На правах рукописи

Мишняков Виктор Викторович

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена в Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской Академии Наук

Научный руководитель: **Миронов Андрей Дмитриевич**,
доктор физико-математических наук, высококвалифицированный ведущий научный сотрудник Физического института им. П.Н. Лебедева РАН

Официальные оппоненты: **Погребков Андрей Константинович,**
доктор физико-математических наук,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, ведущий научный сотрудник

Кривонос Сергей Олегович,
доктор физико-математических наук,
Объединенный институт ядерных исследований, начальник отдела Современной математической физики Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова

Ведущая организация: Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау Российской академии наук

Защита состоится 12 февраля 2024 г. в 12:00 на заседании диссертационного совета 24.1.262.04 на базе Физического института им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте института www.levedev.ru.

Автореферат разослан ________________ 202_ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.262.04, к.ф.-м.н. Чернышов Д. О.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. За последнее время струнный подход к квантовой теории поля дал множество интересных и поучительных результатов. В рамках струнной парадигмы вместо изучения отдельных теорий предлагается задавать вопросы про пространство модулей теорий [1]. Оказывается, многие важные свойства открываются именно в форме динамики на пространстве параметров. Такие явления включают в себя, идею об интегрируемой природе эффективных действий, различные геометрические и комбинаторные интерпретации полевых систем, дуальности [2; 3]. Такой подход позволяет обнаруживать общие для разных систем свойства, объединять похожие теории в единое целое.

Матричные модели занимают важное место в этом контексте по нескольким причинам. Во-первых, они являются наиболее естественным примером, который может быть решен точно [4—9]. Матричные модели достаточно просты, чтобы можно было строго определить общие вопросы и получить осмысленные ответы. С другой стороны, они сохраняют основные структурные свойства теорий поля, такие как сложную фазовую диаграмму, интегрируемость, бесконечную симметрию функционального интеграла и различные формы разложения ответа, такие как пертурбативные ряды, разложения по родам и по инстантонам [6]. Благодаря относительной простоте, матричные модели позволяют значительно углубиться в изучение вышеописанных структур, что приводит к полному описанию некоторых из них в простых терминах. Например, для большого класса матричных моделей известны свободно-полевые представления [10]. Матричные модели также могут служить полигоном как для проверки струнного подхода, так и для понимания, какие новые вопросы необходимо задавать в теории поля.

Другая причина, тесно связанная с предыдущей, заключается в возникновении матрично-модельного описания для конкретных моделей теории поля и теории струн [11; 12]. Исторически первым важным шагом в изучении теории струн стало описание статсуммы теории струн как непрерывного предела матричной модели [13—17]. В результате оказалось, что разложение по диаграммам Фейнмана-т'Хоофта в матричных моделях отлично описывает разложение по римановым поверхностям в теории струн. Кроме того, была разработана комбинаторно-геометрическая интерпретация этого результата, как утверждение об интегралах по пространству модулей кривых [15; 18]. Активное развитие этого подхода привело к появлению множества методов, о которых мы поговорим далее, таких, как использование тождеств Уорда и интегрируемости. Сегодня ведется интенсивная работа по матрично-модельному описанию различных режимов двумерной квантовой гравитации [19; 20]. Аналогично двумерной гравитации, известно описание некоторых топологических теорий поля, двумерных калибровочных теорий в терминах матричных моделей [21]. Часто, такое описание позволяет предъявить теорию в новом, явном виде, который связан с перечислительной геометрией. В таких задачах матричные модели являются производящими функциями, что проявляется в нетривиальности прямого вычисления величин, таких как числа Гурвица [22; 23], числа пересечений на пространстве модулей и инварианты Громова-Виттена.

Другой характерный пример — матричные модели, возникающие в результате суперсимметричной локализации функциональных интегралов [24]. Так, при наличии в теории достаточной симметрии, для чего обычно требуется расширенная суперсимметрия, средние от специальных суперсимметричных наблюдаемых можно вычислить точно. Если в теории присутствуют калибровочные степени свободы, локализация приводит к остаточному интегрированию по матричным степеням свободны. В зависимости от рассматриваемой теории могут получаться различные матричные потенциалы, и разные деформации матричной меры интегрирования, см. например [25; 26], а так же [27; 28]. Набор этих примеров можно суммировать в некоторое единое наблюдение. Часто, если в теории есть достаточно большая симметрия, то динамические степени свободы из неё полностью или практически полностью можно исключить. Таким образом функциональное интегрирование должно превратить в конечномерное. В таких случая теория часто сводится к матричной модели непосредственно. Это позволяет, в частности, пронаблюдать явно вышеописанные общие свойства эффективных действий и функциональных интегралов.

В теории матричных моделей мы имеем дело с интегралами вида:

$$Z = \int DX \; e^{-\operatorname{Tr} V(X)} \tag{1}$$

Здесь интеграл производится по пространству матриц, обычно фиксированного типа: эрмитовых, ортогональных, унитарных, нормальных и т. д. Множество переменных интегрирования определяет меру интегрирования, которая символически обозначается DX. Часто на пространстве матриц можно ввести групповую структуру, и в качестве меры выбирается стандартная мера Хаара. Потенциал $V(X)$ также зависит от изучаемой модели. Кроме того, важной составляющей определения является контур интегрирования. Он должен быть согласован с потенциалом так, чтобы интеграл сходился. Бывают случаи, когда существует несколько подходящих контуров интегрирования. В данной работе мы будем изучать интеграл по эрмитовым матрицам, и поэтому мы будем фокусироваться на этом случае, опуская детали и отличия, которые могут быть важны в других случаях. Кроме того, мы лишь поверхностно затронем вопрос о возможности выбора разных контуров интегрирования.

Тождествами Уорда (Уорда-Такахаши-Славнова-Тейлора) в квантовой теории поля принято называть соотношения на корреляторы или вершины в эффективном действии, следующие из калибровочной и БРСТ симметрии классического действия. С другой стороны, полезно так же изучать произвольные преобразования в пространстве полей. При должных уточнениях функциональный интеграл не зависит от подобных преобразований, из чего следует гораздо больше соотношений на корреляционные функции и эффективные действия. Иначе говоря, из инвариантности интеграла в пространстве полевых переменных следуют свойства ковариантности в пространстве констант связи. Необходимо отметить, что в квантовой теории поля общего вида даже записывание таких соотношений в общем виде и, тем более, их решение является тяжелой и неразрешенной задачей. Однако в матричных моделях метод получения тождеств Уорда упрощается, что позволяет раскрыть более детальные математические структуры, стоящие за ними. В следующем разделе мы рассмотрим метод получения тождеств Уорда для матричных интегралов, которые в данном контексте известны как условия Вирасоро [29; 30], и простейшие примеры их решения.

Изучение алгебры преобразований в пространстве модулей является естественной задачей в квантовой теории поля [1; 31]. Одним из примеров является ренормгруппа, которая, однако, выделяет во всей алгебре диффеоморфизмов лишь однопараметрические семейства [32]. Изучение полной алгебры диффеоморфизмов ожидаемо приводит к структурам вроде интегрируемых [2]. Например, алгебра Хопфа на диаграммах пертурбативного ряда изучается в контексте ренормгруппы [33; 34]. Получающиеся в этом случае соотношения квадратичного типа [35] характерны для интегрируемых систем. Другая идея, которая возникает при таком рассмотрении, состоит в возможности получать разные теории поля друг из друга, действуя операторами эволюции вдоль различных направлений в пространстве модулей. Как и во многих других ситуациях, оказывается, что подобная конструкция может быть явно реализована в контексте матричных моделей, и называет в этом случае W-представлением [36]. Символически оно имеет вид:

$$Z = e^{\hat{W}} \cdot Z_0 \,, \tag{2}$$

где Z_0 - начальная теория, а Z получается из неё действием оператора $\hat{W}$. Это означает, что в качестве Z_0 можно рассмотреть, например, тривиальную теорию, которой будет отвечать $Z_0 = 1$. В работе будет систематически изучено это явление в теории матричных моделей. Мы явно покажем, как оно связано с системой тождеств Уорда и другие, более тонкие его свойства.

Другим аспектом матричных интегралов является интегрируемость. Статсуммы многих матричных моделей являются τ-функциями интегрируемых иерархий [37]. Как уже было сказано, представляется, что похожими свойствами должны обладать эффективные действия в целом. В настоящий момент наиболее изученные классы τ-функций связаны с иерархиями Кадомцева-Петвиашвили (КП) и Тоды, и именно с ними связаны статсуммы матричных моделей. Более конкретно, для матричной модели интегрируемость означает наличие некоторых квадратичных уравнений на статсуммы. В последнее время было также обнаружено более тонкое свойство — суперинтегрируемость. Для некоторых матричных моделей оказывается возможным предъявить явные формулы для корреляционных функций специального базиса в пространства наблюдаемых. Этот специальный базис выделен и другим образом — он дается характерами некоторой группы или их специальными деформациями. Некоторые примеры особенных свойств средних от характеров были известны давно, однако, систематичность обсуждаемого явления была замечена недавно.

Идея изучения деформаций также приходит из общей струнной парадигмы. Актуальным для работы является двухпараметрическое семейство (q,t)-деформации [38; 39], связанное с квантовыми тороидальными алгебрами. В работе достигается прогресс в изучении матричных моделей в некоторых точках этого семейства. Одной из рассматриваемых деформаций является β-деформация, связанная со специальным пределом $t = q^{\beta}, q \to 1$. Полученные в результате такой деформации интегралы уже не выражаются в терминах матричного интегрирования, однако они естественны в терминах собственных значений и появляются в статистической физике под названием бета-ансамблей. При специальных фиксированных значениях β они связаны с интегралами по симметрическим, эрмитовым и симплектическим матрицам. Такая деформация оказывается важной для разных задач, сводящихся к матричным моделям, и представляет собой первый нетривиальный шаг в исследовании матричных моделей, связанных с квантовыми тороидальными алгебрами. Для случая эрмитовых моделей $\beta = 2$ определитель Вандермонда обеспечивает интегрируемые свойства статсуммы. Однако на данный момент неизвестно, как модифицировать формализм теории интегрируемых систем, чтобы включить случай произвольного β.

В данной работе мы рассматриваем и другой феномен, возникающий при пересечении тождеств Уорда и интегрируемости. В теории интегрируемых систем этот феномен известен как тест Пенлеве-Ковалевской [40; 41]. Он применяется для оценки интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений. Для этого мы рассматриваем анзац, в котором искомая функция зависит от одной функциональной комбинации исходных переменных (такие решения иногда называются автомодельными). После этого мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и анализируем подвижные особые точки. Если полученное уравнение второго порядка, то известен список уравнений, для которых подвижными точками являются только полюса — такие уравнения называются уравнениями Пенлеве I - VI. Если уравнение сводится к уравнению Пенлеве, то мы можем предположить, что оно интегрируемо. Наоборот, если уравнение является интегрируемым, то после редукции оно сводится к уравнению Пенлеве или аналогичным уравнениям более высокого порядка.

Естественно рассмотреть этот феномен с точки зрения матричных моделей. Мы знаем, что статсуммы являются τ-функциями интегрируемых иерархий. С другой стороны, в теории матричных моделей есть естественные условия редукции — условия Вирасоро. Таким образом, мы можем ожидать, что при учете некоторых тождеств Уорда в теории матричных моделей будут получаться решения уравнений Пенлеве. Такие утверждения встречаются в разных задачах от двумерной квантовой гравитацией [42] до статистической физики [43].

Мы рассмотрим один из таких примеров, для которых матрично-модельная интерпретация не была известна. Известно, что, с одной стороны, в конформной теории поля можно построить τ-функцию шестого уравнения Пенлеве [44], а с другой стороны, это можно сделать в двойственной ей по соответствию Алдая-Гайотто-Тачикавы (АГТ) суперсимметричной калибровочной теории [45]. Мы посмотрим на это явления с точки зрения матрично-модельного представления соответствующих объектов. Оказывается, что появление в этом контексте уравнения Пенлеве также соответствует общей парадигме, описанной выше.

Современное состояние исследований. Современная теория матричных моделей представлена несколькими направлениями исследований. Так, продолжается работа над приложением теории матричных моделей к описанию различных режимов квантовой гравитации [19]. Важную роль играют методы матричных моделей для точной проверки различных результатов в суперсимметричных калибровочных теориях, таких как голографическое соответствие [26]. В этом контексте матричная модель возникает после локализации функциональных интегралов на неподвижные точки некоторых операторов суперсимметрии. Оставшиеся степени свободы отвечают групповой части калибровочной или глобальной симметрии — таким образом получается матричный интеграл. Полученный интеграл можно исследовать в виде разложения т'Хоофта, например с помощью петлевых уравнений — особой записи условий Вирасоро. Таким образом обычно удается проверить гипотезы о соответствии сильной и слабой связи в разных теориях. С математической точки зрения, разложение при больших размерах матрицы описывается так называемой топологической рекурсией, также активно развиваемой в последнее время [46]. Развитие этих математических методов позволяет в новом качестве возвращаться к вопросу об изучении квантовой гравитации [20].

Перечисленные выше направления посвящены аспектам матричных моделей, отличным от результатов работы, однако служащие источником методов и идей. В работе изучается связь различных явлений в теории матричных моделей. Некоторые из них были сформулированы ещё в период активного развития теории струн [4]. С другой стороны, как уже упоминалось, формулировка суперинтегрируемости является недавним достижением [47]. Немедленно оказалось, что этот феномен связан и с обсуждавшимися выше задачами суперсимметричной локализации [28]. Изучение суперинтегрируемости находится на этапе накопления примеров и первых попыток наблюдения общих закономерностей и стоящих за ней структур. С этим этапом развития и связаны задачи диссертации. Обсуждаемое в работе W-представление в матричных моделях ранее было использовано в рамках топологической рекурсии. Первые попытки его независимой формулировки предприняты в [36]. Роль W-операторов в матричных моделях и теории интегрируемых систем активно обсуждается [10; 48], в частности, в работах [49; 50] изучаются актуальные для работы модели Концевича и Брезана-Гросса-Виттена (БГВ). Ведется активная работа по построению новых решаемых матричных моделей, в частности, мы опираемся на результат [51], в котором была предложена модель, называемая сейчас моделью Натанзона-Орлова.

Матричные модели представляют собой лишь один сюжет, связанный с β-деформацией. Так оказывается, что добавление этого параметра происходит согласовано во всех задачах связанных с матричными моделями [52]. В результате становится понятно, что это действительно интересное направление деформации. В настоящее время известно много "хороших" свойств этой деформации, однако, модификация интегрируемых свойств пока не была получена. Одной из мотиваций для наших исследований было, в частности, разрешение этой давней проблемы.

В данной работе мы изучаем роль уравнений Пенлеве в матричных моделях на конкретном примере. Этот пример интересен сам, по себе поскольку приходит из АГТ соответствия [53]. В работе [44] было показано, что Фурье-преобразование конформного блока в теории с центральным зарядом $c = 1$ является τ-функцией шестого уравнения Пенлеве. Это утверждение было затем развито в различных работах, для q-деформированного случая и в специальных пределах [54; 55]. Позже этот результат был получен с точки зрения дуальной суперсимметричной калибровочной теории [45]. Мы опираемся на работы [31; 56], в которых было предложено исследовать это явление с точки зрения матрично модельной интерпретации АГТ соответствия, построенной в [57].

Цели и задачи:

1. Исследование связи между различными подходами и методами к теории матричных моделей, такими как тождества Уорда, интегрируемость, суперинтегрируемость и W-представления.
2. Разработка новых методов доказательства суперинтегрируемости в матричных моделях, описание алгебраических структур, стоящих за этим феноменом.
3. Уточнение роли характеров в формулах суперинтегрируемости. Исследование матричных моделей связанных с функциями Джека и Q-функциями Шура. Доказательство суперинтегрируемости для β-деформированных матричных моделей.
4. Подробное исследование обобщенной модели Концевича, решение тождеств Уорда в ней.
5. Изучение роли уравнения Пенлеве VI в АГТ соответствии с точки зрения его матрично-модельной формулировки. Развитие метода тождеств Уорда для его применения в контексте матричных моделей в переменных Мивы.

Положения, выносимые на защиту:

1. Явное описание связи условий Вирасоро, интегрируемости и суперинтегрируемости в эрмитовой гауссовой матричной модели.
2. Новой метод решения тождеств Уорда в матричной модели с помощью W-представления. Проверка этого метода для различных известных матричных моделей.

3. Приложение нового метода для построения W-представления для обобщенной модели Концевича. Некоммутативность этого W-представления

4. Новый метод доказательства суперинтегрируемости с помощью W-представления. Доказательство суперинтегрируемости для средних от полиномов Джека в β-деформированный гауссовой модели.

5. Приложение нового метода к матричным моделям, связанным с Q-функциями Шура. Доказательство суперинтегрируемости в модели Брезана-Гросса-Виттена с помощью W-представления. Новая суперсимметричная матричная модель для описания Q-функций Шура.

6. Описание соотношения между уравнениями Хироты, условиями q-Вирасоро и уравнением q-Пенлеве VI в пределе снятия деформации $q \to 1$ и в пределе чистой калибровочной теории.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Результаты, полученные в диссертации, являются оригинальными. Они относятся к наиболее актуальным вопросам теории матричных моделей, в частности, к сформированным недавно явлениям суперинтегрируемости и W-представления. В работе развиты новые методы, обнаружены новые феномены и построены ранее неизвестные доказательства. Они применяются для дальнейших исследований автором диссертации, его соавторами, и другими научными группами. Приведенные в работе результаты получены автором лично, либо при его непосредственном участии. В рамках подготовки публикаций, автор диссертации участвовал в постановке исследовательских задач, выборе методов их решения, интерпретации результатов и формулировке выводов.

Практическая и теоретическая значимость работы. В данной работе мы ставим перед собой цель описать взаимосвязь между различными аспектами матричных моделей, включая условия Вирасоро и W-представления, интегрируемость и суперинтегрируемость. На данный момент полное понимание этой связи отсутствует, но изучение данного вопроса необходимо для построения всеобъемлющей теории матричных моделей. В исследовании мы рассматриваем ситуации, когда можно записать систему тождеств Уорда — условий Вирасоро, и, возможно, старших W-условий. Для таких моделей мы показываем, что бесконечную систему уравнений можно решить, и решением будет в точности W-представление. Это является значительным результатом, демонстрирующим важность связи между тождествами Уорда и W-представлениями. Важным аспектом анализа является использование разложения по характерам, что связано с теорией интегрируемых систем. Переформулировка условий Вирасоро в алгебро-комбинаторной форме представляется эффективным способом проверки единственности решения условий Вирасоро. Более того, такая формулировка подходит для получения ответов для средних от характеров, известных как свойство суперинтегрируемости. Перспективным результатом исследований становится общность построенного метода, дающего возможность решать не только тождества Уорда в форме W-представления, но и явно получать разложение по характерам. Ключевая идея заключается в том, что построенные операторы имеют специальное представление в базисе характеров. Более того, мы отмечаем, что аналогичные структуры существуют даже в моделях, в которых используются деформации характеров. Особенностью этих случаев является то, что групповой смысл деформации характеров зачастую скрыт. Развитые в работе алгебраические методы позволяют увидеть некоторые групповые свойства. Мы провели исследование матричных моделей в специальной точке в семействе (q,t), а именно при $q = 1$, $t = -1$. В результате этого исследования мы показали, что наш метод построения W-операторов работает и в этой точке. Более того, мы показали, что для этого случая существует свой аналог характеров, и W-оператор имеет согласованную структуру с ними. Мы изучили различные проявления свойства суперинтегрируемости для этих новых характеров, включая их реализацию в виде суперматричного интеграла с грассмановыми степенями свободы. Таким образом, построенные нами методы изучения матричных моделей и их интегрируемых свойств согласованы с такой деформацией. Это особенно важно, учитывая, что обобщения других привычных техник либо отсутствуют, либо не систематичны. С другой стороны в нашей работе раскрываются алгебраические свойства β-дефорации. Это является важным шагом на пути в понимании интегрируемых свойств β-деформированных моделей и имеет дальнейшие приложения как в теории интегрируемых систем, так и в более широком классе задач связанных с β-деформациями. Работа над обобщенной моделью Концевича имеет два важных следствия. С одной стороны, мы получили технически наиболее простой метод подсчета больших порядков разложения по константам связи. Это может быть полезно в приложениях к алгебраической геометрии, поскольку обобщенная модель Концевича описывает интегралы по пространствам модулей кривых и числа Гурвица с дополнительными структурами. Подсчет конкретных чисел в данном случае важен, поскольку позволяет тестировать или формулировать гипотезы. С другой стороны, мы обнаружили новый для теории интегрируемым систем феномен - наличие упорядоченной экспоненты в W-представлении. Его следствия ещё предстоит изучить, но несомненно он должен играть важную роль. Таким образом, развитый подход применим к самым разным моделям, в том числе с более экзотической структурой тождеств Уорда. Результаты исследований являются значительным вкладом в развитие теории матричных моделей и сопутствующей алгебраической теории. Отдельно отметим, что результаты о роли уравнения Пенлеве в АГТ соответствии важны с точки зрения доведения описания этой дуальности до технически простого уровня. Важным шагом на этом пути была формулировка соответствия на языке матричных моделей. Здесь нам удалось дополнить её описанием на этом языке возникающих структур. С другой стороны, мы сделали ещё один шаг на пути к пониманию взаимодействия тождеств Уорда и интегрируемости. Если в первой части работы это взаимодействие приводило к суперинтегрируемости, то здесь оно приводит к уравнениям Пенлеве. Связь этих двух свойств матричных моделей ещё предстоит выяснить.

В целом, полученные результаты являются важным шагом на пути построения исчерпывающего описания матричных интегралов, как специальных функций теории струн и квантовой теории поля. Их можно применять, как в задачах непосредственно сводящихся к матричным моделям, так и для более фундаментального понимания свойств функциональных интегралов.

Апробация работы. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 оригинальных статьях, которые изданы в журналах, рекомендованных

ВАК и индексируемых в Web of Science и Scopus. Результаты работы докладывались на семинарах институтов: ОТФ ФИАН, МИАН, ИТФ им. Ландау, ИТЭФ, МФТИ - и на конференциях:

– Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (МКТЭФ-2019), ИТЭФ, 25-28 ноября 2019 г., Москва, Россия.
– Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (МКТЭФ-2021), ИТЭФ, 15–18 ноября 2021 г., Москва, Россия.
– "Supersymmetry in Integrable Systems (SIS'23)", ЛТФ ОИЯИ, 20–22 февраля 2023 г., Дубна, Россия.
– "RDP School and Workshop on Mathematical Physics", 19-24 августа, 2023 г., Ереван, Армения
– "Geometry and integrability", 18-22 сентября 2023 г., Москва, Россия.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена обзору основных понятий в теории матричных моделей, используемых в диссертации. Теория матричных моделей рассматривает интегралы вида:

$$Z = \int DX \exp(-\mathrm{Tr}\, V(X))\,, \tag{3}$$

где интеграл ведется по пространству матриц фиксированного типа: эрмитовым, унитарным, ортогональным или другим, в зависимости от модели. Мера определяется соответственно, как инвариантная на соответствующей группе или алгебре. Матричные модели обладают важными свойствами разной степени общности. В работе главным образом рассматриваются условия Вирасоро и интегрируемость. Условиями Вирасоро в матричных моделях называется аналог тождеств Уорда для функциональных интегралов. Они являются следствием инвариантности функционального интеграла на пространстве полевых переменных:

$$X \to f(X)\,. \tag{4}$$

Конечно, при этом надо учитывать сходимость интеграла и выбор контура интегрирования. Тем не менее такая инвариантность приводит к наличию бесконечной системы соотношений на корреляторы в теории. При этом типично для матричных моделей рассматривать в статсумме достаточно общий набор операторов так, что эти соотношения можно переписать в виде действия дифференциальных операторов по константам связи на статсумму:

$$\hat{L}Z(p_k) = 0\,, \tag{5}$$

где p_k - набор соответствующих параметров, а $\hat{L}$ - некоторые дифференциальные операторы, вид которых зависит от матричной модели. Условия Вирасоро оказываются достаточно ограничительными, чтобы, в некоторых случаях, полностью зафиксировать значение статсуммы или же оставить зависимость лишь от небольшого числа параметров.

С другой стороны, интегрируемость матричных моделей состоит в равенстве статсумм матричных моделей τ-функциям интегрируемых систем. Это означает, что статсуммы матричных моделей удовлетворяют различным билинейным соотношениям, схематически, имеющих вид:

$$\hat{D}(p,p')Z(p) \otimes Z(p)' = 0\,. \tag{6}$$

Интегрируемость в простейших случаях связана с возможностью описания матричных моделей на языке двумерной конформной теории свободных фермионов. Такое представление дает еще одну важную формулировку свойства интегрируемости. Мы показываем, что статсуммы матричных моделей, как и любые τ-функции, имеют детерминантное представление. Оно оказывается полезным для анализа связи между интегрируемостью и условиями Вирасоро, которую мы исследуем в следующих главах. Билинейные уравнения и фермионное представление связаны с теоретико-групповой интепретацией τ-функций, как производящих функций матричных элементов группового элемента в фундаментальном представлении. Практически единственным исследованным случаем остается фундаментальное представление группы $GL(\infty)$, которое связано с иерархией двумеризованной цепочки Тоды и её редукций и ограничений: иерархии КП, самой цепочки тоды, иерархии Кортевега-де-Вриза и других.

В конце этой главы мы рассматриваем свойство суперинтегрируемости, которое было сформулировано недавно. Оно состоит в наличии явного ответа для средних от специальных симметрических многочленов. Эти симметрические многочлены обычно оказываются характерами некоторых групп или их деформациями. При этом оказываются, что такие средние не просто имеют явный вид, а часто выражаются через значения тех же характеров, но вычисленных в специальных точках. Мы приводим в пример гауссову матричную модель и логарифмический потенциал.

Вторая глава посвящена исследованию связи между условиями Вирасоро, интегрируемости и суперинтегрируемости в эрмитовой матричной модели. Сначала мы рассматриваем условия Вирасоро в этой модели в базисе характеров. Мы показываем, что система этих условий переписывается в виде комбинаторных соотношений на коэффициенты разложения по характерам:

$$\begin{aligned} &\sum_{R+\square} c_{R+\square}(N) = \sum_{R-\square} (N + j_\square - i_\square) \cdot c_{R-\square}(N)\,, \\ &\sum_{R+\square} (j_\square - i_\square) \cdot c_{R+\square}(N) = \sum_{R-\square} (N + j_\square - i_\square)^2 \cdot c_{R-\square}(N)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

где$(i_\square,j_\square)$ - это координаты квадрата удалённого или прибавленного к диаграмме Юнга, а $c_R(N)$ - коэффициенты разложения статсуммы матричной модели по характерам. Эта система имеет единственное решение. Чтобы её решить мы используем анзац, в котором она сводится к N-независимым соотношениям, напоминающим комбинаторные соотношения в теории характеров симметрической группы:

$$\begin{aligned} &\sum_{R+\square} \tilde{c}_{R+\square} = 0\,, \\ &\sum_{R+\square} (j_\square - i_\square) \cdot \tilde{c}_{R+\square} = \sum_{R-\square} \tilde{c}_{R-\square}\,, \\ &\sum_{R+\square} (j_\square - i_\square)^2 \cdot \tilde{c}_{R+\square} = \sum_{R-\square} (j_\square - i_\square) \cdot \tilde{c}_{R-\square}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Где $\tilde{c}_R$ и $c_R(N)$ связаны соотношением: $c_R(N) = \tilde{c}_R \prod\limits_{(i,j)\in R}(N+j-i)$. Используя свойства характеров мы показываем, что решение системы (8) дается:

$$\tilde{c}_R = S_R\{\delta_{k,2}\}\,. \tag{9}$$

Таким образом, используя лишь алгебраические и комбинаторные преобразования, мы находим выражения средних от функций Шура:

$$\begin{aligned}\langle S_R(\operatorname{tr} X^k)\rangle &= \frac{S_R(p_k = N)}{S_R(p_k=\delta_{k,1})} S_R\left(p_k = \delta_{k,2}\right) = \\ &= S_R\left(p_k=\delta_{k,2}\right)\left(\prod_{(i,j)\in R}(N+j-i)\right)\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Где $S_R(\operatorname{Tr} X^k)$ - функции Шура, рассматриваемые, как симметрические функции собственных значений матрицы X, а в правой части формулы стоят функции Шура, рассматриваемые как функции степенных сумм, и вычисленные при специальных значениях степенных сумм. С другой стороны, мы можем использовать интегрируемые свойства матричных моделей. Известно утверждение, что одновременные учет уравнений интегрируемой иерархии и лишь одного из условий Вирасоро позволяет восстановить полный ответ. Здесь мы демонстрируем это утверждение явно на уровне средних от характеров. Интегрируемые свойства матричных моделей мы используем в форме детерминантного представления:

$$c_R(N) = \frac{\det\limits_{1\le i,j\le N} C_{N-i+j+R_i-1}}{\det\limits_{1\le i,j\le N} C_{N-i+j-1}}\,. \tag{11}$$

где C_k - некоторые новые переменные, зависящие уже от одного числа k. Используя его в младшем условии Вирасоро мы показываем, как получить решение в виде (10).

Третья глава посвящена исследованию W-представления в матричных моделях. Мы показываем, что условия Вирасоро в некоторых моделях можно свести к одному уравнению, полностью задающему статсумму. За счет специального суммирования условий Вирасоро с учетом градуировки операторов, структура уравнения оказывается достаточно простой:

$$(l_0 + kO^{(k)})Z = 0\,, \tag{12}$$

здесь l_0 - оператор Эйлера в переменных p_k:

$$l_0 = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k \frac{\partial}{\partial p_k} \tag{13}$$

Где оператор $O^{(k)}$ зависит от модели, и имеет определенную градуировку k:

$$[l_0, O^{(k)}] = kO^{(k)}\,. \tag{14}$$

Это позволяет решить уравнение в форме:

$$Z = e^{O^{(k)}} \cdot 1\,. \tag{15}$$

Такое представление статсуммы называется W-представлением, а операторы $O^{(k)}$ называются W-операторами. Таким образом удается представить весь производящий ряд для всех средних в матричной модели в форме простого дифференциального по константам связи оператора, действующего на тривиальную статсумму равную единице. Такое представление реализует давнюю идею о представлении статсумы в форме эволюции в пространстве теорий.

Далее мы показываем, что из W-представления можно восстановить свойство суперинтегриуемости в разложении по характерам. Для этого мы изучаем действие W-операторов в базисе из функций Шура. Это действие имеет специальный вид, который позволяет, раскладывая в ряд экспоненциальное представление (15), восстановить вид средних от характеров. В следующих главах мы показываем, что такое свойство W-операторов устойчиво к различным деформациям.

Последний раздел данной главы посвящен W-представлению для обобщенной модели Концевича (ОМК). Этот случай рассматривается отдельно, поскольку он значительно более сложен технически и раскрывает новый феномен. Во-первых, сложность связана с тем, что для старших степеней потенциала в ОМК среди тождеств Уорда присутствуют старшие W-условия. Мы показываем, что для построения единственного уравнения требуется суммирование как условий Вирасоро, так и старших W-условий. При этом явная реализация W-условий, как дифференциальных операторов является отдельной сложной задачей. Мы приводим примеры вычислений и тождеств, которые необходимо использовать на пути от их реализации в терминах скрученных бозонных полей к явной форме. Получающееся единственное уравнение содержит операторы разной градуировки. К примеру, для четвертичной модели:

$$(l_0 + 4O_4 + 8O_8)Z = 0\,. \tag{16}$$

Однако эти операторы различной градуировки не коммутируют. Это означает, что решением такого уравнения уже не является экспонента оператора, но так называемая упорядоченная экспонента. Мы показываем, как это работает для потенциала четвертой и пятой степени, и приводим схему общего ответа. С общей точки зрения полученные формулы интересны тем, что мы имеем некоторую некомммутативную структуру, по-прежнему связанную с интегрируемостью. Более того, с практической стороны, полученное представление для статсуммы ОМК оказывается наиболее эффективным методом для подсчета большого числа членов в разложении. Это может быть полезно в задачах перечислительной геометрии, связанных с ОМК, в которых большое число членов необходимо для проверки гипотез.

В **четвертой главе** мы проверяем сформулированные утверждения на согласованность с различными деформациями матричных моделей. Мы рассматриваем два вида деформаций. Во-первых, это β-деформация, которая вводится с помощью рассмотрения обобщения эрмитовых случайных матриц. Такое обобщение наиболее характерно тем, что для него не известно обобщение интегрируемых иерархий. Поскольку поиск этого обобщения является давней и интересной задачей, рассмотрение соответствующих матричных моделей мог бы привести к новым идеям в этом направлении. Действительно, мы показываем, что, с точки зрения матричных моделей, рассмотренные нами алгебраические свойства W-операторов имеют деформацию. Вместо функций Шура для них следует рассматривать функции Джека. Мы показываем, что действие оператора на них согласовано с известным свойством суперинтегрируемости:

$$\langle J_R(x_i)\rangle = \frac{J_R\left(p_k = N\right)}{J_R\left(p_k = \delta_{k,1}\right)} J_R\left(p_k = \delta_{k,2}\right) \beta^{|R|}\,. \tag{17}$$

Где J_R - функции Джека, которые в правой и левой части понимаются также, как в формуле (10). Во-вторых, мы исследуем модели, связанные с так называемыми Q-функциями Шура, которые являются другим набором симметрических многочленов. Мы показываем, что для таких моделей также существуеют W-операторы, имеющие специальное представление в базисе Q-функций. Для примера мы рассматриваем модель Брезина-Гросса-Виттена, в которой соответствующий оператор имеет наиболее простую форму. При этом известна интегрируемая иерархия — иерархия (B)КП, связанная теперь с алгеброй $so(\infty)$. Интересно, однако, что Q-функции не отвечают характерам этой алгебры. Вместо этого они являются характерами супералгебры $q(n)$. Чтобы исследовать этот феномен, мы изучаем матричную модель с интегрированием по грассмановым переменным. Несмотря на отсутствие окончательного вывода, мы приводим "суперсимметричный" матричный интеграл, которые дает разложение по Q-функциям Шура.

В **<u>пятой главе</u>** мы изучаем связь между условиями Вирасоро, интегрируемостью и уравнениями Пенлеве для матричных моделей, в логарифмической матричной модели, отвечающей представлению Доценко-Фатеева для конформного блока. Соответствие Алдайи-Гайотто-Тачикавы (АГТ) связывает инстантонные статсуммы суперсимметричных калибровочных теорий и $2d$ конформные блоки. При выполнении условий целочисленности на конформные размерности, оно может быть описано как двойственность Хаббарда-Стратановича в матричной модели Доценко-Фатеева (ДФ). Интересным наблюдением является то, что линейная комбинация конформных блоков удовлетворяет уравнению Пенлеве VI, которое также возникает в теории функций Некрасова и в матричных моделях в результате интегрируемости и тождеств Уорда/Вирасоро. Это может подразумевать более прямую связь между суперинтегрируемостью и уравнений Пенлеве, но требует дальнейшего изучения.

Матричная модель ДФ не является гауссовой, поэтому она имеет многочисленные фазы Дейкграафа-Вафа, различающиеся выбором контуров интегрирования. Проблема в том, что при конкретном выборе фазы (если только все контуры не совпадают) статистическая сумма не обладает детерминантным представлением и не является КП τ-функцией. Вместо этого τ-функции возникают как простая линейная комбинация интегралов ДФ

[58], и частные интегралы ДФ появляются как её обратное преобразование Фурье. Оказывается, наиболее удобный язык для изучения интегрируемости в моделях ДФ — это уравнения Хироты в *переменных Мивы*, являющиеся в этом случае конечно-разностными. Эти уравнения фактически описывают особый вид τ-функций, известных как τ-функция (q-)Пенлеве VI. Их можно переписать в терминах восьми различных τ-функций, которые на самом деле отвечают восьми различным сдвигам исходной КП τ-функции. Мы показываем, что эта система разделена на две части: квадратичные уравнения интегрируемой системы и (имеющее линейное происхождение) тождества Уорда. В моделях ДФ можно ограничить центральный заряд, выбрав $c = 1$. Это исключает β-деформацию и гарантирует отсутствие внутреннего нарушения интегрируемости. Тем не менее тогда существует целое семейство деформаций с параметром $t = q$ (тогда как в общем случае $t = q^\beta$). Если посмотреть на калибровочную сторону АГТ соответствия, $q \neq 1$ относится к $5d$ калибровочным теориям [59], а q кодирует радиус пятого измерения. Предел $q \longrightarrow 1$ соответствует обращению радиуса к нулю, когда калибровочная теория $5d$ сводится к $4d$. Этот предел выглядит «непрерывным» на уровне Вирасоро-подобных тождеств Уорда, когда разностные операторы при $q \neq 1$ становятся дифференциальными при $q = 1$.

В настоящей главе мы преследуем две цели. В первую очередь даем обзор вышеперечисленных тем и собираем различные идеи, рассеянные по [31; 56; 58] в единое замкнутое изложение. Во-вторых, мы объясняем, как различные части конструкции ведут себя в неавтономном пределе от $5d$ до $4d$ калибровочной теории. Мы демонстрируем, что наиболее важные структуры выживают после взятия предела. В частности, мы тщательно следим за неформальным соотношением "интегрируемость + струнное уравнение = Пенлеве" и показываем, что оно согласуется с непрерывным пределом. Таким образом, мы делаем шаг в прояснении связи между τ-функцией q-уравнений Пенлеве VI, отвечающей пятимерной функции Некрасова и τ-функцией непрерывных уравнений Пенлеве VI, соответствующей четырехмерному пределу. Обратим внимание, что непрерывный предел довольно прост с точки зрения матричной модели ДФ, но довольно сложен с точки зрения билинейных уравнений. Мы изучаем предельный переход и описываем, как ведут себя такие структуры, как условия q-Вирасоро, билинейные уравнения и q-уравнения Пенлеве. В качестве дополнительного результата перехода к пределу мы получаем другое представление τ-функции дифференциального уравнения Пенлеве в терминах конформных блоков.

Заключение

В данной работе мы изучили связь нескольких важных свойств матричных моделей: интегрируемости, суперинтегрируемости, тождеств Уорда и W-представления. Мы рассмотрели эрмитовы унитарно-инвариантные модели, в которых мы показали, что рассмотрение матричных моделей в базисе характеров оказывается плодотворным. Во-первых, мы показали, что в таком базисе условия Вирасоро переписываются как алгебро-комбинаторные соотношения, которые можно эффективно решать. Во-вторых, в этом базисе удается учесть свойства интегрируемости явно в самих уравнениях. Таким образом, известное утверждения о роли тождеств Уорда в выборе точки грассманиана, отвечающей матричной модели, удалось продемонстрировать новым, более явным способом. Было показано, что возможно построить явное решение условий Вирасоро, если взять некоторую специальную бесконечную комбинацию этих уравнений. Это решение предъявлено в форме экспоненциального оператора. Показано, что это метод позволяет решать разные модели, что в некоторых случаях приводит к известным ответам полученным другими способами. Особенно важным примером оказалась обобщенная модель Концевича, для которой W-представление не было известно ранее. Были изучены особенности соответствующей системы тождеств Уорда. Характерной чертой полученного ответа оказалась неабелевость соответствующего W-представления.

Описанный метод оказывается полезен не только для, например, более удобного вычисления большего количества членов в разложении статсуммы. Мы показали, что он так же позволяет лучше понять алгебраические структуры стоящие за матричными моделями. В частности, изучая представления W-операторов на характеры, можно получить соответствующие формулы суперинтегрируемости. Эти методы позволяют выходить за рамки эрмитовых унитарно инвариантных интегралов — мы показали, что все алгебраические структуры сохраняются на уровне β-деформации, и для моделей, связанных с Q-функциями. Полученные результаты открывают возможности для дальнейшего исследования в новом направлении. А именно как оказалось, свойства матричных моделей можно эффективно изучать на языке соответствующих W-операторов. Таким образом, представляется осмысленной общая задача классификации таких операторов: постановка предъявляемых к ним свойств, изучение вопроса об однозначности соответствия между операторами и матричными моделями, постановка обратной задачи восстановления матричной модели по оператору и прочие.

С другой стороны, мы продвинулись в понимании связи между уравнениями Пенлеве и матричными моделями. Основным вопросом, который нас интересовал, было исследования этого феномена, когда постановкой задачи продиктована параметризация Мивы. Как оказалось, это не препятствует появления уравнения Пенлеве для матричной модели, но несет в себе новые технические трудности, которые нам удалось частично разрешить. Остается открытым вопрос о том, являются ли эти технические трудности проявлением некоторого концептуального свойств параметризации Мивы. Выбор конкретной модели был продиктован известными работами о соответствии между конформным блоком и τ-функцией Пенлеве, и АГТ дуальным утверждением про инстантонные статсуммы. Интересно, что данное утверждение справедливо при единичном центральном заряде. При этом известно, что матрично-модельное представление конформных блоков имеется и при произвольных центральных зарядах. В связи с этим возникает интересный дальнейший вопрос об β-деформации соответствующего утверждения про уравнение Пенлеве. На возможность такой деформации указывает также и то, что как мы показали, несмотря на то, что деформация интегрируемости до сих пор не построена, многие алгебраические структуры, связанные с взаимодействием условий Вирасоро и уравнений Хироты, по-прежнему существуют. С другой стороны со стороны АГТ соответствия наличие нетривиальных соотношений на инстантонную статсумму также известны при произвольных β [45].

Суммируя сказанное, перечислим конкретные результаты, полученные в этой диссертации:

– Показано, что в эрмитовой гауссовой матричной модели система условий Вирасоро в базисе характеров переписывается в форме алгебро-комбинаторных соотношений. Построено решение этой системы и таким образом показано свойство суперинтегрируемости.
– Связь интегрируемости и условий Вирасоро в эрмитовой гауссовой матричной модели изучена в терминах коэффициентов разложения по характерам. Показано, что совместный учет струнного уравнения и только одного условия Вирасоро приводит к ответу.
– Показано для многих матричных моделей, что система тождеств Уорда эквивалентна единственному уравнению на статсумму. Предъявлен метод построения этого уравнения и его решения в форме W-представления.
– Разработан метод доказательства суперинтегрируемости для моделей, для которых известно W-представление.
– Построено неабелево W-представление обобщенной модели Концевича. Предъявлен метод построения W-операторов из скрученных бозонных полей.
– Построена деформация W-оператора в гауссовой эрмитовой модели и с его помощью доказана суперинтегрируемость для средних от полиномов Джека.
– Рассмотрены матричные модели связанные с Q-функциями Шура. Показано, что метод доказательства суперинтегрируемости работает в модели Брезана-Гросса-Виттена (БГВ).
– Построена фермионная версия суперинтегрируемости в модели Натанзона-Орлова
– Рассмотрены последовательные пределы от разностных уравнений на q-деформированную матричную модель для конформного блока q-Вирасоро к их дифференциальному аналогу, а также предел чистой калибровочной теории. Показано, что в пределах сохраняется соотношение между тождествами Уорда уравнениями Хироты и уравнением Пенлеве VI.

Публикации автора по теме диссертации

1. Virasoro Versus Superintegrability. Gaussian Hermitian Model / V. Mishnyakov [и др.] // JETP Lett. — 2021. — т. 113, № 11. — с. 728—732. — DOI: 10.1134/S0021364021120018. — arXiv: 2104.11550 [hep-th].
2. Matrix model partition function by a single constraint / V. Mishnyakov [и др.] // Eur. Phys. J. C. — 2021. — т. 81, № 12. — с. 1140. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09912-0. — arXiv: 2105.09920 [hep-th].
3. *Mishnyakov V.*, *Mironov A.*, *Morozov A.* Non-Abelian W-representation for GKM // Phys. Lett. B. — 2021. — т. 823. — с. 136721. — DOI: 10.1016/j.physletb.2021.136721. — arXiv: 2107.02210 [hep-th].
4. Natanzon-Orlov model and refined superintegrability / V. Mishnyakov [и др.] // Phys. Lett. B. — 2022. — т. 829. — с. 137041. — DOI: 10.1016/j.physletb.2022.137041. — arXiv: 2112.11371 [hep-th].
5. *Mishnyakov V.*, *Oreshina A.* Superintegrability in β-deformed Gaussian Hermitian matrix model from W-operators // Eur. Phys. J. C. — 2022. — т. 82, № 6. — с. 548. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10466-y. — arXiv: 2203.15675 [hep-th].
6. AGT correspondence, (q-)Painlevè equations and matrix models / V. Mishnyakov [и др.] // Nucl. Phys. B. — 2022. — т. 985. — с. 116022. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2022.116022. — arXiv: 2209.06150 [hep-th].

Список литературы

1. *Морозов А. Ю.* Теория струн — что это такое? // Усп. физ. наук. — 1992. — т. 162, № 8. — с. 83—175. — DOI: 10.3367/UFNr.0162.199208c.0083. — URL: https://ufn.ru/ru/articles/1992/8/c/.
2. *Mironov A.* Integrability in string / field theories and Hamiltonian flows in the space of physical systems // Theor. Math. Phys. — 2003. — т. 135. — с. 814—827. — DOI: 10.1023/A:1024031020707. — arXiv: hep-th/0205202.

3. *Morozov A.* Identities between quantum field theories in different dimensions // RFBR-INTAS Summer School on Advances in Quantum Field Theory, Statistical Mechanics and Dynamical Systems. — 09.1998. — arXiv: hep-th/9810031.

4. *Morozov A.* Integrability and matrix models // Phys. Usp. — 1994. — т. 37. — с. 1—55. — DOI: 10.1070/PU1994v037n01ABEH000001. — arXiv: hep-th/9303139.

5. *Morozov A.* Faces of matrix models // JETP Lett. — 2012. — т. 95. — с. 586—593. — DOI: 10.1134/S0021364012110069. — arXiv: 1204.3953 [hep-th].

6. *Alexandrov A. S.*, *Mironov A.*, *Morozov A.* Partition functions of matrix models as the first special functions of string theory. 1. Finite size Hermitean one matrix model // Int. J. Mod. Phys. A. — 2004. — т. 19. — с. 4127—4165. — DOI: 10.1142/S0217751X04018245. — arXiv: hep-th/0310113.

7. Matrix models among integrable theories: Forced hierarchies and operator formalism / S. Kharchev [и др.] // Nucl. Phys. B. — 1991. — т. 366. — с. 569—601. — DOI: 10.1016/0550-3213(91)90030-2.

8. *Kazakov V. A.* Exactly solvable models of 2-D quantum gravity on the lattice // Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena. — 1988.

9. *Krichever I. M.* The tau function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories // Commun. Pure Appl. Math. / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1994. — т. 47. — с. 437. — arXiv: hep-th/9205110.

10. *Alexandrov A.*, *Zabrodin A.* Free fermions and tau-functions // J. Geom. Phys. — 2013. — т. 67. — с. 37—80. — DOI: 10.1016/j.geomphys.2013.01.007. — arXiv: 1212.6049 [math-ph].

11. Application of random matrices in physics. Proceedings, NATO Advanced Study Institute, Les Houches, France, June 6-25, 2004 / под ред. E. Brezin [и др.]. — 2006.

12. Exact vs. semiclassical target space of the minimal string / J. M. Maldacena [и др.] // JHEP. — 2004. — т. 10. — с. 020. — DOI: 10.1088/1126-6708/2004/10/020. — arXiv: hep-th/0408039.

13. *Kazakov V. A.*, *Staudacher M.*, *Wynter T.* Character expansion methods for matrix models of dually weighted graphs // Commun. Math. Phys. — 1996. — т. 177. — с. 451—468. — DOI: 10.1007/BF02101902. — arXiv: hep-th/9502132.

14. *Mironov A.* 2-d gravity and matrix models. 1. 2-d gravity // Int. J. Mod. Phys. A. — 1994. — т. 9. — с. 4355—4406. — DOI: 10.1142/S0217751X94001746. — arXiv: hep-th/9312212.

15. *Kontsevich M.* Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // Commun. Math. Phys. — 1992. — т. 147. — с. 1—23. — DOI: 10.1007/BF02099526.

16. *Witten E.* On the Kontsevich model and other models of two-dimensional gravity // International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics. — 06.1991. — с. 176—216.

17. *Kazakov V. A.*, *Migdal A. A.*, *Kostov I. K.* Critical Properties of Randomly Triangulated Planar Random Surfaces // Phys. Lett. B. — 1985. — т. 157. — с. 295—300. — DOI: 10.1016/0370-2693(85)90669-0.

18. *Dijkgraaf R.* Intersection theory, integrable hierarchies and topological field theory // NATO Sci. Ser. B / под ред. J. Froehlich [и др.]. — 1992. — т. 295. — с. 95—158. — arXiv: hep-th/9201003.

19. *Kazakov V.*, *Levkovich-Maslyuk F.* Disc partition function of 2d R^2 gravity from DWG matrix model // JHEP. — 2022. — т. 01. — с. 190. — DOI: 10.1007/JHEP01(2022)190. — arXiv: 2110.10104 [hep-th].

20. *Stanford D.*, *Witten E.* JT gravity and the ensembles of random matrix theory // Adv. Theor. Math. Phys. — 2020. — т. 24, № 6. — с. 1475—1680. — DOI: 10.4310/ATMP.2020.v24.n6.a4. — arXiv: 1907.03363 [hep-th].

21. *Kazakov V. A.*, *Migdal A. A.* Induced QCD at large N // Nucl. Phys. B. — 1993. — т. 397. — с. 214—238. — DOI: 10.1016/0550-3213(93)90342-M. — arXiv: hep-th/9206015.

22. *Mironov A., Morozov A., Natanzon S.* Algebra of differential operators associated with Young diagrams // J. Geom. Phys. — 2012. — т. 62. — с. 148—155. — DOI: 10.1016/j.geomphys.2011.09.001. — arXiv: 1012.0433 [math.GT].

23. *Чехов Л. О.* Матричные модели: Геометрия пространств модулей и точные решения // Теоретическая и математическая физика. — 2001. — т. 127, № 2. — с. 179—252.

24. Localization techniques in quantum field theories / V. Pestun [и др.] // J. Phys. A. — 2017. — т. 50, № 44. — с. 440301. — DOI: 10.1088/1751-8121/aa63c1. — arXiv: 1608.02952 [hep-th].

25. *Minahan J. A.* Matrix models for 5d super Yang–Mills // J. Phys. A. — 2017. — т. 50, № 44. — с. 443015. — DOI: 10.1088/1751-8121/aa5cbe. — arXiv: 1608.02967 [hep-th].

26. *Zarembo K.* Localization and AdS/CFT Correspondence // J. Phys. A. — 2017. — т. 50, № 44. — с. 443011. — DOI: 10.1088/1751-8121/aa585b. — arXiv: 1608.02963 [hep-th].

27. *Kapustin A., Willett B., Yaakov I.* Exact Results for Wilson Loops in Superconformal Chern-Simons Theories with Matter // JHEP. — 2010. — т. 03. — с. 089. — DOI: 10.1007/JHEP03(2010)089. — arXiv: 0909.4559 [hep-th].

28. *Cassia L., Lodin R., Zabzine M.* On matrix models and their q-deformations // JHEP. — 2020. — т. 10. — с. 126. — DOI: 10.1007/JHEP10(2020)126. — arXiv: 2007.10354 [hep-th].

29. *Mironov A., Morozov A.* On the origin of Virasoro constraints in matrix models: Lagrangian approach // Phys. Lett. B. — 1990. — т. 252. — с. 47—52. — DOI: 10.1016/0370-2693(90)91078-P.

30. *Semikhatov A. M.* Virasoro algebra action on integrable hierarchies and Virasoro constraints in matrix models: Matrix models from the viewpoint of integrable hierarchies // Nucl. Phys. B. — 1991. — т. 366. — с. 347—400. — DOI: 10.1016/0550-3213(91)90006-J.

31. *Mironov A., Morozov A., Zakirova Z.* Discrete Painlevé equation, Miwa variables and string equation in 5d matrix models // JHEP. — 2019. — т. 10. — с. 227. — DOI: 10.1007/JHEP10(2019)227. — arXiv: 1908.01278 [hep-th].

32. *Polchinski J.* Renormalization and Effective Lagrangians // Nucl. Phys. B. — 1984. — т. 231. — с. 269—295. — DOI: 10.1016/0550-3213(84)90287-6.

33. *Connes A., Kreimer D.* Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. 1. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem // Commun. Math. Phys. — 2000. — т. 210. — с. 249—273. — DOI: 10.1007/s002200050779. — arXiv: hep-th/9912092.

34. *Connes A., Kreimer D.* Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. 2. The beta function, diffeomorphisms and the renormalization group // Commun. Math. Phys. — 2001. — т. 216. — с. 215—241. — DOI: 10.1007/PL00005547. — arXiv: hep-th/0003188.

35. *Gerasimov A., Morozov A., Selivanov K.* Bogolyubov's recursion and integrability of effective actions // Int. J. Mod. Phys. A. — 2001. — т. 16. — с. 1531—1558. — DOI: 10.1142/S0217751X01003378. — arXiv: hep-th/0005053.

36. *Morozov A., Shakirov S.* Generation of Matrix Models by W-operators // JHEP. — 2009. — т. 04. — с. 064. — DOI: 10.1088/1126-6708/2009/04/064. — arXiv: 0902.2627 [hep-th].

37. *Kazakov V. A.* A Matrix model solution of Hirota equation // NATO Advanced Research Workshop on Theoretical Physics: New Developments in Quantum Field Theory. — 10.1997. — с. 97—112. — arXiv: hep-th/9711019.

38. *Morozov A., Popolitov A., Shakirov S.* On (q,t)-deformation of Gaussian matrix model // Phys. Lett. B. — 2018. — т. 784. — с. 342—344. — DOI: 10.1016/j.physletb.2018.08.006. — arXiv: 1803.11401 [hep-th].

39. *Etingof P. I., Kirillov Jr A. A.* On the affine analogue of Jack and Macdonald polynomials. — 1995.

40. *Pogrebkov A.* On the formulation of the Painleve test as a criterion of complete integrability of partial differential equations // Inverse problems. — 1989. — т. 5, № 1. — с. L7.

41. *Ablowitz M.*, *Clarkson P.* Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. — Cambridge University Press, 1991. — (Cambridge books online). — ISBN 9781107366527. — URL: https://books.google.ru/books?id=BKq2oAEACAAJ.

42. *David F.* Loop Equations and Nonperturbative Effects in Two-dimensional Quantum Gravity // Mod. Phys. Lett. A / под ред. E. Brezin, S. R. Wadia. — 1990. — т. 5. — с. 1019—1030. — DOI: 10.1142/S0217732390001141.

43. *Forrester P.* Log-Gases and Random Matrices (LMS-34) // Log-Gases and Random Matrices (LMS-34). — 2010. — июль. — DOI: 10.1515/9781400835416.

44. *Gamayun O.*, *Iorgov N.*, *Lisovyy O.* Conformal field theory of Painlevé VI // JHEP. — 2012. — т. 10. — с. 038. — DOI: 10.1007/JHEP10(2012)038. — arXiv: 1207.0787 [hep-th]. — [Erratum: JHEP 10, 183 (2012)].

45. *Jeong S.*, *Nekrasov N.* Riemann-Hilbert correspondence and blown up surface defects // JHEP. — 2020. — т. 12. — с. 006. — DOI: 10.1007/JHEP12(2020)006. — arXiv: 2007.03660 [hep-th].

46. Weighted Hurwitz numbers and topological recursion: An overview / A. Alexandrov [и др.] // J. Math. Phys. — 2018. — т. 59, № 8. — с. 081102. — DOI: 10.1063/1.5013201. — arXiv: 1610.09408 [math-ph].

47. *Mironov A.*, *Morozov A.* Superintegrability summary. — 2022. — янв. — arXiv: 2201.12917 [hep-th].

48. *Procházka T.* Instanton R-matrix and $\mathcal{W}$-symmetry // JHEP. — 2019. — т. 12. — с. 099. — DOI: 10.1007/JHEP12(2019)099. — arXiv: 1903.10372 [hep-th].

49. *Alexandrov A.* Cut-and-join description of generalized Brezin–Gross–Witten model // Adv. Theor. Math. Phys. — 2018. — т. 22. — с. 1347—1399. — DOI: 10.4310/ATMP.2018.v22.n6.a1. — arXiv: 1608.01627 [math-ph].

50. *Alexandrov A.* Cut-and-Join operator representation for Kontsewich-Witten tau-function // Mod. Phys. Lett. A. — 2011. — т. 26. — с. 2193—2199. — DOI: 10.1142/S0217732311036607. — arXiv: 1009.4887 [hep-th].

51. *Natanzon S. M., Orlov A. Y.* Hurwitz numbers from Feynman diagrams // Teor. Mat. Fiz. — 2020. — т. 204, № 3. — с. 396—429. — DOI: 10.1134/S0040577920090068. — arXiv: 2006.07396 [math-ph]. — [Erratum: Theor.Math.Phys. 205, 1546 (2020)].
52. *Morozov A.* Challenges of beta-deformation // Theor. Math. Phys. — 2012. — т. 173. — с. 1417—1437. — DOI: 10.1007/s11232-012-0123-5. — arXiv: 1201.4595 [hep-th].
53. *Alday L. F., Gaiotto D., Tachikawa Y.* Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories // Lett. Math. Phys. — 2010. — т. 91. — с. 167—197. — DOI: 10.1007/s11005-010-0369-5. — arXiv: 0906.3219 [hep-th].
54. *Bershtein M. A., Shchechkin A. I.* q-deformed Painlevé τ function and q-deformed conformal blocks // J. Phys. A. — 2017. — т. 50, № 8. — с. 085202. — DOI: 10.1088/1751-8121/aa5572. — arXiv: 1608.02566 [math-ph].
55. *Jimbo M., Nagoya H., Sakai H.* CFT approach to the q-Painlevé VI equation // Journal of Integrable Systems. — 2017. — т. 2, № 1.
56. *Mironov A., Morozov A.* q-Painlevé equation from Virasoro constraints // Phys. Lett. B. — 2018. — т. 785. — с. 207—210. — DOI: 10.1016/j.physletb.2018.08.046. — arXiv: 1708.07479 [hep-th].
57. Proving AGT conjecture as HS duality: extension to five dimensions / A. Mironov [и др.] // Nucl. Phys. B. — 2012. — т. 855. — с. 128—151. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2011.09.021. — arXiv: 1105.0948 [hep-th].
58. *Mironov A., Morozov A.* On determinant representation and integrability of Nekrasov functions // Phys. Lett. B. — 2017. — т. 773. — с. 34—46. — DOI: 10.1016/j.physletb.2017.08.004. — arXiv: 1707.02443 [hep-th].
59. *Nekrasov N.* Five dimensional gauge theories and relativistic integrable systems // Nucl. Phys. B. — 1998. — т. 531. — с. 323—344. — DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00436-2. — arXiv: hep-th/9609219.