

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
(МФТИ, Физтех)

Юридический адрес: 117303, г. Москва,  
ул. Керченская, дом 1А, корпус 1  
Почтовый адрес: 141700, Московская обл.,  
г. Долгопрудный, Институтский переулок, дом 9  
Тел.: +7 (495) 408-42-54, факс: +7 (495) 408-68-69  
info@mipt.ru

30.01.2024, № 26-05/800  
на № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе

Баган Виталий  
Анатольевич

2024 г.

### ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию **Бишлер Людмилы Владимировны**  
«Вычисление средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса  
и изучение их свойств»,

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-  
математических наук по специальности 1.3.3. Теоретическая физика

Диссертационная работа Бишлер Л.В. «Вычисление средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса и изучение их свойств» посвящена исследованию методов вычисления корреляторов в трехмерной квантовой топологической теории поля, а также изучению групповых свойств этих корреляторов.

#### Актуальность.

Теория Черна-Саймонса представляет собой наиболее простую трехмерную калибровочную квантовую теорию поля. В диссертации рассматривается теория с калибровочной группой  $SU(N)$  в компактном пространстве без особенностей. Актуальность темы исследования обусловлена большим научным интересом к неабелевым калибровочным теориям поля, для которых существуют методы непертурбативного вычисления корреляторов. Эти методы тесно связаны с теорией квантовых групп и с теорией узлов и их инвариантов, потому что корреляторы в этой теории – вильсоновские средние – представляют собой инварианты контуров, по которым они вычисляются.

Теория Черна-Саймонса используется в качестве эффективной теории при описании топологических свойств материи, которые проявляются в двумерных материалах в сильных магнитных полях и низких температурах, в том числе в теории конденсированного состояния, при описании состояний в дробном квантовом эффекте Холла.

Теория Черна-Саймонса находится на пересечении нескольких областей теоретической физики, таких как конформная теория поля, теория топологической струны, трехмерная гравитация, матричные модели и интегрируемые системы. Это позволяет использовать дуальности между различными теориями для развития новых методов вычислений. В частности, теория Черна-Саймонса используется для описания трехмерной гравитации. Кроме того, вильсоновские средние также вычисляются с помощью двумерной конформной теории поля и возникают в теории топологической струны.

Стоит отметить, что один из результатов данной работы связан с исследованием квантовых б $\mathcal{J}$ -символов для группы  $SU(N)$  старших порядков. Важность их изучения для теоретической физики не подлежит сомнению, так как они широко применяются в задачах ядерной физики и физики элементарных частиц.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, и двух приложений.

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы, приводится историческая справка о развитии исследований по теме диссертации, а также приводится описание связи теории Черна-Саймонса с современными теориями математической физики и физики конденсированного состояния. Проводится обзор различных вариаций метода Решетихина-Тураева для вычисления вильсоновских средних в теории Черна-Саймонса. Перечисляются цели и задачи исследования, а также положения, выносимые на защиту. Обосновываются новизна, достоверность, научная и практическая значимость работы. Приводится информация об апробации работы и публикациях по теме диссертации.

В **первой главе** рассматриваются основные понятия математической теории узлов. Определяются полиномы ХОМФЛИ-ПТ и их обобщение – цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ. Последние определяются с помощью метода Решетихина-Тураева, который подробно обсуждается в диссертации. Приводятся основные соотношения, которые определяют квантовую алгебру  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  и вводится понятие универсальной R-матрицы, которая является центральным элементом проводимых вычислений.

Далее в этой главе приводится описание модификации метода Решетихина-Тураева для трехнитевых кос, которая заключается в переходе к базису неприводимых представлений. В этом методе важное место играют б $\mathcal{J}$ -символы (матрицы Рака), которые показывают отклонение тензорного произведения представлений от ассоциативности на уровне базисных векторов неприводимых представлений.

Оригинальные результаты этой главы связаны с исследованием связи между собственными значениями  $R$ -матрицы и матрицами Рака. А именно, рассматриваются  $R$ -матрицы и соответствующие им матрицы Рака. При исследовании различных примеров таких  $R$ -матриц было замечено, что некоторые матрицы Рака, которые им соответствуют, можно блочно-диагонализировать. Результат этого исследования сформулирован в виде гипотезы, накладывающей ограничения на наборы собственных значений и на угол поворота, который необходим для блочной диагонализации матриц Рака.

**Вторая глава** диссертации посвящена исследованию особенности полиномов ХОМФЛИ-ПТ, которое называют дифференциальным разложением. Суть этого разложения заключается в разделении зависимости от контура интегрирования вильсоновского среднего и от представления, которому соответствует поле на контуре. Важные результаты этой главы связаны с построением дифференциального разложения для некоторых представлений для узлов, которые характеризуются дефектом 1, а также наложением ограничений на дифференциальное разложение узлов с дефектом 2. Ярким примером последних являются узлы-мутанты. Для получения второго результата были вычислены разности полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов для представлений  $[3,1]$  и  $[4,2]$  различных квантовых алгебр  $U_q(sl_N)$ .

В качестве подтверждения универсальности дифференциального разложения (то есть его применимости ко всем узлам) приводится дифференциальное разложение узла 9.46, который не входит в уже изученные семейства узлов.

Помимо этого, рассматриваются узлы-мутанты – контура, проекции на плоскость которых связаны друг с другом набором преобразований (мутаций). Важной особенностью этих контуров является то, что они не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в симметрических и прямоугольных представлениях. В данной работе были вычислены разности узлов-мутантов с одиннадцатью пересечениями в представлении  $[3,1]$ . Эти и другие результаты для полиномов узлов-мутантов были использованы, чтобы наложить ограничения на дифференциальное разложение узлов с дефектом 2.

**Третья глава** диссертации посвящена исследованию применения метода Решетихина-Тураева к вычислению инвариантов узлов, когда параметр квантования квантовой алгебры  $U_q(sl_N)$  равен корню из единицы. Это значение параметра особенно важно с физической точки зрения, потому что при переходе от полиномов ХОМФЛИ-ПТ к вильсоновским средним используется именно такое значение этого параметра.

В этой главе сначала рассматриваются неприводимые представления квантовой алгебры  $U_q(sl_N)$ , а также соответствующие им  $R$ -матрицы. Затем обсуждается модификация метода Решетихина-Тураева для вычисления инвариантов узлов и зацеплений в корнях из единицы, основанная на идее использования  $(1,1)$ -

сплетений. В этом случае метод Решетихина-Тураева позволяет получить ненормированные инварианты. В случае зацеплений выбор  $(1,1)$ -сплетений не является уникальным. Чтобы восстановить симметрию и получить полноценный инвариант зацепления, вводится и вычисляется нормировочный коэффициент. Этот коэффициент приводится в работе для произвольной алгебры  $U_q(sl_N)$ .

В результате автор определяет инварианты узлов в корнях из единицы для нильпотентных представлений с параметрами, после чего приводит связи получившихся инвариантов с оригинальными полиномами ХОМФЛИ-ПТ и Александра.

В **заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы. В **приложениях** приведены выражения для вильсоновских петель, полученные в диссертации.

Автореферат полностью и точно отражает содержание диссертации.

**Достоверность** полученных результатов основывается на согласии результатов с уже известными в литературе данными и логической непротиворечивостью результатов. В тексте содержится описание различных методов проверки на всех этапах вычислений. Результаты опубликованы в 6 статьях в известных рецензируемых журналах, индексируемых Web of Science и входящих в список ВАК, а также прошли апробацию на научных конференциях и семинарах в ФИАН, МИАН и МФТИ.

Результаты представляют **научную и практическую значимость**. Они раскрывают новые свойства петель Вильсона в теории Черна-Саймонса и могут использоваться как в дальнейшем исследовании этих величин, так и при работе в смежных темах, таких как проверка струнной дуальности. Полученные результаты могут быть использованы в будущих исследованиях на базе Института теоретической и экспериментальной физики, Математического института РАН, Института теоретической и математической физики МГУ, МФТИ и других научных учреждений, где ведутся работы по современной теоретической и математической физике.

По тексту диссертации есть следующие замечания:

- 1) Для получения полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов были вычислены  $R$ -матрицы для различных рангов квантовой алгебры  $U_q(sl_N)$  в представлении [3,1]. Возникает вопрос, можно ли использовать эти данные для вычисления соответствующих матриц Рака?
- 2) Во второй главе диссертации приводится метод построения дифференциального разложения для узлов с дефектом один с использованием матрицы  $U$ . Было бы интересно применить этот метод к

семейству узлов со старшими дефектами, чтобы построить дифференциальное разложение и в других случаях.

- 3) В диссертации используются одинаковые символы (квадратные скобки) для обозначения квантовых чисел, диаграмм Юнга и ссылок на литературу, что в некоторых случаях может усложнять понимание материала.

Данные замечания, однако, не влияют на высокую оценку работы и полученных результатов.

### **Заключение.**

Диссертация «Вычисление средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса и изучение их свойств» отвечает всем требованиям Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. №842, а ее автор Бишлер Людмила Владимировна заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3. Теоретическая физика.

Доклад автора по материалам диссертации был сделан на семинаре кафедры теоретической физики МФТИ, Физтех «24» ноября 2023 г.

Отзыв на диссертацию обсуждён и одобрен на расширенном заседании кафедры теоретической физики МФТИ, Физтех «16» декабря 2023 г., протокол от «16» декабря 2023 г.

Кандидат физ.-мат. наук  Мусаев Эдвард Таваккулович  
(PhD признаваемый в РФ)

22 января 2024 года

**Почтовый адрес:** 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер.,9

**Телефон:** 8 (495) 408-75-90,

**Адрес электронной почты:** [musaev.et@phystech.edu](mailto:musaev.et@phystech.edu)

**Организация – место работы:** федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», Кафедра теоретической физики, Лаборатория физики высоких энергий

**Должность:** старший научный сотрудник лаборатории физики высоких энергий, доцент кафедры теоретической физики

**Web-сайт организации:** <https://mipt.ru>

**Основные публикации сотрудников «Московского физико-технического института (национального исследовательского университета)» по теме диссертации соискателя в рецензируемых научных изданиях за последние 5 лет (не менее 5 и не более 15 публикаций)**

1. Vassily Olegovich Manturov and Igor Mikhailovich Nikonov, «Group-valued invariant of knots in the full torus» / Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 32, No. 01, 2350004 (2023), <https://doi.org/10.1142/S0218216523500049>
2. E. Lanina, A. Popolitov, N. Tselousov. «On an alternative stratification of knots» / Theoretical and Mathematical Physics 216 (2023) 924-937, <https://doi.org/10.1134/S0040577923070024>
3. Edvard T. Musaev, Timopheev Petrov. «Tri-vector deformations on compact isometries» / The European Physical Journal C 83, 399 (2023), <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11569-w>
4. Sameer Kumar, Edvard T. Musaev. «On 10-dimensional Exceptional Drinfeld algebras» / Progress of Theoretical and Experimental Physics, Volume 2023, Issue 8, August 2023, <https://doi.org/10.1093/ptep/ptad100>
5. S. Barseghyan, A. Popolitov. «The “Null-A” superintegrability for monomial matrix models» / Annals of Physics, Vol. 448, 169207 (2023), <https://doi.org/10.1016/j.aop.2022.169207>
6. Reinier Kramer, Alexandr Popolitov, Sergey Shadrin. «Topological recursion for monotone orbifold Hurwitz numbers: a proof of the Do-Karev conjecture» / The Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, (5) 23 (2022), no. 2, 809-827 [https://doi.org/10.2422/2036-2145.201909\\_010](https://doi.org/10.2422/2036-2145.201909_010)
7. Sera Kim, Seongjeong Kim, and Vassily O. Manturov. «On long knots in the full torus» / Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 31, No. 01, 2250001 (2022), <https://doi.org/10.1142/S0218216522500018>
8. Victor Alekseev, Guido Festuccia, Victor Mishnyakov, Nicolai Terziev, Maxim Zabzine. «Localizing non-linear  $N=(2,2)$  sigma model on  $S^2$ » / The European Physical Journal C, Vol. 82, 766 (2022), <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10610-8>
9. V. Mishnyakov, A. Oreshina. «Superintegrability in  $q$ -deformed Gaussian Hermitian matrix model from  $W$ -operators» / The European Physical Journal C, Vol. 82, 548 (2022), <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10466-y>
10. Luca Cassia, Rebecca Lodin, Aleksandr Popolitov, Maxim Zabzine. «Exact SUSY Wilson loops on  $S^3$  from  $q$ -Virasoro constraints» / J. High Energ. Phys. 2019, 121 (2019), <https://doi.org/10.1007/JHEP12%282019%29121>
11. Ilya Bakhmatov, Edvard T. Musaev. «Classical Yang-Baxter equation from  $\beta$ -supergravity» / J. High Energ. Phys. 2019, 140 (2019), [https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2019\)140](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2019)140)
12. S. Kim and V. O. Manturov. «Artin’s braids, braids for three space, and groups  $\Gamma_{4n}$  and  $G_{kn}$ » / Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 28, No. 10, 1950063 (2019), <https://doi.org/10.1142/S0218216519500639>