

На правах рукописи

Бишлер Людмила Владимировна

**Вычисление средних значений петель Вильсона
в теории Черна–Саймонса и изучение их свойств**

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2023

Работа выполнена в Отделении теоретической физики им. И.Е. Тамма Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Научный руководитель: **Миронов Андрей Дмитриевич**,
доктор физико-математических наук,
высококвалифицированный ведущий на-
учный сотрудник Физического института
им. П.Н. Лебедева РАН

Официальные оппоненты: **Пятов Павел Николаевич**,
доктор физико-математических наук, про-
фессор Национального исследовательского
университета «Высшая школа экономики»,
заместитель декана по работе с абитуриента-
ми

Славнов Никита Андреевич,
доктор физико-математических наук, заведу-
ющий Отделом теоретической физики Ма-
тематического института им. В.А. Стеклова
РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное об-
разовательное учреждение высшего обра-
зования «Московский физико-технический
институт (национальный исследовательский
университет)»

Защита состоится 26 февраля 2024 г. в 12 часов на заседании диссертаци-
онного совета 24.1.262.04 на базе Физического института им. П.Н. Лебедева
РАН по адресу: 119991, Москва, Ленинский проспект, д.53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического института
им. П.Н. Лебедева РАН или на сайте www.lebedev.ru.

Автореферат разослан «___» _____ 20__ года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.262.04,
кандидат физ.-мат. наук

Чернышов Дмитрий Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Квантовая теория поля появилась как решение задачи объединения квантовой механики, классической теории поля и специальной теории относительности. Она является языком описания эволюции систем в физике частиц, физике конденсированного состояния, астрофизике, атомной и ядерной физике. Главной величиной, которую вычисляют в рамках квантовой теории поля, является корреляционная функция, описывающая наблюдаемые величины, которые в перспективе можно измерить экспериментально. Отдельным классом квантовых теорий поля являются топологические квантовые теории поля. Они описывают топологические инварианты систем, а их корреляционные функции не зависят от метрики. Топологическая инвариантность в таких теориях достигается разными способами. В топологической теории поля, предложенной Э. Виттенем [7], действие перестает зависеть от метрики после топологического поворота. В теориях типа Шварца действие и корреляционные функции не зависят от метрики по построению.

В 1974 году математики Ш. Черн и Дж. Саймонс изучали расслоения над четырехмерными многообразиями. При попытке описать комбинаторной формулой первый класс Понтрягина (характеристический класс действительных векторных расслоений) они получили граничный член, который стал интересным объектом для изучения сам по себе [8]. Его называют 3-формой Черна-Саймонса:

$$\text{Tr} \left[d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right]. \quad (1)$$

Форма Черна-Саймонса встречается в различных областях физики и математики. Например, она используется для исследования тензора кривизны расслоений и их связностей, описывает топологический порядок в трехмерных топологических изоляторах и входит в действие, которое определяет теорию Черна-Саймонса, находящуюся в центре внимания нашей работы.

Теория Черна-Саймонса — (2+1)-мерная топологическая квантовая теория поля типа Шварца, инвариантная относительно простой группы Ли G , которая определяется на компактном многообразии \mathcal{M} (например, S^3) следующим действием:

$$S_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \left(\mathcal{A}_\mu^a \partial_\nu \mathcal{A}_\lambda^a + \frac{2}{3} f_{abc} \mathcal{A}_\mu^a \mathcal{A}_\nu^b \mathcal{A}_\lambda^c \right) dt dx dy, \quad (2)$$

где $\epsilon_{\mu\nu\lambda}$ — полностью антисимметричный тензор, f_{abc} — структурные константы. Теория задается путем выбора калибровочной группы G и константы связи k , которую называют уровнем теории Черна-Саймонса. В действие теории входит только калибровочное поле \mathcal{A}_μ , которое преобразуется под действием элемента $g \in G$ калибровочной группы стандартным

способом:

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g. \quad (3)$$

При калибровочном преобразовании (3) действие теории меняется на величину:

$$\delta S_{CS} = \frac{k}{24\pi} \int_{\mathcal{M}} d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{Tr} [(g^{-1} \partial_\mu g) (g^{-1} \partial_\nu g) (g^{-1} \partial_\rho g)], \quad (4)$$

которая описывает число “намоток”. Поэтому, чтобы теория была калибровочно-инвариантна, ее уровень должен квантоваться [9], то есть параметр k должен быть целым числом.

Нетривиальными корреляторами в теории Черна-Саймонса являются нелокальные величины — средние значения петель Вильсона, которые вычисляются по контурам \mathcal{K} (узлам и зацеплениям) в трехмерном пространстве:

$$\langle W_{CS}(\mathcal{K}) \rangle = \left\langle \text{tr} \text{Pexp} \oint_{\mathcal{K}} A_\mu dx^\mu \right\rangle. \quad (5)$$

Эти наблюдаемые являются топологическими инвариантами многообразия, на котором задается теория.

Удивительная связь теории Черна-Саймонса и теории узлов была продемонстрирована в знаменитой работе Э. Виттена [10]. Он доказал, что средние значения петель Вильсона в теории с калибровочной группой SU_2 совпадают с полиномами Джонса $J^{\mathcal{K}}(q)$ [11] из математической теории узлов:

$$\langle W_{CS_{SU_2}}(\mathcal{K}) \rangle = J^{\mathcal{K}} \left(q = e^{\frac{2\pi i}{k+2}} \right). \quad (6)$$

Полином Джонса $J^{\mathcal{K}}(q)$ является первым сильным полиномиальным инвариантом от одной переменной, который хорошо справляется с задачей различения узлов и зацеплений. Почти сразу после открытия полинома Джонса было построено его обобщение — полиномиальный инвариант $\mathcal{H}^{\mathcal{K}}(A, q)$ от двух переменных A и q , который называют полиномом Хоста-Окнеану-Миллетта-Фрейда-Ликориша-Йеттера-Пшитицкого-Трачика (ХОМФЛИ-ПТ) [12; 13]. Также было установлено, что вильсоновские средние в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой SU_N совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ [14]:

$$\langle W_{CS_{SU_N}}(\mathcal{K}) \rangle = \mathcal{H}^{\mathcal{K}} \left(A = q^N, q = e^{\frac{2\pi i}{k+N}} \right), \quad (7)$$

$$\mathcal{H}^{\mathcal{K}}(A = q^2, q) = J^{\mathcal{K}}(q). \quad (8)$$

Одновременно с открытием Э. Виттена Н. Решетихин и В. Тураев развили метод вычисления инвариантов узлов с помощью \mathcal{R} -матрицы [15],

которая определяется в рамках квантованной универсальной обертывающей алгебры Ли [16; 17] и является решением уравнения Янга-Бакстера. Метод Решетихина-Тураева позволил определить *цветные* полиномы ХОМФЛИ-ПТ, которые связаны с любыми конечномерными неприводимыми представлениями квантованной алгебры $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$ и вильсоновскими средними, вычисленными для этих же представлений группы SU_N [14]. Полиномы ХОМФЛИ-ПТ, которые мы обсуждали выше, являются цветными полиномами ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении алгебры $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$. В нашей диссертационной работе мы будем опускать слово “цветные” в названии этих инвариантов и употреблять сокращенный термин “*полиномы ХОМФЛИ-ПТ*”.

Открытие Э. Виттена установило тесную связь теории Черна-Саймонса и полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Самым эффективным методом для вычисления средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса является метод Решетихина-Тураева, который подробно обсуждается в нашей работе. Важная особенность этого метода заключается в том, что он является *непертурбативным* и позволяет получать *точные* ответы для корреляторов в теории Черна-Саймонса. Мы отождествляем вильсоновские средние в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой SU_N на многообразии S^3 с полиномами ХОМФЛИ-ПТ и для краткости будем использовать термин ХОМФЛИ-ПТ.

Связь между теорией Черна-Саймонса и теорией узлов привела к значительному прогрессу в обеих областях исследований и открытию многих удивительных соответствий.

Одной из задач теории узлов является различение узлов и зацеплений (комбинаций нескольких узлов), то есть создание способа определить, можно ли один из двух узлов (или зацеплений) гладко деформировать в другой. Для решения этой задачи долгое время использовался графический метод — преобразование проекций узлов и зацеплений, отображенных на плоскость. Это очень трудоемкий метод. Гораздо более эффективным методом различения узлов является построение и вычисление инвариантов узлов — функций, которые определяются на диаграмме узла и совпадают для эквивалентных узлов. Если инварианты двух узлов не совпадают, значит узлы различны. Инварианты, которые различают все узлы, называют полными инвариантами.

Полиномы Джонса и ХОМФЛИ-ПТ представляют собой аналитические инварианты узлов, для вычисления которых существуют эффективные методы. Но они не являются полными инвариантами. Цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ в симметрических и антисимметрических представлениях $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$, как и полином Джонса, совпадают для целых групп узлов, которые называют узлами-мутантами. Большинство узлов-мутантов различаются простейшим несимметрическим представлением [2, 1],

однако существуют узлы-мутанты с дополнительной симметрией, которые предложил Х. Мортон [18], которые начинают различаться только представлением [4, 2]. Поэтому цветные полиномы ХОМФЛИИ-ПТ в представлении [4, 2] могут претендовать на роль полных инвариантов [18]. Связь теории узлов с теорией Черна-Саймонса позволила существенно продвинуться в задаче различения узлов и развить существующие методы вычисления полиномов узлов.

Теория Черна-Саймонса связана и с другими теориями в физике и математической физике. В теории Янга-Милса θ -член, который отвечает за решения в виде солитонов, инстантонов и монополей, сопровождается топологическим зарядом. Квантование этого заряда аналогично квантованию теории Черна-Саймонса, и многие свойства фермионов в четырех измерениях можно исследовать на примере трехмерной теории в качестве подготовительного примера [19].

Э. Виттен показал в [20], что трехмерную гравитацию можно переформулировать в терминах теории Черна-Саймонса с некомпактной калибровочной группой и решить точно. Вместе с голографической дуальностью теория Черна-Саймонса находится на переднем крае изучения современных теорий маломерной гравитации.

Теория Черна-Саймонса также тесно связана с двумерными конформными теориями. Например, состояния в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой SU_2 описывают конформные блоки двумерной конформной теории Весса-Зумино-Новикова-Виттена (ВЗНВ) [21; 22].

Теорию Черна-Саймонса с калибровочной группой SU_N на S^3 интерпретируют как теорию топологической струны на разрешенном конифолде [23]. Заряды состояний Богомольного-Прасада-Зоммерфельда (БПС) топологической струны на разрешенном конифолде соответствуют целочисленному разложению производящей функции теории Черна-Саймонса во всех представлениях [24]. Р. Гопакумар и К. Вафа реализовали [25] топологическую версию АдС/КТП (Анти-де Ситтер/Конформная Теория Поля)-соответствия в пределе больших N : амплитуды открытых топологических струн на разрешенном конифолде, которые связаны со средними значениями петель Вильсона, дуальны амплитудам закрытых топологических струн.

В физике конденсированного состояния исследуют новые фазы материи и эффекты, которые демонстрируют топологические свойства материалов при низких температурах. Например, топологические изоляторы [26], для описания фаз которых используют форму Черна-Саймонса; дробный квантовый эффект Холла [27], где теория Черна-Саймонса используется для описания как эффективная теория.

Степень разработанности темы. Для исследования соответствий, которые мы кратко обсудили выше, нередко требуется знание выражений для полиномов ХОМФЛИИ-ПТ для разных узлов в разных представлениях.

Для получения полиномов используется метод Решетихина-Тураева и его модификации, которые мы обсуждаем в нашей работе.

Классический метод, который был предложен Н. Решетихиным и В. Тураевым дает возможность вычислять полиномы ХОМФЛИ-ПТ только для конкретной алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$ и получать ответы для фиксированного $N = i: \mathcal{H}(A = q^i, q)$. Чтобы получить общий ответ, который зависит от произвольного N , можно использовать экстраполяцию результата для достаточно большого числа частных случаев. Несмотря на его недостатки, этот метод является универсальным и дает ответы там, где недостаточно данных для более оптимизированных методов. В нашей работе мы используем этот метод для вычисления полиномов узлов-мутантов в представлении [3, 1] и [4, 2], а также для определения инвариантов узлов и зацеплений в корнях из единицы.

Отдельным направлением в теории узлов является построение инвариантов узлов в корнях из единицы [28]. Сложность с этим значением параметра квантования алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$ возникает из-за того, что структура представлений алгебры в этом случае меняется [29]: размерность неприводимых представлений оказывается ограниченной сверху, а также появляются новые типы представлений — циклические, полуциклические и нильпотентные, старший вес которых не фиксирован. Чтобы применить метод Решетихина-Тураева к таким представлениям, нужно разрезать узлы и зацепления, вычислять инварианты $(1, 1)$ -сплетений и вводить дополнительный нормировочный коэффициент для восстановления симметрии между нитями. Именно этот случай наиболее интересен с точки зрения теории Черна-Саймонса, так как при переходе от вильсоновских средних к полиномам ХОМФЛИ-ПТ параметр q равен корню из единицы (7).

Методы, которые оптимизируют вычисления в методе Решетихина-Тураева, мы называем модификациями метода Решетихина-Тураева. Такие методы применяются к узлам, проекции на плоскость которых (диаграммы узлов) представляются в строго определенном виде. Например, для узлов, которые можно представить в виде трехнитевых кос, или для класса узлов, которые называют древовидными [30]. Диаграмму любого узла можно представить в виде косы: набора параллельно направленных пересекающихся нитей, которые замыкаются путем попарного соединения нитей сверху и снизу косы. Для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов, диаграммы которых представляются в виде трехнитевых кос, существует метод [31], который опирается на собственные значения \mathcal{R} -матрицы и матрицы Рака \mathcal{U} (также известные, как $6j$ -символы и коэффициенты Рака-Вигнера). Замечательным развитием этого метода стала гипотеза о собственных значениях [32]. Эта гипотеза заключается в предположении о том, что элементы матрицы Рака можно выразить через собственные значения \mathcal{R} -матрицы, которые известны. Однако, она была сформулирована только для \mathcal{R} -матриц, все собственные значения которых различны.

В нашей работе мы делаем шаг к расширению области применения этой гипотезы и исследуем \mathcal{R} -матрицы с совпадающими собственными значениями, которые при этом относятся к разным представлениям. Мы называем такие собственные значения случайно совпадающими.

Нити в косе можно замкнуть и другим способом, который называют плетенкой: нити с каждой стороны косы попарно замыкаются. Этот способ возможен только для кос с четным числом нитей. Направления на нитях косы при этом чередуются, а не являются сонаправленными, как это было в предыдущем способе замыкания. В виде четырехнитевых кос, которые замыкаются плетенкой, можно представить двухмостовые узлы, которые являются строительными блоками для широкого класса древовидных узлов. К древовидным узлам можно применять модификацию метода Решетихина-Тураева [30], которая основывается на использовании \mathcal{R} -матриц и матриц Рака S , которые называют эксклюзивными. Этот метод широко использует методы двумерной конформной теории, которая тесно связана с теорией Черна-Саймонса [33].

Дополнением к перечисленным методам служит метод эволюции [34], идея которого заключается в использовании узлов, диаграммы которых отличаются друг от друга числом пересечений в конкретном месте косы. Выражение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ для всех узлов из семейства можно выразить в виде одной формулы с параметром. Метод эволюции успешно применяется, например, к семействам двухнитевых кос, твистованных узлов и узлов двойных кос. В нашей работе мы использовали метод S -матриц и метод эволюции для исследования свойства полиномов ХОМФЛИ-ПТ, которое называют дифференциальным разложением.

Дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ [35] — это гипотеза о том, что в полиноме ХОМФЛИ-ПТ $H_R^{\mathcal{K}}(A, q)$ можно разделить зависимость от узла \mathcal{K} и от представления R . Это утверждение является теоремой для симметрических и антисимметрических представлений R и следует из свойств полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Однако существование дифференциального разложения в общем случае остается под вопросом. Задача исследования этого разложения усложняется тем, что на него влияет внутренняя характеристика узла, которую называют дефектом [36].

Целями данной диссертационной работы являются:

1. Использование и развитие существующих методов для вычисления средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса.
2. Расширение области применения гипотезы о собственных значениях.
3. Построение дифференциального разложения полиномов ХОМФЛИ-ПТ.
4. Исследование полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов.
5. Определение инвариантов узлов и зацеплений в корнях из единицы для алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие задачи:

1. Исследовать \mathcal{R} -матрицы со случайно совпадающими собственными значениями.
2. Вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлениях $[3, 1]$ и $[4, 2]$ квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$.
3. Найти коэффициенты Z_R^Q дифференциального разложения полиномов ХОМФЛИ-ПТ для узлов с ненулевым дефектом.
4. Определить инварианты узлов и зацеплений для нильпотентных представлений без фиксированного веса алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$, когда параметр квантования равен корню из единицы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Сформулирована гипотеза о блочной диагонализации \mathcal{R} -матриц со случайно совпадающими собственными значениями.
2. Вычислены полиномы ХОМФЛИ-ПТ ряда узлов-мутантов в представлениях $[3, 1]$ и $[4, 2]$.
3. Проверено утверждение Х. Мортонна, что узлы-мутанты с дополнительной симметрией различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении $[4, 2]$.
4. Построено дифференциальное разложение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ трехмостового узла в представлениях $[2, 1]$ и $[2, 2]$.
5. Определены коэффициенты дифференциального разложения для семейства узлов с дефектом один в представлении $[2, 2]$.
6. Найдены ограничения на коэффициенты дифференциального разложения полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов с дефектом два в представлениях $[2, 1]$ и $[3, 1]$.
7. Изучены инварианты узлов и зацеплений для всех возможных неприводимых представлений квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$ при параметре квантования, равном корню из единицы.
8. Построено определение инвариантов узлов и зацеплений для нильпотентных представлений с параметрами квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$ при параметре квантования, равном корню из единицы.
9. Вычислены инварианты ряда узлов и зацеплений для нильпотентных представлений с параметрами квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$ при параметре квантования, равном корню из единицы.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора.

Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в исследовании полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Приведенные в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

Научная и практическая значимость. Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики, а также физики конденсированного состояния. Результаты имеют теоретическую значимость при исследовании теории топологической струны, двумерной конформной теории, трехмерной гравитации, они могут использоваться при расширении гипотезы о собственных значениях, построении дифференциального разложения и исследования теории Черна-Саймонса при малых значениях уровня k . Полученные результаты также могут использоваться при описании топологических эффектов в физике конденсированного состояния. В модели топологического квантового компьютера [37] большую роль играют виртуальные частицы, которые описываются дробной квантовой статистикой и называются анионами. Низкоэнергетический предел моделей неабелевых анионов можно описывать теорией Черна-Саймонса [38; 39], как и фазовые переходы между плато в дробном квантовом эффекте Холла [40].

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в шести статьях [1–6] в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Помимо этого, основные результаты диссертации докладывались на семинарах ОТФ ФИАН, а также на международной конференции “Topological Field Theories, String theory and Matrix Models — 2019” (Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук, 26–31 августа 2019, Москва, Россия) и на пяти Молодежных конференциях по теоретической и экспериментальной физике (Институт теоретической и экспериментальной физики имени А.И. Алиханова (ИТЭФ) 2017 – 2021, Москва, Россия).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 188 страниц, включая 29 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 178 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках нашей диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируются цели, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена исследованию блочной структуры \mathcal{R} -матриц в случае случайно совпадающих собственных значений и основана на результатах работы [1].

В разделе 1.1 содержится краткое введение в теорию узлов, вводятся понятия узлов и зацеплений — вложений одной или нескольких окружностей в пространство S^3 , а также обсуждается метод различения узлов и

зацеплений с помощью аналитических инвариантов. Одним из таких инвариантов является полином ХОМФЛИ-ПТ, который является полиномом Лорана от двух переменных A и q и определяется с помощью скейн-соотношений.

В разделе 1.2 дается подробное описание метода Решетихина-Тураева, который используется для определения и вычисления цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ, которые связаны с конечномерными неприводимыми представлениями квантованной универсальной обертывающей алгебры Ли sl_N ($\mathcal{U}_q(sl_N)$). Цветные полиномы обобщают полиномы ХОМФЛИ-ПТ, которые связаны с фундаментальным представлением $\mathcal{U}_q(sl_N)$. В нашей работе мы будем использовать сокращенный термин “*полиномы ХОМФЛИ-ПТ*” для обозначения цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ.

Метод Решетихина-Тураева заключается в следующем. На проекции узла выбирается направление, а нити ассоциируются с пространством V . Затем на проекции выделяются пересечения и места смены направления нити, которые вносят вклад в среднее значение петли Вильсона. Им в соответствие ставятся операторы \mathcal{R} и \mathcal{M} , как показано на рис. 1.



Рис. 1 — Основные элементы диаграммы узла

Эти операторы удовлетворяют движениям Рейдемейстера (см. рис. 2).

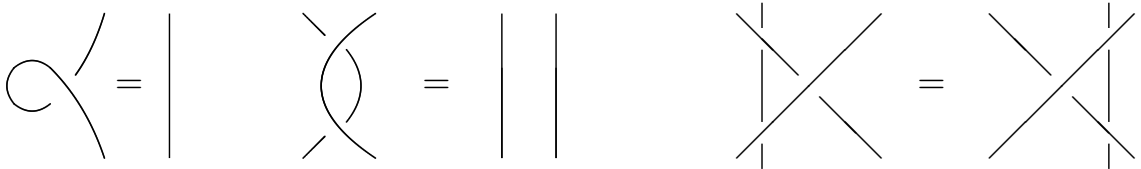


Рис. 2 — Движения Рейдемейстера

Оператор \mathcal{R} называют \mathcal{R} -матрицей, так как он является решением уравнения Янга-Бакстера (которое соответствует третьему движению Рейдемейстера):

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{23}, \quad (9)$$

где $\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R} \otimes I_V$, $\mathcal{R}_{23} = I_V \otimes \mathcal{R}$, I_V — единичный оператор размерности $\dim V$. Оператор \mathcal{M} определяется с помощью уравнения, которое следует из первого движения Рейдемейстера:

$$\text{Tr}_2 (\mathcal{R}^{\pm 1} (I_V \otimes \mathcal{W})) = I_V, \quad (10)$$

где Tr_2 обозначает след по второму пространству из тензорного произведения $V \otimes V$.

Свертка всех операторов, которые соответствуют элементам на диаграмме конкретного узла, дает инвариант этого узла.

Для определения цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ используется универсальная \mathcal{R} -матрица, которая определяется с помощью квантованной универсальной обертывающей алгебры Ли sl_N ($\mathcal{U}_q(sl_N)$). Мы обсуждаем ее в разделе 1.3. $\mathcal{U}_q(sl_N)$ генерируется операторами E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} ($i = 1, \dots, N - 1$), которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$K_i E_j = q^{a_{ij}} E_j K_i, \quad K_i F_j = q^{-a_{ij}} F_j K_i, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad (11)$$

$$[K_i, K_j] = 0, \quad [E_i, E_j] = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > 1, \quad [F_i, F_j] = 0 \quad \text{при} \quad |i - j| > 1$$

и соотношениям Серра. Конечномерные неприводимые представления $\mathcal{U}_q(sl_N)$, как и представления sl_N в классическом случае нумеруются диаграммами Юнга — неубывающими последовательностями натуральных чисел.

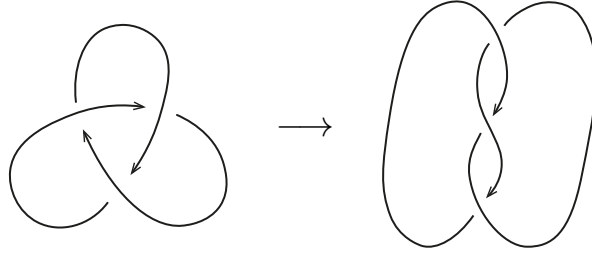


Рис. 3 — Диаграмма трилистника и диаграмма трилистника в виде косы

В разделе 1.4 приводится модификация метода Решетихина-Тураева для узлов, представленных в виде кос (см. рис. 3), которая заключается в переходе к базису собственных векторов \mathcal{R} -матрицы. Ключевую роль в этом методе играют собственные значения \mathcal{R} -матрицы, которые известны для всех неприводимых конечномерных представлений $\mathcal{U}_q(sl_N)$ и квантовые матрицы Рака. Матрицы Рака и собственные значения \mathcal{R} -матриц связаны уравнением Янга-Бакстера, которое в некоторых случаях можно решить и получить гипотезу о собственных значениях (раздел 1.5.1). Гипотеза о собственных значениях сформулирована для \mathcal{R} -матриц, все собственные значения которых различны, и заключается в том, что собственные значения \mathcal{R} -матриц определяют элементы соответствующих матриц Рака.

Раздел 1.5 посвящен постановке задачи, методу исследования и полученным результатам, которые относятся к первой главе нашей диссертационной работы. Мы рассматриваем \mathcal{R} -матрицы со случайно совпадающими собственными значениями. Когда мы применяем метод Решетихина-Тураева к трехнитевым косам, вычисление сводится к определению двух \mathcal{R} -матриц. В этом случае удобно работать в базисе, в котором одна из \mathcal{R} -матриц диагональна $\mathcal{R}_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. В этом случае вторая

\mathcal{R} -матрица \mathcal{R}_2 связана с первой поворотом базиса с помощью квантовой матрицы Рака $\mathcal{R}_2 = \mathcal{U}^\dagger \mathcal{R} \mathcal{U}$. Матрица Рака показывает отклонение тензорного произведения от ассоциативности, которое проявляется на уровне базисных векторов неприводимых представлений:

$$\mathcal{U} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{bmatrix} : (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 \longrightarrow T_4 \implies T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) \longrightarrow T_4. \quad (12)$$

Когда некоторые собственные значения \mathcal{R} -матрицы совпадают, появляется дополнительная симметрия вращения базиса \mathcal{R} -матриц в секторах совпадающих собственных значений. В нашей работе мы использовали эту симметрию для упрощения матриц \mathcal{R}_2 и матриц Рака. Такие повороты были проделаны для матриц Рака, соответствующих неприводимым представлениям из разложения тензорных произведений представлений $[2, 1]^{\otimes 3}$, $[3, 1]^{\otimes 3}$, $[3, 2]^{\otimes 3}$, $[4, 1]^{\otimes 3}$ и $[4, 2]^{\otimes 3}$ на неприводимые. Некоторые из матриц получилось блочно-диагонализовать. В результате были сформулированы две гипотезы, которые накладывают условия на наборы собственных значений \mathcal{R} -матриц, необходимые для того, чтобы их можно было дополнительно блочно-диагонализовать, и определяют угол поворота в секторе случайно-совпадающих собственных значений, который всегда оказывается равным $\pm \frac{\pi}{4}$.

Вторая глава основана на работах [2–4]. В ней мы обсуждаем дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ и инварианты узлов-мутантов.

Раздел 2.1 посвящен другой модификации метода Решетихина-Тураева, которая применяется к классу древовидных узлов. В этой модификации используются собственные значения \mathcal{R} -матриц и матрицы Рака S , которые называют эксклюзивными. Они связывают следующие базисы:

$$S : ((T \otimes T) \otimes \bar{T} \rightarrow T) \longrightarrow (T \otimes (T \otimes \bar{T}) \rightarrow T). \quad (13)$$

Используем этот метод вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ в разделе 2.8 при исследовании дифференциального разложения узлов с дефектом один. Различные классы узлов описываем в разделе 2.1.1.

В разделе 2.2 начинаем обсуждать дифференциальное разложение. Дифференциальное разложение — это гипотеза о том, что зависимость от узла \mathcal{K} и от представления R в полиноме ХОМФЛИ-ПТ $H_R^\mathcal{K}(q, A)$ можно разделить:

$$H_R^\mathcal{K}(q, A) = 1 + \sum_{Q \in M_R} Z_R^Q(q, A) \cdot F_Q^\mathcal{K}(q, A). \quad (14)$$

Задачи построения дифференциального разложения для любых узлов и представлений:

- поиск области суммирования M_R — определение всех представлений Q , которые вносят вклад в полином ХОМФЛИ-ПТ в представлении R ;
- определение коэффициентов $Z_R^Q(q, A)$, которые зависят только от представлений;
- определение коэффициентов $F_Q^K(q, A)$, которые зависят от узла.

При этом коэффициенты $Z_R^Q(q, A)$ зависят от внутренней характеристики узла, которую называют дефектом. Дефект узла δ^K определяется как степень его полинома Александера по переменной q^2 : $\deg_{q^2} \left(\mathcal{A}_{[1]}^K \right) = 1 + \delta^K$.

В разделе 2.3 обсуждаем дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ в симметрических и антисимметрических представлениях. Для симметрических и антисимметрических представлений дифференциальное разложение следует из связи полиномов ХОМФЛИ-ПТ в представлениях, соответствующих транспонированным диаграммам Юнга:

$$H_R^K(q, A = q^N) = H_{R^\vee}^K(-q^{-1}, A = q^N). \quad (15)$$

В разделе 2.4 обсуждаем влияние дефекта узла на коэффициенты дифференциального разложения.

В разделе 2.5 приводим дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ в прямоугольных представлениях для узлов с дефектом ноль.

В разделе 2.6 получаем зависящие от узла коэффициенты дифференциального разложения для трехмостового узла 9_{46} из таблицы Рольфсена. Этот результат подтверждает универсальность дифференциального разложения и его применимость к узлам за пределами уже изученных семейств твистованных узлов и узлов двойных кос.

В разделе 2.7 обсуждаем дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ в представлении вида $[r, 1]$.

В разделе 2.8 переходим к исследованию дифференциального разложения для узлов с дефектом один. Для этого используем метод эволюции и метод U -матрицы. Эти методы вместе со второй модификацией метода Решетихина-Тураева позволяют определить коэффициенты дифференциального разложения $Z_{[2,2]}^Q$ в представлении $[2, 2]$. Для этого используется формула для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ семейства древовидных узлов, которое мы называем family_a . В формулу вводится вспомогательная матрица U , которая позволяет выделить коэффициенты дифференциального разложения твистованных узлов:

$$\begin{aligned} H_R^{\text{family}_a(k)} &= d_R \langle \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^{2k+2} \bar{S} \rangle_{\emptyset\emptyset} = \\ &= \sum_X d_R \underbrace{\langle \emptyset | \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^2 \bar{S}\bar{T}^{-2} \bar{S}U | X \rangle}_{Z_R^X \text{ family}_a} \underbrace{\langle X | U^{-1} \bar{S}\bar{T}^{2k+2} \bar{S} | \emptyset \rangle}_{F_X^{\text{twist}(k)}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Коэффициенты $F_X^{\text{twist}(k)}$ совпадают с коэффициентами для семейства твистованных узлов, а факторы $Z_R^{X \text{ family}_a}$ являются новыми и связаны со стандартными Z -факторами универсальным преобразованием V^{family_a} :

$$Z_R^{X \text{ family}_a} = \sum_{Y \subset R} V_Y^{X \text{ family}_a} \cdot Z_R^Y. \quad (17)$$

Получение этой матрицы является одним из важных результатов в построении дифференциального разложения.

В разделе 2.9 обсуждаем узлы-мутанты — группу узлов с дефектом два, которые не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в симметрических и прямоугольных представлениях. Узлы-мутанты представляют собой узлы, диаграммы которых связаны друг с другом набором преобразований — мутаций. Простейшие узлы-мутанты содержат 11 пересечений на диаграмме узла и различаются представлением [2, 1].

В разделе 2.10 приводим ответы для разностей между полиномами ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов с 11 пересечениями в представлении [2, 1].

В разделе 2.11 рассматриваем результаты применения классического метода Решетихина-Тураева к вычислению разностей полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении [3, 1]. Классический метод Решетихина-Тураева позволяет проводить вычисления только для фиксированного значения $A = q^N$ и N . Для узлов, которые представляются в виде кренделей, мы восстановили зависимость от A экстраполяцией ответов для разных значений N , а также учли полиномы ХОМФЛИ-ПТ в транспонированном представлении [2, 1, 1] и использовали для проверки ответов разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ по родам.

В разделе 2.12 обсуждаем узлы-мутанты с дополнительной симметрией, которые предложил Х. Мортон. Они не различаются полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлениях [2, 1] и [3, 1]. Простейшее представление, которое их различает — представление [4, 2]. Мы вычислили полиномы ХОМФЛИ-ПТ двух пар узлов-мутантов с дополнительной симметрией и показали, что они действительно различаются представлением [4, 2] квантовых алгебр $\mathcal{U}_q(sl_3)$ и $\mathcal{U}_q(sl_4)$. Провели аналогичные вычисления для узлов-мутантов с 11 пересечениями и получили разности между полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении [4, 2].

В разделе 2.13 используем получившиеся результаты, чтобы наложить ограничение на дифференциальное разложение узлов с дефектом два в представлениях [2, 1] и [3, 1].

В третьей главе рассматриваем квантованную универсальную обертывающую алгебры sl_N , когда параметр квантования равен примитивному корню из единицы степени $2m$. Этот случай особенно интересен с точки зрения теории Черна-Саймонса, потому что при переходе от полиномов ХОМФЛИ-ПТ к вильсоновским средним мы используем подстановку

$q = e^{\frac{2\pi i}{k+N}}$, что означает, что q является корнем из единицы. Результаты главы опубликованы в работах [5; 6].

В разделе 3.1 обсуждаем структуру неприводимых представлений $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$, когда q равен корню из единицы степени $2m$. Все неприводимые представления в этом случае являются конечномерными. Представления размерности меньше $m^{N(N-1)/2}$ повторяют представления $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$ в обычном случае и являются представлениями со старшим и младшим весом. Появляются три новых представления размерности $m^{N(N-1)/2}$: циклическое, полуциклическое и нильпотентное, вес которых не фиксирован и является параметром представления. В разделе 3.1.3 показываем, что \mathcal{R} -матрицы циклических и полуциклических представлений нельзя использовать для вычисления инвариантов узлов и зацеплений. Однако, нильпотентные представления с параметром позволяют определить инварианты узлов и зацеплений в корнях из единицы. Для этого можно использовать классический метод Решетихина-Тураева, который необходимо модифицировать.

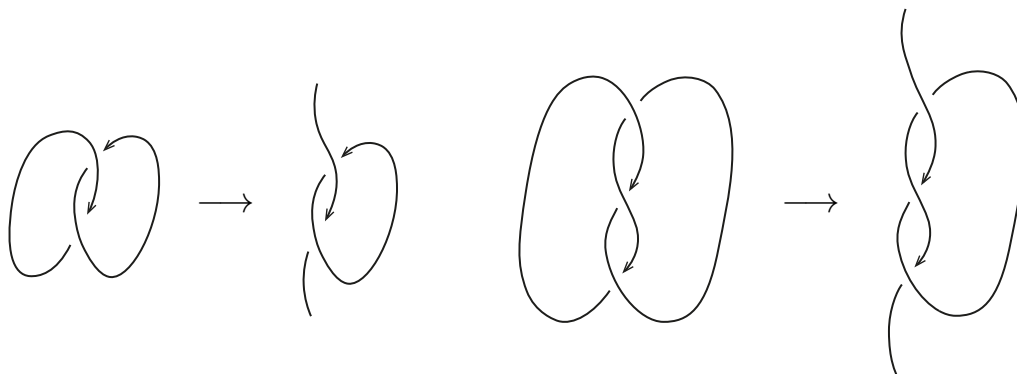


Рис. 4 — Зацепление Хопфа, трилистник и соответствующие им $(1,1)$ -сплетения

В разделе 3.2 обсуждаем модификацию метода Решетихина-Тураева для определения инвариантов в корнях из единицы. Проблема заключается в том, что инварианты, которые получаются классическим методом, пропорциональны квантовой размерности представления, для которого производится вычисление. А квантовые размерности обращаются в ноль при подстановке q , равного корню из единицы. Чтобы получить ненормированные инварианты, можно использовать следующий прием: разрезать одну нить узла и зацепления и вычислять инварианты $(1,1)$ -сплетений (см. рис. 4). Это аналогично переопределению операции взятия квантового следа, которую можно ввести для вычисления инвариантов узлов в виде кос. В этом случае в определении квантового следа опускается одна весовая матрица, что и соответствует тому, что одну из нитей косы мы не замыкаем.

В разделе 3.3 мы определяем инварианты узлов и зацеплений, связанные с нильпотентными представлениями с параметрами квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$. Эти инварианты обобщают инварианты АДО [28],

которые связаны с нильпотентными представлениями с параметрами квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl_2)$. Важной частью этого определения является нормировочный коэффициент. Он зависит от цвета нити, которую мы разрезали, и таким образом восстанавливает симметрию между нитями и квантовую размерность представления, которое бежит по разрезанной нити. Мы определили этот нормировочный коэффициент для произвольных значений N и m :

$$\boxed{\Xi_{m,N}(\lambda_i^{(1)}) = \prod_{\alpha \in \Phi_N^+} \xi_m(\lambda_\alpha^{(1)} q^{|\alpha|}),} \quad (18)$$

где $\lambda_\alpha^{(1)}$ — параметры представления, бегущего по разрезанной нити, α — положительные корни Φ_N^+ алгебры sl_N , $\alpha = \sum_{k=i}^j \alpha_k$ ($i \leq j < N$), где α_k — простые корни алгебры sl_N , $|\alpha| = j - i$,

$$\xi_m(\lambda) = \prod_{i=0}^{m-2} \{\lambda q^{-i}\}. \quad (19)$$

В разделе 3.4 приводим детали вычисления инвариантов узлов и зацеплений в корнях из единицы для квантовых алгебр $\mathcal{U}_q(sl_2)$, $\mathcal{U}_q(sl_3)$ и $\mathcal{U}_q(sl_4)$. Мы вычислили инварианты в корнях из единицы для простейших узлов и зацеплений и сравнили их с полиномами ХОМФЛИИ-ПТ и Александера. Полиномы ХОМФЛИИ-ПТ в представлении, соответствующем диаграмме Юнга $[(N-1)(m-1), (N-2)(m-1), \dots, (m-1)]$, совпадают с инвариантами, связанными с нильпотентным представлением с параметрами алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$ при $q^{2m} = 1$, когда мы подставляем в последние правильное значение весов представлений. Инварианты, связанные с представлением $\mathcal{U}_q(sl_2)$ при $q^4 = 1$, совпадают с полиномами Александера. Была также найдена связь полиномов Александера и инвариантов для алгебр $\mathcal{U}_q(sl_3)$ и $\mathcal{U}_q(sl_4)$, однако она устроена сложнее. Для зацепления Хопфа было найдено значение инварианта для произвольных значений N и m .

В приложении А приведены полиномы ХОМФЛИИ-ПТ и разности между ними для узлов-мутантов, которые обсуждаются во второй главе. В приложении Б приведены инварианты в корнях из единицы, которые обсуждаются в третьей главе.

В заключении приведены основные результаты работы.

Заключение

В ходе выполнения диссертационной работы исследовались различные свойства средних значений петель Вильсона в теории Черна-Саймонса с калибровочной группой SU_N . Для этого использовался метод Решетина-Тураева и его модификации. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Исследован ряд \mathcal{R} -матриц со случайно совпадающими собственными значениями. На основе этого сформулированы две гипотезы, которые накладывают необходимые условия на блочную диагонализацию соответствующих матриц Рака и матриц \mathcal{R}_2 . Первая гипотеза ограничивает снизу число совпадающих собственных значений, которое необходимо для блочной диагонализации. Вторая гипотеза определяет угол поворота в секторе случайно совпадающих собственных значений.
2. Исследованы две группы узлов-мутантов: узлы-мутанты с 11 пересечениями на диаграмме и узлы-мутанты с дополнительной симметрией Мортонa. Для первой группы мутантов построен общий вид разностей между полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении $[3, 1]$ квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$, а также вычислены значения разностей в представлении $[4, 2]$ квантовых алгебр $\mathcal{U}_q(sl_3)$ и $\mathcal{U}_q(sl_4)$. Для узлов-мутантов Мортонa вычислены полиномы ХОМФЛИ-ПТ в представлении $[4, 2]$ квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl_3)$ и разности между полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлении $[4, 2]$ квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl_4)$. Таким образом, мы дополнительно проверили, что эти мутанты различаются представлением $[4, 2]$.
3. Проверено дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ для трехмостового узла, который не входит в семейства ранее изученных узлов. Это подтверждает универсальность дифференциального разложения.
4. К выделенному семейству узлов применен метод U -матрицы. Он позволил связать коэффициенты дифференциального разложения Z_R^Q для узлов с дефектом один с коэффициентами дифференциального разложения твистованных узлов, которые уже известны в частных случаях. В результате получилось универсальное преобразование, которое связывает коэффициенты F_Q^K с соответствующими коэффициентами твистованных узлов.
5. Исследовано дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов с дефектом два на примере узлов-мутантов. Сформулированы ограничения на дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ узлов с дефектом два в представлениях $[2, 1]$ и $[3, 1]$.
6. Исследованы инварианты узлов и зацеплений для всех неприводимых представлений квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$ при параметре квантования q , равном корню из единицы.
7. Для нильпотентных представлений с параметрами в корнях из единицы построено определение инвариантов узлов и зацеплений. Важная часть этого определения — нормировочный коэффициент, который приведен в общем случае для квантовой алгебры $\mathcal{U}_q(sl_N)$.

8. Вычислены инварианты в корнях из единицы ряда узлов и зацеплений. Получен инвариант зацепления Хопфа для произвольного значения корня и произвольной алгебры $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$.
9. Исследованы и получены связи инвариантов в корнях из единицы с полиномами ХОМФЛИ-ПТ и Александра.

Публикации автора по теме диссертации

1. On the block structure of the quantum \mathcal{R} -matrix in the three-strand braids / L. Bishler [et al.] // International Journal of Modern Physics A. — 2018. — Vol. 33, no. 17. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X18501051>.
2. *Bishler, L.* Perspectives of differential expansion / L. Bishler, A. Morozov // Physics Letters B. — 2020. — Vol. 808. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135639>.
3. Distinguishing Mutant knots / L. Bishler [et al.] // Journal of Geometry and Physics. — 2021. — Vol. 159. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2020.103928>.
4. Difference of Mutant Knot Invariants and Their Differential Expansion / L. Bishler [et al.] // JETP Letters. — 2020. — Vol. 111, no. 9. — P. 494—499. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364020090015>.
5. *Bishler, L.* Invariants of knots and links at roots of unity / L. Bishler, A. Mironov, A. Morozov // Journal of Geometry and Physics. — 2023. — Vol. 185. — P. 104729. — URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2022.104729>.
6. *Bishler, L.* Overview of Knot Invariants at Roots of Unity / L. Bishler // JETP Letters. — 2022. — July. — Vol. 116, no. 3. — P. 185—191. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364022601294>.

Список литературы

7. *Witten, E.* Topological quantum field theory / E. Witten // Communications in Mathematical Physics. — 1988. — Vol. 117, no. 3. — P. 353—386. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01223371>.
8. *Chern, S.-S.* Characteristic Forms and Geometric Invariants / S.-S. Chern, J. Simons // The Annals of Mathematics. — 1974. — Vol. 99, no. 1. — P. 48. — URL: <http://dx.doi.org/10.2307/1971013>.
9. *Mariño, M.* Chern-Simons Theory, Matrix Integrals, and Perturbative Three-Manifold Invariants / M. Mariño // Communications in Mathematical Physics. — 2004. — Vol. 253, no. 1. — P. 25—49.

10. *Witten, E.* Quantum field theory and the Jones polynomial / E. Witten // *Comm. Math. Phys.* — 1989. — Vol. 121, no. 3. — P. 351—399.
11. *Jones, V. F. R.* A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras / V. F. R. Jones // *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society.* — 1985. — Vol. 12, no. 1. — P. 103—111.
12. A new polynomial invariant of knots and links / P. Freyd [et al.] // *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society.* — 1985. — Vol. 12, no. 2. — P. 239—246.
13. *Przytycki, J. H.* Invariants of links of Conway type / J. H. Przytycki, P. Traczyk // *J. Knot Theor.* — 1987. — Vol.4. — P. 115—139.
14. *Kaul, R.* Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links / R. Kaul, T. Govindarajan // *Nuclear Physics B.* — 1992. — Vol. 380, no. 1/2. — P. 293—333. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(92\)90524-F](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(92)90524-F).
15. *Reshetikhin, N.* Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups / N. Reshetikhin, V. G. Turaev // *Inventiones Mathematicae.* — 1991. — Vol. 103, no. 1. — P. 547—597. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01239527>.
16. *Drinfeld, V. G.* Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation / V. G. Drinfeld // *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* — 1985. — Vol. 283, no. 5. — P. 1060—1064.
17. *Jimbo, M.* A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation / M. Jimbo // *Letters in Mathematical Physics.* — 1985. — Vol. 10, no. 1. — P. 63—69. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00704588>.
18. *Morton, H. R.* Mutant knots with symmetry / H. R. Morton // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* — 2009. — Vol. 146, no. 1. — P. 95—107. — URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004108001862>.
19. *Dunne, G. V.* Aspects Of Chern-Simons Theory / G. V. Dunne // *Aspects topologiques de la physique en basse dimension. Topological aspects of low dimensional systems.* —. — P. 177—263. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-46637-1_3.
20. *Witten, E.* On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity / E. Witten // *Nuclear Physics B.* — 1990. — Vol. 340, no. 2/3. — P. 281—332. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(90\)90449-N](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(90)90449-N).
21. *Wess, J.* Consequences of anomalous ward identities / J. Wess, B. Zumino // *Physics Letters B.* — 1971. — Vol. 37, no. 1. — P. 95—97. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(71\)90582-X](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(71)90582-X).

22. *Novikov, S. P.* Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory / S. P. Novikov // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1981. — Vol. 260, no. 1. — P. 31—35.
23. *Witten, E.* Chern-Simons gauge theory as a string theory / E. Witten // The Floer Memorial Volume. — 1995. — P. 637—678. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-9217-9_28.
24. *Ooguri, H.* Knot invariants and topological strings / H. Ooguri, C. Vafa // Nuclear Physics B. — 2000. — Vol. 577, no. 3. — P. 419—438. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(00\)00118-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(00)00118-8).
25. *Gopakumar, R.* On the gauge theory/geometry correspondence / R. Gopakumar, C. Vafa // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. — 1999. — Vol. 3, no. 5. — P. 1415—1443. — URL: <http://dx.doi.org/10.4310/ATMP.1999.v3.n5.a5>.
26. *Hasan, M. Z.* Three-Dimensional Topological Insulators / M. Z. Hasan, J. E. Moore // Annual Review of Condensed Matter Physics. — 2011. — Vol. 2, no. 1. — P. 55—78. — URL: <http://dx.doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-062910-140432>.
27. *Lopez, A.* Fractional quantum Hall effect and Chern-Simons gauge theories / A. Lopez, E. Fradkin // Physical Review B. — 1991. — Vol. 44, no. 10. — P. 5246—5262. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.44.5246>.
28. *Akutsu, Y.* Invariants of colored links / Y. Akutsu, T. Deguchi, T. Ohtsuki // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. — 1992. — Vol. 01, no. 02. — P. 161—184. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216592000094>.
29. *Abdesselam, B.* Representations of $U_q(\mathfrak{sl}(N))$ at roots of unity / B. Abdesselam, D. Arnaudon, A. Chakrabarti // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1995. — Vol. 28, no. 19. — P. 5495—5507. — URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/28/19/007>.
30. Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams / A. Mironov [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2015. — Vol. 2015, no. 7. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2015\)109](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2015)109).
31. *Mironov, A.* Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov // Journal of High Energy Physics. — 2012. — Vol. 2012, no. 3. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03\(2012\)034](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP03(2012)034).

32. Eigenvalue hypothesis for Racah matrices and HOMFLY polynomials for 3-strand knots in any symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama [et al.] // International Journal of Modern Physics A. — 2013. — Vol. 28, 03n04. — P. 1340009. — URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X13400095>.
33. *Gu, J.* A Note on Colored HOMFLY Polynomials for Hyperbolic Knots from WZW Models / J. Gu, H. Jockers // Communications in Mathematical Physics. — 2015. — Vol. 338, no. 1. — P. 393—456. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-015-2322-z>.
34. *Mironov, A.* Evolution method and “differential hierarchy” of colored knot polynomials / A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov // AIP Conference Proceedings. — 2013. — URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4828688>.
35. HOMFLY and superpolynomials for figure eight knot in all symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama [et al.] // Journal of High Energy Physics. — 2012. — Vol. 2012, no. 7. — URL: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07\(2012\)131](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP07(2012)131).
36. *Kononov, Y.* On the defect and stability of differential expansion / Y. Kononov, A. Morozov // JETP Letters. — 2015. — Vol. 101, no. 12. — P. 831—834. — URL: <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364015120127>.
37. *Kitaev, A.* Fault-tolerant quantum computation by anyons / A. Kitaev // Annals of Physics. — 2003. — Vol. 303, no. 1. — P. 2—30. — URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0003-4916\(02\)00018-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0003-4916(02)00018-0).
38. Non-Abelian anyons and topological quantum computation / C. Nayak [et al.] // Reviews of Modern Physics. — 2008. — Vol. 80, no. 3. — P. 1083—1159. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.80.1083>.
39. *Palumbo, G.* Non-Abelian Chern-Simons theory from a Hubbard-like model / G. Palumbo, J. K. Pachos // Physical Review D. — 2014. — Vol. 90, no. 2. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.027703>.
40. *Hui, A.* Non-Abelian fermionization and fractional quantum Hall transitions / A. Hui, M. Mulligan, E.-A. Kim // Physical Review B. — 2018. — Vol. 97, no. 8. — URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.97.085112>.