

ОТЗЫВ ОФФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Мишнякова Виктора Викторовича

«МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ»

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 1.3.3 – теоретическая физика.

Диссертация В.В.Мишнякова посвящена одному из наиболее важных и актуальных разделов современной теоретической физики – изучению матричных моделей и взаимосвязи таких важных свойств моделей как интегрируемость, суперинтегрируемость, тождества Уорда и W -представления. Современное развитие теоретической и математической физики выявило важное место матричных моделей. С одной стороны, матричные модели достаточно просты. Более того, как раз матричные модели являются наиболее естественными примерами систем, которые могут быть решены точно. С другой стороны, они сохраняют основные структурные свойства теорий поля, такие как сложную фазовую диаграмму, интегрируемость, бесконечную симметрию функционального интеграла и различные формы разложения ответа, такие как пертурбативные ряды, разложения по родам и по инстантам. Благодаря относительной простоте, матричные модели позволяют значительно углубиться в изучение вышеописанных структур, что приводит к полному описанию некоторых из них в простых терминах. Еще одним аргументом, свидетельствующим о важности и актуальности изучения матричных моделей является тот факт, что именно суперсимметрические варианты таких моделей оказались необходимыми компонентами при построении много-частичных моделей Калоджеро с расширенной суперсимметрией.

Следует отметить, что поставленные и решенные в диссертации задачи, а именно:

- Исследование связи между различными подходами и методами, такими как тождества Уорда, интегрируемость, суперинтегрируемость и W -представления;
- Разработка новых методов доказательства суперинтегрируемости в матричных моделях, описание алгебраических структур, стоящих за этим феноменом;
- Уточнение роли характеров в формулах суперинтегрируемости.

Исследование матричных моделей связанных с функциями Джека и - функциями Шура. Доказательство суперинтегрируемости для деформированных матричных моделей.

- Подробное исследование обобщенной модели Концевича, решение тождеств Уорда в ней;
- Изучение роли уравнения Пенлеве VI в АГТ соответствии с точки зрения его матрично-модельной формулировки

относятся к самым интересным и, в тоже время, очень тонким и математически довольно сложным вопросам современных матричных теорий.

Ввиду всего сказанного, не вызывает сомнений важность и актуальность предпринятого в диссертации исследования.

Диссертация состоит из введения, пяти глав основного текста, заключения и трех приложений. Список цитируемой литературы насчитывает 161 наименования.

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена обзору основных понятий в теории матричных моделей, используемых в диссертации. В работе главным образом рассматриваются условия Вирасоро и интегрируемость. Условиями Вирасоро в матричных моделях называется аналог тождеств Уорда для функциональных интегралов. Интересно, что определение интегрируемости хорошо известное из теории конечномерных систем, в случае матричных моделей состоит в равенстве статсумм матричных моделей t -функциям интегрируемых систем. Это означает, что статсуммы матричных моделей удовлетворяют различным билинейным соотношениям, а интегрируемость в простейших случаях связана с возможностью описания матричных моделей на языке двумерной конформной теории свободных фермионов. Такое представление дает еще одну важную формулировку свойства интегрируемости. В диссертации показано, что статсуммы матричных моделей, как и любые t -функции, имеют детерминантное представление. Это представление оказывается полезным для анализа связи между интегрируемостью и условиями Вирасоро.

В конце этой главы рассмотрено свойство суперинтегрируемости, которое было сформулировано недавно. Оно состоит в наличии явного ответа для средних от специальных симметрических многочленов. Эти симметрические многочлены обычно оказываются характеристиками некоторых групп или их деформациями.

Ввиду существенного отличия определения суперинтегрируемости от общепринятого в конечномерных системах, было бы интересно понять этимологию термина суперинтегрируемость в матричных моделях.

Вторая глава посвящена исследованию связи между условиями Вирасоро, интегрируемости и суперинтегрируемости в эрмитовой матричной модели. Один из интересных результатов данной главы состоит в явной проверке утверждения, что одновременные учет уравнений интегрируемой иерархии и лишь одного из условий Вирасоро позволяет восстановить полный ответ, на уровне средних от характеров.

Третья глава посвящена исследованию W -представления в матричных моделях. Автором показано, что условия Вирасоро в некоторых моделях можно свести к одному уравнению, полностью задающему статсумму. За счет специального суммирования условий Вирасоро с учетом градуировки операторов, структура уравнения оказывается достаточно простой и можно найти его решение в виде $Z = eO(k) \cdot 1$. Такое представление статсуммы называется W -представлением, а операторы $O(k)$ называются W -операторами. Последний раздел данной главы посвящен W -представлению для обобщенной модели Концевича (ОМК). Этот случай рассматривается отдельно, поскольку он значительно более сложен технически.

В **четвертой главе** проверяется согласованность сформулированных утверждений с различными деформациями матричных моделей. Рассмотрены два вида деформаций. Во-первых, это β -деформация, которая вводится с помощью рассмотрения обобщения эрмитовых случайных матриц. Для такой деформации не известно обобщение интегрируемых иерархий. Поэтому, поиск этого обобщения является интересной задачей и рассмотрение соответствующих матричных моделей мог бы привести к новым идеям в этом направлении.

Еще один вариант деформации связан с так называемыми Q -функциями Шура, которые являются другим набором симметрических многочленов.

Автором показано, что и для таких моделей существуют W -операторы, имеющие специальное представление в базисе ϕ -функций. В качестве примера рассмотрена модель Брезина-Гросса-Виттена, в которой соответствующий оператор имеет наиболее простую форму.

В пятой главе изучена связь между условиями Вирасоро, интегрируемостью и уравнениями Пенлеве для матричных моделей, в логарифмической матричной модели, отвечающей представлению Доценко-Фатеева для конформного блока.

В приложениях освещены различные технические аспекты.

Диссертация написана прекрасным языком, с четкими и ясными определениями. Все необходимые доказательства приведены в полной форме и позволяют проследить за очень и очень не простыми вычислениями, аргументами и выводами.

К сожалению, некоторое количество орфографических ошибок, или точнее опечаток, присутствует. В качестве примеров укажу на следующие моменты:

- (3.5) – это одно уравнение, но сразу после него говорится об уравнениях
- После (3.8) – идет речь о подчеркнутом операторе, которого просто нет
- После (3.72) – «содержит член с градуировку 10»
- После (4.4) – пропущен номер ссылки.

При практически идеальном написании, такие опечатки вызывают даже не раздражение, а скорее удивление. К счастью, опечаток мало и они не затрудняют чтение текста.

Хотел бы, в заключение, остановиться на следующих моментах:

- Как уже говорилось, хотелось бы иметь более глубокое понимание важности суперинтегрируемости в контексте матричных моделей. Возможно, имело бы смысл рассмотреть максимально простую модель с таким свойством.
- В связи с условиями Вирасоро: казалось бы, из 2 уравнений $L_1 Z=0$ и $L_2 Z=0$ следуют все высшие уравнения просто в силу алгебры, но такие аргументы не принимаются во внимание вовсе. Хотелось бы понять почему?
- У меня просто нет сомнений в том, что должно существовать и быть не очень сложным обобщение подходов и методов, рассмотренных в диссертации, на случай суперсимметричных систем. Такое обобщение было бы крайне интересно и полезно.

Приведенные замечания никак не влияют на общую исключительно высокую оценку диссертации. К тому же, по большей части это не замечания, а пожелания.

Результаты, полученные в диссертации являются новыми. Они строго обоснованы, выводы и основные результаты четко сформулированы и их достоверность не вызывает сомнений.

Материалы диссертации своевременно опубликованы в ведущих научных журналах, неоднократно докладывались на представительных международных научных конференциях и хорошо цитируются. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях, проводимых в ОИЯИ, Физическом и Математическом институтах РАН, ИТЭФ, а также в других научных организациях, где ведутся работы по математической и теоретической физике.

Диссертация Виктора Викторовича Мишнякова «Матричные модели и интегрируемость», соответствует всем требованиям к кандидатским диссертациям, установленным Положением о присуждении ученых степеней, утвержденным постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24 сентября 2013 года, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Официальный оппонент,
Начальник отдела Современной математической физики
Лаборатории Теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова
Объединенного Института Ядерных Исследований
доктор физико-математических наук

 С.О. Кривонос

“Подлинность подписи С.О. Кривоноса удостоверяю”

Ученый секретарь ЛТФ ОИЯИ
Кандидат физико-математических наук

 А.В. Андреев

24.12.2024

Список основных работ оппонента по теме защищаемой диссертации в рецензируемых научных изданиях за последние 5 лет (не более 15)

Kozyrev N., Krivonos S., Generalized Schwarzians, //Physical Review D. – 2023. – Т. 107. – №. 2. – С. 026018.

Khastyan E., Krivonos S., Nersessian A. Euler top and freedom in supersymmetrization of one-dimensional mechanics //Physics Letters A. – 2022. – Т. 452. – С. 128442.

Krivonos S., Lechtenfeld O., Sutulin A. Integrability of supersymmetric Calogero–Moser models //Physics Letters B. – 2022. – Т. 831. – С. 137184.

Kozyrev N., Krivonos S., N= 4 supersymmetric Schwarzian with D (1, 2; α) symmetry //Physical Review D. – 2022. – Т. 105. – №. 8. – С. 085010.

Kozyrev N., Krivonos S., (super) Schwarzian mechanics //Journal of High Energy Physics. – 2022. – Т. 2022. – №. 3. – С. 1-27.

Khastyan E., Krivonos S., Nersessian A., Kähler geometry for $su(1, N| M)$ superconformal mechanics //Physical Review D. – 2022. – Т. 105. – №. 2. – С. 025007.

Isaev A. P., Krivonos S. O., Split Casimir operator for simple Lie algebras, solutions of Yang–Baxter equations, and Vogel parameters //Journal of Mathematical Physics. – 2021. – Т. 62. – №. 8.

Kozyrev N., Krivonos S., Lechtenfeld O., New approach to $\mathcal{N}=\{2\}$ supersymmetric Ruijsenaars–Schneider model //arXiv preprint arXiv:2103.02925. – 2021.

Krivonos S., Lechtenfeld O., Sutulin A. N-extended supersymmetric Calogero models //Physics Letters B. – 2018. – Т. 784. – С. 137-141.