

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)» (МФТИ, Физтех)

На правах рукописи

Ланина Елена Николаевна

# Симметричный подход к изучению петель Вильсона в трехмерной теории Черна–Саймонса

Специальность 1.3.3 — Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук  
Слепцов Алексей Васильевич

Москва — 2023

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Цветной полином ХОМФЛИ</b>	<b>27</b>
2.1	Теория Черна–Саймонса . . . . .	28
2.2	Интеграл Концевича . . . . .	31
2.3	Подход Решетихина-Тураева . . . . .	34
2.3.1	Квантовые коэффициенты Рака и $b_j$ -символы . . . . .	34
2.3.2	$\mathcal{R}$ -матрица . . . . .	35
2.3.3	$\mathcal{R}$ -матрицы через матрицы Рака . . . . .	37
2.3.4	Квантовые инварианты зацеплений . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Построение весовой системы <math>\varphi_{\mathfrak{sl}_N}</math></b>	<b>40</b>
3.1	Аналитическое продолжение собственных значений операторов Казимира $\mathfrak{sl}_N$ . . . . .	41
3.2	Собственные значения операторов Казимира $\mathfrak{sl}_N$ и трансляционная инвариантность . . . . .	42
3.3	Симметрии цветного полинома ХОМФЛИ . . . . .	43
3.4	Описание вложения весовой системы $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$ . . . . .	48
3.5	Групповые факторы ассоциированные с диаграммами Якоби . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Следствия для цветных полиномов ХОМФЛИ из явных формул для теоретико-групповой структуры</b>	<b>58</b>
4.1	Инварианты Васильева высших порядков . . . . .	59
4.2	Различение инвариантов Васильева . . . . .	62
4.3	Доказательство симметрии "тяги-крюк" для полиномов узлов ХОМФЛИ . . . . .	65
4.4	$q$ -голономность цветных полиномов Джонса . . . . .	67

4.5	Следствия для цветных полиномов Александера . . . . .	70
4.5.1	Новая симметрия полинома Александера . . . . .	71
4.5.2	Деформация из полинома Александера в ХОМФЛИ . . . . .	71
4.5.3	Скейлинговое соотношение для полинома Александера . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Свойства дефекта дифференциального разложения полинома ХОМФЛИ</b>	<b>75</b>
5.1	Дифференциальное разложение цветного полинома ХОМФЛИ . . . . .	76
5.2	Дефект дифференциального разложения . . . . .	78
5.3	Дефект определяет степень фундаментального полинома Александера . . . . .	81
5.3.1	Примеры для небольших дефектов . . . . .	81
5.3.2	Случай произвольного дефекта . . . . .	84
5.3.3	Промежуточный итог . . . . .	88
5.4	Целочисленность . . . . .	89
5.4.1	Двухнитевые торические узлы . . . . .	90
5.4.2	Антипараллельные потомки торических узлов . . . . .	91
5.4.3	Дефект $\delta = m - 1 = 0$ – потомки узла $3_1$ . . . . .	93
5.4.4	Дефект $\delta = m - 1 = 1$ – потомки узла $5_1$ . . . . .	94
5.4.5	Дефект $\delta = m - 1 > 1$ – потомки узла $(2m + 1)_1$ . . . . .	94
5.4.6	Пример узла $9_1$ . . . . .	97
5.5	Следствия для гипотезы о сохранении дефекта . . . . .	97
5.5.1	Потомки узла $3_1$ . . . . .	98
5.5.2	Потомки узла $5_1$ . . . . .	99
5.6	Рекурсивные соотношения ( $C$ -полиномы) для цветных полиномов Александера . . . . .	100
5.7	Другие однокрюковые представления . . . . .	102
5.7.1	Общие положения . . . . .	102
5.7.2	Представление $R = [2, 1]$ для дефекта $\delta = 0$ . . . . .	103
5.7.3	Представление $R = [2, 1]$ для дефекта $\delta \geq 1$ . . . . .	104
5.7.4	Представления $R = [r, 1]$ для дефекта $\delta = 0$ . . . . .	106
5.7.5	Представления $R = [r, 1^{s-1}]$ для дефекта $\delta = 0$ . . . . .	106

<b>6</b>	<b>Симметрия "тяни-крюк" для квантовых <math>6j</math>-символов</b>	<b>108</b>
6.1	Гипотеза о собственных значениях [106] . . . . .	109
6.2	Симметрия "тяни-крюк" для коэффициентов Рака . . . . .	109
6.3	Свидетельства в пользу симметрии "тяни-крюк" . . . . .	112
6.3.1	Доказательства гипотезы о собственных значениях . . . . .	113
6.3.2	Симметрия "тяни-крюк" для цветных полиномов ХОМФЛИ . . . . .	113
6.3.3	Примеры для $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ . . . . .	115
<b>7</b>	<b>Заключение</b>	<b>118</b>

# Глава 1

## Введение

### Актуальность и современное состояние исследований

В диссертации изучаются методически связанные вопросы по теории Черна-Саймонса, квантовым инвариантам узлов, особенно цветным полиномам ХОМФЛИ, и квантовым б $\bar{j}$ -символам.

### Теория Черна-Саймонса и квантовые инварианты узлов

Часть этой диссертации посвящена новому взгляду на пертурбативное исследование корреляторов в теории Черна-Саймонса [1–6] с действием

$$S_{CS}[A] = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{S^3} \text{tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (1.1)$$

Трехмерная теория Черна-Саймонса заслуживает внимания по нескольким причинам, она особенно интересна своими калибровочно-инвариантными наблюдаемыми – петелями Вильсона, широко известными как цветные полиномы узлов ХОМФЛИ:

$$\mathcal{H}_R^K(q, a) = \frac{1}{\text{qdim}(R)} \left\langle \text{tr}_R P \exp \left( \oint_{\mathcal{K}} A \right) \right\rangle_{CS}. \quad (1.2)$$

Цветные полиномы ХОМФЛИ «раскрашены» представлением  $R$  алгебры  $\mathfrak{sl}_N$ , а контуром интегрирования является узел  $\mathcal{K}$ . Удивительно, но такие средние действительно оказываются аналитическими выражениями: полиномами по пе-

ременным  $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{\kappa+N}\right) = e^{\hbar}$  и  $a = q^N$ . Считается, что операторы петель Вильсона управляют одним из самых интригующих физических явлений, таким как конфайнмент кварков в КХД [7].

Теория Черна-Саймонса связана с различными сюжетами современной теоретической и математической физики: квантовой теорией поля [8–11], теорией узлов [12–14], двумерными конформными моделями Весса-Зумино-Виттена [15–19] и топологической теории струн [20–24]. Эти связи и тот факт, что теория (1.1) является топологической, предоставляют методы и алгоритмы для точного вычисления любого коррелятора петель Вильсона. Существует несколько мощных вычислительных методов, однако результаты получены только для некоторых узлов и представлений. Вычислительная сложность резко возрастает по мере увеличения размера представления. Сложность ограничивает количество доступных результатов, что делает внутреннюю структуру цветных полиномов ХОМФЛИ в целом скрытой на данный момент.

Недавние исследования цветных полиномов ХОМФЛИ и открытие новых симметрий<sup>1</sup> и связанных с ними структур [25–28] побуждают вернуться к вопросу о пертурбативном разложении корреляторов Черна-Саймонса (1.2) по  $\hbar$ :

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_m \mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}} \mathcal{G}_{n,m}^R \right) \hbar^n. \quad (1.3)$$

Это пертурбативное разложение широко изучалось в физической литературе с точки зрения квантовой теории поля Черна-Саймонса [1, 2], а также в математической литературе с точки зрения интеграла Концевича [29, 30]. Разложение (1.3) представляет особый интерес в связи с тем, что зависимости от представления и узла  $\mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}}$  : зависящие от узла части  $\mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}}$  называются инвариантами Васильева или инвариантами конечного типа [29]. Зависящие от представления части  $\mathcal{G}_{n,m}^R$  в физической литературе называются групповыми

---

1

факторами или весовыми системами  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$ , ассоциированными с неприводимым конечномерным представлением  $R$  в математической литературе [29]. На данный момент было известно явное описание групповых факторов до 6-го порядка для некоторых представлений  $\mathfrak{sl}_N$ : фундаментального и симметрического [2] [31], а также для любых представлений  $\mathfrak{sl}_2$  [29]. Этого недостаточно, чтобы обнаружить новые симметрии, проявляющиеся для высших представлений (например, симметрия «тяги-крюк», см. в разделе 3.3). Мы делаем предположение, что симметрии цветных полиномов ХОМФЛИ накладывают достаточно условий, чтобы полностью зафиксировать вид групповых факторов.

В нашем исследовании мы изучаем теоретико-групповые составляющие пертурбативного разложения вакуумного среднего значения оператора петли Вильсона – групповые факторы:

$$\mathcal{G}_{n,m}^R \sim \text{tr}_R (T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_{2n}}), \quad (1.4)$$

где  $T_a$  – генераторы алгебры в представлении  $R$ . Такие групповые факторы не являются специфическими для петель Вильсона в теории Черна-Саймонса, они возникают в любой неабелевой калибровочной теории [32]. Групповые факторы являются естественными компонентами пертурбативных расчетов, см., например, расчет высших петлевых поправок к бета-функции КХД [33, 34], теорию перенормировок в модели Черна-Саймонса [35], корреляторы в модели БФ [36] и недавние работы по  $\mathcal{N} = 4$  суперсимметричной теории Янга-Миллса [37, 38].

## Дифференциальное разложение цветных полиномов ХОМФЛИ

Полиномы ХОМФЛИ [12, 13, 39–46] являются основными непертурбативными наблюдаемыми в теории Черна-Саймонса [47, 48], и на данный момент они являются важнейшим источником информации о таких объектах – они гораздо хуже поняты, чем корреляторы в матричных моделях [49, 50] и тесно связаны с суперсимметричными низкоэнергетическими теориями [51, 52]. Первоначаль-

но определяемые как некоторые произведения квантовых  $\mathcal{R}$ -матриц [8, 53–62], полиномы ХОМФЛИ обладают множеством дополнительных структур, которые не сразу очевидны из формулировки Черна-Саймонса и вместо этого являются следствием общей теории представлений. Они варьируются начиная от свойства полиномиальности петель Вильсона в соответствующих переменных  $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{k+N}\right)$  и  $a = q^N$  и кончая описанием в терминах комплексов Хованова-Рожанского [63–68]. Особый интерес в этом списке представляет и его свойства.

Дифференциальное разложение (ДР) полинома ХОМФЛИ (1.2) в симметрических представлениях для узла-восьмерки  $4_1$  был представлен в [69] и в дальнейшем был обобщен на другие узлы [70–77]. Первоначально ДР было предложено в виде

$$\mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}} \stackrel{?}{=} \sum_{j=0}^r \frac{[r]!}{[j]![r-j]!} F_{[j]}^{\mathcal{K}}(a, q) \prod_{i=0}^{j-1} \{aq^{r+i}\} \{aq^{i-1}\} \quad (1.5)$$

с полиномами Лорана  $F_{[j]}^{\mathcal{K}}(a, q)$ . Здесь  $\{x\} := x - x^{-1}$  и  $[n] := \{q^n\}/\{q\}$ . ДР также известно под названием [73, 78–83]. Знак вопроса над равенством в (1.5) стоит, потому что это соотношение не совсем верно для всех узлов  $\mathcal{K}$ . На самом деле, в общем случае оно слабее [84]:

$$\mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}} = \sum_{j=0}^r \frac{[r]!}{[j]![r-j]!} G_{[j]}^{\mathcal{K}}(a, q) \{a/q\} \prod_{i=0}^{j-1} \{aq^{r+i}\}. \quad (1.6)$$

Это ДР выводится из теории представлений, и в нем стоит полином  $G_{[j]}^{\mathcal{K}}$ , а не  $F_{[j]}^{\mathcal{K}}$  (1.5). Дефект<sup>2</sup> [84] определяет степень факторизации  $G_{[j]}^{\mathcal{K}}$  по отношению к  $F_{[j]}^{\mathcal{K}}$ .

Переменные  $G_{[j]}^{\mathcal{K}}$  являются более удобными координатами в пространстве узлов, чем сами полиномы ХОМФЛИ [85], однако они не являются параметрами, например, они удовлетворяют  $C$ -полиномиальным уравнениям [77, 86, 87].



## Квантовые $6j$ -символы

Еще одной важной темой наших исследований является изучение одного из строительных блоков квантовых инвариантов узлов – квантовых  $6j$ -символов. Коэффициенты Рака или  $6j$ -символы обеспечивают изоморфизм между двумя различными слияниями в тензорном произведении трех представлений. Коэффициенты Рака являются распространенными объектами в теоретической и математической физике. Часто коэффициенты Рака или  $6j$ -символы возникают в задачах, где надо иметь дело с тензорными произведениями неприводимых представлений. Чтобы эффективно решать подобные задачи, необходимо глубоко понимать аналитическую зависимость коэффициентов Рака от параметров и их внутреннюю структуру.

Один из простейших примеров в физике – сложение трех угловых моментов в квантовой механике [88]. В этом примере коэффициенты Рака обеспечивают преобразование между двумя естественными базисами, которые соответствуют разному порядку сложения моментов. Существует большой список применений  $6j$ -символов в физике: они появляются в задачах ядерной спектроскопии [89, 90], а также в описании эффекта Ландау-Померанчука-Мигдала [91], в решеточной калибровочной теории [92], в теории полупроводников для построения кубитов [93] и в задачах, связанных с квантовыми состояниями ультрахолодных атомов щелочноземельных металлов [94]. Более сложными примерами являются преобразования конформных блоков [15, 18, 95] и вычисление наблюдаемых в теории Черна-Саймонса методом Решетихина-Тураева [53, 54, 96–98].

Коэффициенты Рака хорошо определены для конечномерных [99, 100] и бесконечномерных [101–104] неприводимых представлений классических групп Ли и для представлений квантовых групп [105]. В последнем случае коэффициенты Рака называются квантовыми. В этой работе мы рассматриваем только неприводимые конечномерные представления квантовой алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ .

Гипотеза о собственных значениях утверждает, что коэффициенты Рака однозначно определяются нормированными собственными значениями соответствующих  $\mathcal{R}$ -матриц. Прямое следствие состоит в том, что два коэффициента Рака равны, если собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц совпадают. Гипотеза была предложена в [106] для случая узла и далее обобщена на случай зацепления в [11].

Гипотезу о собственных значениях можно сформулировать только для квантового случая, поскольку в классическом случае  $\mathcal{R}$ -матрицы сводятся к матрицам перестановок. Гипотеза о собственных значениях для случая  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  была доказана в [107]. Доказательств для ранга  $N > 2$  нет, однако в некоторых случаях гипотеза проверялась. В случае без вырождения есть явные выражения для матриц Рака через собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы для матриц размером до  $6 \times 6$  [106, 108] для случая трехнитевого узла, для матриц размера до  $3 \times 3$  для случая трехнитевого зацепления [11] и для матриц размера до  $5 \times 5$  для случая 4-нитевого зацепления [109]. Ситуация значительно усложняется при наличии кратностей, но даже в этом случае, когда матрицы Рака можно сделать блочно-диагональными, эти блоки, как предполагают, также удовлетворяют гипотезе о собственных значениях [110].

Гипотеза о собственных значениях имеет множество важных приложений. В нашем исследовании мы используем ее, чтобы находить классы симметрий матриц Рака [111] и квантовых инвариантов узлов. Симметрии  $6j$ -символов были явно приведены только для симметрических представлений и сопряженных им [107, 112].

## Цели и задачи

**Целью работы** является построение методов вычисления групповой структуры квантовых инвариантов узлов, а также описание и исследование различных

свойств квантовых инвариантов узлов и их составляющих элементов, в первую очередь, квантовых  $6j$ -символов. Согласно поставленной цели нужно было решить следующие **задачи**:

- 1) разработать методы построения групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ для произвольных  $N$  и представлений  $R$  алгебры  $\mathfrak{sl}_N$ ;
- 2) на основе полученных результатов для групповой структуры исследовать возможные следствия для квантовых инвариантов узлов, такие как скейлинговые и рекурсивные соотношения для полиномов ХОМФЛИ, обобщение групповых факторов при помощи параметризации Вожеля, получение инвариантов Васильева высших порядков;
- 3) доказать гипотезу о связи дефекта дифференциального разложения цветного полинома ХОМФЛИ и степени фундаментального полинома Александера; изучить полноту значений коэффициентов дифференциального разложения;
- 4) изучить симметрию "тяги-крюк" квантовых  $6j$ -символов  $\mathfrak{sl}_N$ , применимую для любых представлений, включая случаи с кратностями; изучить следствия проявления этой симметрии.

## **Научная новизна**

Все представленные к защите диссертации результаты являются новыми и оригинальными разработками автора диссертации. Результаты опубликованы в ведущих зарубежных журналах и докладывались на конференциях, включая все-российские и международные. Работы соискателя цитируются в работах других авторов и известны в научном сообществе.

## Практическая и научная ценность

Теория Черна-Саймонса является простейшим примером трехмерной квантовой теории поля, и ее полное решение для произвольного представления калибровочной группы и узла приведет к прорыву в теоретической физике, подобному решению конформных теорий поля как простейших примеров двумерных квантовых теорий поля. В ходе наших исследований мы вплотную подошли к окончательному и исчерпывающему описанию групповой структуры петель Вильсона в теории Черна-Саймонса – цветных полиномов ХОМФЛИ. Кроме того, мы начали работу над обобщением найденной групповой структуры на любую простую алгебру Ли, что позволит лучше понять целый спектр квантовых теорий поля. В частности, с точки зрения квантовой теории поля средние от петель Вильсона важны, поскольку вполне вероятно, что 4d-конфайнмент наиболее естественно объясняется в их терминах. Таким образом, результаты работы имеют большую теоретическую значимость для исследований квантовых теорий поля.

Кроме того, теория Черна-Саймонса имеет массу конкретных физических приложений. Например, она описывает состояния в дробном квантовом эффекте Холла. Теория Черна-Саймонса является одной из наиболее общих топологических квантовых теорий поля в  $2+1$  измерениях, поэтому она может служить эффективной теорией для двумерных материалов, допускающих топологические возбуждения – анионы. Топологическая природа анионов делает их эволюцию устойчивой по отношению к возмущениям, что дает потенциальную возможность построения квантового компьютера, устойчивого к шумам. Также, имеются и приложения в математике: недавно была установлена связь теории Черна-Саймонса с классической математической проблемой построения инвариантов трехмерных многообразий. Таким образом, наши результаты мо-

гут иметь приложения как к смежным разделам теоретической и математической физики и математики, так и практические приложения в виде изучения свойств материалов и даже построения эффективного квантового компьютера.

## **Методология и методы диссертационного исследования**

Представленные в диссертации результаты получены с помощью численных и аналитических вычислений. Для исследования групповой структуры пертурбативного петлевого разложения вильсоновских операторов использовались методы теории групп и конструкция интеграла Концевича, связанную с алгеброй хордовых диаграмм и алгеброй диаграмм Якоби и переходящую в цветной полином ХОМФЛИ при помощи отображения весовой системы. Для описания групповых факторов полинома ХОМФЛИ широко использовался симметричный подход наложения ограничений на групповую структуру, приходящих из конкретных симметрий цветного полинома ХОМФЛИ. Для нахождения инвариантов Васильева высших порядков использовалось пертурбативное разложение цветных полиномов ХОМФЛИ. Для ответа на вопрос о различении инвариантов Васильева весовыми системами простых алгебр Ли использовался метод параметризации П. Вожеля. Вычисление квантового  $A$ -полинома для симметрического полинома Джонса для торических узлов  $T[2, 2k + 1]$  основывалось на теореме о  $q$ -голономности полинома Джонса. Получение свойств полиномов Александера также было проведено с использованием теоретико-групповых соображений. Свойства дефекта цветного полинома ХОМФЛИ были исследованы при помощи его дифференциального разложения, происходящего из теории представлений и соответствующих симметрий полинома ХОМФЛИ. Для обнаружения симметрии "тяги-крюк" квантовых  $6j$ -символов были использованы описание квантовых инвариантов узлов через методы теории интегрируемых систем ( $\mathcal{R}$ -матричный подход к описанию представлений группы кос), а также

гипотеза о собственных значениях.

## Положения, выносимые на защиту диссертации

- Метод построения групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ в любом порядке пертурбативного разложения с использованием соображений симметрии. Аналитические формулы для мультипликативного базиса групповой структуры полинома ХОМФЛИ для алгебры  $\mathfrak{sl}_N$  любого ранга и для ее произвольного представления  $R$ ; сами групповые факторы вплоть до 13-го уровня пертурбативного разложения. Гипотеза о том, что групповая структура цветных полиномов ХОМФЛИ полностью определяется известными для них симметриями.
- Получение инвариантов Васильева выше 6-го порядка из квантовых инвариантов узлов с использованием найденного базиса групповых факторов. Явное вычисление инвариантов Васильева узла  $3_1$  до 11-го порядка включительно и узла  $5_2$  до 10-го порядка включительно.
- Нахождение двух групповых факторов на шестом уровне, неразличимых весовыми системами всех простых алгебр Ли с использованием параметризации П. Вожеля.
- Новый метод нахождения рекурсивных соотношений для цветных полиномов ХОМФЛИ, что эквивалентно вычислению квантовых  $A$ -полиномов. Нахождение рекурсивных соотношений для симметрических полиномов Джонса торических узлов  $T[2, 2k + 1]$  в качестве примера.
- Установление наличия новых симметрий цветного полинома Александера. Предъявление аналитической  $N$ -деформации четных групповых факторов цветных полиномов Александера в групповые факторы полиномов ХОМ-

ФЛИ. Обобщение однокрюкового скейлингового соотношения цветного полинома Александра на случай произвольного представления.

- Доказательство гипотезы о связи дефекта дифференциального разложения цветного полинома ХОМФЛИ со степенью фундаментального полинома Александра. Исследование множества значений целочисленных параметров симметрических полиномов Александра. Следствия для гипотезы о сохранении дефекта при антипараллельной эволюции. Вычисление  $S$ -полиномов для симметрических полиномов Александра. Соотношения на коэффициенты дифференциального разложения цветных полиномов Александра в случае однокрюковых представлений кроме симметрических.
- Доказательство симметрии «тяги-крюк» цветных полиномов ХОМФЛИ в случае узлов. Гипотеза о наличии симметрии «тяги-крюк» у полиномов ХОМФЛИ в случае зацеплений и аргументы в ее пользу. Конкретные примеры наличия симметрии «тяги-крюк» квантовых  $b_j$ -символов для нетривиальных случаев (для представлений с вырождениями), что подтверждает гипотезу о собственных значениях.

## Степень достоверности и апробация результатов

**Степень достоверности** полученных результатов определяется обоснованностью применяемых методов исследования и их соответствием с другими подходами, а также публикациями в высокорейтинговых международных журналах со строгой рецензионной политикой. Результаты диссертации подтверждаются полученными другими авторами результатами.

Результаты диссертации докладывались на теоретических семинарах ККТ-ЭФ (ранее – ИТЭФ) НИЦ Курчатовский институт, лаборатории математической и теоретической физики МФТИ и кафедры теоретической физики МФ-

ТИ, а также на следующих конференциях: Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (ИТЭФ, Москва, 2020, 2021 гг.); XVIII International Conference on Symmetry Methods in Physics (Ереван, Армения, 2022 г.); UK-QFT XI (Кембриджский университет, Великобритания, 2023 г.); десятая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"(НИУ ВШЭ и МИАН, Москва, 2023 г.); International conference "Quantum Field theory and gravity"(ТГПУ, Томск, 2023 г.); 65-я Всероссийская научная конференция МФТИ (МФТИ, 2023 г.).

## **Личный вклад и публикации**

Все результаты данной диссертации получены лично соискателем или при его непосредственном участии. Соискатель участвовал в выполнении всех работ и написании текстов всех публикаций, вошедших в данную диссертацию. В соответствующих публикациях указаны имена соавторов.

По материалам диссертации были опубликованы 3 научные работы в рецензируемых журналах [113—115].

## **Структура и объем диссертации**

Диссертация содержит введение, пять глав основного текста и заключение. Общий объем диссертации составляет 135 страниц, включая 17 рисунков и 12 таблиц. Список литературы включает в себя 165 ссылок.

## **Содержание диссертации**

Во **введении** представлена общая характеристика диссертационной работы: перечислены поставленные задачи и обоснована актуальность темы.

В **главе 2** обсуждаются три самосогласованных способа определения цвет-



ного полинома ХОМФЛИ  $\mathcal{H}_R^\kappa(q, a)$ , которые мы будем использовать в ходе наших исследований. Также вводятся основные изучаемые объекты, из которых строятся квантовые инварианты узлов – групповые факторы, инварианты Васильева,  $\mathcal{R}$ -матрицы, б $\bar{\jmath}$ -символы и т.д.

- Первое определение связывает квантовые полиномы узла с петлями Вильсона в трехмерной теории Черна-Саймонса:

$$\mathcal{H}_R^\kappa(q, a) = \frac{1}{\text{qdim}(R)} \left\langle \text{tr}_R P \exp \left( \oint_{\mathcal{K}} A \right) \right\rangle_{\text{CS}}, \quad (1.7)$$

где действие Черна-Саймонса

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{S^3} \text{tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (1.8)$$

Контуром в петле Вильсона является узел  $\mathcal{K}$ , а  $R$  – представление алгебры  $\mathfrak{sl}_N$ , соответствующее калибровочной группе  $SU(N)$ ,  $\text{qdim}(R)$  – квантовая размерность. Ответом для (2.1) является полином от двух переменных  $q$  и  $a$ , параметризованный следующим образом:

$$q = e^{\hbar}, \quad a = e^{N\hbar}, \quad \hbar := \frac{2\pi i}{\kappa + N}. \quad (1.9)$$

Пертурбативное разложение по  $\hbar$  цветного полинома ХОМФЛИ не зависит от процедуры фиксации калибровки и имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R^\kappa &= \sum_{n=0}^{\infty} \oint dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \langle A^{a_1}(x_1) A^{a_2}(x_2) \dots A^{a_n}(x_n) \rangle \text{tr}_R(T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_n}) \hbar^n = \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\dim \mathbb{G}_n} \mathcal{V}_{n,m}^\kappa \mathcal{G}_{n,m}^R \right) \hbar^n}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $\dim \mathbb{G}_n$  – число линейно независимых  $\mathcal{G}_{n,m}^R$  на фиксированном уровне  $n$ . Основное свойство пертурбативного разложения (2.4) состоит в том, что зависимости от узла и от представления расщепляются. Функции  $\mathcal{V}_{n,m}^\kappa$ , зависящие от узла, называются инвариантами Васильева. Зависящие от представления функции  $\mathcal{G}_{n,m}^R$  называются групповыми факторами.

Согласно (2.4), групповые факторы вычисляются как следы от произведений генераторов  $\mathfrak{sl}_N$  в конкретном представлении  $R$ . Можно показать, что такое произведение генераторов всегда лежит в центре универсальной обертывающей  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$ . Прямое вычисление групповых факторов очень трудоемко, и его сложность быстро растет с ростом порядка  $n$  пертурбативного разложения и представления  $R$ . Более того, вычисления приходится проводить отдельно для каждого ранга алгебры  $\mathfrak{sl}_N$  и представления  $R$ . Мы хотим привести более простой и унифицированный метод вычисления групповых факторов в любом порядке  $n$ , используя симметричные соображения.

- Второе определение полинома ХОМФЛИ математическое и связывает его с абстрактной алгеброй хордовых диаграмм  $\mathcal{D}$  с помощью линейного отображения, называемого весовой системой алгебры Ли, ассоциированной с представлением  $R$ :

$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_{n,m}) = \mathcal{G}_{n,m}^R, \quad \mathcal{D}_{n,m} \in \mathcal{D}. \quad (1.11)$$

Таким образом, что если рассмотреть так называемый интеграл Концевича

$$I^K = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_m \nu_{n,m}^K \mathcal{D}_{n,m} \right) \hbar^n, \quad (1.12)$$

то по линейности весовая система  $\mathfrak{sl}_N$  переведет его в полином ХОМФЛИ:

$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(I^K) = \mathcal{H}_R^K(q, a). \quad (1.13)$$

Пространство хордовых диаграмм  $\mathcal{D}$  имеет естественную градуировку по количеству хорд  $\mathcal{D} = \bigoplus_n \mathcal{D}_n$ . Можно ввести фильтрацию по числу генераторов  $\mathfrak{sl}_N$  в центре универсальной обертывающей алгебры  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$ :  $\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_3 \subset \mathcal{Z}_4 \subset \dots \subset ZU(\mathfrak{sl}_N)$ , где  $\mathcal{Z}_k$  состоит из произведений не более чем  $2k$  генераторов. Таким образом, описание групповой структуры полиномов ХОМФЛИ с математической точки зрения эквивалентно описанию вложений  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}_n) \subset \mathcal{Z}_n$ .

- Третье определение полинома ХОМФЛИ тоже математическое и происходит из квантовой алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ . Любое зацепление можно представить в

виде замыкания соответствующей косы. Хорошо известно, что  $\mathcal{R}$ -матрицы  $\mathcal{R}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  задают представление группы кос  $\mathcal{B}_m$  на  $m$  нитях:

$$\pi : \mathcal{B}_m \rightarrow \text{End} (V_{R_1} \otimes \dots \otimes V_{R_m}) , \quad \pi (\sigma_i) = \mathcal{R}_i , \quad (1.14)$$

где  $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$  – образующие группы кос  $\mathcal{B}_m$ . Пусть  $\mathcal{L}$  – ориентированное зацепление с  $L$  компонентами  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_L$ , раскрашенное неприводимыми конечномерными представлениями  $V_{R_1}, \dots, V_{R_L}$  из  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ , а  $\beta_L \in \mathcal{B}_m$  – некоторая коса из  $m$  нитей, замыкание которой дает  $\mathcal{L}$ . Тогда цветной полином ХОМФЛИ согласно подходу Решетихина-Тураева можно определить как следующий квантовый инвариант зацепления  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{H}_{R_1, \dots, R_L}^{\mathcal{L}} = \frac{1}{\text{qdim}(R)} {}_q \text{tr}_{V_{R_1} \otimes \dots \otimes V_{R_m}} (\pi (\beta_{\mathcal{L}})) , \quad (1.15)$$

где  ${}_q \text{tr}$  – квантовый след.

Собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц известны, поэтому практический метод вычисления полиномов ХОМФЛИ через формализм Решетихина-Тураева состоит в диагонализации соответствующих  $\mathcal{R}$ -матриц при помощи матриц Рака или же их нормированных коэффициентов – бj-символов.

В **главе 3** изучаются определенные во второй главе вложения  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}_n) \subset \mathcal{Z}_n$  при помощи наложения ограничений, приходящих из симметрий цветных полиномов ХОМФЛИ. Иными словами, вводится метод построения групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ, универсальный для всех алгебр  $\mathfrak{sl}_N$  и их представлений  $R$ . В силу того, что в групповой структуре полиномов ХОМФЛИ стоят произведения генераторов, лежащих в  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$ , сами полиномы ХОМФЛИ выражаются через собственные значения операторов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ , поэтому можно переписать пертурбативное разложение (2.4) в виде

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}} = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{|\Delta| \leq n} \mathcal{C}_{\Delta}^R \sum_{m=0}^{n-|\Delta|} (v_{\Delta, m}^{\mathcal{K}})_n N^m , \quad (1.16)$$

где  $\mathcal{C}_{\Delta} = \prod_i \mathcal{C}_{\Delta_i}$  – инварианты Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ ,  $\Delta$  – диаграмма Юнга без единичных элементов (в  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$  базисом являются  $N - 1$  оператор Казимира  $\hat{\mathcal{C}}_2$ ,

$\hat{\mathcal{C}}_3, \dots, \hat{\mathcal{C}}_N$ );  $(v_{\Delta, m}^{\mathcal{K}})_n$  также являются инвариантами Васильева и представляют собой линейные комбинации  $\mathcal{V}_{n, m}$  (2.4). Предел суммирования по  $m$  в (3.31) диктуется ограничениями, накладываемыми известными симметриями полинома ХОМФЛИ.

Мы нашли аналитическую формулу для инвариантов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ , справедливую для любого  $N$  и представления  $R$ :

$$\mathcal{C}_n^R = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}}{N^m} \binom{n}{m} \left( (C_{n-m}^R + \theta_{n-m}^N) (C_1^R + \theta_1^N)^m - \theta_{n-m}^N (\theta_1^N)^m \right), \quad (1.17)$$

где  $\theta_k^N = \sum_{i=1}^N (-i + \frac{1}{2})^k$ . Здесь мы использовали вложение  $ZU(\mathfrak{sl}_N) \subset ZU(\mathfrak{gl}_\infty)$ , и  $C_k^R$  – инварианты Казимира  $ZU(\mathfrak{gl}_\infty)$ :

$$C_k^R = \sum_{i=1}^{\infty} (R_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k. \quad (1.18)$$

Заметим, что сумма конечна для любой конечной диаграммы Юнга  $R$ , так как мы для удобства полагаем  $R_i = 0$  для достаточно больших  $i$ .

Однако, инварианты Казимира  $\mathfrak{sl}_N$  (3.28) сингулярны при  $N \rightarrow 0$ . В то же время, разложение (3.31) должно быть регуляро, так как при  $N = 0$  оно должно давать цветной полином Александера. Соображения симметрии и условие конечности (3.31) при  $N = 0$  диктуют следующий мультипликативный базис для полиномов ХОМФЛИ:

$$\mathcal{C}_{[2n]}^R := \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{C_k (C_{2n-k} + 2\theta_{2n-k})}{2 \cdot k! (2n - k)!}. \quad (1.19)$$

Регуляризацию каждого  $\mathcal{C}_{2n_1+1}^R \mathcal{C}_{2n_2+1}^R$  приходится выполнять отдельно, однако мы предъявляем конкретный алгоритм нахождения  $\mathcal{C}_{[2n_1+1, 2n_2+1]}^R$ . Два типа функций  $\mathcal{C}_{[2n]}^R$  и  $\mathcal{C}_{[2n_1+1, 2n_2+1]}^R$  мультипликативно генерируют все элементы Казимира, встречаемые в пертурбативном разложении в качестве групповых факторов полинома ХОМФЛИ. Мы как раз и обозначаем эти инварианты Казимира через  $\mathcal{C}_\Delta$  (3.31), например,  $\mathcal{C}_{[3, 3, 2]} = \mathcal{C}_{[3, 3]} \mathcal{C}_{[2]}$ .

Далее в **главе 3** мы вычисляем на компьютере групповые факторы вплоть до 13 порядка и приходим к гипотезе, что групповая структура цветных полиномов ХОМФЛИ полностью фиксируется их известными симметриями.

В **главе 4** мы переходим к выводу важных следствий из полученной в предыдущей главе групповой структуры полиномов ХОМФЛИ.

- Ранее групповые факторы цветных полиномов ХОМФЛИ вычислялись посредством применения весовой системы, ассоциированной с представлением  $R$ , к соответствующим хордовым диаграммам (2.9). Сложность данного алгоритма быстро растет с повышением порядка хордовой диаграммы, и он был проделан только вплоть до 6-го порядка. Так как практически инварианты Васильева вычисляются именно через пертурбативное разложение (2.4), то и они до недавних пор были известны только до 6-го порядка включительно.

Теперь мы можем выписать новый базис групповых факторов (3.31) в любом порядке пертурбативного разложения. Соответственно, если мы знаем достаточно много полиномов ХОМФЛИ в разных представлениях для фиксированного узла, то из полученной системы линейных уравнений мы можем найти и все инварианты Васильева данного узла фиксированного порядка. Мы применили данный метод для вычисления инвариантов Васильева для узла  $3_1$  до 11 порядка включительно и для узла  $5_2$  до 10 порядка включительно.

- Однако еще из вычисления групповых факторов полинома ХОМФЛИ видно, что не все инварианты Васильева можно извлечь из его пертурбативного разложения. Уже на 6 уровне появляются два совпадающих групповых фактора:  $\mathcal{G}_{6,2} = \mathcal{G}_{6,3}$ . Оказывается, что это равенство поднимается на любую простую алгебру Ли с помощью введения параметров Вожеля. Но эти групповые факторы не являются примарными, то есть факторизуются на групповые факторы нижних порядков. Поэтому и соответствующие инварианты Васильева тоже можно различить.

Однако начиная с 8 уровня весовая система  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$  перестает различать примарные групповые факторы, поэтому мы не можем получить все примарные инварианты Васильева из пертурбативного разложения полинома ХОМФЛИ. Интересно ответить на вопрос, весовые системы всех ли полупростых алгебр Ли не различают примарные инварианты Васильева начиная с 8 уровня, и в идеале при помощи параметризации Вожеля обобщить групповую структуру полиномов ХОМФЛИ на любую полупростую алгебру Ли. Эти вопросы остаются для следующих исследований.

- Другим важным следствием полученной групповой структуры полиномов ХОМФЛИ, представленным в **главе 4**, является доказательство недавно открытой симметрии цветных полиномов узлов ХОМФЛИ – симметрии "тяги-крюк". Она следует из совпадения действий трансляций и преобразования "тяги-крюк" на инварианты Казимира  $\mathfrak{gl}_\infty$  и из условия трансляционной инвариантности инварианты Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ , составляющих групповые факторы цветных полиномов ХОМФЛИ.

- Также в **главе 4** предьявлен метод нахождения рекурсивных соотношений на цветные полиномы ХОМФЛИ. Они интересны тем, что образуют так называемые квантовые  $A$ -полиномы, которые сами являются инвариантами узла и классический предел которых задают спектральную кривую в теории Черна-Саймонса. Описанный в данной главе метод применен к нахождению рекурсивных соотношений для симметрических полиномов Джонса для торических узлов  $T[2, 2k + 1]$ .

Обратно, зная эти соотношения, можно найти уравнения на инварианты Васильева или на групповые факторы. Инварианты Васильева нижних порядков полностью фиксируются и совпадают с уже известными ответами для торических узлов.

- И наконец, мы находим несколько следствий для цветных полиномов Алек-

сандера – полиномов ХОМФЛИ при  $a = 1$ . Во-первых, мы устанавливаем наличие еще не открытой симметрии для полинома Александера, приходящей из ограничений на групповую структуру, накладываемых симметрией сопряжения полинома ХОМФЛИ. Эта симметрия не имеет прямого аналога для случая  $N = 0$ , поэтому конкретный вид симметрии, накладываемой известными ограничениями на полином Александера, еще предстоит найти.

Во-вторых, мы исследовали обратные правила, т.е.  $N$ -деформацию полиномов Александера к полиномам ХОМФЛИ:

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) \xrightarrow[\text{rules}]{N} \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, q^N) . \quad (1.20)$$

А именно, мы нашли аналитическую деформацию части групповых факторов полинома Александера, которая переводит их в групповые факторы полинома ХОМФЛИ  $\mathcal{C}_{[2n]}$ .

В третьих, для однокрюковых представлений для полинома Александера было известно скейлинговое соотношение:

$$\mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q) - \mathcal{A}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q^{|R|}) = 0, \quad \text{где } R = [r, 1^L] . \quad (1.21)$$

Мы обобщили его на случай произвольного числа крюков в представлении. Оказывается, что в таком случае красивое соотношение (3.25) сильно портится: в нем появляется бесконечное число достаточно сложных слагаемых. Кроме того, число членов остается бесконечным для любого количества крюков большего одного. Природа этих соотношений все еще остается загадочной.

В **главе 5** мы исследуем свойства дифференциального разложения симметрического полинома ХОМФЛИ (5.1). Это разложение напрямую следует из теории представлений алгебры  $\mathfrak{sl}_N$ .

Коэффициенты  $G_{[k]}$  получается далее разложить на множители. Их свойство

факторизации зависит от параметра узла  $\delta^{\mathcal{K}}$ , называемого :

$$G_{[s]}^{\mathcal{K}(\delta)}(a, q) = \mathcal{G}_{[s]}^{\mathcal{K}(\delta)}(a, q) \cdot \prod_{i=1}^{\text{floor}\left(\frac{s-1}{\delta+1}\right)} \{aq^{i-1}\} . \quad (1.22)$$

Мы доказали гипотезу о том, что степень фундаментального полинома Александра равна  $\delta + 1$ . Доказательство напрямую следует из дифференциального разложения (5.1) и однокрюкового скейлингового соотношения для полинома Александра (3.25).

В ходе нашего анализа мы получили ряд важных следствий. Во-первых, оказывается, что коэффициенты дифференциального разложения  $G_{[s]}$  симметрического полинома Александра полностью определяются коэффициентами дифференциального разложения фундаментального полинома Александра. Получающиеся соотношения называются квантовыми  $S$ -полиномами. Оказывается, что они образуют полный набор в случае узлов дефекта-0. Это следует из того факта, что для таких узлов в качестве симметрических полиномов Александра реализуются все возможные целочисленные полиномы Лорана по  $q$ . Для узлов больших дефектов вопрос еще не до конца исследован.

Во-вторых, мы исследовали гипотезу о сохранении дефекта. Она гласит, что дефект узла не меняется, если в нем вместо любого пересечения вставить антипараллельную косу. На самом деле, она требует более аккуратной формулировки: дефект не может увеличиваться, но иногда может уменьшаться. Как мы установили, особенности дефекта можно детектировать путем изменения степени полинома Александра. Мы классифицировали некоторые случаи уменьшения дефекта и появления дополнительной факторизации коэффициентов  $G_{[s]}$ , более сильной, чем это обусловлено стандартной формулой (5.12).

В-третьих, мы начали исследование соотношений между коэффициентами дифференциального разложения для случаев несимметрических представлений с разбора других однокрюковых представлений.



В главе 6 мы обнаруживаем новую симметрию квантовых б $\bar{j}$ -символов (и матриц Рака) – симметрию "тяги-крюк". Введем преобразование перетягивания крюка в терминах диаграмм Юнга. Диаграмма Юнга помещается внутри подходящего толстого крюка  $(K + M|M)$  для некоторых целых чисел  $K$  и  $M$ . Введем аналог обозначений Фробениуса: первые  $K$  строк параметризуем их длиной  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , остальные строки параметризуем сдвинутыми фробениусовыми переменными  $\alpha_i = R_i - (i - K) + 1$ ,  $\beta_i = R'_{i-K} - i + 1$ ,  $i = K + 1, \dots, K + M$ . Преобразование "тяги-крюк"  $\mathbf{T}_\epsilon^{(K+M|M)}$  перетягивает диаграмму Юнга внутри толстого крюка:  $R_i \longrightarrow R_i - \epsilon$ ,  $\alpha_i \longrightarrow \alpha_i - \epsilon$ ,  $\beta_i \longrightarrow \beta_i + \epsilon$ , где  $\epsilon$  – соответствующий сдвиг диаграммы.

Собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц выражаются через квадратичные инварианты Казимира  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ , и как было нами показано при изучении групповой структуры цветных полиномов ХОМФЛИ, они не меняются при преобразовании "тяги-крюк". Гипотеза о собственных значениях утверждает, что матрицы Рака равны в базисах, где  $\mathcal{R}$ -матрицы диагональны, если два набора нормированных собственных значений соответствующих  $\mathcal{R}$ -матриц совпадают. Отсюда следует, что и коэффициенты Рака должны быть инвариантны относительно преобразования перетягивания крюка:

$$U \left[ \begin{array}{cc|c} R_1 & R_2 & R_{12} \\ R_3 & R_{123} & R_{23} \end{array} \right] = U \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{T}_{\epsilon_1}(R_1) & \mathbf{T}_{\epsilon_2}(R_2) & \mathbf{T}_{\epsilon_1+\epsilon_2}(R_{12}) \\ \mathbf{T}_{\epsilon_3}(R_3) & \mathbf{T}_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}(R_{123}) & \mathbf{T}_{\epsilon_2+\epsilon_3}(R_{23}) \end{array} \right]. \quad (1.23)$$

Важно подчеркнуть, что симметрия перетягивания крюка – это первая найденная симметрия матриц Рака, которая действует на любых представлениях и работает для случаев с кратностями.

Гипотеза о собственных значениях была доказана для  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  и в случае узлов для  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  для матриц размером до  $5 \times 5$  без кратностей. Поэтому в этих случаях и симметрия перетягивания крюка для квантовых б $\bar{j}$ -символов является доказанной.

С другой стороны, симметрия "тяги-крюк" для матриц Рака опускается с одноименной симметрии полиномов ХОМФЛИ в случае узлов. И наоборот, теперь уже для случая зацеплений полиномы ХОМФЛИ (2.32) состоят из квантовых размерностей и собственных значений  $\mathcal{R}$ -матриц, которые инвариантны относительно преобразования перетягивания крюка. А матрицы Рака оказываются инвариантными относительно этого преобразования согласно гипотезе о собственных значениях. Таким образом, все структурные элементы полинома ХОМФЛИ инвариантны относительно симметрии "тяги-крюк", и мы можем констатировать, что она выполняется и для случая зацеплений. В обозначенном случае данная симметрия полинома ХОМФЛИ еще не была ни доказана, ни даже обнаружена.

И наконец, в качестве подтверждения наличия симметрии "тяги-крюк" у квантовых  $6j$ -символов мы приводим крайне нетривиальные примеры ее выполнения для случаев представлений с кратностями. А именно мы рассматриваем случай  $R = [3, 2] \rightarrow \mathbf{T}_1^{(2|1)}([3, 2]) = [2, 1, 1] = [3, 1]'$ . Среди всех получившихся диаграмм Юнга  $R_{123}$  есть четыре нетривиальные матрицы с кратностями, которые в сумме дают 99  $6j$ -символов.

$$1. V_{[7,5,1,1,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \rightarrow V_{[8,2,1,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$$

$$2. V_{[8,5,1,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \rightarrow V_{[7,2,1,1,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$$

$$3. V_{[8,6,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \rightarrow V_{[6,2,2,1,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$$

$$4. V_{[7,6,1,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \rightarrow V_{[7,2,2,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$$

Во всех этих случаях существует базис, в котором соответствующие матрицы Рака совпадают. Таким образом, мы проверили симметрию "тяги-крюк" для самого интересного и неочевидного случая представлений с кратностями.

В **заключении** обсуждаются полученные результаты.

## Глава 2

# Цветной полином ХОМФЛИ

Цветные полиномы ХОМФЛИ являются топологическими инвариантами узлов и зацеплений. Они обобщают многие известные полиномиальные инварианты узлов, такие как известные полиномы Джонса и Александера, квантовые инварианты Решетихина-Тураева  $\mathfrak{sl}_N$ . Суть этого обобщения состоит в аналитическом продолжении и введении новой переменной  $a = q^N$ . Это аналитическое продолжение позволяет связать цветные полиномы ХОМФЛИ с квантовыми инвариантами узлов не только групп Ли, но и супергрупп Ли [116].

Существует гипотеза, что цветные полиномы ХОМФЛИ являются полными инвариантами узлов и зацеплений. Это означает, что для любых двух различных узлов  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  существует неприводимое представление  $\mathfrak{sl}_N R$  такое, что  $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}_1} \neq \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}_2}$ . На практике наиболее сложными случаями являются узлы-мутанты [117, 118], которые не могут быть различены неприводимыми представлениями без кратностей, т.е. представлениями, ассоциированными с прямоугольными диаграммами Юнга [119]. Таким образом, теоретико-групповая структура цветных полиномов ХОМФЛИ отвечает за топологическую информацию об узлах.

Цветной полином ХОМФЛИ может быть введен несколькими самосогласованными способами. Точное полинома ХОМФЛИ  
можно дать двумя способами.

- С помощью  $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, a)$  (см. раздел 2.2), про которое можно подробнее посмотреть в главе 8 книги [29]. Он имеет прямую связь с пертурбативным разложением полинома ХОМФЛИ, которое более подробно показано ниже.
- С использованием  $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, a)$  (см. раздел 2.3), который хорошо проиллюстрирован в [120].

Физики-теоретики часто используют своего рода цветного полинома ХОМФЛИ. Они появляются в классической работе Виттена [48].

- Первое определение вводится с использованием  $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, a)$ . Эта связь хорошо зарекомендовала себя, см. например [121].
- Второе определение можно сформулировать через связь цветного полинома ХОМФЛИ с  $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, a)$  (см. раздел 2.1).

В этой главе мы вводим три из вышеуказанных определений полинома ХОМФЛИ, одновременно обсуждая все детали, которые понадобятся нам в наших исследованиях.

## 2.1 Теория Черна–Саймонса

Прорывом стало установление связи между топологическими квантовыми теориями поля и теорией узлов [48]. В частности

### Определение 2.1.1

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, a) = \frac{1}{\text{qdim}(R)} \left\langle \text{tr}_R P \exp \left( \oint_{\mathcal{K}} A \right) \right\rangle_{\text{CS}}, \quad (2.1)$$

$$S_{\text{CS}}[A] = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{S^3} \text{tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (2.2)$$

$R$  – представление алгебры  $\mathfrak{sl}_N$ , соответствующее калибровочной группе  $SU(N)$ ,  $\text{qdim}(R)$  – квантовая размерность, а контуром в петле Вильсона может быть произвольный узел  $\mathcal{K}$ . Удивительно, что ответ для (2.1) – полином от двух переменных  $q$  и  $a$ , которые выражаются через константу связи следующим образом:

$$q = e^{\hbar}, \quad a = e^{N\hbar}, \quad \hbar := \frac{2\pi i}{\kappa + N}. \quad (2.3)$$

Мы обсуждаем цветные полиномы ХОМФЛИ, поэтому квантовая размерность присутствует в знаменателе (2.1).

Пертурбативное разложение может быть получено с помощью процедуры фиксации калибровки и применения соответствующей диаграммной техники Фейнмана, например, см. [4]. Полученное разложение цветного полинома ХОМФЛИ не зависит от процедуры фиксации калибровки и имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \oint dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_n \langle A^{a_1}(x_1) A^{a_2}(x_2) \dots A^{a_n}(x_n) \rangle \text{tr}_R(T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_n}) \hbar^n = \\ &= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\dim \mathbb{G}_n} \mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}} \mathcal{G}_{n,m}^R \right) \hbar^n}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\dim \mathbb{G}_n$  – число линейно независимых  $\mathcal{G}_{n,m}^R$  на фиксированном уровне  $n$ , и каждое слагаемое  $\mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}} \mathcal{G}_{n,m}^R$  происходит из диаграммы Фейнмана. Основное свойство пертурбативного разложения (2.4) состоит в том, что зависимости от узла и от представления расщепляются.

### Определение 2.1.2

$$\mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}}$$

[122].

Они являются рациональными числами, однако их выражения зависят от фиксации калибровки.

### Определение 2.1.3

 $\mathcal{G}_{n,m}^R$ 

Групповые факторы можно посчитать как следы произведений образующих  $\mathfrak{sl}_N$   $T_a$  в представлении  $R$ . Если образующие нормированы как  $\text{tr}_R(T_a T_b) = \frac{\delta_{ab}}{2 \dim R}$ , то простейший групповой фактор принимает вид:

$$\mathcal{G}_{2,1}^R = \text{tr}_R \left( \sum_{a,b} T_a T_b T_a T_b - T_a T_a T_b T_b \right) = \sum_{a,b,c} f_{abc} \text{tr}_R(T_a T_c T_b) = N \mathcal{C}_2^R, \quad (2.5)$$

где  $\mathcal{C}_2^R$  – собственное значение квадратичного оператора Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ . На этом конкретном примере можно наблюдать замечательное свойство групповых факторов: они являются полиномами от собственных значений операторов Казимира. Можно доказать, что в групповых факторах выражения под следом лежат в центре универсальной обертывающей алгебры  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$ . Операторы Казимира  $\hat{\mathcal{C}}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , составляют базис в центре универсальной обертывающей алгебры, поэтому групповые факторы являются полиномами инвариантов Казимира  $\mathcal{C}_k^R$ :

$$\mathcal{G}_{n,m}^R = \text{Pol}(\mathcal{C}_1^R, \dots, \mathcal{C}_N^R). \quad (2.6)$$

Некоторые групповые факторы являются произведениями групповых факторов нижних уровней. Мы можем определить, например, один из групповых факторов 4-го уровня следующим образом:

$$\mathcal{G}_{4,1}^R = (\mathcal{G}_{2,1}^R)^2. \quad (2.7)$$

### Определение 2.1.4

### Определение 2.1.5

## 2.2 Интеграл Концевича

### Определение 2.2.1

[29, 30]

$$I^{\mathcal{K}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_m \mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}} \mathcal{D}_{n,m} \right) \hbar^n, \quad (2.8)$$

$\mathcal{D}_{n,m}$  – пространство хордовых диаграмм с  $n$  вершинами и  $m$  хордами,  $\mathcal{V}_{n,m}^{\mathcal{K}}$  – матрица инцидентности,  $n = 0, \dots, \dim \mathcal{D}_n$ ,  $m = 1, \dots, \dim \mathcal{D}_n$ .

Мы приводим примеры хордовых диаграмм для  $n = 0, \dots, 4$  на рис. 2.1. Пространство хордовых диаграмм  $\mathcal{D}$  имеет естественную градуировку по количеству хорд  $\mathcal{D} = \bigoplus_n \mathcal{D}_n$ . Известно (см. главу 4 [29]), что пространство хордовых диаграмм представляет собой алгебру с соотношениями, так называемыми 1Т- и 4Т-соотношениями. 4Т-соотношение обеспечивает хорошо определенное произведение в пространстве хордовых диаграмм, в то время как 1Т-соотношение запрещает хордовые диаграммы с изолированной хордой. В частности, не существует диаграммы с одной хордой (см. рис. 2.1).

Можно вернуться к групповым факторам, используя отображение, называемое

$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R$ , ассоциированной с представлением  $R$ :

$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_{n,m}) = \mathcal{G}_{n,m}^R. \quad (2.9)$$

Как следствие из этого факта, можно ввести следующее определение цветного полинома ХОМФЛИ.

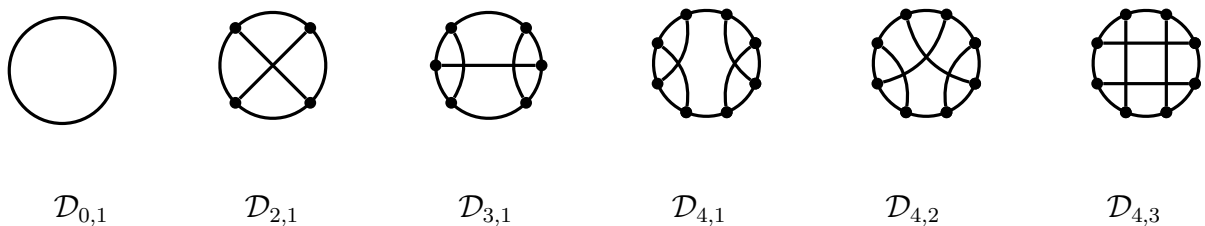


Рис. 2.1: Примеры хордовых диаграмм

## Определение 2.2.2

$\mathfrak{sl}_N$ ,

$R$ :

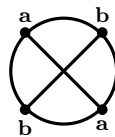
$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(I^K) = \mathcal{H}_R^K(q, a). \quad (2.10)$$

Хордовые диаграммы дают единый подход к вычислению групповых факторов. А именно, вычисляется неоснащенная весовая система  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R$ , ассоциированная с представлением  $R$ , на базисных элементах  $\mathcal{D}_{n,m}$  пространства хордовых диаграмм. Неоснащенное условие для весовой системы необходимо из-за 1Т-соотношения в алгебре хордовых диаграмм. Другими словами, неоснащенная весовая система переводит хордовую диаграмму с изолированной хордой в ноль. Приведем пример первой нетривиальной хордовой диаграммы  $\mathcal{D}_{2,1}$ , отображаемой на групповой фактор (2.5):

$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_{2,1}) = \text{tr}_R \left( \sum_{a,b} T_a T_b T_a T_b - T_a T_a T_b T_b \right) = N \mathcal{C}_2^R. \quad (2.11)$$

Второе слагаемое возникает из-за процедуры дефрейминга [29], а первое слагаемое есть образ оснащенной весовой системы. Оснащенная весовая система  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^{R,fr}$  может быть вычислена для хордовой диаграммы простым способом, который понятен из примера на рис. 2.2. Неоснащенная весовая система  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R$ , ассоциированная с представлением  $R$ , может быть представлена в виде последовательности отображений:

$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R : \mathcal{D} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{sl}_N}} ZU(\mathfrak{sl}_N) \xrightarrow{\rho_R} \text{End}(V_R) \xrightarrow{\text{Tr}_R} \mathbb{C}. \quad (2.12)$$



$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^{R,fr}(\mathcal{D}_{2,1}) = \text{tr}_R \left( \sum_{a,b} T_a T_b T_a T_b \right).$$

Рис. 2.2: Пример применения оснащенной весовой системы



На первом шаге неоснащенная весовая система алгебры Ли  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$  отображает хордовую диаграмму  $\mathcal{D}_{n,m}$  в центр универсальной обертывающей алгебры  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$ . То есть образ хордовой диаграммы представляет собой комбинацию операторов Казимира  $\hat{\mathcal{C}}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , которые составляют мультипликативный базис. Затем все операторы выбираются в представлении  $R$ . Согласно лемме Шура операторы Казимира пропорциональны тождественному оператору  $\hat{\mathcal{C}}_k^R = \mathcal{C}_k^R \hat{1}$ . На последнем шаге мы берем след, и приходим к функции от собственных значений операторов Казимира:

$$\mathcal{G}_{n,m}^R = \varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_{n,m}) = \text{Pol}(\mathcal{C}_1^R, \dots, \mathcal{C}_N^R). \quad (2.13)$$

Весовая система алгебры Ли уважает алгебраическую структуру пространства хордовых диаграмм  $\mathcal{D}$ , так как она является гомоморфизмом. Однако было показано, что весовая система алгебры Ли имеет ненулевое ядро [123]. Это означает, что некоторые инварианты Васильева не могут быть различены групповыми факторами полинома ХОМФЛИ. В этом смысле хордовые диаграммы являются обобщением групповых факторов. В практических расчетах хордовые диаграммы не очень удобны, поскольку базис в пространствах хордовых диаграмм  $\mathcal{D}_n$  известен явно только для небольшого  $n$ .

Можно ввести фильтрацию по числу образующих  $\mathfrak{sl}_N$  в центре универсальной обертывающей алгебры  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$ :

$$\mathcal{Z}_2 \subset \mathcal{Z}_3 \subset \mathcal{Z}_4 \subset \dots \subset ZU(\mathfrak{sl}_N), \quad (2.14)$$

где  $\mathcal{Z}_k$  состоит из произведений не более чем  $2k$  образующих. Тогда отображение  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$  (2.9) переводит  $\mathcal{D}_n$  в  $\mathcal{Z}_n$  и

$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R : \mathcal{D}_n \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{sl}_N}} \mathcal{Z}_n \xrightarrow{\rho_R} \text{End}(V_R) \xrightarrow{\text{Tr}_R} \mathbb{C}. \quad (2.15)$$

Для подробного описания весовой системы  $\mathfrak{sl}_N$  далее (см. главу 3) мы опишем вложения  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}_n) \subset \mathcal{Z}_n$ .

## 2.3 Подход Решетихина-Тураева

### 2.3.1 Квантовые коэффициенты Рака и бj-символы

В этом разделе мы даем определения квантовой матрицы Рака и квантового бj-символа.

Пусть  $V_{R_1}, V_{R_2}, V_{R_3}$  – три конечномерных неприводимых представления квантованной универсальной обертывающей алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ . Будем считать, что  $q$  – ненулевое комплексное число, не равное корню из единицы. Тогда все конечномерные неприводимые представления являются представлениями старших весов и могут быть пронумерованы диаграммами Юнга. Напомним, что диаграмма Юнга  $\mu = \{\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_l\}$  строится по старшим весам  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l\}$  представления  $V_\mu$ :  $\mu_i = \sum_{k=i}^l \omega_k \forall i = 1, \dots, l$ , и наоборот  $\omega_i = \mu_i - \mu_{i+1}$ . Поскольку тензорное произведение  $V_{R_1} \otimes V_{R_2} \otimes V_{R_3}$  ассоциативно, имеет место естественный изоморфизм:

$$(V_{R_1} \otimes V_{R_2}) \otimes V_{R_3} \rightarrow V_{R_1} \otimes (V_{R_2} \otimes V_{R_3}). \quad (2.16)$$

Можно разложить тензорные произведения двух представлений в прямую сумму неприводимых компонент:

$$V_{R_1} \otimes V_{R_2} = \bigoplus_{R_{12}} \mathcal{M}_{R_{12}}^{R_1, R_2} \otimes V_{R_{12}}, \quad V_{R_2} \otimes V_{R_3} = \bigoplus_{R_{23}} \mathcal{M}_{R_{23}}^{R_2, R_3} \otimes V_{R_{23}}. \quad (2.17)$$

Здесь  $\mathcal{M}_{R_{12}}^{R_1, R_2}$  и  $\mathcal{M}_{R_{23}}^{R_2, R_3}$  – подпространства векторов старшего веса со старшими весами, соответствующими диаграммам Юнга  $R_{12} \vdash |R_1| + |R_2|$  и  $R_{23} \vdash |R_2| + |R_3|$  соответственно. Размерности пространств  $\mathcal{M}_{R_{12}}^{R_1, R_2}$  и  $\mathcal{M}_{R_{23}}^{R_2, R_3}$  называются представлениями  $V_{R_{12}}$  и  $V_{R_{23}}$  соответственно.

Разложим вторые тензорные произведения в (2.16):

$$\begin{aligned} (V_{R_1} \otimes V_{R_2}) \otimes V_{R_3} &= \bigoplus_{R_{12}, R_{123}} \mathcal{M}_{R_{12}}^{R_1, R_2} \otimes \mathcal{M}_{R_{123}}^{R_{12}, R_3} \otimes V_{R_{123}}, \\ V_{R_1} \otimes (V_{R_2} \otimes V_{R_3}) &= \bigoplus_{R_{23}, R_{123}} \mathcal{M}_{R_{123}}^{R_1, R_{23}} \otimes \mathcal{M}_{R_{23}}^{R_2, R_3} \otimes V_{R_{123}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тогда из условия ассоциативности (2.16) следует следующее

### Определение 2.3.1

$$U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_{123} \end{bmatrix} : \bigoplus_{R_{12}} \mathcal{M}_{R_{12}}^{R_1, R_2} \otimes \mathcal{M}_{R_{123}}^{R_{12}, R_3} \rightarrow \bigoplus_{R_{23}} \mathcal{M}_{R_{123}}^{R_1, R_{23}} \otimes \mathcal{M}_{R_{23}}^{R_2, R_3}. \quad (2.19)$$

$$U \left[ \begin{array}{cc|c} R_1 & R_2 & R_{12} \\ R_3 & R_{123} & R_{23} \end{array} \right]$$

### Определение 2.3.2

$$\left\{ \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_{12} \\ R_3 & R_{123} & R_{23} \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\text{qdim}(R_{12}) \text{qdim}(R_{23})}} U \left[ \begin{array}{cc|c} R_1 & R_2 & R_{12} \\ R_3 & R_{123} & R_{23} \end{array} \right], \quad (2.20)$$

$\text{qdim}(R)$   $V_R$ .

В [124–128] представлены явные вычисления квантовых коэффициентов Рака через векторы старшего веса для различных представлений.

В дальнейшем мы будем использовать следующее свойство [129–131].

$$U \left[ \begin{array}{cc|c} R_1 & R_2 & R_{12} \\ R_3 & R_{123} & R_{23} \end{array} \right] = U \left[ \begin{array}{cc|c} R'_1 & R'_2 & R'_{12} \\ R'_3 & R'_{123} & R'_{23} \end{array} \right], \quad (2.21)$$

### 2.3.2 $\mathcal{R}$ -матрица

В этом разделе мы определяем еще один важный объект в нашем исследовании – так называемую квантовую  $\mathcal{R}$ -матрицу. Рассмотрим представления алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_N) V_{R_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

### Определение 2.3.3 $\mathcal{R}$ -

$$\mathcal{R}_i = 1_{V_{R_1}} \otimes 1_{V_{R_2}} \otimes \dots \otimes P\check{\mathcal{R}}_{i,i+1} \otimes \dots \otimes 1_{V_{R_m}} \in \text{End}(V_{R_1} \otimes \dots \otimes V_{R_m}), \quad (2.22)$$

$$P(x \otimes y) = y \otimes x \quad \check{\mathcal{R}} - \quad \mathcal{R} - \quad :$$

$$\check{\mathcal{R}} = q^{\sum_{i,j} C_{ij}^{-1} H_i \otimes H_j} \prod_{\text{положительные корни } \beta} \exp_q [(q - q^{-1}) E_\beta \otimes F_\beta]. \quad (2.23)$$

$$\exp_q \quad , \quad C_{ij} \quad , \quad \{H_i, E_i, F_i\} \\ - \quad U_q(\mathfrak{sl}_N).$$

Хорошо известно, что  $\mathcal{R}_i, i = 1, \dots, m$  задают представление группы кос Артина на  $\mathcal{B}_m$  на  $m$  нитях:

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{B}_m &\rightarrow \text{End}(V_{R_1} \otimes \dots \otimes V_{R_m}), \\ \pi(\sigma_i) &= \mathcal{R}_i, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$  – образующие группы кос  $\mathcal{B}_m$ .

Собственные значения универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицы  $\check{\mathcal{R}}_{i,i+1}$  хорошо известны [96, 132]:

$$\begin{aligned} \lambda_{R_i, R_{i+1}} &= \epsilon_{R_i, R_{i+1}} q^{\kappa(R_i, R_{i+1}) - \kappa(R_i) - \kappa(R_{i+1})}, & \text{если } R_i \neq R_{i+1}, \\ \lambda_{R_i, R_{i+1}} &= \epsilon_{R_i, R_{i+1}} q^{\kappa(R_i, R_{i+1}) - 4\kappa(R_i) - |R_i|N}, & \text{если } R_i = R_{i+1}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь  $i$  нумерует представления, а  $V_{R_i, R_{i+1}}$  – неприводимые компоненты тензорного произведения  $V_{R_i}$  и  $V_{R_{i+1}}$ :

$$V_{R_i} \otimes V_{R_{i+1}} = \bigoplus_{R_i, R_{i+1}} V_{R_i, R_{i+1}}, \quad (2.26)$$

где мы допускаем повторяющиеся слагаемые;  $\kappa(R)$  определяется по следующей формуле:

$$\kappa(R) = \sum_{(i,j) \in R} i - j, \quad (2.27)$$

а  $\epsilon_{R_i, R_{i+1}} = \pm 1$  – знак. В случае узла все представления одинаковы:  $R_i = R$ . В этом случае знаки собственных значений зависят от того, являются ли старшие

векторы представлений или при пере-  
 становке двух представлений  $V_{R_i}$  и  $V_{R_{i+1}}$ . Говорят, что эти два типа представлений  $V_{R_{i,i+1}}$  принадлежат либо симметрическим, либо антисимметрическим квадратам представления  $V_R$ .

### 2.3.3 $\mathcal{R}$ -матрицы через матрицы Рака

Поскольку мы знаем собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы (2.25), удобно провести диагонализацию всех  $\mathcal{R}$ -матриц с помощью матриц Рака.

Рассмотрим представления  $V_{R_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и выберем базис в  $V_{R_1} \otimes \dots \otimes V_{R_m}$ , в котором  $\mathcal{R}_1$  блочно-диагональна. Такой базис можно выбрать, когда задан следующий порядок в тензорном произведении представлений:

$$B_{12,3,\dots,m} := (\dots((V_{R_1} \otimes V_{R_2}) \otimes V_{R_3}) \otimes \dots) \otimes V_{R_m}. \quad (2.28)$$

Разным блокам матрицы  $\mathcal{R}_1$  соответствуют разные представления  $V_{R_{12}}$  в разложении

$$V_{R_1} \otimes V_{R_2} = \bigoplus_{R_{12}} \mathcal{M}_{R_{12}}^{R_1, R_2} \otimes V_{R_{12}}. \quad (2.29)$$

Если дополнительно повернуть компоненты, соответствующие каждому  $R_{12}$ , можно диагонализировать матрицу  $\mathcal{R}_1$ .

Такую же процедуру можно произвести в базисе, соответствующем

$$B_{1,23,\dots,m} := (\dots(V_{R_1} \otimes (V_{R_2} \otimes V_{R_3})) \otimes \dots) \otimes V_{R_m}. \quad (2.30)$$

Следовательно, диагонализация  $\mathcal{R}$ -матрицы  $\mathcal{R}_2$  происходит при помощи матрицы Рака:

$$\mathcal{R}_2 = U^\dagger \begin{bmatrix} R_1 & R_3 \\ R_2 & R_{123} \end{bmatrix} \cdot \Lambda_{\mathcal{R}_2} \cdot U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_{123} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

где  $\Lambda_{\mathcal{R}_2}$  – диагональная матрица с собственными значениями  $\mathcal{R}_2$ . Аналогичную процедуру можно проделать со всеми  $\mathcal{R}$ -матрицами. В то время как собственные значения для всех  $\mathcal{R}$ -матриц могут быть вычислены явно (2.25), вычис-

ление коэффициентов Рака представляет собой сложную процедуру, которая была выполнена аналитически только для случая  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ .

### 2.3.4 Квантовые инварианты зацеплений

В этом пункте мы определяем цветной полином ХОМФЛИ с использованием подхода Решетихина-Тураева [53].

**Теорема Александра.**

$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$

Пусть  $\mathcal{L}$  – ориентированное зацепление с  $L$  компонентами  $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_L$ , а  $\beta_L \in \mathcal{B}_m$  – некоторая коса из  $m$  нитей, замыкание которой дает  $\mathcal{L}$ . С каждой компонентой зацепления ассоциируем неприводимое конечномерное представление  $V_{R_1}, \dots, V_{R_L}$  алгебры  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ .

**Определение 2.3.4**

$\mathcal{L}$ ,

1:

$$H_{R_1, \dots, R_L}^{\mathcal{L}} = q \operatorname{tr}_{V_{R_1} \otimes \dots \otimes V_{R_m}} (\pi(\beta_{\mathcal{L}})), \quad (2.32)$$

$q \operatorname{tr}$  –

Можно расписать квантовый след в (2.32):

$$H_{R_1, \dots, R_L}^{\mathcal{L}}(q, a = q^N) = \sum_{V_Q \in V_{R_1} \otimes \dots \otimes V_{R_m}} \operatorname{tr}_{\mathcal{M}_Q} (\pi(\beta_{\mathcal{L}})) \cdot \operatorname{qdim}(Q), \quad (2.33)$$

где мы разлагаем

$$\bigotimes_{i=1}^m V_{R_i} = \bigoplus_{\mu} \mathcal{M}_Q \otimes V_Q. \quad (2.34)$$

1

[133]

$\mathcal{R}$

(2.25).

В этой процедуре мы получаем ненормированный полином ХОМФЛИ. Нормированный полином ХОМФЛИ (2.1) для узла  $\mathcal{K}$  выражается через ненормированный (2.33) следующим образом:

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, a) = \frac{H_R^{\mathcal{K}}(q, a)}{H_R^{\circ}(q, a)} = \frac{1}{\text{qdim}(R)} H_R^{\mathcal{K}}(q, a). \quad (2.35)$$

## Глава 3

# Построение весовой системы $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$

В этой главе мы подробно опишем подход, который мы используем для изучения весовой системы  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R$  [113]. Хорошо известно, что весовая система, вычисляемая на базисной хордовой диаграмме, является функцией собственных значений операторов Казимира (2.13). Однако конкретный вид вложения весовой системы  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$  в центр универсальной обертывающей алгебры  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$  неизвестен. Мы предлагаем подход к решению этой задачи и находим полиномы  $\mathcal{G}_{n,m}(c_2^R, \dots, c_N^R)$  явно. Используются следующие две идеи:

- Аналитически продолжаем собственные значения операторов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ :  $ZU(\mathfrak{sl}_N) \subset ZU(\mathfrak{gl}_\infty)$ . Это продолжение совпадает с аналитическим продолжением квантовых  $\mathfrak{sl}_N$ -инвариантов до цветных полиномов ХОМФЛИ.
- Используем известные симметрии цветных полиномов ХОМФЛИ для ограничения вида полиномов  $\mathcal{G}_{n,m}(c_2^R, \dots, c_N^R)$ .



### 3.1 Аналитическое продолжение собственных значений операторов Казимира $\mathfrak{sl}_N$

Покажем на конкретных примерах, как записать формулы для инвариантов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$  через инварианты Казимира  $\mathfrak{gl}_\infty$   $C_k^R$  [134]:

$$C_k^R = \sum_{i=1}^{\infty} (R_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k. \quad (3.1)$$

Заметим, что сумма конечна для любой конечной диаграммы Юнга  $R$ , так как мы для удобства полагаем  $R_i = 0$  для достаточно больших  $i$ . Собственные значения оператора Казимира  $\mathfrak{sl}_N$  можно представить через функции  $C_k^R$ . Приведем частный пример квадратичного оператора Казимира:

$$C_2^R = C_2 - \frac{C_1^2}{N} + NC_1. \quad (3.2)$$

Здесь и далее в этом тексте мы иногда опускаем зависимость от  $R$  функций  $C_k$  там, где это не может привести к недоразумениям. Примечательно, что последняя формула описывает квадратичные операторы Казимира в алгебрах  $\mathfrak{sl}_N$  для любого  $N$ . Базис собственных значений Казимира  $C_k$  выделен следующими фактами. Соответствующая статистическая сумма Гурвица [135] становится КП  $\tau$ -функцией [136, 137], и в терминах статистической суммы Гурвица этот базис устанавливает соответствие с теорией Громова-Виттена [138].

Одной из основных особенностей формул типа (3.2) является то, что они обеспечивают . Хорошо известно, что неприводимые конечномерные представления  $\mathfrak{sl}_N$  нумеруются диаграммами Юнга  $R$  с не более чем  $N$  строками, т.е.  $l(R) \leq N$ . Примечательно, что формулы для собственных значений Казимира через функции  $C_k$  применимы для любой диаграммы Юнга  $R$  и значений  $N$ , а в секторе  $l(R) \leq N$  их значения совпадают с обычными собственными значениями операторов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ . Из теорем комплексного анализа и рассуждений об аналитическом продолжении полино-

миальных функций аналитическое продолжение является единственным. Следовательно, это аналитическое продолжение совпадает с продолжением  $a = q^N$ , которое мы обсуждаем в начале главы 2.

## 3.2 Собственные значения операторов Казимира $\mathfrak{sl}_N$ и трансляционная инвариантность

В этом разделе мы рассмотрим основные факты о собственных значениях  $\mathfrak{sl}_N$  операторов Казимира  $\hat{C}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Эти операторы составляют базис в центре универсальной обертывающей алгебры  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$ . Собственные значения  $\mathcal{C}_k^R$  операторов Казимира в неприводимом представлении  $R = [R_1, \dots, R_{N-1}]$  являются функциями переменных  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ .

Существует производящая функция для собственных значений операторов Казимира  $\mathcal{C}_k^R$  [139]:

$$G_{\mathfrak{sl}_N}(z) = z^{-1} \left( 1 - \prod_{i=1}^N \left( 1 - \frac{z}{1 - \lambda_i z} \right) \right) = \sum_{k=0} \tilde{\mathcal{C}}_k^R z^k, \quad (3.3)$$

$$\lambda_i = R_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N R_j - i + N. \quad (3.4)$$

Обратите внимание, что эта производящая функция явно инвариантна относительно  $R_i \rightarrow R_i + \delta R$ . Это соотношение соответствует следующему факту из теории представлений  $\mathfrak{sl}_N$ : диаграммы Юнга  $[R_1 + \delta R, R_2 + \delta R, \dots, R_N + \delta R]$  и  $[R_1, R_2, \dots, R_N]$  соответствуют одному и тому же неприводимому представлению. Используя этот факт, можно положить последнюю строку диаграммы Юнга равной нулю  $R_N = 0$ .

Собственные значения операторов Казимира  $\mathcal{C}_k^R$  – это многочлены степени  $k$  от переменных  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$ . Собственное значение первого оператора Казимира  $\mathcal{C}_1^R$  равно нулю из-за трансляционной инвариантности. Как обсуждалось в предыдущем разделе, собственные значения операторов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$

можно переформулировать в терминах функций  $C_k$ . Приведем формулы такого рода для собственных значений операторов Казимира  $C_k^R$ , получаемых из производящей функции (3.3) в младших порядках:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_2^R &= C_2 - \frac{1}{N}C_1^2 + NC_1, \\ \tilde{C}_3^R &= C_3 - \frac{3}{N}C_2C_1 + \frac{2}{N^2}C_1^3 + 2NC_2 - \frac{7}{2}C_1^2 + \frac{4N^2 + 1}{4}C_1.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Можно проверить, что эти унифицированные формулы воспроизводят известные ответы для собственных значений операторов Казимира (3.3). Также эти выражения для собственных значений операторов Казимира чрезвычайно полезны, поскольку они имеют один и тот же вид в алгебрах  $\mathfrak{sl}_N$  для любого  $N$ .

Будучи трансляционно-инвариантными функциями, собственные значения  $\mathfrak{sl}_N$  операторов Казимира  $C_k(C_1^R, \dots, C_k^R)$  инвариантны относительно следующего преобразования функций  $C_k^R$ :

$$\boxed{C_k^{R+\delta R} = \sum_{j=0}^k (\delta R)^j \binom{k}{j} (C_{k-j}^R + \theta_{k-j}^N) - \theta_k^N},\tag{3.6}$$

где мы ввели  $\theta_k^N = \sum_{i=1}^N (-i + \frac{1}{2})^k$  для упрощения формул.

### 3.3 Симметрии цветного полинома ХОМФЛИ

Мы приведем известные симметрии и свойства цветных полиномов ХОМФЛИ в этом разделе. В следующем разделе эти симметрии будут использованы для ограничения вида функций

$$\mathcal{G}_{n,m}^R(C_1, \dots, C_N).\tag{3.7}$$

В частности, мы обсудим действие симметрий на функции инварианты Казимира  $C_k$ , через которые выражаются инварианты Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ .

- **Ограничение на порядок.** Ограничение на порядок групповых факторов происходит из-за того, что разложение по родам цветного полинома ХОМ-

ФЛИ корректно определено [140, 141]. Это свойство ограничивает порядок примарных групповых факторов. Порядок  $g$  определяется для монома следующим образом:

$$g(N^k C_\Delta) = k + |\Delta|. \quad (3.8)$$

Порядок группового фактора определяется как максимальный порядок его компонентов. Например, можно вычислить порядок простейшего группового фактора:

$$g(\mathcal{G}_{2,1}^R) = g(NC_2 - C_1^2 + N^2C_1) = 3. \quad (3.9)$$

Порядок группового фактора  $\mathcal{G}_{n,m}^R$  ограничен:

$$\boxed{g(\mathcal{G}_{n,m}^R) \leq n + 1.} \quad (3.10)$$

• **Дуальность ранг-уровень.** Дуальность ранг-уровень теории Черна–Саймонса [142–145] обеспечивает следующее соотношение:

$$\mathcal{H}_R^K(q, a) = \mathcal{H}_{R^T}^K(q^{-1}, a), \quad (3.11)$$

где  $R^T$  — представление, полученное транспонированием диаграммы Юнга (см. в качестве примера рис. 3.1). Это свойство накладывает следующие условия на групповые факторы:

$$\boxed{\mathcal{G}_{n,m}^{R^T} = (-1)^n \mathcal{G}_{n,m}^R \Big|_{N \rightarrow -N}} \quad (3.12)$$

и на инварианты Казимира  $\mathfrak{gl}_\infty$ :

$$C_k^{R^T} = (-1)^{k+1} C_k^R. \quad (3.13)$$



Рис. 3.1: Пример транспонирования диаграммы Юнга

• **Симметрия сопряжения.** Симметрия сопряжения определяется при фиксированном значении  $N$ . Она происходит из теории представлений, где сопряженное представление  $\bar{R}$  определяется как дополнение диаграммы Юнга  $R$  к прямоугольнику  $R_1 \times N$ . Процедура сопряжения понятна из примера для  $N = 5$  на рис. 3.2. Элементы диаграммы Юнга сопряженного представления  $\bar{R}$  выражаются следующей формулой:

$$\bar{R}_i = R_1 - R_{N-i+1}. \quad (3.14)$$

Хорошо известно, что цветные полиномы ХОМФЛИ для представления  $R$  и сопряженного с ним  $\bar{R}$  совпадают:

$$\mathcal{H}_R^K(q, a) = \mathcal{H}_{\bar{R}}^K(q, a). \quad (3.15)$$

Этот факт накладывает условие на групповые факторы:

$$\boxed{\mathcal{G}_{n,m}^{\bar{R}} = \mathcal{G}_{n,m}^R}. \quad (3.16)$$

Как прямое следствие формулы (3.14) и определения функций  $C_k^R$  (3.1) можно вывести следующее правило преобразования:

$$C_k^{\bar{R}} = (-1)^k \sum_{p=0}^k \epsilon^p \binom{k}{p} (C_{k-p}^R + \theta_{k-p}^N) - \theta_k^N, \quad (3.17)$$

где функция  $\theta_k^N = \sum_{i=1}^N (-i + \frac{1}{2})^k$ . Параметр  $\epsilon = N - R_1$ , однако мы полагаем переменную  $\epsilon$  произвольной, поскольку это уравнение справедливо для любого представления  $R$  и значения  $N$ . Обратите внимание на наличие множителя  $(-1)^k$  перед суммой (3.17). Правило преобразования (3.14) представляет собой комбинацию сдвига на  $R_1$  и изменения знака всех  $R_i \rightarrow -R_i$ , поэтому результирующее правило преобразования для инвариантов Казимира (3.17) похоже на (3.6).

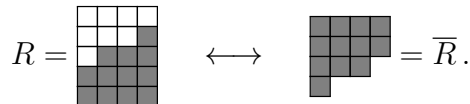


Рис. 3.2: Пример сопряжения диаграммы Юнга

• **Симметрия "тяни-крюк"**. Здесь мы рассмотрим недавно открытую симметрию "тяни-крюк" цветных полиномов ХОМФЛИ. В конце главы мы обнаружим, что симметрия "тяни-крюк" не ограничивает форму групповых факторов. Симметрия "тяни-крюк" [28] цветных полиномов ХОМФЛИ гласит:

$$\mathcal{H}_R^K(q, a = q^N) = \mathcal{H}_{\mathbf{T}_\epsilon^{(N+M|M)}(R)}^K(q, a = q^N), \quad (3.18)$$

где  $\mathbf{T}_\epsilon^{(N+M|M)}$  – преобразование диаграммы Юнга, перетягивающее диаграмму внутри толстого крюка  $(N + M|M)$ . Приведем пример преобразования "тяни-крюк" с  $N = 2$ ,  $M = 2$  на рис. 3.3.

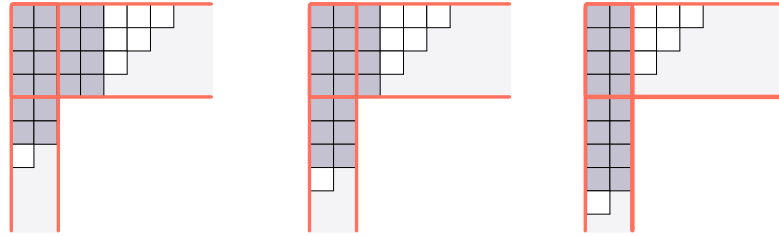


Рис. 3.3: Пример применения преобразования "тяни-крюк"

Эта симметрия имеет супергрупповое происхождение [28]. Квантовые инварианты узлов Решетихина-Тураева квантовой супергруппы  $U_q(\mathfrak{sl}(N|M))$  и квантовой группы  $U_q(\mathfrak{sl}(|N - M|))$  совпадают. Симметрия "тяни-крюк" является проявлением отношения эквивалентности в теории представлений супералгебры  $\mathfrak{sl}(N|M)$ . Для количественного описания симметрии можно использовать аналог обозначений Фробениуса для диаграмм Юнга:

$$[R_1, \dots, R_N] (\alpha_{N+1}, \dots, \alpha_{N+M} \mid \beta_{N+1}, \dots, \beta_{N+M}), \quad (3.19)$$

где  $R_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , – длины первых  $N$  строк диаграммы Юнга  $R$ , а остальная часть диаграммы параметризуется сдвинутыми переменными Фробениуса:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= R_i - (i - N) + 1, & i > N. \\ \beta_i &= R_{i-N}^T - i + 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Тогда  $\mathbf{T}_\epsilon^{(N+M|M)}$  представляет собой преобразование диаграммы Юнга

$$R_i \longrightarrow R_i + \epsilon, \quad \alpha_i \longrightarrow \alpha_i + \epsilon, \quad \beta_i \longrightarrow \beta_i - \epsilon, \quad (3.21)$$

где  $\epsilon$  – целое число, так что в результате снова получается диаграмма Юнга.

Формулы для инвариантов Казимира (3.1) можно переписать в нотации (3.19):

$$C_k^R = \sum_{i=1}^N (R_i - i + 1/2)^k - (-i + 1/2)^k + \sum_{i=N+1}^{N+M} (\alpha_i - N - 1/2)^k - (-\beta_i - N + 1/2)^k. \quad (3.22)$$

Используя это выражение и применяя (3.21), можно вывести правило преобразования функций  $C_k^R$  под действием преобразования ”тяги-крюк”:

$$C_k^{\mathbf{T}_\epsilon^{(N+M|M)}(R)} = \sum_{p=0}^k \epsilon^p \binom{k}{p} (C_{k-p}^R + \theta_{k-p}^N) - \theta_k^N, \quad (3.23)$$

где функции  $\theta_k^N = \sum_{i=1}^N (-i + \frac{1}{2})^k$ .

• **Однокрюковое скейлинговое соотношение.** Цветной полином Александра – специальное значение цветного полинома ХОМФЛИ:

$$\mathcal{A}_R^K(q) = \mathcal{H}_R^K(q, q^0). \quad (3.24)$$

Цветной полином Александра имеет следующее свойство относительно  $R$  [69, 146]:

$$\mathcal{A}_R^K(q) - \mathcal{A}_{[1]}^K(q^{|R|}) = 0, \quad \text{где } R = [r, 1^L], \quad (3.25)$$

справедливое только для представлений, соответствующих однокрюковым диаграммам Юнга.

Это однокрюковое скейлинговое соотношение имеет интересную особенность. Оно устанавливает связь между групповыми факторами (3.25) и уравнениями Хироты на тау-функции Кадомцева-Петвиашвили [25, 26]. Однако заметим, что это соответствие установлено только для симметрических представлений.

Соотношение (3.25) накладывает следующее ограничение на групповые факторы:

$$\boxed{\mathcal{G}_{n,m}^R = |R| \mathcal{G}_{n,m}^{[1]}.} \quad (3.26)$$

### 3.4 Описание вложения весовой системы $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}$

В предыдущем пункте мы предварительно обсудили вложение весовой системы алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_N$ :

$$\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}) \subset ZU(\mathfrak{sl}_N) \subset ZU(\mathfrak{gl}_\infty). \quad (3.27)$$

Здесь важно вложение  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$  в  $ZU(\mathfrak{gl}_\infty)$ , поскольку оно позволяет нам работать с представлениями  $\mathfrak{sl}_N$  любых длин  $l(R)$ , в то время как  $N$  остается фиксированным. Описание вложения  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D})$  в  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$  позволяет приблизиться к полному описанию групповой структуры пертурбативного разложение полиномов ХОМФЛИ. В этом разделе мы даем явное описание этих вложений.

- $ZU(\mathfrak{gl}_\infty)$  – алгебра полиномов от инвариантов Казимира  $\mathfrak{gl}_\infty$ , которые мы обозначаем  $C_1, C_2, \dots$ .  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$ , в свою очередь, является алгеброй многочленов от  $\mathfrak{sl}_N$  инвариантов Казимира  $C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$ . Описать вложение  $ZU(\mathfrak{sl}_N) \subset ZU(\mathfrak{gl}_\infty)$  означает задать  $C_i$  как функции от  $C_j$  явно:  $C_i = \mathcal{C}_i(C_1, C_2, \dots)$ . Это можно сделать с помощью производящей функции  $\mathfrak{sl}_N$  инвариантов Казимира (3.3). Несмотря на то, что производящая функция известна давно, мы не нашли в литературе явной формулы для  $n$ -го члена суммы, более удобной для описания вложения  $ZU(\mathfrak{sl}_N) \subset ZU(\mathfrak{gl}_\infty)$ . Таким образом, одним из наших результатов является аналитическая формула для  $\mathfrak{sl}_N$  инвариантов Казимира, которая может быть получена из трансляционной инвариантности представлений  $\mathfrak{sl}_N$ :

$$\boxed{C_n^R = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n-m}}{N^m} \binom{n}{m} \left( (C_{n-m}^R + \theta_{n-m}^N) (C_1^R + \theta_1^N)^m - \theta_{n-m}^N (\theta_1^N)^m \right),} \quad (3.28)$$



где напоминаем, что  $\theta_k^N = \sum_{i=1}^N \left(-i + \frac{1}{2}\right)^k$ . В дальнейшем мы опускаем индексы  $R$  и  $N$  там, где это не приводит к недоразумениям. Обратите внимание, что инварианты Казимира  $\mathcal{C}_n$  являются линейными комбинациями  $\tilde{\mathcal{C}}_k$ . Например, путем прямого сравнения с (3.5) легко увидеть, что  $\mathcal{C}_2 = \tilde{\mathcal{C}}_2$  и  $\mathcal{C}_3 = -\tilde{\mathcal{C}}_3 + \frac{N}{2}\tilde{\mathcal{C}}_2$ . Формула (3.28) не применима напрямую к групповым факторам ХОМФЛИ из-за присутствия  $N$  в знаменателе.

- $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D})$  является алгеброй полиномов от примарных групповых факторов. Благодаря (2.4) любое свойство  $\mathcal{H}_R^K(q, a)$  относительно представлений опускается на групповые факторы. Симметрии полиномов ХОМФЛИ ограничивают класс полиномов (2.13), которые связывают групповые факторы полиномов ХОМФЛИ с собственными значениями инвариантов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$  (2.6). Выберем в центре универсальной обертывающей алгебры  $ZU(\mathfrak{sl}_N)$  специальный базис, совместимый со свойствами весовой системы  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D})$ . Другими словами, наш базис уважает симметрии цветных полиномов ХОМФЛИ. Групповые факторы цветных полиномов ХОМФЛИ должны быть корректно определены для их частного случая – групповых факторов цветных полиномов Александера, т. е. групповые факторы полиномов ХОМФЛИ не должны иметь особенности в точке  $N \rightarrow 0$ . Таким образом, для правильного описания вложения  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}(\mathcal{D}) \subset ZU(\mathfrak{sl}_N)$  удобно ввести специальную формулу для  $\mathcal{C}_{[2n]}$ :

$$\mathcal{C}_{[2n]}^R := \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{C_k (C_{2n-k} + 2\theta_{2n-k})}{2 \cdot k! (2n - k)!}. \quad (3.29)$$

Заметим, что  $\mathcal{C}_{2n+1}^R$  меняют знак относительно симметрии сопряжения, поэтому в групповых факторах они присутствуют только в четных сочетаниях,  $\mathcal{C}_{2n_1+1}^R \mathcal{C}_{2n_2+1}^R$ . К сожалению, нам не удалось найти аналитическую формулу без полюсов по  $N$  для этих полиномов, в отличие от  $\mathcal{C}_{[2n]}^R$  (3.29). Мы регуляризуем формулы для  $\mathcal{C}_{2n_1+1}^R \mathcal{C}_{2n_2+1}^R$ , добавляя линейные комбинации инвариантов Казимира и деля на степени  $N$ . Этот алгоритм применяется для каждого случая отдельно.

Определим полученные выражения как  $\mathcal{C}_{[2n_1+1, 2n_2+1]}^R$ , например:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{[3,3]}^R &:= \frac{1}{N} \left( \frac{8\mathcal{C}_{[2]}^3 + \frac{1}{4}N^4\mathcal{C}_3^2}{N^2} - \mathcal{C}_{[2]}^2 - 12\mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[4]} \right), \\ \mathcal{C}_{[5,3]}^R &:= \frac{1}{N^3} \left( \frac{\frac{1}{16}\mathcal{C}_5\mathcal{C}_3N^6 - 8\mathcal{C}_{[2]}^4}{N^2} + \frac{4}{3}\mathcal{C}_{[2]}^3 + 36\mathcal{C}_{[4]}\mathcal{C}_{[2]}^2 \right) - \frac{2\mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[3,3]}}{N^2} - \\ &\quad - \frac{1}{N} \left( \frac{10}{3}\mathcal{C}_{[2]}^3 - \frac{\mathcal{C}_{[2]}^2}{24} - 4\mathcal{C}_{[4]}\mathcal{C}_{[2]} - 30\mathcal{C}_{[6]}\mathcal{C}_{[2]} - 24\mathcal{C}_{[4]}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Подчеркнем, что эти выражения не являются сингулярными по  $N$ . Два типа функций  $\mathcal{C}_{[2n]}^R$  и  $\mathcal{C}_{[2n_1+1, 2n_2+1]}^R$  мультипликативно генерируют все элементы Казимира, встречаемые в пертурбативном разложении в качестве групповых факторов полинома ХОМФЛИ. Обозначим эти инварианты Казимира через  $\mathcal{C}_\Delta$ , где  $\Delta$  – диаграмма Юнга без единичных элементов. Например,  $\mathcal{C}_{[3,3,2]} = \mathcal{C}_{[3,3]}\mathcal{C}_{[2]}$ . Далее мы опишем групповую структуру полиномов ХОМФЛИ в базисе  $\mathcal{C}_\Delta$ :

$$\mathcal{H}_R^K = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \sum_{|\Delta| \leq n} \mathcal{C}_\Delta^R \sum_{m=0}^{n-|\Delta|} (v_{\Delta, m}^K)_n N^m, \quad (3.31)$$

где  $(v_{\Delta, m}^K)_n$  также являются инвариантами Васильева и представляют собой линейные комбинации  $\mathcal{V}_{n, m}$  (2.4).

В разделе 3.3 мы выяснили, как каждая симметрия преобразует групповые факторы полиномов ХОМФЛИ и  $\mathfrak{gl}_\infty$  инварианты Казимира. Зная эти факты, теперь мы можем установить, как симметрии полиномов ХОМФЛИ спускаются на пертурбативное разложение (3.31), и отметить важные свойства базисных полиномов (3.29), (3.30) по отношению к этим симметриям.

1. Симметрия "тяги-крюк" не накладывает ограничений на (3.31), так как проявляется так же, как трансляционная инвариантность представлений  $\mathfrak{sl}_N$ :  $[R_1 + \delta R, \dots, R_N + \delta R] = [R_1, \dots, R_N]$  для любого  $\delta R \in \mathbb{N}$  и любого представления  $R$ .
2. Симметрия сопряжения имеет решающее значение для отображения  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_n)$ : а именно, в (3.31) она запрещает  $\Delta$  быть разбиением с нечетным числом

нечетных натуральных чисел в силу того, что на него накладывается не только условие трансляционной инвариантности, но и условие инвариантности относительно отражения, обусловленное наличием множителя  $(-1)^k$  в (3.17).

3. Дуальность ранг-уровень делает равными нулю только некоторые коэффициенты  $(v_{\Delta, m}^{\mathcal{K}})_n$  из-за (3.12), (3.13) и того факта, что  $\mathcal{C}_{[2n]}$  четны относительно преобразования ранг-уровень, а  $\mathcal{C}_{[2n_1+1, 2n_2+1]}$ , наоборот, меняют знак.
4. Ограничение на порядок ограничивает сумму по  $m$  числом  $n - |\Delta|$  и может обратить в нуль некоторые  $(v_{\Delta, m}^{\mathcal{K}})_n$  с наибольшими  $|\Delta|$  и  $m$ , если порядок  $N^m \mathcal{C}_{\Delta}^R$  оказывается слишком большим. Это связано с тем, что порядок  $g(\mathcal{C}_{[2n]}) = 2n + 1$  и  $g(\mathcal{C}_{[2n_1+1, 2n_2+1]}) = (2n_1 + 1) + (2n_2 + 1) + 1$ .
5. Заметим, что  $\mathcal{C}_{\Delta}$  в случае полиномов Александера (при  $N = 0$  все  $\theta_k^N \equiv 0$  в (3.28)) становятся однородными полиномами от  $C_k$  порядка  $|\Delta|$ , т. е.  $\mathcal{C}_{\Delta} \rightarrow \lambda^{|\Delta|} \mathcal{C}_{\Delta}$ , если  $C_k \rightarrow \lambda^k C_k$ . В связи с этим мы обсуждаем правильный способ масштабирования  $C_k$ . Из (3.22) для случая полинома Александера следует, что  $C_k \rightarrow \lambda^k C_k$ , если

$$\alpha_i - \frac{1}{2} \rightarrow \lambda \left( \alpha_i - \frac{1}{2} \right) \text{ и } \beta_i - \frac{1}{2} \rightarrow \lambda \left( \beta_i - \frac{1}{2} \right), \quad (3.32)$$

поэтому для удобства мы обозначаем представление в нотации Фробениуса как  $(\vec{\alpha} | \vec{\beta})$ , а его масштабирование как  $(\lambda \vec{\alpha} | \lambda \vec{\beta})$ .

Многочлен Александера выражается через  $\mathcal{C}_{\Delta}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(\hbar) = & 1 + \hbar^2 \left( v_{[2,0]}^{\mathcal{K}} \right)_2 \mathcal{C}_{[2]} + \hbar^4 \left( \left( v_{[2,2,0]}^{\mathcal{K}} \right)_4 \mathcal{C}_{[2]}^2 + \left( v_{[4,0]}^{\mathcal{K}} \right)_4 \mathcal{C}_{[4]} \right) + \\ & + \boxed{\hbar^4 \left( v_{[2,0]}^{\mathcal{K}} \right)_4 \mathcal{C}_{[2]}} + \hbar^6 \left( \left( v_{[2,2,2,0]}^{\mathcal{K}} \right)_6 \mathcal{C}_{[2]}^3 + \left( v_{[4,2,0]}^{\mathcal{K}} \right)_6 \mathcal{C}_{[2]} \mathcal{C}_{[4]} + \left( v_{[6,0]}^{\mathcal{K}} \right)_6 \mathcal{C}_{[6]} \right) + \\ & + \boxed{\hbar^6 \left( \left( v_{[4,0]}^{\mathcal{K}} \right)_6 \mathcal{C}_{[4]} + \left( v_{[2,2,0]}^{\mathcal{K}} \right)_6 \mathcal{C}_{[2]}^2 + \left( v_{[2,0]}^{\mathcal{K}} \right)_6 \mathcal{C}_{[2]} \right)} + \boxed{\hbar^7 \left( v_{[3,3,0]}^{\mathcal{K}} \right)_7 \mathcal{C}_{[3,3]}} + O(\hbar^8). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Рассмотрим следующую разность:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}(\hbar) - \mathcal{A}_{(\lambda\vec{\alpha}|\lambda\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}\left(\frac{\hbar}{\lambda}\right) &= \hbar^4 \left(v_{[2],0}^{\mathcal{K}}\right)_4 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \mathcal{C}_{[2]}^{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})} + \\
&+ \hbar^6 \left(v_{[2],0}^{\mathcal{K}}\right)_6 \left(1 - \frac{1}{\lambda^4}\right) \mathcal{C}_{[2]}^{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})} + \hbar^6 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \left( \left(v_{[4],0}^{\mathcal{K}}\right)_6 \mathcal{C}_{[4]}^{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})} + \right. \\
&\left. + \left(v_{[2,2],0}^{\mathcal{K}}\right)_6 \left(\mathcal{C}_{[2]}^{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})}\right)^2 \right) + \hbar^7 v_{7,8} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \mathcal{C}_{[3,3]}^{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})} + O(\hbar^8),
\end{aligned} \tag{3.34}$$

где в круглых скобках указаны параметры масштабирования.

Обратите внимание, что для симметрических представлений (3.25) эквивалентно однокрюковому скейлинговому соотношению (3.25), а разность (3.34) должна равняться нулю. Четные элементы  $\mathcal{C}_{[2k]}^{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})}$  не обращаются в нуль на представлениях с одним крюком, поэтому на самом деле они должны комбинироваться с  $\left(\mathcal{C}_{[2]}^{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})}\right)^k$ , а групповой фактор  $\mathcal{C}_{[2]}^{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})}$  должен отсутствовать на всех уровнях выше второго.

Заметим, что свойства  $\mathcal{C}_{[2n_1+1,2n_2+1]}$  – это просто наблюдения на ряде примеров, и на самом деле они могут нарушаться для более высоких уровней.

Теперь формулируем явно, какая **групповая структура цветных полиномов ХОМФЛИ** следует из описанных свойств этих базисных полиномов и из правил, следующих из симметрий полиномов ХОМФЛИ.

- **На четном уровне  $2n$**  содержатся только многочлены вида  $N^{2l}\mathcal{C}_{\Delta_e}$ , где  $\Delta_e$  – разбиения четного числа  $m = 2, \dots, 2n$  в четные члены и  $2l + |\Delta_e| \leq 2n$ , а также многочлены  $N^{2l+1}\mathcal{C}_{\Delta_o}$ , где  $\Delta_o$  – разбиения четного числа  $m = 2, \dots, 2n$ , содержащие не менее двух нечетных чисел и не содержащие 1, и  $2l + |\Delta_o| + 1 \leq 2n - 1$ . Групповые факторы  $\mathcal{C}_{[2k]}$  входят только в линейных комбинациях с  $\mathcal{C}_{[2]}^k$ , а  $\mathcal{C}_{[2]}$  отсутствует на уровнях выше второго.
- **На нечетном уровне  $2n+1$**  содержатся только многочлены вида  $N^{2l+1}\mathcal{C}_{\Delta_e}$ ,  $2l + 1 + |\Delta_e| \leq 2n + 1$  и полиномы  $N^{2l}\mathcal{C}_{\Delta_o}$ ,  $2l + |\Delta_o| \leq 2n$ .

Таким образом, используя приведенные выше правила, можно записать групповые факторы, встречающиеся в пертурбативном разложении полинома ХОМФЛИ, до любого уровня  $n$ . Мы остановились на 13 уровне. Перечислим групповые факторы, полученные наложением известных симметричных ограничений на разложения (3.35), до 9-го порядка в таблице 3.1. В ней мы явно зачеркнули групповые факторы, запрещаемые однокрюковым скейлинговым соотношением для полинома Александра.

Таблица 3.1: Групповые факторы полинома ХОМФЛИ до 9-го порядка

$\hbar^2$	$C_{[2]}$	$\hbar^3$	$NC_{[2]}$
$\hbar^4$	$\cancel{C_{[2]}^2}, N^2C_{[2]}, C_{[2]}^2, C_{[4]}$	$\hbar^5$	$NC_{[2]}, N^3C_{[2]}, NC_{[2]}^2, NC_{[4]}$
$\hbar^6$	$\cancel{C_{[2]}^2}, N^2C_{[2]}, N^4C_{[2]}, \cancel{C_{[2]}^3}, N^2C_{[2]}^2, C_{[2]}^2 + 6C_{[4]}, N^2C_{[4]}, C_{[2]}^3, C_{[2]}C_{[4]}, C_{[6]}$	$\hbar^7$	$NC_{[2]}, N^3C_{[2]}, N^5C_{[2]}, NC_{[2]}^2, N^3C_{[2]}^2, NC_{[4]}, N^3C_{[4]}, NC_{[2]}^3, NC_{[2]}C_{[4]}, C_{[3,3]}, NC_{[6]}$
$\hbar^8$	$\cancel{C_{[2]}^2}, N^2C_{[2]}, N^4C_{[2]}, N^6C_{[2]}, \cancel{C_{[2]}^3}, N^2C_{[2]}^2, N^4C_{[2]}^2, C_{[2]}^2 + 6C_{[4]}, N^2C_{[4]}, N^4C_{[4]}, \cancel{C_{[2]}^3}, N^2C_{[2]}^3, C_{[2]}(C_{[2]}^2 + 6C_{[4]}), N^2C_{[2]}C_{[4]}, C_{[2]}^3 - 90C_{[6]}, N^2C_{[6]}, NC_{[3,3]}, C_{[2]}^4, C_{[2]}^2C_{[4]}, C_{[4]}^2, C_{[2]}C_{[6]}, C_{[8]}$	$\hbar^9$	$NC_{[2]}, N^3C_{[2]}, N^5C_{[2]}, N^7C_{[2]}, NC_{[2]}^2, N^3C_{[2]}^2, N^5C_{[2]}^2, NC_{[4]}, N^3C_{[4]}, N^5C_{[4]}, NC_{[2]}^3, N^3C_{[2]}^3, NC_{[2]}C_{[4]}, N^3C_{[2]}C_{[4]}, NC_{[6]}, N^3C_{[6]}, C_{[3,3]}, N^2C_{[3,3]}, NC_{[2]}^4, NC_{[2]}^2C_{[4]}, NC_{[4]}^2, C_{[2]}C_{[3,3]}, NC_{[2]}C_{[6]}, NC_{[8]}, C_{[5,3]}$

В разделе 4.1 мы используем примарные групповые факторы для вычисления примитивных инвариантов Васильева. Поэтому мы приводим примарные групповые факторы цветного полинома ХОМФЛИ до 11-го уровня в таблице 3.2.

Было бы большим успехом, если бы известные симметрии полинома ХОМФЛИ были достаточно ограничивающими, чтобы зафиксировать групповую структуру полностью. Проверим это предположение. Фиксируем узел  $\mathcal{K}$  и ре-

Таблица 3.2: Примарные групповые факторы полинома ХОМФЛИ до 11-го порядка

$\hbar^2$	$\mathcal{C}_{[2]}$	$\hbar^3$	$N\mathcal{C}_{[2]}$
$\hbar^4$	$N^2\mathcal{C}_{[2]}, \mathcal{C}_{[4]}$	$\hbar^5$	$N\mathcal{C}_{[2]}, N^3\mathcal{C}_{[2]}, N\mathcal{C}_{[4]}$
$\hbar^6$	$N^2\mathcal{C}_{[2]}, N^4\mathcal{C}_{[2]}, \frac{1}{6}\mathcal{C}_{[2]}^2 + \mathcal{C}_{[4]}, N^2\mathcal{C}_{[4]}, \mathcal{C}_{[6]}$	$\hbar^7$	$N\mathcal{C}_{[2]}, N^3\mathcal{C}_{[2]}, N^5\mathcal{C}_{[2]}, N\mathcal{C}_{[2]}^2, N\mathcal{C}_{[4]}, N^3\mathcal{C}_{[4]}, \mathcal{C}_{[3,3]}, N\mathcal{C}_{[6]}$
$\hbar^8$	$N^2\mathcal{C}_{[2]}, N^4\mathcal{C}_{[2]}, N^6\mathcal{C}_{[2]}, N^2\mathcal{C}_{[2]}^2, \frac{1}{6}\mathcal{C}_{[2]}^2 + \mathcal{C}_{[4]}, N^2\mathcal{C}_{[4]}, N^4\mathcal{C}_{[4]}, \mathcal{C}_{[6]} + \frac{1}{15}\mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[4]}, N^2\mathcal{C}_{[6]}, N\mathcal{C}_{[3,3]}, \mathcal{C}_{[8]}$	$\hbar^9$	$N\mathcal{C}_{[2]}, N^3\mathcal{C}_{[2]}, N^5\mathcal{C}_{[2]}, N^7\mathcal{C}_{[2]}, N\mathcal{C}_{[2]}^2, N^3\mathcal{C}_{[2]}^2, N\mathcal{C}_{[4]}, N^3\mathcal{C}_{[4]}, N^5\mathcal{C}_{[4]}, N\mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[4]}, N\mathcal{C}_{[6]}, N^3\mathcal{C}_{[6]}, \mathcal{C}_{[3,3]}, N^2\mathcal{C}_{[3,3]}, N\mathcal{C}_{[8]}, \mathcal{C}_{[5,3]}$
$\hbar^{10}$	$N^2\mathcal{C}_{[2]}, N^4\mathcal{C}_{[2]}, N^6\mathcal{C}_{[2]}, N^8\mathcal{C}_{[2]}, \frac{1}{6}\mathcal{C}_{[2]}^2 + \mathcal{C}_{[4]}, N^2\mathcal{C}_{[2]}^2, N^4\mathcal{C}_{[2]}^2, N^2\mathcal{C}_{[4]}, N^4\mathcal{C}_{[4]}, N^6\mathcal{C}_{[4]}, \mathcal{C}_{[6]} + \frac{1}{15}\mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[4]}, N^2\mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[4]}, N\mathcal{C}_{[3,3]}, N^3\mathcal{C}_{[3,3]}, \mathcal{C}_{[6]} - \frac{1}{90}\mathcal{C}_{[2]}^3, N^2\mathcal{C}_{[6]}, N^4\mathcal{C}_{[6]}, \mathcal{C}_{[8]} + \frac{1}{70}\mathcal{C}_{[4]}^2, N^2\mathcal{C}_{[8]}, \mathcal{C}_{[8]} + \frac{1}{28}\mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[6]}, N\mathcal{C}_{[5,3]}, \mathcal{C}_{[10]}$	$\hbar^{11}$	$N\mathcal{C}_{[2]}, N^3\mathcal{C}_{[2]}, N^5\mathcal{C}_{[2]}, N^7\mathcal{C}_{[2]}, N^9\mathcal{C}_{[2]}, N\mathcal{C}_{[2]}^2, N^3\mathcal{C}_{[2]}^2, N^5\mathcal{C}_{[2]}^2, N\mathcal{C}_{[4]}, N^3\mathcal{C}_{[4]}, N^5\mathcal{C}_{[4]}, N^7\mathcal{C}_{[4]}, N\mathcal{C}_{[2]}^3, N\mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[4]}, N^3\mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[4]}, \mathcal{C}_{[3,3]}, N^2\mathcal{C}_{[3,3]}, N^4\mathcal{C}_{[3,3]}, N\mathcal{C}_{[6]}, N^3\mathcal{C}_{[6]}, N^5\mathcal{C}_{[6]}, N\mathcal{C}_{[8]}, N^3\mathcal{C}_{[8]}, N\mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[6]}, N\mathcal{C}_{[4]}^2, \mathcal{C}_{[5,3]}, N^2\mathcal{C}_{[5,3]}, N\mathcal{C}_{[10]}, \mathcal{C}_{[2]}\mathcal{C}_{[3,3]}, \mathcal{C}_{[7,3]}$

шаем систему линейных уравнений на каждом уровне  $n$  с неизвестным  $(v_{\Delta,m}^{\mathcal{K}})_n$ :

$$\sum_{|\Delta| \leq n} \mathcal{C}_{\Delta}^{R_{\alpha}} \sum_{m=0}^{n-|\Delta|} (v_{\Delta,m}^{\mathcal{K}})_n N^m = (\mathcal{H}_{R_{\alpha}}^{\mathcal{K}})_n, \quad (3.35)$$

для некоторого набора представлений  $R_{\alpha}$ . Здесь  $(\mathcal{H}_{R_{\alpha}}^{\mathcal{K}})_n$  – член при  $\hbar^n$  в разложении полинома ХОМФЛИ  $\mathcal{H}_{R_{\alpha}}^{\mathcal{K}}$ . Прямым вычислением мы показали справедливость данного предположения до 13-го уровня. Таким образом, мы приходим к гипотезе.

### Гипотеза 3.4.1

Мы продолжили вычисление групповых факторов полиномов ХОМФЛИ до

13-го уровня. На каждом уровне сравним количества групповых факторов  $\dim \varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_n)$  и примарных групповых факторов  $\dim \varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_n)^{\text{prim}}$  с числом инвариантов Васильева  $\dim \mathcal{A}_n$  и примарных инвариантов Васильева  $\dim \mathcal{P}_n$  (см. таблицу 3.3).  $\dim \mathcal{A}_n$  и  $\dim \mathcal{P}_n$  неизвестны для  $n \geq 13$ .

Количество групповых факторов перестает совпадать с количеством инвариантов Васильева, начиная с 6-го уровня, а количество примарных групповых факторов – с 8-го уровня. Мы вернемся к этому факту в разделе 4.2.

Таблица 3.3: Число инвариантов Васильева и групповых факторов полинома ХОМФЛИ

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\dim \mathcal{P}_n$	0	1	1	2	3	5	8	12	18	27	39	55	?
$\dim \varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_n)^{\text{prim}}$	0	1	1	2	3	5	8	<b>11</b>	<b>16</b>	<b>22</b>	<b>30</b>	<b>42</b>	<b>53</b>
$\dim \mathcal{A}_n$	0	1	1	3	4	9	14	27	44	80	132	232	?
$\dim \varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_n)$	0	1	1	3	4	<b>8</b>	<b>11</b>	<b>19</b>	<b>25</b>	<b>39</b>	<b>50</b>	<b>75</b>	<b>95</b>

### 3.5 Групповые факторы ассоциированные с диаграммами Якоби

Для дальнейшего обсуждения удобно рассмотреть групповые факторы цветных полиномов ХОМФЛИ в другом базисе. А именно, мы найдем групповые факторы  $\mathcal{G}_{n,m}$ , используя пертурбативное разложение (2.4). Мы можем сделать это до 6-го уровня, так как мы знаем инварианты Васильева для этих уровней для многих узлов [147]. Итак, сначала фиксируем представление  $R$  и для каждого фиксированного  $n$  решаем систему линейных уравнений на  $\mathcal{G}_{n,m}^R$ :

$$\sum_{m=1}^{\dim \mathbb{G}_n} \nu_{n,m}^{\mathcal{K}_i} \mathcal{G}_{n,m}^R = \left( \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}_i} \right)_n, \quad i = 1, \dots, \dim \mathbb{G}_n, \quad (3.36)$$

где  $\left(\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}_i}\right)_n$  – член при  $\hbar^n$  в разложении полинома ХОМФЛИ  $\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}_i}$ . Прделаем эту процедуру для некоторого набора представлений  $R_\alpha$ , а затем решим линейную систему на неизвестные  $\lambda_{k,l}^{(m)}$ :

$$\mathcal{G}_{n,m}^{R_\alpha} = \sum_{|\Delta| \leq n} \mathcal{C}_\Delta^{R_\alpha} \sum_{k=0}^{n-|\Delta|} \lambda_{k,l}^{(m)} N^k \in \varphi_{\mathfrak{sl}_N}^{R_\alpha}(\mathcal{D}_n) \subset \mathcal{Z}_n, \quad (3.37)$$

для набора представлений  $R_\alpha$ . Здесь мы используем тот факт, что групповые факторы  $\mathcal{G}_{n,m}^R$  полиномов ХОМФЛИ являются линейными комбинациями групповых факторов, описанных в разделе 3.4, и знание полиномов ХОМФЛИ для различных узлов и представлений [148].

Таким образом мы находим групповые факторы  $\mathcal{G}_{n,m}$ , см. таблицу 3.4. Мы можем построить групповые факторы в терминах  $\mathcal{G}_{n,m}$  только до 6-го порядка включительно, потому что мы не знаем инварианты Васильева  $\mathcal{V}_{n,m}$  начиная с 7-го порядка и выше.

Таблица 3.4: Групповые факторы ассоциированные с диаграммами Якоби

$\hbar^2$	$\mathcal{G}_{2,1} = -\frac{1}{2}\mathcal{C}_{[2]}$	$\hbar^3$	$\mathcal{G}_{3,1} = \frac{N}{2}\mathcal{G}_{2,1} = -\frac{N}{4}\mathcal{C}_{[2]}$
$\hbar^4$	$\mathcal{G}_{4,1} = (\mathcal{G}_{2,1})^2 = \frac{1}{4}\mathcal{C}_{[2]}^2, \mathcal{G}_{4,2} = \frac{N^2}{4}\mathcal{G}_{2,1} = -\frac{N^2}{8}\mathcal{C}_{[2]},$ $\mathcal{G}_{4,3} = -\frac{N^2}{8}\mathcal{C}_{[2]} + 3\mathcal{C}_{[4]}$	$\hbar^5$	$\mathcal{G}_{5,1} = \mathcal{G}_{2,1} \cdot \mathcal{G}_{3,1} = \frac{N}{8}\mathcal{C}_{[2]}^2, \mathcal{G}_{5,2} = \frac{N^3}{8}\mathcal{G}_{2,1} =$ $-\frac{N^3}{16}\mathcal{C}_{[2]}, \mathcal{G}_{5,3} = \frac{N}{2}\mathcal{G}_{4,3} = -\frac{N^3}{16}\mathcal{C}_{[2]} + \frac{3N}{2}\mathcal{C}_{[4]},$ $\mathcal{G}_{5,4} = \frac{3N}{4}\mathcal{G}_{4,3} + \frac{4N+N^3}{16}\mathcal{G}_{2,1} = -\frac{N+N^3}{8}\mathcal{C}_{[2]} + \frac{9N}{4}\mathcal{C}_{[4]}$
$\hbar^6$	$\mathcal{G}_{6,1} = (\mathcal{G}_{2,1})^3 = -\frac{1}{8}\mathcal{C}_{[2]}^3, \mathcal{G}_{6,2} = (\mathcal{G}_{3,1})^2 = \frac{N^2}{16}\mathcal{C}_{[2]}^2, \mathcal{G}_{6,3} = \mathcal{G}_{2,1} \cdot \mathcal{G}_{4,2} = \frac{N^2}{16}\mathcal{C}_{[2]}^2, \mathcal{G}_{6,4} = \mathcal{G}_{2,1} \cdot \mathcal{G}_{4,3} = \frac{N^2}{16}\mathcal{C}_{[2]}^2 -$ $\frac{3}{2}\mathcal{C}_{[4]}\mathcal{C}_{[2]}, \mathcal{G}_{6,5} = \frac{N^4}{16}\mathcal{G}_{2,1} = -\frac{N^4}{32}\mathcal{C}_{[2]}, \mathcal{G}_{6,6} = \frac{N^2}{4}\mathcal{G}_{4,3} = -\frac{N^4}{32}\mathcal{C}_{[2]} + \frac{3N^2}{4}\mathcal{C}_{[4]}, \mathcal{G}_{6,7} = \frac{N}{2}\mathcal{G}_{5,4} = -\frac{N^2+N^4}{16}\mathcal{C}_{[2]} +$ $\frac{9N^2}{8}\mathcal{C}_{[4]}, \mathcal{G}_{6,8} = -\frac{N^4+7N^2}{32}\mathcal{C}_{[2]} + \frac{3}{16}\mathcal{C}_{[2]}^2 + \frac{9}{8}\mathcal{C}_{[4]} + \frac{45}{2}\mathcal{C}_{[6]}, \mathcal{G}_{6,9} = \frac{12N^2+15}{8}\mathcal{C}_{[4]} - \frac{2N^4+9N^2}{32}\mathcal{C}_{[2]} + \frac{5}{16}\mathcal{C}_{[2]}^2 - \frac{45}{2}\mathcal{C}_{[6]}$		

В силу (2.9) каждый групповой фактор соответствует неоснащенной хордовой диаграмме. Однако в дальнейшем удобнее работать с так называемыми тривалентными диаграммами Якоби [29], векторное пространство которых изоморфно векторному пространству неоснащенных хордовых диаграмм в силу



STU-соотношения (рис. 3.5). Весовая система  $\mathfrak{sl}_N$ , ассоциированная с представлением  $R$ , переводит диаграммы Якоби в групповые факторы  $\mathcal{G}_{n,m}^R$  [149], см. рис. 3.4.

Можно заметить, что  $\mathcal{G}_{6,2} = \mathcal{G}_{6,3}$ , что является проявлением теоремы Вожеля и более подробно обсуждается в следующем разделе. Заметим, что этот факт уже отмечался в конце раздела 3.4 (см. таблицу 3.3 и комментарий выше).

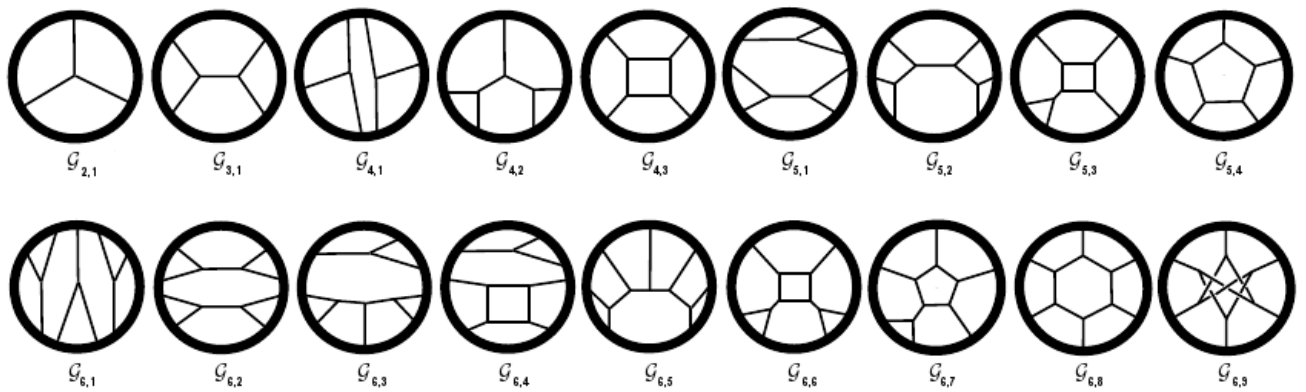


Рис. 3.4: Тривалентные диаграммы

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \downarrow \\ \bullet \\ \curvearrowright \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \downarrow \\ \bullet \\ \curvearrowright \end{array} \quad - \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \downarrow \\ \bullet \\ \curvearrowright \end{array} \quad .$$

S
T
U

Рис. 3.5: STU-соотношение [29]

## Глава 4

# Следствия для цветных полиномов ХОМФЛИ из явных формул для теоретико-групповой структуры

Конкретный вид групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ (см. таблицу 3.1) открывает широкие перспективы применения и будущих направлений исследований. В этом разделе мы обсудим пять следствий [113], вытекающих из нашего исследования групповых факторов полинома ХОМФЛИ.

- Во-первых, поскольку мы продвинулись до 13 порядка в исследовании групповых факторов, теперь мы можем вычислять инварианты Васильева для более высоких уровней, по крайней мере, для некоторых узлов (см. раздел 4.1).
- Во-вторых, в разделе 4.2 мы обсуждаем параметризацию Вожеля присоединенного сектора алгебр Ли и показываем, что некоторые инварианты Васильева нижних уровней не различаются весовыми системами алгебр Ли.
- В-третьих, в разделе 4.3 мы доказываем недавно открытую симметрию "тяги-крюк" цветных полиномов ХОМФЛИ в случае узлов.

- В-четвертых, в разделе 4.4 мы рассматриваем доказанное утверждение о  $q$ -голономности полиномов Джонса на конкретном примере торических узлов  $T[2, 2k + 1]$ .
- Наконец, в разделе 4.5 мы рассмотрим несколько следствий для другого частного случая цветного полинома ХОМФЛИ – полинома Александра.

## 4.1 Инварианты Васильева высших порядков

Возможность нахождения инвариантов Васильева была ограничена до 6-го порядка трудоемкостью вычисления групповых факторов  $\mathcal{G}_{n,m}$  путем применения весовой системы к хордовым диаграммам  $\mathcal{D}_{n,m}$  (2.9). Наш метод [150] позволяет получить инварианты Васильева для порядков выше 6-го, если мы знаем достаточно много цветных полиномов ХОМФЛИ.

Однако начиная с 8-го уровня начинают совпадать примарные групповые факторы, и весовая система алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_N$  перестает различать соответствующие примарные инварианты Васильева (см. раздел 4.2), поэтому все инварианты Васильева можно получить только до 8-го уровня. Теперь мы можем вычислять инварианты Васильева на 11-м уровне, которые могут различать узлы-мутанты, что является очень важным продвижением в области различения узлов.

Проиллюстрируем этот новый подход на вычислении примитивных инвариантов Васильева для узла  $5_2$  до 10-го уровня. Для этого воспользуемся следующим разложением (примарные групповые факторы взяты из таблицы 3.2):

$$\begin{aligned} \log(\mathcal{H}_R^K) = & 1 + \hbar^2 \left( v_{[2],0}^K \right)_2 \mathcal{C}_{[2]}^R + \hbar^3 \left( v_{[2],1}^K \right)_3 N \mathcal{C}_{[2]}^R + \\ & + \hbar^4 \left( \left( v_{[2],2}^K \right)_4 N^2 \mathcal{C}_{[2]}^R + \left( v_{[4],0}^K \right)_4 \mathcal{C}_{[4]}^R \right) + O(\hbar^5), \end{aligned} \quad (4.1)$$

Фиксируем набор представлений  $R_\alpha$  и в каждом порядке  $n$  решаем систему линейных уравнений на  $(v_{\Delta,m}^K)_n$ . Набор представлений  $R_\alpha$ , по которым мож-

но получить примарные инварианты Васильева до 11-го уровня, приведен в таблице 4.1. Формула (4.1) позволяет вычислять инварианты Васильева, если известен набор цветных полиномов ХОМФЛИ. Приводим ссылки на явные формулы для цветных полиномов ХОМФЛИ для большого семейства узлов и представлений.

- Явные формулы для  $\mathcal{R}$ -матриц для представлений  $R = [r], [2, 1], [2, 2], [3, 3]$  для **трехнитевых узлов** [60, 120, 125–127], которые позволяют вычислить соответствующие полиномы ХОМФЛИ.
- Для **арборесцентных узлов** та же информация для тех же представлений дана в [127, 151–154]. Работа [155] может быть полезна для получения подробной информации по арборесцентному вычислению с явными примерами.
- Статья [61] объясняет, как склеивать арборесцентные блоки в косы из 3 нитей.
- Результаты для представления  $R = [4, 1]$  для **трехнитевых узлов** можно найти на сайте [148] в разделе *DATA: Racah*, он вычислялся тем же методом, что и в [127].

В этих представлениях цветные полиномы ХОМФЛИ для некоторых узлов также можно найти в [148].

Для сокращения обозначений мы обозначаем ненулевые инварианты Васильева как  $v_{n,m}$ . А именно, первые инварианты Васильева соответствуют четным элементам  $\mathcal{C}_{[2k]}$  (3.29) и упорядочены лексикографически, а остальные соответствуют нечетным элементам  $\mathcal{C}_{[2k+1, 2l+1]}$  (3.30) и также пронумерованы в лексикографическом порядке.

Таблица 4.1: Набор представлений  $R_\alpha$  для (4.1)

$\hbar^2, \hbar^3, \hbar^4$	[1]
$\hbar^5, \hbar^6$	[1], [2]
$\hbar^7$	[1], [2], [2, 1]
$\hbar^8$	[1], [2], [3], [2, 1]
$\hbar^9$	[1], [2], [3], [3, 1]
$\hbar^{10}$	[1], [2], [3], [2, 1], [3, 1]
$\hbar^{11}$	[1], [2], [3], [2, 1], [3, 1], [4, 1]

Например, для 7-го уровня имеем:

$$\begin{aligned}
 v_{7,1} &:= \left( v_{[2],1}^{\mathcal{K}} \right)_7, & v_{7,2} &:= \left( v_{[2],3}^{\mathcal{K}} \right)_7, & v_{7,3} &:= \left( v_{[2],5}^{\mathcal{K}} \right)_7, & v_{7,4} &:= \left( v_{[2,2],1}^{\mathcal{K}} \right)_7, \\
 v_{7,5} &:= \left( v_{[4],1}^{\mathcal{K}} \right)_7, & v_{7,6} &:= \left( v_{[4],3}^{\mathcal{K}} \right)_7, & v_{7,7} &:= \left( v_{[6],1}^{\mathcal{K}} \right)_7, & v_{7,8} &:= \left( v_{[3,3],0}^{\mathcal{K}} \right)_7.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Перечислим примарные инварианты Васильева для узла  $\mathcal{K} = 5_2$  до 8-го порядка (таблица 4.2). Подчеркнем, что эти инварианты Васильева записаны в базисе групповых факторов, отличном от (2.4), так что  $v_{n,m}$  являются линейными комбинациями  $\mathcal{V}_{n,m}$ , которые можно найти в [147]. Инварианты Васильева  $v_{n,m}$  для узла  $3_1$  до 11-го порядка и для узла  $5_2$  до 10-го порядка можно найти в [148].

Таблица 4.2: Примарные инварианты Васильева для узла  $\mathcal{K} = 5_2$

$\begin{array}{c} m \\ n \end{array}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	-4										
3	-6										
4	-13	44									
5	-7	-34	222								
6	-70	$-\frac{1141}{12}$	186	875	-1684						
7	$-\frac{739}{12}$	$-\frac{5621}{12}$	$-\frac{5681}{20}$	16	2336	3421	-17586	-262			
8	$-\frac{7135}{6}$	$-\frac{15991}{6}$	$-\frac{321493}{360}$	-684	$\frac{5099}{2}$	19786	$\frac{159899}{12}$	-2322	-111973	135404	$-\frac{7208}{3}$

## 4.2 Различение инвариантов Васильева

В этом разделе мы обсуждаем применение явления универсальности из теории представлений в физике. А именно, рассмотрим универсальную параметризацию присоединенного сектора алгебр Ли, которая была продемонстрирована в работах П. Вожеля [123]. Присоединенные представления играют ключевую роль в теоретической физике благодаря тому, что им принадлежат калибровочные поля. Например, глюонные поля, отвечающие за механизм конфайнмента, описываются присоединенным представлением  $\mathfrak{su}_3$ . Возможное обобщение групповых структур, возникающих в корреляторах более простых квантовых теорий поля, например, в теории Черна-Саймонса, позволило бы лучше изучить корреляторы в четырехмерной квантовой хромодинамике.

Поэтому мы ставим конкретную задачу обобщения групповой структуры полиномов ХОМФЛИ, полученной в [150], с помощью параметризации Вожеля на любую простую алгебру Ли (таблица 4.3 из [156]). В этой таблице  $\alpha, \beta, \gamma$  – параметры Вожеля, а параметр  $t = \alpha + \beta + \gamma$  – половина элемента Казимира в присоединенном представлении для соответствующих алгебр Ли. Весовые системы

Таблица 4.3: Параметры Вожеля для простых алгебр Ли

Type	Lie algebra	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$t = h^\vee$
$A_n$	$\mathfrak{sl}_{n+1}$	-2	2	$(n+1)$	$n+1$
$B_n$	$\mathfrak{so}_{2n+1}$	-2	4	$2n-3$	$2n-1$
$C_n$	$\mathfrak{sp}_{2n}$	-2	1	$n+2$	$n+1$
$D_n$	$\mathfrak{so}_{2n}$	-2	4	$2n-4$	$2n-2$
$G_2$	$\mathfrak{g}_2$	-2	10/3	8/3	4
$F_4$	$\mathfrak{f}_4$	-2	5	6	9
$E_6$	$\mathfrak{e}_6$	-2	6	8	12
$E_7$	$\mathfrak{e}_7$	-2	8	12	18
$E_8$	$\mathfrak{e}_8$	-2	12	20	30

алгебр Ли порождают бесконечные серии примеров инвариантов Васильева. Дж. Кнейсслер показал в [157], что все инварианты до порядка 12 происходят из алгебр Ли. Однако в общем случае это не так. П. Вожель [123] использовал семейство супералгебр Ли  $D(1, 2, \alpha)$ , зависящее от параметра  $\alpha$ ; он показал, что эти алгебры дают инварианты, которые не могут быть выражены как комбинации инвариантов, происходящих из алгебр Ли. Дж. Либерум [158] привел пример замкнутой диаграммы порядка 17, различаемой с помощью  $D(1, 2, \alpha)$ , но не с помощью весовых систем полупростых алгебр Ли, и доказал, что для порядка  $d = 15$  существует ненулевая линейная комбинация хордовых диаграмм, обращаемая в нуль всеми весовыми системами, происходящими из полупростых алгебр Ли. Кроме того, существуют инварианты Васильева, которые не происходят из супералгебр Ли [123, 158].

Зная выражения для  $\mathcal{G}_{n,m}$  до 6-го порядка (см. раздел 3.5), замечаем, что

$$\mathcal{G}_{6,2} = \mathcal{G}_{6,3}, \quad (4.3)$$

что для весовой системы  $\mathfrak{sl}_N$  на 6-м уровне означает  $\varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_{6,2}) = \varphi_{\mathfrak{sl}_N}^R(\mathcal{D}_{6,3})$ . Этот факт следует из интересной связи между диаграммами Якоби, ассоциированными с весовой системой  $\mathfrak{sl}_N$  (см. рис. 4.1), которую легко получить из определения весовой системы алгебры Ли и из коммутационных соотношений

$\mathfrak{sl}_N$ :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_R \left( \sum_{b,c} f_{abc} T_b T_c \dots \right) &= \frac{1}{2} \mathrm{tr}_R \left( \sum_{b,c} f_{abc} [T_b, T_c] \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{tr}_R (f_{abc} f_{a'bc} T_{a'} \dots) = \frac{N}{2} \mathrm{tr}_R (T_a \dots). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Более того, из-за этого свойства некоторые из групповых факторов более высоких уровней связаны с групповыми факторами более низких уровней умножением на  $N/2$ : например,  $\mathcal{G}_{3,1} = \frac{N}{2} \mathcal{G}_{2,1}$ .

На самом деле равенство (4.3) обобщается на все полупростые алгебры Ли введением параметров Вожеля  $\alpha, \beta, \gamma$ . Этот факт объясняется тем, что соотношение (4.4) легко обобщается, так как  $f_{abc} f_{a'bc} = \frac{1}{2} \delta_{aa'} C_2^{\mathrm{adj}}$ , а в работе Вожеля [123] рисуется как обобщение рис. 4.1 (см. рис. 4.2). Это, однако, не означает, что в полиномах узлов мы не можем различить инварианты Васильева  $\mathcal{V}_{6,2}$  и  $\mathcal{V}_{6,3}$ , так как они не являются примарными. Но мы сталкиваемся с проблемой неразличения инвариантов Васильева весовой системой  $\mathfrak{sl}_N$  на 8-м уровне (см. последнюю таблицу в разделе 3.4). Гораздо более интересный вопрос, решит ли параметризация Вожеля эту проблему, что будет предметом наших будущих исследований.

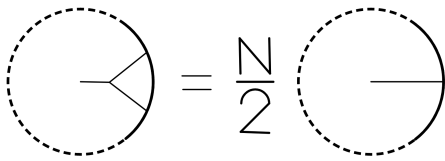


Рис. 4.1: Соотношение между диаграммами Якоби, ассоциированными с весовой системой

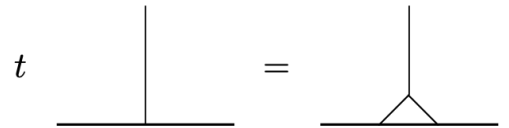


Рис. 4.2:

$\mathfrak{sl}_N$



### 4.3 Доказательство симметрии "тяги-крюк" для полиномов узлов ХОМФЛИ

Здесь мы приводим простые аргументы, доказывающие недавно открытую симметрию "тяги-крюк" цветных полиномов ХОМФЛИ (3.18). Это доказательство [115, 150] является прямым следствием формул из разделов 3.2, 3.3.

1. Цветные полиномы ХОМФЛИ имеют пертурбативное разложение (2.4), где групповые факторы являются функциями собственных значений операторов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ , которые мы обозначили  $\mathcal{C}_k^R$ :

$$\mathcal{G}_{n,m}^R = \mathcal{G}_{n,m}(\mathcal{C}_1^R, \dots, \mathcal{C}_N^R). \quad (4.5)$$

Чтобы показать, что цветные полиномы ХОМФЛИ обладают симметрией "тяги-крюк", достаточно показать, что групповые факторы инвариантны под действием этой симметрии.

2. Инварианты Казимира  $\mathcal{C}_k^R$  можно представить в виде многочленов от собственных значений операторов Казимира  $\mathfrak{gl}_\infty$ , обозначаемых  $C_k^R$  (подробности см. в разделе 3.1), что обеспечивает аналитическое продолжение сектора  $l(R) \leq N$  к произвольным диаграммам Юнга.

$$\mathcal{C}_k^R = \mathcal{C}_k(C_1^R, \dots, C_k^R). \quad (4.6)$$

Это аналитическое продолжение совпадает с аналитическим продолжением  $a = q^N$  квантовых инвариантов  $\mathfrak{sl}_N$  к цветным полиномам ХОМФЛИ. Симметрия "тяги-крюк" присутствует только для цветных полиномов ХОМФЛИ, поскольку она явно включает вычисление при  $a = q^N$  для  $N \leq l(R)$  (3.18). Поэтому аналитическое продолжение собственных значений операторов Казимира важно для анализа симметрии "тяги-крюк".

3. Инварианты Казимира  $C_k^R$  являются трансляционно-инвариантными функциями относительно диаграмм Юнга:

$$C_k^R = C_k^{R+\delta R}. \quad (4.7)$$

Этот факт непосредственно следует из теории представлений  $\mathfrak{sl}_N$ . А именно, диаграммы Юнга  $[R_1 + \delta R, R_2 + \delta R, \dots, R_N + \delta R]$  и  $[R_1, R_2, \dots, R_N]$  соответствуют одному и тому же неприводимому представлению. Кроме того, производящая функция для  $\tilde{C}_k^R$  (3.3) является трансляционно-инвариантной.

4. Собственные значения операторов Казимира  $\mathfrak{gl}_\infty$  (3.1) преобразуются при сдвигах  $[R_1, R_2, \dots, R_N] \rightarrow [R_1 + \delta R, R_2 + \delta R, \dots, R_N + \delta R]$  следующим образом (3.6):

$$C_k^{R+\delta R} = \sum_{j=0}^k (\delta R)^j \binom{k}{j} (C_{k-j}^R + \theta_{k-j}^N) - \theta_k^N, \quad (4.8)$$

где  $\delta R$  — целое число,  $\theta_k^N = \sum_{i=1}^N (-i + \frac{1}{2})^k$ .

5. Собственные значения операторов Казимира  $\mathfrak{gl}_\infty$  (3.1) преобразуются при симметрии "тяги-крюк"  $R \rightarrow \mathbf{T}_\epsilon^N(R)$  по следующему правилу (3.21):

$$C_k^{\mathbf{T}_\epsilon^N(R)} = \sum_{p=0}^k \epsilon^p \binom{k}{p} (C_{k-p}^R + \theta_{k-p}^N) - \theta_k^N. \quad (4.9)$$

где  $\epsilon$  — целое число.

6. Действия трансляции и симметрии "тяги-крюк" на функции  $C_k^R$  совпадают при  $\delta R = \epsilon$ :

$$C_k^{\mathbf{T}_\epsilon^N(R)} = C_k^{R+\epsilon} \quad (4.10)$$

7. Из п.2–п.6 заключаем, что инварианты Казимира  $\mathfrak{sl}_N$  инвариантны относительно преобразований типа "тяги-крюк":

$$C_k^R(C_1, \dots, C_k) = C_k^{\mathbf{T}_\epsilon^N(R)}(C_1, \dots, C_k) \quad (4.11)$$

8. Из п.1 и п.7 следует, что групповые факторы также инвариантны относительно симметрии "тяги-крюк", поскольку они являются функциями собственных значений операторов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ .

$$\mathcal{G}_{n,m}^R = \mathcal{G}_{n,m}^{\mathbf{T}_\epsilon^N(R)} \quad (4.12)$$

Следовательно, и

" .

#### 4.4 $q$ -голономность цветных полиномов Джонса

Функция многих переменных называется голономной, если она, грубо говоря, определяется из конечного числа своих значений через конечное число соотношений линейной рекурсии с полиномиальными коэффициентами. Зейлбергер был первым, кто заметил, что абстрактное понятие голономности можно применять для систематической и компьютеризированной проверки комбинаторных тождеств между специальными функциями. Цветной полином Джонса для узла представляет собой полином Лорана. Ставрос Гаруфалидис и Танг Т. К. Ле [159] показали, что эти полиномы являются  $q$ -голономными, т. е. удовлетворяют линейным  $q$ -разностным уравнениям с коэффициентами, являющимися полиномами Лорана от  $q$  и  $q^n$ , где  $n$  – размерность неприводимого представления  $\mathfrak{sl}_2$ .

Здесь мы демонстрируем явление  $q$ -голономности на конкретном примере торических узлов  $T[2, 2k + 1]$  цветных полиномов Джонса:

$$J_r^{\mathcal{K}} = \mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}}(q, q^2). \quad (4.13)$$

Полиномы Джонса являются полиномами ХОМФЛИ для  $\mathfrak{sl}_2$ , поэтому они зависят только от одной групповой переменной  $r := R_1$ . Поэтому пертурбативное разложение (2.4) для полинома Джонса принимает следующий вид:

$$J_r^{\mathcal{K}} = 1 + \hbar^2 \mathcal{V}_{2,1}^{\mathcal{K}} \mathcal{G}_{2,1}^r + \hbar^3 \mathcal{V}_{3,1}^{\mathcal{K}} \mathcal{G}_{3,1}^r + \hbar^4 (\mathcal{V}_{4,1}^{\mathcal{K}} \mathcal{G}_{4,1}^r + \mathcal{V}_{4,2}^{\mathcal{K}} \mathcal{G}_{4,2}^r + \mathcal{V}_{4,3}^{\mathcal{K}} \mathcal{G}_{4,3}^r) + \dots, \quad (4.14)$$

где групповые факторы  $\mathcal{G}_{n,m}^r$  являются полиномами от  $r$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{2,1}^r &= \mathcal{G}_{3,1}^r = \mathcal{G}_{4,2}^r = -\frac{1}{4}r(r+2), \\ \mathcal{G}_{4,3}^r &= 2\mathcal{G}_{4,1}^r = \frac{1}{8}r^2(r+2)^2,\end{aligned}\tag{4.15}$$

и так далее.

Как обсуждалось выше, мы хотим вывести рекурсивное соотношение для произвольного узла  $\mathcal{K}$  в виде

$$a_0(q, r, \mathcal{K}) + \sum_{i=1}^k a_i(q, r, \mathcal{K}) J_{r+i-1}^{\mathcal{K}} = 0,\tag{4.16}$$

где  $a_i$  – многочлены Лорана от  $q$  и  $q^r$  с конечным числом членов.

Опишем явно метод построения рекуррентных соотношений для полиномов Джонса для торического узла  $T[2, 2k+1]$ . По мотивам работы [159], где было получено трехчленное соотношение для трилистника:

$$J_{\mathcal{K}}(n) = \frac{q^{n-1} + q^{4-4n} - q^{-n} - q^{1-2n}}{q^{1/2}(q^{n-1} - q^{2-n})} J_{\mathcal{K}}(n-1) + \frac{q^{4-4n} - q^{3-2n}}{q^{2-n} - q^{n-1}} J_{\mathcal{K}}(n-2),\tag{4.17}$$

для произвольного  $k$  находим рекурсивную формулу в том же виде:

$$A(q, r, k) \mathcal{J}_{r+1} + B(q, r, k) \mathcal{J}_r + C(q, r, k) \mathcal{J}_{r-1} = 0,\tag{4.18}$$

где введен ненормированный полином Джонса  $\mathcal{J}_r := J_r^{\mathcal{K}} \text{qdim}(r)$  для упрощения вычислений;  $\text{qdim}(r) = \frac{q^{r+1} - q^{-r-1}}{q - q^{-1}}$  – квантовая размерность представления  $[r]$ .

Подставим в (4.18) коэффициенты  $A(q, r, k)$  и  $C(q, r, k)$  в виде, соответствующем (4.17):

$$\begin{aligned}A(q, r, k) &= q^{a_1(k)r + a_2(k)} - q^{a_3(k)r + a_4(k)}, \\ C(q, r, k) &= q^{c_1(k)r + c_2(k)} - q^{c_3(k)r + c_4(k)},\end{aligned}\tag{4.19}$$

и полиномы Джонса как  $\hbar$ -разложение (4.14). Получим коэффициент  $B(q, r, k)$  в виде ряда по  $\hbar$  и  $r$ :

$$B(q, r, k) = \sum_{i,j} b_{ij} \hbar^i r^j.\tag{4.20}$$

Нам хотелось бы, чтобы этот ряд был следующим многочленом от  $q$  (что соответствует (4.17)):

$$B(q, r, k) = q^{b_1(k)r+b_2(k)} + q^{b_3(k)r+b_4(k)} - q^{b_5(k)r+b_6(k)} - q^{b_7(k)r+b_8(k)}. \quad (4.21)$$

Тогда можно явно выписать условия равенства между (4.20) и (4.21) для нескольких торических узлов  $T[2, 2k + 1]$  и найти неизвестные коэффициенты  $a_i, b_i, c_i$ . Заметив линейность этих коэффициентов по  $k$ , находим общую формулу:

$$q(q^{2r+1} - q^{-2r-1})\mathcal{J}_{r+1} + (q^{-2r(2k+1)-6k-2}(q^{2r+1} - q^{-2r-1}) - q^{-2k}(q^{2r+3} - q^{-2r-3}))\mathcal{J}_r + (q^{-4r(k+1)-4(k+1)} - q^{-4kr-4k+2})\mathcal{J}_{r-1} = 0, \quad (4.22)$$

которая, впрочем, уже была известна, но в несколько иной форме [160].

Несмотря на то, что рекуррентное соотношение для полиномов Джонса для торического узла  $T[2, 2k + 1]$  (4.22) не является новым, оно дает пример общего метода для нахождения рекурсивных соотношений для цветных полиномов Джонса. Кроме того, исходя из рекурсивной формулы (4.22), можно получить соотношения между инвариантами Васильева для торических узлов  $T[2, 2k + 1]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{2,1}^{\mathcal{K}} &= 2k(k+1); \\ \mathcal{V}_{3,1}^{\mathcal{K}} &= \frac{4}{3}k(k+1)(2k+1); \\ \mathcal{V}_{4,2}^{\mathcal{K}} &= \frac{1}{3}k(k+1)(14k^2 + 14k + 3), \\ \mathcal{V}_{4,3}^{\mathcal{K}} &= \frac{1}{3}k(k+1)(2k^2 + 2k + 1); \\ \mathcal{V}_{5,2}^{\mathcal{K}} &= \frac{2}{27}(9\mathcal{V}_{5,3}^{\mathcal{K}} + 108k^5 + 270k^4 + 232k^3 + 78k^2 + 8k), \\ \mathcal{V}_{5,4}^{\mathcal{K}} &= \frac{2}{135}(-45\mathcal{V}_{5,3}^{\mathcal{K}} + 144k^5 + 360k^4 + 340k^3 + 150k^2 + 26k); \\ \mathcal{V}_{6,5}^{\mathcal{K}} &= \frac{1}{540}(360\mathcal{V}_{6,6}^{\mathcal{K}} - 720\mathcal{V}_{6,8}^{\mathcal{K}} + 9488k^6 + 28464k^5 + 31980k^4 + 16520k^3 + 3815k^2 + 299k), \\ \mathcal{V}_{6,7}^{\mathcal{K}} &= \frac{1}{135}(-90\mathcal{V}_{6,6}^{\mathcal{K}} - 360\mathcal{V}_{6,8}^{\mathcal{K}} + 976k^6 + 2928k^5 + 3420k^4 + 1960k^3 + 541k^2 + 49k), \\ \mathcal{V}_{6,9}^{\mathcal{K}} &= \frac{1}{45}(45\mathcal{V}_{6,8}^{\mathcal{K}} + 32k^6 + 96k^5 + 120k^4 + 80k^3 + 30k^2 + 6k). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь мы накладываем условия на инварианты Васильева [161]:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{4,1}^{\mathcal{K}} &= \frac{1}{2}(\mathcal{V}_{2,1}^{\mathcal{K}})^2, \quad \mathcal{V}_{6,2}^{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}(\mathcal{V}_{3,1}^{\mathcal{K}})^2, \\ \mathcal{V}_{5,1}^{\mathcal{K}} &= \mathcal{V}_{2,1}^{\mathcal{K}}\mathcal{V}_{3,1}^{\mathcal{K}}, \quad \mathcal{V}_{6,3}^{\mathcal{K}} = \mathcal{V}_{2,1}^{\mathcal{K}}\mathcal{V}_{4,2}^{\mathcal{K}}, \\ \mathcal{V}_{6,1}^{\mathcal{K}} &= \frac{1}{6}(\mathcal{V}_{2,1}^{\mathcal{K}})^3, \quad \mathcal{V}_{6,4}^{\mathcal{K}} = \mathcal{V}_{2,1}^{\mathcal{K}}\mathcal{V}_{4,3}^{\mathcal{K}}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

так что в (4.23) перечислены только примитивные инварианты Васильева.

Интересной особенностью является то, что из рекурсивного соотношения (4.22) можно получить явные выражения для инвариантов Васильева для произвольного торического узла  $T[2, 2k + 1]$  до уровня 4 (4.23). Отметим, что полученные формулы совпадают с более ранними исследованиями [31, 161].

Другая сторона этой проблемы состоит в том, что можно, наоборот, зафиксировать инварианты Васильева и из рекурсивной формулы (4.22) найти соотношения на собственные значения операторов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ . Чтобы проиллюстрировать это явление, запишем первые два разностных соотношения. Коэффициент при  $\hbar^3$  дает:

$$\left[ -2r(2r + 3)\mathcal{G}_{2,1}^{r-1} + 2(2r^2 + 5r + 2)\mathcal{G}_{2,1}^{r+1} - 4(r + 1)\mathcal{G}_{2,1}^r + 4r^3 + 12r^2 + 11r + 3 \right] = 0. \quad (4.25)$$

Коэффициент при  $\hbar^4$  после наложения (4.25) дает:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3}k(k + 1)(2k + 1) \left[ -r(18 + 57r + 48r^2 + 12r^3)(\mathcal{G}_{2,1}^{r-1} - \mathcal{G}_{2,1}^{r+1}) - \right. \\ & - 4r(2r + 3)\mathcal{G}_{3,1}^{r-1} + 4(2r^2 + 5r + 2)\mathcal{G}_{3,1}^{r+1} - 8(r + 1)\mathcal{G}_{3,1}^r + \\ & \left. + 12r^5 + 60r^4 + 113r^3 + 99r^2 + 40r + 6 \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Примечательным фактом является то, что разностные соотношения на  $\mathcal{G}_{n,m}$  не зависят от параметра  $k$ .

## 4.5 Следствия для цветных полиномов Александера

Изученная групповая структура полинома ХОМФЛИ (см. таблицу 3.1) дает ряд следствий для его специального значения – цветного полинома Александера (3.24). В разделе 4.5.1 мы обсуждаем существование новой симметрии полиномов Александера, которая следует из ограничений, накладываемых симметрией сопряжения полиномов ХОМФЛИ. Затем в разделе 4.5.2 мы обсуждаем способ введения параметра  $a = q^N$  в полином Александера, чтобы деформи-

ровать его в полином ХОМФЛИ. И наконец, в разделе 4.5.3 мы описываем обобщение ранее известного однокрюкового скейлингового соотношения (3.25) на произвольное представление  $R$ .

#### 4.5.1 Новая симметрия полинома Александра

Групповые факторы полиномов Александра изучались в [27]. На самом деле полиномы  $Y_\Lambda$  не встречаются на нечетных уровнях, или, другими словами,  $Y_{2k+1} = \emptyset$ , как это должно быть из нашего исследования групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ. Известные на настоящее время симметрии полиномов Александра не объясняют это исчезновение  $Y_\Lambda$  на нечетных уровнях, а симметрия сопряжения неприменима для  $N = 0$ . Следовательно, полиномы Александра должны иметь некоторые еще не открытые симметрии.

Для иллюстрации описанного эффекта и установления соответствия между групповыми факторами полиномов Александра в базисе  $Y_\Lambda$  и  $C_\Delta$ , запишем первые 8 порядков в таблицу 4.4 .

Таблица 4.4: Групповые факторы полинома Александра

$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$	$Y_5$	$Y_6$	$Y_7$	$Y_8$
<del><math>Y_{[1]}</math></del>	$Y_{[1,1]} = C_{[2]} _{N=0}$	<del><math>Y_{[1]}^3</math></del>	$Y_{[1,1]}^2$ $Y_{[2,2]} = C_{[4]} _{N=0}$	<del><math>Y_{[1]}^5</math></del> <del><math>Y_{[2,2]}Y_{[1]}</math></del>	$Y_{[1,1]}^3$ $Y_{[2,2]}Y_{[1,1]}$ $Y_{[2,2,2]} = C_{[3,3]} _{N=0}$ $Y_{[3,3]} = C_{[6]} _{N=0}$	<del><math>Y_{[1]}^7</math></del> <del><math>Y_{[2,2]}^2Y_{[1]}^2</math></del> <del><math>Y_{[2,2,2]}Y_{[1]}</math></del> <del><math>Y_{[3,3]}Y_{[1]}</math></del>	$Y_{[1,1]}^4$ $Y_{[2,2]}Y_{[1,1]}^2$ $Y_{[2,2,2]}Y_{[1,1]}$ $Y_{[3,3]}Y_{[1]}^2$ $Y_{[2,2]}^2$ $Y_{[3,3,2]} = C_{[5,3]} _{N=0} + \frac{1}{12}C_{[3,3]} _{N=0}$ $Y_{[4,4]} = C_{[8]} _{N=0}$

#### 4.5.2 Деформация из полинома Александра в ХОМФЛИ

Полиномы ХОМФЛИ обобщают полиномы Александра (3.24). Другими словами

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, q^N) \xrightarrow{N=0} \mathcal{A}_R^{\mathcal{K}}(q). \quad (4.27)$$

Интересно исследовать обратные правила, т.е. найти  $N$ -деформацию полиномов Александера к полиномам ХОМФЛИ:

$$\mathcal{A}_R^K(q) \xrightarrow[\text{rules}]{N} \mathcal{H}_R^K(q, q^N) . \quad (4.28)$$

Нам удалось явно найти аналитическую  $N$ -деформацию групповой структуры Александера только для примарных групповых факторов четных уровней:

$$\mathcal{Y}_{[2n]} \Big|_{C_k \rightarrow C_k + \theta_k} - \mathcal{Y}_{[2n]} \Big|_{C_k \rightarrow \theta_k} + \frac{NC_{2k}}{(2k)!} = \mathcal{C}_{[2n]} , \quad (4.29)$$

где  $\mathcal{Y}_\Lambda$  – базисные групповые факторы полиномов Александера, а именно

$$\mathcal{Y}_{[2n]} = \mathcal{C}_{[2n]} \Big|_{N=0} . \quad (4.30)$$

### 4.5.3 Скейлинговое соотношение для полинома Александера

Мы хотели бы обобщить однокрюковое скейлинговое соотношение (3.25) на произвольное представление. Это общее скейлинговое соотношение также предположительно связано с некоторой тау-функцией или классом тау-функций. Возможность обнаружения такого соответствия с интегрируемыми или неинтегрируемыми иерархиями представляет собой интересный вопрос для будущих исследований.

Полином Александера выражается через  $\mathcal{C}_\Delta$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_R^K(\hbar) = & 1 + \hbar^2 v_{2,1} \mathcal{C}_{[2]} + \hbar^4 \left( \frac{1}{2} v_{2,1}^2 \mathcal{C}_{[2]}^2 + v_{4,2} \mathcal{C}_{[4]} \right) + \\ & + \hbar^6 \left( \frac{1}{6} v_{2,1}^3 \mathcal{C}_{[2]}^3 + v_{2,1} v_{4,2} \mathcal{C}_{[2]} \mathcal{C}_{[4]} + v_{6,5} \mathcal{C}_{[6]} \right) + \boxed{\hbar^6 v_{6,3} \tilde{\mathcal{C}}_{[4]}} + \boxed{\hbar^7 v_{7,8} \mathcal{C}_{[3,3]}} + O(\hbar^8), \end{aligned} \quad (4.31)$$

где мы обозначаем  $\tilde{\mathcal{C}}_{[4]} := \mathcal{C}_{[4]} + \frac{1}{6} \mathcal{C}_{[2]}^2$ . Мы определили инварианты Васильева  $v_{n,m}$  в разделе 4.1. Для удобства обозначим представление в нотации Фробениуса как  $(\vec{\alpha} | \vec{\beta})$ , а его масштабирование

$$\alpha_i - \frac{1}{2} \rightarrow \lambda \left( \alpha_i - \frac{1}{2} \right) \quad \text{and} \quad \beta_i - \frac{1}{2} \rightarrow \lambda \left( \beta_i - \frac{1}{2} \right), \quad (4.32)$$



как  $(\lambda\vec{\alpha}|\lambda\vec{\beta})$ . Напомним, что при таком скейлинге  $C_k \rightarrow \lambda^k C_k$  и  $\mathcal{C}_\Delta \rightarrow \lambda^{|\Delta|} \mathcal{C}_\Delta$ .

Можно видеть, что преобразование полинома Александра

$$\mathcal{A}_{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}(\hbar) \rightarrow \mathcal{A}_{(\lambda\vec{\alpha}|\lambda\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}\left(\frac{\hbar}{\lambda}\right) \quad (4.33)$$

почти не меняет его. Это означает, что, например, обведенные в прямоугольник члены в (4.31) меняются после такого преобразования. Остающиеся неоднородные члены:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\lambda_0 = 1, \lambda) &:= \mathcal{A}_{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}(\hbar) - \mathcal{A}_{(\lambda\vec{\alpha}|\lambda\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}\left(\frac{\hbar}{\lambda}\right) = \\ &= \hbar^6 v_{6,3} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \tilde{\mathcal{C}}_{[4]}^{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})} + \hbar^7 v_{7,8} \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \mathcal{C}_{[3,3]}^{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})} + O(\hbar^8) = O(\hbar^6), \end{aligned} \quad (4.34)$$

где в круглых скобках указаны параметры масштабирования. Можно обратить в нуль все эти члены для произвольного представления. Переобозначим  $\lambda_1 := \lambda$  и проведем другое масштабирование с параметром  $\lambda_2 \neq \lambda_1$ . Легко видеть, что, умножая  $\mathbf{A}_1(\lambda_0 = 1, \lambda_1)$  на  $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1}$  и  $\mathbf{A}_1(\lambda_0 = 1, \lambda_2)$  на  $\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1}$ , член, пропорциональный  $\hbar^6$ , можно обнулить:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2(\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2) &:= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \mathbf{A}_1(\lambda_0 = 1, \lambda_1) - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} \mathbf{A}_1(\lambda_0 = 1, \lambda_2) = \\ &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)} \mathcal{A}_{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}(\hbar) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \mathcal{A}_{(\lambda_1\vec{\alpha}|\lambda_1\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}\left(\frac{\hbar}{\lambda_1}\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} \mathcal{A}_{(\lambda_2\vec{\alpha}|\lambda_2\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}\left(\frac{\hbar}{\lambda_2}\right) = O(\hbar^6). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Действуя таким образом, мы получаем скейлинговое соотношение для полинома Александра для произвольного представления. Запишем еще один шаг в явном виде. На третьем шаге обнуляем член, пропорциональный  $\hbar^7$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_3(\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &:= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathbf{A}_2(\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2) - \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} \mathbf{A}_2(\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_3) = \\ &= \frac{\lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1)} \mathcal{A}_{(\vec{\alpha}|\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}(\hbar) - \frac{\lambda_1^3(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} \mathcal{A}_{(\lambda_1\vec{\alpha}|\lambda_1\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}\left(\frac{\hbar}{\lambda_1}\right) + \\ &+ \frac{\lambda_1\lambda_2^2}{(\lambda_2 - 1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \mathcal{A}_{(\lambda_2\vec{\alpha}|\lambda_2\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}\left(\frac{\hbar}{\lambda_2}\right) - \frac{\lambda_1\lambda_3^2}{(\lambda_3 - 1)(\lambda_3 - \lambda_1)} \mathcal{A}_{(\lambda_3\vec{\alpha}|\lambda_3\vec{\beta})}^{\mathcal{K}}\left(\frac{\hbar}{\lambda_3}\right) = O(\hbar^8). \end{aligned} \quad (4.36)$$

И так далее. Можно написать явную формулу для шага  $k$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_k(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k) &= \frac{\lambda_{k-2}\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2}} \mathbf{A}_{k-1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}, \lambda_{k-1}) - \\
- \frac{\lambda_{k-2}\lambda_k}{\lambda_k - \lambda_{k-2}} \mathbf{A}_{k-1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}, \lambda_k) &= \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\lambda_i^k (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \prod_{j \neq i}^{k-2} \lambda_j}{\prod_{j \neq i}^k (\lambda_j - \lambda_i)} \mathcal{A}_{(\lambda_i \vec{\alpha} | \lambda_i \vec{\beta})}^{\mathcal{K}} \left( \frac{\hbar}{\lambda_i} \right) + \\
(-1)^k \left\{ \frac{\lambda_k^{k-1} \prod_{j=0}^{k-2} \lambda_j}{\prod_{j=0}^{k-2} (\lambda_k - \lambda_j)} \mathcal{A}_{(\lambda_k \vec{\alpha} | \lambda_k \vec{\beta})}^{\mathcal{K}} \left( \frac{\hbar}{\lambda_k} \right) - \frac{\lambda_{k-1}^{k-1} \prod_{j=0}^{k-2} \lambda_j}{\prod_{j=0}^{k-2} (\lambda_{k-1} - \lambda_j)} \mathcal{A}_{(\lambda_{k-1} \vec{\alpha} | \lambda_{k-1} \vec{\beta})}^{\mathcal{K}} \left( \frac{\hbar}{\lambda_{k-1}} \right) \right\} &= O(\hbar^{k+4}).
\end{aligned} \tag{4.37}$$

А в пределе  $k \rightarrow \infty$  получаем соотношение, считая  $\lambda_j - \lambda_{j-1} = 1$ :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j \neq i}^{\infty} \frac{\lambda_i}{(\lambda_j - \lambda_i)} \mathcal{A}_{(\lambda_i \vec{\alpha} | \lambda_i \vec{\beta})}^{\mathcal{K}} \left( \frac{\hbar}{\lambda_i} \right) = 0. \tag{4.38}$$

## Глава 5

# Свойства дефекта дифференциального разложения полинома ХОМФЛИ

Дифференциальное разложение (ДР) редуцированного (нормированного) полинома ХОМФЛИ (см. раздел 5.1) для узла-восьмерки  $4_1$  в симметрических представлениях был представлен в [69] и в дальнейшем был обобщен на другие узлы [70–77]:

$$\mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}} = \sum_{j=0}^r \frac{[r]!}{[j]![r-j]!} G_{[j]}^{\mathcal{K}}(a, q) \{a/q\} \prod_{i=0}^{j-1} \{aq^{r+i}\} \quad (5.1)$$

с полиномами Лорана  $G_{[j]}^{\mathcal{K}}(a, q)$ . Здесь, как обычно,  $\{x\} := x - x^{-1}$  и  $[n] := \{q^n\}/\{q\}$ .

Дефект (см. раздел 5.2) характеризует степень дополнительной факторизации функций  $G_{[j]}^{\mathcal{K}}(a, q)$ . В данной главе мы проясним ситуацию с альтернативным описанием дефекта  $\delta$  [84] – как степени  $\delta+1$  по  $q^{\pm 2}$  фундаментального полинома Александра (см. раздел 5.3). Мы явно доказываем, что это действительно следствие определения (5.1) и выводим явные выражения для коэффициентов дифференциального разложения  $G_{[r]}^{\mathcal{K}}(a = 1, q)$  через коэффициенты полинома Александра в фундаментальном представлении [114]. Такое описание дает явное ограничение на  $G_{[r]}^{\mathcal{K}}(1, q)$  – они несвободны. Что еще                      быть свобод-

ным, так это фундаментальные коэффициенты  $G_{[1]}(1, q) = F_{[1]}(1, q)^1$  при  $r = 1$  (см. раздел 5.4) – они могут быть целочисленными симметрическими полиномами степени  $\delta$ . Мы показываем [114], что это действительно так для  $\delta = 0$ , и даем некоторые идеи о том, как можно исследовать эту проблему для более высоких значений  $\delta$ . Мы также исследуем [114] свойства антипараллельной эволюции (см. раздел 5.5) и выводим нетривиальные примеры, когда дефект падает в определенных точках (гипотеза [162] не позволяет ему , но допускает случайные уменьшения).

## 5.1 Дифференциальное разложение цветного полинома ХОМФЛИ

В этом тексте мы в основном рассматриваем дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ в простейшем случае симметрических представлений. Все полиномы ХОМФЛИ являются , т.е. являются петлями Вильсона в неприводимом представлении  $R$ , деленными на размерность представления. Дифференциальное (циклотомическое) разложение следует из элементарной теории представлений и из того факта, что она соблюдается полиномами ХОМФЛИ. А именно, мы используем свойства ниже.

- В алгебре  $\mathfrak{sl}_N$   $[R_1, \dots, R_N] = [R_1 + \delta R, \dots, R_N + \delta R]$  для любого целого числа  $\delta R$ .
- В алгебре  $\mathfrak{sl}_N$  представление  $R$  и сопряженное с ним  $\bar{R}$  эквивалентны:

$$\mathcal{H}_{\bar{R}}^{\mathcal{K}}(q, a) = \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q, a). \quad (5.2)$$

- Полином ХОМФЛИ обладает симметрией относительно транспонирования диаграммы [145]:

$$\mathcal{H}_{R^T}^{\mathcal{K}}(q, a) = \mathcal{H}_R^{\mathcal{K}}(q^{-1}, a), \quad (5.3)$$

где  $R^T$  обозначает транспонирование диаграммы Юнга  $R$ .

Эти факты сильно ограничивают групповую структуру полиномов ХОМФЛИ. Мы используем их для получения дифференциального разложения для симметрических полиномов ХОМФЛИ. Начнем с того, что при  $N = 1$  все представления тривиальны, а полиномы ХОМФЛИ равны единицам. В частности, для  $R = [r]$  имеем

$$\mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}}(q, a = q) = 1 \implies \mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}}(q, a) - 1 : \{a/q\}. \quad (5.4)$$

В то же время при  $N = r$  антисимметрическое представление  $[1^r]$  совпадает с синглетным,  $\emptyset$ , поэтому

$$\mathcal{H}_{[1^r]}^{\mathcal{K}}(q, a = q^r) = 1 \implies \mathcal{H}_{[1^r]}^{\mathcal{K}}(q, a) - 1 : \{a/q^r\}, \quad (5.5)$$

и используя свойство транспонирования (5.3), и с учетом (5.4) получаем:

$$\mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}}(q, a) - 1 \sim \{aq^r\}\{a/q\}. \quad (5.6)$$

На самом деле, при  $r > 1$  процедура еще не оканчивается. Проиллюстрируем это на следующем простейшем примере. Для  $N = 3$  у нас есть дополнительное свойство (5.2):  $\mathcal{H}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, a = q^3) = \mathcal{H}_{[1,1]}^{\mathcal{K}}(q, a = q^3)$ . Этот факт подразумевает, что

$$\mathcal{H}_{[1,1]} - \mathcal{H}_{[1]} \sim \{a/q^3\} \xLeftrightarrow{(5.3)} \mathcal{H}_{[2]} - \mathcal{H}_{[1]} \sim \{aq^3\} \xrightarrow{(5.6)} \mathcal{H}_{[2]} - \mathcal{H}_{[1]} \sim \{aq^3\}\{a/q\}. \quad (5.7)$$

Из (5.6) получаем

$$\mathcal{H}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, a) = 1 + \{aq\}\{a/q\}F_{[1]}^{\mathcal{K}}(a, q) \quad (5.8)$$

с полиномом Лорана  $F_{[1]}(a, q)$ . Затем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{[2]}^{\mathcal{K}}(q, a) &= \mathcal{H}_{[1]}^{\mathcal{K}}(q, a) + g_2^{\mathcal{K}}(a, q)\{aq^3\}\{a/q\} = \\ &= 1 + \left( \{aq\}F_{[1]}^{\mathcal{K}}(a, q) + h_2^{\mathcal{K}}(a, q)\{aq^3\} \right) \{a/q\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из (5.6) следует, что  $\mathcal{H}_{[2]}^{\mathcal{K}}(q, a) - 1 \sim \{aq^2\}\{a/q\}$ , поэтому мы определяем  $h_2 = F_{[1]} + \{aq^2\} G_{[2]}$  с некоторым многочленом  $G_{[2]}(a, q)$  и получаем

$$\mathcal{H}_{[1]} = 1 + F_{[1]} \cdot \{aq\}\{a/q\}, \quad (5.10)$$

$$\mathcal{H}_{[2]} = 1 + [2]F_{[1]} \cdot \{aq^2\}\{a/q\} + G_{[2]} \cdot \{aq^3\}\{aq^2\}\{a/q\}.$$

Точно так же можно итеративно вывести, что для произвольного узла

$$\mathcal{H}_{[r]}^{\mathcal{K}} = \sum_{k=0}^r \frac{[r]!}{[k]![r-k]!} \cdot G_{[k]}^{\mathcal{K}}(a, q) \cdot \left( \prod_{i=0}^{k-1} \{aq^{r+i}\} \right) \{a/q\} \quad (5.11)$$

с некоторыми полиномиальными множителями  $G_{[k]}^{\mathcal{K}}(a, q)$ .

## 5.2 Дефект дифференциального разложения

А теперь продвинемся немного ближе к загадочной природе . Коэффициенты  $G_{[k]}^{\mathcal{K}}$  получается далее разложить на множители. Их свойство факторизации зависит от параметра узла  $\delta^{\mathcal{K}}$ , называемого :

$$G_{[s]}^{\mathcal{K}(\delta)}(a, q) = \mathcal{G}_{[s]}^{\mathcal{K}(\delta)}(a, q) \cdot \prod_{i=1}^{\text{floor}\left(\frac{s-1}{\delta+1}\right)} \{aq^{i-1}\}. \quad (5.12)$$

Факторизация максимальна при  $\delta = 0$ , соответствующие коэффициенты<sup>2</sup>  $\mathcal{G}_{[s]}^{(0)}$  обычно обозначаются  $F_{[s]}$ . При  $s = 1$  всегда  $G_{[1]} = F_{[1]}$ , мы используем это свойство, чтобы различать первый и все остальные коэффициенты дифференциального разложения.

дефект  $\delta^{\mathcal{K}} = 0$ :

(5.13)

дефект  $\delta^{\mathcal{K}} = 1$ :

(5.14)

дефект  $\delta^{\mathcal{K}} = 2$ :

(5.15)

дефект  $\delta^{\mathcal{K}} = 3$ :

(5.16)

...

Выглядит как весьма нетривиальная структура, и ни ее происхождение, ни ее универсальность не поняты. Также неизвестна связь дефекта с более традиционными дискретными топологическими числами, связанными с узлами.

Как мы увидим в разделе 5.5, приведенный выше список диаграмм может быть : иногда некоторые клетки можно убрать – имеются дополнительные нули в коэффициентах ДР. Более того, возможна некоторая

закономерность – появляются новые нули на границах наших диаграмм и сохраняют их лестничную структуру. Это может быть сигналом того, что дефект – это не просто число, а более сложная структура, возможно, как диаграмма Юнга, предложенная в оригинальной работе [84]. Эти дополнительные нули также влияют на точную формулировку антипараллельной инвариантности дефекта<sup>3</sup>, которая также обсуждается в разделе 5.5.

В этой диссертации мы доказываем еще одну, более простую характеристику дефекта: гипотезу [84] о том, что он равен старшей степени полинома Александера по  $q^2$  в фундаментальном представлении минус один. Это утверждение касается только нижнего уровня приведенных выше диаграмм. Действительно, полином Александера возникает при  $a = 1$ , и тогда (5.12) означает, что существует всего несколько ненулевых

$$G_{[s]}^{\mathcal{K}^{(\delta)}}(1, q) = \mathcal{G}_{[s]}^{\mathcal{K}^{(\delta)}}(1, q), \quad 1 < s \leq \delta + 1, \quad (5.17)$$

показанных маленькими черными точками на рисунках (5.13)-(5.16). Большие точки обозначают  $F_{[1]}(1, q)$ , которые могут обращаться в нуль только (см. раздел 5.5 ниже). Для более высоких значений  $s$  произведение в правой части (5.12) содержит  $\{a\}$ , которое обращается в нуль при  $a = 1$ .

Несмотря на то, что утверждение о связи дефекта ДР со степенью полинома Александера кажется простым, оно очень информативно. Согласно (5.12), оно позволяет многое предсказать о цветном полиноме ХОМФЛИ (и о суперполиномах), проделав почти тривиальное вычисление полинома Александера в фундаментальном представлении.

---

<sup>3</sup> [162]



### 5.3 Дефект определяет степень фундаментального полинома Александера

Доказательство гипотезы о связи степени полинома Александера с дефектом получается как следствие двух фактов.

- Редуцированный полином Александера в симметрическом представлении<sup>4</sup> обладает следующим свойством:

$$\mathcal{A}_{[r]}(q) = \mathcal{A}_{[1]}(q^r). \quad (5.18)$$

- ДР (5.11) для симметрического полинома Александера ( $a = 1$ ) принимает вид

$$\mathcal{A}_{[r]}^{\mathcal{K}} = \sum_{k=0}^{\min(r, \delta+1)} \frac{[r]!}{[k]![r-k]!} \cdot G_{[k]}^{\mathcal{K}}(1, q) \cdot \left( \prod_{i=0}^{k-1} \{q^{r+i}\} \right) \{q^{-1}\} \quad (5.19)$$

с  $F_{[1]}(1, q) = G_{[1]}(1, q)$ . В частности

$$\mathcal{A}_{[1]} = 1 - F_{[1]}(1, q)\{q\}^2, \quad (5.20)$$

где напомним, что  $\{x\} := x - x^{-1}$ , так что квантовые числа равны  $[n] := \frac{\{q^n\}}{\{q\}}$

#### 5.3.1 Примеры для небольших дефектов

Прежде чем приводить доказательство для произвольного дефекта  $\delta$ , мы разбираем примеры для малых значений дефекта, чтобы прояснить аргументы.

- Для дефекта  $\delta = 0$  ДР (5.19) содержит два слагаемых для всех симметрических представлений  $[r]$ :

$$\mathcal{A}_{[r]} = 1 - [r]F_{[1]}(1, q)\{q^r\}\{q\}. \quad (5.21)$$

---

<sup>4</sup>

(3.25)

Тогда из (5.18), (5.20), (5.21) следует, что

$$\begin{aligned} [r]\{q^r\}\{q\}F_{[1]}(1, q) &= \{q^r\}^2 F_{[1]}(1, q^r) \implies \\ \implies F_{[1]}(1, q^r) &= F_{[1]}(1, q) = \text{const} = b. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Способ заключается в том, чтобы посмотреть на зависимость от  $r$ , которая слева является просто квадратичной по  $q^{\pm r}$ , поскольку  $F_{[1]}(1, q)$  не зависит от  $r$ . Это ограничивает  $q$ -зависимость  $F_{[1]}(1, q^r)$  в правой части – на самом деле, к отсутствию таковой зависимости.

Обратите внимание, что из (5.22) следует, что **степень фундаментального полинома Александра** равна  $\delta + 1 = 1$ . Однако иногда бывает так, что  $F_{[1]}(1, q) = 0$ , и степень фундаментального полинома Александра падает до 0. Примеры приведены в разделе 5.5.1.

- Для дефекта  $\delta = 1$  для  $r > 1$  есть три члена:

$$\mathcal{A}_{[r]} = 1 - [r]F_{[1]}(1, q)\{q^r\}\{q\} - \frac{[r][r-1]}{[2]}G_{[2]}(1, q)\{q^{r+1}\}\{q^r\}\{q\}, \quad (5.23)$$

и поэтому

$$\begin{aligned} [r]\{q^r\}\{q\}F_{[1]}(1, q) + \frac{[r][r-1]}{[2]}G_{[2]}(1, q)\{q^{r+1}\}\{q^r\}\{q\} &= \{q^r\}^2 F_{[1]}(1, q^r) \implies \\ \implies F_{[1]}(1, q) = c \cdot (q^2 + q^{-2}) + b, \quad G_{[2]}(1, q) &= c \cdot \{q^2\} \end{aligned} \quad (5.24)$$

с некоторыми константами  $c$  и  $b$ <sup>5</sup>. В левой части у нас есть многочлен четвертой степени от  $q^{\pm r}$ , поэтому та же степень должна быть и у правой части. Таким

<sup>5</sup>  $q F_{[1]}(a, q) \quad G_{[2]}(a, q) \quad a \neq 1$

-1 [7, 5]:

$$F_{[1]}^{[7,5]}(a, q) = -\frac{(a^2 + 1)(a^2 q^2 + q^4 - q^2 + 1)}{a^6 q^2},$$

$$\begin{aligned} G_{[2]}^{[7,5]}(a, q) &= a^{-13} q^{-14} \{a^{10} q^{12} + a^8 (q^{14} + q^{10} + q^8) + a^6 (q^8 + q^4) - a^4 (q^{16} + q^{10} + q^4 - q^2) - \\ &\quad - a^2 (q^{16} + q^{14} - 2q^{12} + q^{10} + 3q^8 - 2q^6 + 2q^2 - 1) - (q^{12} - q^{10} - q^8 + 2q^6 - q^2 + 1)\} \end{aligned}$$

$$F_{[1]}^{[7,5]}(1, q) = -2(q^2 + q^{-2}),$$

$$G_{[2]}^{[7,5]}(1, q) = -2(q^2 - q^{-2}) = -2\{q^2\}.$$

образом,  $F_{[1]}$  не более чем квадратичен. Обратите внимание, что это не означает, что  $G_{[2]}(1, q)$  не зависит от  $q$  – зависимость существует, но она полностью фиксируется в терминах зависимости от  $q$   $F_{[1]}(1, q)$ .

Гипотеза о дефекте остается в силе: **степень полинома Александра** оказывается равной  $\delta + 1 = 2$ .

Возвращаемся к дефекту 0, если  $c = 0$ . Чтобы понять, верна ли гипотеза об отношении дефекта к полиному Александра в таких особых точках, необходимо проверить, увеличивается ли факторизация всего полинома ХОМФЛИ. Некоторые примеры приведены в разделе 5.5.2.

- Для дефекта  $\delta = 2$  и  $r > 2$  имеется четыре слагаемых:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{[r]}(q) &= 1 - [r]F_{[1]}(1, q)\{q^r\}\{q\} - \frac{[r][r-1]}{[2]}G_{[2]}(1, q)\{q^{r+1}\}\{q^r\}\{q\} - \\ &\quad - \frac{[r][r-1][r-2]}{[2][3]}G_{[3]}(1, q)\{q^{r+2}\}\{q^{r+1}\}\{q^r\}\{q\} = \\ &= \mathcal{A}_{[1]}(q^r) = 1 - F_{[1]}(1, q^r)\{q^r\}^2, \end{aligned} \tag{5.25}$$

из чего следует

$$\begin{aligned} F_{[1]}(1, q^r) - F_{[1]}(1, q) &= \{q^{r+1}\}\{q^{r-1}\} \frac{G_{[2]}(1, q)}{\{q^2\}} + \\ &\quad + \{q^{r+2}\}\{q^{r+1}\}\{q^{r-1}\}\{q^{r-2}\} \frac{G_{[3]}(1, q)}{\{q^2\}\{q^3\}}, \end{aligned} \tag{5.26}$$

и

$$\begin{aligned} F_{[1]}(q) &= d \cdot (q^4 + q^{-4}) + c \cdot (q^2 + q^{-2}) + b, \\ G_{[2]}(q) &= \left( d \cdot (q^4 + q^2 + q^{-2} + q^{-4}) + c \right) \cdot \{q^2\}, \\ G_{[3]}(q) &= d \cdot \{q^2\}\{q^3\} \end{aligned} \tag{5.27}$$

с некоторыми зависящими от узла целыми числами  $d$ ,  $b$  и  $c$ . **Степень полинома Александра** по-прежнему равна  $\delta + 1 = 3$ , за исключением некоторых точек, где  $c$ ,  $b$ ,  $d$  обращаются в нуль.

Например, для торического узла дефекта-2  $7_1$

$$\begin{aligned} F_{[1]}^{7_1}(1, q) &= -(q^4 + q^{-4}) - (q^2 + q^{-2}) - 2, \\ G_{[2]}^{7_1}(1, q) &= -(q^4 + q^2 + q^{-2} + q^{-4}) - 1, \\ G_{[3]}^{7_1}(1, q) &= -1, \end{aligned} \tag{5.28}$$

то есть  $d = b = c = -1$ .

### 5.3.2 Случай произвольного дефекта

В этом разделе мы поднимаем примеры из предыдущего раздела до произвольного  $\delta$ . Опять же, наша цель – найти ограничение на  $F_{[1]}(1, q)$ , а затем это позволяет выразить все ненулевые  $G_{[r]}(1, q)$  через этот  $F_{[1]}(1, q)$ . Ожидаемо или нет, но это выражение довольно сложное. Обычное развлечение в теории узлов – наблюдать, как быстро сложные структуры появляются из тривиальных входных данных. Уроки для произвольной квантовой теории поля еще предстоит извлечь.

### Степень полинома Александера

Подставив ДР в точке  $a = 1$  (5.19) в (5.18), получим:

$$\begin{aligned} 1 - [r]F_{[1]}(1, q)\{q^r\}\{q\} - \sum_{j=2}^{\min(r, \delta+1)} \frac{[r]!}{[j]![r-j]!} G_{[j]}(1, q)\{q\} \prod_{i=1}^j \{q^{r+i-1}\} &= \\ = 1 - F_{[1]}(1, q^r)\{q^r\}^2. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Это равенство должно выполняться для всех  $r$ . Левая часть зависит от  $q^r$  только через биномиальные коэффициенты и дифференциалы, и ясно, что это многочлен степени  $2j_{\max} = 2\delta + 2$  от  $q^{\pm r}$ . Правая сторона зависит от  $q^{\pm r}$  через множитель  $\{q^r\}^2$  степени 2 и  $F_{[1]}(1, q^r)$ . Поскольку все зависимости на самом деле относятся к четным степеням  $q$ , отсюда следует, что  $F_{[1]}(1, q)$  является полиномом от  $q^{\pm 2}$  степени  $\delta$ , а весь **фундаментальный полином Александера**

имеет степень  $\delta + 1$ . Более того, поскольку  $\mathcal{A}_{[1]}(q) = \mathcal{A}_{[1]}(q^{-1})$  (5.3),  $F_{[1]}(1, q)$  должен быть симметричен относительно замены  $q \rightarrow q^{-1}$ .

Другими словами,

$$F_{[1]}^{(\delta)}(1, q) = a_0^{(\delta)} + \sum_{j=1}^{\delta} a_j^{(\delta)} \cdot (q^{2j} + q^{-2j}) \quad (5.30)$$

с независимыми от  $q$  целыми числами  $a_k^{(\delta)}$ . Также поставим индекс  $(\delta)$  на  $F_{[1]}(1, q)$  и в дальнейшем – на  $G_{[k]}(1, q)$ , чтобы подчеркнуть, что в случае полинома Александра они зависят от узла (точки в огромном множестве объектов) только через его дефект и **всего несколько дополнительных параметров**  $a_i^{(\delta)}$ .

Теперь гипотеза о степени фундаментального полинома Александра доказана, и в следующем пункте мы приводим явные выражения  $G_{[k]}(1, q)$  через коэффициенты  $a_i^{(\delta)}$  из  $F_{[1]}(1, q)$ .

### Выражения для ненулевых $G_{[k]}(1, q)$

Применяя (5.30), мы можем переписать (5.29) как

$$\sum_{j=1}^{\delta} a_j^{(\delta)} (q^{2jr} - q^{2j} - q^{-2j} + q^{-2jr}) = \sum_{j=2}^{\min(r, \delta+1)} g_j^{(\delta)}(q) \prod_{i=1}^{j-1} \{q^{r+i}\} \{q^{r-i}\} \quad (5.31)$$

где мы обозначаем

$$g_j^{(\delta)}(q) := \frac{G_{[j]}^{(\delta)}(1, q)}{\prod_{i=2}^j \{q^i\}}, \quad 2 \leq j \leq \delta + 1. \quad (5.32)$$

Уравнение (5.31) должно выполняться для любого  $r$ , поэтому мы можем извлечь коэффициенты при определенных степенях  $q^r$  и получить систему:

$$\begin{aligned} a_{\delta}^{(\delta)} &= g_{\delta+1}^{(\delta)}, \\ a_{\delta-1}^{(\delta)} &= g_{\delta}^{(\delta)} - g_{\delta+1}^{(\delta)}(q^{\delta+1} + q^{-\delta-1})[\delta], \\ a_{\delta-2}^{(\delta)} &= g_{\delta-1}^{(\delta)} - g_{\delta}^{(\delta)}[\delta - 1](q^{\delta} + q^{-\delta}) + g_{\delta+1}^{(\delta)} \left( [\delta]^2 + [\delta][\delta - 1] \frac{q^{2\delta+2} + q^{-2\delta-2}}{q + q^{-1}} \right), \end{aligned} \quad (5.33)$$

...

В общем случае

$$a_j^{(\delta)} = \sum_{k=0}^{\delta-j} g_{j+k+1}^{(\delta)} \sigma_{j,k}, \quad (5.34)$$

где

$$\sigma_{j,k} = \sum_{i=0}^k (-)^k q^{k(k-2i+1)-2i} \frac{(q^{-2}; q^{-2})_{j+k}}{(q^{-2}; q^{-2})_i (q^{-2}; q^{-2})_{j+k-i}} \frac{(q^2; q^2)_{j+k}}{(q^2; q^2)_{k-i} (q^2; q^2)_{j+i}}. \quad (5.35)$$

Заметим, что соотношения (5.34) связывают узловые факторы  $F_{[1]}(1, q)$  и  $G_{[k]}(1, q)$ , так что на самом деле они являются  $C$ -полиномами для симметрического полинома Александра (см. раздел 5.6).

Можно обратить соотношения (5.34) и выразить все  $g_j$  через  $a_j$ :

$$\begin{aligned} g_{\delta+1}^{(\delta)} &= a_{\delta}^{(\delta)}, \\ g_{\delta}^{(\delta)} &= a_{\delta-1}^{(\delta)} + a_{\delta}^{(\delta)} \cdot (q^{\delta+1} + q^{-\delta-1})[\delta], \\ g_{\delta-1}^{(\delta)} &= a_{\delta-2}^{(\delta)} + a_{\delta-1}^{(\delta)} \cdot (q^{\delta} + q^{-\delta})[\delta - 1] + a_{\delta}^{(\delta)} \cdot (q^{2\delta} + q^2 + 2 + q^{-2} + q^{-2\delta}) \frac{[\delta][\delta - 1]}{[2]}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.36)$$

В общем случае

$$g_{i+1}^{(\delta)} = \sum_{m=0}^{\delta-i} a_{i+m}^{(\delta)} \cdot \xi_{m,i+m}, \quad i = 1, \dots, \delta \quad (5.37)$$

и

$$\xi_{m,n} := \frac{[n][2n - m - 1]!}{[m]![2n - 2m + 1]!} \left( [n + 1 - m](q^{2n} + q^{-2n}) + [2][n - m] \right) \quad (5.38)$$

Выражения (5.37) являются другой формой  $C$ -полиномов (5.34).

Можно прямо выразить  $g_j$  через  $a_j$ , используя (5.34), и получить другую форму (5.37):

$$\begin{aligned} g_{\delta-k+1}^{(\delta)} &= \sum_{j=0}^k a_{\delta-k+j}^{(\delta)} \cdot \eta_{j,k} = \\ &= \sum_{j=0}^k a_{\delta-k+j}^{(\delta)} \cdot \left\{ \sum_{\Delta \vdash j} (-)^{l(\Delta)} \sum_{\substack{\{i_l\} = \{\delta-k, \dots, \delta-k+j-1\} \\ i_l + \Delta_l \leq \delta-k+j}} \prod_{l=1}^j \sigma_{i_l, \Delta_l} \right\}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

где в правой части стоит сумма по всем диаграммам Юнга  $\Delta$  размера  $j$ . Например:

$$\begin{aligned}\eta_{0,k} &= 1, \\ \eta_{1,k} &= -\sigma_{\delta-k,1}, \\ \eta_{2,k} &= \sigma_{\delta-k,1} \sigma_{\delta-k+1,1} - \sigma_{\delta-k,2} \sigma_{\delta-k+1,0}.\end{aligned}\tag{5.40}$$

## Примеры

Теперь мы перечислим следствия общих формул (5.30) и (5.37) для конкретных малых значений  $\delta$ . Эти выражения могут быть проще для практического применения.

- В случае дефекта  $\delta = 1$

$$F_{[1]}^{(1)}(1, q) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} \cdot (q^2 + q^{-2})\tag{5.41}$$

и

$$g_2^{(1)}(q) = a_1^{(1)} \cdot \xi_{0,1} = a_1^{(1)}.\tag{5.42}$$

Мы видим, что  $F_{[1]}^{(1)}$  и  $g_2^{(1)} \sim G_{[2]}^{(1)}$  не являются независимыми. Они связаны  $S$ -полиномом Александера (см. раздел 5.6).

Очевидный вопрос (см. раздел 5.4): разрешены ли целочисленные пары  $(a_1^{(1)}, a_0^{(1)})$  для узлов? Другими словами, можно ли получить произвольное целое число для  $g_2^{(1)}$  и произвольный целочисленный многочлен Лорана степени 1 от  $q^{\pm 2}$  для  $F_{[1]}^{(1)}$ ?

- Для дефекта  $\delta = 2$

$$F_{[1]}^{(2)}(1, q) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} \cdot (q^2 + q^{-2}) + a_2^{(2)} \cdot (q^4 + q^{-4})\tag{5.43}$$

и

$$\begin{aligned}
g_2^{(2)}(q) &= \sum_{m=0}^1 a_{m+1}^{(2)} \xi_{m,m+1} = a_1^{(2)} \cdot \xi_{0,1} + a_2^{(2)} \cdot \xi_{1,2} = a_1^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot [2](q^3 + q^{-3}), \\
g_3^{(2)}(q) &= \sum_{m=0}^0 a_{m+2}^{(2)} \xi_{m,m+2} = a_2^{(2)} \cdot \xi_{0,2} = a_2^{(2)}.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

На этот раз мы можем снова спросить, разрешены ли все тройки целых чисел  $(a_2^{(2)}, a_1^{(2)}, a_0^{(2)})$  (см. раздел 5.4). С самого начала мы видим, что  $g_2^{(2)}(q)$  имеет степень 2, а не 1 (по  $q^{\pm 2}$ ), но есть только два параметра  $a_1^{(2)}, a_2^{(2)}$ , так что произвольный целочисленный многочлен степени 2 выступать в роли  $g_2^{(2)}(q)$ .

- Для дефекта  $\delta = 3$

$$F_{[1]}^{(3)}(1, q) = a_0^{(3)} + a_1^{(3)}(q^2 + q^{-2}) + a_2^{(3)}(q^4 + q^{-4}) + a_3^{(3)}(q^6 + q^{-6}) \tag{5.45}$$

и

$$\begin{aligned}
g_2^{(3)}(q) &= \sum_{m=0}^2 a_{m+1}^{(3)} \xi_{m,m+1} = a_1^{(3)} + a_2^{(3)} \cdot [2](q^3 + q^{-3}) + a_3^{(3)} \cdot [3](q^6 + 1 + q^{-6}), \\
g_3^{(3)}(q) &= \sum_{m=0}^1 a_{m+2}^{(3)} \xi_{m,m+2} = a_2^{(3)} \xi_{0,2} + a_3^{(3)} \xi_{1,3} = a_2^{(3)} + a_3^{(3)} [3](q^4 + q^{-4}), \\
g_4^{(3)}(q) &= \sum_{m=0}^0 a_{m+3}^{(3)} \xi_{m,m+3} = a_3^{(3)} \cdot \xi_{0,3} = a_3^{(3)}.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Опять же,  $g_2^{(3)}$  и  $g_3^{(3)}$  не являются произвольными целочисленными полиномами Лорана. В следующих разделах мы обсудим, могут ли встречаться все целые  $a_j^{(\delta)}$  в дифференциальном разложении полинома Александра в симметрическом представлении.

### 5.3.3 Промежуточный итог

Мы доказали, что дефект  $\delta$  определяет степень полинома Александра в фундаментальном представлении. Более того, **вся зависимость от узла  $\mathcal{K}$  для**



всех полиномов Александера в симметрических представлениях сосредоточен в числах  $a_j^{(\delta)}$ ,  $j = 1, \dots, \delta$ . При этом, любое заданное  $a_j^{(\delta)}$  входит только в  $F_{[1]}(1, q)$  и первые несколько  $G_{[i]}(1, q)$  с  $i \leq j$ . То есть степень  $F_{[1]}$  определяет количество ненулевых  $G_{[i]}$ . Только  $a_\delta^{(\delta)}$  входит во все  $\delta$ -коэффициенты ДР  $G_{[i]}(1, q)$ , которые вносят вклад в полином Александера (другие  $G_{[i]}$  с  $i > \delta + 1$  не обязательно равны нулю, но они не дают вклада в ДР при  $a = 1$ ).

Соотношения (5.37), (5.39) несколько сложны. Удобный способ представить их – через условия рекуррентности, которые также известны как  $C$ -полиномы [87] для полиномов Александера, см. раздел 5.6 ниже. Тем не менее, другой вопрос, который необходимо решить, заключается в том, достаточно ли одних и тех же параметров  $a_i^{(\delta)}$  для описания редуцированных полиномов Александера во всех других представлениях. Напомним, что полиномы Александера отличны от нуля для любых представлений. Упрощающее условие редукции, аналогичное (5.18), остается верным для всех представлений с одним крюком, но оно сильно ломается для нескольких крюков. Последнее направление исследований будет рассмотрено в последующих работах, а представления с одним крюком будут рассмотрены в разделе 5.7. В следующем разделе настоящей диссертации мы ограничимся своего рода обратным вопросом: если все, что касается полиномов Александера, полностью контролируется  $a_i^{(\delta)}$ , являются ли они параметрами или тоже как-то ограничены?

## 5.4 Целочисленность

Замечательным свойством полиномов узлов является то, что все их коэффициенты целы. Для полиномов ХОМФЛИ это технически следует из  $R$ -матричного формализма. В общем случае это основание для кохомологических описаний в терминах различных комплексов, как в подходе Хованова-Рожанского [66].

Другими словами, все коэффициенты  $a_j^{(\delta)}$  в (5.30) являются целыми числами

и все  $g_j^{(\delta)}$  в (5.32) являются полиномами Лорана от  $q$  с целыми коэффициентами. Из разложения (5.39) видно, что  $g_j^{(\delta)}$  – целочисленные многочлены Лорана от  $q$ . Действительно,  $\sigma_{j,k}$  переписывается в виде

$$\sigma_{j,k} = \sum_{i=0}^k (-1)^k q^{k(k-2i+1)-2i} \begin{bmatrix} j+k \\ i \end{bmatrix}_{q^{-2}} \begin{bmatrix} j+k \\ j+i \end{bmatrix}_{q^2}, \quad (5.47)$$

так что  $\sigma_{j,k}$  строится из квантовых биномиальных коэффициентов, которые являются целочисленными полиномами Лорана от  $q$ .

Теперь возникает вопрос, можно ли получить целые числа как значения  $a_j^{(\delta)}$  и многочлены Лорана с целыми коэффициентами  $g_j^{(\delta)}$ . В разделах ниже мы делаем первую попытку понять множество значений  $a_i^{(\delta)}$  в пространстве узлов. Мы рассматриваем простейшую возможность – семейства антипараллельных потомков двунитевых торических узлов, в надежде, что они представляют собой достаточно большие множества для каждого конкретного дефекта. Результат оказывается скромным – значения  $a_i^{(\delta)}$ , появляющиеся в этих семействах, выглядят довольно скудно, по крайней мере, для  $\delta > 0$ . Тем не менее, это упражнение интересно, и оно также дает **более точную формулировку гипотезы о сохранении дефектов** [77] (см. раздел 5.5), **что полностью согласуется с изучаемым в настоящем тексте соответствием между степенью полинома Александера и дефектом.**

#### 5.4.1 Двухнитевые торические узлы

Торический узел  $(2m+1)_1$  (замыкание двух нитей с  $2m+1$  пересечениями) имеет максимально возможный (для заданного числа пересечений) дефект  $\delta = m - 1$ , а также

$$a_i^{(m-1)} = -\text{floor} \left( \frac{m+1-i}{2} \right), \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (5.48)$$

Например, для узла  $9_1$  параметр  $m = 4$  и

$$\begin{aligned} a_0^{(3)} &= -\text{floor}(5/2) = -2, & a_1^{(3)} &= -\text{floor}(4/2) = -2, \\ a_2^{(3)} &= -\text{floor}(3/2) = -1, & a_3^{(3)} &= -\text{floor}(2/2) = -1. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Подставляя (5.48) в (5.30) и (5.37), получаем

$$\begin{aligned} F_{[1]}^{(2m+1)_1}(1, q) &\stackrel{(5.30)}{=} a_0^{(m-1)} + \sum_{i=1}^{m-1} a_i^{(m-1)}(q^{2i} + q^{-2i}) \stackrel{(5.48)}{=} -\frac{[m+1][m]}{[2]}, \\ G_{[2]}^{(2m+1)_1}(1, q) &= -\frac{[m+2]!}{[3][4][m-2]!}\{q\}, \\ G_{[3]}^{(2m+1)_1}(1, q) &= -\frac{[m+3]!}{[4][5][6][m-3]!}\{q\}^2, \\ &\dots \\ G_{[i]}^{(2m+1)_1}(1, q) &= -\frac{[m+i]![i]!}{[m-i]![2i]!}\{q\}^{i-1}, \\ G_{[m-j]}^{(2m+1)_1}(1, q) &= -\frac{[2m-j]![m-j]!}{[j]![2m-2j]!}\{q\}^{m-j-1}, \\ &\dots \\ G_{[m-1]}^{(2m+1)_1}(1, q) &\stackrel{(5.37)}{=} \left( a_{m-2}^{(m-1)} + a_{m-1}^{(m-1)} \cdot [m-1](q^m + q^{-m}) \right) \prod_{i=2}^{m-1} \{q^i\} \stackrel{(5.48)}{=} \\ &= -[2m-1][m-1]!\{q\}^{m-2}, \\ G_{[m]}^{(2m+1)_1}(1, q) &\stackrel{(5.37)}{=} a_{m-1}^{(m-1)} \cdot \prod_{i=2}^m \{q^i\} \stackrel{(5.48)}{=} \prod_{i=2}^m \{q^i\} = [m]!\{q\}^{m-1}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Все эти коэффициенты ДР хорошо разлагаются на множители.

## 5.4.2 Антипараллельные потомки торических узлов

Набор (5.48) дает только по одной точке на дефект в  $m = \delta + 1$ -мерном пространстве параметров  $a_i^{(m-1)}$ . Впрочем, это может быть не большой проблемой: теперь мы можем использовать сохраняющую дефекты антипараллельную эволюцию [162] в каждом пересечении, что приводит к  $(2m + 1)$ -мерному семейству антипараллельных претцелей с одинаковым дефектом  $\delta = m - 1$ . Этой

размерности более чем достаточно, вопрос только в том, входят ли в это семейство произвольные целочисленные векторы  $a_i^{(m-1)}$ . Полиномы  $G_{[k]}$ , как мы впервые увидели в разделе 5.3.2, не являются произвольными целочисленными многочленами Лорана заданной степени – степень обычно выше, чем количество влияющих параметров  $a_i^{(\delta)}$ .

Согласно [60], полином ХОМФЛИ для нечетного антипараллельного претцельного узла рода  $2m$  равен

$$\mathcal{H}_{[r]}^{(n_1, \dots, n_{2m+1})} = \sum_{j=1}^{r+1} \frac{d_{[r]}^{2m}}{d_j^{m-1/2}} \prod_{i=1}^{2m+1} (\bar{S}\bar{T}^{2n_i-1}S)_{1,j}. \quad (5.51)$$

Ограничим его симметрическим представлением  $R = [r]$  и сошлемся на раздел 3 [77] за подробными обозначениями в этом случае. Мы также не ставим черточки над  $n_a$  (что обычно делается для различения параллельной эволюции), поскольку это единственный случай, который мы будем рассматривать. Чтобы еще больше упростить формулы, мы пишем  $n_a$  в индексах и в обозначениях претцельных узлов вместо  $2n_a - 1$ .

Для фундаментального представления получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{[1]}^{(n_1, \dots, n_{2m+1})} &= \frac{\{aq^{-1}\}}{\{q^2\}} \prod_{i=1}^{2m+1} \frac{a^{2n_i-2}q^{-1} - qa^{2n_i} + q - q^{-1}}{\{a\}} + \\ &+ \frac{\{aq\}}{\{q^2\}} \prod_{i=1}^{2m+1} \frac{-qa^{2n_i-2} + a^{2n_i}q^{-1} + q - q^{-1}}{\{a\}}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Беря предел  $a \rightarrow 1$ , получаем, что степень  $q^{\pm 2}$  в  $F_{[1]}$  равна  $m$ , а соответствующие коэффициенты при  $F_{[1]}$  задаются формулами (5.55), (5.57) и (5.60)-(5.68).

Строго говоря, дефект не всегда сохраняется при антипараллельной эволюции. Например, трилистник  $3_1$  является не только родительским узлом в семействе дефекта-0, но и потомком всех остальных узлов:  $3_1 = (1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1, 0) = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 0) = \dots$  Как мы увидим (раздел 5.5), существуют и другие точки с нулевым дефектом в эволюционных семействах с большими

дефектами. Что важно для этой работы, эти понижения дефекта легко детектируются фундаментальным полиномом Александера – его степень также падает.

### 5.4.3 Дефект $\delta = m - 1 = 0$ – потомки узла $\mathcal{Z}_1$

В этом случае есть только один коэффициент  $a_0^{(0)}$  и все  $g_j^{(0)} = 0$ . Таким образом, вопрос заключается в том, возможны ли все целые значения  $a_0^{(0)}$ . Ответ положительный, и примером служит семейство твистованных узлов [163], которые образуют класс потомков  $\mathcal{Z}_1$ :

$$a_0^{(0)}(\text{twist}_n) = F_{[1]}^{\text{twist}_n}(a = 1, q) = n. \quad (5.53)$$

В частности,

$$\begin{aligned} & \dots \\ & F_{[1]}^{7_2}(a = 1, q) = -3, \\ & F_{[1]}^{5_2}(a = 1, q) = -2, \\ & F_{[1]}^{3_1}(a = 1, q) = -1, \\ & F_{[1]}^{\text{unknot}}(a = 1, q) = 0, \\ & F_{[1]}^{4_1}(a = 1, q) = 1, \\ & F_{[1]}^{6_1}(a = 1, q) = 2, \\ & F_{[1]}^{8_1}(a = 1, q) = 3. \\ & \dots \end{aligned} \quad (5.54)$$

Больше примеров дают более крупные семейства двойных кос [70] и 3-претцелей [77], также получающиеся антипараллельной эволюцией с сохранением дефекта из трилистника  $\mathcal{Z}_1$  [162] и, таким образом, все имеющие нулевой дефект:

$$a_0^{(0)}(\text{pretzel}_{2l-1, 2m-1, 2n-1}) = lmn - (l-1)(m-1)(n-1). \quad (5.55)$$

Они предоставляют более точную информацию о распространенности/частоте определенных значений  $a_0^{(0)}$  в популяции узлов – это вопрос следующего уровня

СЛОЖНОСТИ.

#### 5.4.4 Дефект $\delta = m - 1 = 1$ – потомки узла $5_1$

Используя (5.52) для дефекта  $\delta = m - 1 = 1$  (потомки  $5_1$ ) и обозначение

$$F_{[1]}^{(n_1, \dots, n_5)}(1, q) = a_0^{(n_1, \dots, n_5)} + a_1^{(n_1, \dots, n_5)}(q^2 + q^{-2}), \quad (5.56)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} a_0^{(n_1 \dots n_5)} &= 2 \sum_{1 \leq a < b < c < d \leq 5} n_a n_b n_c n_d - 2 \sum_{1 \leq a < b < c \leq 5} n_a n_b n_c + \sum_{1 \leq a < b \leq 5} n_a n_b - 1, \\ a_1^{(n_1 \dots n_5)} &= - \sum_{1 \leq a < b < c < d \leq 5} n_a n_b n_c n_d + \sum_{1 \leq a < b < c \leq 5} n_a n_b n_c - \sum_{1 \leq a < b \leq 5} n_a n_b + \sum_{1 \leq a \leq 5} n_a - 1. \end{aligned} \quad (5.57)$$

В частности,

$$a_0^{(n_1, 2, 1, 1, 1)} = n_1 - 2, \quad a_1^{(n_1, 2, 1, 1, 1)} = -2n_1, \quad (5.58)$$

что дает нам полноценное 1-мерное подпространство в 2-мерном пространстве целочисленных  $(a_0, a_1)$ .

Для нашего анализа полинома Александера для этого семейства может оказаться полезным уравнение (5.57). Тем не менее, довольно трудно извлечь убедительные утверждения. Наше предварительное впечатление состоит в том, что двумерное множество  $(a_0, a_1)$  для потомков  $5_1$  строго ограничено и не покрывает всю целочисленную решетку. Например, при  $a_1 = \pm 2$  в этом семействе есть только нечётные  $a_0$ , причём они кажутся довольно редкими: мы нашли  $a_0 = 43, 17, 7, 5, -1, -11$  для  $a_1 = -2$  и  $a_0 = -1, -3, -9$  для  $a_1 = 2$  в диапазоне  $-10 \leq n_1, \dots, n_5 \leq 10$ .

#### 5.4.5 Дефект $\delta = m - 1 > 1$ – потомки узла $(2m + 1)_1$

Используя (5.52), мы можем вычислить

$$F_{[1]}^{(n_1, \dots, n_{2m+1})}(1, q) = a_0^{(n_1, \dots, n_{2m+1})} + \sum_{i=1}^{m-1} a_i^{(n_1, \dots, n_{2m+1})}(q^{2i} + q^{-2i}) \quad (5.59)$$

для любого  $m$ . Оказывается, что старший коэффициент всегда очень прост:

$$a_{m-1}^{(n_1, \dots, n_{2m+1})} = (-)^{m+1} \left( \prod_{a=1}^{2m+1} n_a - \prod_{i=1}^{2m+1} (n_a - 1) \right), \quad (5.60)$$

Для других коэффициентов удобно использовать следующую параметризацию:

$$a_i^{(n_1, \dots, n_{2m+1})} = \sum_{k=1}^{2m} u_k^{(i)} \cdot \left( \sum_{1 \leq a_1 < \dots < a_k \leq 2m+1} n_{a_1} \cdot \dots \cdot n_{a_k} \right). \quad (5.61)$$

Тогда

$$\begin{aligned} u_k^{(m-1)} &= (-)^{k+1} \\ u_k^{(m-2)} &= (-)^k (k - 1 - \delta_{k,2m}) \\ u_k^{(m-3)} &= (-)^{k+1} \left( \frac{k^2 - 3k + 4}{2} - \delta_{k,2m-1} + (2m - 1)\delta_{k,2m} \right) \\ u_k^{(m-4)} &= (-)^k \left( \frac{k^3 - 6k^2 + 17k - 12}{6} - \delta_{k,2m-2} - (2m - 2)\delta_{k,2m-1} - \right. \\ &\quad \left. - (2m^2 - 3m + 2)\delta_{k,2m} \right) \\ u_k^{(m-5)} &= (-)^{k+1} \left( \frac{k^4 - 10k^3 + 47k^2 - 86k + 72}{24} - \delta_{k,2m-3} - (2m - 3)\delta_{k,2m-2} - \right. \\ &\quad \left. - (2m^2 - 5m + 4)\delta_{k,2m-1} - \frac{(2m - 1)(2m^2 - 5m + 6)}{3}\delta_{k,2m} \right) \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (5.62)$$

• Например, (5.57) дает для  $m = 2$  (потомки  $5_1$ ):

$$\begin{array}{c|cccccc} k & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline u_k^{(1)} & = & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ u_k^{(0)} & = & -1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \quad (5.63)$$

• в то время как для  $m = 3$  (потомки  $7_1$ ):

$$\begin{array}{c|cccccccc} k & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline u_k^{(2)} & = & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ u_k^{(1)} & = & -1 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ u_k^{(0)} & = & -2 & 1 & -1 & 2 & -4 & 6 & -6 \end{array} \quad (5.64)$$

- для  $m = 4$  (потомки  $9_1$ ):

$$\begin{array}{c|cccccccc}
k & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
u_k^{(3)} & = & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
u_k^{(2)} & = & -1 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 6 \\
u_k^{(1)} & = & -2 & 1 & -1 & 2 & -4 & 7 & -11 & 15 & -15 \\
u_k^{(0)} & = & -2 & 0 & 1 & -2 & 4 & -8 & 14 & -20 & 20
\end{array} \tag{5.65}$$

и так далее. Общий случай можно описать следующим образом:

$$u_k^{(m-j)} = (-)^{k+j} \left( U_j(k) - \sum_{i=0}^{j-2} V_{j,i}(m) \delta_{k,2m-(j-2-i)} \right), \tag{5.66}$$

где коэффициенты  $U_j$  и  $V_{j,i}$  являются полиномами степени  $j-1$  по  $k$  и степени  $i$  по  $m$  соответственно и определяются рекурсивно:

$$\begin{aligned}
U_{j+1}(k+1) - U_{j+1}(k) &= U_j(k), \\
U_j(k=1) &= \begin{cases} 0 & \text{для чёт. } j \\ 1 & \text{для нечёт. } j \end{cases} \text{ или } U_j(k=0) = (-)^{j+1} \text{floor} \left( \frac{j+1}{2} \right), \tag{5.67}
\end{aligned}$$

$$V_{j+1,i}(m) = V_{j,i} \left( m - \frac{1}{2} \right),$$

$$U_j(2m-1) - V_{j,j-3}(m) = U_j(2m) - V_{j,j-2}(m),$$

где четвертое ограничение говорит, что последние два коэффициента перед  $\delta_{k,2m-1}$  и  $\delta_{k,2m}$  совпадают. В частности

$$\begin{aligned}
V_{j,0} &= 1 \\
V_{j,1} &= 2m - (j-2) \\
V_{j,2} &= 2m^2 - (2j-5)m + \frac{j^2 - 5j + 8}{2}, \\
&\dots \tag{5.68}
\end{aligned}$$

в соответствии с примерами в (5.62).

Выражения (5.61) ограничивают целочисленные множества  $\{a_0, \dots, a_\delta\}$ , так что при  $\delta > 0$  они не произвольны, по крайней мере, для семейства антипарал-



лельных потомков торических узлов. В следующем разделе мы дадим вероятное объяснение того, почему множества  $a_j$  так ограничены.

#### 5.4.6 Пример узла $9_1$

Чтобы подчеркнуть особенность торических узлов, мы добавим пример:

$$\text{дефект } 3 : \text{ узел } 9_1 \quad a_0^{(3)} = -2, a_1^{(3)} = -2, a_2^{(3)} = -1, a_3^{(3)} = -1 \quad (5.69)$$

Дело в том, что все четыре ненулевые комбинации являются красиво факторизованными выражениями (5.50):

$$\begin{aligned} F_{[1]}^{9_1}(1, q) &= -\frac{[4][5]}{[2]}, \\ G_{[2]}^{9_1}(1, q) &= -\{q\}[5][6], \\ G_{[3]}^{9_1}(1, q) &= -\{q\}^2[2][3][7], \\ G_{[4]}^{9_1}(1, q) &= -\{q\}^3[2][3][4]. \end{aligned} \quad (5.70)$$

В данном случае эта факторизация является результатом тонкой настройки коэффициентов  $a_i^{(3)}$ , которые очень особенные. Может случиться так, что антипараллельные потомки продолжают нести какие-то ослабленные свойства этих особенностей и именно поэтому они не описывают общую ситуацию с заданным дефектом. В любом случае, вопрос, независимы ли все коэффициенты  $a_i^{(\delta)}$ , остается открытым.

### 5.5 Следствия для гипотезы о сохранении дефекта

В этом разделе мы обсудим случаи понижения дефектов и дополнительные особенности стандартных диаграмм дефектов (5.13)-(5.16). Анализ проще проводить, используя связь со степенью фундаментального полинома Александера. А именно, указанные отклонения возникают, если обращаются в нуль несколько старших коэффициентов  $a_j^{(\delta)}$  (5.30). В этом случае есть два варианта:

1. Дефект падает.
2. Дефект остается прежним, но оказывается, что  $F_{[1]}$  и некоторые из  $G_{[s]}$  дополнительно разлагаются на множители.

Ниже мы рассмотрим конкретные примеры и обсудим эти свойства более подробно. Оказывается, некоторые упомянутые особенности и понижения дефекта оказываются не случайными и их можно классифицировать.

### 5.5.1 Потомки узла $3_1$

В этом случае только однопараметрического семейства твистованных узлов внутри трехмерного множества потомков узла  $3_1$  достаточно, чтобы обеспечить любое целое значение  $a_0$  (см. раздел 5.4.3). Тем не менее, остальные претцельные узлы дают дополнительные любопытные примеры. Как уже упоминалось в [162], существуют узлы с единичным полиномом Александера,  $a_0 = 0$ , в этом семействе, которые не являются тривиальными узлами, например<sup>6</sup>

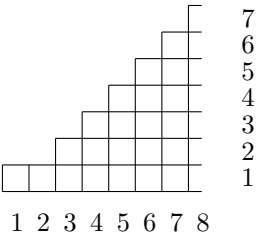
$$F_{[1]}^{(-1,3,4)}(a, q) = \{a\}a^3(a^2 + 1)(a^4 + a^2 + 1) \quad (5.71)$$

и обращается в нуль при  $a = 1^7$ . На самом деле, этот узел является точкой целого семейства  $(-k, 2k + 1, 2k + 2)$ . Более того, есть много других точек эволюции,

$6$	$(2n_1 - 1, \dots, 2n_{2m+1} - 1)$	$F$
$G$	$(n_1, \dots, n_{2m+1})$	
$7$		$a$
	$F_{[1]}(a, q)$	$q$
	$F_{[1]}(a = 1, q)$	
	5.4.4	$5_1, F_{[1]}(a, q)$
$q^{\pm 2}$		$q$
$a = 1$		
$\delta^{(3,2,-1,-4,-5)} = 0$	$F_{[1]}^{(3,2,-1,-4,-5)} = 2 + \{a\}(U_0(a) + U_1(a)(q^2 + q^{-2}))$ ,	
$\delta^{(3,2,-1,-3,-8)} = 0$	$F_{[1]}^{(3,2,-1,-3,-8)} = 2 + \{a\}(V_0(a) + V_1(a)(q^2 + q^{-2}))$	(5.72)
	$U \quad V$	
	$7_1$	$q^{\pm 2}$
$a \neq 1$	$0, F_{[1]}$	

где полином Александра обращается в 1. Формально мы могли бы связать с этими случаями новый вид диаграммы:

иногда для  
дефекта  $\delta^{\mathcal{K}} = 0$ :



(5.73)

Таким образом, можно действительно выявить более сложную структуру дефекта (как  $\delta^{\mathcal{K}}$ , а не просто одно число).

### 5.5.2 Потомки узла $5_1$

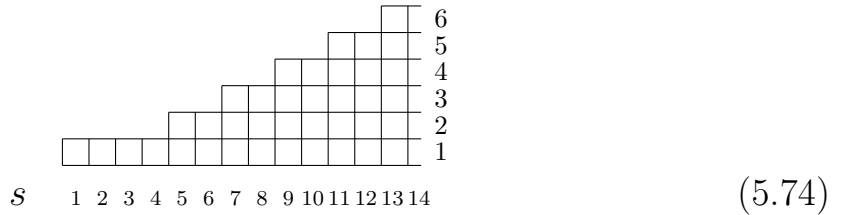
С помощью (5.57) сразу видно множество нулей  $a_1$  в 5-параметрическом антипараллельном семействе – сигнализирует ли это об отклонении от теоремы о сохранении дефекта? Не совсем, она скорее требует более точной формулировки. Антипараллельная эволюция, конечно, может преобразовать  $5_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$  в  $3_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$  и точно так же другие узлы из семейства дефекта-1 в узлы дефекта-0. Таким образом, сохранение дефекта означает, что дефект не увеличивается, но может уменьшаться при определенных значениях параметров эволюции. Дефект никогда не уменьшается, когда все параметры имеют одинаковые знаки, в противном случае следует быть внимательными с таким типом понижения дефектов.

Более интересны такие случаи, как  $(3, 2, -1, -4, -5)$  и  $(3, 2, -1, -3, -8)$  с  $F_{[1]}(1, q) = 2$ . Они имеют нулевой дефект, но не принадлежат к семейству тройных претцелей. В отличие от тройных претцелей, полином  $F_{[1]}(a, q)$  для них зависит от  $q$ , но зависимость от  $q$  исчезает при  $a = 1$ .

Мы не нашли примеров с аномальной диаграммой

ГИПОТЕТИЧЕСКИ:

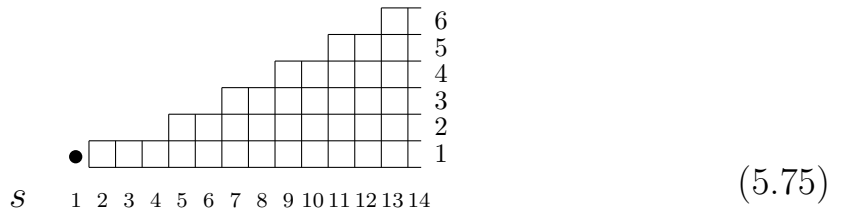
иногда для  
дефекта  $\delta^{\mathcal{K}} = 1$



среди потомков  $5_1$ . Коэффициенты ДР  $F_{[1]} \sim \{a\}$  и обращаются в ноль для полинома Александра только для узлов типа  $(-k, 2k + 1, 2k + 2, 1, 0)$  с дефектом 0 и аномальной диаграммой (5.73) или для  $(k, 0, 1, 0, 1)$ , которые являются просто тривиальными узлами. В настоящее время неясно, появляются ли также другие виды аномальных диаграмм, например

ГИПОТЕТИЧЕСКИ:

иногда для  
дефекта  $\delta^{\mathcal{K}} = 1$



в семействе, генерируемом  $5_1$ . Для ответа на этот вопрос нужно рассматривать более богатое семейство узлов дефекта-1.

## 5.6 Рекурсивные соотношения ( $C$ -полиномы) для цветных полиномов Александра

Для фиксированного узла полиномы ХОМФЛИ для различных представлений не независимы. Бесконечное множество соотношений между ними называются «квантовыми  $\mathcal{A}$ -полиномами», поскольку в квазиклассическом пределе они дают хорошо известные топологические инварианты. С точки зрения пространства модулей узлов, имеет больше смысла смотреть на более фундаментальные переменные. Как поясняется в [85], коэффициенты дифференциального разложения лучше подходят для изучения топологии и классов эквивалентности узлов. Однако и эти циклотомические функции несвободны. Соотношения между ними называются  $C$ -полиномами [77, 86, 87].

Соотношения сохраняются даже в случае  $a = 1$ , т.е.  $C$ -полиномы существуют даже для полиномов Александера. В этом случае их можно изучить исчерпывающе – и на самом деле, это было сделано в подразделе 5.3.2 настоящего текста. Как мы показываем там, по крайней мере для симметрических представлений,  $C$ -полиномы для полинома Александера – соотношения между  $G_{[r]}(1, q)$  с разными  $r$ , зависят только от  $r$  и не зависят от других параметров, описывающих топологию узлов. Именно этого мы и хотим в идеале от будущих соотношений между цветными полиномами ХОМФЛИ – разделить зависимости от представления и от узла, а в случае полинома Александера это частично достигается отделением дефекта  $\delta$  от переменных  $a_j^{(\delta)}$  при заданном  $\delta$ . Пока неясно, завершает ли это историю, потому что нам еще не удалось понять, являются ли  $a_j^{(\delta)}$  целыми числами или между ними существуют дополнительные соотношения. Собственно, мы показали, что они свободны при  $\delta = 0$ , и это тот случай, когда мы знаем **полный набор  $C$ -полиномов Александера**. Ситуацию с остальными значениями дефекта еще предстоит прояснить.

Другим вопросом является нахождение связи между  $C$ -полиномами для полиномов Александера и ХОМФЛИ – можно ли поднять первые к последним и могут ли последние быть ограничены первыми. Непонятно даже, какой набор больше. На самом деле, теория  $C$ -полиномов находится только на стадии разработки, потому что их очень трудно найти. Известные примеры выглядят громоздко и очень трудно поддаются изучению. Более того, в случае полинома ХОМФЛИ они распадаются на разные классы, т.е. например, для заданного  $a$ , для заданного  $q$ , для определенных их комбинаций. В этом смысле наш результат в случае полинома Александера демонстрирует, что такого рода проблемы могут иметь исчерпывающее и элегантное решение.

## 5.7 Другие однокрюковые представления

В этом разделе мы рассмотрим соотношения между коэффициентами ДР для других однокрюковых представлений  $[r, 1^{s-1}]$ .

### 5.7.1 Общие положения

Как мы уже упоминали рядом с (5.18), это скейлинговое соотношение на самом деле верно не только для симметрических представлений, но и для произвольных диаграмм с 1 крюком [69, 164]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{[r, 1^{s-1}]}(q) &= \mathcal{A}_{[1]}(q^{r+s-1}) \stackrel{(5.20)}{=} 1 - F_{[1]}(1, q^{r+s-1}) \{q^{r+s-1}\}^2 = \\ &\stackrel{(5.30)}{=} 1 - [r+s-1]^2 \{q\}^2 \left( a_0^{(\delta)} + \sum_{j=1}^{\delta} a_j^{(\delta)} (q^{2j(r+s-1)} + q^{-2j(r+s-1)}) \right) \end{aligned} \quad (5.76)$$

Это позволяет наложить ограничения на коэффициенты ДР в случае таких представлений. Основная проблема здесь в том, что эти представления не прямоугольные, возникают сложности с кратностями, а в этом случае о ДР известно не так много.

На самом деле, сопоставление не совсем тривиальное, потому что [74]

(i) есть кратности, т.е.  $Q$  в сумме

$$H_R = \sum_{Q \subset R+X} F_Q Z_R^Q \quad (5.77)$$

не находятся во взаимно однозначном соответствии с поддиаграммами  $R$ ,

(ii) так как теперь количество  $Q$  превышает количество поддиаграмм  $R$ , есть неоднозначность в коэффициентах  $F_Q$ , а также

(iii)  $Z$ -факторы не обращаются в нуль автоматически при  $a = 1$  даже для дефекта  $\delta = 0$ .

Подробнее см. [75, 76].

### 5.7.2 Представление $R = [2, 1]$ для дефекта $\delta = 0$

Для простейшего представления  $[2, 1]$ :

$$\begin{aligned} Z_{[2,1]}^{[0]} &= 1, & Z_{[2,1]}^{[1]} &= \frac{[3]\{a\}^2 + [3]^2\{aq^2\}\{a/q^2\}}{[2]^2}, \\ Z_{[2,1]}^{[2]} &= \frac{[3]}{[2]}\{aq^3\}\{aq^2\}\{a\}\{a/q^2\}, & Z_{[2,1]}^{[1,1]} &= \frac{[3]}{[2]}\{aq^2\}\{a\}\{a/q^2\}\{a/q^3\}, \\ Z_{[2,1]}^{[2,1]} &= \{aq^3\}\{aq^2\}\{aq\}\{a/q\}\{a/q^2\}\{a/q^3\}, & Z_{[2,1]}^{X_2} &= -[3]^2\{q\}^4\{aq^2\}\{a/q^2\}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

и только  $Z$ -факторы во второй строке обращаются в нуль при  $\{a\} = 0$  (это имеет значение, когда дефект равен нулю и все  $F_Q$  не сингулярны при  $a = 1$ ).

Таким образом, для полинома Александра имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{[2,1]}^{(\delta=0)} &= 1 - [3]^2\{q\}^2 F_{[1]}^{(\delta=0)}(1, q) - \\ &\quad - [3]^2[2]^2\{q\}^6 \left( F_{[2,1]}^{(\delta=0)}(1, q) - F_{X_2}^{(\delta=0)}(1, q) \right). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Очень разные  $Z$ -факторы  $Z_{[2,1]}^{[2,1]}$  и  $Z_{[2,1]}^{X_2}$  почти совпадают при  $a = 1$  (отличаются только знаком), неоднозначность в  $F$ -коэффициентах сводится к совпадающим сдвигам  $F_{[2,1]}(1, q)$  и  $F_{X_2}(1, q)$  (и некоторому изменению  $F_{[2,2]}(1, q)$ , которое здесь не рассматривается) – в результате, правильно определена только разность  $F_{[2,1]}(1, q) - F_{X_2}(1, q)$ .

Поскольку из (5.22) мы знаем, что при дефекте  $\delta = 0$  коэффициент ДР  $F_{[1]}^{(\delta=0)}(1, q)$  на самом деле не зависит от  $q$ , сравнение с (5.76) подразумевает, что

$$F_{[2,1]}^{(\delta=0)}(1, q) = F_{X_2}^{(\delta=0)}(1, q). \quad (5.80)$$

Действительно, для твистованных узлов дефекта-0  $\text{Tw}_m$  коэффициенты ДР  $F_{[2,1]}$  и  $F_{X_2}$  – суммы элементов соответственно пятой и шестой строк треуголь-

ной матрицы КНТЗ  $B_{[2,1]}^{m+1}$ , см. (13) из [74],

$$B_{[2,1]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^4}{q^2} & -\frac{[2]a^4}{q^3} & \frac{a^4}{q^4} & 0 & 0 & 0 \\ a^4q^2 & -[2]q^3a^4 & 0 & a^4q^4 & 0 & 0 \\ -a^6 & [3]a^6 & -\frac{[3]a^6}{[2]q} & -\frac{[3]a^6q}{[2]} & a^6 & 0 \\ -a^6 & [3]a^6 & \frac{(a^2-q^6)a^4}{q^2(q^4-1)} & -\frac{(a^2q^6-1)a^4}{q^4-1} & 0 & a^4 \end{pmatrix}, \quad (5.81)$$

и легко проверить, что для всех целых  $m$  разность

$$F_{[2,1]}^{\text{Tw}_m} - F_{X_2}^{\text{Tw}_m} \sim \{a\}, \quad (5.82)$$

т.е. обращается в нуль при  $a = 1$ . Коэффициент пропорциональности представляет собой достаточно сложный полином от  $a^{\pm 1}$  и  $q^{\pm 1}$ , таким образом, утверждение не выглядит тривиальным.

Теперь мы можем обобщить его в двух направлениях: на другие представления с 1 крюком (см. разделы 5.7.4 и 5.7.5) и на ненулевые дефекты (см. раздел 5.7.3).

### 5.7.3 Представление $R = [2, 1]$ для дефекта $\delta \geq 1$

Для ненулевого дефекта некоторые коэффициенты ДР  $F_R^Q$  становятся сингулярными при  $a = 1$ , и есть больше членов ДР, вносящих вклад в полином Александра. Это можно проиллюстрировать на примере двухнитевых торических узлов, которые имеют максимальный дефект на пересечение.

В случае  $R = [2, 1]$  мы ожидаем, что при  $\delta \geq 1$  коэффициенты  $F_{[2]}$  и  $F_{[1,1]}(a, q) = F_{[2]}(a, q^{-1})$  пропорциональны  $\{a\}^{-1}$ , так что есть еще два вклада в



обобщение (5.79):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{[2,1]}^{(\delta>0)} &= 1 - [3]^2 \{q\}^2 F_{[1]}^{(\delta>0)}(1, q) - [3]^2 [2] \{q\}^3 \left( G_{[2]}^{(\delta>0)}(1, q) - G_{[2]}^{(\delta>0)}(1, q^{-1}) \right) - \\ &\quad - [3]^2 [2]^2 \{q\}^6 \left( F_{[2,1]}^{(\delta>0)}(1, q) - F_{X_2}^{(\delta>0)}(1, q) \right). \end{aligned} \quad (5.83)$$

На этот раз (5.76) значит, что

$$\begin{aligned} F_{[1]}^{(\delta>0)}(1, q^3) &= F_{[1]}^{(\delta>0)}(1, q) + [2] \{q\} \left( G_{[2]}^{(\delta>0)}(1, q) - G_{[2]}^{(\delta>0)}(1, q^{-1}) \right) + \\ &\quad + [2]^2 \{q\}^4 \left( F_{[2,1]}^{(\delta>0)}(1, q) - F_{X_2}^{(\delta>0)}(1, q) \right) \implies \\ &\quad \sum_{j=1}^{\delta} a_j^{(\delta)} (q^{6j} + q^{-6j} - q^{2j} - q^{-2j}) = [2] \{q\} \left( G_{[2]}^{(\delta>0)}(1, q) - G_{[2]}^{(\delta>0)}(1, q^{-1}) \right) + \\ &\quad + [2]^2 \{q\}^4 \left( F_{[2,1]}^{(\delta>0)}(1, q) - F_{X_2}^{(\delta>0)}(1, q) \right). \end{aligned} \quad (5.84)$$

В частности, при  $\delta = 1$  из тождества  $q^6 + q^{-6} - q^2 - q^{-2} = (q^2 - q^{-2})^2 (2 + \{q\}^2)$  получаем:

$$\begin{aligned} G_{[2]}^{(\delta=1)}(1, q) &= a_1^{(1)} (q^2 - q^{-2}), \\ F_{[2,1]}^{(\delta=1)}(1, q) - F_{X_2}^{(\delta=1)}(1, q) &= a_1^{(1)}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Действительно, для простейшего торического узла с дефектом-1  $5_1$  имеем  $a_1^{5_1} = -1$ , и (5.85) выполняется. Первое выражение в (5.85) такое же, как (5.42).

Аналогично, для  $\delta = 2$  получаем

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} (q^6 + q^{-6} - q^2 - q^{-2}) + a_2^{(2)} (q^{12} + q^{-12} - q^4 - q^{-4}) &= \\ = [2] \{q\} \left( G_{[2]}^{(\delta>0)}(1, q) - G_{[2]}^{(\delta>0)}(1, q^{-1}) \right) + \\ + [2]^2 \{q\}^4 \left( F_{[2,1]}^{(\delta>0)}(1, q) - F_{X_2}^{(\delta>0)}(1, q) \right). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Этого соотношения недостаточно, чтобы найти оба слагаемых во второй строке, но мы можем заменить (5.44) на

$$G_{[2]}(1, q) = \left( a_1^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot [2] (q^3 + q^{-3}) \right) \{q^2\}, \quad (5.87)$$

чтобы получить

$$\begin{aligned} F_{[2,1]}^{7_2}(1, q) - F_{X_2}^{7_2}(1, q) &= \\ = a_1^{(2)} + a_2^{(2)} (q^6 + 2q^4 + 3q^2 + 2 + 3q^{-2} + 2q^{-4} + q^{-6}). \end{aligned} \quad (5.88)$$

Действительно, для торического узла с дефектом-2  $7_1$  имеем  $a_1^{7_1} = a_2^{7_1} = -1$ , и

$$\begin{aligned} G_{[2]}^{7_2}(1, q) &= -[5](q^2 - q^{-2}), \\ F_{[2,1]}^{7_2}(1, q) - F_{X_2}^{7_2}(1, q) &= -[3][5]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

#### 5.7.4 Представления $R = [r, 1]$ для дефекта $\delta = 0$

Для дефекта  $\delta = 0$  и любого  $r$  единственная ненулевая при  $a = 1$  четверка  $Z_{[r,1]}^{[0]} = 1$ ,  $Z_{[r,1]}^{[1]}$ ,  $Z_{[r,1]}^{[2,1]}$  и  $Z_{[r,1]}^{X_2}$ , так что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{[r,1]}^{(\delta=0)} &= 1 - [r+1]^2 \{q\}^2 F_{[1]}^{(\delta=0)}(1, q) - \\ &\quad - [2][r+1]^2 [r][r-1] \{q\}^6 \left( F_{[2,1]}^{(\delta=0)}(1, q) - F_{X_2}^{(\delta=0)}(1, q) \right). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Сравнение с (5.76) дает:

$$F_{[2,1]}^{(\delta=0)}(1, q) = F_{X_2}^{(\delta=0)}(1, q), \quad (5.91)$$

что совпадает с (5.80) для всех  $r$ .

#### 5.7.5 Представления $R = [r, 1^{s-1}]$ для дефекта $\delta = 0$

Сначала получим ДР для полинома Александера при  $R = [r, 1^{s-1}]$  и дефекте  $\delta = 0$ . Для этого представления:

$$\mathcal{H}_{[r,1^{s-1}]}^{\mathcal{K}}(q, a = q^s) = \mathcal{H}_{[r-1]}^{\mathcal{K}}(q, a = q^s) \implies \mathcal{H}_{[r,1^{s-1}]}^{\mathcal{K}}(q, a) - \mathcal{H}_{[r-1]}^{\mathcal{K}}(q, a) \sim \{aq^{-s}\}. \quad (5.92)$$

Глядя на множество примеров, мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{[r,1^{s-1}]}^{\mathcal{K}} &= \mathcal{A}_{[r-1]}^{\mathcal{K}} + G_{[1]}(1, q) \{q^{-s}\} \{q^{2r+s-2}\} = \\ &= 1 - F_{[1]}(1, q) \{q^{r-1}\}^2 + G_{[1]}(1, q) \{q^{-s}\} \{q^{2r+s-2}\}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Например, мы имеем:

- для  $3_1$ :  $G_{[1]}(1, q) = -1$
- для  $4_1$ :  $G_{[1]}(1, q) = 1$

- для  $5_2$ :  $G_{[1]}(1, q) = -2$

Заметим, что результат (5.93) находится в прямом соответствии с результатами разделов 5.7.2 и 5.7.4.

Сравнивая (5.93) и (5.76), получаем

$$G_{[1]}(1, q) = F_{[1]}(1, q) = a_0^{(\delta)}. \quad (5.94)$$

## Глава 6

# Симметрия "тяги-крюк" для квантовых $6j$ -символов

В этой главе мы вводим новую симметрию для  $6j$ -символов [115]. С одной стороны, опираясь на гипотезу о собственных значениях (см. раздел 6.1), мы выводим симметрию "тяги-крюк" для коэффициентов Рака (см. раздел 6.2). Эта симметрия доказана в случаях, когда подтверждается гипотеза о собственных значениях (см. раздел 6.3.1). С другой стороны, мы приводим примеры совпадения матриц Рака, связанных преобразованием перетягивания крюка (см. раздел 6.3.3). Более того, для цветных полиномов ХОМФЛИ для узлов [150] доказана симметрия "тяги-крюк". Ввиду того, что полиномы ХОМФЛИ строятся, в частности, из матриц Рака, эта симметрия должна соблюдаться и для коэффициентов Рака (см. раздел 6.3.2). Это независимое доказательство симметрии "тяги-крюк" коэффициентов Рака также косвенно подтверждает гипотезу о собственных значениях. Другим важным следствием, которое мы приводим, является симметрия "тяги-крюк" для полиномов ХОМФЛИ для зацеплений (см. раздел 6.3.2).

## 6.1 Гипотеза о собственных значениях [106]

В этом разделе мы вводим гипотезу о собственных значениях. Эта гипотеза происходит из уравнения Янга-Бакстера

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2. \quad (6.1)$$

В случае узлов матрицы Рака действуют в тензорном кубе представления  $V_R$ :

$$U : (V_R \otimes V_R) \otimes V_R \rightarrow V_R \otimes (V_R \otimes V_R). \quad (6.2)$$

Выберем базис, в котором  $\mathcal{R}_1$  является диагональной. Затем, следуя процедуре, описанной в разделе 2.3.3, можно диагонализировать  $\mathcal{R}_2$  с помощью матрицы Рака:  $\mathcal{R}_2 = U^\dagger \mathcal{R}_1 U$ , а уравнение Янга-Бакстера (6.1) примет вид

$$\mathcal{R}_1 U^\dagger \mathcal{R}_1 U \mathcal{R}_1 = U^\dagger \mathcal{R}_1 U \mathcal{R}_1 U^\dagger \mathcal{R}_1 U. \quad (6.3)$$

Это уравнение однородно относительно  $\mathcal{R}_1$ , поэтому мы можем нормировать эту диагональную  $\mathcal{R}$ -матрицу так, чтобы  $\det \mathcal{R}_1 = \prod_i \lambda_i = 1$ . Таким образом, получаем, что уравнение (6.3) полностью определяет  $U$ -матрицу через нормированные собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы.

В случае зацепления каждая нить может нести собственное представление, и имеется несколько  $\mathcal{R}$ -матриц с разными собственными значениями. Тем не менее верна

**Гипотеза о собственных значениях [106].**

$$U \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_{123} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ - \end{matrix} \begin{matrix} \check{\mathcal{R}}_{12}, \check{\mathcal{R}}_{23} \\ \check{\mathcal{R}}_{13}. \end{matrix}$$

## 6.2 Симметрия "тяги-крюк" для коэффициентов Рака

Симметрии бj-символов полностью описаны только для случая алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2$  [105]. Соответствующая группа симметрии –  $S_4 \times S_3$ . Для  $\mathfrak{sl}_N$ ,  $N > 2$  пол-

ная группа симметрии неизвестна. Однако в работе [111] описана возможность построения новых симметрий с использованием гипотезы о собственных значениях, но явные симметрии приводились только для случаев симметрических представлений и сопряженных им в [107, 112].

В этом разделе мы вводим симметрию "тяги-крюк" коэффициентов Рака. Эта симметрия имеет важное свойство. Она преобразует любую диаграмму Юнга, которую можно поместить внутрь крюка, включая случаи с вырождениями. Это первая обнаруженная симметрия матриц Рака, которая верна вне случаев без вырождений.

Введем преобразование перетягивания крюка [28] в терминах диаграмм Юнга. Диаграмма Юнга помещается внутрь подходящего толстого крюка  $(K + M|M)$  для некоторых целых чисел  $K$  и  $M$ . Введем аналог обозначений Фробениуса: первые  $K$  строк параметризуем их длиной  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, K$ , остальные строки параметризуем сдвинутыми фробениусовыми переменными  $\alpha_i = R_i - (i - K) + 1$ ,  $\beta_i = R'_{i-K} - i + 1$ ,  $i = K + 1, \dots, K + M$ . Преобразование "тяги-крюк"  $\mathbf{T}_\epsilon^{(K+M|M)}$  перетягивает диаграмму Юнга внутри толстого крюка:

$$R_i \longrightarrow R_i - \epsilon, \quad \alpha_i \longrightarrow \alpha_i - \epsilon, \quad \beta_i \longrightarrow \beta_i + \epsilon, \quad (6.1)$$

где  $\epsilon$  – соответствующий сдвиг диаграммы. Обратите внимание, что  $\epsilon$  может быть отрицательным, что соответствует обратному сдвигу. Примеры показаны на рис. 6.1.

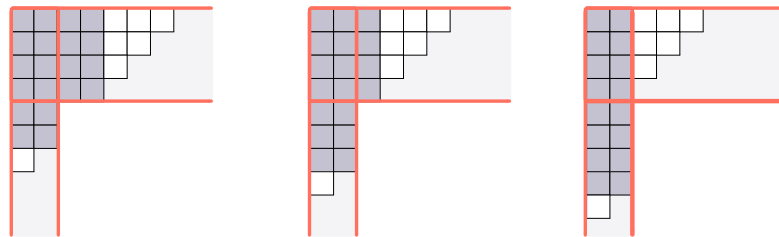


Рис. 6.1: Пример применения преобразования перетягивания крюка  $\mathbf{T}_1^{(4|2)}$  из левой диаграммы в среднюю и  $\mathbf{T}_2^{(4|2)}$  из левой диаграммы в правую [28].

В разделе 4 статьи [28] было доказано, что собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц (2.25) инвариантны (с точностью до знака) относительно преобразования перетягивания крюка в случае узла:

$$\begin{aligned} \varkappa(Q) - 4\varkappa(R) - N|R| &= \\ &= \varkappa\left(\mathbf{T}_{2\epsilon}^{(N+M|M)}(Q)\right) - 4\varkappa\left(\mathbf{T}_{\epsilon}^{(N+M|M)}(R)\right) - N\left|\mathbf{T}_{\epsilon}^{(N+M|M)}(R)\right|, \quad V_Q \in V_R \otimes V_R. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Заметим, что в этой формуле преобразование "тяги-крюк" зависит от  $N$ . Однако условие нормировки собственных значений  $\mathcal{R}$ -матриц в гипотезе о собственных значениях делает собственные значения независимыми от  $N$ .

На самом деле, собственные значения не меняются и в случае зацепления, так как выражаются через  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  инварианты Казимира [96, 131], инвариантные относительно преобразования перетягивания крюка, что доказано в [150]. Таким образом, гипотеза о собственных значениях подразумевает, что коэффициенты Рака также инвариантны относительно преобразования "тяги-крюк". Таким образом, мы можем сформулировать следующую гипотезу.

### Гипотеза 6.2.1

$$U \left[ \begin{array}{cc|c} R_1 & R_2 & R_{12} \\ R_3 & R_{123} & R_{23} \end{array} \right] = U \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{T}_{\epsilon_1}(R_1) & \mathbf{T}_{\epsilon_2}(R_2) & \mathbf{T}_{\epsilon_1+\epsilon_2}(R_{12}) \\ \mathbf{T}_{\epsilon_3}(R_3) & \mathbf{T}_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}(R_{123}) & \mathbf{T}_{\epsilon_2+\epsilon_3}(R_{23}) \end{array} \right]. \quad (6.3)$$

Подчеркнем несколько важных особенностей этой симметрии.

### Замечание 6.2.1

$M$ ,

### Замечание 6.2.2

[28],

[150]

$$\begin{aligned}
(3.18). \quad & N - \\
\mathfrak{sl}_{N+1}, & (N + M|M). \\
N, & \\
\mathfrak{sl}_{N+M|M} & \\
& N \\
& \mathfrak{sl}_{N+1}.
\end{aligned}$$

### Замечание 6.2.3

Простейшим нетривиальным примером является случай без кратностей и матриц размера  $2 \times 2$ . Используя базу данных [148] и явные формулы для матриц Рака для симметрических входящих представлений [120], мы сразу видим, что

$$\begin{aligned}
U \begin{bmatrix} [2, 2] & [2, 2] \\ [2, 2] & [5, 4, 1, 1, 1] \end{bmatrix} &= U \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^{(2|1)}([2, 2]) & \mathbf{T}_1^{(2|1)}([2, 2]) \\ \mathbf{T}_1^{(2|1)}([2, 2]) & \mathbf{T}_3^{(2|1)}([5, 4, 1, 1, 1]) \end{bmatrix} = \\
= U \begin{bmatrix} [3]' & [3]' \\ [3]' & [8, 1]' \end{bmatrix} &= U \begin{bmatrix} [3] & [3] \\ [3] & [8, 1] \end{bmatrix}, \\
U \begin{bmatrix} [2, 2] & [2, 2] \\ [2, 2] & [5, 4, 1, 1, 1] \end{bmatrix} &= U \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{-1}^{(1|1)}([3]) & \mathbf{T}_{-1}^{(1|1)}([3]) \\ \mathbf{T}_{-1}^{(1|1)}([3]) & \mathbf{T}_{-3}^{(1|1)}([8, 1]) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [2, 1] & [2, 1] \\ [2, 1] & [5, 1, 1, 1, 1] \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

## 6.3 Свидетельства в пользу симметрии "тяги-крюк"

В этом разделе мы приводим факты и примеры справедливости гипотезы 6.2.1. В отличие от примера из предыдущего раздела, здесь мы рассматриваем случаи с кратностями, когда гипотеза о собственных значениях не доказана. Тем не ме-



нее, в этих случаях симметрия перетягивания крюка для коэффициентов Рака сохраняется. Этот факт также косвенно подтверждает гипотезу о собственных значениях.

### 6.3.1 Доказательства гипотезы о собственных значениях

Гипотеза о собственных значениях была доказана для нескольких конкретных случаев:

- для  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$  в [107];
- в случае узлов для  $U_q(\mathfrak{sl}_N)$  для матриц размером до  $5 \times 5$  без кратностей [106, 165].

Таким образом, для этих случаев также доказана симметрия перетягивания крюка для матриц Рака.

### 6.3.2 Симметрия "тяги-крюк" для цветных полиномов ХОМФЛИ

В разделе 4.3 была доказана симметрия перетягивания крюка для полиномов ХОМФЛИ для узлов (3.18) [115, 150]. В этом случае симметрия перетягивания крюка специфицирована:  $K = N$ , где  $N$  – ранг алгебры  $\mathfrak{sl}_{N+1}$ :

$$H_R^K(q, a = q^N) = H_{\mathbf{T}_\epsilon^{(N+M|M)}(R)}^K(q, a = q^N). \quad (6.1)$$

Рассмотрим следствия этой симметрии. Во-первых, обратим внимание, что

$$\frac{\text{qdim}(\mathbf{T}_\epsilon^N(R))}{\text{qdim}(R)} = (-1)^{\epsilon h_N(R)}, \quad (6.2)$$

где  $h_N(R)$  – количество клеток на сдвинутой на  $N$  диагонали диаграммы Юнга  $R$ .  
 полиномы ХОМФЛИ строятся из следов произведений  $\mathcal{R}$ -матриц и квантовых размерностей (2.33):

$$\mathcal{H}_R^K = \sum_{Q \in R^{\otimes m}} \text{tr}_{\mathcal{M}_Q}(\pi(\beta_K)) \frac{\text{qdim}(Q)}{\text{qdim}(R)}. \quad (6.3)$$

Таким образом, ожидается, что  $\text{tr}_{\mathcal{M}_Q}(\pi(\beta_{\mathcal{K}}))$  также сохраняются (с точностью до знака) при преобразовании "тяги-крюк".

Для наглядности рассмотрим пример косы из 3 нитей, для которой полином ХОМФЛИ

$$\mathcal{H}_R^{\mathcal{K}} = \sum_{Q \in R^{\otimes 3}} \text{tr}_{\mathcal{M}_Q} \left( \prod_{i=1}^n \mathcal{R}_1^{a_i} \mathcal{R}_2^{b_i} \right) \frac{\text{qdim}(Q)}{\text{qdim}(R)} \quad (6.4)$$

с произвольным количеством  $n$  параметров  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ . Как описано в разделе 2.3.3, мы выбираем базис, в котором  $\mathcal{R}_1$  является диагональной  $\mathcal{R}_1 = \Lambda_{\mathcal{R}_1}$ . Затем  $\mathcal{R}_2$  диагонализуется соответствующей  $U$ -матрицей:  $\mathcal{R}_2 = U^\dagger \Lambda_{\mathcal{R}_1} U$ .  $\Lambda_{\mathcal{R}_1}$  сохраняется при преобразовании "тяги-крюк", а  $\text{tr}_{\mathcal{M}_Q} \left( \prod_{i=1}^n \Lambda_{\mathcal{R}_1}^{a_i} U^\dagger \Lambda_{\mathcal{R}_1}^{b_i} U \right)$  должен быть инвариантным относительно этого преобразования для любых  $n, a_i, b_i, i = 1, \dots, n$ . Таким образом, естественно ожидать, что коэффициенты Рака обладают симметрией перетягивания крюка.

С другой стороны, как мы уже отмечали, для случая зацепления собственные значения  $\mathcal{R}$ -матриц также сохраняются при преобразовании перетягивания крюка. Более того, наша гипотеза по-прежнему верна для случая зацепления, поэтому матрицы Рака обладают симметрией перетягивания крюка. Таким образом, все структурные элементы полинома ХОМФЛИ для зацепления не изменяются при преобразовании "тяги-крюк", и мы можем констатировать

### Гипотеза 6.3.1

" - " .

Заметим, что для случая зацепления симметрия перетягивания крюка для полиномов ХОМФЛИ не была ни доказана, ни обнаружена, и здесь мы впервые вводим ее.

### 6.3.3 Примеры для $U_q(\mathfrak{sl}_N)$

Здесь мы приводим список нетривиальных примеров симметрии "тяги-крюк" для матриц Рака  $U \begin{bmatrix} R & R \\ R & R_{123} \end{bmatrix}$  для случаев с вырождениями, в которых гипотеза о собственных значениях еще не доказана. Из всех известных б $\bar{j}$ -символов [148] интересным оказывается только один случай – случай  $R = [3, 2] \rightarrow \mathbf{T}_1^{(2|1)}([3, 2]) = [2, 1, 1] = [3, 1]'$ . Среди всех получившихся диаграмм Юнга  $R_{123}$  есть четыре нетривиальные матрицы с кратностями, которые в сумме дают 99 б $\bar{j}$ -символов.

1.  $V_{[7,5,1,1,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \rightarrow V_{[8,2,1,1]'} \in V_{[3,1]}'^{\otimes 3}$

Рассмотрим этот случай более подробно. Важной особенностью нахождения матриц Рака [148] является то, что они вычислялись в определенном базисе векторов старшего веса. Базисы разных матриц Рака находятся в соответствии, если нет кратностей, потому что есть только один вектор, связанный с соответствующим старшим весом. Когда возникают кратности, соответствующие базисные элементы могут по-разному смешиваться. Таким образом, чтобы показать справедливость симметрии перетягивания крюка для матриц Рака, нужно сделать ортогональное преобразование. В нашем случае есть две матрицы  $6 \times 6$  с кратностями:

$$U \begin{bmatrix} [3, 2] & [3, 2] \\ [3, 2] & [7, 5, 1, 1, 1] \end{bmatrix} \text{ и } U \begin{bmatrix} [3, 1] & [3, 1] \\ [3, 1] & [8, 2, 1, 1] \end{bmatrix}.$$

Базис для  $U \begin{bmatrix} [3, 2][3, 2] \\ [3, 2][7, 5, 1, 1, 1] \end{bmatrix}$  из [148] соответствует диаграммам Юнга  $[6, 3, 1]_-$ ,  $[5, 4, 1]_+$ ,  $[5, 4, 1]_-$ ,  $2[5, 3, 1, 1]_+$ ,  $[4, 4, 1, 1]_-$ , расположенным в написанном лексикографическом порядке, где индекс  $+$  сигнализирует о принадлежности соответствующего представления симметрическому квадрату  $V_{[3,2]}^{\otimes 2}$  и индекс  $-$  сигнализируют, что соответствующее представление принадлежит антисимметрическому квадрату  $V_{[3,2]}^{\otimes 2}$ . Применяя преобразование "тяги-крюк" и транспонирование диаграмм, мы приходим к  $[5, 1, 1, 1]_+$ ,  $[5, 2, 1]_-$ ,  $[5, 2, 1]_+$ ,  $2[6, 1, 1]_-$ ,

$[6, 2]_+$  соответственно, которые должны располагаться в обратном порядке, чтобы сформировать базис для  $U \begin{bmatrix} [3, 1] & [3, 1] \\ [3, 1] & [8, 2, 1, 1] \end{bmatrix}$  из [148]. К счастью, нужно повернуть только один блок, соответствующий  $2[6, 1, 1]_-$ :

$$\tilde{U} \begin{bmatrix} [3, 1] & [3, 1] \\ [3, 1] & [8, 2, 1, 1] \end{bmatrix} = \tilde{O}' U \begin{bmatrix} [3, 1] & [3, 1] \\ [3, 1] & [8, 2, 1, 1] \end{bmatrix} O, \quad (6.5)$$

где

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{O}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \tilde{\theta} & -\sin \tilde{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \tilde{\theta} & \cos \tilde{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Существуют единственные (с точностью до  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) углы  $\theta$  и  $\tilde{\theta}$ , которые приводят к

$$\tilde{U} \begin{bmatrix} [3, 1] & [3, 1] \\ [3, 1] & [8, 2, 1, 1] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [3, 2] & [3, 2] \\ [3, 2] & [7, 5, 1, 1, 1] \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Ответы для этих углов

$$\begin{aligned} \tan \theta &= -\frac{q^{11}}{\sqrt{q^4 - q^3 + q^2 - q + 1} \sqrt{q^4 + q^3 + q^2 + q + 1} (q^8 + 1)} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{q^{10} - q^9 + q^8 - q^7 + q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1}} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{q^{10} + q^9 + q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1}}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \tan \tilde{\theta} &= q \sqrt{q^4 - q^3 + q^2 - q + 1} \sqrt{q^4 + q^3 + q^2 + q + 1} \times \\ &\times \sqrt{q^{10} - q^9 + q^8 - q^7 + q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1} \times \\ &\times \frac{\sqrt{q^{10} + q^9 + q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1}}{(q^2 - q + 1) (q^2 + q + 1) (q^6 - q^3 + 1) (q^6 + q^3 + 1)}, \end{aligned}$$

и равенство (6.7) выполняется для всех элементов матрицы. Для получения окончательного равенства транспонируем диаграммы Юнга, что не меняет  $U$ -матрицу (2.21).

Выполняя аналогичные процедуры, мы также проверяем инвариантность матриц Рака относительно следующих преобразований перетягивания крюка:

$$2. V_{[8,5,1,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \rightarrow V_{[7,2,1,1,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$$

$$3. V_{[8,6,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \rightarrow V_{[6,2,2,1,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$$

$$4. V_{[7,6,1,1]} \in V_{[3,2]}^{\otimes 3} \rightarrow V_{[7,2,2,1]'} \in V_{[3,1]'}^{\otimes 3}$$

Эти примеры обеспечивают очень важную проверку симметрии "тяги-крюк" для матриц Рака.

# Глава 7

## Заключение

В данной диссертационной работе были получены следующие результаты.

- На основе известных симметрий цветных полиномов ХОМФЛИ относительно преобразований представления мы нашли аналитические формулы для мультипликативного базиса групповой структуры полинома ХОМФЛИ для любого ранга алгебры  $\mathfrak{sl}_N$  и для ее произвольного представления  $R$ . Мультипликативный базис групповых факторов состоит из четных и нечетных собственных значений операторов Казимира  $\mathfrak{sl}_N$ . Для четных инвариантов Казимира нам удалось найти универсальную формулу, а для нечетных мы предъявляем их алгоритм нахождения в произвольном порядке. В найденном нами базисе групповых факторов мы привели метод построения групповых факторов цветных полиномов ХОМФЛИ в любом порядке пертурбативного разложения.
- Мы также посчитали групповые факторы полиномов ХОМФЛИ на компьютере с использованием известных значений полиномов ХОМФЛИ для разных узлов и представлений вплоть до 13 уровня пертурбативного разложения. Все групповые факторы, полученные нами из соображений симметрий полинома ХОМФЛИ, присутствуют в пертурбативном разложении полиномов ХОМФЛИ до 13 порядка включительно. Исходя из этого мы

сформулировали гипотезу о том, что групповая структура цветных полиномов ХОМФЛИ полностью фиксируется известными для них симметриями.

- Так как мы предъявили универсальный метод нахождения групповых факторов полиномов ХОМФЛИ и предъявили их явно вплоть до 13 порядка, теперь мы можем находить инварианты Васильева порядков выше ранее достигнутого 6 порядка. Таким образом, мы описали метод нахождения инвариантов Васильева высших порядков с использованием найденного базиса групповых факторов. Мы применили этот метод к вычислению инвариантов Васильева узла  $3_1$  до 11 порядка включительно и узла  $5_2$  до 10 порядка включительно.
- В шестом порядке пертурбативного разложения цветных полиномов ХОМФЛИ совпадают два групповых фактора. Иными словами, весовая система алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_N$  не различает два групповых фактора на шестом уровне. С использованием параметризации П. Вожеля мы показали, что весовая система любой простой алгебры Ли не различает эти два групповых фактора.
- Мы предъявили новый метод нахождения рекурсивных соотношений для цветных полиномов ХОМФЛИ с использованием найденного нами базиса групповых факторов. Из таких рекурсивных соотношений можно получить так называемые квантовые  $A$ -полиномы. Мы привели конкретный пример нахождения рекурсивных соотношений для полиномов Джонса торических узлов  $T[2, 2k + 1]$  в симметрических представлениях.
- Симметрия сопряжения для цветного полинома ХОМФЛИ неприменима напрямую к цветному полиному Александера, однако существенно ограничивает его групповую структуру. Таким образом, мы выявили, что суще-

ствуется еще не открытая симметрия цветного полинома Александера, которая так же ограничивает его групповые факторы, как и симметрия сопряжения полинома ХОМФЛИ. Также, нам удалось найти аналитическую  $N$ -деформацию четных групповых факторов цветных полиномов Александера в групповые факторы полиномов ХОМФЛИ. Исходя из того, что полученные нами групповые факторы цветных полиномов ХОМФЛИ меняются простым и универсальным способом относительно определенного перемасштабирования представления мы смогли обобщить однокрюковое скейлинговое соотношение цветного полинома Александера на случай произвольного представления.

- Используя однокрюковое скейлинговое соотношение для полинома Александера и его дифференциальное разложение, мы доказали гипотезу о связи дефекта дифференциального разложения цветного полинома ХОМФЛИ со степенью фундаментального полинома Александера. Мы обсудили полноту целочисленных параметров симметрических полиномов Александера. В частности, в случае дефекта-0 мы нашли, что все целые значения реализуются уже для семейства твистованных узлов. Также, мы получили следствия для гипотезы о сохранении дефекта при антипараллельной эволюции. А именно, мы классифицировали некоторые случаи понижения дефекта при антипараллельной эволюции узлов. Мы вычислили  $C$ -полиномы для симметрических полиномов Александера. В случае узлов дефекта-0 набор данных  $C$ -полиномов является полным. Также, мы нашли соотношения на коэффициенты дифференциального разложения цветных полиномов Александера в случае однокрюковых представлений, вне симметрических.
- Мы исследовали первую симметрию квантовых  $6j$ -символов, применимую для произвольных представлений, включая случаи с кратностями, – сим-



метрию "тяги-крюк". С одной стороны, мы показали, что эта симметрия следует из гипотезы о собственных значениях. В некоторых случаях, в которых гипотеза о собственных значениях доказана, можно считать доказанной и симметрию "тяги-крюк" квантовых  $b_j$ -символов. С другой стороны, так как полиномы ХОМФЛИ содержат в себе квантовые  $b_j$ -символы согласно подходу Решетихина–Тураева и мы доказали, что в случае узлов полином ХОМФЛИ симметричен относительно преобразования "тяги-крюк", то и квантовые  $b_j$ -символы должны наследовать данную симметрию. И наоборот, показав наличие симметрии "тяги-крюк" у квантовых  $b_j$ -символов, мы выдвинули гипотезу о наличии симметрии "тяги-крюк" у полиномов ХОМФЛИ, но уже в случае зацеплений. В последнем случае эта симметрия полиномов ХОМФЛИ не была ни доказана, ни даже наблюдаема. Мы привели конкретные примеры справедливости симметрии "тяги-крюк" квантовых  $b_j$ -символов для нетривиальных случаев представлений с вырождениями. С помощью непосредственных свидетельств в пользу симметрии "тяги-крюк" для матриц Рака, мы получили подтверждение гипотезы о собственных значениях.

Результаты данной работы опубликованы в ведущих зарубежных научных журналах [113–115].

## **Благодарности**

Я хотела бы особо поблагодарить моего научного руководителя А. Слепцова за постановку интересных задач и бесчисленные разъяснения научных вопросов. Я искренне признательна ему за помощь, поддержку и внимание к моей научной работе.

Я выражаю благодарность соавторам по совместным работам по теме диссертации А. Пополитову, Н. Целоусову и А.Ю. Морозову, а также своим соав-

торам по другим темам теоретической физики Э.Т. Ахмедову, Д. Трунину и М. Храмцову. Я также признательна за полезные обсуждения и разъяснения научных вопросов В.В. Киселеву, С.В. Соколову, А. Литвинову, Д. Антоненко, И.Я. Арефьевой, А.А. Белавину, Д. Васильеву, Анд. Морозову, А.Д. Миронову, А. Анохиной, В. Мишнякову и И.В. Полюбину.

Отдельно я хочу подчеркнуть свою огромную признательность А.Ю. Морозову за его сопровождение в моем научном пути, научные семинары в ИТЭФе, помогающие ставить правильные вопросы и идти к ответам на них, а также в целом за большую и непрерывную работу с молодыми учеными. Я также безмерно благодарна В.В. Киселеву за улучшение образования и усиление научной среды в МФТИ, благодаря которой, в частности, открылась наша лаборатория на Физтехе, и прежде всего за постоянную поддержку, которая мотивирует меня к дальнейшей работе и развитию.

Хочу также поблагодарить своего первого наставника по теоретической физике Э.Т. Ахмедова за организацию научных семинаров и школ и за личную помощь в начале своего научного пути. Я признательна преподавателям ОП "Квантовая теория поля, теория струн и математическая физика", на которой я училась: А.А. Белавину, А. Литвинову, М. Берштейну, Л. Рыбникову, Б.Л. Фейгину, А. Рослomu, Я. Фоминову, А. Антоненко, И. Побойко, Н. Степанову и отдельно Я.П. Пугаю за его искреннюю любовь к студентам и отдачу в преподавании.

Мне приятно поблагодарить Е. Суслову за неоценимую поддержку и помощь, оказываемую в течение всей моей работы.

# Список литературы

- [1] M. Alvarez и J.M.F. Labastida. “Numerical knot invariants of finite type from Chern-Simons perturbation theory”. В: *Nucl. Phys. B* 433 (1995), с. 555–596. arXiv: hep-th/9407076 [hep-th].
- [2] M. Alvarez и J.M.F. Labastida. “Primitive Vassiliev invariants and factorization in Chern-Simons perturbation theory”. В: *Commun. Math. Phys.* 189 (1997), с. 641–654. arXiv: q-alg/9604010 [math.OA].
- [3] M. Alvarez и J.M.F. Labastida. “Analysis of observables in Chern-Simons perturbation theory”. В: *Nucl. Phys. B* 395 (1993), с. 198–238. arXiv: hep-th/9110069 [hep-th].
- [4] J.M.F. Labastida и E. Perez. “Kontsevich integral for Vassiliev invariants from Chern-Simons perturbation theory in the light cone gauge”. В: *J. Math. Phys.* 39 (1998), с. 5183–5198. arXiv: hep-th/9710176 [hep-th].
- [5] E. Guadagnini, M. Martellini и M. Mintchev. “Perturbative Aspects of the Chern-Simons Field Theory”. В: *Phys. Lett. B* 227 (1989), с. 111–117.
- [6] E. Guadagnini, M. Martellini и M. Mintchev. “Wilson Lines in Chern-Simons Theory and Link Invariants”. В: *Nucl. Phys. B* 330 (1990), с. 575–607.
- [7] A.M. Polyakov. “Quark Confinement and Topology of Gauge Groups”. В: *Nucl. Phys. B* 120 (1977), с. 429–458.
- [8] V.G. Turaev и O.Ya. Viro. “State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols”. В: *Topology* 31.4 (1992), с. 865–902.
- [9] A. Mironov, A. Morozov и And. Morozov. “Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid”. В: *JHEP* 03 (2012), с. 034. arXiv: 1112.2654 [math.OA].
- [10] A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov и And. Morozov. “Racah coefficients and extended HOMFLY polynomials for all 5-, 6- and 7-strand braids”. В: *Nucl. Phys. B* 868 (2013), с. 271–313. arXiv: 1207.0279 [hep-th].

- [11] A. Anokhina и And. Morozov. “Cabling procedure for the colored HOMFLY polynomials”. B: *Theoretical and Mathematical Physics* 178.1 (2014), с. 1–58. arXiv: 1307. 2216 [hep-th].
- [12] J.W. Alexander. “Topological invariants of knots and links”. B: *Transactions of the American Mathematical Society* 30.2 (1928), с. 275–306.
- [13] J.H. Conway. “An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties”. B: *Computational problems in abstract algebra*. 1970, с. 329–358.
- [14] V.F.R. Jones. “A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras”. B: *Bull. Am. Math. Soc.* 12 (1985), с. 103–111.
- [15] R. K. Kaul и Т. R. Govindarajan. “Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links”. B: *Nuclear Physics B* 380.1-2 (1992), с. 293–333. arXiv: hep-th/9111063 [hep-th].
- [16] P. Ramadevi, Т. R. Govindarajan и R.K. Kaul. “Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links. 3. Compact semisimple group”. B: *Nucl. Phys. B* 402 (1993), с. 548–566. arXiv: hep-th/9212110 [hep-th].
- [17] P. Ramadevi, Т. R. Govindarajan и R.K. Kaul. “Knot invariants from rational conformal field theories”. B: *Nucl. Phys. B* 422 (1994), с. 291–306. arXiv: hep-th/9312215 [hep-th].
- [18] Zodinmawia и P. Ramadevi. “SU(N) quantum Racah coefficients and non-torus links”. B: *Nuclear Physics B* 870.1 (2013), с. 205–242. arXiv: 1107. 3918 [hep-th].
- [19] Zodinmawia и P. Ramadevi. “Reformulated invariants for non-torus knots and links”. B: (2012). arXiv: 1209. 1346 [hep-th].
- [20] H. Ooguri и C. Vafa. “Knot invariants and topological strings”. B: *Nucl. Phys. B* 577 (2000), с. 419–438. arXiv: hep-th/9912123 [hep-th].
- [21] J.M.F. Labastida и M. Marino. “Polynomial invariants for torus knots and topological strings”. B: *Commun. Math. Phys.* 217 (2001), с. 423–449. arXiv: hep-th/0004196 [hep-th].
- [22] J.M.F. Labastida, M. Marino и C. Vafa. “Knots, links and branes at large N”. B: *JHEP* 11 (2000), с. 007. arXiv: hep-th/0010102 [hep-th].
- [23] J.M.F. Labastida и M. Marino. “A New point of view in the theory of knot and link invariants”. B: (2001). arXiv: math/0104180 [math.OA].
- [24] M. Marino и C. Vafa. “Framed knots at large N”. B: *Contemp. Math.* 310 (2002), с. 185–204. arXiv: hep-th/0108064 [hep-th].

- [25] A. Mironov, S. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov и A. Sleptsov. “Coloured Alexander polynomials and KP hierarchy”. В: *Phys. Lett. B* 783 (2018), с. 268–273. arXiv: 1805.02761 [hep-th].
- [26] V. Mishnyakov и A. Sleptsov. “Perturbative analysis of the colored Alexander polynomial and KP soliton  $\tau$ -functions”. В: *Nuclear Physics B* 965 (2021), с. 115334. arXiv: 1906.05813 [hep-th].
- [27] V. Mishnyakov, A. Sleptsov и N. Tselousov. “A new symmetry of the colored Alexander polynomial”. В: *Annales Henri Poincaré* (2021). arXiv: 2001.10596 [hep-th].
- [28] V. Mishnyakov, A. Sleptsov и N. Tselousov. “A Novel Symmetry of Colored HOMFLY Polynomials Coming from  $\mathfrak{sl}(N|M)$  Superalgebras”. В: *Commun. Math. Phys.* 384.2 (2021), с. 955–969. arXiv: 2005.01188 [hep-th].
- [29] S. Chmutov, S. Duzhin и J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*. Cambridge University Press, 2012.
- [30] Maxim Kontsevich. “Vassiliev’s knot invariants”. В: *Adv. in Sov. Math* 16.2 (1993), с. 137–150.
- [31] A. Sleptsov. “Vassiliev invariants for pretzel knots”. В: *Int. J. Mod. Phys. A* 31.27 (2016), с. 1650156. arXiv: 1512.07192 [hep-th].
- [32] T. Van Ritbergen, A.N. Schellekens и J.A.M. Vermaseren. “Group theory factors for Feynman diagrams”. В: *International Journal of Modern Physics A* 14.01 (1999), с. 41–96. arXiv: hep-ph/9802376 [hep-ph].
- [33] T. Van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren и S.A. Larin. “The Four loop beta function in quantum chromodynamics”. В: *Phys. Lett. B* 400 (1997), с. 379–384. arXiv: hep-ph/9701390 [hep-th].
- [34] T. Luthe, A. Maier, P. Marquard и Y. Schröder. “Towards the five-loop Beta function for a general gauge group”. В: *JHEP* 07 (2016), с. 127. arXiv: 1606.08662 [hep-ph].
- [35] E. Guadagnini. “Schwinger–Dyson functional in Chern–Simons theory”. В: *Nucl. Phys. B* 912 (2016), с. 238–248. arXiv: 1602.02936 [hep-th].
- [36] E. Guadagnini и F. Rottoli. “Perturbative BF theory”. В: *Nucl. Phys. B* 954 (2020), с. 114987. arXiv: 2002.06131 [hep-th].
- [37] B. Fiol, J. Martfnez-Montoya и A. Rios Fukelman. “The planar limit of  $\mathcal{N} = 2$  superconformal quiver theories”. В: *JHEP* 08 (2020), с. 161. arXiv: 2006.06379 [hep-th].

- [38] B. Fiol, J. Martínez-Montoya и A. Rios Fukelman. “Wilson loops in terms of color invariants”. B: *JHEP* 05 (2019), с. 202. arXiv: 1812.06890 [hep-th].
- [39] V.F.R. Jones. “Index for subfactors”. B: *Invent. Math.* 72 (1983), с. 1–25.
- [40] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K. Millett и A. Ocneanu. “A new polynomial invariant of knots and links”. B: *Bulletin (new series) of the American mathematical society* 12.2 (1985), с. 239–246.
- [41] L.H. Kauffman. “State models and the Jones polynomial”. B: *Topology* 26.3 (1987), с. 395–407.
- [42] J.H. Przytycki и K.P. Traczyk. “Invariants of links of Conway type”. B: *Kobe J. Math.* 4 (1987), с. 115–139. arXiv: 1610.06679 [math.GT].
- [43] A. Morozov. “Are there p-adic knot invariants?” B: *Theoretical and Mathematical Physics* 187.1 (2016), с. 447–454. arXiv: 1509.04928 [hep-th].
- [44] A. Mironov, R. Mkrtychyan и A. Morozov. “On universal knot polynomials”. B: *Journal of High Energy Physics* 2016.2 (2016). arXiv: 1510.05884 [hep-th].
- [45] A. Morozov и N. Tselousov. “Are Maxwell knots integrable?” B: *The European Physical Journal C* 80.12 (2020). arXiv: 2010.02165 [hep-th].
- [46] L. Bishler, A. Mironov и A. Morozov. “Invariants of knots and links at roots of unity”. B: (2022). arXiv: 2205.05650 [hep-th].
- [47] S.-S. Chern и J. Simons. “Characteristic forms and geometric invariants”. B: *Annals Math.* 99 (1974), с. 48–69.
- [48] E. Witten. “Quantum field theory and the Jones polynomial”. B: *Communications in Mathematical Physics* 121.3 (1989), с. 351–399.
- [49] A. Morozov. “Integrability and matrix models”. B: *Phys. Usp.* 37 (1994), с. 1–55. arXiv: hep-th/9303139 [hep-th].
- [50] A. Mironov и A. Morozov. “Superintegrability summary”. B: (2022). arXiv: 2201.12917 [hep-th].
- [51] A. Mironov, A. Morozov и Sh. Shakirov. “Conformal blocks as Dotsenko–Fateev integral discriminants”. B: *International Journal of Modern Physics A* 25.16 (2010), с. 3173–3207. arXiv: 1001.0563 [hep-th].
- [52] A. Mironov и A. Morozov. “Superintegrability as the hidden origin of Nekrasov calculus”. B: (2022). arXiv: 2207.08242 [hep-th].

- [53] N. Yu. Reshetikhin и V. G. Turaev. “Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups”. В: *Communications in Mathematical Physics* 127.1 (1990), с. 1–26.
- [54] E. Guadagnini, M. Martellini и M. Mintchev. “Chern-Simons holonomies and the appearance of quantum groups”. В: *Physics Letters B* 235.3-4 (1990), с. 275–281.
- [55] A. Smirnov. “Notes on Chern-Simons theory in the temporal gauge”. В: *The Most Unexpected at LHC and the Status of High Energy Frontier*. World Scientific, 2012, с. 489–498. arXiv: 0910.5011 [hep-th].
- [56] A. Morozov и A. Smirnov. “Chern-Simons theory in the temporal gauge and knot invariants through the universal quantum R-matrix”. В: *Nuclear Physics B* 835.3 (2010), с. 284–313. arXiv: 1001.2003 [hep-th].
- [57] P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov и A. Smirnov. “Superpolynomials for torus knots from evolution induced by cut-and-join operators”. В: *Journal of High Energy Physics* 2013.3 (2013). arXiv: 1106.4305 [hep-th].
- [58] A. Mironov, A. Morozov и And. Morozov. “Character expansion for HOMFLY polynomials I: Integrability and difference equations”. В: *Strings, gauge fields, and the geometry behind: the legacy of Maximilian Kreuzer*. World Scientific, 2013, с. 101–118. arXiv: 1112.5754 [hep-th].
- [59] A. Anokhina, A. Mironov, A. Morozov и And. Morozov. “Colored HOMFLY polynomials as multiple sums over paths or standard Young tableaux”. В: *Advances in High Energy Physics* 2013 (2013). arXiv: 1304.1486 [hep-th].
- [60] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, P. Ramadevi и V. K. Singh. “Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams”. В: *Journal of High Energy Physics* 2015.7 (2015), с. 1–70. arXiv: 1504.00371 [hep-th].
- [61] A. Mironov и A. Morozov. “Towards effective topological field theory for knots”. В: *Nuclear Physics B* 899 (2015), с. 395–413. arXiv: 1506.00339 [hep-th].
- [62] S. Nawata, P. Ramadevi и V. K. Singh. “Colored HOMFLY-PT polynomials that distinguish mutant knots”. В: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 26.14 (2017), с. 1750096. arXiv: 1504.00364 [math.GT].
- [63] M. Khovanov. “A categorification of the Jones polynomial”. В: *Duke Mathematical Journal* 101.3 (2000), с. 359–426. arXiv: math/9908171 [math.QA].
- [64] D. Bar-Natan. “On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial”. В: *Algebraic & Geometric Topology* 2.1 (2002), с. 337–370. arXiv: math/0201043 [math.QA].

- [65] M. Khovanov. “sl (3) link homology”. B: *Algebraic & Geometric Topology* 4.2 (2004), с. 1045–1081. arXiv: math/0304375 [math. QA].
- [66] M. Khovanov и L. Rozansky. “Virtual crossings, convolutions and a categorification of the SO (2N) Kauffman polynomial”. B: *arXiv preprint math/0701333* (2007). arXiv: math/0701333 [math. QA].
- [67] M. Khovanov. “Categorifications from planar diagrammatics”. B: *Japanese Journal of Mathematics* 5.2 (2010), с. 153–181. arXiv: 1008. 5084 [math. QA].
- [68] V. Dolotin и A. Morozov. “Introduction to Khovanov homologies. III. A new and simple tensor-algebra construction of Khovanov–Rozansky invariants”. B: *Nuclear Physics B* 878 (2014), с. 12–81. arXiv: 1308. 5759 [hep-th].
- [69] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov и An. Morozov. “HOMFLY and superpolynomials for figure eight knot in all symmetric and antisymmetric representations”. B: *JHEP* 07 (2012), с. 131. arXiv: 1203. 5978 [hep-th].
- [70] A. Morozov. “Factorization of differential expansion for antiparallel double-braid knots”. B: *Journal of High Energy Physics* 2016.9 (2016). arXiv: 1606. 06015 [hep-th].
- [71] Ya. Kononov и A. Morozov. “On rectangular HOMFLY for twist knots”. B: *Modern Physics Letters A* 31.38 (2016), с. 1650223. arXiv: 1610. 04778 [hep-th].
- [72] A. Morozov. “Factorization of differential expansion for non-rectangular representations”. B: *Modern Physics Letters A* 33.12 (2018), с. 1850062. arXiv: 1612. 00422 [hep-th].
- [73] M. Kameyama, S. Nawata, R. Tao и H. Derrick Zhang. “Cyclotomic expansions of HOMFLY-PT colored by rectangular Young diagrams”. B: *Letters in Mathematical Physics* 110.10 (2020), с. 2573–2583. arXiv: 1902. 02275 [math. GT].
- [74] A. Morozov. “Extension of KNTZ trick to non-rectangular representations”. B: *Physics Letters B* 793 (2019), с. 464–468. arXiv: 1903. 00259 [hep-th].
- [75] A. Morozov. “The KNTZ trick from arborescent calculus and the structure of the differential expansion”. B: *Theoretical and Mathematical Physics* 204.2 (2020), с. 993–1019. arXiv: 2001. 10254 [hep-th].
- [76] L. Bishler и A. Morozov. “Perspectives of differential expansion”. B: *Phys. Lett. B* 808 (2020), с. 135639. arXiv: 2006. 01190 [hep-th].
- [77] A. Morozov и N. Tselousov. “Differential Expansion for antiparallel triple pretzels: the way the factorization is deformed”. B: (2022). arXiv: 2205. 12238 [hep-th].



- [78] S. Garoufalidis и Thang TQ Le. “An analytic version of the Melvin-Morton-Rozansky conjecture”. B: (2005). arXiv: math/0503641 [math. GT].
- [79] S. Garoufalidis и Thang T Q Lê. “Asymptotics of the colored Jones function of a knot”. B: *Geometry & Topology* 15.4 (2011), с. 2135–2180. arXiv: math/0508100 [math. GT].
- [80] Q. Chen. “Cyclotomic expansion and volume conjecture for superpolynomials of colored HOMFLY-PT homology and colored Kauffman homology”. B: (2015). arXiv: 1512. 07906 [math. QA].
- [81] Yu. Berest, J. Gallagher и P. Samuelson. “Cyclotomic Expansion of Generalized Jones Polynomials”. B: (2019). arXiv: 1908. 04415 [math. QA].
- [82] A. Beliakova и E. Gorsky. “Cyclotomic expansions for  $\mathfrak{gl}_N$  knot invariants via interpolation Macdonald polynomials”. B: (2021). arXiv: 2101. 08243 [math. RT].
- [83] Sh. Zhu Q. Chen K. Liu. “Cyclotomic expansions for the colored HOMFLY-PT invariants of double twist knots”. B: (2021). arXiv: 2110. 03616 [math. GT].
- [84] Ya. Kononov и A. Morozov. “On the defect and stability of differential expansion”. B: *JETP Letters* 101.12 (2015), с. 831–834. arXiv: 1504. 07146 [hep-th].
- [85] S. B. Arthamonov, A. D. Mironov и A. Yu. Morozov. “Differential hierarchy and additional grading of knot polynomials”. B: *Theoretical and Mathematical Physics* 179.2 (2014), с. 509–542. arXiv: 1306. 5682 [hep-th].
- [86] S. Garoufalidis и X. Sun. “The C-polynomial of a knot”. B: *Algebraic Geometric Topology* 6.4 (2006), с. 1623–1653. arXiv: math/0504305 [math. GT].
- [87] A. Mironov и A. Morozov. “Algebra of quantum C-polynomials”. B: *JHEP* 02 (2021), с. 142. arXiv: 2009. 11641 [hep-th].
- [88] L. D. Landau и E. M. Lifshitz. *Quantum mechanics: non-relativistic theory*. T. 3. Elsevier, 2013.
- [89] K. T. Hecht. “A simple class of U(N) Racah coefficients and their application”. B: *Communications in Mathematical Physics* 41.2 (1975), с. 135–156.
- [90] Fo So Chang, J. B. French и To Ho Thio. “Distribution methods for nuclear energies, level densities, and excitation strengths”. B: *Annals of Physics* 66.1 (1971), с. 137–188.
- [91] P. Arnold. “Landau-Pomeranchuk-Migdal effect in sequential bremsstrahlung: From large-N QCD to N=3 via the SU(N) analog of Wigner 6-j symbols”. B: *Physical Review D* 100.3 (2019), с. 034030. arXiv: 1904. 04264 [hep-th].

- [92] J. M. Aroca, H. Fort и R. Gambini. “Path integral loop representation of 2+1 lattice non-Abelian gauge theories”. В: *Physical Review D* 58.4 (1998), с. 045007. arXiv: hep-lat/9703007 [hep-lat].
- [93] A. C. Durst, G. Yang-Mejia и R. N. Bhatt. “Quadrupolar interactions between acceptor pairs in p-doped semiconductors”. В: *Physical Review B* 101.3 (2020), с. 035202. arXiv: 1910.06480 [cond-mat.mtrl-sci].
- [94] A. V. Gorshkov, M. Hermele, V. Gurarie, C. Xu, P. S. Julienne, J. Ye, P. Zoller, E. Demler, M. D. Lukin и A. M. Rey. “Two-orbital  $SU(N)$  magnetism with ultracold alkaline-earth atoms”. В: *Nature physics* 6.4 (2010), с. 289–295. arXiv: 0905.2610 [cond-mat.quant-gas].
- [95] G. Moore и N. Seiberg. “Classical and quantum conformal field theory”. В: *Communications in Mathematical Physics* 123.2 (1989), с. 177–254.
- [96] N. Yu. Reshetikhin. “Invariants of tangles 1”. В: *unpublished preprint* (1987).
- [97] V. Turaev. “The Yang-Baxter equation and invariants of links”. В: *New Developments in the Theory of Knots* 11 (1990), с. 175.
- [98] N. Yu. Reshetikhin и V. G. Turaev. “Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups”. В: *Inventiones mathematicae* 103.1 (1991), с. 547–597.
- [99] G. Racah. “Theory of complex spectra. II”. В: *Physical Review* 62.9-10 (1942), с. 438.
- [100] E. Wigner. *Group theory: and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. Т. 5. Elsevier, 2012.
- [101] W. Groenevelt. “Wilson function transforms related to Racah coefficients”. В: *Acta Applicandae Mathematica* 91.2 (2006), с. 133–191. arXiv: math/0501511 [math.CA].
- [102] B. Ponsot и J. Teschner. “Clebsch–Gordan and Racah–Wigner Coefficients for a Continuous Series of Representations of  $U_q(sl(2, R))$ ”. В: *Communications in Mathematical Physics* 224.3 (2001), с. 613–655. arXiv: math/0007097 [math.QA].
- [103] R. S. Ismagilov. “On Racah operators”. В: *Functional Analysis and Its Applications* 40.3 (2006), с. 222–224.
- [104] S. E. Derkachov и V. P. Spiridonov. “The 6j-Symbols for the  $SL(2, C)$  Group”. В: *Theoretical and Mathematical Physics* 198.1 (2019), с. 29–47. arXiv: 1711.07073 [math-ph].
- [105] A. N. Kirillov и N. Yu. Reshetikhin. “Representations of the algebra  $U_q(sl(2))$ , q-orthogonal polynomials and invariants of links”. В: *Infinite dimensional Lie algebras and groups* 7 (1989), с. 285.

- [106] H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov и And. Morozov. “Eigenvalue hypothesis for Racah matrices and HOMFLY polynomials for 3-strand knots in any symmetric and antisymmetric representations”. В: *International Journal of Modern Physics A* 28.03n04 (2013), с. 1340009. arXiv: 1209. 6304 [math-ph].
- [107] V. Alekseev, And. Morozov и A. Sleptsov. “Interplay between symmetries of quantum 6j-symbols and the eigenvalue hypothesis”. В: *Letters in Mathematical Physics* 111.2 (2021). arXiv: 1909. 07601 [hep-th].
- [108] A. Mironov и A. Morozov. “Universal Racah matrices and adjoint knot polynomials: Arborescent knots”. В: *Physics Letters B* 755 (2016), с. 47–57. arXiv: 1511. 09077 [hep-th].
- [109] S. Dhara, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh и A. Sleptsov. “Eigenvalue hypothesis for multistrand braids”. В: *Physical Review D* 97.12 (2018). arXiv: 1711. 10952 [hep-th].
- [110] L. Bishler, And. Morozov, Sh. Shakirov и A. Sleptsov. “On the block structure of the quantum R-matrix in the three-strand braids”. В: *International Journal of Modern Physics A* 33.17 (2018), с. 1850105. arXiv: 1712. 07034 [hep-th].
- [111] And. Morozov и A. Sleptsov. “New Symmetries for the  $U_q(sl_N)$  6-j Symbols from the Eigenvalue Conjecture”. В: *JETP Letters* 108.10 (2018), с. 697–704. arXiv: 1905. 01876 [hep-th].
- [112] V. Alekseev, And. Morozov и A. Sleptsov. “Multiplicity-free  $U_q(sl_N)$  6-j symbols: Relations, asymptotics, symmetries”. В: *Nuclear Physics B* 960 (2020), с. 115164. arXiv: 1912. 13325 [hep-th].
- [113] E. Lanina, A. Sleptsov и N. Tselousov. “Implications for colored HOMFLY polynomials from explicit formulas for group-theoretical structure”. В: *Nucl. Phys. B* 974 (2022), с. 115644. arXiv: 2111. 11751 [hep-th].
- [114] E. Lanina и A. Morozov. “Defect and degree of the Alexander polynomial”. В: *Eur. Phys. J. C* 82.11 (2022), с. 1022. arXiv: 2208. 01585 [hep-th].
- [115] E. Lanina и A. Sleptsov. “Tug-the-hook symmetry for quantum 6j-symbols”. В: *Physics Letters B* 845 (2023), с. 138138. arXiv: 2210. 07874 [hep-th].
- [116] Hoel Queffelec и Antonio Sartori. “A note on the  $gl(m|n)$  link invariants and the HOMFLY-PT polynomial”. В: (2015). arXiv: 1506. 03329 [math. QA].

- [117] L. Bishler, Saswati Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, Vivek Kumar Singh, P. Ramadevi и A. Sleptsov. “Difference of Mutant Knot Invariants and Their Differential Expansion”. B: *JETP Lett.* 111.9 (2020), с. 494–499. arXiv: 2004.06598 [hep-th].
- [118] L. Bishler, Saswati Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, P. Ramadevi, Vivek Kumar Singh и A. Sleptsov. “Distinguishing Mutant knots”. B: *J. Geom. Phys.* 159 (2021), с. 103928. arXiv: 2007.12532 [hep-th].
- [119] Hugh R. Morton и Peter R. Cromwell. “Distinguishing mutants by knot polynomials”. B: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 05.02 (1996), с. 225–238.
- [120] S. Dhara, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh и A. Sleptsov. “Multi-colored Links From 3-Strand Braids Carrying Arbitrary Symmetric Representations”. B: *Annales Henri Poincaré* 20.12 (2019), с. 4033–4054. arXiv: 1805.03916 [hep-th].
- [121] A. Anokhina. “On R-matrix approaches to knot invariants”. B: (2015). arXiv: 1412.8444 [hep-th].
- [122] V.A.Vassiliev. “Cohomology of knot spaces. Theory of singularities and its applications”. B: *Advances in Soviet Mathematics* (1990), с. 23–69.
- [123] P. Vogel. “Algebraic structures on modules of diagrams”. B: *Journal of Pure and Applied Algebra* 215.6 (2011), с. 1292–1339.
- [124] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov и A. Sleptsov. “Colored knot polynomials: HOMFLY in representation  $[2, 1]$ ”. B: *International Journal of Modern Physics A* 30.26 (2015), с. 1550169. arXiv: 1508.02870 [hep-th].
- [125] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov и A. Sleptsov. “HOMFLY polynomials in representation  $[3, 1]$  for 3-strand braids”. B: *Journal of High Energy Physics* 2016.9 (2016). arXiv: 1605.02313 [hep-th].
- [126] A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov и A. Sleptsov. “Quantum Racah matrices and 3-strand braids in irreps  $R$  with  $|R| = 4$ ”. B: *JETP Letters* 104.1 (2016), с. 56–61. arXiv: 1605.03098 [hep-th].
- [127] Sh. Shakirov и A. Sleptsov. “Quantum Racah matrices and 3-strand braids in representation  $[3, 3]$ ”. B: *Journal of Geometry and Physics* 166 (2021), с. 104273. arXiv: 1611.03797 [hep-th].
- [128] C. Bai, J. Jiang, J. Liang, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov и A. Sleptsov. “Quantum Racah matrices up to level 3 and multicolored link invariants”. B: *Journal of Geometry and Physics* 132 (2018), с. 155–180. arXiv: 1801.09363 [hep-th].

- [129] R. W. Haase и P. H. Butler. “Algebraic formulas for some nontrivial  $U_n$  6j symbols and  $U_{mn} \supset U_m \times U_n$  3jm symbols”. В: *Journal of mathematical physics* 26.7 (1985), с. 1493—1513.
- [130] R. W. Haase и R. Dirl. “The symmetric group: Algebraic formulas for some  $S_f$  6j symbols and  $S_f \supseteq S_{f_1} \times S_{f_2}$  3jm symbols”. В: *Journal of mathematical physics* 27.4 (1986), с. 900—913.
- [131] A. Klimyk и K. Schmüdgen. *Quantum groups and their representations*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [132] M. D. Gould и Y.-Zh. Zhang. “Quantum affine Lie algebras, Casimir invariants, and diagonalization of the braid generator”. В: *Journal of Mathematical Physics* 35.12 (1994), с. 6757—6773. arXiv: hep-th/9311041 [hep-th].
- [133] K. Liu и P. Peng. “Proof of the Labastida-Marino-Ooguri-Vafa conjecture”. В: *Differential Geometry* 85.3 (2010), с. 479—525. arXiv: 1012.2635 [math.GT].
- [134] D.P. Zhelobenko. *Compact Lie groups and their representations*. Т. 40. American Mathematical Soc., 1973.
- [135] A. Mironov, A. Morozov и S. Natanzon. “Algebra of differential operators associated with Young diagrams”. В: *J. Geom. Phys.* 62 (2012), с. 148—155. arXiv: 1012.0433 [math.GT].
- [136] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov и A. Morozov. “Generalized Kazakov-Migdal-Kontsevich model: Group theory aspects”. В: *Int. J. Mod. Phys. A* 10 (1995), с. 2015—2052. arXiv: hep-th/9312210 [hep-th].
- [137] A. Yu. Orlov и D. M. Scherbin. “Multivariate hypergeometric functions as tau functions of Toda lattice and Kadomtsev-Petviashvili equation”. В: *Physica D* 152 (2001), с. 51. arXiv: math-ph/0003011 [math-ph].
- [138] Andrei Okounkov и Rahul Pandharipande. “Gromov-Witten theory, Hurwitz theory, and completed cycles”. В: *Ann. Math.* 163 (2006), с. 517—560. arXiv: math/0204305 [math.AG].
- [139] A. Perelomov и V. Popov. “Casimir operators for semisimple Lie groups”. В: *Mathematics of The USSR-izvestiya* 2 (1968), с. 1313—1335.
- [140] A. Mironov, A. Morozov и A. Sleptsov. “Genus expansion of HOMFLY polynomials”. В: *Theor. Math. Phys.* 177 (2013), с. 1435—1470. arXiv: 1303.1015 [hep-th].

- [141] A. Mironov, A. Morozov и A. Sleptsov. “On genus expansion of knot polynomials and hidden structure of Hurwitz tau-functions”. B: *Eur. Phys. J. C* 73 (2013), с. 2492. arXiv: 1304. 7499 [hep-th].
- [142] Stephen G. Naculich и Howard J. Schnitzer. “Duality Between  $SU(N)$ -k and  $SU(k)$ - $N$  WZW Models”. B: *Nucl. Phys. B* 347 (1990), с. 687–742.
- [143] Stephen G. Naculich, H. A. Riggs и H. J. Schnitzer. “Group Level Duality in WZW Models and Chern-Simons Theory”. B: *Phys. Lett. B* 246 (1990), с. 417–422.
- [144] E. J. Mlawer, Stephen G. Naculich, H. A. Riggs и H. J. Schnitzer. “Group level duality of WZW fusion coefficients and Chern-Simons link observables”. B: *Nucl. Phys. B* 352 (1991), с. 863–896.
- [145] Kefeng Liu и Pan Peng. “New Structure of Knot Invariants”. B: *Commun.Num.Theor.Phys.* 5.3 (2011), с. 601–615. arXiv: 1012. 2636 [math.GT].
- [146] A. Mironov и A. Morozov. “Eigenvalue conjecture and colored Alexander polynomials”. B: *Eur. Phys. J. C* 78.4 (2018), с. 284. arXiv: 1610. 03043 [hep-th].
- [147] <http://katlas.org>.
- [148] <http://knotebook.org/>.
- [149] P. Dunin-Barkowski, A. Sleptsov и A. Smirnov. “Kontsevich Integral for Knots and Vassiliev Invariants”. B: *Int. J. Mod. Phys. A* 28 (2013), с. 1330025. arXiv: 1112. 5406 [hep-th].
- [150] E. Lanina, A. Sleptsov и N. Tselousov. “Chern-Simons perturbative series revisited”. B: *Phys. Lett. B* 823 (2021), с. 136727. arXiv: 2105. 11565 [hep-th].
- [151] J. Gu и H. Jockers. “A note on colored HOMFLY polynomials for hyperbolic knots from WZW models”. B: *Communications in Mathematical Physics* 338.1 (2015), с. 393–456.
- [152] S. Nawata, P. Ramadevi и Zodinmawia. “Colored HOMFLY polynomials from Chern-Simons theory”. B: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 22.13 (2013), с. 1350078.
- [153] A. Mironov, A. Morozov и A. Sleptsov. “Colored HOMFLY polynomials for the pretzel knots and links”. B: *JHEP* 07 (2015), с. 069. arXiv: 1412. 8432 [hep-th].
- [154] A Mironov, A Morozov, An Morozov и A Sleptsov. “Racah matrices and hidden integrability in evolution of knots”. B: *Physics Letters B* 760 (2016), с. 45–58.
- [155] A Mironov, A Morozov, P Ramadevi, Vivek Kumar Singh и A Sleptsov. “Tabulating knot polynomials for arborescent knots”. B: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 50.8 (2017), с. 085201.

- [156] R. L. Mkrtchyan, A. N. Sergeev и A. P. Veselov. “Casimir eigenvalues for universal Lie algebra”. В: *Journal of Mathematical Physics* 53.10 (2012), с. 102106.
- [157] J. Kneissler. “The number of primitive Vassiliev invariants up to degree 12”. В: *arXiv preprint q-alg/9706022* (1997). arXiv: q-alg/9706022 [math.OA].
- [158] Jens Lieberum. “On Vassiliev invariants not coming from semisimple Lie algebras”. В: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 08.05 (1999), с. 659—666.
- [159] S. Garoufalidis и Thang T.Q. Le. “The colored Jones function is q-holonomic”. В: *Geometry Topology* 9.3 (2005), 1253–1293. arXiv: math/0309214 [math.GT].
- [160] K. Hikami. “Difference equation of the colored Jones polynomial for torus knot”. В: *International Journal of Mathematics* 15.09 (2004), 959–965.
- [161] M. Alvarez и J.M.F. Labastida. “Vassiliev invariants for torus knots”. В: *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 05.06 (1996), с. 779—803.
- [162] A. Morozov и N. Tselousov. “Evolution properties of the knot’s defect”. В: (2022). arXiv: 2204.05977 [hep-th].
- [163] A. Mironov, A. Morozov и And. Morozov. “Evolution method and “differential hierarchy” of colored knot polynomials”. В: *AIP Conference Proceedings*. AIP, 2013. arXiv: 1306.3197 [hep-th].
- [164] Sh. Zhu. “Colored HOMFLY polynomials via skein theory”. В: *Journal of High Energy Physics* 2013.10 (2013). arXiv: 1206.5886 [math.GT].
- [165] I. Tuba и H. Wenzl. “Representations of the braid group  $B_3$  and of  $SL(2, \mathbb{Z})$ ”. В: *Pacific Journal of Mathematics* 197.2 (2001), с. 491—510. arXiv: math/9912013 [math.RT].