

ОТЗЫВ

официального оппонента Славнова Никиты Андреевича на диссертацию Бишлер Людмилы Владимировны на тему «Вычисление средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса и изучение их свойств», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

В диссертации Бишлер Л.В. исследуются методы вычисления корреляторов и их свойства в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой $SU(N)$. Для вычисления корреляторов используются различные модификации метода Решетихина-Тураева и универсальная R -матрица.

Актуальность. Большое внимание теория Черна-Саймонса привлекла к себе в 80-х годах прошлого века, когда стали очевидны ее связи с теорией узлов, в частности с их инвариантами - полиномами Джонса и ХОМФЛИ-ПТ. В то же время были открыты связи этой теории с трехмерной гравитацией, двумерной конформной теорией поля, теорией топологической струны, матричными моделями, интегрируемыми системами и другими теориями математической физики, что определило место теории Черна-Саймонса в сложной системе дуальностей между различными моделями теоретической и математической физики.

Теория Черна-Саймонса – это $(2+1)$ -мерная топологическая квантовая теория поля. Нетривиальными корреляторами в этой теории являются средние значения петель Вильсона, которые вычисляются по контурам в трехмерном пространстве. Корреляторы в данной теории можно вычислять непертурбативно и получать точные ответы. Метод, используемый для этого в данной работе, берет свое начало в теории квантовых алгебр и тесно связан с теорией узлов. В нем используется тот факт, что вильсоновские средние являются инвариантами соответствующих им контуров и при должной нормировке совпадают с широко известными инвариантами узлов, называемыми полиномами ХОМФЛИ-ПТ.

В данной диссертационной работе основное внимание уделено развитию и использованию практических методов вычисления вильсоновских средних с последующим изучением свойств получаемых результатов. Это является важной и актуальной научной задачей, так как дает возможность на относительно простых примерах проследить групповые свойства, которые демонстрируют корреляторы в данной теории, чтобы потом обобщить их на

другие теории, в том числе использовать при изучении явления конфайнмента в физике высоких энергий.

Структура работы. Диссертация Бишлер Л.В. состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. Объем диссертации – 188 страниц, включая 29 рисунков и 3 таблицы, список литературы содержит 178 наименований.

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации и приводится обзор современного состояния исследований в теории Черна-Саймонса. Указаны цели и задачи диссертации, положения, выносимые на защиту, используемые методы исследования, научная новизна и значимость полученных результатов.

В **первой главе** излагаются основы теории узлов, которые важны для понимания текста диссертации. Вводятся понятия квантовой алгебры и универсальной R -матрицы. Подробно рассматривается основной метод вычисления инвариантов узлов и приводятся примеры таких вычислений. Затем рассматриваются особенности применения метода Решетихина-Тураева к вычислению инвариантов трехнитевых кос. Этот метод можно значительно модифицировать, если перейти в базис собственных векторов R -матрицы. В таком случае задача сводится к вычислению квантовых b_j -символов (матриц Рака). Известно, что, если все собственные значения R -матрицы различны, они определяют соответствующие b_j -символы. Это утверждение называют гипотезой о собственных значениях.

Основным результатом первой главы является предложенное автором расширение области применения гипотезы о собственных значениях R -матрицы на случаи их случайного совпадения. Для этого проводится исследование структуры матриц Рака, когда собственные значения соответствующих им R -матриц случайно совпадают. Для ряда рассмотренных матриц показывается, что при выполнении некоторого набора условий матрицы Рака можно дополнительно блочно-диагонализировать. Это утверждение сформулировано в виде гипотезы, подтвержденной многочисленными примерами явных вычислений. Важной частью гипотезы является тот факт, что угол поворота в «случайном» секторе должен быть равен 45 градусам.

Во **второй главе** диссертации обсуждаются полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов, а также гипотеза о специального вида зависимости структуры полиномов ХОМФЛИ-ПТ от контура и от представления, которым этот контур окрашен. Эту гипотезу называют дифференциальным разложением.

Узлы-мутанты представляют собой пары узлов, диаграммы которых связаны друг с другом определенным набором преобразований. Они интересны с точки зрения теории узлов, потому что не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ, которые окрашены симметрическими и антисимметрическими представлениями. Однако, полиномы ХОМФЛИ-ПТ в непрямых представлениях могут их различать. Автор вычисляет эти полиномы в представлении [3,1] для узлов-мутантов с 11 пересечениями и выделяет общую часть ответов. Помимо этого, рассматриваются узлы-мутанты с дополнительной симметрией Хью Мортон, которые начинают различаться только представлением [4,2]. В работе получены ответы для полиномов ХОМФЛИ-ПТ для двух пар узлов-мутантов Мортон и узлов-мутантов с 11 пересечениями в представлении [4,2] квантовых алгебр $U_q(sl_3)$ и $U_q(sl_4)$.

Далее в этой главе рассматриваются различные аспекты дифференциального разложения. Известно, что коэффициенты дифференциального разложения зависят от дефекта узла, то есть от степени его полинома Александра. В диссертации вычисляются коэффициенты дифференциального разложения, зависящие от узла для трехмостового узла с дефектом 0 в представлении [2,2]. Кроме того, предлагается универсальное преобразование для семейства узлов с дефектом 1, которое связывает коэффициенты дифференциального разложения этих узлов с коэффициентами твистованных узлов. Наконец, приводятся ограничения на коэффициенты дифференциального разложения узлов с дефектом 2. Для их получения используются результаты первой половины этой главы, относящиеся к узлам-мутантам.

Третья глава посвящена построению и исследованию инвариантов узлов в корнях из единицы. В ней рассматриваются неприводимые представления квантовой алгебры $U_q(sl_N)$, при параметре квантования, равном корню из единицы и обсуждаются соответствующие им R-матрицы. Показывается, что циклические и полуматричные представления дают тривиальные инварианты, а для нильпотентных представлений с параметрами вычисляется универсальная R-матрица. При этом использование обычного метода Решетихина-Тураева с такой R-матрицей приводит к тривиальным результатам, так как нормировочный коэффициент обращается в ноль. Чтобы получить нормированные инварианты автор предлагает модифицировать метод Решетихина-Тураева и вычислять инварианты не узлов и зацеплений, а их (1,1)-сплетений, то есть узлов и зацеплений с разорванной нитью.

Для корректного определения таких инвариантов зацеплений вводится нормировочный коэффициент, который восстанавливает симметрию между

всеми элементами зацепления: разорванной нитью и остальными нитям . Автор приводит этот нормировочный коэффициент в общем случае для произвольной квантовой алгебры и находит инварианты для представлений в корнях из единицы, а затем анализирует их связи с уже известными полиномами ХОМФЛИ-ПТ и Александра.

В заключении собраны и представлены все результаты диссертации.

Результаты, полученные в диссертации Бишлер Л.В., обладают научной **новизной**, корректно сформулированы и **обоснованы**. **Достоверность** результатов подтверждается их согласием с уже известными научными данными, последовательностью в проведении вычислений и анализе полученных результатов. Результаты прошли апробацию на конференциях и семинарах, а также опубликованы в шести статьях в рецензируемых научных журналах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Текст диссертации хорошо структурирован и подробно освещает особенности работы. Помимо описания проделанной работы и полученных результатов в диссертации содержится много дополнительной информации о методах теории узлов, которая значительно упрощает ее чтение. Хочется отметить, что даже с учетом компьютерных вычислений для получения результатов диссертации была проделана большая работа, а автор проявил себя как сложившийся исследователь.

Замечания по тексту данной диссертационной работы:

1. В диссертации приводятся результаты вычисления вильсоновских средних узлов-мутантов в представлении [3,1] и [4,2] для различных квантовых алгебр, а также проверка этих результатов с помощью разложения по родам. В изложении не хватает информации о вычислительных техниках, которые позволили провести такие сложные расчеты, в том числе какие программы и пакеты использовались при расчетах.
2. Раздел 2.6 напротив написан слишком подробно и содержит много технических деталей, которые можно опустить.
3. Возможно ли построить модификацию метода Решетихина-Тураева для трехнитевых кос в корнях из единицы, а именно перейти в базис неприводимых представлений и вычислять инварианты с помощью собственных значений R-матрицы и матриц Рака?

Данные замечания не влияют на общую положительную оценку работы, а в том числе предлагают направления для дальнейшей работы.

На основе вышесказанного считаю, что диссертация Бишлер Людмилы Владимировны соответствует всем требованиям к кандидатским диссертациям, установленным Положением о присуждении ученых степеней, утвержденным постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор, Бишлер Л.В., заслуживает присуждения степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

Официальный оппонент

доктор физико-математических наук,
заведующий отделом теоретической физики
Математического института им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

Славнов Никита Андреевич

Адрес: 119991, Москва, ул. Губкина д. 8

Телефон: +7 (495) 984-81-41,

e-mail: nslavnov@mi-ras.ru

Подпись Славнова Никиты Андреевича заверяю.

Ученый секретарь МИАН,
Кандидат физико-математических наук
Поликарпов Сергей Алексеевич

05 февраля 2024 года

И
Список основных работ Славнова Н.А. по теме защищаемой диссертации
в рецензируемых научных изданиях за последние 5 лет

1. S. Belliard, N. A. Slavnov. «Overlap between usual and modified Bethe vectors» / Theoretical and Mathematical Physics volume 209, pages 1387–1402 (2021), <https://doi.org/10.1134/S0040577921100056>
2. Samuel Belliard, Rodrigo A. Pimenta and Nikita A. Slavnov. «Scalar product for the XXZ spin chain with general integrable boundaries» / Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 54, 344001 (2021), <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac1482>
3. A. Hutsalyuk, A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov. «Actions of the monodromy matrix elements onto $gl(m|n)$ -invariant Bethe vectors» / Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2009 (2020), 093104, <https://doi.org/10.1088/1742-5468/abacb2>
4. N. A. Slavnov. «Introduction to the nested algebraic Bethe ansatz» / SciPost Phys. Lect. Notes 19 (2020), <https://doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.19>
5. S. Belliard, N. A. Slavnov. «Why scalar products in the algebraic Bethe ansatz have determinant representation» / Journal of High Energy Physics 2019, 103 (2019), <https://doi.org/10.1007/JHEP10%282019%29103>
6. Samuel Belliard and Nikita A. Slavnov. «Scalar Products in Twisted XXX Spin Chain. Determinant Representation» / Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA) 15 (2019), 066, <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2019.066>
7. A. Liashyk, S. Z. Pakuliak, E. Ragoucy, N. A. Slavnov. «Bethe vectors for orthogonal integrable models» / Theoretical and Mathematical Physics 201, pp. 1545-1564 (2019), <https://doi.org/10.1134/S0040577919110023>