

## УТВЕРЖДАЮ

Директор Федерального  
государственного бюджетного  
учреждения науки  
Института теоретической  
физики им. Л.Д. Ландау РАН  
док.физ.-мат.наук

Колоколов И.В.

«19» января 2024г.

## Отзыв

ведущей организации на диссертационную работу

**Мишнякова Виктора Викторовича** «Матричные модели и интегрируемость»,  
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по  
специальности 1.3. 3 — теоретическая физика.

Диссертационная работа Мишнякова В.В. посвящена теории матричных моделей и связанным с ней аспектам теории интегрируемых систем. В ней изучаются различные классические и новые явления, возникающие в матричных моделях и связь между ними. Теория матричных моделей является одним из основных направлений современной математической физики, по двум причинам. Во-первых, матричные модели возникают при попытке ответить на многие фундаментальные вопросы теоретической физики. Среди примеров вопросов – описание двумерной квантовой гравитации, и, более, непертурбативной теории струн, задачи связанные с суперсимметричной локализацией функциональных интегралов, описание конформных блоков, перечислительная геометрия пространств модулей кривых и так далее. Во-вторых, матричные модели сами по себе являются простым аналогом функциональных интегралов, свойства которых поддаются подробному изучению. Исследование матричных моделей помогает сформулировать новые подходы к квантовой теории поля.

Основной идеей, раскрываемой в диссертации, является взаимодействие (одновременный учет) условий Вирасоро и уравнений интегрируемых иерархий в матричных моделях. Интерес к изучению различий и сходств этих двух свойств матричных моделей существует ещё с времени бурного развития матричных моделей в контексте теории струн. Автором работы сделаны важные шаги по направлению к окончательным ответам на эти вопросы. На протяжении работы раскрываются два утверждения. С одной стороны, взаимодействие условий Вирасоро и интегрируемости приводит к, так называемому, явлению суперинтегрируемости в матричных моделях, с другой стороны, одновременный учет этих

уравнений в другой форме приводит к уравнениям Пенлеве или уравнениям обладающим свойством Пенлеве.

Можно выделить несколько направлений, по которым в диссертации получены новые результаты.

- 1) Описанные выше вопросы подробно изучены в случае простых матричных моделей типа гауссовой эрмитовой модели. Из приведенных автором вычислений можно явно проследить как одновременный учет условий Вирасоро и интегрируемости приводит к суперинтегрируемости.
- 2) Дальнейшее изучение выше обозначенного вопроса позволило автору развить новый метод работы с матричными моделями, основную роль в котором играет  $W$ -оператор. Этот оператор кодирует в себе информацию о статсумме матричной модели. Специальные алгебраические свойства этого оператора позволили автору по-новому взглянуть на свойство суперинтегрируемости, а также на роль симметрических функций, или характеров. Важно, что развитый метод проверен и применен на множестве разных по своей природе моделей. В этой части достигнут значительный успех в понимании алгебраических структур и симметрий матричных моделей.
- 3) Исследование уравнения Пенлеве для конформного блока в теории с центральным зарядом равным единице. О том, что Фурье преобразование конформного блока удовлетворяет уравнению Пенлеве известно уже некоторое время. Важным является всестороннее изучение этого феномена. Автор описывает его с точки зрения матричных моделей, то есть в случае, когда конформный блок имеет представление в виде интегралов Доценко-Фатеева.

Диссертация состоит из Введения, пяти глав и Заключения, двух приложений, содержит список цитируемой литературы из 161 наименования. Полный объем диссертации составляет 155 страниц.

Введение посвящено обсуждению роли матричных моделей в теоретической физике, и описанию основных, обсуждаемых в диссертации вопросов. Перечисляются цели и задачи исследования и отмечается их актуальность, перечисляются возможные приложения и связи с другими задачами. Излагается содержание диссертации и перечисляются результаты работы.

В первой главе приводятся основные сведения из теории матричных моделей, которые автор использует на протяжении диссертации. Сначала вводятся условия Вирасоро, как уравнения, отражающие инвариантность интеграла относительно замен переменной интегрирования. Затем излагаются аспекты теории интегрируемых иерархий и тау-функций, возникающие в матричных моделях. Также кратко описывается явление суперинтегрируемости и приводятся примеры.

Вторая глава посвящена связи условий Вирасоро и интегрируемости в гауссовой эрмитовой матричной модели. Система условий Вирасоро переписывается как соотношения на коэффициенты разложения по характерам. Далее учитываются интегрируемые свойства в виде детерминантной формулы для средних от характеров. Подставкой этой формулы в соотношения Вирасоро получается формула суперинтегрируемости.

В третьей главе развивается новый метод решения тождеств Уорда с помощью сведения его к единственному уравнению. Показывается, что решением этого уравнения является  $W$ -представление. Во второй половине этой главы  $W$ -представление используется для доказательства суперинтегрируемости в моделях, связанных с полиномами Шура.

В четвертой главе рассматриваются деформации матричных моделей. Рассматривается два случая: в одном роль характеров играют полиномы Джека, в другом -  $Q$ -функции Шура. Полиномы Джека связаны с  $\beta$ -деформацией. В работе показано, что прочие методы доказательства суперинтегрируемости не согласованы с  $\beta$ -деформацией. С другой стороны, метод, развитый автором в прошлой главе, применим, что подробно показано в данной главе. С другой стороны, показано, что аналогичное утверждение верно и для модели Брезана-Гросса-Виттена, связанной с  $Q$ -функциями Шура.

Пятая глава посвящена отдельному явлению – редукции уравнений интегрируемых иерархий к уравнениям Пенлеве, и конкретному примеру матричной модели Доценко-Фатеева для конформного блока. Сначала подробно рассмотрены особенности условий Вирасоро в переменных Мивы, показано, что они имеют разностный вид и являются квадратичными. Далее рассматривается случай конформного блока  $q$ -Вирасоро. Приводятся 8 уравнений, эквивалентные  $q$ -деформированному уравнению Пенлеве – 4 из них идентифицируются с условиями Вирасоро, а другие 4 с уравнениями Тоды. Далее рассматривается их предел при  $q=1$  и, далее, в пределе чистой калибровочной теории.

В Заключении приведены обобщающие выводы и приведены основные результаты исследования. Некоторые технические подробности вынесены в приложения.

В целом в диссертации получены несколько важных результатов, представляющих собой интересный прогресс в области матричных моделей. Актуальность данной работы связана с важной ролью матричных моделей в современной математической и теоретической физике. Развитые методы, в перспективе могут позволить обнаружить новые точные решения матричных моделей и, в более общем, случае интегралов, возникающих при суперсимметричной локализации функциональных интегралов. Работы также привносят новые подробности и явления в теорию интегрируемых иерархий, и имеет потенциальные приложения в комбинаторной и исчислительной геометрии. Результаты последней главы диссертации развивают одну из точек зрения на двойственность Алдая-Гайотто-Тачикавы

Среди всех перечисленных в Заключении результатов хотелось бы отдельно отметить:

- Разработку метода доказательства суперинтегрируемости для моделей с использованием  $W$ -представления и его использование для доказательства суперинтегрируемости  $\beta$ -деформированной матричной модели
- Построение неабелева  $W$ -представления для обобщенной модели Концевича
- Рассмотрение уравнения Пенлеве VI для конформного блока с точки зрения матрично-модельного подхода к интегралам Доценко-Фатеева

К недостаткам диссертации можно отнести недостаточно подробное описание приложений свойства суперинтегрируемости. Автор приводит в качестве примера задачи связанные с суперсимметричной локализацией, и было бы полезно более подробно объяснить какую роль суперинтегрируемость играет в этом случае. Также в последней



главе, посвященной уравнениям Пенлеве недостаточно подробно доказано, что из 8 полученных дифференциальных уравнений следует уравнений Пенлеве.


Указанные недостатки, однако, не умаляют ценности работы, и не влияют на её высокую оценку.

По материалам диссертации опубликовано шесть научных статей в ведущих научных журналах таких как European Physics Journal C, Physics Letters B, письма в ЖЭТФ. Результаты докладывались на конференциях в семинарах ведущих институтов, таких как в Физическом институте им. П.Н. Лебедева, Объединенном институте ядерных исследований, Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, институте теоретической и экспериментальной физики им. А.И. Алиханова. Полученные результаты уже активно развиваются и применяются для решения задач иностранными и российскими научными группами, в первую очередь, в ФИАН и МФТИ.

Диссертация Мишнякова В.В. «Матричные модели и интегрируемость» отвечает всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.3.3 — теоретическая физика, а ее автор, Мишняков Виктор Викторович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв был заслушан и утвержден на заседании Ученого совета Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН 19 января 2024г. , протокол №2

**Отзыв составил:**

Пархоменко Сергей Евгеньевич   
кан.физ.мат. наук , научный сотрудник сектора Квантовая теория поля  
тел.+7 495(702-93-17)  
[spark@itp.ac.ru](mailto:spark@itp.ac.ru)

**Сведения о ведущей организации:**

Федеральное государственное бюджетное учреждения науки Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

142432, Московская обл., г.Черноголовка,  
просп. академика Семенова, д. 1А  
тел. +7(495)702-93-17  
[office@itp.ac.ru](mailto:office@itp.ac.ru)

Ученый секретарь ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН 

к х.н. 

Крашаков С.А.

Список основных публикаций сотрудников Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау по теме диссертации в рецензируемых научных журналах за последние 5 лет:

1. Lashkevich M., Lisovyy O., Ushakova T. Semiclassical approach to form factors in the sinh-Gordon model //arXiv preprint arXiv:2303.11933. – 2023.
2. Lashkevich M. The free field representation for the  $GL(1|1)$  WZW model revisited //Physica Scripta. – 2022. – Т. 98. – №. 1. – С. 015025.
3. Lashkevich M. et al. Lattice models, deformed Virasoro algebra and reduction equation //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2020. – Т. 53. – №. 24. – С. 245202.
4. Fateev V. A., Litvinov A. V. Integrability, duality and sigma models //Journal of High Energy Physics. – 2018. – Т. 2018. – №. 11. – С. 1-29.
5. Elizaveta C., Alexey L., Orlov P. Affine Yangian of  $gl(2)$  and integrable structures of superconformal field theory //Journal of High Energy Physics. – 2022. – Т. 2022. – №. 3.
6. Litvinov A., Vilkoviskiy I. Liouville reflection operator, affine Yangian and Bethe ansatz //Journal of High Energy Physics. – 2020. – Т. 2020. – №. 12. – С. 1-49.
7. Kolyaskin D., Litvinov A., Zhukov A. R-matrix formulation of affine Yangian of  $\hat{gl}(1|1)$  //Nuclear Physics B. – 2022. – Т. 985. – С. 116023.
8. Adler V. E., Kolesnikov M. P. Non-Abelian Toda lattice and analogs of Painlevé III equation //Journal of Mathematical Physics. – 2022. – Т. 63. – №. 10..
9. Belavin A. A., Eremin B. A. Partition Functions of  $N=(2, 2)$  Supersymmetric Sigma Models and Special Geometry on the Moduli Spaces of Calabi-Yau Manifolds //Theoretical and Mathematical Physics. – 2019. – Т. 201. – №. 2. – С. 1606-1613.
10. Artemev A. A., Belavin A. A. Five-Point Correlation Numbers in Minimal Liouville Gravity //JETP Letters. – 2022. – Т. 116. – №. 9. – С. 600-607.
11. Artemev A., Belavin A. Five-point correlation numbers in minimal Liouville gravity and matrix models //Nuclear Physics B. – 2022. – Т. 985. – С. 116019.
12. Bogdanov L. V. Matrix extension of multidimensional dispersionless integrable hierarchies //Theoretical and Mathematical Physics. – 2021. – Т. 209. – №. 1. – С. 1319-1330.