формула Фейнмана-Каца⁴⁵ для произвольного однородного параболического уравнения. Эта формула дает представление для соответствующего пропагатора (функции Грина) в виде континуального интеграла по некоторому стохастическому процессу. Из анализа этих представлений для уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова и общего параболического уравнения находится искомый критерий [9]:

Пусть имеется параболическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -u(x)\psi(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(x)\psi(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2(x)\psi(x, t)), \quad (1)$$

где $u(x), \lambda(x), \sigma^2(x)$ - заданные гладкие функции, $\sigma^2(x) > 0$.

Поставим ему в соответствие функцию (эффективный потенциал)

$$2u_{eff}(x) = \frac{2u(x)}{\sigma^2(x)} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} \right) + \left(\frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} \right)^2$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y''(x) = 2u_{eff}(x)y(x).$$

Тогда, если это уравнение имеет неотрицательные на всей оси решения, то с помощью замены

$$\psi(x, t) = e^{\int \frac{\lambda(x)}{\sigma^2(x)} dx} y(x) \rho(x, t),$$

параболическое уравнение (1) преобразуется к уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятности $\rho(x, t)$ ланжевенской частицы, координата которой удовлетворяет нелинейному уравнению Ланжевена

⁴⁵ Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003

$$\dot{x}(t) = \sigma^2(x) \frac{d}{dx} \ln(y(x)) - \frac{1}{2} \sigma(x) \frac{\partial}{\partial x} \sigma(x) + \sigma(x) \xi(t),$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(0) \xi(t) \rangle = \delta_\epsilon(t), \epsilon \rightarrow 0.$$

ϵ - корреляционное время гауссова шума $\xi(t)$.

Смысл этого критерия в том, что при условии его выполнения, уравнение (1) не будет иметь растущих мод, т.к. полная вероятность ланжевеновской частицы не может расти и равна единице.

Четвертая глава посвящена применению этого формализма для получения асимптотик уравнения КК для пассивного скаляра и вектора (магнитного поля).

Для КК эффективный потенциал принимает вид [9]

$$2u_{eff}(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \ln S(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \ln S(x) + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dx} \ln S(x) \right)^2 - \text{пассивный скаляр}$$

$$2u_{eff}(x) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \ln S(x) - \frac{2}{x} \frac{d}{dx} \ln S(x) - \frac{3}{4} \left(\frac{d}{dx} \ln S(x) \right)^2 + \frac{2}{x^2} \quad \text{пассивное магнитное поле.}$$

С помощью этих выражений находятся инкременты роста (убывания) решений для различных интегральных структурных функций потока, в частности для модели Вайнштейна-Кичатинова. Эти вычисления являются своеобразным «трамплином», позволившим в дальнейшем перейти к применению предложенного формализма для решения задач транспорта в негауссовых потоках⁴⁶.

Пятая глава посвящена введению в альтернативный формализм лагранжевых траекторий. В ней определяется квази-лагранжева система координат, и находятся точные решения уравнений транспорта для локализованных возмущений «блобов» на вязком (бетчелоровом) этапе эволюции.

⁴⁶ Коруев А В, И'ун А С, Сирота В А and Зыбин К Р Phys. Fluids 34, 035126 (2022)

$$\phi(0, t) = \int d^3p \tilde{\phi}(\vec{p}, 0) e^{-\kappa \int_0^t |\hat{P}^{-1}(\tau) \vec{p}|^2 d\tau} \quad \text{-скаляр}$$

$$\vec{B}(0, t) = \int d^3p \hat{P}(t) \vec{\tilde{B}}(\vec{p}, 0) e^{-\kappa \int_0^t |\hat{P}^{-1}(\tau) \vec{p}|^2 d\tau} \quad \text{- магнитное поле}$$

где $\tilde{\phi}(\vec{p}, 0)$ и $\vec{\tilde{B}}(\vec{p}, 0)$ – Фурье образы начальных возмущений соответствующих полей [5],[6].

Эти решения содержат оператор эволюции $\hat{P}(t)$ – случайную матричную функцию, являющуюся дифференциалом (матрицей Якоби) случайного потока, и удовлетворяющую стохастическому уравнению с матричным мультипликативным шумом, в роли которого выступает лагранжев тензор градиентов скорости:

$$\partial_t P(t) = A(t)P(t), P(0) = \hat{1}.$$

Изучению соответствующих матричных уравнений посвящена

Шестая глава. В действительности в физические ответы входят не сами матричные элементы оператора эволюции, а т.н. характеристические моменты случайного флага, которые представляют собой набор всех корреляторов $\langle s_1^{m_1}(t) \dots s_d^{m_d}(t) \rangle$ угловых миноров s_k^2 матрицы Грамма $P^T P$ оператора эволюции P . Эти миноры удобно представить в виде, $s_k = D_1 \dots D_k$, где D_k - диагональные компоненты разложения Ивасава оператора эволюции P .

В начале главы, в качестве «прелюдии» к решению задачи в непрерывном времени, изучается классическая математическая проблема о мультипликативной эволюции в дискретном времени (произведения случайных матриц). С помощью некоторого обобщения идей Ньюмана вычисляются характеристические моменты флага произведения изотропно распределенных, независимых матриц Q_n . Оказывается, что в изотропном случае, они «не чувствуют» некоммутативность матричного произведения, в

том смысле, что для показателей произведения $P(N) = Q_N \dots Q_1$ справедливо равенство [4]

$$\langle D_1^{m_1}(P) \dots D_d^{m_d}(P) \rangle = \sum_{n=1}^N \langle D_1^{m_1}(Q_n) \dots D_d^{m_d}(Q_n) \rangle = \langle D_1^{m_1}(Q_1) \dots D_d^{m_d}(Q_1) \rangle^N.$$

Развитие этой идеи позволяет далее работать с континуальными произведениями (в непрерывном времени) коррелированных матриц.

Так как формальное решение матричного уравнения для оператора эволюции для каждой гладкой реализации шума представляет собой мультипликативный интеграл Вольтера (или, в квантово-механической терминологии, Т-экспоненту), задача сводится к подходящей замене переменных, и вычислению соответствующего функционального якобиана [3], такой, чтобы некоммутативность матричных произведений не создавала сложностей при вычислениях характеристических корреляторов флага. Далее развивается последовательная теория больших уклонений (large deviation) для континуальных некоммутативных произведений изотропно распределенных матриц с ненулевым корреляционным временем и находится связь функции Крамера диагональных элементов лагранжевого тензора градиентов и функции Крамера обобщенных ляпуновских показателей [10]

$$\bar{\xi}_k(T) = \frac{1}{T} \ln(D_k(T)):$$

$$J_{\bar{\xi}_k}(x_1, \dots, x_d) = J_{\bar{A}_{kk}}(x_1, \dots, x_d) + \sum_{k=1}^d \eta_k x_k, \quad \eta_k = \frac{d+1}{2} - k.$$

Тот факт, что такая связь вообще существует, означает, что, в изотропном случае (и только в изотропном!), для определения асимптотики характеристических корреляторов флага можно пользоваться моделью негауссового эффективного дельта-процесса [10]. Этого формализма оказывается достаточно чтобы вычислять моменты замороженных магнитных и скалярных полей на протяжении всей эволюции, а также моменты

невмороженных полей при малой диффузии (большом числе Прандтля) на начальном, вязком этапе эволюции.

В седьмой главе рассматривается простейшая модель поля скоростей, обобщающая модель КК и предполагающая отклонение статистики потока от гауссовой. В таком поле связанная корреляционная функция третьего порядка ненулевая; по этой причине эта модель называется V3-моделью [3]. Статистические свойства потока оказываются не инвариантными по отношению к обращению времени, поэтому для описания неравновесной турбулентности Навье-Стокса V3-модель оказывается более реалистичной, чем стандартная гауссова модель КК.

Производящая функция связанных моментов (кумулянтная функция) диагональных компонент лагранжева тензора градиентов в такой модели имеет вид:

$$w_{\mathcal{A}}(a, b) = Da + Fb + o(F^2), \text{ где}$$

$$a = \sum_q \eta_{qq}^2 - \frac{1}{3} (\sum_q \eta_{qq})^2, \quad b = (\sum_q \eta_{qq}^2) (\sum_q \eta_{qq}) - \sum_q \eta_{qq}^3 - \frac{2}{9} (\sum_q \eta_{qq})^3.$$

Первый член здесь соответствует модели Крайчнана, второй описывает временную асимметрию потока.

Выражения для ляпуновского спектра в такой модели имеет вид [3]

$$\lambda_s = 2D(2 - s) + 2F \left(1 - \frac{3}{2} (2 - s)^2 \right), \quad s = 1, 2, 3,$$

поэтому «асимметрия» F такого процесса определяется вторым индексом Ляпунова $\lambda_2 = 2F$.

Его значение известно из численного счета турбулентности Навье-Стокса $\lambda_2/\lambda_1 \approx 0.25$. Это делает возможной привязку модели к реальному турбулентному потоку.

В восьмой главе в рамках V3-модели рассматривается эволюция пассивного скалярного локализованного возмущения (в английской терминологии «blob») на вязком этапе эволюции, вычисляются точные инкременты затухания моментов плотности $\langle \phi^\alpha \rangle \sim e^{-\gamma_\alpha t}$ и исследуется явление насыщения инкрементов высших моментов при $\alpha > 2$ [5].

$$\gamma_\alpha = \begin{cases} \frac{2D}{3} \alpha (3 - \alpha) \left(1 + \frac{1}{3} \left| \frac{F}{D} \right| \left(\frac{3}{2} - \alpha \right) \right), & \alpha \leq \alpha_c \\ 2D \left(\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{4} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{F}{D} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right) + O(F^4), & \alpha_c < \alpha \leq 2 \\ 2D, & \alpha > 2 \end{cases}$$

где $\alpha_c = 3|F/D| + O(F^3)$ - однозначно определяется условием выпуклости γ_α .

Это явление демонстрирует сильную перемежаемость статистики скалярного поля, и связано с тем фактом, что высшие моменты определяются событиями, когда объем блоба (и, поэтому, его плотность) не меняется в процессе адвекции. Вероятность таких сценариев эволюции экспоненциально падает со временем, инкремент этого падения и определяет насыщенные моменты плотности при $\alpha > 2$.

В девятой главе изучается эволюция системы с самодействием типа Фишера-Колмогорова-Петровского-Пискунова. Рассматриваются нелинейные динамические и стохастические эффекты, возникающие в системе «реакция-диффузия», помещенной в турбулентный поток. В частности, показана возможность экспоненциального роста популяции (т.е. полного числа частиц), несмотря на динамическое (нелинейное) насыщение их плотности [7].

В десятой главе изучается поведение магнитных возмущений. Показывается, что на вязком этапе магнитное поле локализованного блоба затухает из-за диффузионного перезамыкания силовых линий, однако полная энергия растет! Этот рост происходит за счет экспоненциального роста его объема на вязком этапе [8]. Заметим, что, в рамках простейшей модели, когда тензор

градиента предполагается постоянной, диагональной матрицей и может быть применен анализ Фурье, этот эффект обсуждался в работе⁴⁷.

Далее, для изучения безграничных флуктуаций доказывается теорема о «стохастической декомпозиции», которая позволяет представлять безграничные изотропные флуктуации в виде некогерентного наложения блобов [8].

Пусть начальные флуктуации такого поля имеют парный коррелятор вида

$$\langle B_i(\vec{r})B_j(0) \rangle_{i.c.} = \Pi_{ij}D\left(\frac{r}{l}\right),$$

где $D\left(\frac{r}{l}\right)$ – регулярная, быстро убывающая функция, $\Pi_{ij} = \delta_{ij} - \partial^{-2}\partial_i\partial_j$ -проектор на бездивергентные моды, l – начальная корреляционная длина.

Рассмотрим неслучайное начальное магнитное возмущение, поле которого имеет вид

$$b_i(\vec{r}, \vec{r}_0) = l^{3/2}C_j\Pi_{ij}d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right)$$

l -размер возмущения, d – также регулярная, быстро убывающая функция (формфактор), \vec{C} – вектор направления.

Идея состоит в том, что случайное однородное поле можно представить как сумму таких локализованных возмущений (блобов) с центрами в разных точках \vec{r}_0 , одинаковой «формы» $d(r)$ и размера l , со случайными, независимыми амплитудами $\vec{C}(\vec{r}_0)$:

$$B_i(\vec{r}) = l^{3/2} \int d\vec{r}_0 C_j(\vec{r}_0) \Pi_{ij} d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right),$$

$$\langle C_i(\vec{r}_0)C_j(\vec{r}_0') \rangle_{i.c.} = \frac{1}{l^3} \delta_{ij} \delta(\vec{r}_0' - \vec{r}_0).$$

⁴⁷ С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, УФН, 1456 4 (1985)

При этом, формфактор d определяется коррелятором однородных флуктуаций:

$$D\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{l}\right) = \int d\vec{r}_0 d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right) d\left(\frac{|\vec{r}'-\vec{r}_0|}{l}\right).$$

Из линейности уравнения на $B_i(\vec{r}, t)$ следует, что решение задачи Коши для изотропных безграничных флуктуаций имеет вид суммы эволюционирующих блобов:

$$B_i(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}_0 C_j(\vec{r}_0) b_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$$

где $b_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$ - решение задачи Коши для уравнения

$$\partial_t b_{ij} + (v_k \partial_k) b_{ij} - (b_{kj} \partial_k) v_i = \kappa \partial^2 b_{ij}$$

с неслучайным начальным условием

$$b_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0, 0) = l^{3/2} \Pi_{ij} d\left(\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{l}\right).$$

Важным результатом анализа такой декомпозиции оказывается «энергетическое соответствие», которое связывает полную энергию локализованного возмущения, помещенного в поток и плотность энергии однородных и изотропных флуктуаций, помещенных в поток с такой же статистикой [9]:

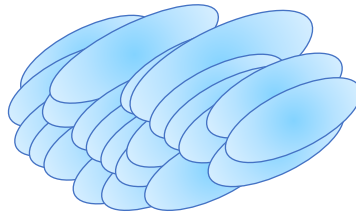
$$\langle B^2 \rangle l^3 = 3 \langle E_b \rangle.$$

Это точное и универсальное соответствие позволяет описать эволюцию безграничных флуктуаций на вязком этапе. Так как энергия каждого блоба растет, растет и плотность энергии безграничных изотропных возмущений. В рамках V3-модели выражения для моментов имеют вид [8]:

$$\langle B^{2n} \rangle \sim \left\langle \min \left\{ \frac{s_1^{2n}}{s_2^n}; \frac{s_2^{2n}}{s_1^n} \right\} \right\rangle = e^{\gamma_{2n} t},$$

$$\gamma_{2n} = \frac{5}{2} D \left(\left(\frac{4n}{5} + \frac{2n^2}{5} \right) - \frac{3}{80} (n+2)^4 \left(\frac{F}{D} \right)^2 \right) + o(F^2).$$

Таким образом, на диффузионном (но еще вязком) этапе однородные флуктуации растут, это происходит за счет некогерентного наложения экспоненциально вытягивающихся блобов, причем поле каждого отдельного блоба убывает (рис.3)



(рис.3)

С другой стороны, метод стохастической декомпозиции позволяет проследить за эволюцией изолированного возмущения на инерциальном этапе, когда метод квази-лагранжевых траекторий уже не работает, а также пролить свет на топологическую причину экспоненциального роста однородных трехмерных флуктуаций и затухания квази-двумерных флуктуаций.

В самом деле, на инерционном этапе объем блоба постоянен с логорифмической точностью [9], поэтому средний квадрат поля блоба совпадает со средним квадратом безграничного изотропного поля. Так как теория Казанцева предсказывает рост 3d-изотропных возмущений, то поле отдельного блоба также должно расти. Это может происходить только за счет коррелированного самоналожения блоба. С другой стороны известно, что уравнение Казанцева в квази-2d-мерии не имеет растущих мод⁴⁸. Топологическая причина этого состоит в невозможности коррелированного самоналожения блоба в квази-2d (рис.4)

⁴⁸ I.V. Kolokolov, J. Phys. A: Math. Theor. 50, 155501 (2017)

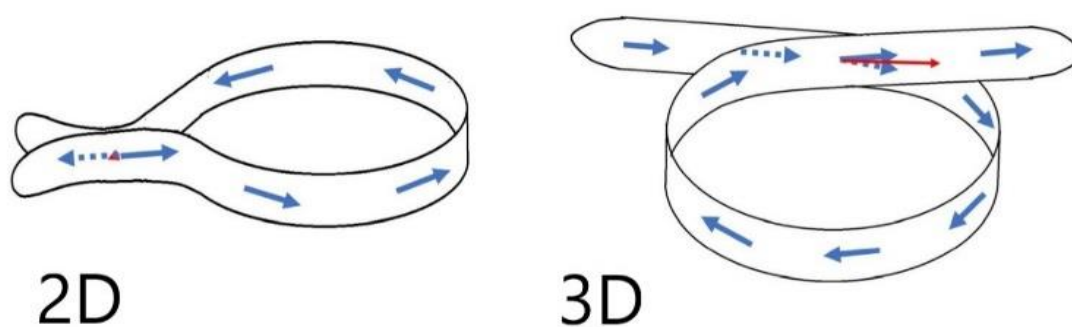


Рис.4

Итог этих рассуждений можно представить в виде таблицы [9]

СТАДИЯ ЭВОЛЮЦИИ	ИЗОЛИРОВАННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ	ОДНОРОДНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ	МЕХАНИЗМ ГЕНЕРАЦИИ
ВЯЗКАЯ ВМОРОЖЕННАЯ	Объем постоянен, напряженность растет экспоненциально.	Напряженность растет экспоненциально.	Вытягивание замороженных магнитных линий.
ВЯЗКАЯ ДИФфуЗИОННАЯ 3D	Объем возрастает экспоненциально, напряженность экспоненциально падает.	Напряженность растет экспоненциально.	Некогерентное наложение локализованных возмущений.
ВЯЗКАЯ ДИФфуЗИОННАЯ, 2D	Объем возрастает экспоненциально, напряженность падает по степенному закону.	Напряженность растет экспоненциально.	Некогерентное наложение локализованных возмущений.
ИНЕРЦИОННАЯ 3D	Объем возрастает по степенному закону, напряженность растет экспоненциально.	Напряженность растет экспоненциально.	Скоррелированное самоналожение каждого локализованного возмущения.
ИНЕРЦИОННАЯ 2D	Объем возрастает по степенному закону, напряженность падает по степенному закону.	Напряженность падает по степенному закону.	Антикоррелированное самоналожение каждого локализованного возмущения.

Одиннадцатая глава диссертации стоит несколько особняком от остальных глав; она посвящена математической задаче об эволюции замороженных k -мерных гиперповерхностей в d -мерных изотропных стохастических потоках.

Строится полное описание эволюции флага «раскрашенных» гиперповерхностей и их поверхностных плотностей.

Показывается, что верно следующее утверждение:

Для любой случайной, изотропно распределенной матрицы Q корреляторы $\langle D_1^{m_1+1}(Q) \dots D_d^{m_d+d}(Q) \rangle$ симметричны относительно перестановок m_k [11].

Это очень интересное свойство случайного флага. С помощью него удастся завершить доказательство теоремы о связи функции Крамера диагональных элементов лагранжевого тензора градиентов изотропного потока и функции Крамера обобщенных ляпуновских экспонент.

Эта задача также оказывается тесно связанной с теорией меры Хаара на вещественной ортогональной группе и ее решение является новым математическим результатом. В контексте теории турбулентного транспорта и лагранжевой турбулентности изучение эволюции таких материальных линий и гиперповерхностей приводит к нахождению серии точных интегралов движения.

Для несжимаемых потоков ($s_d = 1$) они имеют вид

$$\langle s_1^{\pi(2)-\pi(1)-1}(t) \dots s_{d-1}^{\pi(d)-\pi(d-1)-1}(t) \rangle = 1,$$

где $\pi(k)$ – произвольная перестановка набора $1, \dots, d$.

Циклическим перестановкам соответствуют d простых интегралов

$$\langle s_k^{-d}(t) \rangle = 1, k = 1, \dots, d.$$

Ранее мы уже отмечали, что только первый из них был известен в литературе⁴⁹.

⁴⁹ Ya. B. Zel'dovich, A. A. Ruzmaikin, S. A. Molchanov and D. D. Sokoloff J. Fluid Mech. 144,1 (1984) G. Falkovich, A. Frishman, PRL 110, 214502 (2013)

В общем, сжимаемом случае интегралы имеют вид

$$\langle s_1^{\pi(2)-\pi(1)-1}(t) \dots s_{d-1}^{\pi(d)-\pi(d-1)-1}(t) s_d^{d-\pi(d)}(t) \rangle = 1.$$

Подчеркнем еще раз, что важным свойством этих интегралов является универсальность, т.е. независимость от конкретной статистики потока, в том числе независимость от предположений о дельта-коррелированности по времени, стационарности и несжимаемости.

Полученный результат имеет красивую геометрическую интерпретацию [11]:

Предположим, что мы помещаем в несжимаемый поток равномерно раскрашенную гиперповерхность, размерности $k < d$. В процессе эволюции ее площадь будет экспоненциально расти, а сама она будет всюду плотно заполнять пространство. Например, на рис. 5 представлен результат численного счета⁵⁰, соответствующий потоку Навье-Стокса и погруженной в него одномерной линии $k = 1$:

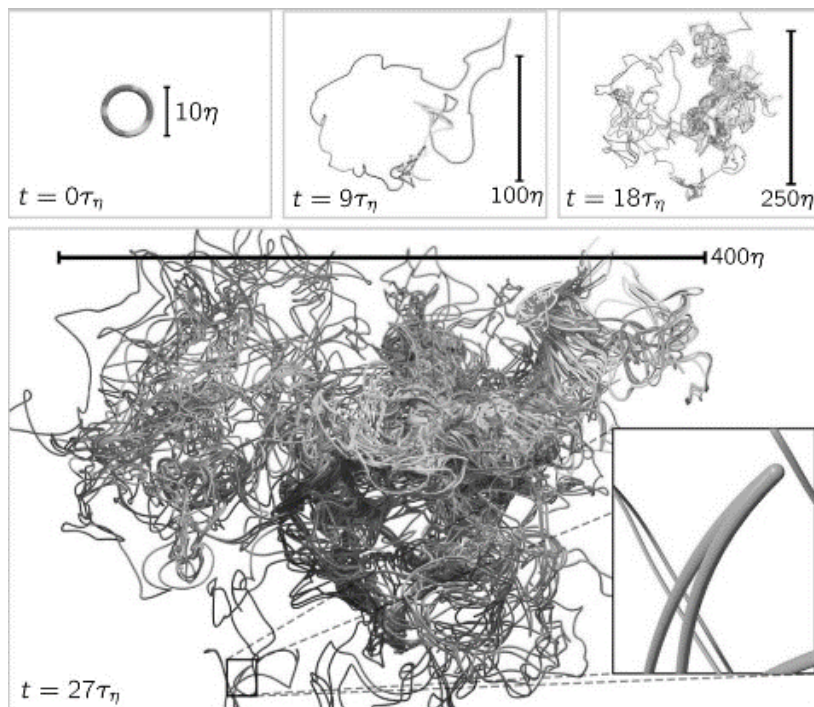


Рис. 5

⁵⁰ Lukas Bent Kamp, Theodore D. Drivas, Cristian C. Lalescu & Michael Wilczek. NATURE COMMUNICATIONS (2022)

Однако из-за мультипликативной перемежаемости рост гиперплощади будет очень неравномерным: всегда будут существовать все более редкие, но очень контрастные области (рис.6), в которых плотность $\rho_k = s_k^{-1}$ экспоненциально растет (т.н. когерентные структуры). Поэтому достаточно высокие моменты плотности краски («садящиеся» на эти области) также будут расти.

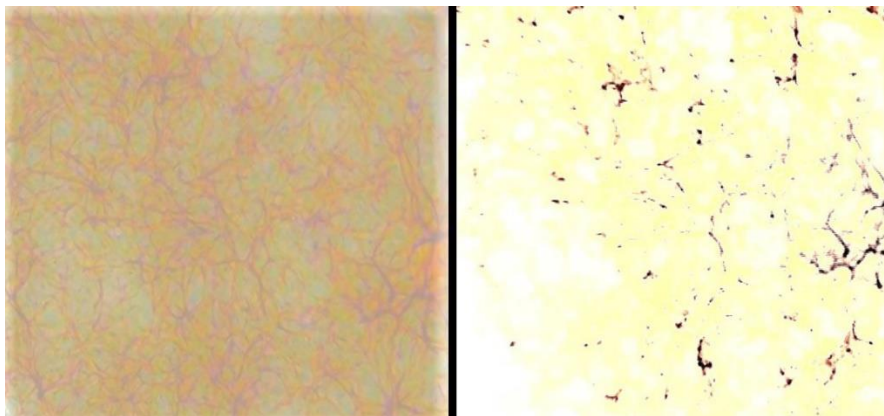


Рис.6

При этом должны существовать критические показатели M_k , такие, что моменты $\langle \rho_k^m(t) \rangle$ растут при $m > M_k$ и убывают при $m < M_k$.

Так как $\rho_k = s_k^{-1}$, то из $\langle s_k^{-d}(t) \rangle = 1$, следует, что все $M_k = d$.

Таким образом, в изотропном случае критические показатели оказываются одинаковыми и равными размерности пространства потока. Из этого следует, что свойства рассматриваемых когерентных структур абсолютно не зависят от динамики потока и определяются только геометрией пространства флагов.

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Предложен новый метод определения асимптотического поведения решений уравнения Казанцева-Крайчнана. Он является обобщением известного метода стохастического квантования и позволяет эффективно вычислять инкремент роста однородных флуктуаций пассивного поля в

стохастическом потоке с произвольной структурной функцией [9]. В качестве примера вычислена кривая устойчивости магнитных флуктуаций в модели Вайштейна-Кичатинова.

2. Построена последовательная теория линейных стохастических дифференциальных уравнений с матричным мультипликативным шумом. Такие уравнения возникают в процессе решения многих задач турбулентного транспорта. Основная проблема при анализе многомерных систем заключается в некоммутативности матричного произведения и, в связи с этим, с невозможностью применить обычную теорию больших уклонений для изучения асимптотики решений при $t \rightarrow \infty$. Мы развиваем теорию, обобщающую теорию больших уклонений на некоммутативный случай. Показано, что это возможно лишь для изотропных матричных процессов. Мы вводим понятие эффективного матричного дельта-процесса, и доказываем, что он дает точную асимптотику для ляпуновских и обобщенных ляпуновских показателей негауссового мультипликативного матричного шума с ненулевым, конечным корреляционным временем [10].

3. Предложено негауссово обобщение модели Казанцева-Крайчнана, т.н. V3-модель, в рамках которой оказывается возможным учесть T-неинвариантность стохастического потока [1],[3]. Единственным свободным параметром в этой модели является отношение Ляпуновских экспонент λ_2/λ_1 , которое, согласно численным расчетам для турбулентности Навье-Стокса мало и примерно равно 0.25.

В рамках этой модели вычислены показатели затухания скалярного и магнитного локализованных возмущений на вязком этапе эволюции [5],[6],[8]. Изучен эффект насыщения высших моментов, связанный с сильной перемежаемостью таких систем.

4. Изучено поведение скалярного возмущения с нелинейным самодействием типа реакция-диффузия, помещенного в турбулентный поток. Показано, что на вязком этапе волна реакции распространяется экспоненциально быстро, что приводит к экспоненциальному росту популяции, не смотря на насыщение плотности. Вычислены высшие моменты плотности и величины популяции, которые также демонстрируют наличие сильной перемежаемости в системе [7]. Эти результаты имеют большое значение для задач химии, биологии, экологии и др.

5. Установлена связь энергии локализованного возмущения и плотности энергии безграничных, однородных и изотропных флуктуаций пассивного поля, помещенного в одинаковые стохастические потоки [9]. Это соотношение («энергетическое соответствие») позволяет описать эволюцию магнитного поля и магнитной энергии локализованного возмущения и пролить свет на природу турбулентного динамо при больших числах Прандтля. Оказывается, что она различна на разных этапах эволюции. После определения характера эволюции гладких линий и поверхностей в потоке, мы показываем, что на вязком этапе генерация поля происходит благодаря некогерентному наложению в ансамбле вытягивающихся возмущений, в то время как на инерционном этапе она возникает благодаря самоналожению каждого возмущения в отдельности.

Это приводит к существенному отличию в поведении двумерных и трехмерных флуктуаций. Топология двумерного самоналожения локализованных возмущений всегда приводит к ослаблению поля, в то время как в трехмерном случае, происходит усиление.

6. Найдены новые точные универсальные интегралы движения k -мерных гиперповерхностей в гладких изотропных d -мерных потоках. Показано, что каждой перестановке из d элементов соответствует точный стохастический

интеграл [11], [12]. Например, для трехмерного случая существует 6 интегралов:

Перестановка	Стохастический интеграл
123	$\langle 1 \rangle$
132	$\langle s_1 s_2^{-2} s_3 \rangle$
213	$\langle s_1^{-2} s_2 \rangle$
231	$\langle s_2^{-3} s_3^2 \rangle$
312	$\langle s_1^{-3} s_3 \rangle$
321	$\langle s_1^{-2} s_2^{-2} s_3^2 \rangle$

В работе также есть 4 приложения, в которые вынесены некоторые важные принципиальные и технические вопросы.

Публикации автора по теме диссертации

1. И'ун, А.С., Zybin, К.Р.: 2015 Physics Letters A 379, 650
2. Зыбин К П, Ильин А С 2016 Успехи Физических Наук, 186 1349–1353
3. И'ун А S, Sirota V A and Zybin K P 2016 Journal of Statistical Physics 163 765
4. И'ун А S, Sirota V A and Zybin K P 2017 Journal of Statistical Physics 166 24
5. И'ун А S, Sirota V A and Zybin K P 2017 Physical Review E 96 013117
6. И'ун А S, Sirota V A and Zybin K P 2018 Europhysics Letters 121 34002
7. И'ун А S, Sirota V A and Zybin K P 2019 Physical Review E 99, 052220
8. И'ун А S, Sirota V A and Zybin K P 2019 Physica Scripta 94 064001
9. И'ун, А. С., Копыев, А. В., Sirota, V. А., & Zybin, К P 2021, Physics of Fluids, 33, 075105
10. И'ун А S, Kopyev A V, Sirota V A and Zybin K P 2022 Physical Review E 105, 054130
11. И'ун А S, Kopyev A V, Sirota V A and Zybin K P 2023 Physical Review E L023101
12. И'ун А S, Kopyev A V, Sirota V A and Zybin K P. 2020, Physics of Fluids 32, 125114