Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

Мусаев Эдвард Таваккулович

Ковариантный подход к изучению дуальностей в теории суперструн и в М-теории

Специальность 1.3.3 —
«теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2023

Оглавление

Стр.

Стр.

Введение

Диссертация посвящена исследованию симметрий T- и U-дуальности в теории струн и M-теории и их проявлений в динамике мембран и свойствах решений супергравитации. Инвариантность суперструны (мембраны) относительно действия преобразований T(U)-дуальности возникает при рассмотрении динамики на фоне пространств с компактными циклическими направлениями. В простейшем случае, суперструна на фоне пространства с одним компактным направлением не различает замену радиуса компактного направления на обратный ему с одновременной заменой мод намотки на моды импульса и наоборот. В диссертации описывается теоретико-полевой формализм, обобщающий конструкцию десятимерной (одиннадцатимерной) супергравитации, в котором симметрии T(U)-дуальности имеют геометрическую природу и связаны с преобразованиями специально построенного расширенного пространства. Изучаются приложения формализма к динамике p-бран теории струн и M-теории, размерным редукциям, генерированию новых решений супергравитации.

Симметрии физических систем, особенно имеющие геометрическую природу, являются одним из основных принципов, позволяющих получать информацию о динамике систем, в том числе непертурбативной. Особенную ценность представляют симметрии систем, отражающие дуальности — такие преобразованиясистемы, меняющие формализм, но оставляющие физику неизменной. По видимому, наиболее известным примером такой дуальности является АдС/КТП соответствие, устанавливающее эквивалентность описания явлений в калибровочной теории при сильной связи и теории супергравитации при слабой связи. Предметом исследований данной диссертации являются особые симметрии, T- и U-дуальности, возникающие в теории струны на фоне пространств с компактными циклическими направлениями. Прямое вычисление показывает, что производящий функционал для струны на таком фоне инвариантен относительно преобразований фоновой метрики, 2-формы Калба–Рамона и дилатона, называемых преобразованиями Бушера [1, 2, 3, 4]. Такая симметрия, T-дуальность, может быть проверена в любом порядке по теории возмущений, позволяя утверждать, что квантовая суперструна на фоне d-мерного тора симметрична относительно действия группы $\mathrm{O}(d,d;\mathbb{Z})$.

Кроме T-дуальности, являющейся пертурбативной симметрией, т.е. наблюдаемой в каждом порядке теории возмущений отдельно, суперструна обладает непертурбативными симметриями. Например, суперструна типа IIB инвариантна относительно S-дуальности, связывающей режим слабой и сильной связи теории. Преобразования T- и S-дуальности являются отдельными примерами преобразований U-дуальности, понимаемой как симметрия супермембраны. В работе [5] было впервые замечено, что супермембрана является более естественным описанием динамики теории струн в пределе сильной связи. Фоновое пространство струны выглядит десятимерным только в пертурбативном разложении, тогда как в пределе большой константы связи g_s спектр солитонов и симметрии теории указывают на существование одиннадцатого измерения радиуса $R_{11} = g_s^{2/3}$. Полная теории струн в таком случае описывается динамикой двумерных супермембран, фоновое пространство которых оказывается одиннадцатимерным почти всюду в пространстве модулей вакуумов. При этом только отдельные вакуумы являются десятимерными, что соответствует размерной редукции одиннадцатимерной супергравитации на окружность. Чтобы избежать путаницы такая теория в точках пространства модулей, соответствующих одиннадцатимерному пространству, называется M-теорией, тогда как она же в точках с десятимерным фоновым пространством обычно называется теорией струн. Поскольку $R_{11} \to 0$, такие точки соответствуют пертурбативному описанию струны.

Так же как и T-дуальность струны, преобразования U-дуальности трехмерной сигма-модели на пространстве с циклическими компактными направлениями перемешивают моды намотки мембраны с модами импульса и одновременно изменяют фоновые метрику и калибровочный потенциал, задаваемый 3-формой [6]. В пределе низких энергий U-дуальность супермембраны проявляется в виде симметрий максимальных супергравитаций в размерностях $D < 11$. В классических работах [7, 8] было показано, что уравнения движения супергравитации с максимальной суперсимметрией в размерности $11 - d$ может быть записано в виде, ковариантном относительно группы U-дуальности $E_{d(d)}$, максимально некомпактной формы группы E_d. При этом солитонные решения уравнений движения супергравитации, соответствующие фундаментальным p-бранам теории струн, преобразуются нетривиальным образом. В зависимости от направления, в котором производится преобразование дуальности, такие браны могут быть самодуальны или отображаться в другие браны, в том числе т.н. экзотические (нестандартные) браны. Простейшими примерами экзотических бран можно считать KK5-монополь, являющийся образом NS5-браны при T-дуальности вдоль направления перпендикулярного мировому объему браны, и (p,q) 7-браны, образующие мультиплет под действием группы S-дуальности SL(2).

В отличие от стандартных бран, взаимодействующих с калибровочными потенциалами, заданными p-формами, экзотические браны взаимодействуют с потенциалами, заданными тензорами смешанной симметрии [9]. Поскольку такие потенциалы отсутствуют в стандартном формализме супергравитации, солитонные решения уравнений супергравитации, соответствующие экзотическим бранам, с необходимостью оказываются представлены полевыми конфигурациями с нетривиальными глобальными или локальными свойствами. Например, KK5-монополь не является асимптотически плоским решением, вместо этого являясь десятимерным обобщением многообразий типа Taub-NUT. Более экзотический пример предоставляет образ KK5-монополя при T-дуальности вдоль направления, перпендикулярного его мировому объему, обычно называемый 5^2_2-браной. Метрика и поле Калба–Рамона соответствующего солитонного решения определены глобально только с точностью до преобразований T-дуальности, выступающих здесь в роли функций склейки карт [10].

Несмотря на такую особенность, экзотические браны являются не более экзотичными для теории струн и M-теории объектами, чем знакомые NS и D-браны. В первую очередь потому, что формально существует бесконечное число различных экзотических бран в M-теории, тогда как стандартных бран конечное число. Основным же аргументом в пользу естественности таких конструкций в супергравитации и реального существования таких объектов в теории струн и M-теории является анализ спектра BPS состояний алгебры суперсимметрии в 10 и 11 измерениях. Показано, что потенциалы смешанной симметрии естественным образом появляются в алгебре суперсимметрии как центральные заряды, при условии наличия изометрических направлений [11]. Более того, вследствие инвариантности струны относительно преобразований T-дуальности, физическая динамика струны на фоне, например, NS5-браны с двумя изометрическими направлениями не отличается от таковой на фоне экзотической 5_2^2-браны с точностью до замены мод намотки на моды импульса и наоборот.

В последнее время экзотические браны и соответствующие им солитонные решения уравнений супергравитации вызывают интерес в связи с приложениями к построению моделей струнной космологии, изучению вопроса термодинамики черных дыр, а также более фундаментальным вопросам динамики струны на экзотических фоновых пространствах. Включение в схемы размерной редукции экзотических бран позволяет улучшить картину стабилизации модулей за счет потоков полей напряженности смешанных потенциалов в дополнение к стандартным потокам полей напряженности R-R и NS-NS потенциалов, кривизны и кручения (см. например [12]). Важно отметить, что в отличие от стандартных NS-NS и R-R полей определить тензор напряженности для таких полей возможно только в линейном порядке по потенциалу. Это связано с невозможностью провести процедуру дуализации для смешанных потенциалов. Известным следствием является, например, отсутствие нелинейного описания дуального гравитона. Учет вкладов от экзотических бран в космологических моделях осуществляется обычно в формализме калиброванных супергравитаций в размерности четыре (см. например [13]). В таком подходе потоки напряженности NS-NS и R-R полей вдоль нетривиальных циклов соответствующего 6-мерного компактного многообразия описываются т.н. калиброваниями (gaugings), являющимися ковариантными тензорами по отношению к группе T(U)-дуальности. Те компоненты калибрований, которые нельзя описать в терминах потоков напряженности полей p-форм, называются негеометрическими и считаются аналогом потоков напряженности, но для смешанных потенциалов. Кроме того, отдельные компоненты калибрований соответствуют тензорам кривизны и кручения компактного многообразия, и также не могут быть описаны в терминах тензоров напряженности. По этой причине, такие объекты удобнее называть флаксами (flux), не предполагая их описания в терминах тензора напряженности. Такая терминология является общепринятой в англоязычной литературе, и будет использована в тексте настоящей диссертации.

Предполагая верной концепцию струнного ландшафта и оставляя за рамками обсуждения идею трясины физических теорий (swampland conjecture), можно считать, что все рассматриваемые космологические модели должны быть результатом некой схемы размерной редукции теории струн. Такое предположение имеет важные следствия, а именно, поскольку Т-дуальность является симметрией теорией струн во всех порядках теории возмущений, рассмотрение конфигураций негеометрических флаксов Т-дуальных геометрическим конфигурациям не может описывать новую физику. В частности, такие схемы не могут стабилизировать больше скалярных модулей, чем стандартные подходы. В связи с этим большой интерес вызывают т.н. истинно негеометрические флаксы: такие, которые не принадлежат орбите T(U)-дуальности, содержащей конфигурацию только с геометрическими флаксами. Такие флаксы с необходимостью появляются в теориях калиброванных супергравитаций, но при этом не могут быть получены преобразованиями дуальности стандартных схем размерной редукции. Однако, такие истинно негеометрические размерные редукции могут быть последовательно описаны в рамках обобщенных теорий поля, являющихся предметом исследования настоящей диссертации.

Мощным инструментом анализа пространства вакуумов струны является непосредственное изучение двумерных сигма-моделей и их свойств симметрии. Например, анализируя сигма-модель для суперструны Грина–Шварца на пространстве $AdS_5 \times \mathbb{S}^5$ было обнаружено семейство деформаций фонового пространства, сохраняющих интегрируемость изначальной сигма-модели[14]. Такие деформации параметризуются постоянным антисимметричным тензором второго ранга r, а условием сохранения интегрируемости является выполнение классического уравнения Янга-Бакстера для такой r-матрицы. Неожиданным результатом является то, что в отдельных случаях соответствующее фоновое пространство не может быть интерпретировано как решение уравнений десятимерной супергравитации [15]. Вместо этого оно является Т-дуальным полевой конфигурации с дилатоном, линейно зависящим от координаты, вдоль которой производится преобразование [16]. Оставаясь самосогласованным фоном для двумерной суперсимметричной сигма-модели, такая конфигурация не может быть описана в рамках стандартной супергравитации, однако естественным образом интепретируется в формализме обобщенных теорий поля. Специальным случаем такого описания является т.н. обобщенная супергравитация, уравнения которой были впервые сформулированы в работе [17].

Цели и задачи.

Основная цель диссертации — исследование пространства вакуумов теории струн и М-теории, их свойств относительно преобразований T(U)-дуальности. В диссертации рассматривается широкий класс фоновых пространств для струны и мембраны, в том числе не являющихся решениями уравнений супергравитации. Как показано в работе, такие негеометрические конфигурации следует рассматривать наравне с обычными решениями уравнений супергравитации. Разработанные в основной части диссертации методики и подходы, основанные на понятии обобщенного пространства, применяются к изучению деформаций фоновых пространств сигма-моделей.

Основными задачами диссертации являются:

- разработка полевого формализма для полей супергравитации, ковариантного относительно симметрий T(U)-дуальности теории струн и М-теории (двойная и исключительная теория поля);
- построение схем размерных редукции Шерка–Шварца исключительной теории поля, описание негеометрических флаксов в таких редукциях, интерпретация негеометрических калибрований в терминах обобщенной размерной редукции;
- изучение решений уравнений движений дуальность-ковариантных полевых теорий, поиск и интерпретация решений в виде экзотических черных бран;
- описание динамики экзотических и стандартных бран в формализме, ковариантном относительно T(U)-дуальности, явное построение действий для таких объектов;
- интерпретация экзотических потенциалов в терминах тождеств Бьянки двойной теории поля;
- поиск аналога неабелевой T-дуальности для решений 11-мерной супергравитации в рамках формализма исключительных алгебр Дринфельда, формулировка неабелевой U-дуальности, поиск явных примеров такой дуальности;
- разработка метода генерирования деформированных решений десяти- и одиннадцатимерной супергравитации на основе ковариантного формализма.

Научная новизна.

Полученные в диссертации результаты являются новым. Перечислим основные из них.

– Построены исключительные теории поля для групп симметрии SL(5), SO(5,5), а также суперсимметричное расширение теории с группой E_6. Предъявлены действия для всех полей теории: бозонных в случае теорий с группами SL(5), SO(5,5) и фермионных до четвертого порядка в случае теории с группой E_6. Продемонстрировано, что ковариантный формализм описывает стандартные 11-мерную супергравитацию и 10-мерную супергавитацию типа IIB при определенной проекции. Для суперсимметричной теории явно построены геометрическая и спиновая связности, предъявлены преобразования суперсимметрии для всех полей теории.
– Построены размерные редукции Шерка–Шварца скалярного сектора исключительных теорий поля с группами SL(5), SO(5,5), E_6. В явном виде получена связь между калиброваниями супергравитаций в размерностях $D = 7,6,5$ соответственно и (обобщенными) твистовыми матрицами. Показано, что действия рассматриваемых исключительных теорий при размерной редукции Шерка–Шварца точно воспроизводят скалярный потенциал калиброванной супергравитации. Предложена интерпретация негеометрических калибрований в терминах (обобщенной) геометрии исключительных теорий поля.
– Найдены решения полевых уравнений двойной теории поля, соответствующие фоновым пространствам вокруг экзотических бран 5_2^b с $b = 2,3,4$. Показано, что такие полевые конфигурации с необходимостью зависят от дуальной координаты. При этом такая зависимость является источником негеометричности решений в том смысле, что найденные конфигурации не решают полевые уравнения обычной десятимерной супергравитации. Показано, что в случае циклической зависимости от дуальной координаты найденные решения соответствуют учету инстантонных поправок на мировом листе струне.
– Для экзотических бран М-теории, принадлежащих орбите КК6 монополя по действию группы U-дуальности SL(5), получены в явном виде полевые конфигурации, являющиеся решениями уравнений исключительной теории поля. Такие конфигурации зависят от дуальных координат. Для найденных решений вычислены компоненты флаксов и показано, что они соответствуют экзотической бране $6^{(1,3)}$.

- Предложено ковариантное описание динамики стандартных и экзотических бран теории струн с натяжением $T \sim g_s^{-a}$ с $a = 2,3,4$. Описание включает в себя ковариантное DBI действие для бран 5_2^b с $b = 0,1,2,3,4$, составляющих орбиту NS5-браны по действию группы T-дуальности.
- Построено ковариатное действие Весса–Зумино, описывающее взаимодействие бран со смешанными потенциалами. Показано, что D-браны естественным образом описываются как единый объект с 9+1-мерным мировым объемом, различные ориентации которого в двойном пространстве проецируются в известные Dp-браны.
- Найдены примеры неабелевой U-дуальности решений 11-мерной супергравитации. Предъявлено преобразование генераторов исключительной алгебры Дринфельда, всегда генерирующее решения.
- Разработан метод генерирования деформированных решений 10- и 11-мерной супергравитации. В основу метода положена идея рассматривать смешанные потенциалы двойной и исключительной теории поля не как динамические поля, а как параметры деформации решений стандартной супергравитации. В явном виде получены преобразования фоновых полей 11-мерной супергравитации при тривекторных деформациях в рамках SL(5) теории.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Построенные в диссертации исключительные теории поля предлагает теоретико-полевое описание фоновых пространств для струны и мембраны, ковариантное относительно симметрий T(U)-дуальности. Формализм единым образом описывает одиннадцатимерную супергравитацию и десятимерные супергравитации типа IIA/B. Являясь больше чем просто переформулировкой известных теорий, формализм позволяет описывать фоновые пространства струны и мембраны, недоступные в рамках стандартного подхода. Изученные в диссертации примеры решений полевых уравнений ковариантного формализма показывают чувствительность двойной теорий поля к непертурбативным эффектам теории струн таким как инстантоны на мировом листе струны.

В рамках размерной редукции Шерка–Шварца скалярного сектора исключительных теорий поля получена интепретация калибрований низкоразмерных теорий супергравитации в терминах (обобщенной) геометрии фонового пространства полной теории. Явные выражения для тензора погружения в терминах твистовых матриц позволяют строить схемы размерных редукций одиннадцатимерной супергравитации с негеометрическими флаксами. В том числе, с истинно негеометрическими флаксами. В литературе показано, что в рамках данной конструкции удается обобщить понятие параллелизуемых пространств, например, на случай сферы и рассматривать ее как обобщенный твистованный тор.

Динамическими источниками негеометрических флаксов в схемах размерной редукции являются экзотические браны. Полученные в диссертации действия для экзотических и стандартных бран теории струн, ковариантные относительно преобразований T-дуальности, описывают динамику фундаментальных объектов, генерирующих фоновые пространства с негеометрические флаксами. Известно, что в ориентифолдных схемах размерной редукции с Dp-бранами ключевую роль играет условие сокращение диаграмм типа головастик, определяющее заряд ориентифолда относительно R-R-полей. Полученные в диссертации действия позволяют обобщить это условие на негеометрические ориентифолдные конструкции и строить размерные редукции самосогласованные на однопетлевом уровне (см. например [18]).

Построенный в диссертации формализм, описывающий бивекторные деформации решений полевых уравнений супергравитации, основан на двойной теории поля. А именно, негеометрический потенциал β^{mn} рассматривается как тензор деформации, а не как фундаментальная степень свободы теории. Такой подход позволяет явно доказать, что деформации, пропорциональные векторам Киллинга свернутым с r-матрицей, генерируют решения при условии выполнения классического уравнения Янга-Бакстера. Этот результат был ожидаем, исходя из анализа отдельных примеров деформаций главных киральных двумерных сигма-моделей и сигма-моделей фактор-пространств в работах других авторов. Предложенный в диссертации формализм является более общим по следующим причинам.

– Позволяет описывать деформации любых решений, а не только групповых многообразий и фактор-пространств.
– Не ограничивает выбор деформаций бикиллинговым анзацем, а позволяет рассматривать любые бивекторные деформации, несводимые к векторам Киллинга и r-матрице. Вопрос сохранения интегрируемости сигма-моделей при таких деформациях открыт и представляется важным аспектом изучения пространства вакуумов струны.

– Обобщается на случай исключительных теорий поля, а следовательно, деформаций решений 11-мерной супергравитации. В диссертации найдены отдельные примеры таких деформаций.

Методология и методы исследования.

При построении исключительных теорий поля используется идея расширенного (удвоенного) пространства, восходящая к работам Фрадкина и Цейтлина, и впоследствии развитая в работах Зигеля в приложении к струнной теории поля, и в работах Хома, Хала и Цвибаха непосредственно в форме двойной теории поля. Из более стандартных подходов используются методы дифференциальной геометрии, теории представлений алгебр Ли и методы теории суперсимметрии. Конкретно метод построения теорий, ковариантных относительно U-дуальности, основан на идеях, предложенных в работах [19] и более ранних работах [20, 21, 22, 23, 24].

Ключевым понятием, обеспечившим возможность удвоения пространства-времени, является симметрия между модами импульса и модами намотки струны на торическом фоне. Понимая правые и левые гармоники как независимые координаты, сумму и разность правых и левых функций вложения мирового листа замкнутой струны в объемлющее пространство можно рассматривать независимо. Условие совпадения уровней в таком случае будет дополнительным условием, накладываемым на все функции на таком удвоенном пространстве. Оно обычно называется условием проекции (section condition), поскольку проецирует динамику на стандартное пространство-время. Вектора на таком обобщенном пространстве преобразуются в неприводимом представлении группы Т-дуальности. Несмотря на то, что подобной картины вообще говоря нет для супермембраны, понятие обобщенного пространства и условия проекции обобщаются и на случай групп U-дуальности с использованием методов теории представлений и подсчета намоток мембран.

При построении размерных редукций исключительных теорий поля и изучении негеометрических флаксов использовались методы размерной редукции Шерка–Шварца. В этом подходе все расширенное пространство предполагается внутренним, а твистовые матрицы обобщаются соответствующим образом. Вследствие более широкой группы симметрии в схеме обобщенной редукции Шерка–Шварца по сравнению со стандартной GL(d), полученные твистовые матрицы описывают более широкое множество флаксов. Используя аналогии со стандартными методами дифференциальной геометрии, эти конструкции интерпретируются в терминах геометрии обобщенного пространства.

Задачи построения ковариантного действия для экзотических бран, нахождения решений уравнений исключительной теории поля, генерирования деформаций решений супергравитации решаются в рамках методологии исключительной теории поля и с применением разработанного формализма.

Основные положения, выносимые на защиту:

На защиту выносятся следующие основные результаты

1. Построены теории (т.н. исключительные теории поля), предлагающие формулировку одиннадцатимерной супергравитации ковариантную относительно групп U-дуальности SL(5), SO(5,5), E_6. Для теории с группой симметрии E_6 построено суперсимметричное обобщение. Показано, что можно выбрать решения условия проекции так, что построенные теории эквивалентны стандартной одиннадцатимерной супергравитации или десятимерной супергравитации типа IIB.
2. Построены редукции Шерка–Шварца скалярного сектора исключительных теорий поля с группами SL(5), SO(5,5), E_6. Продемонстрирована связь редуцированных теорий с максимальными супергравитациями с неабелевыми векторными мультиплетами в размерности $D = 7,6,5$ в формализме тензора погружения. Предложена интерпретация компонент тензора погружения (калибрований) в терминах твистовых матриц и геометрии обобщенного пространства.
3. Найдены решения полевых уравнений двойной теории поля, описывающие орбиту по действию группы T-дуальности, содержащую экзотические NS 5-браны в размерности 10. Для найденных решений вычислены компоненты флаксов для смешанных потенциалов и показано, что они генерируются экзотическими 5^b_2-бранами с $b = 2,3,4$. Показано, что такие объекты локализуются в дуальном пространстве, соответствующем модам намотки струн и мембран.
4. Построены эффективные действия для NS 5-бран, Dp-бран и экзотических бран с натяжением g_s^{-3}, ковариантные относительно T-дуальности. Построенные действия включают кинетическое DBI действие (для NS 5-бран) и действие Весса–Зумино, описывающее взаимодействие со смешанными потенциалами. Показано, что браны, экзотические с точки зрения стандартной десятимерной суперграви-

тации, могут пониматься как стандартные браны, особым образом ориентированные в удвоенном пространстве.

5. Предложен общий формализм описания деформаций решений десятимерной и одиннадцатимерной супергравитации типа Янга-Бакстера, основанный на подходе исключительной теории поля. В явном виде получены преобразования фоновых полей 11-мерной супергравитации при тривекторных деформациях в рамках SL(5) теории.
6. Найден класс преобразований генераторов исключительной алгебры Дринфельда, соответствующий внешнему автоморфизму алгебры U-дуальности $E_{d(d)}$, сохраняющий ее структуру. Такие преобразования генерируют дуальности решений 11-мерной супергравитации, являющиеся обобщением неабелевой T-дуальности 10-мерной теории. Найдены явные примеры таких неабелевых U-дуальностей, являющиеся первыми примерами намбу–лиевой дуальности. Найдены примеры поливекторных деформаций, реализованные намбу–лиевыми дуальностями.

Степень достоверности и апробация работы.

Результаты представлялись соискателем на отечественных и международных конференциях и семинарах, в частности на семинарах ЛТФ ОИЯИ (г. Дубна), кафедры теории относительности и гравитации института физики КФУ (г. Казань), кафедры физики высоких энегий СПбГУ, отделения теоретической физики ФИАН им. П.Н. Лебедева (г. Москва), лаборатории физики Высшей Нормальной Школы (г. Лион, Франция), института Нордита (г. Стокгольм, Швеция), университета им. Людвига Максимилиана (г. Мюнхен, Германия), института теоретической физики (г. Сакле, Франция), отделения теоретической физики факультета физики и астрономии университета г. Уппсалы (г. Уппсала, Швеция), центра исследований теории струн школы физики и астрономии университета Королевы Марии (г. Лондон, Великобритания), школы физики корейского института передовых исследований (г. Сеул, Корея), группы квантовой гравитации и объединенных теорий института гравитационной физики им. Макса Планка (г. Потсдам, Германия), на международных семинарах “Кварки’18” (г. Санкт-Петербург), “Кварки’20” (Валдай), конференциях SIS’18 (г. Ереван, Армения), QFTG’(14,16,18) (г. Томск), Nordic String Theory Meeting’17 (г. Ганновер, Германия), 20th European Workshop on String Theory (г. Майнц, Германия).

Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 публикациях в реферируемых журналах. Вклад автора в полученные результаты является определяющим.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 279 страниц, включая 8 рисунков и 20 таблиц. Список литературы содержит 271 наименование.

1.1 Т-дуальность в теории струн

Т-дуальность является пертурбативной симметрией теории струн типа II на фоне пространств с изометрией $\mathrm{U}(1)^n$. Петурбативность симметрии означает, что ее можно наблюдать в каждом порядке струнной теории возмущений отдельно и, в частности, в массовом спектре линейных возбуждений. Рассмотрим бозонную часть действия струны в формализме R-NS на фоне, заданном некоторой метрикой $G_{\mu\nu}$ и полем Калба–Рамона $B_{\mu\nu}$ [25, 26]

$$S_P = \int d\tau d\sigma \left(\sqrt{-h}h^{ab}G_{\mu\nu} + \varepsilon^{ab}B_{\mu\nu}\right)\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu. \tag{1.1}$$

Переменные $\sigma^a = \{\tau,\sigma\}$ обозначают координаты на мировом листе струны, h_{ab} обозначает двумерную метрику. Вложение двумерного мирового листа в объемлющее пространство задается D функциями $X^\mu(\tau,\sigma)$, где греческие индексы принимают значения от 1 от D. Симметрии теории включают D-мерные локальные координатные преобразования $X'^\mu = X'^\mu(X)$, репараметризации на мировом листе $\sigma'^a = \sigma'^a(\sigma^a)$ и вейлевские преобразования $h'_{ab}(\sigma^a) = e^{\omega(\sigma)}h_{ab}(\sigma^a)$. Вейлевская симметрия является неаномальной только при определенном выборе количества скалярных полей $X^\mu(\tau,\sigma)$, а именно $D = 26$ для бозонной струны и $D = 10$ для струны, включающей фермионные поля. Более детальное обсуждение вопросов квантования струны в формализме R-NS можно найти в классических учебниках [27, 28] и в обзорах [29, 30].

Пусть теперь функции на мировом листе удовлетворяют периодическим граничным условиям, то есть струна является замкнутой. Объемлющим пространством для простоты возьмем плоское пространство с одним компактным направлением $\mathbb{R}^{1,D-2}\times\mathbb{S}^1$. Обозначим радиус окружности R и положим поле Калба–Рамона нулю, $B_{\mu\nu} = 0$. Преобразования репараметризации на мировом листе (2 параметра) и вейлевские преобразования (1 параметр) могут быть использованы для приведения двумерной метрики h_{ab} к диагональному виду $||h_{ab}|| = ||\eta_{ab}|| \equiv \mathrm{diag}[1,-1]$. В итоге, действие принимает следующий вид:

$$S = \int d\tau d\sigma\, \eta^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu. \tag{1.2}$$

При варьировании действия по скалярным полям X^μ необходимо учитывать граничные члены

$$\delta S = -\int d\tau d\sigma \eta^{ab} \delta X^\mu \partial_a \partial_b X_\mu + \int d\tau d\sigma \partial_a \left(\eta^{ab} \delta X^\mu \partial_b X_\mu \right) = 0. \tag{1.3}$$

Первое слагаемое дает стандартные уравнения Клейна–Гордона на скалярные поля $\partial^a \partial_a X^\mu = 0$. Второе слагаемое является граничным вкладом и исчезает при выборе периодических граничных условий:

$$\begin{aligned} X^{\hat{\alpha}}(\tau,\sigma + 2\pi) &= X^{\hat{\alpha}}(\tau,\sigma), \quad \text{for } \hat{\alpha} = 1, \ldots, D-1 \\ \theta(\tau,\sigma + 2\pi) &= \theta(\tau,\sigma) + 2\pi m R, \quad m \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где компактная координата объемлющего пространства обозначена θ. Такие граничные условия соответствуют замкнутой струне, намотанной на компактное направление m раз.

Стандартно масса состояния струны определяется квадратом ее компонент импульса вдоль некомпактных направлений $\hat{\alpha} = 1 \ldots D-1$, тогда как оставшаяся компонента p_θ вдоль компактного направления оказывается дискретной и определяет массы калуца-клейновских состояний. Произвольное состояние струны определяется действием вершинного оператора на ее основное состояние:

$$|\zeta, p\rangle = \int d\sigma \Pi(\zeta, X^\mu) e^{i p_\mu X^\mu} |0\rangle, \tag{1.5}$$

где $\Pi(\zeta, X^\mu)$ обозначает некоторую комбинацию поляризации возбуждения $\zeta_{\mu_1 \ldots \mu_n}$ и скалярных полей X^μ. Явный вид этой комбинации неважен для настоящего обсуждения. Квантование импульса следует из граничных условий на фазовый множитель и имеет следующий вид:

$$p_\theta = \frac{2\pi n}{R}. \tag{1.6}$$

Наконец, полное выражение для массового спектра, зависящее от моды имульса n и моды намоток m, имеет вид

$$M^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{m^2 R^2}{\alpha'^2} + 2(N + \tilde{N} - 2), \tag{1.7}$$

где N и $\tilde{N}$ обозначают стандартный оператор числа частиц. Полученное выражение для массового спектра явно инвариантно относительно замены радиуса компактного измерения R на α'/R с дополнительной заменой мод намоток на моды импульса и наоборот

$$R \longleftrightarrow \frac{\alpha'}{R}, \qquad m \longleftrightarrow n. \tag{1.8}$$

Это простое вычисление показывает, что замкнутая струна на фоне плоского пространства с одним замкнутым направлением радиуса не различает большие и малые радиусы, связанные преобразованием выше. Причем, преобразование заменяет моды намоток на моды импульса.

1.2 Правила Бушера

В рассмотренном простейшем случае поле Калба–Рамона было положено равным нулю, а фоновая метрика была для простоты взята плоской. Однако, удается показать симметричность теории замкнутой струны относительно преобразований T-дуальности более общих, чем описанное выше обращение радиуса и замена мод намотки модами импульса. Такие преобразования фоновых метрики $G_{\mu\nu}$, калибровочного поля 2-формы $B_{\mu\nu}$ и дилатона φ называются правилами Бушера [1, 2, 3]. Ключевая идея вывода правил Бушера состоит в том, что производящий функционал для замкнутой струны инвариантен относительно соответствующих преобразований фоновых полей. Сама процедура состоит в добавлении лагранжевого множителя и взятии интеграла по тем или иным полям, приводя к фоновым конфигурациям, связанным друг с другом правилами Бушера.

Запишем действие струны (1.1) в конформной калибровке и зафиксируем выбор координат на мировом листе $\sigma_\pm = 1/2(\tau \pm \sigma)$:

$$\begin{aligned} S_1[\theta] &= \int d\sigma (G+B)_{\mu\nu}\partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu = \\ &= \int d\sigma \Big(G_{\theta\theta}\partial_+\theta\partial_-\theta + E_{\hat\alpha\theta}\partial_+ X^{\hat\alpha}\partial_-\theta + E_{\theta\hat\alpha}\partial_+\theta\partial_- X^{\hat\alpha} + \\ &\qquad + E_{\hat\alpha\hat\beta}\partial_+ X^{\hat\alpha}\partial_- X^{\hat\beta}\Big), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где было введено обозначение $E_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}$. Поскольку координата θ параметризует окружность $\mathbb{S}^1$, действие инвариантно относительно глобальных

$U(1)$ преобразований $\theta' = \theta + \xi$, где $e^{i\xi} \in U(1)$. Глобальная симметрия может быть обращена в локальную путем введения длинной производной

$$D\theta = d\theta + A, \tag{1.10}$$

где калибровочное поле $A = A_+ d\sigma^+ + A_- d\sigma^-$. Для сохранения того же количества степеней свободы в теории, калибровочное поле следует положить равным чистой калибровке, для чего в действие вводится член с лагранжевым множителем:

$$\begin{aligned} S_2[\theta,\lambda] = &\int d\sigma (G+B)_{\mu\nu}\partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu = \\ = &\int d\sigma \Big(G_{\theta\theta} D_+\theta D_-\theta + E_{\hat{\alpha}\theta}\partial_+ X^{\hat{\alpha}} D_-\theta + E_{\theta\hat{\alpha}} D_+\theta \partial_- X^{\hat{\alpha}} + \\ &+ E_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\partial_+ X^{\hat{\alpha}}\partial_- X^{\hat{\beta}} + \lambda F_{+-} \Big). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Интегрирование в производящем функционале по лагранжевому множителю λ ограничивает интеграл по калибровочным полям конфигурациями, удовлетворяющими $F_{-+} = 0$, то есть

$$\begin{aligned} A_+ &= \partial_+\varphi \\ A_- &= \partial_-\varphi. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Таким образом производящий функционал с действием $S_2[\theta,\lambda]$ оказывается равен таковому с изначальным действием $S_1[\theta+\varphi]$. Это показывает, что теории эквивалентны на квантовом уровне.

Альтернативно, оставим интеграл по λ, но возьмем явно интеграл по калибровочным полям A. Такой интеграл является гауссовым и соответствует решению классических уравнений на калибровочное поле, которые оказываются алгебраическими. Решение записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_+ &= \frac{1}{G_{\theta\theta}}\partial_+\lambda + \frac{1}{G_{\theta\theta}} E_{\theta\hat{\alpha}}\partial_- X^{\hat{\alpha}} \\ A_- &= -\frac{1}{G_{\theta\theta}}\partial_-\lambda + \frac{1}{G_{\theta\theta}} E_{\hat{\alpha}\theta}\partial_+ X^{\hat{\alpha}}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Подставляя явно выражение для A_+, A_- в действие $S_2[\theta,\lambda]$ и фиксируя калибровку $\theta = 0$, получим:

$$\begin{aligned} S_3[\lambda] = &\int d\sigma \Big(G'_{\lambda\lambda}\partial_+\lambda\partial_-\lambda + E'_{\hat{\alpha}\lambda}\partial_+ X^{\hat{\alpha}}\partial_-\lambda + E'_{\lambda\hat{\alpha}}\partial_+\lambda\partial_- X^{\hat{\alpha}} + \\ &+ E'_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\partial_+ X^{\hat{\alpha}}\partial_- X^{\hat{\beta}} \Big). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Это действие имеет такой же вид, что и изначальное действие $S_1[\theta]$, причем новые фоновые поля $G'_{\lambda\lambda}, B'_{\lambda\lambda}$ связаны с изначальными следующим образом:

$$\begin{aligned} G'_{\lambda\lambda} &= \frac{1}{G_{\theta\theta}}, \\ E'_{\lambda\hat{\alpha}} &= \frac{1}{G_{\theta\theta}} E_{\theta\hat{\alpha}}, \\ E'_{\hat{\alpha}\lambda} &= -\frac{1}{G_{\theta\theta}} E_{\hat{\alpha}\theta}, \\ E'_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} &= E_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - E_{\hat{\alpha}\theta} \frac{1}{G_{\theta\theta}} E_{\theta\hat{\beta}}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Такие преобразования, определяющие связь эквивалентных с точки зрения замкнутой струны фоновых полевых конфигураций, называются правилами Бушера для преобразований Т-дуальности. Поскольку теории с действиями S_1 и S_3 эквивалентны теории с действием S_2, они эквивалентны друг другу и описывают одну и ту же физику. Важно отметить, что преобразования (1.15) являются нелинейными и перемешивают компоненты метрики $G_{\mu\nu}$ и калибровочного поля Калба–Рамона $B_{\mu\nu}$, а следовательно и локальные координатные преобразования и калибровочные преобразования $B' = B + d\Lambda$.

В описании выше мы для простоты не учитывали преобразование меры функционального интеграла при переходе к новой фоновой конфигурации. Последовательный учет однопетлевых вкладов показывает, что дополнительно к (1.15) следует преобразовывать поле дилатона следующим образом

$$\varphi' - \frac{1}{4} \ln \det g' = \varphi - \frac{1}{4} \ln \det g. \tag{1.16}$$

Легко видеть, что комбинация $e^{-2d} = \sqrt{g} e^{-2\varphi}$ является Т-инвариантом, и в дальнейшем поле d будет называться инвариантным дилатоном.

1.3 Ковариантная запись уравнений струны и мембраны

Как было показано в предыдущем разделе, преобразование Т-дуальности связывает действия двумерной сигма-модели $S_1[\theta]$ и $S_3[\lambda]$, причем координата λ играет роль лагранжева множителя для начального действия. Рассмотрим теперь преобразование уравнений струны на фоне, задаваемом постоянными полями $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, под действием Т-дуальности и покажем, что существует скрытая симметрия между уравнениями движения и тождествами Бьянки. А именно, уравнения для скалярных полей $X^\mu(\sigma,\tau)$ на мировом листе струны оказываются эквивалентными тождествам Бьянки для другого набора скалярных полей $Y_\mu(\sigma,\tau)$. При этом, первые несут стандартный смысл координатных функций вложения мирового листа струны в объемлющее пространство, а вторые являются дуальными координатами. Соотношения между стандартными и дуальными координатами приводит к понятию обобщенной метрики, играющей центральную роль в расширенных теориях поля.

Алгоритм, позволяющий выявить такие скрытые симметрии уравнений двумерной сигма-модели, обычно называется процедурой Даффа [4, 6]. На постоянном фоне уравнения для поля $X^\mu(\sigma,\tau)$, следующие из действия (1.1), имеют вид закона сохранения $\partial_a \tilde{\mathcal{G}}^a_\mu = 0$ некоторого тока

$$\tilde{\mathcal{G}}^a_\mu = \left(\sqrt{-h}h^{ab}G_{\mu\nu} + \varepsilon^{ab}B_{\mu\nu}\right)\partial_b X^\nu. \tag{1.17}$$

По лемме Пуанкаре для топологически тривиального мирового листа или в локальной карте решения такого уравнения могут быть представлены в виде звезды Ходжа от полной производной $\tilde{\mathcal{G}}^a_\mu := \varepsilon^{ab}\partial_b Y_\mu$ от некоторой (дуальной) координаты Y_μ. Уравнение тогда принимает следующий вид:

$$\left(\sqrt{-h}h^{ab}G_{\mu\nu} + \varepsilon^{ab}B_{\mu\nu}\right)\partial_b X^\nu = \varepsilon^{ab}\partial_b Y_\mu. \tag{1.18}$$

Видно, что производная ∂_a от этого выражения дает в левой части уравнения для поля X^μ, а в правой части тождества Бьянки $\varepsilon^{ab}\partial_a\partial_b Y_\mu = 0$ для поля Y_μ. Можно считать, что точная 1-форма $dY_\mu = \partial_a Y_\mu d\sigma^a$ может быть всегда добавлена к току $*\tilde{\mathcal{G}}_\mu$ без изменения уравнений.

Уравнение (1.18) можно переписать в эквивалентной форме, определив $p_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} + B_{\mu\alpha}B^\alpha{}_\nu$ и $p_{\mu\alpha}q^{\alpha\nu} = B_\mu{}^\nu$:

$$\left(\sqrt{-h}h^{ab}p^{\mu\nu} + \varepsilon^{ab}q^{\mu\nu}\right)\partial_b Y_\nu = \varepsilon^{ab}\partial_b X^\mu. \tag{1.19}$$

Поскольку это уравнение имеет ровно тот же вид, что и (1.18), оно описывает движение струны, задаваемой функциями вложения $Y_\mu(\sigma,\tau)$ на фоне метрики $p^{\mu\nu}$ и поля Калба–Рамона $q^{\mu\nu}$, являющихся результатом действия T-дуальности вдоль всех координат X^μ. Объединяя (1.18) и (1.19) мы получаем два набора уравнений на координаты X^μ и Y_μ, описывающих движение струны на начальном фоне $(G_{\mu\nu},B_{\mu\nu})$ и всех его образах при T-дуальности вдоль любой из координат X^μ.

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{G}^a_\mu = \sqrt{-h}h^{ab}\partial_b Y_\mu, && \mathcal{F}^{a\mu} = \sqrt{-h}h^{ab}\partial_b X^\mu,\\
&\tilde{\mathcal{G}}^a_\mu = \varepsilon^{ab}\partial_b Y_\mu, && \tilde{\mathcal{F}}^{a\mu} = \varepsilon^{ab}\partial_b X^\mu,
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

и запишем уравнения (1.18) и (1.19) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{G}}^a_\mu =& G_{\mu\nu}\mathcal{F}^{a\nu} + B_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{F}}^{a\nu}\\
\tilde{\mathcal{F}}^{a\mu} =& p^{\mu\nu}\mathcal{G}^a_\nu + q^{\mu\nu}\tilde{\mathcal{G}}^a_\nu.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Здесь уравнения в первой строке являются буквально уравнением движения (1.17), тогда как уравнения во второй строке воспроизводят (1.19) при свертке с $p_{\mu\rho}$. Анализ структуры полученных уравнений показывает, что удобно собрать объекты $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ в два набора $2d$-мерных столбцов:

$$
\tilde{\mathcal{F}}^{a\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{F}}^{a\mu} \\ \tilde{\mathcal{G}}^a_\mu \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}^{a\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^{a\nu} \\ \mathcal{G}^a_\nu \end{bmatrix},
\tag{1.22}
$$

где заглавные латинские индексы $\mathcal{M},\mathcal{N} = 1\ldots 2d$, и определить $2d \times 2d$ матрицы $\mathcal{H}$ и η следующим образом:

$$
\mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} G_{\mu\nu} - B_{\mu\rho}B^\rho{}_\nu & -B_\mu{}^\kappa \\ B^\lambda{}_\nu & G^{\kappa\lambda} \end{bmatrix}, \quad \eta_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} 0 & \delta^\mu_\nu \\ \delta^\kappa_\lambda & 0 \end{bmatrix}.
\tag{1.23}
$$

Тогда уравнения (1.21) принимают лаконичный вид:

$$
\eta_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\tilde{\mathcal{F}}^{i\mathcal{N}} = \mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\mathcal{F}^{i\mathcal{N}},
\tag{1.24}
$$

в котором очевидна их ковариантность относительно действия группы симметрий $\mathrm{O}(d,d)$. При этом объекты $\tilde{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}$ преобразуются в фундаментальном представлении группы симметрий, матрица $\mathcal{H}$ принадлежит присоединенному представление, а $\eta_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$ является инвариантным тензором ортогональной группы. Таким образом, для произвольного преобразования $O^\mathcal{M}{}_\mathcal{N} \in \mathrm{O}(d,d)$ имеем следующее:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}'^{i\mathcal{M}} = O^\mathcal{M}{}_\mathcal{N}\mathcal{F}'^{i\mathcal{N}}, && \mathcal{H}'_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = O_\mathcal{M}{}^\mathcal{K}\mathcal{H}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}O_\mathcal{N}{}^\mathcal{L},\\
&\tilde{\mathcal{F}}'^{i\mathcal{M}} = O^\mathcal{M}{}_\mathcal{N}\tilde{\mathcal{F}}'^{i\mathcal{N}}, && \eta_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = O_\mathcal{M}{}^\mathcal{K}\eta_{\mathcal{K}\mathcal{L}}O_\mathcal{N}{}^\mathcal{L}.
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

Действуя на так называемую обобщенную метрику $\mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$ преобразования из группы $\mathrm{O}(d,d)$ перемешивают степени свободы метрического тензора $G_{\mu\nu}$ и калибровочного поля Калба–Рамона $B_{\mu\nu}$. Причем, линейное действие группы симметрий на обобщенную метрику оказывается сильно нелинейным, будучи записанными в терминах метрики и поля Калба–Рамона.

Покажем, что группа симметрий $\mathrm{O}(d,d)$ уравнений струны на фоне постоянных $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ содержит преобразования Бушера. Действительно, ортогональная группа $\mathrm{O}(d,d)$ содержит элементы непрерывно связанные с единицей группы, которые могут быть представлены в виде произведения следующих элементов группы $\mathrm{SO}(d,d)$

$$\mathcal{O}_A = \begin{bmatrix} A^\mu{}_\nu & 0 \\ 0 & A^{-1}{}_\mu{}^\nu \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}_B = \begin{bmatrix} \delta^\mu{}_\nu & 0 \\ \Lambda_{\rho\nu} & \delta_\rho{}^\sigma \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O}_\beta = \begin{bmatrix} \delta^\mu{}_\nu & \beta^{\mu\rho} \\ 0 & \delta^\rho{}_\sigma \end{bmatrix}. \tag{1.26}$$

Здесь преобразования $\mathcal{O}_A$ принадлежат подгруппе $\mathrm{GL}(d)$ глобальных вращений, преобразования $\mathcal{O}_B$ сдвигают поле $B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}$ и обычно называются B-сдвигами, а преобразования $\mathcal{O}_\beta$ обычно называются β-сдвигами и соответствуют бивекторным деформациям. Такие преобразования будут более подробно рассматриваться в Главе 6. Кроме того, группа $\mathrm{O}(d,d)$ содержит d пространственных отражений T_μ, которые могут быть представлены в виде матриц

$$T_\mu = \begin{bmatrix} 1 - e_\mu & e_\mu \\ e_\mu & 1 - e_\mu \end{bmatrix}, \quad (e_\mu)^\rho{}_\sigma = \delta_\mu{}^\rho \delta_\sigma{}^\mu \quad \text{(нет суммы)}. \tag{1.27}$$

Другими словами, e_μ — это такая $d \times d$ матрица, у которой все компоненты равны нулю, кроме диагонального элемента $(e_\mu)^\mu{}_\mu = 1$. Определим 2d-мерный столбец $V^\mathcal{M}$, который будем называть обобщенным вектором, так, что под действием группы $\mathrm{O}(d,d)$ он преобразуется в ее векторном представлении. В компонентах можно записать:

$$V'^\mathcal{M} = \mathcal{O}^\mathcal{M}{}_\mathcal{N} V^\mathcal{N} = \mathcal{O}^\mathcal{M}{}_\mathcal{N} \begin{bmatrix} V^\mu \\ V_\nu \end{bmatrix}. \tag{1.28}$$

Тогда, отражения T_μ, которые обычно называются факторизованными T-дуальностями, переставляют компоненты V_μ и V^μ. Действуя факторизованной T-дуальностью, например, T_1 на обобщенную метрику, получим правила Бушера для T-дуальности в направлении x^1.

До определенной степени процедура описанная выше может быть применена к уравнениям, описывающим динамику протяженных объектов другой размерности, например, M2-бранам [6]. Рассмотрим бозонную часть действия для одной бесконечной M2-браны, взаимодействующей с фоновыми метрикой и 3-формой $C_{\mu\nu\rho}$:

$$\mathcal{S} = \int d^3\xi\sqrt{-h}\left[\frac{1}{2}h^{ab}G_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \frac{1}{6}\varepsilon^{abc}C_{\alpha\mu\nu}\partial_a X^\alpha \partial_b X^\mu \partial_c X^\nu - \frac{1}{2}\right]. \qquad (1.29)$$

Здесь интегрирование производится по мировому объему мембраны, вложенному в 11-мерное объемлющее пространство с метрикой $G_{\mu\nu}$. Так определенное взаимодействие с калибровочным полем показывает, что по отношению к тензору напряженности 3-формы $F_{(4)} = dC_{(3)}$ M2-брана заряжена электрически. Объектом, несущим магнитный заряд по этому же калибровочному полю, будет являться M5-брана.

Рассмотрим специальный случай динамики мембраны на фоне четырехмерного тора $\mathbb{T}^4$, соответствующий группе U-дуальности SL(5). В таком случае метрика объемлющего пространства и 3-форма не будут зависеть от четырех координат X^μ, параметризующих тор. Для простоты предположим дополнительно, что M2-брана не движется в остальных пространственных направлениях. С этими упрощениями уравнения для скалярных полей X^μ, следующие из (1.29), снова принимают форму закона сохранения $\partial_a \tilde{\mathcal{G}}^a_\mu = 0$ некоторого тока, определенного как:

$$\tilde{\mathcal{G}}^a_\mu(X) = \sqrt{-h}G_{\mu\nu}\partial_a X^\nu + \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}C_{\mu\nu\rho}\partial_b X^\nu \partial_c X^\rho. \qquad (1.30)$$

По крайней мере локально, решения такого уравнения могут быть представлены в следующем виде:

$$\tilde{\mathcal{G}}^a_\mu(Y) = \varepsilon^{abc}\partial_b X^\nu \partial_c Y_{\mu\nu}, \qquad (1.31)$$

где естественным образом вводятся дуальные поля $Y_{\mu\nu}$. Как и в случае фундаментальной струны уравнения для дуальных полей оказываются буквально тождествами Бьянки для полей X^μ. Действуя по аналогии с процедурой Даффа для фундаментальной струны определим

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^a_{\mu\nu} &= \sqrt{-h}h^{ab}\partial_b Y_{\mu\nu}, \quad \mathcal{F}^{a\mu} = \sqrt{-h}h^{ab}\partial_b X^\mu, \\ \tilde{\mathcal{G}}^a_\mu &= \varepsilon^{abc}\partial_b X^\nu \partial_c Y_{\mu\nu}, \quad \tilde{\mathcal{F}}^{a\mu\nu} = \varepsilon^{abc}\partial_b X^\mu \partial_c X^\nu. \end{aligned} \qquad (1.32)$$

В этих обозначениях уравнения (1.30) и (1.31) для полей X^μ могут быть записаны в виде двух эквивалентных выражений:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}^a_\mu &= G_{\mu\nu}\mathcal{F}^{a\nu} + C_{\mu\nu\rho}\tilde{\mathcal{F}}^{a\nu\rho} \\ \tilde{\mathcal{F}}^{a\mu\nu} &= p^{\mu\nu,\alpha\beta}\mathcal{G}^a_{\alpha\beta} + q^{\mu\nu\rho}\tilde{\mathcal{G}}^a_\alpha. \end{aligned} \qquad (1.33)$$

Здесь тензоры $p_{\mu\nu,\rho\sigma}$ и $q^{\mu\nu\rho}$ определяются через следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
p_{\alpha\beta,\mu\nu}q^{\mu\nu\rho} &= -C_{\alpha\beta\gamma}G^{\mu\gamma},\\
p_{\alpha\beta,\lambda\theta}p^{\lambda\theta,\mu\nu} &= \delta_{\alpha}^{[\mu}\delta_{\beta}^{\nu]},\\
p_{\alpha\beta,\mu\nu} &= G_{\alpha[\mu}G_{\nu]\beta} - C_{\alpha\beta\rho}C^{\rho}{}_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

Удобно ввести обобщенный индекс $\mathcal{M} = \{\mu,\alpha\beta\}$, пробегающий значения от 1 до 10 нумеруя базисные вектора пространства представления **10** группы дуальности $SL(5)$. Тогда система уравнений (1.33) может быть записана в компактной форме, явно ковариантной относительно действия группы U-дуальности:

$$
\mathcal{F}^{a\mathcal{M}} = M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\tilde{\mathcal{F}}^{a}_{\mathcal{N}}. \tag{1.35}
$$

Здесь матрица $M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}$ обозначает обобщенную метрику:

$$
M^{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}C^{\mu\delta\gamma}C^{\nu}{}_{\delta\gamma} & \frac{1}{\sqrt{2}}C^{\mu}{}_{\rho\sigma} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}C^{\nu}{}_{\alpha\beta} & G_{\alpha\beta,\rho\sigma} \end{bmatrix}, \tag{1.36}
$$

а переменные (1.32) объединяются в объекты, преобразующиеся ковариантно:

$$
\mathcal{F}^{a\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^{a\mu} \\ \\ \mathcal{G}^{a}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{F}}^{a}_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{G}}^{a}_{\nu} \\ \\ \tilde{\mathcal{F}}^{b\rho\sigma} \end{bmatrix}. \tag{1.37}
$$

Тензор $G_{\mu\nu,\rho\sigma} = \frac{1}{2}(G_{\mu\rho}G_{\nu\sigma} - G_{\mu\sigma}G_{\nu\rho})$ используется для поднятия и опускания антисимметричной пары индексов и может рассматриваться как метрика на пространстве дуальных координат. Наконец, тождества Бьянки и уравнения могут быть представлены в виде объединенного закона сохранения некоторого обобщенного тока $\partial_a\tilde{\mathcal{F}}^{a}_{\mathcal{M}} = 0$.

Так определенная обобщенная метрика является элементом фактор-пространства SL(5)/SO(5) и преобразуется ковариантно под действием группы U-дуальности SL(5). В такой формулировке легко видеть непертурбативную природу преобразований U-дуальности. Действительно, струнная константа связи g_s пропорциональна экспоненте от вакуумного среднего поля дилатона $g_s = e^{\langle\varphi\rangle}$. Дилатон в размерности десять пропорционален логарифму компоненты метрики $G_{10\,10}$ в размерности одиннадцать. Поскольку преобразования U-дуальности перемешивают все компоненты одиннадцатимерной метрики и калибровочного поля, струнная константа связи g_s, вообще говоря, не обязана оставаться малой.

1.4 Неабелева Т-дуальность

Рассмотренные в предыдущей главе преобразования Т-дуальности являются симметриями суперструны на фоне тора $\mathbb{T}^d$, то есть, пространства с d коммутирующими векторами Киллинга. Естественно такую Т-дуальность называть абелевой и задаться вопросом о существовании обобщения на случай пространств с общим набором некоммутирующих изометрий. Симметрия функционала для струны на фоне группового многообразия относительно такой неабелевой Т-дуальности была обнаружена в работе [31], где была обобщена процедура добавления калибровочного поля с лагранжевым множителем, выступающим в роли дуальной координаты, описанная в Главе 1.2. В более поздних работах [32] и [33] были получены преобразования под действием неабелевой Т-дуальности для струны на фоне с ненулевыми RR полями и на фоне факторпространства группы по некоторой подгруппе.

Для простоты изложения рассмотрим (бозонную) струну на фоне десятимерного пространства-времени вида $M^{1,D-1} \times G$, где $M^{1,D-1}$ — некоторое D-мерное пространство, наделенное метрикой сигнатуры Минковского, а G — группа Ли размерности $d = 10 - D$. При этом будем считать, что RR поля все равны нулю. Тогда функционал действия для струны может быть записан в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
S &= \int dx^{\hat{\mu}}(G_{\hat{\mu}\hat{\nu}} * + B_{\hat{\mu}\hat{\nu}}) \wedge dx^{\hat{\nu}} \\
&= \int dx^{\mu}(G_{\mu\nu} * + B_{\mu\nu}) \wedge dx^{\nu} + 2dy^m(G_{m\nu} * + B_{m\nu}) \wedge dx^{\nu} \\
&\quad + dy^m(G_{mn} * + B_{mn}) \wedge dy^n.
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

Здесь $x^{\hat{\mu}}$, x^{μ} и y^m обозначают координаты на всем десятимерном пространстве, на пространстве $M^{1,n-1}$ и на групповом многообразии G соответственно. Звезда $*$ обозначает звезду Ходжа на двумерном мировом листе струны. Для произвольного элемента $g \in G$ элемент соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ может быть записан как:

$$\mathfrak{g} \ni g^{-1}dg = (g^{-1}dg)^I T_I = \sigma_m{}^I dy^m T_I, \tag{1.39}$$

где $\{T_I\} = \operatorname{bas}\mathfrak{g}$ — генераторы алгебры Ли, а $\sigma^I = \sigma_m{}^I dy^m$ — формы Маурера–Картана. Тогда метрику G_{mn} на групповом многообразии можно записать в следующем виде:

$$G_{mn} = \sigma_m{}^I \sigma_n{}^J G_{IJ}(x), \tag{1.40}$$

где формы σ^I зависят только от групповых координат y^m, а тензор G_{IJ} — только от внешних координат x^μ. В рассматриваемом случае модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена компоненты калибровочного поля B_{mn} можно записать в таком же виде:

$$B_{mn} = \sigma_m{}^I \sigma_n{}^J B_{IJ}(x). \tag{1.41}$$

Формы Маурера–Картана σ^I являются неабелевыми аналогами формы $d\theta$ для струны на фоне пространства с одним циклическим направлением. По аналогии с абелевым случаем, где вводилось калибровочное поле $d\theta \to A$, рассмотрим действие (1.38), в котором произведем замену $g^{-1}dg \to A^I T_I$ и добавим лагранжев множитель. Получим действие

$$\begin{aligned} S &= \int dx^{\hat\mu}(G_{\hat\mu\hat\nu} * + B_{\hat\mu\hat\nu}) \wedge dx^{\hat\nu} \\ &= \int dx^\mu (G_{\mu\nu} * + B_{\mu\nu}) \wedge dx^\nu + 2A^I (G_{I\nu} * + B_{I\nu}) \wedge dx^\nu \\ &\quad + A^I (G_{IJ} * + B_{IJ}) \wedge A^J + \tilde{y}_I F^I, \end{aligned} \tag{1.42}$$

где $F^I = 2dA^I + f_{JK}{}^I A^J \wedge A^K$, а $f_{IJ}{}^K$ обозначают структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Как и в абелевом случае, интегрируя лагранжев множитель, получаем условие $F^I = 0$ плоскостности связности A^I. Локально такое уравнение решается выбором $A^I = (g^{-1}dg)^I$, что приводит действие обратно к виду (1.38).

Действие для струны на дуальном фоне получается при интегрировании по степеням свободы A^I. Поскольку действие не содержит производных от калибровочного поля (с учетом интегрирования по частям в члене $\tilde{y}_I dA^I$) и является квадратичным по полю A^I, результатом интегрирования будут алгебраические условия, эквивалентные классическим уравнениям движения. Последние имеют следующий вид:

$$(G_{I\nu} * + B_{I\nu})dx^\nu + (G_{IJ} * + B_{IJ} + \tilde{y}_K f_{IJ}{}^K)A^J + d\tilde{y}_I = 0. \tag{1.43}$$

Действуя слева звездой Ходжа и используя свойство $**=1$ на 1-формах в двумерном пространстве-времени получим уравнения в эквивалентной форме:

$$(1\pm *)\Big[\big(G_{I\nu}\pm B_{I\nu}\big)dx^{\nu}+\big(G_{IJ}\pm B_{IJ}\pm \tilde{y}_K f_{IJ}{}^{K}\big)A^J\pm d\tilde{y}_I\Big]=0. \tag{1.44}$$

Отсюда легко получить решения для поля A^I в форме, удобной для подстановки в действие:

$$(1\pm *)A^J=-(1\pm *)N_{\pm}^{JI}\Big[\big(G_{I\nu}\pm B_{I\nu}\big)dx^{\nu}\pm d\tilde{y}_I\Big], \tag{1.45}$$

где $N_{\pm}^{IJ}$ обозначает матрицу, обратную матрице $N_{\pm IJ}=G_{IJ}\pm B_{IJ}\pm\tilde{y}_K f_{IJ}{}^{K}$, то есть $N_{\pm}^{KI}N_{\pm IJ}=\delta_J{}^K$. Перед непосредственной подстановкой в действие решений в таком виде, необходимо переписать действие в терминах переменных $A_{\pm}^I=(1\pm *)A^I$. Для этого заметим следующие тождества:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}A_-^I E_{I\mu}\wedge dx_+^{\mu}-\frac{1}{2}A_+^I E_{\mu I}\wedge dx_-^{\mu}&=2A^I(G_{I\mu}*+B_{I\mu})\wedge dx^{\mu},\\
\frac{1}{4}A_-^I N_{+IJ}\wedge A_+^J-\frac{1}{4}A_+^I N_{-IJ}\wedge A_-^J&=A^I\big(G_{IJ}*+B_{IJ}+\tilde{y}_K f_{IJ}{}^{K}\big)\wedge A^J,\\
\frac{1}{2}A_+^I\wedge d\tilde{y}_I^-+\frac{1}{2}A_-^I\wedge d\tilde{y}_I^+&=2d\tilde{y}_I\wedge A^I,
\end{aligned} \tag{1.46}$$

где введены обозначения $dx_{\pm}^{\mu}=(1\pm *)dx^{\mu}$, $d\tilde{y}_I^{\pm}=(1\pm *)d\tilde{y}_I$ для (анти)самодуальных компонент 1-форм и $E_{I\mu}=G_{I\mu}+B_{I\mu}, E_{\mu I}=G_{I\mu}-B_{I\mu}$ для фоновых полей. Тогда действие двумерной сигма-модели может быть переписано как:

$$\begin{aligned}
S=\int dx^{\mu}&(G_{\mu\nu}*+B_{\mu\nu})\wedge dx^{\nu}\\
&+\frac{1}{4}A_-^I N_{+IJ}\wedge A_+^J-\frac{1}{4}A_+^I N_{-IJ}\wedge A_-^J\\
&+\frac{1}{2}A_-^I(E_{I\mu}dx_+^{\mu}+dy_I^+)-\frac{1}{2}A_+^I(E_{\mu I}dx_-^{\mu}+dy_I^-).
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Подставляя вместо 1-форм $A_{\pm}^I$ решения (1.45) получим эквивалентную двумерную сигма модель:

$$\begin{aligned}
S=\int dx^{\mu}\wedge *dx^{\nu}&\Big(G_{\mu\nu}-E_{\mu I}N_+^{IJ}E_{J\nu}\Big)+dx^{\mu}\wedge dx^{\nu}\Big(B_{\mu\nu}-E_{\mu I}N_+^{IJ}E_{J\nu}\Big)\\
+d\tilde{y}_I\wedge *dx^{\mu}&\Big(N_+^{IJ}E_{J\mu}-N_+^{IJ}E_{\mu J}\Big)+d\tilde{y}_I\wedge dx^{\mu}\Big(N_+^{IJ}E_{J\mu}+N_+^{IJ}E_{\mu J}\Big)\\
+d\tilde{y}_I N_+^{IJ}&\wedge(1+*)d\tilde{y}_J.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Записанное в таком виде действие позволяет получить явные выражения для дуальных фоновых полей метрики и 2-формы:

$$\begin{aligned} G'_{\mu\nu} + B'_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} - E_{\mu I} N_+^{IJ} E_{J\nu}, \\ G'^I{}_\mu &= \frac{1}{2} N_+^{IJ} E_{J\mu} - \frac{1}{2} N_+^{IJ} E_{\mu J}, \\ B'^I{}_\mu &= \frac{1}{2} N_+^{IJ} E_{J\mu} + \frac{1}{2} N_+^{IJ} E_{\mu J}, \\ G'^{IJ} + B'^{IJ} &= N_+^{IJ}. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Как и в случае абелевой Т-дуальности комбинация $d = \varphi - 1/4 \log \det G$ является инвариантной относительно преобразования дуальности и позволяет восстановить поле дилатона для преобразованной фоновой конфигурации.

Здесь важно отметить следующее. Во-первых, поскольку дуальная координата $\tilde{y}_I$ естественным образом имеет нижний индекс, соответствующие компоненты метрики должны иметь верхний индекс. Поэтому, например, G'^{IJ} являются компонентами прямой, а не обратной метрики. Другими словами, инвариантный интервал должен быть записан следующим образом:

$$ds^2 = G'_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2G'^I{}_\mu d\tilde{y}_I dx^\mu + G'^{IJ} d\tilde{y}_I d\tilde{y}_J. \tag{1.50}$$

Во-вторых, напомним, что индекс I является алгебраическим, а не координатным, в том смысле, что он нумерует генераторы в алгебре Ли группы G. Компоненты метрики и 2-формы до дуализации выражались через G_{IJ}, B_{IJ} при помощи свертки с формами Маурера–Картана, тогда как в обобщенные правила Бушера входят не G_{mn}, B_{mn}, а G_{IJ}, B_{IJ}. В этом смысле более естественным было бы считать, что 1-формы $d\tilde{y}_I$ являются 1-формами неабелево Т-дуальными формам Маурера–Картана σ^I.

Симметрия струны относительно неабелевой Т-дуальности конечно не ограничивается NS-NS сектором. Преобразование полей R-R сектора было в явном виде предъявлено в работе [32]. Отметим также, что выше рассматривалась дуализация для теории на фоне группового многообразия G. Алгоритм для более общих преобразований для теории на фоне фактор-пространства группы G по некоторой ее подгруппе H был найден в работе [33].

Интересно отметить, что в работе [34] было явно показано, что обобщенные правила Бушера (1.49) являются O(d,d) преобразованием фоновых полей. Конкретнее, построим обобщенную метрику из «раздетых» полей G_{IJ}, B_{IJ}

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} G_{IJ} - B_{IP} g^{PQ} B_{QJ} & B_I{}^L \\ B_J{}^K & g^{KL} \end{bmatrix}. \tag{1.51}$$

Тогда преобразование компонент G_{IJ}, B_{IJ} при неабелевой Т-дуальности (1.49) эквивалентно следующей цепочке O(d,d) преобразований обобщенной метрики

$$\mathcal{H}' = T_1 \dots T_d \mathcal{O}^T_{\Delta B} \mathcal{H} \mathcal{O}_{\Delta B} T_1 \dots T_d. \tag{1.52}$$

Здесь $T_1, \dots, T_d$ — формальные абелевы Т-дуальности вдоль направлений, соответственно, $1,2,3,\dots,d$, а преобразование $\mathcal{O}_{\Delta B}$ представляет собой сдвиг B-поля:

$$\mathcal{O}_{\Delta B} = \begin{bmatrix} \delta_I{}^J & 0 \\ f_{IK}{}^P \tilde{y}_P & \delta_K{}^L \end{bmatrix}. \tag{1.53}$$

Для остальных компонент метрики и B-поля следует объединить $B_{\mu I}, G_{\mu J} G^{IJ}$ в один O(d,d) вектор, который преобразуется ковариантно. Такие конструкции будут обсуждаться более подробно в дальнейших главах, посвященных исключительной геометрии.

Рассмотрим в качестве примера модель с простой группой типа Бьянки II. Соответствующим решением уравнений супергравитации является метрика так называемой космологической модели типа Бьянки II, которая выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} ds^2 = ds_6^2 - {a_1}^2 {a_2}^2 {a_3}^2 (dx^0)^2 \\ + {a_1}^2 (\sigma^1)^2 + {a_2}^2 (\sigma^2)^2 + {a_3}^2 (\sigma^3)^2, \end{aligned} \tag{1.54}$$

где 1-формы σ^I и функции a_I определяются как

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= dy^1 - y^3 dy^2, & {a_1}^2 &= \frac{p_1}{\cosh(x^0)} \\ \sigma^2 &= dy^2, & {a_2}^2 &= \cosh(x^0) e^{x^0}, \\ \sigma^3 &= dy^3, & {a_3}^2 &= \cosh(x^0) e^{x^0}. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Заметим, что 1-формы зависят только от координат x^1, x^2, x^3 на групповом многообразии. Соответствующая алгебра задается структурными константами, определяемыми из уравнения Маурера–Картана:

$$d\sigma^a = f_{bc}{}^a \sigma^b \wedge \sigma^c, \quad f_{23}{}^1 = 1, \tag{1.56}$$

и обычно называется алгеброй Гейзенберга–Вейля. Таким образом для компонент G_{IJ} метрики мы получаем:

$$||G_{IJ}|| = \operatorname{diag}\left[-{a_1}^2 {a_2}^2 {a_3}^2, {a_1}^2, {a_2}^2, {a_3}^2, 1, \dots, 1\right]. \tag{1.57}$$

Поскольку временное направление x^0 не участвует в дуализации и метрика не имеет смешанных компонент G_{0I}, достаточно рассмотреть только 3×3 блок метрического тензора, соответствующий формам Маурера–Картана. Пользуясь обобщенными правилами Бушера (1.49), получим дуальное решение [35]:

$$\begin{aligned} ds'^2 &= ds_6^2 - {a_1}^2 {a_2}^2 {a_3}^3 (dx^0)^2, \\ &\quad + \frac{1}{{a_1}^2}(d\tilde{y}_1)^2 + \frac{{a_3}^2}{\Delta^2}(d\tilde{y}_2)^2 + \frac{{a_2}^2}{\Delta^2}(d\tilde{y}_3)^2 \\ B' &= -\frac{\tilde{y}_1}{\Delta^2} d\tilde{y}_2 \wedge d\tilde{y}_3, \\ \Delta^2 &= {a_2}^2 {a_3}^2 + \tilde{y}_1^2. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Преобразованный дилатон получается из инвариантного дилатона d следующим образом:

$$e^{-2\varphi}\sqrt{G} = e^{-2d} = e^{-2\varphi'}\sqrt{g'}, \tag{1.59}$$

где $G = \det||G_{IJ}||$ обозначает детерминант «раздетой» метрики. Явной подстановкой легко показать, что полученная полевая конфигурация решает уравнения супергравитации и, соответственно, является самосогласованным фоном для струны.

В отличие от начального решения, заданного метрикой на групповом многообразии Бьянки II, полученное после дуальности решение обладает довольно неочевидным набором изометрий. Это является следствием того факта, что, вообще говоря, неабелева Т-дуальность не сохраняет начальный набор изометрий решения, в отличие от абелевой Т-дуальности. Действительно, для любого заданного решения, обладающего U(1) изометрией, можно найти ему дуальное под действием обычной Т-дуальности, и вернуться обратно к начальному решению, подействовав дуальностью еще раз. Однако, получить из решения (1.58) обратно космологическую модель типа Бьянки II методом, описанным выше, не представляется возможным. Тем не менее, как будет показано ниже, информация о симметрии начального решения все же сохраняется в неабелево Т-дуальном решении в довольно неявном виде, позволяя обратить преобразование.

1.5 Пуассон-лиева Т-дуальность

В рассмотренном выше подходе к описанию Т-дуальности сигма-модели преобразование дуальности производится вдоль заданных изометрических направлений фонового пространства модели. Именно отсутствие таковых для неабелево Т-дуального фона и представляет трудность в определении обратного преобразования. В работе [36] было предложено понятие некоммутативного закона сохранения, когда действие сигма-модели является инвариантным относительно действия некоторой группы G, при этом закон сохранения нётеровских токов модифицируется и оказывается связан с некоторой алгебраической структурой.

1.5.1 Общий формализм

Рассмотрим действие двумерной сигма-модели в голоморфных координатах на мировом листе:

$$S = \int dz d\bar{z} \Big(G_{ij}(X) + B_{ij}(X) \Big) \partial X^i \bar{\partial} X^j. \tag{1.60}$$

Пусть определено свободное действие некоторой группы G на фоновом пространстве M, задаваемое N векторными полями $v_a = v^i{}_a \partial_i$:

$$\begin{aligned} & X^i \longrightarrow X^i + v^i(X), \\ & v^i = v^i{}_a(X) \varepsilon^a(z,\bar{z}). \end{aligned} \tag{1.61}$$

Здесь $\varepsilon^a(z,\bar{z})$ обозначают параметры преобразования, зависящие от точки на мировом листе струны. Изменение действия сигма-модели при таком преобразовании принимает следующий вид:

$$\delta S = S(X + \varepsilon^a v_a) - S(X) = \int dz d\bar{z} \varepsilon^a L_{v_a}(E_{ij}) \partial X^i \bar{\partial} X^j + \int d\varepsilon^a \wedge J_a, \tag{1.62}$$

где L_ξ обозначает производную Ли вдоль векторного поля ξ, поле $E_{ij} = G_{ij} + B_{ij}$, а токи J_a определены как следующие 1-формы:

$$J_a = v^i{}_a E_{ij} \bar{\partial} X^i d\bar{z} - v^a{}_a E_{ji} \partial x^j dz. \tag{1.63}$$

В обычном случае, когда группа G является группой изометрий фонового пространства сигма-модели, т.е. $L_{v_a}(E_{ij}) \equiv 0$, из инвариантности действия следует сохранение нётеровских токов $dJ_a = 0$. Альтернативно, можно потребовать инвариантности действия $\delta S = 0$ даже если производная Ли не равна нулю. Очевидно, существует множество способов связать $L_{v_a}E_{ij}$ и dJ_a так, чтобы действие оказалось инвариантным, однако, как было показано в [36] правильным будет руководствоваться алгебраическими соображениями. А именно, пусть 1-формы J_a удовлетворяют уравнениям типа Маурера–Картана для некоторой алгебры, задаваемой структурными константами $\tilde{f}_a{}^{bc}$

$$dJ_a = \frac{1}{2}\tilde{f}_a{}^{bc} J_b \wedge J_c. \tag{1.64}$$

Несложным вычислением показывается, что в таком случае $\delta S = 0$, если

$$L_{v_a}E_{ij} = \tilde{f}_a{}^{bc} v^k{}_b v^l{}_c E_{ki}E_{jl}. \tag{1.65}$$

Для полей G_{ij} и B_{ij} это требование сводится к следующим нетривиальным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} L_{v_a}G_{ij} &= 2\tilde{f}_a{}^{bc} v^k{}_b v^l{}_c G_{k(i}B_{j)l}, \\ L_{v_a}B_{ij} &= -\tilde{f}_a{}^{bc} v^k{}_b v^l{}_c \Big(G_{k(i}G_{j)l} + B_{k(i}B_{j)l}\Big). \end{aligned} \tag{1.66}$$

Учитывая алгебру векторных полей $L_{v_a}v_b = f_{ab}{}^c v_c$, дополнительно к тождествам Якоби для структурных констант $\tilde{f}_a{}^{bc}$ и $f_{ab}{}^c$ должны выполнятся следующие условия самосогласованности:

$$2f_{e[a}{}^c \tilde{f}_{b]}{}^{ed} - 2\tilde{f}_{[a}{}^{ce} f_{b]e}{}^d = f_{ab}{}^e \tilde{f}_e{}^{cd}. \tag{1.67}$$

Так определенную инвариантность действия относительно некоторой группы G предложено называть некоммутативным законом сохранения. Замечательным наблюдением работы [36] является эквивалентность условия самосогласованности, следующего из некоммутативного закона сохранения, и условий на структурные константы некоторой биалгебры Ли. Напомним, что биалгеброй Ли называется такое векторное пространство $\mathfrak{g}$, для которого

– определена скобка Ли
$$[\,,] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g};$$
– определена скобка Ли на дуальном пространстве
$$\delta^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*,$$

при этом дуальное отображение называется кокоммутатором:

$$\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g};$$

– выполняется условие самосогласованности:

$$\delta\big([X,Y]\big) = \big(\mathrm{ad}_X \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_X\big)\delta(Y) - X \leftrightarrow Y, \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Для заданного базиса $\{e_a\} = \mathrm{bas}\,\mathfrak{g}$ скобка Ли определяется структурными константами $[e_a,e_b] = f_{ab}{}^c e_c$, тогда как кокоммутатор определяется как $\delta(e_a) = \tilde{f}_a{}^{bc} e_b \wedge e_c$. Тогда условие самосогласованности структуры биалгебры принимает вид (1.67). Дополнительно определенная на биалгебре невырожденная квадратичная форма определяет структуру классического дубля Дринфельда. Конкретнее, под классическим дублем Дринфельда мы будем понимать тройку Манина $\mathcal{D} = (\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}, \eta)$, где $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\tilde{\mathfrak{g}}) = d$, а $\eta : \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \to \mathbb{F}$ — невырожденная квадратичная форма, принимающая значения в некотором поле $\mathbb{F}$ (обычно $\mathbb{R}$). В случае пуассон-лиевой T-дуальности естественным является выбор квадратичной формы, индуцирующей структуру $\mathrm{O}(d,d)$. Единственными ненулевыми компонентами такой формы будут

$$\eta(T_a,\tilde{T}^b) = \delta_a{}^b, \tag{1.68}$$

с очевидными обозначениями для генераторов алгебр $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Легко видеть, что условие (1.67) полностью симметрично относительно замены $f_{ab}{}^c$ на $\tilde{f}_a{}^{bc}$. Таким образом, если обозначить $\tilde{\mathfrak{g}}$ алгебру со структурными константами $\tilde{f}_a{}^{bc}$, можно ожидать, что существует некоторая дуальная сигма-модель, для которой группа Ли $\tilde{G} = \exp\tilde{\mathfrak{g}}$ играет ту же роль, что и $G = \exp\mathfrak{g}$ для изначальной сигма-модели. Другими словами, должно быть возможно найти такой дуальный фон $\tilde{E}_{ij} = \tilde{G}_{ij} + \tilde{B}_{ij}$ и определить на нем действие группы $\tilde{G}$, что

$$L_{\tilde{v}^a}\tilde{E}_{ij} = f_{bc}{}^a \tilde{v}^{kb}\tilde{v}^{lc}\tilde{E}_{ki}\tilde{E}_{jl}, \tag{1.69}$$

с соответствующим образом определенными векторными полями $\tilde{v}^{ma}$. Чтобы найти метрику и поле Калба–Рамона на дуальном фоновом пространстве, необходимо найти совместное решение уравнений (1.65) и (1.69), что очевидно является довольно непростой задачей.

В случае, когда действие группы G на фоновом пространстве транзитивно и свободно, то есть, фоновое пространство является групповым многообразием, найти дуальные поля позволяет концепция классического дубля

Дринфельда. Соответствующая процедура была впервые предложена в работе [36]. Рассмотрим группу D, соответствующую классическому дублю Дринфельда $\mathcal{D}$, а именно $T_eD \simeq \mathcal{D}$, где e — единица группы. Выберем в T_eD d-мерное подпространство $\mathcal{E}$, являющееся графом невырожденного линейного отображения $E : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$. Пусть группы G и $\tilde{G}$ соответствуют алгебрам $\mathfrak{g}$ и $\tilde{\mathfrak{g}}$. Поскольку группа D по построению в качестве подмножеств содержит группы G и $\tilde{G}$, подпространство $\mathcal{E}$ правым действием группы G может быть транслировано в произвольную точку $g \in G \subset D$. Поскольку мы имеем дело с биалгеброй $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}^*$, таким образом определенное отображение $E_g : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ задается матрицей $E_{ab}(g)$. По построению такая матрица решает уравнение (1.65). Эквивалентно, можно транслировать $\mathcal{E} = T_eD$ действием группы $\tilde{G}$, получая другую матрицу $\tilde{E}_{ab}(\tilde{g})$ в точке $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Такая матрица будет решать уравнение (1.69), задавая фон пуассон-лиево T-дуальной сигма-модели. В работе [36] показана эквивалентность сигма-моделей на так определенном фоне и его дуальном.

1.5.2 Геометрическая реализация и классификация дуальностей

Перейдем от общего алгебраического описания пуассон-лиевой T-дуальности двумерной сигма-модели к явным преобразованиям фоновых полей и покажем, при каких условиях такие преобразования воспроизводят рассмотренные ранее абелеву и неабелеву T-дуальности. Выберем базис для изотропных подалгебр классического дубля Дринфельда: $\{T_a\} = \operatorname{bas}\mathfrak{g}$, $\{\tilde{T}^a\} = \operatorname{bas}\tilde{\mathfrak{g}}$. Коммутационные соотношения биалгебры будут в этом базисе иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &[T_a,T_b] = f_{ab}{}^cT_c, \quad [T_a,\tilde{T}^b] = \tilde{f}_a{}^{bc}T_c - f_{ac}{}^b\tilde{T}^c, \\ &[\tilde{T}^a,\tilde{T}^b] = \tilde{f}_c{}^{ab}\tilde{T}^c. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Обозначим все множество генераторов $\{T_\mathcal{A}\} = \{T_a,\tilde{T}^a\} = \operatorname{bas}\mathcal{D}$, где $A = 1,\ldots,2d$. В этих обозначениях коммутационные соотношения алгебры $\mathcal{D}$ имеют обычный вид $[T_\mathcal{A},T_\mathcal{B}] = F_{\mathcal{AB}}{}^\mathcal{C}T_\mathcal{C}$, причем ненулевыми являются только компоненты $F_{ab}{}^c = f_{ab}{}^c$ и $F_c{}^{ab} = \tilde{f}_c{}^{ab}$. Согласованность квадратичной формы с так определенной скобкой на алгебре $\mathcal{D}$ требует $F_{\mathcal{ABC}} = F_{[\mathcal{ABC}]}$, где $F_{\mathcal{ABC}} = F_{\mathcal{AB}}{}^\mathcal{D}\eta_{\mathcal{DC}}$, а $\eta_{\mathcal{AB}} = \eta(T_\mathcal{A},T_\mathcal{B})$.

Геометрическая реализация классического дубля Дринфельда осуществляется следующим образом. Пусть выбрана некоторая максимальная изотропная подалгебра $\mathfrak{g} \subset \mathcal{D}$, то есть такая подалгебра максимальной размерности d, генераторы которой $\{T_a\}$ удовлетворяют соотношениям $\eta(T_a,T_b) = 0$. Построим групповой элемент $g = \exp(x^a T_a)$ и право-инвариантные 1-формы и дуальные им векторные поля:

$$r^a = dg\, g^{-1} = r^a{}_m dx^m, \quad e_a = e_a{}^m \partial_m, \quad r^a(e_b) = \delta^a_b. \tag{1.71}$$

Здесь и далее малые латинские буквы из середины алфавита $m,n,k,l,\dots = 1,\dots,d$ обозначают пространственные индексы тензоров на групповом многообразии. При этом малые латинские буквы из начала алфавита $a,b,c,d,\dots = 1,\dots,d$ нумеруют реперные векторы e_a. Действие элемента группы g на выбранное подпространство $\mathfrak{g}$ определяет его присоединенное действие на генераторы:

$$g^{-1} T_{\mathcal{A}} g = M_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}(x) T_{\mathcal{B}}. \tag{1.72}$$

Причем, матрица $M_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}(x)$, зависящая вообще говоря от групповой координаты, принадлежит группе $\mathrm{O}(d,d)$, и может быть параметризована следующим образом:

$$M_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}(x) = \begin{bmatrix} a_a{}^b(x) & 0 \\ -\pi^{ce}(x) a_a{}^b(x) & (a^{-1}(x))_d{}^c \end{bmatrix}. \tag{1.73}$$

Здесь $\pi^{ab}(x) = -\pi^{ba}(x)$ — некоторый бивектор, параметризующий преобразование. Заметим, что если $\pi^{ab} = 0$, матрица $M_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}$ задает $\mathrm{GL}(d)$ преобразование генераторов группы. В терминах структурных констант такая ситуация соответствует $\tilde{f}_a{}^{bc} = 0$.

С учетом дополнительного вклада от бивектора фоновые метрика и B-поле могут быть определены в терминах матрицы

$$E_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{M}}(x) = \begin{bmatrix} \delta_a{}^c & 0 \\ -\pi^{bc} & \delta_d{}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_c{}^m & 0 \\ 0 & r_n{}^d \end{bmatrix}, \tag{1.74}$$

где заглавные латинские буквы обозначают обобщенные индексы, объединяющие индекс вектора и формы. В этих обозначениях компоненты элемента $V = v^m \partial_m \oplus \tilde{v}_m dx^m \in T_g G \oplus T^*_g G$ будут записаны как $V^{\mathcal{M}} = (v^m, \tilde{v}_m)$. Замечательным свойством так определенной матрицы $E_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{M}}$, обычно называемой (обратным) обобщенным репером, является то, что набор $E_{\mathcal{A}}$ под действием производной Дорфмана замыкается буквально в алгебру $\mathcal{D}$. То есть

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{E_{\mathcal{A}}} E_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{M}} &= -F_{\mathcal{A}\mathcal{B}}{}^{C} E_{C}{}^{\mathcal{M}}, \\ \mathcal{L}_{V} W^{\mathcal{M}} &= \begin{bmatrix} L_v w^m \\ L_v \tilde{w}_m - \iota_w d\tilde{v}_m \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.75}$$

Здесь $\mathcal{L}_V W^{\mathcal{M}}$ обозначает производную Дорфмана некоторого $W = w^m \partial_m \oplus \tilde{w}_m dx^m$ вдоль V, а L_v обозначает обычную производную Ли. Чтобы восстановить метрику g_{mn} и поле B_{mn} необходимо свернуть обобщенный репер $E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}}$, определенный как матрица, обратная $E_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{M}}$, с некоторой «плоской» матрицей $\mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} E_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{B}} \mathcal{H}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$. При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} g_{ab} - B_{ae} g^{ef} B_{fb} & B_a{}^d \\ B_b{}^c & g^{cd} \end{bmatrix} = \mathrm{const}, \\ \mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}(x) &= \begin{bmatrix} g_{mn} - B_{mk} g^{kl} B_{ln} & B_m{}^q \\ B_n{}^p & g^{pq} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.76}$$

Преобразование Т-дуальности, соответствующее переходу к другой максимальной изотропной подалгебре $\mathfrak{g}' \subset \mathcal{D}$, в этих терминах может быть записано как преобразование генераторов

$$T'_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}} T_{\mathcal{B}} \tag{1.77}$$

некоторой матрицей $C \in \mathrm{O}(d,d)$. Построенные по новым генераторам обобщенные реперы $E'{}_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}}$ с соответствующим образом преобразованной плоской метрикой $\mathcal{H}'_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ будут определять дуальные фоновые метрику g'_{mn} и поле B'_{mn}. Легко видеть, что такое преобразование действительно переводит решения в решения. Покажем это на примере класса решений с тривиальными дилатоном и RR полями. В таком случае уравнения супергравитации могут быть записаны в так называемой флакс формулировке [37]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}}\, \mathcal{F}_{\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F}} \left(3\, \mathcal{H}^{\mathcal{A}\mathcal{D}}\, \eta^{\mathcal{B}\mathcal{E}}\, \eta^{\mathcal{C}\mathcal{F}} - \mathcal{H}^{\mathcal{A}\mathcal{D}}\, \mathcal{H}^{\mathcal{B}\mathcal{E}}\, \mathcal{H}^{\mathcal{C}\mathcal{F}}\right) = 0\,, \\ \left(\eta^{\mathcal{C}\mathcal{E}}\, \eta^{\mathcal{D}\mathcal{F}} - \mathcal{H}^{\mathcal{C}\mathcal{E}}\, \mathcal{H}^{\mathcal{D}\mathcal{F}}\right) \mathcal{H}^{\mathcal{G}[\mathcal{A}}\, \mathcal{F}_{\mathcal{C}\mathcal{D}}{}^{\mathcal{B}]}\, \mathcal{F}_{\mathcal{E}\mathcal{F}\mathcal{G}} = 0\,. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Видно, что уравнения являются полностью инвариантными относительно глобальных $\mathrm{O}(d,d)$ преобразований. Следовательно, стартуя с набора $\mathcal{H}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}}$, удовлетворяющему этим уравнениям, для любой матрицы $C_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}$ будем всегда получать решения этих уравнений.

Рассмотрим частные случаи описанного формализма и продемонстрируем абелеву и неабелеву Т-дуальность в рамках общей классификации возможных преобразований.

Абелева Т-дуальность.

Начнем с простейшего случая $F_{\mathcal{AB}}{}^{\mathcal{C}} = 0$, соответствующему простой симметрии $\mathrm{U}(1)^d$ сигма-модели с d сохраняющимися токами $dJ_a = 0$. Для репера и его обратного на группе получим $r_m{}^a = \delta_m{}^a$, $e_a{}^m = \delta_a{}^m$. Присоединенное действие будет тривиальным и задаваться единичной матрицей $M_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}} = \delta_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}$, что дает $\pi^{ab} = 0$. Таким образом, обобщенный репер $E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}}$ пропорционален единичной матрице, а $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}} = \mathrm{const}$. Для заданной максимальной изотропной подалгебры, натянутой на $\{T_a\}$, подходящим альтернативным выбором будет замена $T_{\hat{a}} \leftrightarrow \tilde{T}^{\hat{a}}$ для некоторого фиксированного направления $\hat{a}$. Другими словами, генератор $T_{\hat{a}}$ заменяется на ему дуальный в смысле квадратичной формы η. Матрица $C_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}$, осуществляющая такую замену, является матрицей факторизованной Т-дуальности вдоль направления $\hat{a}$. Фоновые поля в таком случае преобразуются согласно стандартным правилам Бушера.

Неабелева Т-дуальность.

Пусть теперь группа изометрии сигма-модели будет неабелевой, то есть $f_{ab}{}^c \neq 0$, $\tilde{f}_a{}^{bc} = 0$, что означает наличие d сохраняющихся токов $dJ_a = 0$. Легко видеть, что присоединенное действие G на $\mathcal{D}$ по-прежнему задается блочно-диагональной матрицей, однако, теперь не равной единичной матрице. Действительно из коммутационных соотношений

$$
\begin{aligned}
[T_a, T_b] &= f_{ab}{}^c T_c,\\
[T_a, \tilde{T}^b] &= -f_{ac}{}^b \tilde{T}_b,\\
[\tilde{T}_a, \tilde{T}_b] &= 0
\end{aligned}
\tag{1.79}
$$

видно, что алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $\tilde{\mathfrak{g}}$, как на пространстве представления. В самом общем случае, когда алгебра $\mathfrak{g}$ является полупростой, не очевидно, что факторизованные Т-дуальности будут сохранять структуру дринфельдовского дубля, а значит являться симметрией такой сигма-модели. Однако, есть выделенный элемент группы $\mathrm{O}(d,d)$, очевидно являющийся симметрией:

$$
C_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_a{}^b \\ \delta_a{}^b & 0 \end{bmatrix}.
\tag{1.80}
$$

Такая матрица меняет местами все генераторы T_a со всеми генераторами $\tilde{T}^a$, переводя тройку Манина $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}, \eta)$ в $(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \eta)$, очевидно отвечающую той же алгебре Дринфельда.

Построим дуальные метрику и поле Калба–Рамона. Определим $\tilde{g} = \exp(x_a \tilde{T}^a)$ и вычислим компоненты соответствующей 1-формы: $r' = d\tilde{g}\tilde{g}^{-1} = dx_a \tilde{T}^a$. Присоединенное действие группового элемента $\tilde{g}$ на $\mathcal{D}$ задается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} &\tilde{g}^{-1} T_a \tilde{g} = T_a - x_b f_{ac}{}^b \tilde{T}^c, \\ &\tilde{g}^{-1} \tilde{T}^a \tilde{g} = \tilde{T}^a. \end{aligned} \tag{1.81}$$

Здесь важно заметить, что поскольку $\tilde{T}^a$ имеет индекс наверху, а координата на групповом многообразии x_a — внизу, поле π_{ab} следует определять с нижними индексами. Получим $\pi_{ab} = -x_c f_{ab}{}^c$ и, соответственно, для (обратного) обобщенного репера

$$E'_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} \delta_a{}^m & 0 \\ x_c f_{mb}{}^c & \delta_m{}^a \end{bmatrix}, \tag{1.82}$$

где малые латинские буквы из середины и начала алфавита равнозначны. Наконец, запишем матрицу $\mathcal{H}'_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = E'_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} E'_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{B}} \mathcal{H}'_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = E'_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} E'_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{B}} C_{\mathcal{A}}{}^{C} C_{\mathcal{B}}{}^{D} \mathcal{H}_{CD}$. Репер $C_{\mathcal{M}}{}^{N} E'_{N}{}^{\mathcal{A}} C_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}$ имеет вид верхнетреугольной матрицы и является $\mathrm{O}(d,d)$ преобразованием, сдвигающем B-поле на $x_c f_{ab}{}^c$. Оставшиеся матрицы $C_{\mathcal{M}}{}^{N}$ осуществляют серию факторизованных T-дуальностей вдоль всех направлений, буквально воспроизводя формулу неабелевой T-дуальности (1.52).

Пуассон-лиева T-дуальность.

Пусть теперь $f_{ab}{}^c \neq 0$, $\tilde{f}_a{}^{bc} \neq 0$, то есть группа G представляет некоммутативную симметрию сигма-модели. Нётеровские токи не сохраняются в обычном смысле: $dJ_a \neq 0$. В таком случае дуальность, соответствующая замене тройки Манина $(\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}, \eta)$ на $(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, \eta)$ матрицей (1.80), обычно называется пуассон-лиевой T-дуальностью.

Пуассон-лиева T-плюральность.

Естественно ожидать существование других матриц $C_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{B}}$, кроме факторизованных T-дуальностей или матрицы типа (1.80). Действительно, в работе [38] на основе классификации Бьянки трехмерных алгебр Ли была построена классификация шестимерных классических дублей Дринфельда. Было обнаружено, что существуют классические дубли Дринфельда, разложимые в тройки Манина более, чем двумя способами. Это означает, что существуют сигма-модели, допускающие более двух эквивалентных описаний в терминах фоновых полей. В работе [39] получены преобразования фоновых полей при пуассон-лиевой Т-плюральности и предъявлены некоторые явные примеры.

Поясним, наконец, происхождение названия пуассон-лиевой Т-дуальности. Для этого следует заметить, что бивекторное поле

$$\pi \equiv \frac{1}{2!}\,\pi^{mn}\,\partial_m \wedge \partial_n \equiv \frac{1}{2!}\,\pi^{ab}\,e_a \wedge e_b\,, \tag{1.83}$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\pi^{qm}\,\partial_q\pi^{np} + \pi^{qn}\,\partial_q\pi^{pm} + \pi^{qp}\,\partial_q\pi^{mn} = 0\,, \\ &\mathcal{L}_{v_a}\pi^{mn} = f_a{}^{bc}\,v_b^m\,v_c^n\,, \end{aligned} \tag{1.84}$$

где $v_a^m = (a^{-1})_a{}^b\,e_b^m$ обозначает набор лево-инвариантных вектоных полей, удовлетворяющих $\mathcal{L}_{v_a}v_b = f_{ab}{}^c\,v_c^m$. Таким образом, бивектор π является пуассоновым и определяет дираковскую структуру на двойном касательном расслоении и, эквивалентно, скобку Пуассона на многообразии. Далее по аналогии будет определена намбу-лиева U-дуальность, естественным образом связанная с тривектором, определяющим скобку Намбу. Стоит отметить, что в литературе еще не сформировалось общепринятого именования для типов дуальностей, поэтому иногда пуассон-лиевой Т-дуальностью называется преобразование с произвольной матрицей C.

Глава 2. U-дуальность в супергравитации

2.1 БПС решения 11-мерной супергравитации

В работе [40] 1978 года при анализе алгебры суперсимметрии в высших размерностях было впервые показано, что супергравитация может существовать в размерности 11 и, более того, эта размерность является максимальной для суперсимметричной теории без высших спинов (говоря современным языком). В том же году в работе Креммера, Джулиа и Шерка [41] было получено действие для этой теории и преобразования суперсимметрии. Будучи максимальной суперсимметричной теорией, теория супергравитации в 11 измерениях со своего открытия считалась кандидатом на теорию, объединяющую все взаимодействия. Однако, удовлетворительной схемы размерной редукции не было найдено, и с открытием возбуждения спина 2 в спектре замкнутой струны и схемы проекции, устраняющей тахион (ГШО), фокус внимания был смещен в сторону двумерной сигма-модели. В 1980-е годы были открыты симметрии T-дуальности двумерной сигма-модели, описанные в предыдущей главе. Скрытые симметрии 11-мерной супергравитации, компактифицированной на 7-мерный тор, называемые сейчас симметриями Креммера–Джулиа, к тому времени были уже хорошо известны из работ 1978 года [42, 43]. В работе [44] 1992 года была показана связь между 11-мерной супергравитацией и действием супермембраны в формулировке Грина–Шварца. А именно, в работе показано, что требование каппа-симметричности действия для мембраны накладывает условия на фоновые суперполя, которые выполняются, если удовлетворяются суперсвязи для полей 11-мерной супергравитации. Таким образом, выполнение уравнений 11-мерной супергравитации для фоновых полей мембраны оказывается достаточным для каппа-симметричности.

Ранее в работе [45] 1987 года было показано, что размерная редукция действия для мембраны, намотанной на одно компактное измерение, воспроизводит в точности действие для фундаментальной струны. То есть, струна является некоторым частным случаем мембраны. Наконец, в 1994 году в работа Хала и Таунсенда [46] было показано, что симметрии T- и S-дуальности объединяются в более широкую группу симметрий, которую было предложено называть U-дуальностью (от слова unified). Соответствующие группы являются дискретными версиями групп симметрий Креммера–Джулиа. В 1995 году в работе [5] Виттен предложил именовать такую объединенную теорию M-теорией. Более подробно историческое развитие взглядов на M-теорию, 11-мерную супергравитацию и теорию струн описано в обзорах [47, 48, 49]. Соответствие симметрий дуальности, алгебры суперсимметрии, спектра решений и фундаментальных объектов и правила размерной редукции позволяют утверждать, что 11-мерная супергравитация является низкоэнергетическим описанием M-теории.

Максимальная 11-мерная супергравитация формулируется как локальная суперсимметричная теория, описывающая динамику метрики, гравитино и калибровочного поля, представленного 3-формой. Особый интерес представляют решения уравнений, сохраняющие половину суперсимметрий (16 суперзарядов), поскольку такие решения описывают фоновые поля, генерируемые отдельными фундаментальными объектами M-теории: M2, M5 бранами, KK монополем и т.д. Выпишем действие для бозонной полей 11-мерной супергравитации:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{16\pi G_N^{(11)}} \int d^{11}x\sqrt{|G|}\Big(R[G] - \frac{1}{2\cdot 4!}G_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\mu\nu\rho\sigma} \\ - \frac{1}{(144)^2}\varepsilon^{\mu_1\dots\mu_{11}}G_{\mu_1\dots\mu_4}G_{\mu_5\dots\mu_8}C_{\mu_9\mu_{10}\mu_{11}}\Big), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $G_{\mu\nu\rho\sigma} = 4\partial_{[\mu}C_{\nu\rho\sigma]}$, а $G_N^{(11)}$ обозначает гравитационную постоянную в 11 измерениях. Введем обозначение $e_\mu{}^a$ для репера, ψ_μ для гравитино и Γ^a для гамма-матриц в размерности 11 и выпишем преобразования суперсимметрии теории

$$: \quad \begin{aligned} \delta_\varepsilon e_\mu{}^a &= -\frac{i}{2}\varepsilon\Gamma^a\psi_\mu, \\ \delta_\varepsilon\psi_\mu &= 2\nabla_\mu[\tilde\omega]\varepsilon + \frac{i}{144}\Big(\Gamma^{\nu\rho\sigma\lambda}{}_\mu - \Gamma^{\rho\sigma\lambda}\delta_\mu{}^\nu\Big)G_{\nu\rho\sigma\lambda}\varepsilon, \\ \delta_\varepsilon C_{\mu\nu\rho} &= \frac{3}{2}\bar\varepsilon\Gamma_{[\mu\nu}\psi_{\rho]}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ковариантная производная $\nabla_\mu[\tilde\omega]$ определяется по отношению к спин-связности

$$\begin{aligned} \tilde\omega_\mu{}^{ab} &= \omega_\mu{}^{ab}(e) + K_\mu{}^{ab} - \frac{i}{16}\bar\psi_c\Gamma_e{}^{abcd}\psi_d e_\mu{}^e, \\ K_\mu{}^{ab} &= -\frac{i}{16}e_\mu{}^e\bar\psi_c\Big[-\Gamma_e{}^{abcd} - 4\delta_e{}^c\Gamma^{[a}\eta^{b]d} - 2\eta^{ac}\eta^{bd}\Gamma_e\Big]\psi_d, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где η_{ab} — 11-мерная метрика Минковского, $\psi_a = e_a{}^{\mu}\psi_{\mu}$, а $\omega_{\mu}{}^{ab}(e)$ — спин-связность Леви–Чивита.

Рассмотрим 1/2БПС решения уравнений супергравитации, соответствующие pp-волне, M2 и M5 бранам и монополю Калуцы–Клейна (КК6). Во всех этих случаях 11-мерное пространство-время разбивается на $p+1$-мерную часть вдоль направлений мирового объема и $10 - p$-мерную часть вдоль трансверсальных направлений. Из симметрийных соображений легко понять, что зависимости полей от координат вдоль мирового объема не будет. Зависимость от трансверсальных координат определяется гармонической функцией

$$H(r) = 1 + \frac{k}{r^{8-p}}, \tag{2.4}$$

где r — радиальное трансверсальное расстояние, а постоянная k зависит от массы объекта и ньютоновской константы и, вообще говоря, является квантованной. Решения уравнений супергравитации, соответствующие M2- и M5-бранам, представляются следующими полевыми конфигурациями:

$$\begin{aligned}
M2: \quad & ds^2_{11} = H^{-\frac{2}{3}} ds^2_{1,2} + H^{\frac{1}{3}} ds^2_8,\\
& dC_3 = \mathrm{Vol}(\Sigma_{1,2}) \wedge dH^{-1},\\
& H = 1 + \frac{l_p^6}{6(2\pi)^8\Omega_7}\frac{1}{r^6};\\
M5: \quad & ds^2_{11} = H^{-\frac{1}{3}} ds^2_{1,5} + H^{\frac{2}{3}} ds^2_5,\\
& dC_3 = *_5 dH,\\
& H = 1 + \frac{l_p^3}{6(2\pi)^8\Omega_4}\frac{1}{r^3}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\mathrm{Vol}(\Sigma_{1,2})$ обозначает форму объема мирового листа $\Sigma_{1,2}$ M2-браны, l_p обозначает планковскую длину, $*_5$ обозначает звезду Ходжа в трансверсальном к M5-бране пространстве, а Ω_n обозначает объем n-мерной единичной сферы.

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \tag{2.6}$$

Из приведенных выражений для тензора напряженности калибровочного поля видно, что M5-брана взаимодействует с 3-формой C_3 магнитно, тогда как M2-брана является электрически заряженной по этому полю. Решения M2- и M5-браны были получены в работе [50], их магнитные и электрические свойства и свойства более общего класса решений черных p-бран были проанализированы в [51].

Кроме конфигураций с ненулевым потоком тензора напряженности 3-формы уравнения 11-мерной супергравитации допускают чисто метрические решения: pp-волна и KK6-монополь (монополь Калуцы–Клейна) [52]. Соответствующие выражения для интервала имеют вид:

$$\begin{aligned}
pp: \quad & ds_{11}^2 = -dt^2 + d\rho^2 + (H-1)(dt+d\rho)^2 + ds_9^2 \\
& \quad H = 1 + \frac{k}{r^7}; \\
KK6: \quad & ds_{11}^2 = ds_{1,6}^2 + ds_{TN}^2 \\
& ds_{TN}^2 = H dy^i dy^i + H^{-1}(dz + A_i dy^i)^2, \quad i = 1,2,3, \\
& \mathrm{rot}\vec{A} = \mathrm{grad}H, \quad H = 1 + \frac{k}{|y|}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

KK6-монополь является аналогом монополя Калуцы–Клейна в пяти измерениях [53, 54]. Геометрия пространства трансверсального к KK6-монополю имеет вид четырехмерного гравитационного инстантона Taub–NUT. Асимптотически такое пространство имеет геометрию $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1$, где окружность параметризуется координатой z. Таким образом, о решении KK6-монополя имеет смысл говорить, лишь если одна из координат является компактной, откуда и название. Соответствующая фундаментальная 6-брана является магнитным партнером pp-волны (в KK-редуцированной теории).

Зная гравитационный фон, генерируемый фундаментальным объектом, можно вычислить натяжение, которое будет равно массе(энергии) единицы мирового объема в ADM формализме. Алгоритм вычисления ADM (псевдо)тензора энергии-импульса для асимптотически плоских гравитационных полей следующий [55]. Представим метрику в виде $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, где $h_{\mu\nu}$ — отличие (необязательно малое) полной метрики от плоского пространства с метрикой $\eta_{\mu\nu}$. Понятно, что $h_{\mu\nu} \to 0$ на бесконечности. Раскладывая кривизну Риччи по степеням $h_{\mu\nu}$, запишем уравнение Эйнштейна следующим образом:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R_{\rho\sigma}^{(1)}\eta^{\rho\sigma} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

где $R_{\mu\nu}^{(1)}$ обозначает вклады в тензор Риччи линейные по $h_{\mu\nu}$, а $T_{\mu\nu}$ — все оставшиеся после разложения члены. В таком виде левую часть уравнения, линейную по полю $h_{\mu\nu}$, можно рассматривать как кинетический вклад, а правую часть — как тензор энергии-импульса для поля. Таким образом, $T_{\mu\nu}$ принимается в качестве *определения* тензора энергии-импульса для решения $g_{\mu\nu}$.

Запишем в явном виде линейный тензор Риччи:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(2\partial_{\rho(\mu}h_{\nu)\sigma} - \partial_{\mu\nu}h_{\rho\sigma} - \partial_{\rho\sigma}h_{\mu\nu}\Big)\eta^{\rho\sigma}. \tag{2.9}$$

В приложении к вычислению натяжения экстремальных бран М-теории и теории струн нас интересуют решения в размерности $D = 10{,}11$ вида

$$ds^2_D = e^A ds^2_{d+1} + e^B ds^2_{D-d-1}, \tag{2.10}$$

где $d + 1$ обозначает размерность мирового объема браны, а A,B являются функциями радиальной координаты в трансверсальном пространстве. Эти функции, вообще говоря, всегда пропорциональны $\log H$, где H — гармоническая функция в размерности $D - d - 1$, причем

$$(d-1)A + (D-d-1)B = -\log H. \tag{2.11}$$

Тогда выражение для ADM массы, определяемой как обычно $M = \int_V T_{00}$, принимает вид

$$M = \frac{1}{2\kappa^2}\int_\Sigma \Big((d-1)\partial_i e^A + (D-d-1)\partial_i e^B\Big) d\Sigma^i. \tag{2.12}$$

Здесь V обозначает носитель функции H в трансверсальном пространстве, а $\Sigma = \partial V$ — его граница, обычно, расположенная на бесконечно удаленном радиусе. Используя свойство (2.11), получим окончательно

$$M = -\frac{1}{2\kappa^2}\int H^{-1}\partial_i H d\Sigma^i. \tag{2.13}$$

Используя соотношение между постоянной Ньютона в 11 измерениях и планковской длиной $\kappa^2 = l_p^9/2(2\pi)^8$ получим для масс M2- и M5-бран:

$$\mathcal{T}_2 = \frac{1}{l_p^3}, \quad \mathcal{T}_5 = \frac{1}{l_p^6}. \tag{2.14}$$

Вычисление масс, соответствующих решениям pp-волны и КК6-монополя, требует иного подхода. Действительно, пространство КК6-монополя не является асимптотически плоским, и определение массы через ADM формализм не подходит. Заметим однако, что состояния, соответствующие pp-волне на фоне пространства с одним компактным направлением и монополю являются магнитно-дуальными друг другу. Действительно, пусть импульс волны направлен вдоль компактного направления радиуса R, тогда компоненту метрики $g_{t\rho}$ можно рассматривать как электрический скалярный потенциал A_t компактифицированной теории. Находим, что он равен потенциалу точечного заряда в размерности девять:

$$A_t = g_{t\rho} = \frac{k}{r^7}. \tag{2.15}$$

Таким образом, взаимодействие pp-волны с гравифотоном является электрическим. Считая компактное направление ρ идентичным направлению z монопольного решения, получаем, что КК6 монополь взаимодействует с 9-мерным гравифотоном магнитным образом. Масса одного КК состояния в редуцированной теории обратно пропорциональна радиусу компактного измерения, поэтому для массы pp-волны (на фоне с компактным направлением) можем записать:

$$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{R}. \tag{2.16}$$

Массу состояния, соответствующего КК монополю вычислим, используя условие квантования Дирака для экстремальных состояний. Для электрического и магнитного зарядов e и g имеем $eg = 2\pi$. Для экстремальных состояний массы равны зарядам, поэтому $\mathcal{T}_{KK} = \mathcal{T}_0 e^{-2}$. Заряд e следует понимать, как постоянную взаимодействия в калибровочной теории, полученной КК редукцией из 11 измерений в 10. Оставляя подробное рассмотрение размерной редукции на тор, сфокусируемся на получении выражения для постоянной e. Стандартный анзац для размерной редукции имеет вид:

$$ds^2 = \Phi(x)^2(dz + A_i dx^i)^2 + ds^2_{1,9}, \tag{2.17}$$

где $\Phi(x)$ обозначает радиус компактного направления z, вообще говоря, зависящий от оставшихся координат. Скалярная кривизна Риччи принимает вид:

$$R_{11} = R_{10} + \Phi^{-2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2}\Phi^2 F^2, \tag{2.18}$$

где $F_{ij} = 2\partial_{[i}A_{j]}$. Тогда часть Эйнштейна-Гильберта действия 11-мерной супергравитации принимает вид:

$$S_{11} = \frac{1}{l_p^9}\int d^{10}x\sqrt{|g_{10}|}\,\Phi\Big(R_{10} + \frac{1}{2}\Phi^2F^2 + \Phi^{-2}(\nabla\Phi)^2\Big). \tag{2.19}$$

Фиксируя радиус $\Phi(x) = R$ получаем $e^{-2} = R^3/l_p^9$. Окончательно для массы состояния КК6 имеем:

$$\mathcal{T}_{KK} = \frac{R^2}{l_p^9}. \tag{2.20}$$

2.2 Потенциалы и центральные заряды

2.2.1 М-теория

Поскольку 11-мерная супергравитация является низкоэнергетическим описанием динамики М-теории и обладает тем же набором суперсимметрий, 1/2БПС решения соответствуют фундаментальным объектам М-теории и, соответственно, теории струн типа IIA после размерной редукции. Полное действие таких объектов включает в себя кинетическую часть, имеющую вид действия Дирака–Борна–Инфельда (DBI), и топологическую часть, описывающую минимальное взаимодействие с фоновыми калибровочными потенциалами (действие Весса–Зумино). Подробно действия для фундаментальных объектов теории струн будут обсуждаться в Главе 5, сейчас же обратим внимание на топологическое действие, которое для p-браны имеет следующий схематический вид:

$$S^p_{WZ} = T_p \int_{\Sigma_{p+1}} C_{(p+1)} + \dots . \tag{2.21}$$

Здесь Σ_{p+1} обозначает p+1-мерный мировой объем объекта, p+1-форма $C_{(p+1)}$ на является индуцированной на мировом объеме NS-NS или R-R формой, заданной в объемлющем пространстве. Так, фундаментальная струна взаимодействует с 2-формой Калба–Рамона $B_{(2)}$, а фундаментальная М2-брана — с 3-формой $C_{(3)}$ 11-мерной супергравитации. В работе [56] было показано, что добавление топологического члена к действию p-мерного объекта в формализме Грина–Шварца изменяет супералгебру сохраняющихся токов. Сохраняющийся ток

$$j^{a,\mu_1\dots\mu_p} = \varepsilon^{a_1\dots a_p}\partial_{a_1}X^{\mu_1}\dots\partial_{a_p}X^{\mu_p} \tag{2.22}$$

определяет ненулевой заряд $T^{\mu_1\dots\mu_p} = \int d^p\sigma j^{0\mu_1\dots\mu_p}$, где индексы $a,b = 0,\dots,p$ нумеруют направления на мировом объеме, а индексы $\mu,\nu = 0,\dots,D$ — направления в D-мерном объемлющем пространстве. В деформированной супералгебре так определенный заряд играет роль центрального заряда, появляясь в правой части антикоммутационных соотношений для суперзарядов Q.

Рассмотрим алгебру суперсимметрии $\mathcal{N} = 1, D = 11$ и запишем (анти)коммутационные соотношения для суперзарядов со всеми возможными центральными зарядами:

$$\begin{aligned} &\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} Z_\mu + \frac{1}{2}(C\Gamma_{\mu_1\mu_2})_{\alpha\beta} Z^{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{5!}(C\Gamma_{\mu_1\ldots\mu_5})_{\alpha\beta} Z^{\mu_1\ldots\mu_5}, \\ &[Q_\alpha, Z^{\mu\ldots}] = 0, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где обозначение $P_\mu = Z_\mu$ было введено для однородности обозначений. Соответствие между центральными зарядами и фундаментальными объектами М-теории строится следующим образом:. Рассмотрим для примера М2 брану и пространственные компоненты Z^{mn}, вычисляемые как интеграл по нетривиальному 2-циклу, занимаемому браной:

$$Z^{mn} = Q_2 \int d^2\sigma j^{0,mn} = Q_2 \int_{\Sigma_2} dX^m \wedge dX^n, \tag{2.24}$$

где Q_2 — заряд браны. Соответствующий потенциал представлен компонентами C_{0mn} 3-формы в объемлющем пространстве. Рассуждая схожим образом, получим потенциал C_{0mnklp} для компонент Z^{mnklp} центрального заряда. Потенциал, заданный компонентами 6-формы, минимально взаимодействует с М5-бране, являющейся магнитным монополем для М2-браны. Действительно, пусть $F_{(7)} = *F_{(4)}$, где $F_{(4)} = dC_{(3)}$ — тензор напряженности потенциала 3-формы. Тогда можно показать, что уравнения на 3-форму 11-мерной супергравитации могут быть записаны в виде тождеств Бьянки $d(F_{(7)} + \ldots) = 0$, где точки обозначают члены, нелинейные по потенциалу. Отсюда следует, что, по-крайней мере локально, можно определить магнитный потенциал $C_{(6)}$ как $dC_{(6)} = F_{(7)} + \ldots$ Пятимерная мембрана электрически заряжена по магнитному потенциалу.

Рассмотрим теперь компоненту Z^{0mnkl}, которая пропорциональна интегралу по 6-циклу, занимаемому шестимерным объектом:

$$Z^{0m_1\ldots m_4} = Q_K \varepsilon^{m_1\ldots m_4 0 n_1\ldots n_6} \int dX^{n_1} \wedge \cdots \wedge dX^{n_6}. \tag{2.25}$$

Следуя [56], здесь предполагаем объемлющее пространство топологии плоского тора. Данный объект оказывается КК6-монополем, фоновое пространство которого предъявлено в предыдущей главе. Зная, что КК6-монополь является магнитным партнером гравитона на пространстве-времени с одним компактным направлением, найдем соответствующий электрический потенциал. Для линейных возбуждений роль тензора напряженности играют коэффициенты неголономности связности, определяемые через реперы $e_\mu{}^{\bar\mu}$ следующим образом:

$$f_{\mu\nu}{}^{\rho} = 2e_{\bar\rho}{}^{\rho}\partial_{[\mu}e_{\nu]}{}^{\bar\rho}, \tag{2.26}$$

где индексы с чертой обозначают локальные индексы. Прямым вычислением можно показать, что для КК6 монополя только компоненты $f_{\hat\mu\hat\nu}{}^{z} \neq 0$, где z обозначает координату вдоль компактного направления, а $\hat\mu$ принимают все значения, кроме z. Линеаризованные уравнения супергравитации таковы, что для КК6-монополя можно определить магнитный потенциал стандартным способом:

$$f_{\hat\mu_1\ldots\hat\mu_8 z}{}^{z} = 8\partial_{[\hat\mu_1}A_{\hat\mu_2\ldots\hat\mu_8]z}{}^{z}. \tag{2.27}$$

Так определенный магнитный потенциал решает задачу описания дуального гравитона на линейном уровне, по видимому, впервые поставленную в работе [57]. На более ковариантном языке магнитное взаимодействие калуца–клейновского монополя с дуальным гравитоном удобно описывать потенциалом смешанной симметрии $A_{\mu_1\ldots\mu_8,\nu}$. При этом КК6-монополь взаимодействует только с компонентами потенциала, у которых один из индексов μ_i принимает то же значение, что и ν. Более подробно действие для КК5-монополя теории струн типа IIA и его партнеров относительно T-дуальности будет описано в Главе 5.

Таблица 1 — Соответствие между компонентами центральных зарядов, калибровочными потенциалами и бранами в $D = 11$

Z_0	Z_m	Z^{mn}	Z^{mnklp}	Z^{0m}	Z^{0mnkl}
g_{00} масса	g_{0m} импульс	C_{0mn} M2	C_{0mnklp} M5	нет 9-брана	$A_{0m_1\ldots m_7,n}$ КК6

Компонента Z^0 соответствует пределу Богомольного массы 1/2БПС состояния, а компоненты Z^m — импульсу. Наконец, компоненты Z^{0m} формально соответствуют 9-бране, которая не является динамической и не взаимодействует с калибровочными потенциалами. Однако, такие браны играют существенную роль в моделях компактификаций М-теории, представляя границу пространства [58]. Резюмируем соответствие между компонентами центральных зарядов, калибровочными потенциалами и бранами в Таблице 1.

2.2.2 Теория струн типа IIA

Пертурбативная теория струн типа IIA получается размерной редукцией М-теории на окружность радиуса R_s, который связан со струнной константой связи g_s, натяжением α' и планковской длиной l_p следующими соотношениями:

$$\frac{R_s}{l_p} = g_s{}^{\frac{2}{3}}, \quad l_p^3 = g_s l_s^3, \quad \alpha' = \frac{1}{l_s^2}. \tag{2.28}$$

При этом в зависимости от ориентации относительно компактного направления, решение M2 браны уравнений 11-мерной супергравитации редуцируется в решение фундаментальной струны или D2-браны уравнений 10-мерной супергравитации типа IIA. Соответственно, решение M5-браны редуцируется в решение NS5-браны или D4-браны, а KK6-монополь — в KK5-монополь или D6-брану. Более того, в работах [45, 59] было показано, что действия для фундаментальной струны и для D-бран воспроизводятся из действия для M2-браны при размерной редукции. То же соответствие можно наблюдать в спектре 1/2БПС состояний. Рассмотрим $\mathcal{N} = (1{,}1)$, $D = 10$ супералгебру с центральными зарядами, добавленными по тому же принципу, что и в предыдущем разделе:

$$\begin{aligned}\{Q_\alpha, Q_\beta\} = (C\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}P_\mu + (C\Gamma_s)_{\alpha\beta}Z + \frac{1}{2}(C\Gamma_s\Gamma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}Z^{\mu\nu}\\ + (C\Gamma_s\Gamma_\mu)_{\alpha\beta}Z^\mu + \frac{1}{4!}(C\Gamma_s\Gamma_{\mu\nu\rho\sigma})_{\alpha\beta}Z^{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{5!}(C\Gamma_s\Gamma_{\mu\nu\rho\sigma\tau})_{\alpha\beta}Z^{\mu\nu\rho\sigma\tau},\end{aligned} \tag{2.29}$$

где греческие индексы $\mu,\nu,\dots = 0,\dots,9$ нумеруют направления в 10-мерном пространстве-времени, а $\Gamma_s = \Gamma_0\dots\Gamma_9$ обозначает оператор киральности. Импульс P^μ и центральные заряды $Z, Z^\mu, Z^{\mu\nu}, Z^{\mu_1\dots\mu_4}, Z^{\mu_1\dots\mu_5}$ очевидным образом связаны с импульсом и центральными зарядами 11-мерной супералгебры с дополнительным соотношением $P^* = Z$, где $*$ — компактное направление.

Таблица 2 — Соответствие между компонентами центральных зарядов, калибровочными потенциалами и бранами в $D = 10$

Z	Z^0	Z^m	Z^{0m}	Z^{mn}	Z^{0mnk}	Z^{mnkl}	Z^{0mnkl}	Z^{mnklp}
C_0 D0	нет 9-брана	B_{0m} F1	нет D8	C_{0mn} D2	$C_{0mnklpq}$ D6	C_{0mnkl} D4	$A_{0mnklpq,q}$ KK5	D_{0mnklp} NS5

При так называемой двойной размерной редукции, когда компактное направление расположено вдоль мирового объема p-браны, размерность объекта понижается, и масса $\mathcal{T}_{p-1}$ полученной $p-1$-браны связана с массой $\mathcal{T}_p$ начальной браны соотношением

$$\mathcal{T}_{p-1} = R_s \mathcal{T}_p. \tag{2.30}$$

Дополнительный фактор R_s возникает из интегрирования вдоль компактного направления в определении ADM массы. Такая редукция также называется диагональной, а полученные состояния принято называть намотанными или продольными бранами.

Наивно можно было бы считать, что это единственный способ расположения браны в пространстве с компактным изометрическим направлением, поскольку в трансверсальном к бране направлении нет подобных изометрий. Однако, можно рассмотреть т.н. размазанные решения, соответствующие стопке бран, выстроенных вдоль некоторого направления. Очевидно, это направление будет изометрическим, а степень зависимости от радиуса в гармонической функции изменится на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\left(z^2+\rho^2\right)^{\frac{8-p}{2}}} \sim \frac{1}{\rho^{7-p}}. \tag{2.31}$$

Таким образом, натяжение результирующей браны остается таким же, как и у начальной. Такая процедура обычно называется прямой или вертикальной редукцией, а соответствующие состояния — ненамотанными или трансверсальными бранами. В Таблице 2 показано соответствие между центральными зарядами суперbegin алгебры типа IIA в размерности 10, калибровочными потенциалами 10-мерной супергравитации типа IIA и бранами, полученными описанными выше редукциями из мембран и монополя M-теории.

В Таблице 3 перечислены состояния, возникающие из диагональной и поперечной редукции M2, M5 бран, монополя KK6 и KK мод импульса. Причем, в случае KK6-монополя есть три возможных способа редукции, в зависимости от направления компактного измерения: вдоль браны, поперек браны и вдоль специального Taub-NUT-цикла. В первом и в последнем случае получаются стандартные KK5-монополь и D6-брана теории струн соответственно. Тогда как поперечная редукция дает новый тип браны, который, следуя [60], обозначим 6^1_3. В этом обозначении цифра 6 показывает число направлений мирового объема, верхний индекс 1 показывает количество специальных циклов,

Таблица 3 — КК-редукция мембран и монополя М-теории в браны и монополь теории струн типа IIA (см. пояснения в тексте)

М-теория	масса (натяжение)	Типа IIA
продольная M2	$\mathcal{T}_1 = \frac{R_s}{l_p^3} = \frac{1}{l_s^2}$	F1-струна
поперечная M2	$\mathcal{T}_2 = \frac{1}{l_p^3} = \frac{1}{g_s l_s^3}$	D2-брана
продольная M5	$\mathcal{T}_4 = \frac{R_s}{l_p^6} = \frac{1}{g_s l_s^5}$	D4-брана
поперечная M5	$\mathcal{T}_5 = \frac{1}{l_p^6} = \frac{1}{g_s^2 l_s^6}$	NS5-брана
продольная КК мода	$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{R_s} = \frac{1}{g_s l_s}$	D0-брана
поперечная КК мода	$\mathcal{T}_0 = \frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_m}$	КК-мода
продольный КК6	$\mathcal{T}_{KK} = \frac{R_s R_{TN}^2}{l_p^9} = \frac{R_{TN}^2}{g_s^2 l_s^8}$	КК5
КК6-монополь с $R_s = R_{TN}$	$\mathcal{T}_6 = \frac{R_s^2}{l_p^9} = \frac{1}{g_s l_s^7}$	D6-брана
поперечный КК6	$\mathcal{T}_6 = \frac{R_{TN}^2}{l_p^9} = \frac{R_{TN}^2}{g_s^3 l_s^9}$	6_3^1-брана

а нижний индекс 3 показывает степень константы g_s в знаменателе выражения для массы. Здесь следует отметить, что все состояния в таблице выше можно разделить на классы, в зависимости от степени g_s в знаменателе. Таким образом мы имеем для степени $\alpha = 0$ браны, включающие фундаментальную струну и КК моды; $\alpha = 1$ браны, включающие все Дирихле браны D0, D2, D4, D6; $\alpha = 2$ браны, включающие NS5-брану и КК5-монополь; и одну $\alpha = 3$ брану, обозначенную 6_3^1. Такая классификация удобна тем, что преобразование Т-дуальности, будучи пертурбативной симметрией, не меняет зависимости массы состояния от g_s. Поэтому состояния, принадлежащие орбите Т-дуальности, будут иметь одинаковую степень g_s. Напротив, S-дуальность меняет $g_s \to 1/g_s$, связывая браны разных классов.

2.3 Т-дуальность

Рассмотрим действие преобразований Т-дуальности на 1/2БПС состояния, соответствующие бранам теории струн, как описано в предыдущей главе. Для этого из всей группы $\mathrm{O}(d,d;\mathbb{Z})$ выделим только преобразования определенного класса, а именно вейлевские отражения и борелевские генераторы алгебры. Группа Вейля для некоторой алгебры $\mathfrak{g}$ определяется как группа симметрий корневой системы алгебры $\mathfrak{g}$, и позволяет восстановить все корни по простым корням. Борелевская подалгебра содержит элементы алгебры, соответствующие неотрицательным корням алгебры, и может быть определена как подалгебра, стабилизирующая старший вес представления. В терминах действия на метрику и B-поле определим вейлевские преобразования как сохраняющие конфигурацию

$$g_{ij} = R_i^2 \delta_{ij}, \quad B_{ij} = 0. \tag{2.32}$$

Другими словами, вейлевские элементы ортогональной группы переводят плоский тор в плоский тор и не генерируют ненулевое B-поле. Среди всех элементов вейлевской группы выделим отдельно элементы $S_{ij} : R_i \leftrightarrow R_j$, принадлежащие модулярной группе тора $SL(d,\mathbb{Z})$, и элементы $T_{ij} : (R_i,R_j) \to (\alpha'/R_j,\alpha'/R_i)$. Среди всех таких элементов можно выбрать минимальное множество, которое генерирует все вейлевские отражения:

$$\begin{aligned} &S_i : R_i \leftrightarrow R_{i+1}, \quad i = 1,\ldots,d-1, \\ &T : (g_s,R_1,R_2) \to \left(\frac{g_s}{R_1R_2},\frac{\alpha'}{R_2},\frac{\alpha'}{R_1}\right). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Таким образом видим, что вейлевская группа $\mathcal{W}(\mathrm{SO}(d,d;\mathbb{Z}))$ для группы $\mathrm{SO}(d,d;\mathbb{Z})$ генерируется преобразованием T-дуальности $\mathbb{Z}_2$ и группой перестановок $\mathcal{S}_d$ d-мерного тора:

$$\mathcal{W}(\mathrm{SO}(d,d;\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathcal{S}_d. \tag{2.34}$$

Покажем, что так определенные преобразования действительно являются отражениями корней алгебры $\mathfrak{so}(d,d)$. Простые корни $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1}$ алгебры типа D_d удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 = \alpha_0^2 = 2, \\ (\alpha_i \cdot \alpha_{i+1}) = (\alpha_2 \cdot \alpha_0) = -1. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Соответствующая диаграмма Дынкина представлена на Рис. 2.1. В этих обозначениях действие элементов группы Вейля на вес λ соответствует отражению в плоскости, перпендикулярной некоторому простому корню α:

$$\lambda \to \lambda - 2\frac{(\alpha \cdot \lambda)}{\alpha^2}\alpha. \tag{2.36}$$

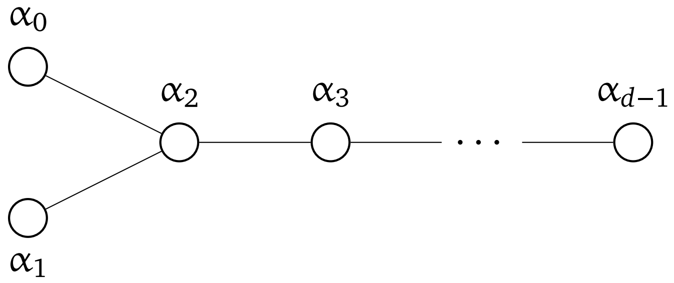

Рисунок 2.1 — Диаграмма Дынкина алгебры $\mathfrak{so}(d,d)$ с обозначениями для простых корней.

Удобно представить простые корни $\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1}$ в виде следующих комбинаций d векторов $e_1, \ldots, e_d$ образующих ортонормированную систему:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= e_{i+1} - e_i, \\ \alpha_0 &= e_1 + e_2. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Включая струнную константу связи g_s в набор параметров, определяющих 1/2БПС состояние, рассмотрим вектор φ с компонентами

$$\varphi = (\ln g_s, \ln R_1, \ldots, \ln R_d), \tag{2.38}$$

принадлежащий некоторому векторному пространству V размерности $d+1$. Пусть базис в пространстве V задан d векторами $\{e_i\}$ и вектором e_0, определенном следующими соотношениями:

$$e_0^2 = -1, \quad (e_0 \cdot e_i) = \frac{1}{2}. \tag{2.39}$$

Тогда натяжение для любого 1/2БПС объекта теории струн можно представить в виде:

$$\mathcal{T} = e^{(\varphi \cdot \lambda)} = g_s^{x^0} R_1^{x^1} \cdots R_d^{x^d}. \tag{2.40}$$

Таким образом, вектор $\lambda = x^0 e_0 + x^1 e_1 + \cdots + x^d e_d$ можно понимать, как вектор, параметризующий состояние в БПС спектре с массой $\mathcal{T}$. Действие операторов S_i и T, определенных выше, на такой вектор λ при неизменном векторе φ оказывается следующим:

$$\begin{aligned} S_i &: \lambda = \cdots + x^i e_i + x^{i+1} e_{i+1} + \cdots \to \cdots + x^{i+1} e_i + x^i e_{i+1} + \cdots, \\ T &: \lambda = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^1 e_2 + \cdots \to x^0 e_0 - (x^2 + x^0) e_1 - (x^1 + x^0) e_2 + \cdots. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Записывая действие операторов S_i и T в матричном виде

$$S_i = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & & i & i+1 & & & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right] \end{array}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ -1 & 0 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.42}$$

легко видеть, что они представляют ортогональные преобразования в пространстве, наделенном метрикой

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + dx^i dx^i - dx^0(dx^1 + \cdots + dx^d). \tag{2.43}$$

Именно такая метрика индуцируется в пространстве V базисом $\{e_0, e_i\}$. Наконец, в терминах простых корней $\{\alpha_0, \alpha_i\}$ преобразования (2.41) можно переписать в виде вейлевских отражений:

$$\begin{aligned} S_i : \lambda &\to \lambda - 2\frac{(\alpha_i, \lambda)}{\alpha_i^2}\alpha_i, \\ T : \lambda &\to \lambda - 2\frac{(\alpha_0, \lambda)}{\alpha_0^2}\alpha_0. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Здесь следует отметить, что во-первых, λ является вектором в $d+1$–мерном пространстве V, во-вторых, метрика на этом пространстве является знакопеременной. Это видимое несоответствие определению группы Вейля несложно устранить, заметив, что преобразования S_i и T оставляют инвариантной гравитационную постоянную, пропорциональную $g_s^{-2} R_1 \cdots R_d$. В таком случае все отражения ограничены гиперплоскостью, ортогональной вектору

$$\delta = e_1 + \cdots + e_d - 2e_0. \tag{2.45}$$

Действительно, при отражениях в плоскостях, перпендикулярных $\{\alpha_0, \alpha_i\}$ вектор δ не меняется, поскольку все простые корни ему ортогональны. В итоге, ограничение операторов S_i и T на векторы, удовлетворяющие условию $(\delta \cdot \lambda) = x^0 = 0$ воспроизводит буквально группу Вейля группы $\mathrm{SO}(d, d; \mathbb{Z})$.

Установленное соответствие между 1/2БПС состояниями и весами в пространстве представления алгебры $\mathfrak{so}(d,d)$ позволяет применить методы теории представлений к изучению орбит группы T-дуальности. В качестве представителя орбиты удобно выбрать старший вес, понижая который вейлевскими и борелевскими генераторами можно получить всю орбиту. Следует отметить, что, поскольку отражения Вейля сохраняют длину вектора, генераторы борелевского типа должны быть с необходимостью включены, чтобы получить всю орбиту. Поскольку все веса представления можно получить как целочисленные комбинации фундаментальных весов $\lambda^{(i)}$, определенных как векторы на решетке весов, дуальные простым корням $(\lambda^{(i)} \cdot \alpha_j) = -\delta^i{}_j$, достаточно рассмотреть только их. В терминах базиса $\{e_0,e_i\}$ имеем:

$$\begin{aligned}
\lambda^{(0)} &= -e_0, \quad M_D = \frac{1}{g_s}, \\
\lambda^{(1)} &= e_1 - e_0, \quad M_{wD} = \frac{R_1}{g_s}, \\
\lambda^{(2)} &= e_1 + e_2 - 2e_0, \quad M_{wwNS} = \frac{R_1 R_2}{g_s^2}, \\
&\vdots \\
\lambda^{(d-2)} &= e_1 + e_2 \ldots e_{d-2} - 2e_0, \quad M_{w\ldots wNS} = \frac{R_1 \ldots R_{d-2}}{g_s^2}, \\
\lambda^{(d-1)} &= e_1 + e_2 \ldots e_{d-1} - e_0 = (\delta) - e_d, \quad M_{wF} = \frac{1}{R_d},
\end{aligned} \tag{2.46}$$

где буквами D,NS и F обозначены соответственно Дирихле браны, NS5-брана и фундаментальная струна. Буква w перед обозначением объекта обозначает намотанность. Обозначение wF подчеркивает, что калуца–клейновские состояния принадлежат той же орбите, что и намотанная струна. На уровне решений уравнений супергравитации в этом можно убедиться, проверив T-дуальность между намотанной струной и pp-волной.

Продемонстрируем описание орбиты NS5-браны, полностью намотанной на тор, в терминах действия отражений Вейля на соответствующий фундаментальный вес

$$\lambda^{5^0_2} = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - 2e_0, \quad M_{5^0_2} = \frac{R_1 \ldots R_5}{g_s^2}. \tag{2.47}$$

Здесь вместо громоздкого обозначения $wwwwwNS5$ использовано 5^0_2, показывающее, что брана имеет 5 намотанных направлений и зависит от g_s^{-1} в степени 2. Очевидно, что преобразование T не меняет выбранный вес, что соответствует T-дуальности вдоль продольных направлений NS5-браны. При этом преобразование T_{56} переводит состояние $M_{5^0_2}$ в

$$M_{5^1_2} = \frac{R_1R_2R_3R_4R_6R_5^2}{g_s^2}, \tag{2.48}$$

соответствующее KK5-монополю, намотанному на направления 1,2,3,4,6 и специальным Taub-NUT циклом вдоль направления 5. Такое преобразование может быть представлено как последовательные отражения в плоскостях, перпендикулярных векторам α, α_0 и β, где

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = e_6 - e_2, \\ \beta &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = e_5 - e_1. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Первое преобразование соответствует перестановке радиусов R_2 и R_6, второе преобразование является просто T-дуальностью T, третье — переставляет радиусы R_1 и R_5. Таким образом имеем:

$$\lambda_{5^1_2} = \lambda_{5^0_2} + \beta + \alpha_0 + \alpha. \tag{2.50}$$

Следующий элемент орбиты, можно получить при помощи T-дуальности T_{67}, опять представимой в виде комбинации S_i и T. Получим состояние с массой

$$M_{5^2_2} = \frac{R_1R_2R_3R_4R_7R_5^2R_6^2}{g_s^2}, \tag{2.51}$$

соответствующее экзотической 5^2_2-бране, имеющей два специальных цикла вдоль направлений 5 и 6, и намотанной на направления 1,2,3,4,7. Следующие элементы орбиты представляют 5^3_2 и 5^4_2 браны, на чем состояния, соответствующие NS 5-бранам исчерпываются. Более подробно экзотические браны и их описание в рамках ковариантных теорий будут обсуждаться в Главе 5.

2.4 U-дуальность

Преобразования T-дуальности, рассмотренные ранее, являются пертурбативными симметриями теории струн и действуют независимо в каждом порядке по константе связи g_s. С точки зрения полной теории, включающей 11-мерные вакуумы, константа связи связана с радиусом 11-го измерения R_s соотношением

$$R_s = g_s^{\frac{2}{3}} l_p, \quad l_p^3 = g_s l_s^3, \tag{2.52}$$

где l_p — планковская длина. Перепишем преобразования T_{ij} в терминах радиусов полного 11-мерного пространства:

$$T_{ij} : R_i \to \frac{l_p^3}{R_j R_s}, \;\; R_j \to \frac{l_p^3}{R_i R_s}, \;\; R_s \to \frac{l_p^3}{R_i R_j}, \;\; l_p^3 \to \frac{l_p^6}{R_i R_j R_s}. \tag{2.53}$$

Учитывая дополнительно группу перестановок любой пары радиусов $R_I = \{R_i, R_s\}$, получим преобразования

$$T_{IJK} : R_I \to \frac{l_p^3}{R_J R_K}, \;\; R_J \to \frac{l_p^3}{R_I R_K}, \;\; R_K \to \frac{l_p^3}{R_I R_J}, \;\; l_p^3 \to \frac{l_p^6}{R_I R_J R_K}. \tag{2.54}$$

Поскольку все радиусы входят в это выражение на равных правах, такие преобразования являются существенно непертурбативными, выходя за рамки группы T-дуальности теории струн. Конкретнее, T_{IJK} представляют нетривиальную часть группы U-дуальности, являющейся комбинацией T-дуальности и S-дуальности [46]. Выбирая, как прежде, элементы $T = T_{123}$ и перестановки S_I получим группу Вейля группы U-дуальности

$$\mathcal{W}(E_d) = \mathbb{Z}_2 \bowtie \mathcal{S}_d. \tag{2.55}$$

Покажем, что преобразования T и перестановки S_I действительно генерируют вейлевские отражения в системе корней алгебры $\mathfrak{e}_d$. Следуя тому же алгоритму, введем форму $\varphi = (3\ln l_p, \ln R_1, \dots, \ln R_d)$ на $d+1$–мерном векторном пространстве V_{d+1} с базисом $\mathfrak{b}\mathrm{as}V = \{e_0, e_1, \dots, e_d\}$. Каждому 1/2БПС состоянию с массой

$$\mathcal{T} = l_p^{3x^0} R_1^{x^1} \dots R_d^{x^d} \tag{2.56}$$

сопоставим весовой вектор $\lambda = x^0 e_0 + x^1 e_1 + \dots + x^d e_d$ так, что $\mathcal{T} = \exp(\lambda, \varphi)$. В матричном виде действие операторов T и S_I на пространстве V_{d+1} можно записать следующим образом:

$$S_I = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & & I & & & & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \\ I \\ \\ \\ \\ d \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right] \end{array}, \quad T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & & & \\ -1 & 0 & -1 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 0 & -1 & & & \\ -1 & -1 & -1 & 0 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.57}$$

Полученные матрицы являются ортогональными по отношению к метрике $ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^I)^2$, определяемой соотношениями ортогональности на базисные вектора:

$$e_0^2 = 1, \quad (e_I \cdot e_J) = \delta_{IJ}, \quad (e_0 \cdot e_I) = 0. \tag{2.58}$$

Простые корни $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{d-1}$ алгебры $\mathfrak{e}_d$ удобно выразить в терминах базисных векторов соотношениями

$$\alpha_I = e_{I+1} - e_I, \quad I = 1,\ldots,d-1, \quad \alpha_0 = e_1 + e_2 + e_3 - e_0. \tag{2.59}$$

Действительно, так определенные векторы α_0,α_I удовлетворяют стандартным соотношениям для корней алгебры $\mathfrak{e}_d$:

$$(\alpha_I)^2 = (\alpha_0)^2 = 2, \quad (\alpha_I \cdot \alpha_{I+1}) = (\alpha_3 \cdot \alpha_0) = -1. \tag{2.60}$$

Соответствующая диаграмма Дынкина представлена на Рис. 2.2. В этих тер-

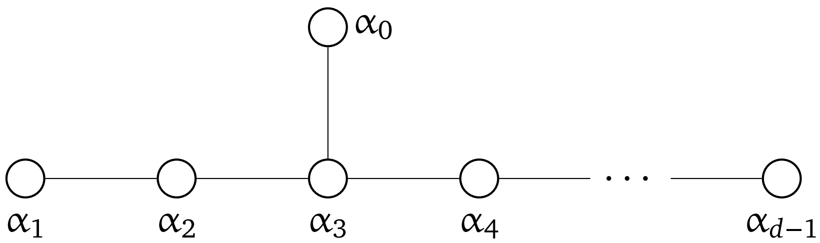

Рисунок 2.2 — Диаграмма Дынкина алгебры $\mathfrak{e}_d$ с обозначениями для простых корней.

минах преобразования T_{123} и S_I могут быть представлены вейлевскими отражениями:

$$
\begin{aligned}
T_{123} &: \lambda \to \lambda - 2\frac{(\lambda \cdot \alpha_0)}{\alpha_0^2}\alpha_0, \\
S_I &: \lambda \to \lambda - 2\frac{(\lambda \cdot \alpha_I)}{\alpha_I^2}\alpha_I.
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

Таким образом, заключаем, что группой симметрий состояний суперaлгебры $\mathcal{N} = 1$ в размерности 11 на фоне d-мерного тора является группа $\mathrm{E}_d(\mathbb{Z})$. Точнее будет сказать, что алгеброй симметрий является $\mathfrak{e}_{d(d)}$, что означает максимальную разделенную действительную форму алгебры $\mathfrak{e}_d$.

Из диаграммы Дынкина видно, что алгебра $\mathfrak{e}_d$ содержит $\mathfrak{so}(d-1, d-1)$ (ее разделенная действительная форма) в качестве подалгебры. Соответствующая диаграмма Дынкина получается стиранием корня α_1 на диаграмме на Рис. 2.2. В терминах М-теории это соответствует размерной редукции из 11 в 10 измерений. Стирание корня α_0 дает группу $\mathrm{GL}(d)$ модулярных симметрий d-мерного тора. Это геометрическая подгруппа полной группы U-дуальности. Стирание корней с самого правого конца диаграммы Дынкина соответствует

Таблица 4 — Симметрии U-дуальности в разных размерностях. Указано число ненулевых корней N_r и размерность представления $\mathcal{R}_1$, определяющего моды намотки бран (см. далее).

d	2	3	4	5	6	7	8	9
E_d	SL(2)	SL(3)×SL(2)	SL(5)	SO(5,5)	E_6	E_7	E_8	E_9
N_r	2	6+2	20	40	72	126	240	∞
$\dim\mathcal{R}_1$	3	3+3	10	16	27	56	248	∞

уменьшению размерности тора на единицу и изменению группы U-дуальности. В Таблице 4 показаны группы U-дуальности для состояний $\mathcal{N} = 1$ алгебры на d–мерном торе, число ненулевых корней N_r. Размерность представления $\mathcal{R}_1$ равна количеству независимых (полных) намоток бран на d одномерных циклов плюс число мод импульса вдоль этих циклов.

Как и в случае Т-дуальности, орбиты группы U-дуальности удобно изучать, начиная с фундаментальных весов. В случае алгебры $\mathfrak{e}_d$ имеем:

$$\begin{aligned}
\lambda^{(0)} &= -e_0, \quad M_{M2} = \frac{1}{l_p^3},\\
\lambda^{(1)} &= e_1 - e_0, \quad M_{wM2} = \frac{R_1}{g_s},\\
\lambda^{(2)} &= e_1 + e_2 - 2e_0, \quad M_{wwM5} = \frac{R_1R_2}{g_s^2},\\
&\vdots\\
\lambda^{(d-2)} &= e_1 + e_2 \ldots e_{d-2} - 2e_0, \quad M_{w\ldots wNS} = \frac{R_1\ldots R_{d-2}}{g_s^2},\\
\lambda^{(d-1)} &= e_1 + e_2 \ldots e_{d-1} - e_0 = (\delta) - e_d, \quad M_{wF} = \frac{1}{R_d}.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Из представленного анализа можно заключить, что группой симметрий М-теории на фоне тора размерности d=9,8, . . . ,2 является группа $E_d(\mathbb{Z})$, если обозначить $E_2 = SL(2)$, $E_3 = SL(3) \times SL(2)$, $E_4 = SL(5)$, $E_5 = SO(5,5)$. При этом группа $E_9 = E_8{}^+$ является бесконечномерной и соответствует алгебре Каца–Муди, полученной из алгебры $\mathfrak{e}_8$ добавлением одного мнимого корня. Таким образом, полной группой симметрии М-теории на 11-мерном торе должна являться правильным образом определенная бесконечномерная группа E_{11}. Настоящая диссертация посвящена исследованию теорий с конечными группами U-дуальности. Исследование групп симметрий М-теории E_{10} и E_{11} представлено в литературе работами [61, 62, 63, 64, 65, 66, 67].

2.5 Симметрии Креммера–Джулиа

Поскольку 11-мерная супергравитация является приближением низких энергий, описывающей динамику фоновых полей М-теории, размерная редукция на d-мерный тор также должна демонстрировать симметрию E_d. Впервые об открытии симметрии E_7 максимальной супергравитации в размерности 4 было объявлено в 1978 году в краткой заметке Креммера и Джулиа [43] (4 страницы). Соответствующие вычисления вскоре были более подробно разобраны на 72 страницах в последующей работе [42]. Инвариантность максимальной супергравитации в размерности $D = 3,4,5,6,7$ относительно преобразований из групп E_d с $d = 8,7,6,5,4$ была показана в работах [68, 69, 70, 71, 72].

В схемах размерной редукции 11-мерной супергравитации на тор полная симметрия Креммера–Джулиа возникает как расширение глобальной геометрической симметрии внутреннего тора калибровочными преобразованиями потенциала три формы и преобразованиями U-дуальности, рассмотренными в предыдущей главе. Удобнее всего работать в формализме 1.5 рода, в котором действие для супергравитации формулируется в терминах репера и спин-связности, которая при этом считается удовлетворяющей условию на кручение. Пусть $E_{\hat\mu}{}^{\hat\alpha}$ — репер, задающий метрику в 11-мерном пространстве по стандартному правилу

$$G_{\hat\mu\hat\nu} = E_{\hat\mu}{}^{\hat\alpha} E_{\hat\nu}{}^{\hat\beta} \eta_{\alpha\beta}. \tag{2.63}$$

Здесь $\eta_{\alpha\beta}$ обозначает плоскую метрику, индексы $\hat\mu,\hat\nu = 0,\ldots,10$ нумеруют координаты $x^{\hat\mu}$ в 11-мерном пространстве, индексы $\hat\alpha, \hat\beta$ являются локальными. Для размерной редукции из 11 в D измерений разделим координаты $x^{\hat\mu} = (x^\mu, y^m)$, где греческие индексы $\mu = 0,\ldots,D-1$ нумеруют координаты внешнего пространства, а $m,n = 1,\ldots,d$ нумеруют координаты внутреннего пространства. При размерной редукции на тор считается, что все поля не зависят от внутренних координат y^m. Более точно, поля следует разложить по гармоникам, удовлетворяющим условию периодичности на каждом из циклов тора. Пусть $R_1,\ldots,R_d$ обозначают радиусы d-мерного тора, тогда разложение для скалярного поля будет иметь вид:

$$\varphi(x,y) = \sum_{\vec n} \varphi_{\vec n}(x) e^{\frac{2\pi i n_1 y^1}{R_1}} \ldots e^{\frac{2\pi i n_d y^d}{R_d}}, \tag{2.64}$$

где мультииндекс $\vec n = (n_1,\ldots,n_d)$ имеет компоненты $n_m \in \mathbb{Z}$. Такое разложение допускает ограничение теории на нулевые моды, т.е. соответствующие $\vec n = (0,\ldots,0)$. Известно, что редукция на тор является самосогласованной. Самосогласованность редукции является исключительно важным требованием при построении схем компактификации из более высоких размерностей. Действительно, вообще говоря, для произвольного компактного многообразия, выбранного в качестве внутреннего пространства, априори не очевидно, что уравнения не будут перемешивать моды с разными значениями $\vec n$. Нетривиальное перемешивание мод в уравнениях движения приводит к тому, что кладя равными нулю все ненулевые моды, мы можем получить некоторые дополнительные условия на поля. Причем, эти условия вообще говоря могут не следовать из редуцированного Лагранжиана, приводя к тому, что не все решения редуцированной теории могут быть подняты до решения полной теории. Таким образом, самосогласованная редукция теории дает теорию в более низкой размерности, все решения которой являются решениями уравнений полной теории. Известно, что торические редукции обладают таким свойством. Другим классом редукций, представляющих особый интерес, являются редукции на пространства Фройнда–Рубина, конкретнее, на решение $AdS_4 \times \mathbb{S}^7$ уравнений 11-мерной супергравитации. Самосогласованность такой редукции была доказана в 1987 году в работе [73]. Полный нелинейный анзац для редукции 11-мерных полей на 7-сферу был построен в 2013-2014 годах в работах [74, 75] методами исключительной теории поля, которой посвящена данная диссертация.

Рассмотрим КК редукцию $11 = D + d$ на d-мерный тор и определим разбиение репера следующим образом:

$$E_{\hat{\mu}}{}^{\hat{\alpha}} = \begin{bmatrix} \rho^{\gamma} e_{\mu}{}^{\alpha} & \rho^{\frac{1}{d}} V_n{}^b B_{\mu}{}^n \\ 0 & \rho^{\frac{1}{d}} V_m{}^a, \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

где $e_{\mu}{}^{\alpha}$ обозначает D-мерный репер, постоянная $\gamma = -(D-2)^{-1}$. Множитель ρ^{γ} в левом верхнем блоке добавлен для того, чтобы редуцированное действие давало правильный член Эйнштейна–Гильберта в размерности D:

$$\kappa \int d^{11}x \,|\det E| R[G] \to \kappa' \int d^D x \,|\det e| R[g]. \tag{2.66}$$

Геометрическая группа симметрий репера в полной теории определяется производной Ли вдоль некоторого вектора $\Xi^{\hat{\mu}} = (\xi^{\mu}, \eta^m)$:

$$\delta E_{\hat{\mu}}{}^{\hat{\alpha}} = L_{\Xi} E_{\hat{\mu}}{}^{\hat{\alpha}} = \Xi^{\hat{\nu}} \partial_{\hat{\nu}} E_{\hat{\mu}}{}^{\hat{\alpha}} + E_{\hat{\nu}}{}^{\hat{\alpha}} \partial_{\hat{\mu}} \Xi^{\hat{\nu}}. \tag{2.67}$$

Для D-мерных полей это выражение дает следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \delta e_{\mu}{}^{\alpha} &= L_{\xi} e_{\mu}{}^{\alpha}, \quad \delta\rho = L_{\xi}\rho, \\ \delta B_{\mu}{}^m &= L_{\xi} B_{\mu}{}^m + \partial_{\mu}\eta^m - \partial_n \eta^m B_{\mu}{}^n, \\ \delta V_m{}^a &= L_{\xi} V_m{}^a + \partial_m \eta^n V_n{}^a. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Поскольку компоненты η^m входят в выражения через свои производные по координатам x^{μ} и y^m, линейная зависимость от y^m не будет нарушать условие независимости полей от внутренних координат. Поэтому, естественно определить

$$\eta(x,y)^m = \lambda(x)^m + \Lambda^m{}_n y^n, \tag{2.69}$$

где $\lambda(x)^m$ будет соответствовать параметрам калибровочных преобразования d векторов $B_\mu{}^m$, а постоянная матрица $\Lambda^m{}_n = \text{const}$ соответствует некоторому глобальному $SL(d)$ преобразованию. Здесь мы считаем $\Lambda^m{}_m = 0$, выделяя вейлевское масштабирование в размерности d отдельно. Вследствие выбранной параметризации внешний репер $e_\mu{}^\alpha$ не является скаляром относительно вейлевских преобразований, также индуцируя нетривиальное преобразование полей материи:

$$\delta\rho = d(D-2)\rho, \quad \delta B_\mu{}^m = -(D+d-2)B_\mu{}^m. \tag{2.70}$$

Таким образом, полной глобальной группой симметрий гравитации, редуцированной в D измерений на d-мерный тор является группа $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$.

Группа глобальных симметрий $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ действует на векторные поля $B_\mu{}^m$ и скалярные поля D-мерной теории $V_m{}^a$ и ρ, которые параметризуют фактор-пространство $GL(d)/SO(d)$. Бозонный сектор 11-мерной супергравитации помимо метрического тензора содержит калибровочное поле, представленное компонентами 3-формы $\hat{C}_{\hat\mu\hat\nu\hat\rho}$. При КК компактификации 3-форма генерирует дополнительные скалярные поля C_{mnk} и дополнительные симметрии, наследуемые из калибровочных преобразований $\delta C_{\hat\mu\hat\nu\hat\rho} = 3\partial_{[\hat\mu}\Lambda_{\hat\nu\hat\rho]}$. Как и в случае с внутренними диффеоморфизмами, допускается линейная зависимость компонент $\Lambda_{mn} = 1/3 c_{mnk} y^k$ от координат на внутреннем торе, что дает дополнительные глобальные симметрии

$$\delta_c C_{mnk} = 3\partial_{[m}\Lambda_{nk]} = c_{mnk}. \tag{2.71}$$

Поскольку калибровочные преобразования 3-формы коммутируют между собой, имеем абелеву группу глобальных симметрий $\mathbb{R}^N$, параметризованных постоянными c_{mnk}, где $N = C^3_N$ (число сочетаний из N по 3). Однако, преобразования из абелевой группы $\mathbb{R}^N$ не коммутируют с преобразованиями из глобальной группы $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$, что с очевидностью следует из того факта, что скалярные поля при этом c_{mnk} нетривиально преобразуются. Явное вычисление показывает, что коммутационные соотношения имеют следующий вид:

$$[\delta_c, \delta_\Lambda] = \delta_{c'}, \quad c'_{mnk} = 3\Lambda^l{}_{[m} c_{nk]l}. \tag{2.72}$$

Полученные коммутационные соотношения имеют вид таковых для алгебры $\mathfrak{e}_d$ в базисе ее подгруппы $\mathfrak{gl}(d)$, и можно было бы ожидать, что группа глобальных симметрий $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$ является подгруппой $\mathrm{E}_{d(d)}$. Однако, в таком виде это верно лишь для $d \leqslant 4$, при $d \geqslant 5$ максимальная абелева подгруппа группы $\mathrm{E}_{d(d)}$ оказывается меньше, чем $\mathbb{R}^{\mathcal{N}}$. Это связано с необходимостью дуализировать все формы к наименьшему рангу для получения формулировки, ковариантной относительно $\mathrm{E}_{d(d)}$ [42, 43]. Подобное отличие в группе глобальных симметрий для полностью дуализированной к минимальному рангу форм теории и ее обычной версии может казаться контринтуитивным. Действительно, поскольку речь идет о симметриях уравнений, а дуализация является их следствием, естественно ожидать, что симметрия при этом изменяться не должна. Однако, это верно только для полей, которые входят в лагранжиан через свои производные, как в случае с p-формами, но, вообще говоря, неверно для скалярных полей.

Для иллюстрации подобного отличия в группе глобальных симметрий рассмотрим простейший пример D-мерной теории с глобальной $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ симметрией:

$$e^{-1}\mathcal{L} = R[e] - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}e^{2\varphi}g^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\partial_\nu\chi. \tag{2.73}$$

Глобальная симметрия действует на $\tau = \chi + ie^{-\varphi}$ дробно-рациональными преобразованиями

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \tag{2.74}$$

где a,b,c,d — компоненты $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ матрицы и удовлетворяют условию $ad-bc = 1$. Поскольку аксион χ входит в лагранжиан только через свои производные, можно перейти к дуальному потенциалу, представленному $D-2$-формой $A_{(D-2)}$. Дуальная теория задается лагранжианом следующего вида

$$e^{-1}\mathcal{L} = R[e] - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2(D-1)!}F^2_{(D-1)}e^{2\varphi}, \tag{2.75}$$

где $F_{(D-1)} = dA_{(D-2)}$. В таком виде глобальная симметрия теории задается лишь преобразованиями из группы $\mathbb{R}$

$$\varphi' = \varphi + c, \quad A'_{(D-2)} = e^c A_{(D-2)}. \tag{2.76}$$

Глобальная симметрия сдвига скалярного поля χ заменяется локальной симметрией калибровочных преобразований поля $A_{(D-2)}$. Симметрия $\tau \to \tau^{-1}$ формально нарушается из-за своей нелинейности и отсутствия скаляра χ.

Обратно, переходя от лагранжиана с $(D-1)$-формой к лагранжиану со скалярными полями дуализацией к минимальному рангу, получим, что группа глобальной симметрии расширяется до SL(2,$\mathbb{R}$). Заметим, что симметрия SL(2,$\mathbb{R}$) нарушена не только на уровне лагранжиана, но и на уровне полевых уравнений. Можно считать, что эта симметрия присутствует на массовой поверхности.

Подробно процедура дуализации скалярных и тензорных полей КК редуцированной 11-мерной супергравитации и возникновение соответствующих групп глобальной симметрии показаны в работах [7, 8]. Сопутствующие вычисления в эти работах представлены с исключительной подробностью и мы не будем приводить их здесь. Вместо этого проиллюстрируем идею при помощи Таблицы 5, в которой указано количество скалярных полей s, векторных полей v, 2-форм t_a и гравитонов g после редукции на тор размерности d.

Таблица 5 — Количество полей максимальной супергравитации в размерности D с p-формами, дуализированными к минимальному рангу. (см. пояснения в тексте).

D	d	G	K	$g_{\mu\nu}$	$g_{\mu m}$	g_{mn}	$C_{\mu\nu\rho}$	$C_{\mu\nu m}$	$C_{\mu mn}$	C_{mnk}
7	4	SL(5)	SO(5)	1g	4v	10s	$\underline{1t_a}$	$4t_a$	6v	4s
6	5	SO(5,5)	SO(5)×SO(5)	1g	5v	15s	$\underline{1\mathrm{v}}$	$5t_a$	10v	10s
5	6	$E_{6(6)}$	Usp(8)	1g	6v	21s	$\underline{1\mathrm{s}}$	$\underline{6\mathrm{v}}$	15v	20s
4	7	$E_{7(7)}$	SU(8)	1g	7v	28s	×	$\underline{7\mathrm{s}}$	21v	35s
3	8	$E_{8(8)}$	SO(16)	1g	$\underline{8\mathrm{s}}$	36s	×	×	$\underline{28\mathrm{s}}$	56s

Нижним подчеркиванием обозначены поля, полученные дуализацией. Так, мы видим, что в $D=7$ скалярные поля получаются прямой размерной редукцией, и дуализация требуется только для формирования одного поля 2-формы из $C_{\mu\nu\rho}$. В общем случае скалярные поля параметризуют фактор-группу G/K, где K — группа локальных симметрий (группа R-симметрии фермионного сектора). Двигаясь в направлении увеличения размерности внутреннего тора d, первый случай, где требуется дуализация для получения скалярных полей, мы встречаем при $d = 6$. Заметим, что в размерности $D = 4$ три форма оказывается нединамической и ее ненулевое значение соответствует включению флаксов. Максимальные супергравитации с ненулевыми флаксами удобно описывать в формализме тензора погружения, который будет подробнее рассмотрен далее.

Необходимость дуализации для формирования полного набора генераторов группы глобальной симметрии Креммера-Джулия можно увидеть из анализа разложения базиса алгебры $\mathfrak{e}_d$ по уровням относительно третьего корня. Для $d \leqslant 8$ имеем:

$$\operatorname{bas}\mathfrak{e}_d = \{t^{m_1\dots m_8,m}, t^{m_1\dots m_6}, t^{m_1m_2m_3}, t^m{}_n, t_{m_1m2m_3}, t_{m_1\dots m_6}, t_{m_1\dots m_8,m}\}, \tag{2.77}$$

где $t^m{}_n$ генерируют $\mathfrak{gl}(d)$ подалгебру и соответствуют уровню 0. Таким образом видим, что полученные выше при размерной редукции преобразования действительно являются частью алгебры $\mathfrak{e}_d$:

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda &= \Lambda^m{}_n t^n{}_m,\\ \delta_c &= c_{mnk}t^{mnk}.\end{aligned} \tag{2.78}$$

Генераторы $t^{m_1\dots m_6}$ с уровнем $l = +2$ соответствуют калибровочным преобразованиям магнитных калибровочных потенциалов. Например, при $d = 6$ есть один генератор t^{123456}, соответствующий преобразованиям скаляра, полученного дуализацией 3-формы $C_{\mu\nu\rho}$. Особенно интересным является случай $d = 8$, где присутствуют 8 генераторов $t^{m_1\dots m_8,m}$ на уровне $l = +4$, обладающие смешанной симметрией по индексам. Обращаясь к Таблице 5, видим, что эти генераторы соответствуют преобразованиям скаляров, дуальных компонентам гравифотона $g_{\mu m}$. В итоге заключаем, что глобальные симметрии, наследуемые из диффеоморфизмов и калибровочных преобразований компонент метрики и 3-формы, при дуализации дающих скалярные поля, образуют борелевскую подалгебру полной алгебры симметрии Креммера–Джулиа $\mathfrak{e}_d$. Остальные генераторы соответствуют преобразованиям U-дуальности, как было подробно разобрано в предыдущей главе.

Таблица 5 показывает, что векторные и тензорные поля также объединяются в мультиплеты по действию глобальной группы. Обозначим отдельные интересные моменты, связанные с этим объединением. В размерности $D = 6$ находим пять 2-форм, тогда как группа SO(5,5) не имеет пятимерного представления. Для дополнения до полного мультиплета **10** следует добавить пять 2-форм, дуальных к имеющимся. В итоге уравнения могут быть записаны в SO(5,5)-ковариантной форме, однако с дополнительным условием самодуальности на десять 2-форм. При этом действие, конечно, нельзя записать в ковариантной форме [71]. То же верно для 1-форм в размерности $D = 4$, где 28 имеющихся векторных полей следует дополнить 28-ю магнитными партнерами для образования мультиплета **56**.

2.6 Калиброванная супергравитация

Размерные редукции на плоский тор сохраняют максимальный набор симметрий, по какой причине они являются не особенно полезными с точки зрения описания реалистичной физики. В таких схемах размерной редукции все скалярные возбуждения в результирующей теории оказываются безмассовыми, что коренным образом противоречит экспериментальным данным. Для генерирования нетривиального потенциала скалярных полей следует рассматривать более сложные геометрии, связанные с введением в схему редукции бран, намотанных на нетривиальные циклы внутреннего пространства. Так, например, можно рассмотреть редукцию 11-мерной супергравитации на 7-сферу, являющуюся частью решения $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$. Размеры сферы и пространства анти де-Ситтера стабилизируются ненулевым потоком тензора напряженности три формы, который индуцируется М2-браной. В

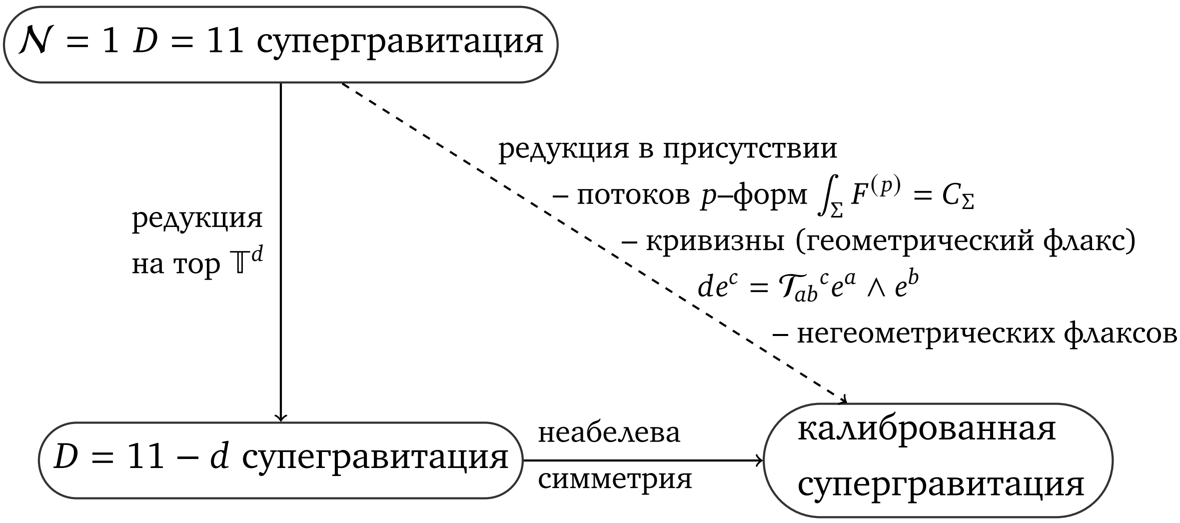

Рисунок 2.3 — Схема, иллюстрирующая размерные редукции $\mathcal{N} = 1$ $D = 11$ супергравитации на d-мерный тор, редукции в присутствии геометрических и негеометрических флаксов и процедуру локализации (подгруппы) глобальных симметрий Креммера–Джулиа.

самом общем случае рассматриваются схемы редукции с ненулевыми значениями кривизны внутреннего пространства, кручения, потоков калибровочных форм и негеометрических флаксов индуцированных экзотическими бранами. На Рис. 2.3 такие редукции обозначены диагональной пунктирной линией. Пунктир подчеркивает, что вообще говоря, прямая схема редукции с включенными негеометрическими флаксами не определена из-за глобальной неопределенности соответствующих полевых конфигураций.

Было бы наивно ожидать возможности решения задачи описания всех возможных редукций $\mathcal{N} = 1$ $D = 11$ теории в присутствии любого флакса, будь то обычная кривизна или экзотическая негеометрия. Однако, глобальные симметрии Креммера–Джулиа все же позволяют поставить задачу именно так и сформулировать алгоритм ее решения, основанный на алгебраических методах, что было продемонстрировано в работах [13, 76, 77]. Действительно, присутствие нетривиальных флаксов обычно нарушает суперсимметрию, а основное состояние соответствующей эффективной теории нарушает глобальную симметрию, что является следствием нетривиального потенциала для скалярных полей. При этом флаксы, как и индуцирующие их браны, принадлежат различным мультиплетам полной группы U-дуальности. Таким образом, идея состоит в том, чтобы, стартуя с максимально симметричной теории, построить теорию, в которой ковариантным образом включены все возможные флаксы. Наиболее естественным подходом оказывается введение шпурионного (калибровочного) объекта, называемого тензором погружения, компоненты которого и отвечают (постоянным) флаксам. Самосогласованность теории требует удовлетворения т.н. квадратичных и линейных условий на тензор погружения, решая которые мы выбираем те или иные конкретные реализации калиброванной супергравитации. Для определенных классов решений в работах [13, 78] показано соответствие размерным редукциям $\mathcal{N} = 1$ $D = 11$ супергравитации на сферу и на гиперболоид (т.н. некомпактные калибровки) наденным ранее в работах [79, 80, 81, 82]. Полная классификация калибрований $D = 4, \mathcal{N} = 8$ супергравитации представлена в работе [83].

2.6.1 Ковариантный формализм тензора вложения

Из Таблицы 5 видно, что кроме общей глобальной группы симметрии G и локальной группы K, являющейся ее максимальной компактной подгруппой, теория должна быть инвариантна относительно калибровочных преобразований $n_V = \dim\mathcal{R}_1$ векторных полей. Здесь $\mathcal{R}_1$ обозначает представление глобальной группы дуальности, которому принадлежат векторные поля, например, **27** для $D = 5$. Поскольку изначальная теория была абелева, в размерности D получаем калибровочную группу $\mathrm{U}(1)^{n_V}$. Поля материи также оказываются незаряженными по этой калибровочной группе, а основным состоянием является пространство Минковского, сохраняющее все суперсимметрии. С другой стороны в конструкциях максимальной супергравитации с локальной калибровочной симметрией с необходимостью нарушается глобальная группа дуальности до некоторой подгруппы H, которая становится калибровочной группой. Впервые это было показано в работе [84] на примере SO(8) калибровочной $\mathcal{N} = 8$ супергравитации в размерности 4, где глобальная симметрия $\mathrm{E}_{7(7)}$ нарушается новой калибровочной группой. Причем, локальная симметрия SU(8) остается ненарушенной.

Анализ конструкций таких калиброванных супергравитаций в различных размерностях привел к следующему систематическому алгоритму построения калибровок. Дополним абелевы калибровочные преобразования n_V векторных полей $\delta A_\mu{}^{\mathcal{M}} = \partial_\mu \Lambda^{\mathcal{M}}$ до неабелевых преобразований:

$$\delta A_\mu{}^{\mathcal{M}} = \partial_\mu \Lambda^{\mathcal{M}} + g A_\mu{}^{\mathcal{N}} X_{\mathcal{N}\mathcal{P}}{}^{\mathcal{M}} \Lambda^{P}, \tag{2.79}$$

где $\mathcal{M},\mathcal{N} = 1,\dots n_V$ параметризует мультиплет $\mathcal{R}_1$, $\Lambda^{\mathcal{M}} = \Lambda(x)^{\mathcal{M}}$ — локальные калибровочные параметры, а тензор $X_{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{P}$ определяет калибровочную группу. Пусть $\{(t_\alpha)_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}\} = \mathrm{bas}\,\mathfrak{g}$ — генераторы группы G, тогда калибровочная группа определена вложением в группу дуальности G следующим образом:

$$X_{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{K} = \Theta_{\mathcal{M}}{}^{\alpha} (t_\alpha)_{\mathcal{N}}{}^{K}. \tag{2.80}$$

Здесь $\Theta_{\mathcal{M}}{}^{\alpha}$ обозначает тензор вложения, определяющий, как именно калибровочная группа вложена в группу глобальных преобразований. Относительно глобальных симметрий векторные поля преобразуются стандартным образом:

$$\delta A_\mu{}^{\mathcal{M}} = -\Lambda^{\alpha} (t_\alpha)_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{M}} A_\mu{}^{\mathcal{N}}. \tag{2.81}$$

Очевидно, ковариантность относительно глобальных преобразований сохраняется, и калиброванная супергравитация оказывается инвариатной как относительно глобальных симметрий Креммера–Джулиа, так и относительно локальной калибровочной группы. Однако, поскольку такие деформации вообще говоря ограничены определенными условиями самосогласованности, конкретные решения этих условий нарушают глобальную группу.

Прежде чем формулировать условия самосогласованности определим преобразования полей скалярного сектора теории. Как обсуждалось выше скалярные поля максимальной супергравитации параметризуют фактор-группу G/K. Пусть алгебра $\mathfrak{g}$ группы G раскладывается в сумму векторных пространств

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}, \tag{2.82}$$

где $\mathfrak{l} = \mathrm{Lie}\, \mathrm{K}$ обозначает алгебру Ли группы K, а $\mathfrak{p}$ является ее ортогональным дополнением в $\mathfrak{g}$. Тогда левоинвариантный ток $J_\mu = \mathcal{V}^{-1}\partial_\mu \mathcal{V}$, построенный по некоторому элементу $\mathcal{V} \in G$, может быть разложен следующим образом:

$$J_\mu = Q_\mu + P_\mu, \quad Q_\mu \in \mathfrak{l}, \quad P_\mu \in \mathfrak{p}. \tag{2.83}$$

Здесь мы допускает некоторую вольность в обозначениях, считая что $J_\mu \in \mathfrak{g}$ обозначает 1-формы, принимающие значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и опуская обозначение для пространства 1-форм. В этих обозначениях скалярный Лагранжиан принимает следующий вид:

$$e^{-1}\mathcal{L}_{sc} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(P_\mu P^\mu\big), \tag{2.84}$$

где след берется по некоторому представлению группы G. Лагранжиан инвариантен как относительно глобальной группы G так и локальной группы K действующих на элемент группы стандартным образом

$$\delta\mathcal{V} = \Lambda\mathcal{V} - \mathcal{V}k(x). \tag{2.85}$$

При этом преобразования компонент тока имеют следующий вид:

$$\delta P_\mu = [k, P_\mu], \quad \delta Q_\mu = -\partial_\mu k + [k,Q_\mu], \tag{2.86}$$

где [,] обозначает коммутатор в алгебре $\mathfrak{g}$. Отсюда видно, что Q_μ играет роль составной связности для локальных преобразований, что позволяет записать P_μ в терминах ковариантной производной:

$$P_\mu = D_\mu\mathcal{V} = \partial_\mu\mathcal{V} - Q_\mu. \tag{2.87}$$

Таким образом, калибровочные преобразования для группового элемента $\mathcal{V}$ можно записать

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{V} &= g\Lambda^{\mathcal{M}} X_{\mathcal{M}}\mathcal{V}, \\ X_{\mathcal{M}} &= \Theta_{\mathcal{M}}{}^{\alpha} t_\alpha. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Рассмотрим теперь условия самосогласованности введенных преобразований. Первое условие, называемое квадратичным, следует из требования инвариантности тензора вложения относительно калибровочных преобразований. Пользуясь ковариантностью, запишем:

$$0 = \delta_{\mathcal{P}}\Theta_{\mathcal{M}}{}^{\alpha} = \Theta_{\mathcal{P}}{}^{\beta}(t_{\beta})_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}\Theta_{\mathcal{N}}{}^{\alpha} + \Theta_{\mathcal{P}}{}^{\beta}f_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\Theta_{\mathcal{M}}{}^{\gamma}, \tag{2.89}$$

где $f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ — структурные константы группы G. Можно переписать это условие в более краткой форме, сворачивая с генераторами t_{α}, а именно:

$$[X_{\mathcal{M}}, X_{\mathcal{N}}] = -X_{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}X_{\mathcal{K}}. \tag{2.90}$$

Полученное квадратичное условие напоминает условие замыкания алгебры, однако, величины $X_{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{K}$ по определению не являются антисимметричными по нижним индексам. Поэтому условие разбивается на два: замыкание алгебры и специальное условие на симметричную часть $Z_{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}} = X_{(\mathcal{M}\mathcal{N})}{}^{\mathcal{K}}$:

$$[X_{\mathcal{M}}, X_{\mathcal{N}}] = -X_{[\mathcal{M}\mathcal{N}]}{}^{\mathcal{K}}X_{\mathcal{K}}, \;\; Z_{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}X_{\mathcal{K}} = 0. \tag{2.91}$$

Из квадратичного условия следует тождество Якоби, которое выполняется так же с точностью до симметричной части:

$$X_{[\mathcal{M}\mathcal{N}]}{}^{\mathcal{P}}X_{[\mathcal{Q}\mathcal{P}]}{}^{\mathcal{R}} + X_{[\mathcal{Q}\mathcal{M}]}{}^{\mathcal{P}}X_{[\mathcal{N}\mathcal{P}]}{}^{\mathcal{R}} + X_{[\mathcal{N}\mathcal{Q}]}{}^{\mathcal{P}}X_{[\mathcal{M}\mathcal{P}]}{}^{\mathcal{R}} = -Z_{\mathcal{P}[\mathcal{Q}}{}^{\mathcal{R}}X_{\mathcal{M}\mathcal{N}]}{}^{\mathcal{P}}. \tag{2.92}$$

Второй набор условий следует из требования суперсимметричности полученной калиброванной супергравитации и имеет разный вид в разных размерностях. Схематически линейное условие можно записать как

$$\mathbb{P}_{\mathcal{R}}\Theta = 0, \tag{2.93}$$

где $\mathbb{P}_{\mathcal{R}}$ — проектор на некоторые представления глобальной группы. Для примера рассмотрим случай $D = 4$ с группой $\mathrm{E}_{7(7)}$. По своей структуре индексов тензор погружения принадлежит представлению $\mathbf{133} \otimes \mathbf{56}$, которое не является неприводимым и раскладывается следующим образом:

$$\Theta_{\mathcal{M}}{}^{\alpha} \in \mathbf{133} \otimes \mathbf{56} = \mathbf{56} \oplus \mathbf{912} \oplus \mathbf{6480}. \tag{2.94}$$

Линейное условие ограничивает тензор погружения только компонентами в **912**. Постоянный тензор $F_{\mu\nu\rho\sigma} = 4\partial_{[\mu}C_{\nu\rho\sigma]}$, обозначенный крестом в Таблице 5, соответствует одной из 912 компонент тензора погружения. Заметим, что компонента **56** может быть ненулевой, если изначальную глобальную группу дуальности расширить постоянными перескалированиями $D = 4$ в супергравитации, т.е. $G \longrightarrow \hat{G} = G \times \mathbb{R}^{+}$. Калибрации в представлении $\mathcal{R}_1$ называются тромбоном. Результирующая теория более не описывается в терминах действия и лагранжиана из-за несогласованности дополнительных членов с тромбоном с принципом наименьшего действия и невозможностью самосогласованно применить вариационный принцип [85]. Впервые супергравитации такого типа были описаны в терминах массивных деформаций супергравитации типа IIA в работах [86, 87].

Общий алгоритм построения калиброванных супергравитации в формализме тензора погружения и описание результата в терминах флаксов состоит из следующих шагов.

1. Построить универсальный лагранжиан калиброванной супергравитации в терминах Θ (соответствующие формулы для всех размерностей известны в литературе [77, 78, 88, 89, 90]).
2. Сопоставить компоненты тензора погружения конкретным параметрам геометрических и негеометрических флаксов.
3. Решить квадратичные условия для заданного выбора Θ.
4. Записать лагранжиан для полученного тензора погружения.

По понятным причинам самым сложным шагом в алгоритме является решение квадратичных условий. Настолько, что не существует полной классификации всех его решений для размерности $D \leqslant 7$ в максимальном случае и $D \leqslant 6$ в полумаксимальном случае. Соответствующие классификации для более высоких размерностей были получены в [91].

2.6.2 Тензорная иерархия

С определенной выше длинной производной $D_\mu = \partial_\mu - gA_\mu{}^{\mathcal{M}} X_{\mathcal{M}}$ связана замечательная структура, называемая тензорной иерархией. Как и в случае теории Янга–Миллса, коммутатор длинных производных определяет ковариантный объект $[D_\mu, D_\nu] = -gF_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} X_{\mathcal{M}}$, связанный с неабелевым тензором напряженности:

$$F_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}{}^{\mathcal{M}} + gX_{[\mathcal{K}\mathcal{L}]}{}^{\mathcal{M}} A_\mu{}^{K} A_\nu{}^{L}. \qquad (2.95)$$

Пользуясь тождеством Якоби, получим калибровочные преобразования тензора напряженности:

$$\delta F_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} = -g\Lambda^{P} X_{\mathcal{P}\mathcal{N}}{}^{\mathcal{M}} F_{\mu\nu}{}^{\mathcal{N}} + 2g Z_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}{}^{\mathcal{M}} \Big(\Lambda^{P} F_{\mu\nu}{}^{Q} - A_{[\mu}{}^{\mathcal{P}} \delta A_{\nu]}{}^{Q} \Big). \tag{2.96}$$

Видно, что так построенный тензор напряженности не является ковариантным объектом и требует доопределения. Правильным ковариантным тензором будет

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} = F_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} + g Z_{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}^{\mathcal{M}} B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}, \tag{2.97}$$

полученный сдвигом на калибровочный потенциал 2-формы $B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}$. Преобразование $\delta B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}} = -2(\Lambda^{(P}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{Q)} - A_{[\mu}{}^{(\mathcal{P}}\delta A_{\nu]}{}^{Q)})$ компенсирует нежелательные члены в преобразовании $\delta\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}$. Замечательно, что такое доопределение не требует введения новых степеней свободы, поскольку размерная редукция дает точно необходимое число 2-форм. Однако, их учет приводит к необходимости определения соответствующих калибровочных преобразований. В итоге преобразования полей 1- и 2-форм имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta A_{\mu}{}^{\mathcal{M}} &= D_{\mu}\Lambda^{\mathcal{M}} - g Z_{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}^{\mathcal{M}} \Xi_{\mu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}, \\ \delta B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}\mathcal{N}} &= 2D_{[\mu}\Xi_{\nu]}{}^{\mathcal{M}\mathcal{N}} - 2(\Lambda^{(\mathcal{P}}\mathcal{H}_{\mu\nu}{}^{Q)} - A_{[\mu}{}^{(\mathcal{P}}\delta A_{\nu]}{}^{Q)}). \end{aligned} \tag{2.98}$$

Тождества Бьянки для полей $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}$ также требуют модификации и позволяют определить тензор напряженности для калибровочного потенциала 2-формы:

$$D_{[\mu}\mathcal{F}_{\nu\rho]}{}^{\mathcal{M}} = \frac{1}{3} g Z_{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}^{\mathcal{M}} H_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}. \tag{2.99}$$

Ожидаемо, тензор $H_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ не является ковариантным по тем же причинам и требует доопределения путем введения 3-формы и новых калибровочных преобразований. Такая лестница цепляющихся друг за друга калибровочных полей и преобразований называется тензорной иерархией и, вообще говоря, сама по себе не заканчивается. Однако, поскольку мы заинтересованы не в иерархии самой по себе, а в построении лагранжиана, который включает конечное число тензоров напряженности, в какой-то момент необходимость продолжения процедуры отпадает.

Схематически, конечный лагранжиан имеет вид:

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathcal{L} = &- \mathrm{Tr}\big(P_{\mu}P^{\mu}\big) - \frac{1}{4} M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} \mathcal{F}^{\mu\nu\mathcal{N}} - \frac{1}{2\cdot 3!} M_{\mathcal{M}\mathcal{K}} M_{\mathcal{N}\mathcal{L}} \mathcal{H}_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{M}\mathcal{N}} \mathcal{H}^{\mu\nu\rho\mathcal{K}\mathcal{L}} - \\ &- g e^{-1} V(M,X) \cdots , \end{aligned} \tag{2.100}$$

где $M_{\mathcal{MN}}$ — элемент фактор-группы G/K, построенный по элементу группы $\mathcal{V} \in G$, $V(M,X)$ — потенциал для скалярных полей. В четной размерности $D = 2n$ подобный лагранжиан определяет псевдодействие, поскольку необходимо учитывать условие самодуальности для тензоров напряженности $(n-1)$–форм. Скалярный потенциал $V(M,X)$ имеет сложную структуру минимумов, давая возможность генерировать массы для скалярных полей, параметризующих матрицу $M_{\mathcal{MN}}$. Точки обозначают дополнительные члены, включающие калибровочные поля, например, члены вида Черна–Саймонса.

2.6.3 Потенциалы, флаксы и суперсимметричные браны

Калибровочные поля, составляющие тензорную иерархию калиброванных супергравитаций, должны соответствовать суперсимметричным бранам в том же смысле, в каком поля p-форм IIA/B супергравитации соответствуют фундаментальной струне, Дирихле и NS бранам. Более того, компоненты тензора погружения также должны соответствовать бранам, но намотанным на нетривиальные циклы внутреннего пространства. К примеру, ненулевой поток p-формы $F_{(p)}$ через p-мерный цикл внутреннего пространства генерирует дополнительные слагаемые в скалярном потенциале, допуская нетривиальные стабильные вакуумные решения, типа решения Фройнда-Рубина. При этом оказывается неправильным ожидать, что каждый потенциал и каждая компонента тензора погружения соответствует некоторой суперсимметричной бране (намотанной тем или иным образом). Вопрос правильного подсчета суперсимметричных бран в максимальной супергравитации в различной размерности D рассматривался во множестве работ [92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99] и был структурирован в окончательной форме в работе [9]. Простым примером, когда число калибровочных потенциалов не соответствует числу суперсимметричных бран, является подсчет 7-бран в IIB супергравитации, в спектре которой присутствует три потенциала, заданных 8-формами. При этом суперсимметричных бран только две: D7 и 7^0_3, связанных друг с другом преобразованием S-дуальности. Это легко видеть из того факта, что эти браны магнитно взаимодействуют с аксиодилатоном $\tau = C_0 + ie^{-\varphi}$, параметризующим пространство SL(2)/SO(2). Третий потенциал не принадлежит орбите

D7-браны и не соответствует суперсимметричной бране, поскольку действие U-дуальности сохраняет свойство суперсимметричности. Классификация [9] построена на вытекающем из этой логики утверждении: все суперсимметричные браны принадлежат орбитам группы U-дуальности стандартных бран. При этом довольно очевидно, что число состояний, принадлежащих орбитам стандартных бран, дает минимальное число всех суперсимметричных бран. Дополнительно алгоритм классификации опирается на наблюдение, что все такие орбиты соответствуют действительным корням алгебры $\mathfrak{e}_{11}$. Группа E_{11} симметрий максимальной супергравитации понимается здесь в смысле полной группы симметрии, которая генерирует все группы U-дуальности в при размерной редукции [63, 100]. Все остальные орбиты соответствуют мнимым корням. Логика классификации состоит в том, что следует выбирать только орбиты, соответствующие действительным корням, поскольку мнимые корни не могут соответствовать суперсимметричным бранам [66].

Используя разложение присоединенного представления алгебры $\mathfrak{e}_9$ по отношению к действию ее подалгебры $\mathfrak{e}_d$, другими словами, при удалении одного мнимого корня и одного действительного корня ее диаграммы Дынкина, можно получить спектр всех калибровочных потенциалов представленных формами любого ранга и принадлежащих определенным мультиплетам. В Таб-

Таблица 6 — Тензорная иерархия максимальной супергравитации в размерностях $D = 10$ и $7 \geqslant D \geqslant 4$ представленная в виде мультиплета группы U-дуальности, которому принадлежат калибровочные потенциалы заданным p-формой.

$p \backslash D$	IIA	IIB	7	6	5	4
1	$\mathbf{1}$		$\overline{\mathbf{10}}$	$\mathbf{16}_c$	$\overline{\mathbf{27}}$	$\mathbf{56}$
2	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{10}$	$\mathbf{27}$	$\mathbf{133}$
3	$\mathbf{1}$		$\overline{\mathbf{5}}$	$\mathbf{16}_s$	$\mathbf{78}$	$\boxed{\mathbf{912}}$
4		$\mathbf{1}$	$\mathbf{10}$	$\mathbf{45}$	$\boxed{\mathbf{351}}$	$\mathbf{8645} \oplus \mathbf{133}$
5	$\mathbf{1}$		$\mathbf{24}$	$\boxed{\mathbf{144}_s}$	$\mathbf{1728} \oplus \mathbf{27}$	
6	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\boxed{\mathbf{40} \oplus \overline{\mathbf{15}}}$	$\mathbf{320} \oplus \mathbf{126} \oplus \mathbf{10}$		
7	$\mathbf{1}$		$\overline{\mathbf{70}} \oplus \overline{\mathbf{45}} \oplus \mathbf{5}$			
8	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$				
9	$\mathbf{1}$					
10	$2 \times \mathbf{1}$	$\mathbf{4} \oplus \mathbf{2}$				

лице 6 представлена часть классификации всех таких потенциалов, полная таблица может быть найдена в [9]. Рамкой обведены мультиплеты $p = D - 1$-форм, тензоры напряженности которых являются формами максимального ранга в размерности D. Соответствующие флаксы являются компонентами тензора погружения. Так, в размерности $D = 4$ мы видим $p = 3$ потенциал $C_{\mu\nu\rho}$, тензор напряженности которого $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ является компонентой 912-мерного мультиплета.

Из первых двух столбцов таблицы, соответствующих теориями типа IIA и IIB, можно извлечь информацию о количестве p-форм. Так, мы видим, что в теории IIB присутствуют две калибровочные 2-формы, это поле Калба-Рамона B_2 и RR поле C_2. То же для их магнитно-дуальных 6-форм. В теории типа IIA формы нечетного ранга соответствуют RR потенциалам, 2-форма и 6-форма — форма Калба-Рамона и ее магнитный партнер. Дополнительно находим $p = 8$ и $p = 10$ потенциалы, которые не соответствуют суперсимметричным бранам, как было показано в [92, 101]. Как обсуждалось выше, среди трех потенциалов

Таблица 7 — Полное число p-бран в размерности D

$p\backslash D$	IIA	IIB	9	8	7	6	5	4	3
0	1		3	6	10	16	27	56	240
1	1	2	2	3	5	10	27	126	2160
2	1		1	2	5	16	72	576	17280
3		1	1	3	10	40	216	2016	
4	1		2	6	20	80	432		
5	1	2	3	8	25	96			
6	1		2	6	20				
7		2	2	6					
8	1		2						
9		2							

$p = 8$ теории типа IIB только два соответствуют суперсимметричным бранам, поскольку именно они соответствуют орбитам, генерируемым действительными корнями алгебры $\mathfrak{e}_{11}$. Количество суперсимметричных бран для всех форм и размерностей приведено в Таблице 7. Данные в этой таблице были получены в работе [9] анализом орбит корней алгебры $\mathfrak{e}_{11}$. Кроме того, разложением представлений по отношению к подгруппе $\mathrm{O}(10 - D{,}10 - D)$ было подсчитано число p-бран в каждой размерности D с натяжением зависящим от $g_s^{-\alpha}$ с заданным α.

Для большей наглядности изложения проиллюстриуем этот расчет явным примером 5-бран в размерности D=7. Такие браны соответствуют потенциалам, тензоры напряженности которых дают вклад в тензор погружения D=7 калиброванной супергравитации, принадлежащий представлению $\mathbf{40} \oplus \overline{\mathbf{15}}$. Разложим это представление по действию подалгебры $\mathfrak{o}(3,3) \equiv \mathfrak{su}(4)$

$$\overline{\mathbf{15}} \oplus \mathbf{40} \rightarrow \mathbf{1}_{-4} \oplus \mathbf{20}_{-3} \oplus \mathbf{10}_{-2} \oplus \mathbf{4}_{-1} \oplus \mathbf{4}_{-3} \oplus \mathbf{6}_{2} \oplus \overline{\mathbf{10}}_{2}, \tag{2.101}$$

где нижний индекс обозначает (правильно нормированный) вес по отношению к подгруппе GL(1) и равен степени $-\alpha$ множителя $g_s^{-\alpha}$ в натяжении бран. Первые четыре представления соответствуют суперсимметричным бранам. Так 4 браны с натяжением g_s^{-1} — это Дирихле браны D6 и D8. Действительно, вложить D6-брану в 10-мерное пространство так, чтобы в 7 направлениях она выглядела как 5-брана можно, вложив шестое направление в 3-мерное компактное пространство. Это можно сделать тремя способами. D8-брану можно так вложить единственным образом. g_s^{-2} 5-браны представляют собой ор-

Таблица 8 — Вложение D6 и D8 бран в 10-мерное пространство. $\times$ обозначает направление мирового объема

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$		
D6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$				$\times$	
D6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					$\times$
D8	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			$\times$	$\times$	$\times$

биту NS5-браны и включают KK5-монополь и экзотические 5_2^2 и 5_2^3 браны. 5_2^4-брана не может быть вложена в 10-мерное пространство так, чтобы получилась стандартная 5-брана в размерности $D = 7$. Подсчитывая количество способов расположить специальные циклы во внутреннем трехмерном пространстве, получим общее число g_s^{-2}-бран равным восьми. Соответствующие вложения показаны в Таблице 9. Среди g_s^{-3}-бран имеем только 6_3^1, $7_3^{(1,0)}$ и $5_3^{(1,2)}$ браны. Для пояснения обозначений напомним, что специальным циклом называется такое направление в трансверсальном пространстве браны, от радиуса которого натяжение зависит нелинейно. Так цикл Taub-NUT дает квадратичную зависимость от соответствующего радиуса. Легко увидеть,

Таблица 9 — Вложение 5^0_2,5^1_2,5^2_2 бран в 10-мерное пространство. $\times$ обозначает направление мирового объема, $\odot$ обозначает направление специальных циклов.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5 (5^0_2)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					
KK5 (5^1_2)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			$\odot$		
KK5 (5^1_2)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$				$\odot$	
KK5 (5^1_2)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					$\odot$
5^2_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			$\odot$	$\odot$	
5^2_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			$\odot$		$\odot$
5^2_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$				$\odot$	$\odot$
5^3_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$			$\odot$	$\odot$	$\odot$

что вейлевские отражения могут генерировать состояния с зависимостями от радиусов в степени больше, чем два. Такие состояния обозначаются $p_\alpha^{(c_n\dots c_2)}$, где p обозначает размерность браны, α — степень g_s в знаменателе, c_i — количество специальных направлений, от степени i радиуса которых зависит натяжение. Так $5_3^{(1,2)}$ брана имеет два квадратичных цикла и 1 кубический цикл. Несложно подсчитать, что всего существует шесть способов вложить 6^1_3-брану, три способа вложить $7_3^{(1,0)}$-брану и три способа вложить $5_3^{(1,2)}$-брану. Наконец, единственная $\alpha = 4$ брана 5^3_4 может быть вложена в размерность 10 необходимым образом. Итого имеем $4 + 8 + 12 + 1 = 25$ 5-бран в размерности $D = 7$, что согласуется с числом в Таблице 7.

Из приведенной классификации можно заключить в частности, что ненулевые компоненты тензоры погружения генерируются намотками бран на циклы внутреннего пространства при размерной редукции. При этом стандартные браны генерируют компоненты тензоры погружения, соответствующие потокам тензора напряженности в стандартном смысле:

$$\hat{\mathcal{F}}_p = \int_{\Sigma_p} \mathcal{F}_{(p)}. \tag{2.102}$$

Интерпретация других компонент менее очевидна. Естественно отождествить их с более общим понятием тензора напряженности, а именно, негеометрические флаксы, индуцированные потенциалами смешанной симметрии, взаимодействующими с экзотическими бранами. Пунктирная линия на Рис.

2.3 обозначает именно такого типа редукции в присутствии негеометрических флаксов.

Поскольку 11-мерная супергравитация в ее стандартной формулировке не содержит потенциалов смешанной симметрии, негеометрические компактификации не могут быть интерпретированы в терминах стандартных редукций. Однако, симметрии U-дуальности могут быть использованы для формулировки расширенной теории, реализующей их геометрически. Последующие главы посвящены описанию соответствующей расширенной геометрии, построению таких теорий, называемых исключительными теориями, и описанию негеометрических редукций и динамики экзотических бран.

Глава 3. Исключительная теория поля

3.1 Расширенное пространство

Симметрия U-дуальности появляется при редукции 11-мерной супергравитации на тор, максимально симметричное пространство. Ее подгруппа, симметрия S-дуальности супергравитации типа IIB в размерности 10, геометрически интерпретируется как группа симметрий двумерного тора. Сама IIB теория при этом расширяется до F-теории, 12-мерного обобщения супергравитации со специфически устроенным фоновым пространством, являющимся комплексным эллиптическим слоением. Комплексная структура слоев τ интерпретируется как аксиодилатон в 10-мерной теории. Вообще говоря, F-теория является скорее особой формулировкой обычной IIB супергравитации, включающей описание эффектов, связанных с присутствием (p,q) 7-бран. Изначальная формулировка F-теории была предложена именно в связи с описанием размерных редукций в присутствии D-бран с учетом непертурбативных эффектов [102]. Заметим, что экзотические браны являются непертурбативными объектами, что отражается в зависимости натяжения от все более высоких отрицательных степеней струнной константы связи g_s.

Калиброванная супергравитация дает алгебраическое описание негеометрических редукций в терминах представлений группы симметрии. Для построения геометрического описания следует ввести понятие расширенного пространства. Естественно считать тор частным случаем такого пространства, максимально реализующего симметрию дуальности, при этом сама U-дуальность должна пониматься как группа локальных преобразований координат на расширенном пространстве. Здесь можно видеть прямую аналогию с плоским d-мерным пространством, сохраняющим максимальную глобальную группу симметрий $\mathrm{GL}(d)$ локальных диффеоморфизмов:

$$\frac{\partial x'^m}{\partial x^n} \ \rightarrow \ \Lambda^m{}_n = \mathrm{const}. \tag{3.1}$$

Таким образом, задача построения расширенного пространства состоит в определении набора координат, линейные преобразования которых соответствуют глобальной группе U-дуальности E_d в размерности d. Очевидно, что следует дополнить d координат правильным способом, поскольку группа E_d не имеет представлений размерности d.

Прозрачнее всего логика введения новых координат прослеживается для группы Т-дуальности, которая является пертурбативной симметрией и допускает описание в терминах отдельных мод возбуждений струны на плоском торе. Массовый спектр возбуждений замкнутой струны на фоне тора $\mathbb{T}^d$ может быть представлен в следующем виде:

$$M^2 = \mathcal{P}^{\mathcal{M}}\mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\mathcal{P}^{\mathcal{N}} + 2(N + \bar{N} - 2), \tag{3.2}$$

где $\mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$ — обобщенная метрика, введенная в Главе 1.1, $N,\bar{N}$ — осцилляторные моды, $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}$ — обобщенный импульс, объединяющий моды импульса p_m и намоток w^m вдоль каждого из направлений тора

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} p_m \\ w^m \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Обозначая правые и левые гармоники скалярных полей на мировом листе струны $X^m_R(\tau,\sigma)$ и $X^m_{\mathcal{L}}(\tau,\sigma)$ соответственно, запишем для координаты

$$X^m(\tau,\sigma) = X^m_R(\tau,\sigma) + X^m_{\mathcal{L}}(\tau,\sigma) = X^m_0 + p^m\sigma + \ldots, \tag{3.4}$$

где точки обозначают сумму осцилляторных мод, X^m_0 — координата центра масс струны. Импульс p^m является нулевой модой производной скалярного поля X^m по координате σ на мировом листе струны

$$p^m = \frac{1}{L}\int_0^L d\sigma\partial_\sigma X^m(\tau,\sigma). \tag{3.5}$$

Таким же образом можно определить намотки w^m как нулевую моду производной от координаты $\tilde{X}^m = X^m_R - X^m_{\mathcal{L}}$ по координате τ

$$w^m = \frac{1}{L}\int_0^L d\sigma\partial_\tau \tilde{X}^m(\tau,\sigma). \tag{3.6}$$

Условие совпадения массовых уровней в спектре струны накладывает ограничение на моды импульса и намоток $p^m w_m = 0$.

Как было показано в Главе 1 уравнения движения замкнутой струны на торе могут быть эквивалентно записаны как в терминах скалярных полей $X^m(\tau,\sigma)$, так и в терминах дуальных $\tilde{X}_m(\tau,\sigma)$. В работе [103] было предложено рассматривать нормальные и дуальные скалярные поля на мировом объеме струны. Было показано, что соответствующая двойная сигма модель инвариантна относительно конформных преобразований и двумерных лоренцевых преобразований как на классическом, так и на квантовом уровне. В более ранней работе [104] показана квантовая эквивалентность дуальных друг другу моделей. Естественно распространить интерпретацию скалярных полей X^m как координат вложения мирового листа струны в объемлющее пространство и на дуальные поля $\tilde{X}_m$, рассматривая расширенное пространство, параметризованное координатами $\mathbb{X}^{\mathcal{M}} = (X^m, \tilde{X}_m)$. Условие совпадения уровней накладывает ограничения на функции, определенные на таком пространстве, которое в ковариантном виде записывается следующим образом

$$\eta^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_{\mathcal{M}}\Phi_1(\mathbb{X})\partial_{\mathcal{N}}\Phi_2(\mathbb{X}) = 0, \tag{3.7}$$

где $\Phi_{1,2}(\mathbb{X})$ — две произвольные функции на расширенном пространстве. Фактические, условие проекции означает, что все функции обязаны зависеть только от половины всех координат на расширенном пространстве, что задает факторизацию на пространстве функций. По историческим причинам такое условие называется условием проекции или условием сечения (section condtion). Далее в тексте будут использоваться оба названия.

Переход к описанию в терминах расширенного пространства предоставляет возможность построить формулировку сигма-модели и супергравитации, ковариантную относительно симметрии дуальности. Впервые описание динамики струны в терминах геометрии обобщенного пространства было предложено в работе [105] 1993 года, где было сформулировано понятие обобщенной производной Ли, условие проекции, построены ковариантные производные и получены выражения для обобщенной кривизны и кручения. Дальнейшее развитие идея эквивалентного рассмотрения обычных (геометрических) и дуальных координат получила в работах [106, 107, 108], где было построено действие, инвариантное относительно действия группы симметрий O(10,10), показана его независимость от выбранного фона, получены преобразования обобщенных тензоров при конечных преобразованиях, инфинитезимальный предел которых индуцирует обобщенную производную Ли. Было предложено название «двойная теория поля» из-за удвоения размерности пространства.

Правильный подсчет координат расширенного пространства для теорий поля, ковариантных относительно локальной группы U-дуальности оказывается существенно сложнее, чем просто их удвоение. Действительно, удвоение координат произошло из-за необходимости учета мод намоток струны, при этом учитывать моды намоток других объектов с другой зависимостью натяжения от g_s нет необходимости, поскольку T-дуальность не перемешивает их с g_s^0 орбитами. Как мы видели выше, с группой U-дуальности ситуация кардинально иная, и поэтому необходимо учитывать моды намоток всех объектов теории. К счастью, число бран, которые можно намотать на d-мерный внутренний тор ограничено, что дает конечномерное расширенное пространство (при $d \leqslant 8$). Заметим, что подсчет мод намоток бран в разных размерностях буквально совпадает с подсчетом числа 1/2БПС состояний, и именно поэтому дает те же представления группы симметрии. Расширенное пространство для теории с группой U-дуальности SL(5) было построено в работе [20]. Там же было построено SL(5)-ковариантное действие для обобщенной метрики (1.36). На другие группы U-дуальности полученные результаты были обобщены в работах [21, 22, 23, 24].

Вычислим размерности расширенного пространства для каждой группы U-дуальности прямым подсчетом мод намоток. Как обсуждалось выше, спектр протяженных объектов M-теории включает M2, M5-браны, KK6-монополь, а также множество экзотических бран, которые оказываются существенными для теорий с группой $E_{8(8)}$ и выше. В Таблице 10 выписаны неприводимые представления группы U-дуальности для каждой размерности d внутреннего тора, отвечающие (глобальным) преобразованиям координат обобщенного пространства $\mathbb{X}^{\mathcal{M}}$. Соответствующий обобщенный импульс обозначен $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ и включает обычный импульс p^m, намотки M2-браны w_{mn}, M5-браны $w_{m_1\cdots_5}$ и т.д. Таким образом, число намоток M2 и M5 соответствует числу компонент 2- и 5-форм в размерности d соответственно и равно биномиальным коэффициентам C_d^2 и C_d^5. Видно, что вклад намоток M5-браны оказывается ненулевым, только начиная с размерности $d = 5$, поскольку она просто не может быть полностью намотана на число меньшее направлений. Калуца-кляйновский монопль $KK6$ является объектом с мировым объемом размерности 6+1 и дополнительно одним специальным Taub–NUT циклом. Намотки KK6-монополя параметризуются тензором смешанной симметрии $z_{(7,1)}$, как и соответствующий центральный заряд алгебры $\mathcal{N} = 1$ суперсимметрии в $D = 11$. Компоненты тензора смешанной симметрии $z_{(7,1)}$ имеют вид:

$$z_{a_1\ldots a_7,b}, \tag{3.8}$$

Таблица 10 — Число намоток бран М-теории на тор $\mathbb{T}^d$. В таблице G обозначает группу U-дуальности, $\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$ обозначает представление группы дуальности, которому принадлежат координаты расширенного пространства.

d	G	P	M2	M5	KK6	5^3	2^6	$0^{(1,7)}$	$\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$
2	SL(2)	2	1	-	-	-	-	-	**3**
3	SL(3)×SL(2)	3	3	-	-	-	-	-	**(3,2)**
4	SL(5)	4	6	-	-	-	-	-	**10**
5	SO(5,5)	5	10	1	-	-	-	-	$\mathbf{16}_s$
6	$E_{6(6)}$	6	15	6	-	-	-	-	**27**
7	$E_{7(7)}$	7	21	21	7	-	-	-	**56**
8	$E_{8(8)}$	8	28	56	56	56	28	8	**248**

причем ненулевыми являются только компоненты, для которых индекс b равен одному из индексов a_i. Например, для $d = 7$ такой тензор имеет 7 компонент. Для $d = 8$ удобно свернуть $z_{a_1\dots a_7,b}$ с абсолютно антисимметричным тензором, чтобы получить

$$z_b{}^a = z_{a_1\dots a_7,b}\, \varepsilon^{a_1\dots a_7 a}. \tag{3.9}$$

Всего $z_a{}^b$ имеет $8\times 8 = 64$ компонент, а дополнительное условие $z_a{}^a\big|_{\text{no sum}} = 0$ вычитает 8 компонент, оставляя только 56. Также для $d = 8$ необходимо добавить моды намоток экзотических бран 5^3,2^6 и $0^{(1,7)}$, которые имеют три, шесть и семь специальных циклов соответственно. Дополнительно, $0^{(1,7)}$-брана имеет специальный цикл, от радиуса которого натяжение зависит как R^3 (кубический цикл). Моды намоток этих бран параметризуются следующими тензорами смешанной симметрии:

$$\begin{aligned} 5^3: &\quad z_{a_1\dots a_8,b_1b_2b_3} &\quad \# = 56,\\ 2^6: &\quad z_{a_1\dots a_8,b_1\dots b_6} &\quad \# = 28,\\ 0^{(1,7)}: &\quad z_{a_1\dots a_8,b_1\dots b_7,c_1} &\quad \# = 8. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Как и для потенциала, связанного с КК-монополем, ненулевыми компонентами тензоров здесь будут только те, для которых индексы справа от запятых равны тем, что слева. Например, в последней строке следует считать $c_1 = b_1 = a_1$ и b_i=a_i. Оставшиеся свободными индексы a_i соответствуют направлениям самой браны.

В Таблице 10 последний столбец содержит размерности представления $\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$, в котором преобразуются координаты расширенного пространства. Заметим, что в этом же представлении преобразуются векторные поля $A_\mu{}^{\mathcal{M}}$, а следовательно и генераторы $X_{\mathcal{M}}$ калиброванной супергравитации. Это наблюдение имеет важные следствия и является ключевым свойством для построения калиброванных супергравитаций обобщенными редукциями Шерка–Шварца. Замечательным фактом является то, что сумма всех чисел намоток на $d < 8$ направлений равна размерности неприводимого представления группы U-дуальности $\mathrm{E}_{d(d)}$. Однако, для $d = 8$, суммируя все моды намотки и импульса, мы получим число 240, причем минимальная размерность представлений группы E_8 равна 248. Важно, что это несоответствие не может быть устранено добавлением экзотических бран, поскольку спектр М-теории не содержит больше объектов, которые могут быть полностью намотаны на восемь направлений. То же самое несоответствие видно в калиброванной теории, где число векторных полей оказывается равно 240, и необходимо добавить еще 8 векторных полей, связанных некоторыми условиями, для восстановления числа физический степеней свободы. То же верно для расширенного пространства, где добавляются восемь координат и дополнительное условие проекции. Ситуация для $d > 8$ оказывается еще более драматической, поскольку группа дуальности является бесконечномерной и расширенное пространство имеет бесконечную размерность. В настоящей диссертации мы рассматриваем теории на конечномерных расширенных пространствах с группами симметрии $\mathrm{SL}(5), \mathrm{SO}(5{,}5), \mathrm{E}_6$.

3.2 Обобщенная производная Ли и условие проекции

Из обсуждения выше понятно, что группа дуальности в построении геометрии расширенного пространства играет ту же роль, что и группа $\mathrm{GL}(d)$ в геометрии общей теории относительности. Инфинитезимальные преобразования координат $x^m \longrightarrow x^m + \xi^m$ точки p на римановом многообразии индуцируют преобразование тензоров, задаваемое производной Ли. Достаточно определить ее для векторов:

$$L_\xi V^m = \xi^n \partial_n V^m + \partial_n \xi^m V^n. \tag{3.11}$$

Здесь первое слагаемое возникает из изменения координат самой точки p, и естественно его называть трансляционным. Второе слагаемое имеет вид действия некоторой $\mathfrak{gl}(d)$ матрицы $\Lambda_n{}^m = \partial_n \xi^m$, вообще говоря зависящей от точки, на компоненты вектора. Представленная в таком виде производная Ли может быть непосредственно обобщена на случай других групп локальной симметрии

$$\delta_\Lambda V^{\mathcal{M}} = \mathcal{L}_\Lambda V^{\mathcal{M}} = \Lambda^{\mathcal{N}} \partial_{\mathcal{N}} V^{\mathcal{M}} + \alpha_d \mathbb{P}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}{}^{K}{}_{\mathcal{L}} \partial_{\mathcal{K}} \Lambda^{L} V^{\mathcal{N}} + \lambda_d \partial_{\mathcal{N}} \Lambda^{\mathcal{N}} V^{\mathcal{M}} . \tag{3.12}$$

Здесь $V^{\mathcal{M}} = V^{\mathcal{M}}(\mathbb{X})$ — компоненты обобщенного вектора, под которыми мы будем понимать набор $V^{\mathcal{M}}$, преобразующийся согласно правилу выше. Индексы $\mathcal{M},\mathcal{N} = 1,\dots,\dim\mathcal{R}_d$ нумеруют компоненты обобщенного вектора. Первое слагаемое в (3.12) является трансляционным членом и естественно имеет тот же вид, что и в случае преобразования тензоров на римановом пространстве. Второе слагаемое имеет вид преобразования из группы дуальности, действующее в каждой точке на компоненты $V^{\mathcal{M}}$. Оно построено путем проекции $\dim\mathcal{R}_d \times \dim\mathcal{R}_d$ матрицы $\partial_{\mathcal{N}}\Lambda^{\mathcal{M}}$ в элемент алгебры при помощи проектора $\mathbb{P}$. Третье слагаемое соответствует преобразованию за счет ненулевого веса λ_n, которое, вообще говоря, может быть добавлено и для тензоров в ОТО, но не является там необходимым. По причинам, которые будут подробно обсуждаться ниже, в теориях, ковариантных относительно групп дуальности, введение ненулевого веса для отдельных тензоров оказывается необходимым.

Важнейшим свойством объектов на расширенном пространстве является то, что преобразования обобщенных векторов, определенные выше, образуют замкнутую алгебру, удовлетворяющую тождеству Якоби только с точностью до членов определенного вида:

$$\begin{aligned} [\delta_{\Lambda_1},\delta_{\Lambda_2}] &= \delta_{[\Lambda_1,\Lambda_2]_E} + F_0, \\ [\delta_{\Lambda_1},\delta_{\Lambda_2},\delta_{\Lambda_3}] &= F_1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Скобка $[\,,]_E$ определена стандартным образом:

$$[\Lambda_1,\Lambda_2]_E = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\Lambda_1}\Lambda_2 - \mathcal{L}_{\Lambda_2}\Lambda_1). \tag{3.14}$$

К счастью оба члена F_0 и F_1, являющиеся довольно нетривиальной комбинацией полей и их производных, оказываются тождественно равными нулю, если все функции на расширенном пространстве удовлетворяют условию проекции

$$Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{M}} f\, \partial_{\mathcal{N}} g = 0. \tag{3.15}$$

Здесь f,g обозначают любые функции на расширенном пространстве, в том числе компоненты обобщенных тензоров. Так называемый Y-тензор $Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}}$ построен из инвариантов группы дуальности следующим образом [109]:

$$
\begin{aligned}
&Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} = -\alpha_n \mathbb{P}_{\mathcal{K}}{}^{M}{}_{L}{}^{\mathcal{N}} + \beta_n \delta^{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}} \delta^{\mathcal{N}}_{\mathcal{L}} + \delta^{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}} \delta^{\mathcal{N}}_{\mathcal{K}},\\
&Y^{(\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} Y^{\mathcal{R})\mathcal{L}}{}_{\mathcal{PQ}} - Y^{(\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{PQ}} \delta^{R)}_{\mathcal{K}} = 0, \qquad \text{для } d \leqslant 5,\\
&Y^{\mathcal{MP}}{}_{\mathcal{KQ}} Y^{\mathcal{QN}}{}_{\mathcal{PL}} = (2-\alpha_n) Y^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} + (D\beta_n + \alpha_n)\beta_n \delta^{\mathcal{M}}_{\mathcal{K}} \delta^{\mathcal{N}}_{\mathcal{L}} + (\alpha_n - 1)\delta^{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}} \delta^{\mathcal{N}}_{\mathcal{K}}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Поясним обозначения: $d = 11 - D$ равно числу направлений 11-мерного пространства, которые выбраны для построения расширенного пространства, $\mathbb{P}_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{L}}{}^{\mathcal{N}}$ обозначает проектор на присоединенное представление группы дуальности $\mathbb{P}_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{P}}{}^{\mathcal{Q}} \mathbb{P}_{\mathcal{Q}}{}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{L}}{}^{\mathcal{N}} = \mathbb{P}_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{L}}{}^{\mathcal{N}}$ и нормирован так, что $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{M}} = \dim(adj)$. Коэффициенты α_d and β_d в зависимости от выбранной группы дуальности принимают следующие численные значения: $(\alpha_4,\beta_4) = (3,\frac{1}{5})$, $(\alpha_5,\beta_5) = (4,\frac{1}{4})$, $(\alpha_6,\beta_6) = (6,\frac{1}{3})$. Y-тензор в явном виде для некоторых групп U-дуальности, релевантных для последующего изложения, приведен в Таблице 11. Описанная конструкция верна только для конечномерных расширенных пространств и преобразований обобщенных тензоров на них. Описание преобразований обобщенных тензоров при преобразованиях, задаваемых алгебрами Каца–Муди, предложено в работе [110].

Таблица 11 — Y-тензор для некоторых групп T- и U-дуальности. Здесь греческие индексы $\alpha,\beta,\gamma = 1,\ldots,5$ нумеруют пространство представления **5** группы SL(5), индекс i нумерует пространство представления **10** группы SO(5,5). В правых частях равенств стоят комбинации инвариантных тензоров соответствующих групп.

Группа	Y-тензор	$\dim\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$
O(d,d)	$Y^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}} = \eta^{\mathcal{MN}}\eta_{\mathcal{KL}}$	$2d$
SL(5)	$Y^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}} = \varepsilon^{\alpha\mathcal{MN}}\varepsilon_{\alpha\mathcal{KL}}$	10
SO(5,5)	$Y^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}} = \frac{1}{2}(\gamma^i)^{\mathcal{MN}}(\gamma_i)_{\mathcal{KL}}$	16
$E_{6(6)}$	$Y^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}} = 10\, d^{\mathcal{MN}\mathcal{R}} d_{\mathcal{KL}\mathcal{R}}$	27
$E_{7(7)}$	$Y^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}} = 12\, c^{\mathcal{MN}}{}_{\mathcal{KL}} + \delta^{(M}_{\mathcal{K}}\delta^{N)}_{\mathcal{L}} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mathcal{MN}}\varepsilon_{\mathcal{KL}}$	56

Исключительные теории поля формулируются на пространстве-времени, параметризованном d так называемыми внешними (обычными) координатами x^μ и $D = \dim\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$ так называемыми внутренними координатами расширенного пространства $\mathbb{X}^{\mathcal{M}}$. Названия «внешнее» и «внутреннее» для наборов координат являются условными, поскольку размерная редукция вообще говоря не подразумевается. Поэтому размерность пространств, на которых определяются исключительные теории поля всегда больше 11. При этом условие проекции обязано выполняться, что эффективно ограничивает размерность до 11 или 10, в зависимости от выбора решения.

Рассмотрим в качестве примера расширенное пространство для теории с группой дуальности SL(5). Под действием глобальных дуальностей десять координат преобразуются как векторы пространства представления **10** и могут быть параметризованы компонентами антисимметричной матрицы $\{\mathbb{X}^{\mathcal{M}}\} = \{\mathbb{X}^{[MN]}\}$. Здесь индексы $M,N = 1,\ldots,5$ нумеруют компоненты векторов фундаментального представления. Разложим координаты на расширенном пространстве по представлениям геометрической подгруппы GL(4) группы дуальности

$$\mathbb{X}^{[MN]} = \begin{cases} \mathbb{X}^{m5} = x^m, \\ \mathbb{X}^{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon^{mnkl}y_{kl}, \end{cases} \qquad m,n = 1,\cdots,4 \tag{3.17}$$

где шесть координат y_{mn} соответствуют модам намотки M2-браны, а четыре координаты x^m являются стандартными геометрическими координатами. Условие проекции для выбранной группы имеет вид

$$\varepsilon^{MNKLP}\partial_{MN} \otimes \partial_{KL} = 0, \tag{3.18}$$

где равенство следует понимать в смысле действия левой части на произвольные функции на расширенном пространстве. Условие проекции имеет несколько классов решений, соответствующих различным супергравитациям. Самое очевидное решение $\partial_{MN} = 0$, то есть ничего не зависит от координат на расширенном пространстве. Такое решение соответствует обычной калуца-кляйновской размерной редукции на тор. Менее очевидным решением является выбор функций, которые не зависят от дуальных координат: $\partial_{mn} = 0$. Действительно, разложим условие проекции под действием геометрической подгруппы GL(4), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{mnkl}\partial_{mn} \otimes \partial_{kl} = 0, \\ \varepsilon^{mnkl}\partial_{nk} \otimes \partial_{5l} = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Очевидно, в таком случае оба уравнения выполняются, и мы получим функции, зависящие от 7 координат x^μ и 4 координат x^m. Можно показать, и это будет сделано ниже, что при этом исключительная теория поля воспроизводит стандартную 11-мерную супергравитацию. Нетривиальность конструкции здесь в том, что можно выбирать любое вложение геометрической подгруппы GL(4), каждое из которых будет давать 11-мерную супергравитацию. Решения уравнений полученных теорий будут связаны друг с другом преобразованиями U-дуальности. Такой подход позволяет естественным образом генерировать решения, соответствующие экзотическим бранам, чему посвящена Глава 5.

Говоря алгебраическим языком, вложение 11-мерной супергравитации в исключительную теории поля соответствует вложению максимальной геометрической подгруппы GL(d) в группу U-дуальности $\mathrm{E}_{d(d)}$. В терминах диаграмм Дынкина это соответствует стиранию одного корня. Понятно, что дополнительное стирание корня полученной диаграммы типа A будет давать IIA супергравитацию и описывать вложение группы GL(d-1). Оказывается, существует другой класс вложений геометрической подгруппы GL(d-1), связанный с IIA вложением внешним автоморфизмом. Такое вложение соответствует IIB теории, а внешний автоморфизм описывает Т-дуальность между IIA и IIB. Следует отметить, что в случае IIB вложения максимальной подгруппой является $\mathrm{GL}(d-1)\times\mathrm{SL}(2)$, где дополнительный фактор соответствует группе S-дуальности. Таким образом, на примере SL(5) теории имеем два вложения

$$
\begin{aligned}
11:\quad & \mathrm{SL}(5)\hookleftarrow \mathrm{SL}(4)\times\mathrm{GL}(1),\\
& \mathbf{10}\to\mathbf{4}_{+1}\oplus\mathbf{6}_{-2},\\
IIB:\quad & \mathrm{SL}(5)\hookleftarrow \mathrm{GL}(3)\times\mathrm{SL}(2),\\
& \mathbf{10}\to(\mathbf{3},\mathbf{2})_{-1}\oplus(\bar{\mathbf{3}},\mathbf{1})_{4}\oplus(\mathbf{1},\mathbf{1})_{-6},
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

где нижние индексы обозначают вес векторов представления по GL(1) подгруппе. В компонентах координат X^{MN} разложение для типа IIB можно записать следующим обоазом:

$$
X^{MN}\ \to\ (X^{mn},X^{m\alpha},X^{\alpha\beta}),\quad m,n=1,2,3,\quad \alpha,\beta=1,2. \tag{3.21}
$$

Здесь латинские индексы нумеруют пространство представления **3** группы GL(3), а греческие индексы — пространство представления **2** группы S-дуальности SL(2). Условие проекции для вложения теории типа IIB в исключительную теорию поля принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{mnk}\partial_{mn}\otimes\partial_{m\alpha}&=0,\\ \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{mnk}(\partial_{mn}\otimes\partial_{\alpha\beta}+2\partial_{\alpha k}\otimes\partial_{\beta k})&=0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Решения этого условия, оставляющие зависимость от трех координат, принадлежат двум классам, в зависимости от нарушения SL(2) симметрии. Выбирая решения вида $\partial_{mn} = 0, \partial_{\alpha\beta} = 0$ и, например, $\partial_{2m} = 0$, получим теорию без SL(2) инвариантности, а именно, супергравитацию типа IIA. Условие $\partial_{\alpha m} = 0, \partial_{\alpha\beta} = 0$ является симметричным относительно S-дуальности, и соответствующая теория будет SL(2)–ковариантной формулировкой супергравитации типа IIB. Отдельно можно рассмотреть ограничения, не полностью решающие условие проекции, а именно $\partial_{\alpha\beta} = 0, \partial_{2m} = 0$. Определяя $\tilde{\partial}^m = \varepsilon^{mnk}\partial_{nk}$, оставшееся условие мы можем записать в виде

$$\tilde{\partial}^m\otimes\partial_m = 0. \tag{3.23}$$

Полученное выражения является ничем иным как условием проекции для O(3,3) двойной теории поля, записанным в GL(3) обозначениях. Естественно ожидать, что исключительная теория поля содержит двойную теорию поля, поскольку группы T-дуальности является подгруппой U-дуальности. Впервые это было показано для вложения O(3,3) теории в SL(5) теорию в работе [111]

Кроме тривиального решения $\partial_{\mathcal{M}} = 0$ условия проекции, соответствующего редукции на тор, и решений, дающих 11-мерную и IIA/B супергравитации, существует специальный класс решений, где зависимость от координат на обобщенном пространстве определяется некоторой матрицей $U_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}$, называемой твистовой. Например, для векторных полей теории $A_\mu{}^{\mathcal{M}}(x,\mathbb{X})$ имеем анзац

$$A_\mu{}^{\mathcal{M}}(x,\mathbb{X}) = U_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{M}}(\mathbb{X})A_\mu{}^{\mathcal{N}}(x). \tag{3.24}$$

В таком случае условие замыкания алгебры обобщенных диффеоморфизмов сводится к некоторым условиям на твистовые матрицы. При определенных условиях такие обобщенные редукции Шерка–Шварца воспроизводят калиброванные супергравитации. Причем, все компоненты тензора погружения Θ получают интерпрертацию в терминах комбинаций компонент твистовой матрицы и их производных. Более подробно такие редукции будут рассматриваться в Главе 4.

3.3 Преобразования полей и тензорная иерархия

Рассмотрим преобразования полей исключительной теории под действием диффеоморфизмов обычного пространства и симметрий, связанных с расширенным пространством. Спектр полей исключительной теории с любой группой симметрии включает метрическое полей $g_{\mu\nu}$, $\mathcal{R}_{\mathbb{X}}$ векторных полей $A_\mu{}^{\mathcal{M}}$, обобщенную метрику $\mathcal{M}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$ параметризующую фактор-группу $\mathrm{E}_{d(d)}/H$ и тензорные поля $\mathcal{B}_{\mu_1\dots\mu_r}{}^{\alpha}$, представленные формами ранга 2 и выше, принадлежащие определенным представлениям группы дуальности. Суперсимметричные теории дополнительно включают фермионы, принадлежащие мультиплетам по действию локальной группы дуальности H. Как обсуждалось выше, локально геометрия расширенного пространства задается в терминах обобщенной производной Ли $\mathcal{L}_\Lambda$, определяющей инфинитезимальные преобразования обобщенных тензоров. Поскольку, вообще говоря, вектор $\Lambda^{\mathcal{M}} = \Lambda^{\mathcal{M}}(x,\mathbb{X})$ в полной теории зависит не только от собственно координат $\mathbb{X}^{\mathcal{M}}$ на расширенном пространстве, но и от внешних координат x^μ, производные ∂_μ обобщенных векторов не преобразуются ковариантно. Следуя стандартному подходу калибровочных теорий, введем длинную производную:

$$D_\mu = \partial_\mu - \mathcal{L}_{A_\mu}. \tag{3.25}$$

Так определенная длинная производная имеет ту же природу, что и длинная производная $D_\mu = \partial_\mu + gX_{\mathcal{M}}A_\mu{}^{\mathcal{M}}$ калиброванной супергравитации, с той лишь разницей, что генераторы $X_{\mathcal{M}}$ теперь представляют собой дифференциальные операторы на обобщенном пространстве. Ожидаемо, структура тензорной иерархии повторяется здесь с точностью до соответствующих переобозначений.

Определим тензор напряженности $F_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}$ стандартным образом $[D_\mu,D_\nu] = -\mathcal{L}_{F_{\mu\nu}}$, что дает

$$F_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}{}^{\mathcal{M}} - [A_\mu,A_\nu]_E{}^{\mathcal{M}}. \tag{3.26}$$

Как и в формализме калиброванной супергравитации так определенный тензор напряженности не является ковариантным и требует доопределения при помощи поля 2-формы $B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} = F_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} + Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_{\mathcal{N}}B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}, \tag{3.27}$$

с законом преобразования

$$\Delta B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{KL}} = \delta B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{KL}} - \frac{1}{D(1-2\beta_d)} Y^{\mathcal{KL}}_{\mathcal{MN}} A^{\mathcal{M}}_{[\mu} \delta A^{\mathcal{N}}_{\nu]}. \tag{3.28}$$

Здесь первое слагаемое включает возможные собственные преобразования поля $B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{KL}}$ (диффеоморфизмы, калибровочные преобразования и т.п.), а второе слагаемое необходимо для обеспечения ковариантности тензора $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}$. Конечно, при этом $\mathcal{L}_{\mathcal{F}_{\mu\nu}} \equiv \mathcal{L}_{F_{\mu\nu}}$ с точностью до выполнения условия проекции. Действительно, рассмотрим преобразования с параметром заданным $\Lambda_0{}^{\mathcal{M}} = Y^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} \chi^{\mathcal{KL}}$ для произвольного $\chi^{\mathcal{KL}}$. Используя общее определение (3.12), получим:

$$\delta_{\Lambda_0} V^{\mathcal{M}} = Y^{\mathcal{NK}}_{\mathcal{PQ}} \left(\partial_{\mathcal{N}} \chi^{\mathcal{PQ}} \partial_{\mathcal{K}} V^{\mathcal{M}} + \frac{1}{2} \partial_{\mathcal{NK}} \chi^{\mathcal{PQ}} V^{\mathcal{M}} \right) - \frac{1}{2} Y^{\mathcal{NP}}_{\mathcal{KL}} Y^{\mathcal{MK}}_{\mathcal{RS}} \partial_{\mathcal{NP}} \chi^{\mathcal{RS}} V^{\mathcal{L}}. \tag{3.29}$$

Важно заметить, что введенные 2-формы не представляют новых степеней свободы, а набираются из уже имеющихся полей теории. Здесь возможно два варианта: поля 2-формы являются независимыми полями или они являются дуальной реализацией тех же степеней свободы, что представлены векторными полями. Последнее реализуется в размерности $D = 6$. И действительно, размерность векторного мультиплета и мультиплета 2-форм в этом случае равна 27. В таком случае тензорная иерархия обрывается, и необходимости строить тензор напряженности для поля $B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{MN}}$ нет, поскольку динамика соответствующих степеней свободы уже закодирована в действии для $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}$.

Если мультиплет 2-форм не является дуальным к векторному мультиплету, мы продолжаем построение тензорной иерархии и рассматриваем тождества Бьянки для тензора напряженности векторного мультиплета:

$$\begin{aligned} 3\, D_{[\mu} \mathcal{F}_{\nu\rho]}{}^{\mathcal{M}} &= - Y^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} \mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{KL}}, \\ \mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{KL}} &= 3\, D_{[\mu} B_{\nu\rho]}{}^{\mathcal{KL}} + \frac{3}{D(1-2\beta_d)}\, Y^{\mathcal{KL}}_{\mathcal{PQ}} \left(A^{(\mathcal{P}}_{[\mu} \partial_\nu A^{\mathcal{Q})}_{\rho]} - \frac{1}{3} [A_{[\mu}, A_\nu]_E{}^{(\mathcal{P}} A_{\rho]}{}^{\mathcal{Q})} \right) \\ &\quad - 3 \left(\partial_{\mathcal{N}} C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{N},\mathcal{KL}} - Y^{\mathcal{KL}}_{\mathcal{PQ}}\, \partial_{\mathcal{N}} C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{Q},\mathcal{PN}} \right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Слагаемые в последней строке добавлены по той же причине: для обеспечения ковариантности тензора $\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{KL}}$. Прямой подстановкой убеждаемся, что они выпадают из тождества Бьянки. Как и прежде, 3-формы могут быть дуальными уже имеющимся в иерархии 2-формам, что выполняется в $D = 7$, или представлять уже имеющиеся в спектре теории поля. Поскольку мы здесь интересуемся теориями в размерности $D = 7,6,5$, построение тензорной иерархии закончим на этом шаге. Итого имеем следующие преобразования для ковариантных тензоров напряженности и калибровочных полей:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} &= 2\,\mathcal{D}_{[\mu}\Delta A_{\nu]}^{\mathcal{M}} - Y^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}}\partial_{\mathcal{N}}\Delta B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{KL}},\\
\delta\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{KL}} &= 3\,\mathcal{D}_{[\mu}\Delta B_{\nu\rho]}{}^{\mathcal{KL}} + \frac{3}{D(1-2\beta_d)}Y^{\mathcal{KL}}_{\mathcal{PQ}}\,\mathcal{F}_{[\mu\nu}{}^{P}\Delta A^{Q}_{\rho]}\\
&\quad - 3\big(\partial_{\mathcal{N}}\Delta C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{N},\mathcal{KL}} - Y^{\mathcal{KL}}_{\mathcal{PQ}}\,\partial_{\mathcal{N}}\Delta C_{\mu\nu\rho}{}^{Q,P\mathcal{N}}\big),\\
\delta\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma}{}^{\mathcal{M},\mathcal{KL}} &= 4\,D_{[\mu}\Delta C_{\nu\rho\sigma]}{}^{\mathcal{M},\mathcal{KL}}\\
&\quad + \frac{1}{3D(1-2\beta_d)}\Big(\frac{3}{8}\mathcal{F}_{[\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\Delta B_{\rho\sigma]}{}^{\mathcal{KL}} - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{[\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{KL}}\delta A^{\mathcal{M}}_{\sigma]}\Big),\\
\Delta A^{\mathcal{M}}_{\mu} &= \delta A^{\mathcal{M}}_{\mu},\\
\Delta B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{KL}} &= \delta B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{KL}} - \frac{1}{D(1-2\beta_d)}Y^{\mathcal{KL}}_{\mathcal{MN}}A^{\mathcal{M}}_{[\mu}\delta A^{\mathcal{N}}_{\nu]},\\
\Delta C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{N},\mathcal{KL}} &= \delta C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{N},\mathcal{KL}} - \delta A^{\mathcal{N}}_{[\mu}B_{\nu\rho]}{}^{\mathcal{KL}} - \frac{1}{3D(1-2\beta_d)}Y^{\mathcal{KL}}_{\mathcal{RS}}A^{\mathcal{N}}_{[\mu}A^{R}_{\nu}\delta A^{S}_{\rho]}.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Сопоставляя поля форм с соответствующими полями максимальной D-мерной супергравитации, естественно ввести параметры калибровочных преобразований $\Xi_{\mu}{}^{\mathcal{MN}}, \Psi_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M},\mathcal{KL}}$ в дополнение к $\Lambda^{\mathcal{M}}$. Таким образом, для калибровочных преобразований полей имеем:

$$
\begin{aligned}
\Delta A^{\mathcal{M}}_{\mu} &= \mathcal{D}_{\mu}\Lambda^{\mathcal{M}} + Y^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}}\partial_{\mathcal{N}}\Xi_{\mu}{}^{\mathcal{KL}},\\
\Delta B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{KL}} &= 2\mathcal{D}_{[\mu}\Xi_{\nu]}{}^{\mathcal{KL}} - \frac{1}{D(1-2\beta_d)}Y^{\mathcal{KL}}_{\mathcal{MN}}\Lambda^{\mathcal{M}}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{N}}\\
&\quad + 3\left(\partial_{\mathcal{N}}\Psi_{\mu\nu}{}^{\mathcal{N},\mathcal{KL}} - Y^{\mathcal{KL}}_{\mathcal{PQ}}\partial_{\mathcal{N}}\Psi_{\mu\nu}{}^{P,\mathcal{N}Q}\right),\\
\Delta C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{M},\mathcal{KL}} &= 3\mathcal{D}_{[\mu}\Psi_{\nu\rho]}{}^{\mathcal{M},\mathcal{KL}} - \mathcal{F}_{[\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\Xi_{\rho]}{}^{\mathcal{KL}} + \frac{2}{3D(1-2\beta_d)}Y^{\mathcal{KL}}_{\mathcal{PQ}}\Lambda^{\mathcal{P}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{Q\mathcal{M}}.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

3.4 Лагранжиан исключительной теории поля

Полный лагранжиан бозонного сектора исключительной теории поля можно представить в виде

$$
\mathcal{L}_{bos} = \mathcal{L}^{(U)}_{kin} + \mathcal{L}_{T} - V + \mathcal{L}_{top}, \tag{3.33}
$$

где выбраны следующие обозначения. Универсальный кинетический лагранжиан $\mathcal{L}_{kin}{}^{(U)}$, вид которого не зависит от выбранной группы дуальности для размерности $D = 5,6,7$. Этот член включает гравитационную часть $\mathcal{L}_R$ (лагранжиан для внешней метрики $g_{\mu\nu}$), кинетическое слагаемое для скалярного сектора теории $\mathcal{L}_{sc}$ и лагранжиан $\mathcal{L}_V$ для векторного мультиплета. Далее $\mathcal{L}_T$ обозначает лагранжиан для мультиплета 2-форм. Как следует из тензорной иерархии, в размерности $D = 5$ он отсутствует, а в размерности $D = 6$ имеет смысл лагранжиана для псевдодействия. Скалярный потенциал V обозначает часть полного лагранжиана, зависящую только от производных обобщенной метрики и внешней метрики по координатам обобщенного пространства. При обобщенной редукции Шерка–Шварца, которая будет подробно рассмотрена ниже, V буквально воспроизводит скалярный потенциал калиброванной теории, откуда и название. Наконец, так называемый топологический член $\mathcal{L}_{top}$ включает слагаемые, которые не содержат внешней метрики и являются ковариантной записью членов Черна–Саймонса D-мерной супергравитации.

Исключительные теории поля инвариантны относительно

- диффеоморфизмов во внешнем пространстве $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu(x,\mathbb{X})$;
- преобразований, генерируемых обобщенной производной Ли, которые можно понимать, как диффеоморфизмы в расширенном пространстве;
- калибровочных преобразований всех полей, задаваемых выражениями (3.32).

Для удобства выпишем явно лагранжианы исключительных теорий поля с пояснением обозначений.

D=7

Внешнее пространство имеет размерность $D = 7$, группа дуальности теории SL(5). Состав полей, соглашения для индексов и некоторые константы:

$$\begin{gathered}
\left(g_{\mu\nu}, \quad A_\mu{}^{MN} \in \mathbf{10}, \quad B_{\mu\nu M} \in \bar{\mathbf{5}}, \quad M_{MN} \in \frac{\mathrm{SL}(5)}{\mathrm{SO}(5)}\right), \\
\mu,\nu = 0,\ldots,6; \quad M,N = 1,\ldots,5; \quad \mathcal{M},\mathcal{N} = 1,\ldots,10, \\
\alpha_d = 3, \quad \beta_d = \frac{1}{5}, \quad Y^{\mathcal{MN}}_{\mathcal{KL}} = \varepsilon^{M\mathcal{MN}}\varepsilon_{M\mathcal{KL}}.
\end{gathered} \tag{3.34}$$

Лагранжиан имеет вид:

$$\begin{aligned}e^{-1}\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\hat{R}[g,\mathcal{F}] + \frac{1}{4\alpha_d}g^{\mu\nu}\,\mathcal{D}_\mu M_{MN}\,\mathcal{D}_\nu M^{MN} - \frac{1}{8}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN}\mathcal{F}^{\mu\nu KL}M_{MK}M_{NL}\\ &-\frac{1}{3\cdot(16)^2}M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_N - V + e^{-1}\mathcal{L}_{top},\end{aligned} \tag{3.35}$$

где для удобства мы ввели тензор напряженности $\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M}$, связанный с выражением (3.30), полученным из тождеств Бьянки следующим образом

$$\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M} = 8\varepsilon_{M\mathcal{K}\mathcal{L}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}} = 2\varepsilon_{MKLPQ}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^{KL,PQ}. \tag{3.36}$$

Здесь мы принимаем, что в суммировании при переходе от индексов $\mathcal{M},\mathcal{N} = 1,\ldots,10$ к антисимметричной паре индексов $\mathcal{M} \to [MN]$ следует писать множитель 1/2 на каждое суммирование. Такой множитель необходим, поскольку при суммировании по антисимметричной паре каждая компонента учитывается дважды.

Инвариантный скаляр Риччи $\hat{R}[g,\mathcal{F}]$ определяется следующим образом

$$\hat{R}_{\mu\nu\bar{a}\bar{b}} = R_{\mu\nu\bar{a}\bar{b}} + \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\,e^{\rho}_{\bar{a}}\,\partial_{\mathcal{M}}e_{\rho\,\bar{b}}. \tag{3.37}$$

Скалярный потенциал так же имеет универсальный вид и записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}V = &-\frac{1}{4\alpha_d}M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_{\mathcal{M}}M^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_{\mathcal{N}}M_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{1}{2}M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_{\mathcal{M}}M^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_{\mathcal{L}}M_{\mathcal{N}\mathcal{K}}\\ &-\frac{1}{2}(g^{-1}\partial_{\mathcal{M}}g)\partial_{\mathcal{N}}M^{\mathcal{M}\mathcal{N}} - \frac{1}{4}M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}(g^{-1}\partial_{\mathcal{M}}g)(g^{-1}\partial_{\mathcal{N}}g) - \frac{1}{4}M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_{\mathcal{M}}g^{\mu\nu}\partial_{\mathcal{N}}g_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Топологический член определяется своей вариацией, которая имеет ковариантный вид

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{top} = 16\cdot 4!\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda\sigma\tau\kappa}\Big[&\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\lambda}{}^{M}\partial_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\Delta C^{\mathcal{N}}_{\sigma\tau\kappa} + 6\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{MN}\mathcal{F}_{\rho\lambda\sigma M}\Delta B_{\tau\kappa N}\\ &-2\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M}\mathcal{F}_{\lambda\sigma\tau N}\delta A^{\mathcal{M}\mathcal{N}}_{\kappa}\Big].\end{aligned} \tag{3.39}$$

Уравнения движения для поля 3-формы $C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{M}}$ накладывают связь на тензоры напряженности

$$\partial_{MK}\big(eM^{MN}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_M - \frac{1}{4!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda\sigma\tau\kappa}\mathcal{F}_{\lambda\sigma\tau\kappa}{}^{M}\big) = 0. \tag{3.40}$$

D=6

Внешнее пространство имеет размерность $D = 6$, группа дуальности теории SO(5,5). Состав полей, соглашения для индексов и некоторые константы:

$$
\begin{aligned}
&\left(g_{\mu\nu}, \quad A_\mu{}^{\mathcal{M}} \in \mathbf{16}_s, \quad B_{\mu\nu i} \in \mathbf{10}, \quad M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \in \frac{\mathrm{SO}(5,5)}{\mathrm{SO}(5)\times \mathrm{SO}(5)}\right),\\
&\mu,\nu = 0,\ldots,5; \quad i,j = 1,\ldots,10; \quad \mathcal{M},\mathcal{N} = 1,\ldots,16,\\
&\alpha_d = 4, \quad \beta_d = \frac{1}{4}, \quad Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \gamma^{i\mathcal{M}\mathcal{N}}\gamma_{i\mathcal{K}\mathcal{L}},
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

где $\gamma^{i\mathcal{M}\mathcal{K}}$ — стандартные гамма-матрицы для группы Spin(5,5).

(Псевдо)лагранжиан имеет вид

$$
\begin{aligned}
e^{-1}\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}\hat{R}[g,\mathcal{F}] + \frac{1}{4\alpha_d} g^{\mu\nu}\, \mathcal{D}_\mu M_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\, \mathcal{D}_\nu M^{\mathcal{M}\mathcal{N}} - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\mathcal{F}^{\mu\nu\mathcal{N}} M_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\\
&- \frac{1}{2\cdot 3!}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho i} M^{ij}\mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_j - V + e^{-1}\mathcal{L}_{top},
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

и должен быть дополнен условием самодуальности

$$
\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\, i} = -\frac{1}{3!} e^{-1}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\eta_{ij} M^{jk}\mathcal{F}^{\sigma\kappa\lambda}{}_k. \tag{3.43}
$$

Построение псевдодействия для шестимерных теорий и его связь с истинным действием рассматриваются ниже.

Вариация топологического члена в ковариантном виде записывается как:

$$
\delta\mathcal{L}_{top} = e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\left(\frac{1}{36}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho i}\delta\mathcal{F}_{\sigma\kappa\lambda}{}^{i} + \frac{1}{48}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma M}\delta\mathcal{F}_{\kappa\lambda}{}^{\mathcal{M}}\right). \tag{3.44}
$$

D=5

Внешнее пространство имеет размерность $D = 5$, группа дуальности теории $\mathrm{E}_{6(6)}$. Состав полей, соглашения для индексов и некоторые константы:

$$
\begin{aligned}
&\left(g_{\mu\nu}, \quad A_\mu{}^{\mathcal{M}} \in \mathbf{27}, \quad M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \in \frac{\mathrm{E}_{6(6)}}{\mathrm{USp}(8)}\right),\\
&\mu,\nu = 0,\ldots,4; \mathcal{M},\mathcal{N} = 1,\ldots,27,\\
&\alpha_d = 5, \quad \beta_d = \frac{1}{3}, \quad Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = d^{\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{N}} d_{\mathcal{P}\mathcal{K}\mathcal{L}},
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

где $d_{\mathcal{MNK}}$ — полностью симметричный инвариантный тензор группы $\mathrm{E}_{6(6)}$.

Лагранжиан имеет вид

$$
\begin{aligned}
e^{-1}\mathcal{L} = &- \frac{1}{2}\hat{R}[g,\mathcal{F}] + \frac{1}{4\alpha_d} g^{\mu\nu}\,\mathcal{D}_\mu M_{\mathcal{MN}}\,\mathcal{D}_\nu M^{\mathcal{MN}} - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\mathcal{F}^{\mu\nu\mathcal{N}}M_{\mathcal{MN}} \\
&- V + e^{-1}\mathcal{L}_{top}.
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

Бозонный сектор теории был построен в литературе ранее в работе [112], его суперсимметричное дополнение было получено автором настоящей диссертации в соавторстве с Х. Замтлебеном в работе [113].

Вариация топологического члена в ковариантном виде записывается как:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{top} = e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\tau}\Big(&\frac{3}{4}d_{\mathcal{MNK}}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\mathcal{F}_{\rho\sigma}{}^{\mathcal{N}}\delta A_\tau{}^{\mathcal{K}} + 5d^{\mathcal{MNK}}d_{\mathcal{KPQ}}\partial_{\mathcal{N}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\mathcal{M}}A_\sigma{}^{\mathcal{P}}\delta A_\tau{}^{\mathcal{Q}} \\
&5d^{\mathcal{MNK}}\partial_{\mathcal{N}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}\delta B_{\sigma\tau\mathcal{K}}\Big).
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

3.4.1 Универсальные кинетические слагаемые

Скалярными полями исключительной теории поля будем называть те, которые не имеют векторных индексов внешнего пространства. При полной размерной редукции такие поля действительно будут скалярами супергравитации в размерности D. Как обсуждалось выше, скалярные поля максимальной супергравитации в размерности D параметризуют пространство фактор-группы G/H, где G обозначает глобальную группу симметрии Креммера–Джулиа, а H — ее максимальную компактную подгруппу (R-симметрия фермионного сектора). Естественно сохранить эту же параметризацию в исключительной теории поля. В настоящей диссертации рассматриваются исключительные теории поля с группами дуальности SL(5), SO(5,5), $\mathrm{E}_{6(6)}$, со скалярным сектором представленным обобщенном метрикой $M_{\mathcal{MN}}$, принадлежащей соответственно

$$
\frac{\mathrm{SL}(5)}{\mathrm{SO}(5)},\quad \frac{\mathrm{SO}(5,5)}{\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(5)},\quad \frac{\mathrm{E}_{6(6)}}{\mathrm{USp}(8)}.
\tag{3.48}
$$

Удобно перейти к так называемому обобщенному реперу $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} \in G$, связанному с обобщенной метрикой стандартным соотношением:

$$M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}}\mathcal{V}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{B}}M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}. \tag{3.49}$$

Здесь индексы $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ нумеруют некоторое представление локальной группы H, а $M_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ — постоянная матрица, обычно взятая равной единичной матрице. В зависимости от группы дуальности получаем следующие представления для обобщенного репера:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}(5): &\quad \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{A}, && M = 1,\ldots,5, \quad A = 1,\ldots,5,\\
\mathrm{SO}(5,5): &\quad \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{A\dot{B}}, && M = 1,\ldots,16, \quad A,\dot{A} = 1,\ldots,4,\\
\mathrm{E}_{6(6)}: &\quad \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{[ij]}, && M = 1,\ldots,27, \quad i,j = 1,\ldots,8,\\
&\quad \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{[ij]}\Omega_{ij} = 0.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Здесь Ω_{ij} — инвариантный тензор группы USp(8). В случае SL(5) теории обобщенное пространство является 10-мерным и параметризуется координатами $\mathbb{X}^{[MN]}$. Соответствующая 10×10 обобщенная метрика связана с так определенным репером:

$$M_{MN,KL} = 2M_{M[K}M_{L]N}, \quad M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{A}\mathcal{V}_{\mathcal{N}}{}^{B}M_{AB}. \tag{3.51}$$

Кинетический член для скаляров в наиболее простой форме может быть представлен в следующем универсальном виде:

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{4\alpha_d} e g^{\mu\nu} D_\mu M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} D_\nu M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}, \tag{3.52}$$

где $e^2 = \det||g_{\mu\nu}||$ — детерминант внешней метрики (с учетом знака), $M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}$ — обратная обобщенная метрика, константа α_d определена выражениями (3.16), вес обобщенной метрики всегда считается равным нулю. Однако, для построения действия с фермионами необходимо явно выделить действие локальной группы. Рассмотрим для этого выражение

$$\mathcal{V}^{-1}D_\mu\mathcal{V} = \mathcal{Q}_\mu + \mathcal{P}_\mu \in \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \tag{3.53}$$

где $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{m}$ обозначают соответственно алгебру Ли групп G, H и ортогональное дополнение алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Очевидно, в кинетический лагранжиан для скалярных полей должны входить только компоненты $\mathcal{P}$, соответствующие ортогональному дополнению:

$$\mathcal{L}_{sc} \sim e\, g^{\mu\nu} P_\mu \cdot P_\nu, \tag{3.54}$$

где $\cdot$ обозначает свертку по индексам представления группы H. Рассмотрим конструкцию подробнее на примере теории с группой $\mathrm{E}_{6(6)}$, суперсимметричная версия которой будет представлена ниже. В этом случае присоединенное представление алгебры $\mathfrak{e}_6$ под действием подалгебры $\mathfrak{usp}(8)$ раскладывается в сумму $\mathbf{78} = \mathbf{36} \oplus \mathbf{42}$. В компонентах тензоров разложение принимает вид

$$\mathcal{V}_{kl}{}^{\mathcal{M}} D_\mu \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij} = 2\mathcal{Q}_{\mu[k}{}^{[i}\delta_{l]}{}^{j]} - \Omega_{km}\Omega_{ln}\mathcal{P}_\mu{}^{ijmn}. \tag{3.55}$$

Здесь тензор $\mathcal{Q}_{\mu k}{}^{i}$ параметризует алгебру $\mathfrak{usp}(8)$ и удовлетворяет условию $\mathcal{Q}_{\mu k}{}^{[i}\Omega^{j]k} = 0$, тензор $\mathcal{P}_\mu{}^{ijmn}$ является полностью бесследовым и антисимметричным и соответственно имеет 42 компоненты. Выражение выше можно переписать в виде действия на репер USp(8)–ковариантной производной $\mathcal{D}_\mu = D_\mu + \mathcal{Q}_\mu$. Действительно, умножим обе части равенства на $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{pq}$ и запишем

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij} \equiv D_\mu \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij} + 2\mathcal{Q}_{\mu k}{}^{[i}\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{j]k} = \mathcal{P}_\mu{}^{ijkl}\mathcal{V}_{Mkl}. \tag{3.56}$$

Принято говорить, что $\mathcal{Q}_\mu$ является композитной связностью. Замечая, что выражение (3.53) является USp(8) скаляром, заменим $D_\mu \longrightarrow \mathcal{D}_\mu$ и запишем окончательно для теории с группой $\mathrm{E}_{6(6)}$ кинетический лагранжиан для скалярных полей в виде

$$e^{-1}\mathcal{L}_{sc} = -\frac{1}{6} g^{\mu\nu}\mathcal{P}_\mu{}^{ijkl}\mathcal{P}_{\nu ijkl}. \tag{3.57}$$

Индексы поднимаются и опускаются при помощи инвариантного тензора Ω_{ij}.

Кинетический лагранжиан для векторного мультиплета имеет такой же вид, как и в обычной теории Янга–Милсса:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} e\, M_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\mathcal{F}^{\mu\nu\mathcal{N}}, \tag{3.58}$$

где индексы поднимаются и опускаются при помощи внешней метрики $g_{\mu\nu}$. Теории с размерностью $D = 4$, где следует учитывать самодуальность компонент векторного мультиплета, находится за пределами настоящего обсуждения, соответствующая исключительная теория поля и ее суперсимметричное расширение было построено в работах [114, 115]. Чтобы тензор кривизны для внешней метрики $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ преобразовывался, как скаляр веса ноль под действием обобщенной производной Ли, соответствующая спин-связность $\omega_\mu{}^{\bar{a}\bar{b}}$ так же должна быть скаляром веса ноль. В самых первых работах по построению исключительной теории поля [19, 116] было показано, что для этого необходимо положить внешний репер скаляром веса $\lambda(e_\mu^{\bar a}) = \beta_d$. Такой вес естественно следует из того факта, что для получения правильного вида члена Эйнштейна–Гильберта для внешней метрики следует определить $g_{\mu\nu}$ как $D\times D$ блок полной 11-мерной метрики, умноженный на степень $-\beta_d$ детерминанта внутренней метрики. Спин-связность при этом определяется стандартным уравнением на внешний репер, записанным в ковариатной форме:

$$\mathcal{D}_{[\mu}e_{\nu]}{}^{\bar a} - \frac{1}{4}\omega_{[\mu}{}^{ab}e_{\nu]b} = 0. \tag{3.59}$$

Учитывая теперь, что параметры локальных лоренцевых поворотов $\Lambda^a{}_b$ вообще говоря тоже зависят от координат расширенного пространства, соответствующее лоренц-ковариантное выражение для кривизны отличается от стандартного [112]:

$$\hat R_{\mu\nu\bar a\bar b} = R_{\mu\nu\bar a\bar b} + \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\, e_{\bar a}^{\rho}\, \partial_{\mathcal{M}} e_{\rho\,\bar b}. \tag{3.60}$$

Таким образом, получаем полный ковариантный член Эйнштейна-Гильберта в следующем виде:

$$S_{EH} = -\frac{1}{2}\int d^n x\, d^D\mathbb{X}\, e\hat R = -\frac{1}{2}\int d^n x\, d^D\mathbb{X}\, e\, e_{\bar a}^{\mu} e_{\bar b}^{\nu} \hat R_{\mu\nu}{}^{\bar a\bar b}. \tag{3.61}$$

3.4.2 Самодуальность в размерности D=6

Прежде чем переходить к обсуждению ковариантного лагранжиана для тензорных полей теории, следует остановится на важном свойстве тензорных полей в четных размерностях. Как обсуждалось выше, построение тензорной иерархии обрывается, когда ранг формы потенциала доходит до дуального уже имеющемуся. В размерности $D = 5$ это случилось уже на первом шаге для 2-форм, дуальным векторам. В размерности $D = 7$ 2-формы оказываются независимыми степенями свободы, а 3-формы им дуальными. В четных размерностях такое же рассуждение приводит к условиям самодуальности. В исключительной теории поля для размерности $D = 6$, являющейся предметом интереса настоящей диссертации, самодуальными оказываются 3-формы. Всего мультиплет 2-форм содержит пять полей, причем группа SO(5,5) не имеет пятимерных представлений. По этой причине следует рассматривать электрические и магнитные 3-формы как независимые степени свободы, объединяя уравнения движения и тождества Бьянки в единое множество уравнений для десяти полей. Лагранжианы такого типа рассматривались в работе [71] для описания супергравитации в размерности $D = 6$, и в работе [89] для построения калиброванной версии теории.

Здесь следует различать: i) обычное действие теории, которое не является инвариатным относительно группы дуальности, но включает правильное число степеней свободы, а его вариация дает уравнения движения; ii) псевдодействие, которое является инвариантным, однако оказывается тождественно равным нулю при выполнении условий самодуальности. Псевдодействием такая конструкция называется потому, что требуется сначала написать уравнения движения и только потом накладывать условие самодуальности. Рассмотрим построение псевдодействия для SO(5,5) теории подробнее.

Начнем с кинетического действия для полей 2-форм $D = 6$ супергравитации, записанного в GL(5)-ковариатной форме [71]:

$$\mathcal{L}_T = -\frac{e}{2\cdot 3!}K^{mn}F^{\mu\nu\rho}{}_m F_{\mu\nu\rho n}, \tag{3.62}$$

где $e = \det e_\mu^{\bar{a}}$. Матрица K^{mn} построена из скалярных полей теории и в базисе, предложенном в [89] имеет вид

$$K^{mn} = \mathcal{V}^{ma}(\mathcal{V}_n{}^a)^{-1}P_+ - \mathcal{V}^{m\dot{a}}(\mathcal{V}_n{}^{\dot{a}})^{-1}P_-. \tag{3.63}$$

Здесь $P_\pm = 1/2\,(1\pm *)$ обозначают проекторы на (анти)самодуальные 3-формы, $*$ обозначает оператор Ходжа. Матрица K^{mn} должна пониматься как оператор, действующий только на 3-формы. В выбранном базисе типичный представитель фактор-группы записывается в следующем виде:

$$V_{\mathcal{M}}{}^{\alpha\dot{\alpha}} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_m{}^a & \mathcal{V}_m{}^{\dot{a}} \\ \mathcal{V}^{ma} & \mathcal{V}^{m\dot{a}} \end{bmatrix}, \tag{3.64}$$

где a и $\dot{a}$ нумеруют векторные представления каждого из множителей в группе $SO(5) \times SO(5)$. Такой выбор базиса для скалярных полей явно нарушает $SO(5{,}5)$ симметрию, сохраняя только ее $GL(5)$ подгруппу. Естественно, что при этом лагранжиан (3.62) не является инвариантным относительно действия преобразований дуальности.

Покажем теперь, как уравнения, следующие из такого лагранжиана, и тождества Бьянки могут быть объединены в единое ковариантное выражение. Определим 3-формы $G_{\mu\nu\rho}{}^m$, дуальный тензору напряженности $F_{\mu\nu\rho m}$ на массовой поверхности (см. напр. обзоры [117, 118]):

$$*G^m = \frac{3!}{e}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_m} = K^{mn}F_n; \qquad G^m = K^{mn} *F_n. \tag{3.65}$$

Определяя декуплет тензоров напряженности

$$G_{\mu\nu\rho\, i} = \begin{bmatrix} F_{\mu\nu\rho\, m} \\ G_{\mu\nu\rho}{}^{m} \end{bmatrix}, \tag{3.66}$$

можем записать уравнения движения и тождества Бьянки для $F_{\mu\nu\rho\, m}$ в $SO(5,5)$-ковариантном виде: $*dG_i = 0$. Здесь важно отметить, что 3-формы G^m определяются уравнениями (3.65) и не рассматриваются как тензоры напряженности для независимых магнитных потенциалов. Тем не менее, уравнения движения могут рассматриваться, как следствие вариации

$$\delta\tilde{\mathcal{L}} = dG_i \wedge \delta B^i, \tag{3.67}$$

ковариантной относительно $SO(5,5)$. Здесь вариации δB_m и δB^m магнитного и электрического потенциалов понимаются независимыми. Имеено такая форма записи вариации лагранжиана оказывается предпочтительной для записи ковариантного действия для $D = 6$ максимальной калиброванной супергравитации и для $SO(5,5)$ исключительной теории поля.

Чтобы перейти к формулировке в терминах псевдодействия удобно записать оператор K^{mn} в виде

$$K^{mn} = K_1^{mn} + K_2^{mn}*, \tag{3.68}$$

где K_1 и K_2 обозначают симметричную и антисимметричную часть по индексам mn соответственно. Тогда лагранжиан (3.62) записывается следующим образом:

$$\mathcal{L}_T = -\frac{e}{2\cdot 3!}K_1^{mn}F_{\mu\nu\rho\, m}F^{\mu\nu\rho}{}_{n} - \frac{1}{2\cdot 3!3!}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}K_2^{mn}F_{\mu\nu\rho\, m}F_{\sigma\kappa\lambda\, n}. \tag{3.69}$$

Рассмотрим теперь декуплет 3-форм F_i, компоненты которого F_m и F^m считаются независимыми переменными действия и понимаются, как тензоры напряженности соответствующих потенциалов:

$$F_{\mu\nu\rho\, i} = \begin{bmatrix} F_{\mu\nu\rho\, m} \\ F_{\mu\nu\rho}{}^{m} \end{bmatrix}. \tag{3.70}$$

Чтобы ограничить число физических степеней свободы, дополнительно введем условие самодуальности (см. также [119, 117]) в следующем виде:

$$F_{\mu\nu\rho\, i} = -\frac{1}{3!}\, e^{-1}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\,\eta_{ij}M^{jk}F^{\sigma\kappa\lambda}{}_{k}. \tag{3.71}$$

Симметричная матрица M_{ij} построена из компонент K_1 и K_2 и представима в блочном виде:

$$M = -\begin{bmatrix} K_1 - K_2K_1^{-1}K_2 & K_2K_1^{-1} \\ -K_1^{-1}K_2 & K_1^{-1} \end{bmatrix}. \tag{3.72}$$

Наконец, η_{ij} обозначает стандартный симметричный инвариант группы $SO(5,5)$, который мы выбираем в виду

$$\eta_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.73}$$

Самосогласованность условия самодуальности (обратимость) требует

$$M_{ij}\eta^{jk}M_{kl} = \eta_{il}, \tag{3.74}$$

то есть, матрица M_{ij} принадлежит группе SO(5,5).

Покажем, что так определенное условие самодуальности эквивалентно (3.65). Обозначим столбцы 3-форм F_m и F^m как F_1 и F_2 соответственно и перепишем (3.71) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 - K_2K_1^{-1}K_2 & K_2K_1^{-1} \\ -K_1^{-1}K_2 & K_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} *F_1 \\ *F_2 \end{bmatrix}. \tag{3.75}$$

Для компонент F_1 и F_2 отдельно это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} F_1 =& - K_1^{-1}K_2 *F_1 + K_1^{-1} *F_2, \\ F_2 =& (K_1 - K_2K_1^{-1}K_2) *F_1 + K_2K_1^{-1} *F_2. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Умножая слева первое уравнение на K_2 и вычитая из результата второе, получим

$$F_2 = K_2F_1 + K_1 *F_1, \implies *F^m = K^{mn}F_n, \tag{3.77}$$

где было использовано свойство $** = +1$ звезды Ходжа для 3-форм в размерности $D = 6$ с сигнатурой Минковского, $*^2 = +1$. Таким образом, условие самодуальности (3.71) позволяет отождествить тензор напряженности магнитного потенциала F^m с дуальной 3-формой G^m.

Полученные выше выражения позволяют показать, что уравнения движения, следующие из действия (3.62), вместе с тождествами Бьянки могут буть получены из вариации инвариатного псевдодействия, заданного выражением

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{2 \cdot 3!} M^{ij} F_{\mu\nu\rho\, i} F^{\mu\nu\rho}{}_j \tag{3.78}$$

с последующим применением условия самодуальностия (3.71). Действительно, вариация такого лагранжиана дает следующие уравнения:

$$*d * \mathcal{M}^{ij} F_j = 0 \tag{3.79}$$

Накладывая условие самодуальности, получаем уравнение $dF^i = 0$, первые пять компонент которого дают тождество Бьянки для F^m, а вторые пять компонент — уравнения движения.

Здесь важно отметить, что если наложить условие самодуальности непосредственно в выражении (3.78), получим тождественно ноль. По этой причине интеграл от такого инвариантного лагранжиана называется псевдодействием, и вместе с условием самодуальности должен пониматься лишь как компактный ковариантный способ записи уравнений движения.

3.4.3 Тензорные поля и топологический член в D=6

Топологическими слагаемыми лагранжиана исключительной теории поля называется такие вклады, которые не зависят от внешней метрики и имеют вид членов Черна–Саймонса для калибровочных полей. Общим свойством калиброванных максимальных супергравитаций в низших размерностях и исключительных теорий поля является то, что такие слагаемые нельзя записать в форме, инвариантной относительно действия преобразований дуальности. Вместо этого, мы можем записать в ковариантной форме либо вариацию топологического члена $\delta\mathcal{L}_{top}$, либо сам топологический член в виде интеграла по некоторому фиктивному $D + 1$-мерному пространству. Для кинетического вклада в динамику полей 2-форм в размерности $D = 6$, как обсуждалось выше, мы можем либо построить ковариатные уравнения движения, следующие из вариации нековариантного истинного действия, либо построить ковариатное псевдодействие с дополнительным условием самодуальности.

Рассмотрим сначала первую картину. Сравнивая преобразования 2-форм (3.31) с выражениями для $D = 6$ калиброванной супергравитации [89] определим:

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu}{}^{\mathcal{KL}} &= \frac{1}{16\sqrt{2}}\gamma^{i\,\mathcal{KL}}B_{\mu\nu i}, \\ C_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{M},\mathcal{KL}} &= -\frac{1}{6\cdot 160}\gamma^{i\,\mathcal{KL}}\gamma_i{}^{\mathcal{MN}}C_{\mu\nu\rho\,\mathcal{N}}, \end{aligned} \tag{3.80}$$

где $\gamma^{i\,\mathcal{KL}}$ — гамма-матрицы для группы Spin(5,5). Ковариантный декуплет тензоров напряженности на массовой поверхности определим, как в предыдущей главе:

$$\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_m \\ \mathcal{G}^m \end{bmatrix}_{\mu\nu\rho} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_m \\ *K^{mn}\mathcal{F}_n \end{bmatrix}_{\mu\nu\rho}. \tag{3.81}$$

Здесь индексы $m,n = 1,\ldots,5$ нумеруют представление **5** геометрической подгруппы GL(5) группы дуальности SO(5,5). В итоге из требования инвариантности получим следующее выражение для вариации кинетических слагаемых лагранжиана для полей 2-форм и топологического слагаемого [120]:

$$\begin{aligned} &\delta(\mathcal{L}_T + \mathcal{L}_{top}) = \\ &= -\frac{\kappa}{3!}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\,\eta^{ij}\mathcal{G}_{\mu\nu\rho\,i}\,\mathcal{D}_\sigma\Delta B_{\kappa\lambda\,j} \\ &\quad -\frac{\sqrt{2}\,\kappa}{3!}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\,\mathcal{G}_{\mu\nu\rho\,i}\,\gamma^i{}_{\mathcal{MN}}\mathcal{F}_{\sigma\kappa}{}^{\mathcal{M}}\delta A_\lambda{}^{\mathcal{N}} + \frac{\sqrt{2}\,\kappa}{8}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\,\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\,\gamma^i{}_{\mathcal{MN}}\,\mathcal{F}_{\rho\sigma}{}^{\mathcal{N}}\,\Delta B_{\kappa\lambda i} \\ &\quad +\frac{\sqrt{2}\,\kappa}{3\cdot 4!}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\,(\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\,i} - \mathcal{G}_{\mu\nu\rho\,i})\,\gamma^{i\,\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}}\Delta C_{\sigma\kappa\lambda\,\mathcal{N}}. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Видим, что хотя мы работаем с истинным действием, которое не является ковариантным, его вариация может быть записана в ковариантном виде и дает динамику, инвариантную относительно преобразований U-дуальности. При этом вариация магнитных и электрических полей 2-форм считается независимой, но тензор напряженности $\mathcal{G}_{\mu\nu\rho\,i}$ содержит только электрические степени свободы. Это сделано для получения ковариантных уравнений движения с правильным числом физических степеней свободы. Магнитные степени свободы определяются тензором напряженности $\mathcal{F}_i$, который мы определяем обычным образом:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\,i} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{\mu\nu\rho\,m} \\ \mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^m. \end{bmatrix} \tag{3.83}$$

Соотношение дуальности, устанавливающее связь между $\mathcal{F}^i$ и $\mathcal{G}^i$ следует из уравнений движения потенциала 3-формы $C_{\mu\nu\rho\,\mathcal{M}}$:

$$\gamma_m{}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,\partial_{\mathcal{N}}(\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^m - \mathcal{G}_{\mu\nu\rho}{}^m) = 0. \tag{3.84}$$

Уравнения движения для магнитного потенциала $B_{\mu\nu}{}^m$ не являются динамическими, а устанавливают соотношение самодуальности на поля $\mathcal{F}_i$. Действительно, с учетом тождеств Бьянки (3.30) можем их записать в следующем виде:

$$\gamma_m{}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,\partial_{\mathcal{K}}\Big(\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma\,L} + \frac{1}{4\kappa}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\,e\,M_{ML}\,\mathcal{F}^{\kappa\lambda\,L}\Big) = 0. \tag{3.85}$$

Требования калибровочной инвариантности и инвариантности по отношению к преобразованиям дуальности фиксируют коэффициент между кинетическим лагранжианом для 2-форм и топологическим членом. Для фиксации оставшегося общего фактора к относительно других членов в полном лагранжиане следует дополнительно требовать инвариантность по отношению к внешним D-мерным диффеоморфизмам $x^\mu \longrightarrow x^\mu + \xi^\mu(x)$.

Рассмотрим теперь построение псевдодействия и ковариантную формулировку топологического лагранжиана теории в $D = 6$. В формализме псевдодействия магнитные и электрические поля считаются независимыми и общий тензор напряженности в представлении **10** мы обозначим $\mathcal{F}_{\mu\nu\rho}{}^i$. Тогда вариацию топологического лагранжиана можно записать в следующем единственном ковариантном виде

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_{top} = e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\Big(&-\frac{1}{3!}\mathcal{D}_\sigma\mathcal{F}_{\mu\nu\rho i}\Delta B_{\kappa\lambda}{}^i + \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho i}\mathcal{F}_{\sigma\kappa}\gamma^i\delta A_\lambda \\ &- \frac{1}{8\sqrt{2}}\mathcal{F}_{\mu\nu}\gamma^i\mathcal{F}_{\rho\sigma}\Delta B_{\kappa\lambda i} + \frac{1}{4!3\sqrt{2}}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho i}\gamma^{i\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_{\mathcal{M}}\Delta C_{\mu\nu\rho\mathcal{N}}\Big)\end{aligned} \tag{3.86}$$

На калибровочных преобразованиях (3.32) это выражение тождественно равно нулю, следовательно соответствующее псевдодействие является инвариантным. Полученное выражение имеет структуру, схожую с вариацией топологического действия для $\mathcal{N} = (1,0)$ суперконформных неабелевых моделей в размерности $D = 6$, построенного в [121] (уравнения (4.4) и (4.6)). Используя связь (3.31) между вариациями калибровочных полей общего вида и тензоров напряженности, $\delta\mathcal{L}_{top}$ может быть представлен в следующей компактной форме:

$$\delta\mathcal{L}_{top} = e^{-1}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\Big(\frac{1}{36}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho i}\delta\mathcal{F}_{\sigma\kappa\lambda}{}^i + \frac{1}{48}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma\mathcal{M}}\delta\mathcal{F}_{\kappa\lambda}{}^{\mathcal{M}}\Big). \tag{3.87}$$

Вариация псевдодействия и топологического члена $\delta(\mathcal{L}_T + \mathcal{L}_{top})$ с учетом условия самодуальности дает те же самые уравнения , что и истинное действие (3.82).

Несложно заметить, что выше обсуждались топологические члены только в форме вариаций, а не в форме собственно вклада в лагранжиан. Оказывается, что для получения инвариантного выражения, топологический лагранжиан удобно записать в виде интеграла от полной производной по некоторому (фиктивному) пространству размерности семь:

$$
\begin{aligned}
S_{top} &= \int d^6x\, d^{16}\mathbb{X}\, \mathcal{L}_{top} \\
&= \int d^7X\, d^{16}\mathbb{X}\, \left(2\,\eta^{ij}\mathcal{F}_i \wedge \mathcal{D}\mathcal{F}_j - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F} \wedge \gamma^i \mathcal{F} \wedge \mathcal{F}_i \right).
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

Здесь мы использовали обозначения для форм на семимерном пространств, параметризованном координатами X^μ:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}} dX^\mu \wedge dX^\nu, \\
\mathcal{F}_i &= \frac{1}{3!}\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\, i}\, dX^\mu \wedge dX^\nu \wedge dX^\rho.
\end{aligned}
\tag{3.89}
$$

Здесь важно отметить, что вопрос об определении этих форм на семимерном пространстве не имеет смысла, поскольку они задаются лишь на его границе, и интеграл эффективно сводится тоже к интегралу по границе. Как и прежде, полученное выражение имеет вид, напоминающий таковой для топологического члена в работе [121].

3.4.4 Скалярный потенциал

Вообще говоря, кинетическое слагаемое содержит производные не только по внешним координатам x^μ, но и по координатам расширенного пространства $\mathbb{X}^{\mathcal{M}}$ за счет членов с обобщенной производной Ли. Однако, их недостаточно, чтобы полностью задать действие теории. Одна из причин, например, неинвариантность относительно диффеоморфизмов во внешнем пространстве, которые, как будет показано ниже, требуют дополнительных членов. Более интуитивно можно рассуждать следующим образом. Допустим, мы рассматриваем ограничение теории на скалярный сектор на расширенном пространстве, то есть, некоторый аналог двойной теории поля. В таком случае, поля $\mathcal{V}$ не зависят от внешних координат и являются единственными полями теории. Очевидно, что кинетическое слагаемое в таком случае тождественно равно нулю, и оставшаяся динамика должна задаваться другими членами в лагранжиане. Именно эту динамику и задает скалярный потенциал V, который в терминах обобщенной метрики имеет вид

$$
\begin{aligned}
V = & -\frac{1}{4\alpha_d} M^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{KL}} + \frac{1}{2} M^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{L}} M_{NK} \\
& - \frac{1}{2}(g^{-1}\partial_{\mathcal{M}} g)\partial_{\mathcal{N}} M^{\mathcal{MN}} - \frac{1}{4} M^{\mathcal{MN}} (g^{-1}\partial_{\mathcal{M}} g)(g^{-1}\partial_{\mathcal{N}} g) - \frac{1}{4} M^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} g^{\mu\nu} \partial_{\mathcal{N}} g_{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{3.90}
$$

Здесь первая строка воспроизводит лагранжиан для обобщенной метрики, построенный в [23] методом нелинейной реализации группы U-дуальности.

Проверим, что выражение (3.90) действительно инвариантно при действии обобщенной производной Ли. Наиболее удобным алгоритмом проверки является введение нековариантной вариации

$$
\Delta_\Lambda = \delta_\Lambda - \mathcal{L}_\Lambda,
\tag{3.91}
$$

которая показывает, насколько вариация δ некоторого выражения отличается от производной Ли. В таком подходе достаточно проверить нековариантные слагаемые в вариации. Например, для первого члена в (3.90) имеем:

$$
\begin{aligned}
& \delta_\Lambda (M^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{KL}}) = \\
& = \delta_\Lambda M^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{KL}} + M^{\mathcal{MN}} \delta_\Lambda (\partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}}) \partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{KL}} \\
& \quad + M^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}} \delta_\Lambda (\partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{KL}}) \\
& = \mathcal{L}_\Lambda (M^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}} \partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{KL}}) + M^{\mathcal{MN}} \Delta_\Lambda (\partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}}) \partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{KL}} \\
& \quad + M^{\mathcal{MN}} \partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}} \Delta_\Lambda (\partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{KL}}).
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

Первый член в последнем равенстве является ковариантной вариацией, и его можно не учитывать. Вычислим теперь явно нековариантную часть вариации члена вида $\partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
\delta_\Lambda (\partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}}) &= \partial_{\mathcal{M}} \Big(\Lambda^{\mathcal{N}} \partial_{\mathcal{N}} M^{\mathcal{KL}} - 2\,\alpha_d\, \mathbb{P}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{Q}}{}^{(\mathcal{K}}{}_{\mathcal{N}}\, M^{L)N} \partial_{\mathcal{P}} \Lambda^{\mathcal{Q}} \Big), \\
\mathcal{L}_\Lambda (\partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}}) &= \Lambda^{\mathcal{N}} \partial_{\mathcal{N}} \partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}} - 2\,\alpha_d\, \mathbb{P}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{Q}}{}^{(K}{}_{\mathcal{N}}\, \partial_{\mathcal{M}} M^{L)N} \partial_{\mathcal{P}} \Lambda^{\mathcal{Q}} \\
& \quad + \alpha_d\, \mathbb{P}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{Q}}{}^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{M}}\, \partial_{\mathcal{P}} \Lambda^{\mathcal{Q}} \partial_{\mathcal{N}} M^{\mathcal{KL}} + \lambda(\partial M)\, \partial_{\mathcal{N}} \Lambda^{\mathcal{N}} \partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{KL}},
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

где вес $\lambda(\partial M) = -\beta_d$ вообще говоря не равен нулю. С учетом условия проекции получим

$$\Delta_\Lambda(\partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{K}\mathcal{L}}) = -2\,\alpha_d\,\mathbb{P}^{\mathcal{R}}{}_{\mathcal{P}}{}^{(\mathcal{K}}{}_{Q}\,M^{\mathcal{L})Q}\partial_{\mathcal{M}\mathcal{R}}\Lambda^{\mathcal{P}}. \tag{3.94}$$

Кроме прямого вычисления, для которого необходимо иметь вес $\lambda = -\beta_d$, такое значение веса можно объяснить из более общих рассуждений. Действительно, обобщенная метрика является тензором веса ноль, тогда как производная от скалярного поля $\partial_{\mathcal{M}}\Phi$ преобразуется как (ко-)вектор с весом $-\beta_d$. Таким образом, каждая производная добавляет вес $-\beta_d$ к выражению. Рассуждая тем же образом, получим для оставшихся членов в потенциале:

$$\begin{aligned}
\Delta_\Lambda(\partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{K}\mathcal{L}}) &= +\,2\,\alpha_d\,\mathbb{P}^{R}{}_{\mathcal{P}}{}^{Q}{}_{(K}\,M_{L)Q}\partial_{NR}\Lambda^{\mathcal{P}},\\
\Delta_\Lambda(g^{-1}\partial_{\mathcal{M}} g) &= 2\,d\,\beta_d\,\partial_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\Lambda^{\mathcal{N}},\\
\Delta_\Lambda(\partial_{\mathcal{M}} g^{\mu\nu}) &= -\,2\,\beta_d\,\partial_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\Lambda^{\mathcal{N}} g^{\mu\nu},\\
\Delta_\Lambda(\partial_{\mathcal{M}} g_{\mu\nu}) &= 2\,\beta_d\,\partial_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\Lambda^{\mathcal{N}} g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Заметим, что репер во внешним пространстве обладает ненулевым весом по обобщенной производной ЛИ $\lambda(e_\mu^{\bar a}) = \beta_d$, что является следствием его перенормировки для получения правильного действия Эйнштейна–Гильберта во внешнем пространстве. Отсюда имеем:

$$\lambda(g^{-1}\partial_{\mathcal{M}} g) = -\beta_d,\quad \lambda(\partial_{\mathcal{M}} g^{\mu\nu}) = -3\beta_d,\quad \lambda(\partial_{\mathcal{M}} g_{\mu\nu}) = \beta_d. \tag{3.96}$$

Таким образом, полный вес каждого члена в потенциале с учетом фактора $e = \det e_\mu^{\bar a}$ оказывается равным единице. Собирая вместе все слагаемые имеем следующее выражение для вариации первого слагаемого в (3.92) с точностью до ковариантных членов:

$$\begin{aligned}
\delta_\Lambda\Big(-\frac{e}{4\alpha_d}\,M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,\partial_{\mathcal{M}} M^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,\partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\Big) &\to e\,M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,\mathbb{P}^{\mathcal{P}}{}_{Q}{}^{(\mathcal{K}}{}_{\mathcal{R}}\,M^{\mathcal{L})\mathcal{R}}\,\partial_{\mathcal{N}} M_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,\partial_{\mathcal{M}\mathcal{P}}\Lambda^{Q}\\
&= e\,M^{\mathcal{M}\mathcal{N}} M^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,\partial_{\mathcal{M}} M_{\mathcal{K}\mathcal{P}}\,\partial_{\mathcal{L}\mathcal{N}}\Lambda^{\mathcal{P}}.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Во второй строке мы использовали тот факт, что матрица $M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}$ параметризует фактор-группу G/K, и соответствующий ток $(J_{\mathcal{M}})^{\mathcal{P}}{}_{Q} := M^{\mathcal{P}\mathcal{R}}\partial_{\mathcal{M}} M_{\mathcal{R}Q}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbb{P}^{\mathcal{P}}{}_{Q}{}^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{L}}(J_{\mathcal{N}})^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{K}} = (J_{\mathcal{N}})^{\mathcal{P}}{}_{Q}. \tag{3.98}$$

Производя те же манипуляции со вторым слагаемым в (3.90), получим для его нековариантной вариации следующее выражение

$$
\begin{aligned}
&\delta_\Lambda\Big(\frac{e}{2}\,\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_\mathcal{M}\mathcal{M}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_\mathcal{L}\mathcal{M}_{\mathcal{N}\mathcal{K}}\Big)\to\\
&\to -\frac{e}{2}\,\alpha_d\Big(\mathbb{P}^\mathcal{R}{}_\mathcal{P}{}^{(\mathcal{K}}{}_\mathcal{Q}\,\mathcal{M}^{\mathcal{L})\mathcal{Q}}\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_\mathcal{L}\mathcal{M}_{\mathcal{N}\mathcal{K}}\partial_{\mathcal{M}\mathcal{R}}\Lambda^\mathcal{P}-\\
&-\mathbb{P}^\mathcal{R}{}_\mathcal{P}{}^\mathcal{Q}{}_{(\mathcal{N}}\,\mathcal{M}_{\mathcal{K})\mathcal{Q}}\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\partial_\mathcal{M}\mathcal{M}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_{\mathcal{L}\mathcal{R}}\Lambda^\mathcal{P}\Big)\\
&= -e\,\alpha_d\,\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\mathbb{P}^R{}_\mathcal{P}{}^\mathcal{Q}{}_\mathcal{N}\,(J_\mathcal{M})^\mathcal{L}{}_\mathcal{Q}\,\partial_{\mathcal{L}\mathcal{R}}\Lambda^\mathcal{P}+e\,\beta_d\,\partial_\mathcal{K}\mathcal{M}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_{\mathcal{L}\mathcal{P}}\Lambda^\mathcal{P}+e\,\partial_\mathcal{P}\mathcal{M}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,\partial_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\Lambda^\mathcal{P}.
\end{aligned}
\tag{3.99}
$$

Чтобы полученные слагаемые компенсировали вариацию (3.97) первого члена необходимо переписать слагаемое с проектором в более подходящим виде. С учетом свойства (3.98) имеем:

$$
\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,\mathbb{P}^\mathcal{R}{}_\mathcal{P}{}^\mathcal{Q}{}_\mathcal{N}\,(J_\mathcal{M})^\mathcal{L}{}_\mathcal{Q}\,\partial_{\mathcal{L}\mathcal{R}}\Lambda^\mathcal{P}=\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,\mathbb{P}^\mathcal{R}{}_\mathcal{P}{}^\mathcal{Q}{}_\mathcal{N}\,\mathbb{P}^\mathcal{Q}{}_\mathcal{L}{}^\mathcal{U}{}_\mathcal{V}\,(J_\mathcal{M})^\mathcal{V}{}_\mathcal{U}\,\partial_{\mathcal{L}\mathcal{R}}\Lambda^\mathcal{P}.
\tag{3.100}
$$

Далее, выражая проектор обратно в терминах $Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ и используя условие инвариантности в первой строке (3.16), получаем

$$
\begin{aligned}
&e\,\beta_d\,\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,\mathbb{P}^L{}_\mathcal{N}{}^\mathcal{U}{}_\mathcal{V}\,(J_\mathcal{M})^\mathcal{V}{}_\mathcal{U}\,\partial_{\mathcal{L}\mathcal{P}}\Lambda^\mathcal{P}+e\,\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,\mathbb{P}^L{}_\mathcal{P}{}^\mathcal{U}{}_\mathcal{V}\,(J_\mathcal{M})^\mathcal{V}{}_\mathcal{U}\,\partial_{\mathcal{L}\mathcal{N}}\Lambda^\mathcal{P}\\
&= -e\,\beta_d\,\partial_\mathcal{M}\mathcal{M}^{\mathcal{L}\mathcal{M}}\,\partial_{\mathcal{L}\mathcal{P}}\Lambda^\mathcal{P}+e\,\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\mathcal{M}^{\mathcal{L}\mathcal{K}}\,\partial_\mathcal{M}\mathcal{M}_{\mathcal{K}\mathcal{P}}\,\partial_{\mathcal{L}\mathcal{N}}\Lambda^\mathcal{P}.
\end{aligned}
\tag{3.101}
$$

В итоге, нековариантная часть вариации второго члена в потенциале имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\delta_\Lambda\Big(\frac{e}{2}\,\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,\partial_\mathcal{M}\mathcal{M}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_\mathcal{L}\mathcal{M}_{NK}\Big)\to\\
&\to -e\,\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\mathcal{M}^{\mathcal{L}\mathcal{K}}\,\partial_\mathcal{M}\mathcal{M}_{\mathcal{K}\mathcal{P}}\,\partial_{\mathcal{L}\mathcal{N}}\Lambda^\mathcal{P}+2\,\beta_d\,\partial_\mathcal{K}\mathcal{M}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,\partial_{LP}\Lambda^\mathcal{P}+e\,\partial_\mathcal{P}\mathcal{M}^{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,\partial_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\Lambda^\mathcal{P},
\end{aligned}
\tag{3.102}
$$

полностью компенсируя член (3.97).

Оставшиеся слагаемые линейные по производной $\partial\mathcal{M}$ компенсируются нековариантными вариациями оставшихся членов в потенциале (3.90). Действительно, с учетом условия проекции запишем:

$$
\Delta_\Lambda(\partial_\mathcal{N}\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}})=-(2\beta_d+1)\,\partial_{\mathcal{N}\mathcal{P}}\Lambda^\mathcal{P}\mathcal{M}^{\mathcal{M}\mathcal{N}}-\mathcal{M}^{\mathcal{N}\mathcal{K}}\,\partial_{\mathcal{N}\mathcal{K}}\Lambda^\mathcal{M}.
\tag{3.103}
$$

Тогда нековариантные вариации третьего, четвертого и пятого членов в потенциале принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Delta_\Lambda(3) &= -\,d\,\beta_d\, e\,\partial_{\mathcal{MP}}\Lambda^{\mathcal{P}}\,\partial_{\mathcal{N}}M^{\mathcal{MN}} + 2\,\beta_d\,\partial_{\mathcal{M}}\, e\,\partial_{\mathcal{NP}}\Lambda^{\mathcal{P}}\, M^{\mathcal{MN}} + \\
&\quad + M^{\mathcal{NK}}\,\partial_{\mathcal{M}} e\,\partial_{\mathcal{NK}}\Lambda^{\mathcal{M}}, \\
\Delta_\Lambda(4) &= -\,2\,d\,\beta_d\, M^{\mathcal{MN}}\,\partial_{\mathcal{M}} e\,\partial_{\mathcal{NP}}\Lambda^{\mathcal{P}}, \\
\Delta_\Lambda(5) &= 2\,\beta_d\, M^{\mathcal{MN}}\,\partial_{\mathcal{M}} e\,\partial_{\mathcal{NP}}\Lambda^{\mathcal{P}}.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Итого, с учетом (3.102) получим для полной вариации следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
\delta_\Lambda(eV) &= \partial_{\mathcal{N}}\,(e\,\Lambda^{\mathcal{N}}V) + e\,\Delta_\Lambda V \\
&= \partial_{\mathcal{N}}\,(e\,\Lambda^{\mathcal{N}}V) - e\,\partial_{\mathcal{MP}}\Lambda^{\mathcal{P}}\,\partial_{\mathcal{N}}M^{\mathcal{MN}} + e\,\partial_{\mathcal{P}}M^{\mathcal{KL}}\,\partial_{\mathcal{KL}}\Lambda^{\mathcal{P}} \\
&\quad - \partial_{\mathcal{M}} e\, M^{\mathcal{MN}}\,\partial_{\mathcal{NP}}\Lambda^{\mathcal{P}} + M^{\mathcal{KL}}\,\partial_{\mathcal{P}} e\,\partial_{\mathcal{KL}}\Lambda^{\mathcal{P}} \\
&= \partial_{\mathcal{N}}\big(e\,\Lambda^{\mathcal{N}}V - e\,\partial_{\mathcal{PQ}}\Lambda^{\mathcal{P}}\, M^{\mathcal{QN}} + e\, M^{\mathcal{KL}}\,\partial_{\mathcal{KL}}\Lambda^{\mathcal{N}}\big) \to 0.
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Вариация скалярного потенциала с учетом детерминанта репера под действием обобщенной производной Ли оказывается равной полной производной от некоторого выражения. В формализме расширенного пространства считается, что интеграл от таких выражений равен нулю.

Замечательным наблюдением здесь является то, что вид скалярного потенциала жестко фиксируется требованием обобщенной ковариантности с точностью до общего множителя. Более того, подсчет весов дает именно тот вес для внешнего репера, который требуется для правильного вида члена Эйнштейна-Гильберта.

3.4.5 Внешние диффеоморфизмы

Описанные выше слагаемые в лагранжиане были построены, исходя из принципа инвариантности по отношению к калибровочным преобразованиям (3.32) и обобщенной производной Ли. Однако, вообще говоря, в полный лагранжиан эти слагаемые могли бы входить с произвольными взаимными коэффициентами. Та же ситуация наблюдается в максимальных калиброванных супергравитациях, где оставшиеся коэффициенты полностью фиксируются требованием инвариантности относительно суперсимметрии.

Замечательным свойством исключительной теории поля является то, что здесь достаточно рассмотрения бозонного сектора и требования инвариантности относительно диффеоморфизмов во внешнем пространстве-времени. Полученный лагранжиан автоматически будет суперсимметричным, при добавлении фермионного сектора с правильным коэффициентом. Впервые это было продемонстрировано в работах [115] и [113] для групп дуальности $E_{7(7)}$ и $E_{6(6)}$ соответственно. Конечно, ничего действительно удивительного в таком поведении теории нет. Исключительная теория поля является формулировкой 11-мерной супергравитации ковариантной относительно определенных групп дуальности. Такие группы дуальности возникают только для такого набора бозонных полей, который соответствует бозонному сектору 11-мерной супергравитации в разбиении $11 = D + d$ (в глобальном случае — на d-мерном торе). Очевидно, сохраняя все бозонные симметрии суперсимметричной теории теории и ее набор полей, мы непременно воспроизведем суперсимметричную теорию.

Выпишем преобразования диффеоморфизмов во внешнем пространстве в явном виде. Преобразования внешнего репера, скалярной метрики и векторного мультиплета имеют универсальный вид:

$$\begin{aligned} \delta e_\mu^{\bar{a}} &= \xi^\mu \mathcal{D}_\nu e_\mu^{ba} + \mathcal{D}_\mu \xi^\nu e_\nu^{\bar{a}}, \\ \delta M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} &= \xi^\mu \mathcal{D}_\mu M_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, \\ \delta A_\mu{}^{\mathcal{M}} &= \xi^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu}{}^{\mathcal{M}} + M^{\mathcal{M}\mathcal{N}} g_{\mu\nu} \partial_{\mathcal{N}} \xi^\nu. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Несколько нестандартный вид преобразований для векторных полей, отличающийся от обычного выражения для производной Ли от вектора во внешнем пространстве-времени, объясняется следующим образом. Рассмотрим для примера производную Ли абелева калибровочного поля A_μ:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu = L_\xi A_\mu &= \xi^\nu \partial_\nu A_\mu + A_\nu \partial_\mu \xi^\nu \\ &= \xi^\nu F_{\nu\mu} + \partial_\mu (\xi^\nu A_\nu). \end{aligned} \tag{3.107}$$

Первое слагаемое имеет необходимый вид, а второе представляет собой калибровочное преобразование. Явное вложение 11-мерной супергравитации в исключительную теорию поля показывает, что результирующие преобразования должны быть представлены именно первым слагаемым. Такой же вид принимают диффеоморфизмы для 2- и 3-форм. Второе слагаемое в третьей строке в (3.106) появляется из-за зависимости параметра преобразования $\xi^\mu = \xi^\mu(x, \mathbb{X})$ от координат расширенного пространства.

Преобразования оставшихся полей принимают различный вид в разных исключительных теориях поля. Для SL(5) теории в $D = 7$ имеем:

$$\begin{aligned} \Delta B_{\mu\nu M} &= \xi^{\rho}\mathcal{F}_{\rho\mu\nu M}, \\ \Delta C_{\mu\nu\rho}{}^{M} &= -\frac{1}{3!}e\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda\tau}\xi^{\sigma}M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\mathcal{F}^{\kappa\lambda\tau}{}_{\mathcal{N}}, \end{aligned} \tag{3.108}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda\tau} = e\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda\tau}$ обозначает тензор Леви–Чивита в размерности 6+1, $M = 1,\ldots,5$.

В теории с группой SO(5,5) в размерности $D = 6$ преобразования имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta B_{\mu\nu\, i} &= \xi^{\rho}\mathcal{G}_{\rho\mu\nu\, i}, \\ \Delta C_{\mu\nu\rho\,\mathcal{N}} &= \frac{e}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}\xi^{\sigma}\mathcal{F}^{\kappa\lambda\,\mathcal{M}}M_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, \end{aligned} \tag{3.109}$$

где $\mathcal{M},\mathcal{N} = 1,\ldots,16$ нумеруют компоненты спинорного представления $\mathbf{16}_s$.

Наконец, в исключительной теории поля в группой симметрии $E_{6(6)}$ в размерности $D = 5$ внешние диффеоморфизмы для поля $B_{\mu\nu\mathcal{M}}$ принимают вид

$$\Delta B_{\mu\nu\,\mathcal{N}} = \frac{1}{16\kappa}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma\kappa}\xi^{\rho}\mathcal{F}^{\sigma\kappa\,\mathcal{M}}M_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, \tag{3.110}$$

где $\mathcal{M},\mathcal{N} = 1,\ldots 27$ и $\kappa^2 = 5/32$.

3.4.6 Вложение бозонного сектора d=11 супергравитации

Выше было показано, что различные решения условия проекции для функций на расширенном пространстве воспроизводят зависимость от $D+d = 11$ координат, соответствующую вложению 11-мерной супергравитации в исключительную теорию поля, и от $D + n = 10$ координат с дополнительной SL(2) симметрией, соответствующую вложению теории типа IIB. Рассмотрим подробнее вложение полей на примере теории с SL(5) симметрией.

Гравитационная часть

Начнем с общего анзаца для калуца-клейновской редукции из 11 в 7, однако, оставляя полную зависимость от 4 координат. Обозначим координатные индексы $\hat{\mu} = (\mu, m)$ и лоренцевы индексы $\hat{a} = (a, \alpha)$. В общем случае для репера можно записать:

$$E_{\hat{\mu}}{}^{\hat{a}} = \begin{pmatrix} \varphi^{\gamma} e_{\mu}{}^{a} & A_{\mu}{}^{m} \varphi_{m}{}^{\alpha} \\ 0 & \varphi_{m}{}^{\alpha} \end{pmatrix}, \tag{3.111}$$

где $\varphi = \det \varphi_m{}^{\alpha}$. Для обратного репера имеем:

$$E_{\hat{a}}{}^{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} \varphi^{-\gamma} e_{a}{}^{\mu} & -\varphi^{-\gamma} e_{a}{}^{\nu} A_{\nu}{}^{m} \\ 0 & \varphi_{\alpha}{}^{m} \end{pmatrix}. \tag{3.112}$$

Постоянная γ зависит от размерности пространств в разбиении и выбирается так, чтобы для $e_{\mu}{}^{a}$ получился стандартный член Эйншейна–Гильберта

$$\gamma = -\frac{1}{d-2}. \tag{3.113}$$

Диффеоморфизмы для 11-мерного репера вдоль параметра (ξ^{μ}, Λ^{m}) индуцируют следующие преобразования полей:

$$\begin{aligned}
\delta_{\Lambda} e_{\mu}{}^{a} &= \Lambda^{m} \partial_{m} e_{\mu}{}^{a} - \gamma\, \partial_{m} \Lambda^{m}\, e_{\mu}{}^{a}, \\
\delta_{\Lambda} \varphi_{m}{}^{\alpha} &= \Lambda^{n} \partial_{n} \varphi_{m}{}^{\alpha} + \partial_{m} \Lambda^{n}\, \varphi_{n}{}^{\alpha}, \\
\delta_{\Lambda} \varphi &= \Lambda^{n} \partial_{n} \varphi + \partial_{n} \Lambda^{n}\, \varphi, \\
\delta_{\Lambda} A_{\mu}{}^{m} &= \partial_{\mu} \Lambda^{m} - A_{\mu}{}^{n} \partial_{n} \Lambda^{m} + \Lambda^{n} \partial_{n} A_{\mu}{}^{m}.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Видим, что $e_{\mu}{}^{a}$ является скаляром с весом $-\gamma$, причем $-\gamma = \beta_d$, определенной выше. Определяя длинную производную $D_{\mu} = \partial_{\mu} - L_{A_{\mu}}$, можем записать 11-мерное действие Эйншейна–Гильберта в компактном виде

$$\begin{aligned}
S_{EH} = \int d^n x\, d^d y\, e \Big[& \widehat{R} - \frac{1}{4} \varphi^{-2\gamma} \varphi_{mn} F^{\mu\nu m} F_{\mu\nu}{}^{n} \\
& - \frac{1}{2} \varphi^{mn} g^{\mu\nu} D_{\mu} \varphi_{m}{}^{\alpha} D_{\nu} \varphi_{n\alpha} - \gamma^2 (n-2)\, \varphi^{-2} g^{\mu\nu} D_{\mu} \varphi D_{\nu} \varphi \\
& - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\varphi^{\alpha m} D_{\mu} \varphi_{m}{}^{\gamma})(\varphi_{\gamma}{}^{n} D_{\nu} \varphi_{n\alpha}) + e^{-1} \mathcal{L}_{EH}(h,e) \Big].
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Здесь d-мерная часть действия $\mathcal{L}_{EH}(h,e)$ равна:

$$h^{\frac{1}{5}}e^{-1}\mathcal{L}_{EH}(h,e) \;=\; R(\varphi)+\frac{1}{4}h^{mn}\left(D_m g^{\mu\nu}\,D_n g_{\mu\nu}+g^{-1}D_m g\,g^{-1}D_n g\right)\;, \qquad (3.116)$$

где мы определяем внутреннюю метрику в терминах репера стандартным образом $h_{mn} \;=\; \varphi_m{}^{\alpha}\varphi_{n\alpha}$. Инвариантный тензор Римана дается выражением, повторяющем таковое для исключительной теории поля

$$\widehat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}=R_{\mu\nu}{}^{ab}+F_{\mu\nu}{}^{m}e^{a\rho}\partial_m e_{\rho}{}^{b}\,, \qquad (3.117)$$

Наконец, комбинация

$$D_m g_{\mu\nu}=\partial_m g_{\mu\nu}-\frac{1}{5}(h^{-1}\partial_m h)g_{\mu\nu}, \qquad (3.118)$$

преобразуется ковариантно под действием преобразований (3.114).

Тензорная часть

Кроме метрики бозонный сектор 11-мерной супергравитации содержит поле 3-формы со стандартным кинетическим лагранжианом. Используя стандартный анзац для калуца-кляйновской редукции 3-формы, получим [122]:

$$\begin{aligned}
A_{mnk} \;&=\; C_{mnk}\;,\\
A_{\mu\,mn} \;&=\; C_{\mu mn}-A_{\mu}{}^{k}\,C_{kmn}\;,\\
A_{\mu\nu\,m} \;&=\; C_{\mu\nu m}-2A_{[\mu}{}^{n}\,C_{\nu]mn}+A_{\mu}{}^{n}A_{\nu}{}^{k}\,C_{mnk}\;,\\
A_{\mu\nu\rho} \;&=\; C_{\mu\nu\rho}-3A_{[\mu}{}^{m}\,C_{\nu\rho]m}+3A_{[\mu}{}^{m}A_{\nu}{}^{n}\,C_{\rho]mn}-A_{\mu}{}^{m}A_{\nu}{}^{n}A_{\rho}{}^{k}\,C_{mnk}\;.
\end{aligned} \qquad (3.119)$$

Кинетический лагранжиан для 3-формы в 11 измерениях тогда раскладывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 &= -\frac{1}{48}E\,F^{\hat a\hat b\hat c\hat d}F_{\hat a\hat b\hat c\hat d} =\\
&= -\frac{1}{48}\varphi^{n\gamma+1}e\Big(\varphi^{-8\gamma}F^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu\rho\sigma}+4\varphi^{-6\gamma}\varphi^{mn}F^{\mu\nu\rho}{}_{m}F_{\mu\nu\rho\,n}\\
&\quad+6\varphi^{-4\gamma}\varphi^{mn}\varphi^{kl}F^{\mu\nu}{}_{mk}F_{\mu\nu\,nl}+4\varphi^{-2\gamma}\varphi^{mn}\varphi^{kl}\varphi^{pq}F^{\mu}{}_{mkp}F_{\mu\,nlq}\\
&\quad+\varphi^{mn}\varphi^{kl}\varphi^{pq}\varphi^{rs}F_{mkpr}F_{nlqs}\Big),
\end{aligned} \qquad (3.120)$$

где поля напряженности для потенциалов $A_{\mu\nu\rho}, A_{\mu\nu m}, A_{\mu mn}, A_{mnk}$ определяются как:

$$
\begin{aligned}
F_{mnkl} &= 4\partial_{[m}A_{nkl]} \ , \\
F_{\mu\, nkl} &= D_\mu A_{nkl} - 3\partial_{[n}A_{|\mu|kl]} \ , \\
F_{\mu\nu\, mn} &= 2D_{[\mu}A_{\nu]mn} + F_{\mu\nu}{}^k A_{kmn} + 2\partial_{[m}A_{|\mu\nu|n]} \ , \\
F_{\mu\nu\rho\, m} &= 3D_{[\mu}A_{\nu\rho]m} + 3F_{[\mu\nu}{}^n A_{\rho]mn} - \partial_m A_{\mu\nu\rho} \ , \\
F_{\mu\nu\rho\sigma} &= 4D_{[\mu}A_{\nu\rho\sigma]} + 6F_{[\mu\nu}{}^m A_{\rho\sigma]m} \ .
\end{aligned}
\tag{3.121}
$$

Заметим, что получаемые при стандартном алгоритме калуца-кляйновского разложения тензоры напряженности имеют вид, очень похожий на соответствующие выражения исключительной теории поля.

В случае разбиения $11 = 7+4$ члены кинетического лагранжиана, содержащие напряженности $F_{\mu\nu}{}^m$ и $F_{\mu\nu mn}$, могут быть записаны в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
e^{-1}\mathcal{L}_{kin-2} &= -\frac{1}{4}h^{\frac{1}{5}}F^{\mu\nu m}F_{\mu\nu}{}^n h_{mn} - \frac{1}{8}h^{\frac{1}{5}}h^{mn}h^{kl}F^{\mu\nu}{}_{mk}F_{\mu\nu nl} \\
&= -\frac{1}{8}m_{\mathcal{MN}}m_{\mathcal{KL}}\mathcal{F}^{MK}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu NL},
\end{aligned}
\tag{3.122}
$$

при помощи обобщенной метрики SL(5) теории

$$
m_{\mathcal{MN}} = h^{\frac{1}{10}}\begin{bmatrix} h^{-\frac{1}{2}}h_{mn} & -V_m \\ & \\ -V_n & \pm h^{\frac{1}{2}}(1 \pm V_k V^k) \end{bmatrix}.
\tag{3.123}
$$

Здесь $V^m = 1/3!\varepsilon^{mnkl}C_{nkl}$, а ковариантные тензоры напряженности $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{MN}}$ определены как

$$
\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{MN}} = \begin{cases} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{5m} = F_{\mu\nu}{}^{5m} \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{mn} = -\dfrac{1}{2}\varepsilon^{mnkl}F_{\mu\nu kl} + 2h^{\frac{1}{2}}V^{[m}F_{\mu\nu}{}^{n]}. \end{cases}
\tag{3.124}
$$

В более удобной форме вторая строка может быть переписана как $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{mn} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{mnkl}(F_{\mu\nu kl} - C_{klp}F_{\mu\nu}{}^p)$. Видим, что воспроизводится точно действие для полей $A^{\mathcal{MN}}_\mu$ исключительной теории поля с группой SL(5).

Запишем полностью действие 11-мерной супергравитации в 7+4 разбиении в терминах полей, определенных выше

$$
\begin{aligned}
S_{11} = \int d^7x\, d^4y\, e \Big[& \widehat{R} - \frac{1}{4} M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \mathcal{F}^{\mu\nu\,\mathcal{M}} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{N}} \\
& - \frac{1}{48} \varphi^{\frac{6}{5}} F^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{12} \varphi^{\frac{4}{5}} \varphi^{mn} F^{\mu\nu\rho}{}_m F_{\mu\nu\rho\, n} \\
& - \frac{1}{2} \varphi^{mn} D^\mu \varphi_m{}^\alpha D_\mu \varphi_{n\alpha} - \frac{1}{5} \varphi^{-2} D^\mu \varphi\, D_\mu \varphi - \frac{1}{2} (\varphi^{\alpha m} D^\mu \varphi_m{}^\gamma)(\varphi_\gamma{}^n D_\mu \varphi_{n\alpha}) \\
& - \frac{1}{12} \varphi^{mn} \varphi^{kl} \varphi^{pq} F^\mu{}_{mkp} F_{\mu\, nlq} \\
& - V(e,\varphi) + e^{-1} \mathcal{L}_{top} \Big] ,
\end{aligned}
\tag{3.125}
$$

где $\mathcal{L}_{top}$ обозначает вклад от членов Черна–Саймонса. Обобщенная метрика M_{MN} определяется, как и ранее:

$$
M_{MN,KL} = 2 M_{M[K} M_{L]N}. \tag{3.126}
$$

Члены с тензорами напряженности $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ и $F_{\mu\nu\rho m}$ могут быть записаны в ковариантном виде

$$
e^{-1} \mathcal{L}_{kin-3,4} = -\frac{1}{3\cdot(16)^2} M^{MN} \mathcal{F}_{\mu\nu\rho M} \mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_N \tag{3.127}
$$

с учетом следующих обозначений

$$
\mathcal{F}_{\mu\nu\rho M} = \begin{cases} \frac{1}{3} \varphi^{\frac{6}{5}} \varepsilon_{\mu\nu\rho\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} F^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} - 8\varphi V^m F_{\mu\nu\rho m} \\ 8 F_{\mu\nu\rho m} \end{cases} \tag{3.128}
$$

Видимо, что потенциал $C_{\mu\nu\rho}$ дает магнитный вклад в ковариантную напряженность поля 2-формы, откуда следует условие дуальности между ковариантными напряженностями для 2-форм и 3-форм. Наконец, третья и четвертая строки в (3.125) в терминах производной от обобщенной метрики записываются в виде

$$
e^{-1} \mathcal{L}_{kin-sc} = -\frac{1}{4} g^{\mu\nu} D_\mu M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} D_\mu M^{\mathcal{M}\mathcal{N}}. \tag{3.129}
$$

Окончательно для лагранжиана 11-мерной супергравитации в 7+4 разбиении имеем

$$
\begin{aligned}
S_{11} = \int d^7x d^4y e \Big[& \widehat{R} - \frac{1}{4} M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \mathcal{F}^{\mu\nu\,\mathcal{M}} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{N}} - \frac{1}{3\cdot(16)^2} M^{MN} \mathcal{F}_{\mu\nu\rho M} \mathcal{F}^{\mu\nu\rho}{}_N \\
& - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} D_\mu M_{MN} D_\mu M^{MN} - V(e,\varphi) + e^{-1} \mathcal{L}_{top} \Big].
\end{aligned}
\tag{3.130}
$$

Как обсуждалось выше, член Черна–Саймонса $\mathcal{L}_{top}$ не записывается в ковариантном виде, однако, в таком виде записывается его вариация.

Скалярный потенциал

Рассмотрим теперь подробнее вклады в полный скалярный потенциал $-V(e,\varphi)$ от членов Эйнштейна–Гильберта в 11 измерениях и от 4-формы F_{mnkl}

$$\mathcal{L}_{sc} = \mathcal{L}_{EH} - \frac{1}{48} e h^{-\frac{1}{5}} h^{mp} h^{nq} h^{kr} h^{ls} F_{mnkl} F_{pqrs}. \tag{3.131}$$

Для SL(5)-теории $D = 7$, поэтому $\gamma = -\frac{1}{5}$. Интегрируя по частям, запишем потенциал V_{EH} в форме, удобной для сравнения со скалярным потенциалом исключительной теории поля:

$$\begin{aligned} h^{\frac{1}{5}} e^{-1} \mathcal{L}_{EH} = &\frac{1}{4} h^{kl} \partial_k h^{mn} \partial_l h_{mn} - \frac{1}{2} h^{kl} \partial_k h^{mn} \partial_m h_{ln} - \frac{1}{5} \partial_m h^{mn} h^{-1} \partial_n h \\ &- \frac{3}{100} h^{mn} (h^{-1} \partial_m h)(h^{-1} \partial_n h) + \frac{1}{4} h^{mn} \partial_m g^{\mu\nu} \partial_n g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_m h^{mn} g^{-1} \partial_n g \\ &+ \frac{1}{4} h^{mn} (g^{-1} \partial_m g)(g^{-1} \partial_n g) - \frac{1}{10} h^{mn} (h^{-1} \partial_m h)(g^{-1} \partial_n g) . \end{aligned} \tag{3.132}$$

Подставляя явный вид (3.123) обобщенной метрики $M_{\mathcal{MN}}$ в выражение для скалярного потенциала SL(5) теории:

$$\begin{aligned} e^{-1} \mathcal{L}_{sc} = \pm \Big(&\frac{1}{8} \partial_{\mathcal{MN}} m_{PQ} \partial_{\mathcal{KL}} m^{PQ} m^{MK} m^{NL} + \frac{1}{2} \partial_{\mathcal{MN}} m_{PQ} \partial_{\mathcal{KL}} m^{MP} m^{NK} m^{LQ} \\ &+ \frac{1}{2} \partial_{\mathcal{MN}} m^{LN} \partial_{\mathcal{KL}} m^{MK} + \frac{1}{2} m^{MK} \partial_{\mathcal{MN}} m^{NL} (g^{-1} \partial_{\mathcal{KL}} g) \\ &+ \frac{1}{8} m^{MK} m^{NL} (g^{-1} \partial_{\mathcal{MN}} g)(g^{-1} \partial_{\mathcal{KL}} g) + \frac{1}{8} m^{MK} m^{NL} \partial_{\mathcal{MN}} g^{\mu\nu} \partial_{\mathcal{KL}} g_{\mu\nu} \Big), \end{aligned} \tag{3.133}$$

убеждаемся, что воспроизводится точно действие (3.131) с $\mathcal{L}_{EH}$, записанным в виде (3.132).

Здесь важно отметить следующее. Несмотря на то, что действие не является явно ковариантным по отношению к локальной SO(1,10) и глобальной GL(11) симметриям, оно является инвариантным по отношению к этим преобразованиям. Действительно, изначальное действие S_{11} обладало этими симметриями, а (3.130) является его переписыванием в другой форме. Таким образом, платой за явную SL(5) инвариантность является нарушение GL(11) симметрии, GL(4) подгруппа которой является геометрической подгруппой группы U-дуальности.

3.5 Суперсимметрия

Бозонный сектор исключительной теории поля может быть дополнен до полной суперсимметричной теории, являющейся ковариантной формулировкой 11-мерной супергравитации с группой дуальности $\mathrm{E}_{d(d)}$ и группой R-симметрии K, заданной ее максимальной компактной подгруппой. Рассмотрим построение суперсимметричной исключительной теории поля с группой дуальности $\mathrm{E}_{6(6)}$, являющейся теорией на 5+27-мерном пространстве. Бозонные симметрии связаны с калибровочными симметриями векторного поля $A_\mu{}^{\mathcal{M}}$, принадлежащему мультиплету **27** группы $\mathrm{E}_{6(6)}$. Фермионный сектор теории, как и $D = 5$ максимальная супергравитация [70, 88], содержит гравитино $\psi_\mu{}^i$ и фермионные поля (гейджино) χ^{ijk}, принадлежащие фундаментальному представлению **8** и антисимметричному бесследовому представлению **42** группы $K = \mathrm{USp}(8)$соответсвенно. Таким образом, обобщенная группа Лоренца оказывается представлена группой $\mathrm{SO}(1,4) \times \mathrm{USp}(8)$. Имеем следующий набор полей в полной суперсимметричной теории:

$$\left\{e_\mu{}^a\,,\ \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij},\ A_\mu{}^{\mathcal{M}}\,,\ B_{\mu\nu\,\mathcal{M}},\ \psi_\mu{}^i,\ \chi^{ijk}\right\}, \tag{3.134}$$

где индексы $\mu, \nu = 0, \ldots, 4$, и $M = 1, \ldots, 27$, нумеруют направления во внешнем и расширенном пространствах соответственно. Лоренцевы индексы $a = 0, \ldots, 4$, and $i, j = 1, \ldots, 8$, нумеруют фундаментальные представления групп SO(1,4) и USp(8) соответственно. Репер $e_\mu{}^a$ определяет пятимерную метрику стандартным образом $g_{\mu\nu} \equiv e_\mu{}^a e_\nu{}^b \eta_{ab}$. То же для репера $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij}$ на расширенном пространстве:

$$M_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij}\mathcal{V}_{\mathcal{N}}{}^{kl}\Omega_{ik}\Omega_{jl}, \tag{3.135}$$

где Ω_{ij} — инвариантный тензор группы USp(8).

Для фермионных полей используются те же соглашения, что и в [88] для максимальной пятимерной супергравитации. В частности, фермионы считаются симплекто-майорановскими, то есть удовлетворяющими условиям

$$C^{-1}\bar{\psi}_i^T = \Omega_{ij}\psi^j, \qquad {\psi^i}^T C = \Omega^{ij}\bar{\psi}_j, \qquad C^{-1}\bar{\chi}_{ijk}^T = \Omega_{il}\Omega_{jm}\Omega_{kn}\chi^{lmn}, \tag{3.136}$$

где матрица зарядового сопряжения C определяется следующими соотношениями

$$C\gamma_a C^{-1} = \gamma_a^T, \;\; C^T = -C, \;\; C^\dagger = C^{-1} \; . \tag{3.137}$$

Инвариантность по отношению к преобразованиям из обобщенной группы Лоренца и обобщенным диффеоморфизмам требует введения соответствующих связностей (см. Таблицу 12). При этом под действием обобщенных диффеоморфизмов фермионы преобразуются, как скаляры с некоторым весом. Для длинных производных удобно ввести следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&D_\mu = D[A_\nu]_\mu \; , \\
&\mathcal{D}_\mu = \mathcal{D}[A_\nu,\omega_\nu,\mathcal{Q}_\nu]_\mu \; , \qquad \mathcal{D}_\mathcal{M} = \mathcal{D}[\omega_\mathcal{N},\mathcal{Q}_\mathcal{N}]_\mathcal{M} \; , \\
&\nabla_\mu = \nabla[A_\nu,\omega_\nu,\mathcal{Q}_\nu,\Gamma_\nu]_\mu \; , \qquad \nabla_\mathcal{M} = \nabla[\omega_\mathcal{N},\mathcal{Q}_\mathcal{N},\Gamma_\mathcal{N}]_\mu \; ,
\end{aligned} \tag{3.138}$$

где в квадратных скобках после значка производной перечислены связности, которые входят в ее определение.

Таблица 12 — Связности, задающие ковариантные производные на полях, принадлежащих мультиплетам групп SO(1,4) и USp(8).

	$\mathcal{D}_\mu$	$\mathcal{D}_\mathcal{M}$
SO(1,4)	${\omega_\mu}^{ab}$	${\omega_\mathcal{M}}^{ab}$
USp(8)	${\mathcal{Q}_\mu}_i{}^j$	${\mathcal{Q}_M}_i{}^j$

Как и в формализме 1.5 рода для супергравитации, связности определяются в терминах репера ${e_\mu}^a$ на внешнем пространстве и обобщенного репера ${\mathcal{V}_\mathcal{M}}^{ij}$. SO(1,4) связность во внешнем пространстве ${\omega_\mu}^{ab}$ определяется стандартным способом через условие равенства нулю кручения:

$$\mathcal{D}_{[\mu}{e_{\nu]}}^a \equiv D_{[\mu}{e_{\nu]}}^a + {\omega_{[\mu}}^{ab}e_{\nu]b} \overset{!}{=} 0 \; , \;\; \Longleftrightarrow \;\; {\Gamma_{[\mu\nu]}}^\rho \; = \; 0. \tag{3.139}$$

Причем, производная $D_\mu = \partial_\mu - \mathcal{L}_{A_\mu}$ ковариантна по отношению к обобщенным диффеоморфизмам. Символы Кристоффеля для внешних диффеоморфизмов определяются из условия метричности связности

$$\nabla_\mu {e_\nu}^a = \mathcal{D}_\mu {e_\nu}^a - {\Gamma_{\mu\nu}}^\lambda {e_\lambda}^a = 0. \tag{3.140}$$

Внутренняя спин-связность $\omega_\mu{}^{ab}$ определяется из условия, что ток $e^{a\,\mu}\mathcal{D}[\omega]_{\mathcal{M}}e_\mu{}^b$ принадлежит ортогональному дополнению максимальной компактной подалгебры алгебры $\mathfrak{gl}(5)$. Другими словами, требуем равенства нулю проекции на компактную часть:

$$e^{\mu[a}\,\mathcal{D}_{\mathcal{M}}e_\mu{}^{b]} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_{\mathcal{M}}{}^{ab} = e^{\mu[a}\partial_{\mathcal{M}}e_\mu{}^{b]}. \tag{3.141}$$

Для формулировки преобразований суперсимметрии требуется ввести длинные производные $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}{}^{\pm}$, определенные через модифицированную спин-связность:

$$\omega^{\pm}_{\mathcal{M}}{}^{ab} \equiv \omega_{\mathcal{M}}{}^{ab} \pm \frac{1}{2}\,M_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{N}}\,e^{\mu a}e^{\nu b}. \tag{3.142}$$

Как и в бозонном случае, для композитной USp(8) связности на внешнем пространстве требуем, чтобы ток $\mathcal{V}_{kl}{}^{\mathcal{M}}\mathcal{D}[A,Q]_\mu\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij}$ принадлежал ортогональному дополнению максимальной компактной подалгебры алгебры $\mathfrak{e}_6$. Для этого запишем

$$\mathcal{D}_\mu\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij} \equiv D_\mu\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij} + 2\,Q_{\mu\,k}{}^{[i}\,\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{j]k} \stackrel{!}{=} \mathcal{P}_\mu{}^{ijkl}\,\mathcal{V}_{\mathcal{M}\,kl}. \tag{3.143}$$

Заметим, что квадрат скалярного тока $\mathcal{P}_\mu{}^{ijkl}$ определяет кинетическое слагаемое для скалярных полей теории.

Наконец, внутренняя USp(8) связность $Q_{\mathcal{M}}$ определяется из условия равенства нулю обобщенного кручения [123, 124]. На произвольном тензоре $X_{\mathcal{N}}{}^i$ веса λ_X полная ковариантная производная во внутреннем пространстве задана следующим выражением:

$$\nabla_{\mathcal{M}}X_{\mathcal{N}}{}^i \equiv \partial_{\mathcal{M}}X_{\mathcal{N}}{}^i - Q_{M\,j}{}^iX_{\mathcal{N}}{}^j - \Gamma_{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}X_{\mathcal{K}}{}^i - \frac{3}{4}\lambda_X\Gamma_{\mathcal{K}M}{}^{\mathcal{K}}X_{\mathcal{N}}{}^i, \tag{3.144}$$

где аффинная связность задается символами Кристоффеля $\Gamma_{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}} \equiv \Gamma_{\mathcal{M}}{}^{\alpha}(t_\alpha)_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}$, принимающими значение в алгебре $\mathfrak{e}_6$. Индекс $\alpha = 1,\ldots,78$ нумерует генераторы алгебры. Так определенная ковариантная производная тензора является обобщенным тензором веса $\lambda = \lambda_X - \frac{1}{3}$. Условие равенства нулю обобщенного тензора кручения имеет вид

$$\mathcal{T}_{\mathcal{N}\mathcal{K}}{}^{\mathcal{M}} \equiv \Gamma_{\mathcal{N}\mathcal{K}}{}^{\mathcal{M}} - 6\,\mathbb{P}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{L}}\Gamma_{\mathcal{P}\mathcal{N}}{}^{\mathcal{L}} + \frac{3}{2}\,\mathbb{P}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{K}}{}^{Q}{}_{\mathcal{N}}\Gamma_{\mathcal{P}Q}{}^{\mathcal{P}} \stackrel{!}{=} 0\ , \tag{3.145}$$

где $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{K}}{}^{P}{}_{\mathcal{L}}$ обозначает проектор на присоединенное представление алгебры дуальности. Тензор кручения определяется через обобщенную производную Ли по обычной и ковариантной производной:

$$\mathcal{L}^{\nabla}_{\Lambda}V^{\mathcal{M}} - \mathcal{L}^{\partial}_{\Lambda}V^{\mathcal{M}} = \mathcal{T}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}{}^{\mathcal{M}}\Lambda^{\mathcal{K}}V^{\mathcal{L}} \tag{3.146}$$

и является обобщенным вектором. Условие (3.145) может быть эквивалентно записано в виде [123, 125, 126]

$$(\mathbb{P}_{351})_{\mathcal{M}}{}^{\alpha N}{}_{\beta}\Gamma_{\mathcal{N}}{}^{\alpha} = 0 \ , \tag{3.147}$$

где проектор $\mathbb{P}_{351}$ на представление **351** группы $E_{6(6)}$ задан выражением

$$(\mathbb{P}_{351})_{\mathcal{M}}{}^{\alpha N}{}_{\beta} = -\frac{6}{5}(t^{\alpha})_{\mathcal{P}}{}^{\mathcal{N}}(t_{\beta})_{\mathcal{M}}{}^{P} + \frac{3}{10}(t^{\alpha})_{\mathcal{M}}{}^{P}(t_{\beta})_{\mathcal{P}}{}^{\mathcal{N}} + \frac{1}{5}\delta^{\mathcal{N}}_{\mathcal{M}}\delta^{\alpha}_{\beta} \ . \tag{3.148}$$

В этих обозначения преобразования суперсимметрии имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon\psi^i_\mu &= \mathcal{D}_\mu\varepsilon^i - i\sqrt{2}\,\mathcal{V}^{ij\,\mathcal{M}}\left(\nabla^-_{\mathcal{M}}(\gamma_\mu\varepsilon^k) - \frac{1}{3}\gamma_\mu\nabla^-_{\mathcal{M}}\varepsilon^k\right)\Omega_{jk} \ ,\\
\delta_\varepsilon\chi^{ijk} &= \frac{i}{2}P_\mu{}^{ijkl}\Omega_{lm}\gamma^\mu\varepsilon^m + \frac{3}{\sqrt{2}}\mathcal{V}^{[\![ij\,\mathcal{M}}\,\nabla^-_{\mathcal{M}}\varepsilon^{k]\!]} \ ,\\
\\
\delta_\varepsilon e^a_\mu &= \frac{1}{2}\,\bar\varepsilon_i\gamma^a\psi^i_\mu \ ,\\
\delta_\varepsilon\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij} &= 4i\,\Omega^{im}\Omega^{jn}\,\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{kl}\,\Omega_{p[\![k}\bar\chi_{lmn]\!]}\varepsilon^p \ ,\\
\delta_\varepsilon A_\mu{}^{\mathcal{M}} &= \sqrt{2}\left(i\,\Omega^{ik}\bar\varepsilon_k\psi_\mu{}^j + \bar\varepsilon_k\gamma_\mu\chi^{ijk}\right)\mathcal{V}_{ij}{}^{\mathcal{M}},\\
\delta_\varepsilon B_{\mu\nu\,\mathcal{M}} &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij}\left(2\,\bar\psi_{i[\mu}\gamma_{\nu]}\varepsilon^k\Omega_{jk} + i\bar\chi_{ijk}\gamma_{\mu\nu}\varepsilon^k\right) - d_{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{P}}\,A_{[\mu}{}^{\mathcal{N}}\delta_\varepsilon A_{\nu]}{}^{\mathcal{P}} \ .
\end{aligned} \tag{3.149}$$

При условии независимости полей от всех координат на расширенном пространстве $\partial_{\mathcal{M}} = 0$, преобразования суперсимметрии исключительной теории поля с группой $\mathrm{E}_{6(6)}$ сводятся к таковым для $D = 5$ максимальной супергравитации [70, 88]. Структура алгебры суперсимметрии тоже повторяет таковую в $D = 5$ максимальной супергравитации [88]:

$$\begin{aligned}
[\delta(\varepsilon_1),\delta(\varepsilon_2)] = \xi^\mu\mathcal{D}_\mu &+ \delta_{\mathfrak{so}(1,4)}(\Omega^{ab}) + \delta_{\mathfrak{usp}(8)}(\Lambda^{ij}) + \delta_{\text{susy}}(\varepsilon_3)\\
&+ \delta_{\text{gauge}}(\Lambda^{\mathcal{M}}) + \delta_{\text{gauge}}(\Xi_{\mu\,M}) + \delta_{\text{gauge}}(\Xi_{\mu\nu\,\alpha}) + \delta_{\text{gauge}}(\Xi_{\mu\nu\,M}) \ .
\end{aligned} \tag{3.150}$$

Параметры преобразований в правой части уравнения выражаются в терминах спиноров $\varepsilon_{1,2}$, их ковариантных производных, и внешних и внутренних реперов $e_\mu{}^a$, $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{ij}$, следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\xi^\mu &= \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_{2i}\gamma^\mu\varepsilon_1^i\,,\\
\Omega^{ab} &= -\,\frac{\sqrt{2}\,i}{3}\left(\bar{\varepsilon}_{1i}\gamma^{ab}\nabla^-_{\mathcal{M}}\varepsilon_2^k - \nabla^-_{\mathcal{M}}\bar{\varepsilon}_{1i}\gamma^{ab}\varepsilon_2^k\right)\mathcal{V}^{ij\,M}\Omega_{jk} - \Lambda^{\mathcal{M}}\omega^-_{\mathcal{M}}{}^{ab}\,,\\
\Lambda^{\mathcal{M}} &= -\,\sqrt{2}i\,\mathcal{V}^{ij\,\mathcal{M}}\Omega_{jk}\,\bar{\varepsilon}_{2i}\varepsilon_1^k\,,\\
\Xi_{\mu\,M} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathcal{V}_{\mathcal{M}}{}^{kl}\Omega_{lm}\big(\bar{\varepsilon}_{2k}\gamma_\mu\varepsilon_1^m\big)\,,\\
\Xi_{\mu\nu\,\alpha} &= \frac{3i}{\sqrt{10}}\,(t_\alpha)^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}\mathcal{V}_{\mathcal{M}\,li}\mathcal{V}^{ki\,N}\big(\bar{\varepsilon}_{2k}\gamma_{\mu\nu}\varepsilon_1^l\big)\,,\\
\Xi_{\mu\nu\,M} &= -\,\frac{i}{\sqrt{10}}\Big(\bar{\varepsilon}_{2k}\gamma_{\mu\nu}\partial_{\mathcal{M}}\varepsilon_1^k - \partial_{\mathcal{M}}\bar{\varepsilon}_{2k}\gamma_{\mu\nu}\varepsilon_1^k - (\bar{\varepsilon}_{2k}\varepsilon_1^k)\,e^a{}_{[\mu}\partial_{\mathcal{M}}e_{\nu]a}\\
&\qquad -\frac{2}{3}\,\mathcal{V}^{ki\,N}\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{V}_{N\,li}\big(\bar{\varepsilon}_{2k}\gamma_{\mu\nu}\varepsilon_1^l\big)\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{3.151}
$$

Суперсимметричный лагранжиан с точностью до членов четвертого порядка по фермионам имеет вид

$$
\begin{aligned}
e^{-1}\mathcal{L} = \widehat{\mathcal{R}} &- \frac{1}{4}\,\mathcal{M}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\,\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}\mathcal{F}^{\mu\nu\mathcal{N}} - \frac{1}{6}\,\mathcal{P}_\mu{}^{ijkl}\mathcal{P}^\mu{}_{ijkl} + \frac{\sqrt{10}}{8}\,e^{-1}\,\mathcal{L}_{top} - V(M,g)\\
&- \bar{\psi}_{\mu i}\gamma^{\mu\nu\rho}\mathcal{D}_\nu\psi_\rho^i + 2\sqrt{2}\,i\,\mathcal{V}_{ij}{}^{\mathcal{M}}\Omega^{ik}\bar{\psi}_{\mu k}\gamma^{[\mu}\nabla^+_{\mathcal{M}}\left(\gamma^{\nu]}\psi_\nu{}^j\right)\\
&- \frac{4}{3}\,\bar{\chi}_{ijk}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\chi^{ijk} + 8\sqrt{2}\,i\,\mathcal{V}_{mn}{}^{\mathcal{M}}\Omega^{np}\bar{\chi}_{pkl}\nabla^+_{\mathcal{M}}\chi^{mkl}\\
&+ \frac{4i}{3}\mathcal{P}_\mu{}^{ijkl}\bar{\chi}_{ijk}\gamma^\nu\gamma^\mu\psi_\nu{}^m\Omega_{lm} + 4\sqrt{2}\,\mathcal{V}^{ij\,M}\,\bar{\chi}_{ijk}\gamma^\mu\nabla^-_{\mathcal{M}}\psi_\mu{}^k\,.
\end{aligned}
\tag{3.152}
$$

Естественно, первая строка является лагранжианом для бозонного сектора $E_{6(6)}$ исключительной теории поля, подробно разобранной ранее. Явные вычисления для алгебры суперсимметрии и проверка инвариантности лагранжиана (3.152) при преобразованиях суперсимметрии представлены в работе автора [113].

Глава 4. Размерные редукции исключительной теории поля

Исключительная теория поля является теорией на пространстве, параметризованном D обычными геометрическими координатами и $N = \dim \mathcal{R}_V$ обобщенными координатами. Здесь под обычными геометрическими координатами понимаются те, которые используются для измерения физических расстояний, или же те, которые дуальны импульсу в смысле разложения Фурье. $\mathcal{R}_V$ обозначает неприводимое представление группы дуальности $\mathrm{E}_{d(d)}$ ($d = 11 - D$), его размерность равна числу векторных мультиплетов теории. Векторные поля выступают в роли обобщенных калуца-клейновских векторов. Множество обобщенных координат включает d обычных геометрических координат и дополнительно $N - d$ негеометрических координат, соответствующих модам намоток M2-, M5-бран и KK6-монополя.

Несмотря на то, что группа дуальности в супергравитации появляется при редукция на плоский тор, и намотки бран имеют смысл только для торических пространств, пространство исключительной теории поля не предполагается обладающим геометрией плоского тора. Действительно, как было показано выше, в зависимости от решения условия проекции, исключительная теория поля воспроизводит полную 11-мерную супергравитацию, супергравитацию типа IIB или максимальную некалиброванную D-мерную супергравитацию. Причем, только последняя соответствует редукции исключительной теории поля на плоский тор. В этом смысле, плоский тор является решением, сохраняющим максимальную симметрию обобщенных диффеоморфизмов, глобальную группу $\mathrm{E}_{d(d)}$, как плоское пространство сохраняет глобальную группу $\mathrm{GL}(d)$ общей теории относительности. Однако, было бы неверно считать, что исключительная теория поля представляет собой лишь способ ковариантной записи известного действия супергравитации. Более правильно будет говорить, что решения уравнений исключительной теории поля являются самосогласованными фоновыми пространствами для струны (мембраны) с учетом непертурбативных эффектов (см. Главу 5). Такие решения выходят за рамки не только торических пространств, но и вообще множества решений супергравитации. В этой главе рассматривается размерная редукция на определенный класс решений уравнений исключительной теории поля, называемых обобщенно параллелизуемыми пространствами или обобщенным твистованным тором. Соответствующая редукция называется обобщенной редукцией Шерка–Шварца.

Рассмотрим Рис. 4.1, являющийся расширенной версией Рис. 2.3, включающей исключительную теорию поля. Как обсуждалось ранее, только часть

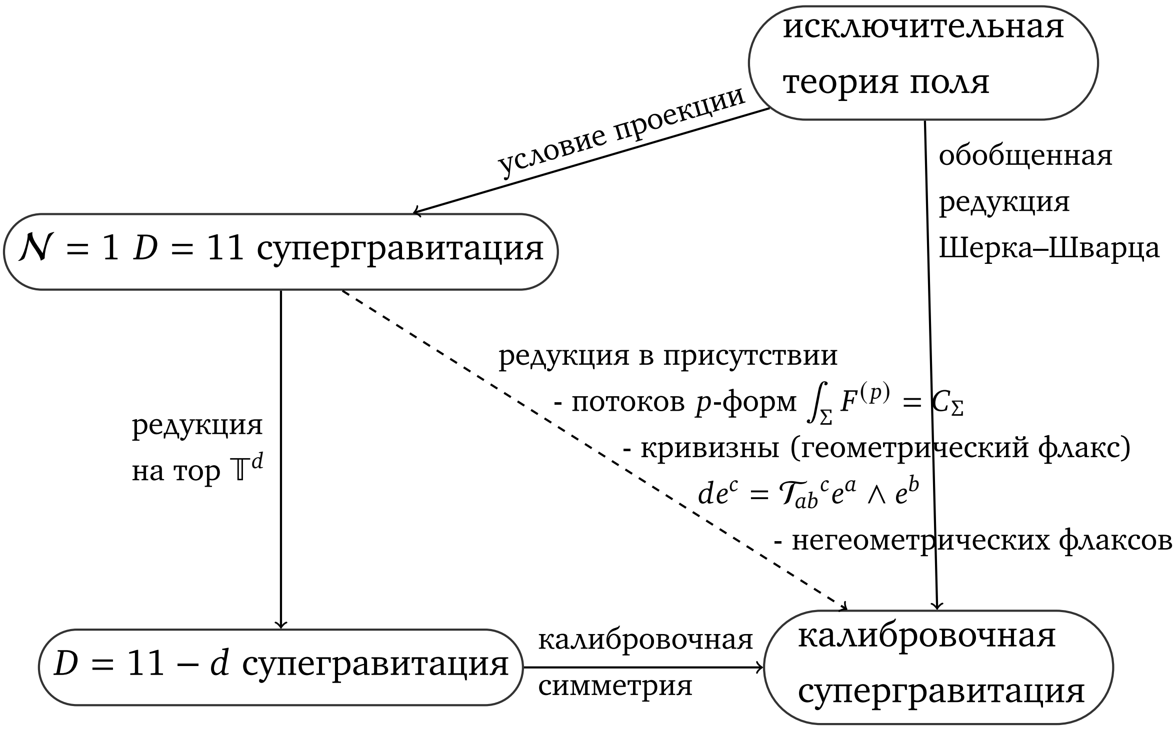

Рисунок 4.1 — Расширение схемы Рис. 2.3 размерными редукциями исключительной теории поля.

флаксов калиброванной супергравитации в правом нижнем углу схемы, понимаемых как компоненты тензора погружения, имеет интерпретацию в терминах размерных редукций 11-мерной супергравитации. В литературе такие называются геометрическими флаксами, и соответствуют редукциям в присутствии потоков p-форм, ненулевой кривизны или кручения. Кроме них тензор погружения имеет компоненты, которые не могут быть поставлены в соответствие подобным величинам, что следует из анализа их преобразований под действием U-дуальности. Присутствие в теории таких негеометрических флаксов, не имеющих 11-мерной интерпретации, обозначено на схеме пунктирной линией. С другой стороны, имеем исключительную теорию поля, которая при наложении условия проекции воспроизводит 11-мерную супергравитацию.

Условие проекции является дифференциальной связью, которую необходимо наложить на все функции на расширенном пространстве для самосогласованности алгебры обобщенных производных Ли. Существует, однако, другой способ обеспечить подобную самосогласованность, но уже не в полной теории, а в теории в размерности D. Специальный выбор анзаца для размерной редукции тензоров на расширенном пространстве позволяет обеспечить самосогласованность без накладывания дифференциального условия. Соответствующий анзац является обобщением стандартного анзаца Шерка–Шварца, который в свою очередь является простейшим примером самосогласованной редукции после калуца-клейновской редукции на плоский тор [127].

4.1 Обобщенная редукция Шерка–Шварца

Впервые обобщенный анзац Шерка–Шварца был предложен для редукции двойной теории поля в работе [128], где было показано, что полная O(10,10) теория воспроизводит структуру полумаксимальной калиброванной супергравитации. Размерные редукции Шерка–Шварца скалярного сектора исключительной теории поля с группой SL(5), SO(5,5), $E_{6(6)}$ были построены в работах автора [129, 130]. Позднее полные редукции исключительной теории поля, включая тензорный и внешний гравитационный сектора, были построены в работах [131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138].

Обобщенная размерная редукция Шерка–Шварца исключительной теории поля основана на выборе анзаца для полей специального вида:

$$V^{\mathcal{M}}(x,\mathbb{X}) = U^{\mathcal{M}}{}_{\overline{\mathcal{M}}}(\mathbb{X})V^{\overline{\mathcal{M}}}(x), \tag{4.1}$$

где x^μ — координаты на внешнем D-мерном пространстве теории, а $\mathbb{X}^{\mathcal{M}}$ — координаты обобщенного пространства размерности N. В последующих формулах явное указание зависимости от координат будет опускаться, для обозначения тензоров, не зависящих от координат на обобщенном пространстве будет использоваться черта над индексом $\overline{\mathcal{M}} = 1,\ldots,N$. Твистовые матрицы $U^{\mathcal{M}}{}_{\overline{\mathcal{M}}}$ принадлежат подгруппе группы дуальности $E_{d(d)}$ и существенно ограничены требованием самосогласованности редукции и эффективной D-мерности результирующей теории. Удобство ковариантного формализма исключительных теорий поля в том, что условия самосогласованности можно сформулировать на алгебраическом языке.

Рассмотрим обобщенную производную Ли на полях, удовлетворяющих анзацу (4.1)

$$\delta_\Sigma V^{\mathcal{M}} = (\mathcal{L}_\Sigma V)^{\mathcal{M}} = U^{\mathcal{M}}{}_{\overline{\mathcal{M}}} X_{\overline{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{}^{\overline{\mathcal{M}}} \Sigma^{\overline{\mathcal{K}}} V^{\overline{\mathcal{L}}}, \tag{4.2}$$

где величины $X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}$ в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} = 2U_{\mathcal{M}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} U_{[\overline{\mathcal{M}}}{}^{\mathcal{N}} \partial_{\mathcal{N}} U_{\overline{\mathcal{N}}]}{}^{\mathcal{M}} + Y^{\overline{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{}_{\overline{\mathcal{P}\mathcal{N}}} U_{\mathcal{M}}{}^{\overline{\mathcal{P}}} U_{\overline{\mathcal{L}}}{}^{\mathcal{L}} \partial_{\mathcal{L}} U_{\overline{\mathcal{M}}}{}^{\mathcal{M}}. \tag{4.3}$$

Y-тензор определяется соотношениями (3.16). Для размерной редукции будем предполагать, что $X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} = \mathrm{const}$. Следует отметить, что вообще говоря, это условие не обязательно. В общем случае произвольной зависимости твистовых матриц от всех $D + N$ координат получим т.н. флакс-формулировку исключительной теории поля. Для двойной теории поля флакс-формулировка была построена в работе [37].

Из выражения (4.3) видно, что «структурные константы» $X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}$ не являются антисимметричными в общем случае. В случае постоянных структурных констант их симметричная часть является алгебраическим аналогом условия проекции для функций на обобщенном пространстве. Действительно, рассмотрим коммутатор двух обобщенных производных Ли:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{\Lambda_1}, \mathcal{L}_{\Lambda_2}] V^{\mathcal{M}} &= \mathcal{L}_{[\Lambda_1,\Lambda_2]_E} V^{\mathcal{M}} + F_0^{\mathcal{M}}, \\ [\Lambda_1,\Lambda_2]_E^{\mathcal{M}} &= \mathcal{L}_{\Lambda_1} \Lambda_2^{\mathcal{M}} - \mathcal{L}_{\Lambda_2} \Lambda_1^{\mathcal{M}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $F_0{}^{\mathcal{M}}$ обозначает выражение, содержащее только производные вида $Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \partial_{\mathcal{M}} \Phi_1 \partial_{\mathcal{N}} \Phi_2$ от некоторых комбинаций $\Phi_{1,2}$ векторов $V^{\mathcal{M}}$ и $\Lambda^{\mathcal{M}}_{1,2}$. В полной теории условие проекции требует обнуления всех таких комбинаций производных, накладывая дифференциальные связи на функции на обобщенном пространстве. То же верно для тождества Якоби для обобщенных производных Ли: его выполнение нарушается членами такого же вида. Пусть теперь зависимость от обобщенных координат произвольна, но поля теории ограничены твистовым анзацем (4.1). Твистовый анзац для обобщенной производной Ли (4.2) индуцирует преобразование для полей в D-мерной теории, который имеет ровно тот же вид, что и в калиброванной супергравитации:

$$\delta_{\overline{\Sigma}} V^{\overline{\mathcal{M}}} = X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} \Sigma^{\overline{\mathcal{M}}} Q^{\overline{\mathcal{N}}}. \tag{4.5}$$

Алгебра так определенных преобразований является замкнутой:

$$
\begin{gathered}
[\delta_{\overline{\Sigma}_1},\delta_{\overline{\Sigma}_2}] = \delta_{[\overline{\Sigma}_1,\overline{\Sigma}_2]_X},\\
[\overline{\Sigma}_1,\overline{\Sigma}_2]_X{}^{\overline{\mathcal{M}}} = X_{\overline{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{}^{\overline{\mathcal{M}}}\Sigma_1{}^{\overline{\mathcal{M}}}\Sigma_2{}^{\overline{\mathcal{N}}}
\end{gathered}
\tag{4.6}
$$

при условии

$$
[X_{\overline{\mathcal{M}}}, X_{\overline{\mathcal{N}}}] = -X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{C}}} X_{\overline{\mathcal{C}}}\,, \tag{4.7}
$$

где набор $N \times N$ матриц $X_{\overline{\mathcal{M}}}$ определяется их компонентами $(X_{\overline{\mathcal{M}}})_{\overline{\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} = X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}$. Получаем ничто иное, как квадратичные условия калиброванной супергравитации, причем $X_{\overline{\mathcal{M}}}$ является буквально тензором погружения для максимальной калиброванной супергравитации.

Здесь важно отметить, что несмотря на знакомую форму, выражение (4.7) не может быть интерпретировано как коммутационные соотношения алгебры Ли. Причина в том, что, определяя присоединенное действие алгебры Ли на себе, получим, что компоненты матрицы генераторов буквально равны структурным константам. Здесь же, в правой части возникает только антисимметричная часть компонент матрицы генератора. Правильно смотреть на (4.7), как на некоторое квадратичное условие на матрицы $X_{\overline{\mathcal{M}}}$, решить которые можно, считая подмножество этих матриц действительно генераторами некоторой алгебры Ли. Антисимметричной левой части (4.7) накладывает условие на симметричную часть $Z_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} = X_{(\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}})}{}^{\overline{\mathcal{K}}}$ «структурных констант»:

$$
Z_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} X_{\overline{\mathcal{K}}} = 0. \tag{4.8}
$$

Таким образом, вместо дифференциального условия на функции на обобщенном пространстве условие замкнутости алгебры преобразований дает алгебраическое условие на симметричную часть компонент тензора погружения.

Для якобиатора преобразований имеем:

$$
[\delta_{\overline{\Sigma}_1}, [\delta_{\overline{\Sigma}_2}, \delta_{\overline{\Sigma}_3}]] + c.p. = 3\Big(X_{[\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}]}{}^{\overline{\mathcal{K}}} X_{[\overline{\mathcal{K}\mathcal{L}}]}{}^{\overline{\mathcal{P}}}\Big) X_{\overline{\mathcal{P}\mathcal{Q}}}{}^{\overline{\mathcal{R}}} \Sigma^{\overline{\mathcal{M}}}_{[1} \Sigma^{\overline{\mathcal{N}}}_{2} \Sigma^{\overline{\mathcal{K}}}_{3]} V^{\overline{\mathcal{Q}}}, \tag{4.9}
$$

где *c.p.* обозначает циклические перестановки. В правой части выражения видим стандартное выражение для якобиатора структурных констант (в скобках) для антисимметричной части тензора погружения $X_{[\mathcal{M}\mathcal{N}]}{}^{\mathcal{K}}$, спроецированное на генератор $X_{\overline{\mathcal{M}}}$. Для самосогласованности требуем, чтобы правая часть равнялась нулю. Причем, необходимо требовать обнуления не выражения в скобках, а всей комбинации с учетом проекции на генератор $X_{\overline{\mathcal{M}}}$. Причина в том, что антисимметричная часть «структурных констант» $X_{[\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}]}{}^{\overline{\mathcal{K}}}$ не удовлетворяет тождеству Якоби

$$X_{[\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}]}{}^{\overline{\mathcal{K}}} X_{[\overline{\mathcal{K}\mathcal{L}}]}{}^{\overline{\mathcal{P}}} + X_{[\overline{\mathcal{L}\mathcal{M}}]}{}^{\overline{\mathcal{K}}} X_{[\overline{\mathcal{K}\mathcal{N}}]}{}^{\overline{\mathcal{P}}} + X_{[\overline{\mathcal{N}\mathcal{L}}]}{}^{\overline{\mathcal{K}}} X_{[\overline{\mathcal{K}\mathcal{M}}]}{}^{\overline{\mathcal{P}}} = -Z_{\overline{\mathcal{Q}}[\overline{\mathcal{M}}} X_{\overline{\mathcal{N}\mathcal{L}}]}{}^{\overline{\mathcal{Q}}}. \tag{4.10}$$

Заметим, что нарушение тождества Якоби опять пропорционально симметричной части тензора погружения, что полностью воспроизводит алгебраическую структуру калиброванной супергравитации.

Наконец, для самосогласованной редукции и независимости действия редуцированной теории от координат на обобщенном пространстве недостаточно просто потребовать, чтобы $X_{[\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}]}{}^{\overline{\mathcal{K}}}$ были постоянны. Дополнительно требуется, чтобы они были инвариантными объектами. Условие (4.7) гарантирует это, поскольку твистованные преобразования «структурных констант» могут быть записаны в виде

$$\delta_{\overline{\Sigma}} X_{[\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}]}{}^{\overline{\mathcal{K}}} = \Sigma^{\overline{\mathcal{L}}} \left([X_{\overline{\mathcal{L}}}, X_{\overline{\mathcal{M}}}]_{\overline{\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} + X_{\overline{\mathcal{L}\mathcal{M}}}{}^{\overline{\mathcal{P}}} (X_{\overline{\mathcal{P}}})_{\overline{\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} \right) \equiv 0. \tag{4.11}$$

Соотношение (4.3) показывает (при разрешимости уравнений), что полный тензор погружения, включая геометрические и негеометрические флаксы, может быть сгенерирован правильным выбором твистовой матрицы. Интуитивно такой результат достаточно ожидаем. Действительно, твистовую матрицу можно понимать, как аналог обобщенного репера, который в верхнетреугольной калибровке содержит обычный репер и поля p-форм на внутреннем многообразии. В нижнетреугольной калибровке обобщенный репер параметризуется магнитными потенциалами смешанной симметрии. Например, для двойной теории поля, это бивектор β^{mn}, дуальный потенциалу $B_{m_1\cdots 6,kl}$, взаимодействующему с 5^2_2-браной [139, 140]. Поскольку «структурные константы» включают твистовую матрицу и ее производные, довольно естественно среди них ожидать как геометрические флаксы, пропорциональные производным геометрического репера и потенциалов p-форм, так и негеометрические флаксы, пропорциональные производным смешанных потенциалов.

Отдельного упоминания заслуживает занимательное наблюдение, сделанное в работе [91]: существуют такие решения квадратичных условий на компоненты тензора погружения, которые соответствуют твистовым матрицам, нарушающим условие проекции двойной теории поля. Понятно, что не существует преобразования дуальности, связывающего такие наборы флаксов с любыми наборами, включающими только геометрические флаксы. В этой работе соответствующие орбиты названы истинно негеометрическими и предложено рассматривать модели размерной редукции, в которых скалярные модули стабилизируются истинно негеометрическими флаксами.

Обобщенная компактификация Шерка–Шварца исключительной теории поля нашла широкий спектр приложений от построения самосогласованных редукций 11-мерной супергравитации и построения космологических моделей до анализа спектра суперконформных теорий поля в рамках голографической дуальности. Перечислим кратко некоторые из современных направлений исследований, основанных на данном подходе. Наиболее непосредственные приложения обобщенных редукций Шерка–Шварца исключительных теории поля включают построение схем самосогласованных размерных редукций 11-мерной супергравитации. В работах [75, 141] обобщенный ШШ анзац для $\mathrm{E}_{7(7)}$ теории был использован для построения полного анзаца для калибровочных полей при редукции 11-мерной супергравитации на решение $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$. Полученные результаты дополняют более раннюю работу [73], где было доказано, что такая редукция является самосогласованной.

Для более общего класса редукций на сферу или (скрученный) гиперболоид, дающих $\mathrm{CSO}(p,q,r)$ калиброванную супергравитацию, в работе [132] были построены в явном виде твистовые матрицы $\mathrm{E}_{7(7)}$ исключительной теории. Здесь $p+q+r = d$ — размерность внутреннего пространства, включающего только сферу или гиперболоид размерности $p+q$, если $r = 0$, и дополнительно тор размерности r в противном случае. Ключевым результатом данной работы является наблюдение, что все такого сорта размерные редукции 11-мерной супергравитации являются редукциями на твистованный тор в расширенном пространстве. Для построения размерных редукций немаксимальных теорий, а именно $\mathcal{N} = (1,1)$ и $\mathcal{N} = (2,0)$ теорий супергравитации в размерности $D+6$ в работе [142] получены в явном виде твистовые матрицы для редукции исключительной теории поля с группой $\mathrm{O}(p,q)$. Такая расширенная двойная теория поля и ее редукции Шерка–Шварца были построены в работе автора [143] совместно с О. Хомом и Х. Замтлебеном.

Возможность определения обобщенной твистовой матрицы, дающей постоянный структурные константы $X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}$, называется обобщенной параллелизуемостью расширенного пространства и тесно связана с возможностью определения G-структуры с группой G, являющейся подгруппой $E_{d(d)}$. В работах [123, 144, 124, 145] исключительные G-структуры были рассмотрены с точки зрения обобщенной исключительной геометрии, определяемой на расслоении $TM \oplus \wedge^2 T^*M \oplus \wedge^5 T^*M \cdots$. Такая геометрия обобщает геометрию Хитчина на расслоения $TM \oplus T^*M$, которая позволяет строить размерные редукции 10-мерной супергравитации на многообразия с флаксами в терминах интегрируемых G-структур. В работе [146] обобщенная исключительная геометрия была рассмотрена с точки зрения частичной редукции Шерка–Шварца исключительной теории поля. При этом зависимость от координат $\mathbb{X}^{\mathcal{M}}$ сохраняется в теории, а твистовая матрица несет информацию о группе G, определяющей G-структуру на базовом многообразии. Как и для хитчиновской обобщенной комплексной геометрии, ключевым преимуществом исключительной обобщенной геометрии является единое рассмотрение как геометрических, так и негеометрических флаксов в рамках одного объекта — внутреннего (обобщенного) кручения. Классификация ненулевых классов кручения для самосогласованных редукций на AdS вакуум 11-мерной супергравитации и явный вид инвариантных тензоров представлены в работах [135, 138, 147, 136].

Приложение ШШ компактификации исключительной теории поля к построению самосогласованных редукций супергравитации нашло многообещающее продолжение в недавних работах [148, 149], где был развит формализм построения полного КК спектра редуцированной супергравитации. В рамках голографической дуальности разработанный формализм позволяет получать информацию об операторах суперконформных теорий, дуальных заданному решению уравнений супергравитации. Так, в работе [150] формализм исключительной КК спектроскопии был приложен к изучению спектра защищенных и незащищенных операторов в $D = 4$ $\mathcal{N} = 1$ суперконформной теории Ли-Страсслера в планарном пределе. В работах [151, 152] были изучены $\mathcal{N} = 1$ суперконформные теории поля, дуальные пространствам вида $\mathrm{AdS}_4 \times X$, где X принадлежит определенному классу пространств, включающих негеометрическое фоновое пространство теории типа IIB, пространство размерности семь и фоновое пространство для массивной IIA супергравитации.

4.2 Редукция скалярного сектора

4.2.1 Алгебраическая структура

Рассмотрим более подробно редукции Шерка–Шварца скалярного сектора исключительных теорий поля с группами SL(5), SO(5,5), $E_{6(6)}$ и построение самосогласованной редукции на примере $D = 6$ супергравитации. Прямым вычислением покажем, что «структурные константы» $X_{\overline{\mathcal{MN}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}$ действительно содержат те же самые представления, что и тензор погружения калиброванной супергравитации, и удовлетворяют квадратичным условиям.

$D = 7$, группа SL(5)

Расширенное пространство SL(5) исключительной теории поля параметризуется координатами $\mathbb{X}^{[MN]}$ в представлении **10** группы дуальности. Твистовый анзац соответственно имеет вид

$$V^{MN}(x,\mathbb{X}) = U^{MN}{}_{\overline{MN}}(\mathbb{X})V^{\overline{MN}}(x). \tag{4.12}$$

Для построения твистового анзаца для полей в других представления группы, удобно ввести твистовые матрицы в фундаментальном представлении:

$$U^{MN}{}_{\overline{MN}} = \frac{1}{2}\left[U^M{}_{\overline{M}}U^N{}_{\overline{N}} - U^M{}_{\overline{N}}U^N{}_{\overline{M}}\right] . \tag{4.13}$$

Для скалярного сектора теории удобно принять $\det U = 1$. Для структурных констант имеем

$$\begin{aligned} & X_{\overline{MN},\overline{KL}}{}^{\overline{PQ}} = \\ & = \frac{1}{2}\left(U^{\overline{PQ}}{}_{MN}\partial_{\overline{MN}}U^{MN}{}_{\overline{KL}} - U^{\overline{PQ}}{}_{MN}\partial_{\overline{KL}}U^{MN}{}_{\overline{MN}} + \frac{1}{4}\varepsilon^{\overline{PQRST}}\varepsilon_{\overline{TUVMN}}U^{\overline{UV}}{}_{MN}\partial_{\overline{RS}}U^{MN}{}_{\overline{KL}}\right) \\ & = \frac{1}{2}U^{\overline{PQ}}{}_{MN}\partial_{\overline{MN}}U^{MN}{}_{\overline{KL}} + \frac{1}{2}\delta^{\overline{PQ}}{}_{\overline{KL}}\partial_{MN}U^{MN}{}_{\overline{MN}} + 2U^{\overline{PQ}}{}_{MN}U^{MP}{}_{\overline{KL}}\partial_{PQ}U^{QN}{}_{\overline{MN}} , \end{aligned} \tag{4.14}$$

где для краткости мы ввели обозначение $\partial_{\overline{MN}} = U^{MN}{}_{\overline{MN}}\partial_{MN}$. Симметричная по нижней паре индексов часть структурных констант равна:

$$X_{\overline{MN},\overline{KL}}{}^{\overline{PQ}} + X_{\overline{KL},\overline{MN}}{}^{\overline{PQ}} = \frac{1}{8}\varepsilon_{\overline{MNKLU}}\varepsilon^{\overline{VPQRS}}U^{\overline{V}}{}_{M}\partial_{\overline{RS}}U^{M}{}_{\overline{U}}\ . \qquad (4.15)$$

Вследствие (4.13) полученное выражение можно удобно переписать в фундаментальном представлении группы дуальности

$$X_{\overline{MN},\overline{KL}}{}^{\overline{PQ}} = 2X_{\overline{MN},[\overline{K}}{}^{[\overline{P}}\delta^{\overline{Q}]}{}_{\overline{L}]}. \qquad (4.16)$$

При этом выражение $X_{\overline{MN},\overline{K}}{}^{\overline{L}}$ может быть представлено в том же виде, что и тензор погружения $D = 7$ калиброванной супергравитации [90]

$$X_{\overline{MN},\overline{K}}{}^{\overline{L}} = \delta^{\overline{L}}{}_{[\overline{M}}Y_{\overline{N}]\overline{K}} - \frac{10}{3}\delta^{\overline{L}}{}_{[\overline{M}}\theta_{\overline{N}]\overline{K}} - 2\varepsilon_{\overline{MNKRS}}Z^{\overline{RS},\overline{L}} + \frac{1}{3}\theta_{\overline{MN}}\delta^{\overline{L}}{}_{\overline{K}}. \qquad (4.17)$$

Здесь тензоры с компонентами $\theta_{[\overline{MN}]}$, $Y_{(\overline{MN})}$ и $Z^{[\overline{MN}],\overline{K}}$ преобразуются по представлениям **10**, **15** и $\overline{\mathbf{40}}$ соответственно. Последнее означает, что полная антисимметризация $Z^{[\overline{MN},\overline{K}]} = 0$. В терминах твистовых матриц имеем следующие выражения для флаксов

$$\begin{aligned}
\mathbf{10}:&\quad \theta_{\overline{MN}} = \frac{1}{10}\left(U^{\overline{K}}{}_{K}\partial_{\overline{MN}}U^{K}{}_{\overline{K}} - U^{\overline{K}}{}_{K}\partial_{\overline{K}[\overline{M}}U^{K}{}_{\overline{N}]}\right)\ ,\\
\mathbf{15}:&\quad Y_{\overline{MN}} = U^{\overline{K}}{}_{K}\partial_{\overline{K}(\overline{M}}U^{K}{}_{\overline{N})},\\
\overline{\mathbf{40}}:&\quad Z^{\overline{MN},\overline{K}} = -\frac{1}{24}\left(\varepsilon^{\overline{MNRST}}U^{\overline{K}}{}_{K}\partial_{\overline{RS}}U^{K}{}_{\overline{T}} - \varepsilon^{\overline{RST}[\overline{M}}U^{\overline{N}]}{}_{K}\partial_{\overline{RS}}U^{K}{}_{\overline{T}}\right).
\end{aligned} \qquad (4.18)$$

Здесь важно отметить, что согласно индексной структуре $X_{\overline{MN},\overline{K}}{}^{\overline{L}}$ принадлежит приводимому представлению $\mathbf{10}\otimes\mathbf{24}$, которое раскладывается на неприводимые представления:

$$\mathbf{10}\otimes\mathbf{24} = \mathbf{10}\oplus\mathbf{15}\oplus\overline{\mathbf{40}}\oplus\mathbf{175}. \qquad (4.19)$$

При этом явное вычисление выше показывает, что **175** не входит в структурные константы, полученные из твистового анзаца. Напомним, что в $D = 7$ калиброванной супергравитации компоненты тензора погружения в **175** исключались требованием суперсимметрии. Здесь мы наблюдаем ту же ситуацию, что и при суперсимметричном дополнении бозонного лагранжиана исключительной теории поля: локальные бозонные симметрий теории накладывают те же ограничения на константы связи, что и суперсимметрия. То же верно для других групп дуальности.

$D = 6$, группа SO(5,5)

Рассмотрим исключительную теорию с локальной группой симметрии SO(5,5), которая соответствует $D = 6$ максимальной супергравитации с глобальной группой SO(5,5). Поля скалярного сектора теории параметризуют фактор-группу

$$\frac{\mathrm{SO}(5,5)}{\mathrm{SO}(5)\times\mathrm{SO}(5)}. \tag{4.20}$$

Расширенное пространство теории параметризуется координатами $X^{\mathcal{M}}$, преобразующимися под действием глобальной группы в представлении спинорном представлении $\mathbf{16}_s$. Y-тензор представляется в терминах стандартных гамма-матриц в размерности 5 + 5:

$$Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\Gamma^{i\mathcal{M}\mathcal{N}}\Gamma_{i\mathcal{K}\mathcal{L}}, \tag{4.21}$$

которые в майорановском представлении выбраны симметричными по спинорным индексом и действительными. Здесь малые латинские индексы $i,j = 1,\ldots,10$ нумеруют векторы представления $\mathbf{10}$ группы SO(5,5). В спинорном представлении генераторы группы дуальности задаются антисимметризованным произведением гамма-матриц $\Gamma_{ij} = \Gamma_{[i}\Gamma_{j]}$. Нормировка генераторов выбрана таким образом, что проектор на присоединенное представление имеет следующий вид:

$$\mathbb{P}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{L}}{}^{\mathcal{K}} = -\frac{1}{32}(\Gamma^{ij})_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{M}}(\Gamma_{ij})_{\mathcal{L}}{}^{\mathcal{K}}. \tag{4.22}$$

Таким образом, структурные константы определяются соотношением

$$X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} = 2U_{\mathcal{M}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}U_{\overline{[\mathcal{M}}}{}^{\mathcal{N}}\partial_{\mathcal{N}}U_{\overline{\mathcal{N}]}}{}^{\mathcal{M}} + \frac{1}{2}\Gamma^{\overline{i\mathcal{K}\mathcal{L}}}\Gamma_{\overline{i\mathcal{P}\mathcal{N}}}U_{\mathcal{M}}{}^{\overline{\mathcal{P}}}U_{\overline{\mathcal{L}}}{}^{\mathcal{L}}\partial_{\mathcal{L}}U_{\overline{\mathcal{M}}}{}^{\mathcal{M}}, \tag{4.23}$$

где гамма-матрицы с надчеркнутыми индексами определяются через стандартные при помощи твистовых матриц в представлениях $\mathbf{16}_s$ и $\mathbf{10}$ очевидным образом. Связь между представлениями определяется гамма-матрицами обычным соотношением:

$$\Gamma^{i\mathcal{M}\mathcal{N}}U_i{}^{\bar{j}} = \Gamma^{\overline{j\mathcal{M}\mathcal{N}}}U_{\overline{\mathcal{M}}}{}^{\mathcal{M}}U_{\overline{\mathcal{N}}}{}^{\mathcal{N}}. \tag{4.24}$$

Как и в предыдущем параграфе, полученное выражение содержит компоненты только в тех неприводимых представлениях, что и тензор погружения максимальной супергравитации:

$$X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} = -\theta^{\overline{i\mathcal{L}}}\Gamma^{\bar{j}}{}_{\overline{\mathcal{L}\mathcal{M}}}(\Gamma_{\overline{ij}})_{\overline{\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} + \frac{32}{10}\mathbb{P}_{\overline{\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}{}_{\overline{\mathcal{M}}}{}^{\overline{\mathcal{L}}}\theta_{\overline{\mathcal{L}}} - \delta_{\overline{\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}\theta_{\overline{\mathcal{M}}}. \tag{4.25}$$

Флаксы в представлениях $\mathbf{16}_s$ и $\mathbf{144}_c$ в терминах твистовых матриц в векторном представлении выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{16}_s: \quad & \theta^{\overline{i\mathcal{M}}} = -\frac{1}{4}\Gamma^{\overline{j\mathcal{M}\mathcal{N}}}U_{\bar{j}}{}^{i}\partial_{\overline{\mathcal{N}}}U_{i}{}^{\bar{i}} - \frac{2}{5}\Gamma^{\overline{i\mathcal{M}\mathcal{N}}}\theta_{\overline{\mathcal{N}}}, \\ \mathbf{144}_c: \quad & \theta_{\overline{N}} = -\frac{1}{16}\Gamma^{\overline{i\mathcal{M}\mathcal{K}}}\Gamma_{\overline{j\mathcal{M}\mathcal{N}}}U_{\bar{i}}{}^{i}\partial_{\overline{\mathcal{K}}}U_{i}{}^{\bar{i}}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

$D = 5$, группа E_6

Скалярные поля $D = 5$ максимальной супергравитации параметризуют фактор-группу

$$\frac{E_{6(6)}}{USp(8)}. \tag{4.27}$$

Расширенное пространство является 27-мерным и параметризуется коодинатами $\mathbb{X}^{\mathcal{M}}$, преобразующимися в представлении **27** глобальной группы дуальности. Y-тензор выражается через полностью симметричный инвариантный тензор $d_{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}}$ группы $\mathrm{E}_{6(6)}$:

$$Y^{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}_{\mathcal{R}\mathcal{S}} = 10 d^{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}} d_{\mathcal{K}\mathcal{R}\mathcal{S}}, \tag{4.28}$$

который удовлетворяет следующим соотношениям

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}\mathcal{P}\mathcal{Q}}d^{\mathcal{N}\mathcal{P}\mathcal{Q}} &= \delta_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}, \\ d_{\mathcal{M}\mathcal{R}\mathcal{S}}d^{\mathcal{S}\mathcal{P}\mathcal{T}}d_{\mathcal{T}\mathcal{N}\mathcal{K}}d^{\mathcal{K}\mathcal{R}\mathcal{Q}} &= \frac{1}{10}\delta_{(\mathcal{M}}{}^{\mathcal{P}}\delta_{\mathcal{N})}{}^{\mathcal{Q}} - \frac{2}{5}d_{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{R}}d^{\mathcal{R}\mathcal{Q}\mathcal{P}}, \\ d_{\mathcal{M}\mathcal{P}\mathcal{S}}d^{\mathcal{S}\mathcal{Q}\mathcal{T}}d_{\mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{K}}d^{\mathcal{K}\mathcal{P}\mathcal{V}}d_{\mathcal{V}\mathcal{Q}\mathcal{L}}d^{\mathcal{L}\mathcal{R}\mathcal{N}} &= -\frac{3}{10}\delta_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Повторяя те же рассуждения, получим, что структурные константы содержат компоненты только в представлениях **351** и **27**. В явном виде имеем:

$$\begin{aligned} X_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} = {} & \frac{2}{3}d^{\overline{\mathcal{K}\mathcal{P}\mathcal{L}}}d_{\overline{\mathcal{L}\mathcal{N}\mathcal{Q}}}Z_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{P}}}{}^{\overline{\mathcal{Q}}} - \frac{2}{5}Z_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} \\ & - \frac{15}{2}d^{\overline{\mathcal{K}\mathcal{L}\mathcal{P}}}d_{\overline{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{P}}}\theta_{\overline{\mathcal{P}}} - \frac{3}{4}\delta_{\overline{\mathcal{N}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}\theta_{\overline{\mathcal{M}}} + \frac{9}{2}\delta_{\overline{\mathcal{M}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}\theta_{\overline{\mathcal{N}}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Тензор $Z_{\overline{\mathcal{MN}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} = Z_{\overline{\mathcal{NM}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}}$ принадлежит представлению **351** и может быть представлен в виде $Z_{\overline{\mathcal{MN}}}{}^{\overline{\mathcal{K}}} = d_{\overline{\mathcal{MNL}}}Z^{\overline{\mathcal{LK}}}$, где $Z^{\overline{\mathcal{LK}}} = -Z^{\overline{\mathcal{KL}}}$. В терминах твистовых матриц имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{27}: \quad & \theta_{\overline{\mathcal{N}}} = 5\, d^{\overline{\mathcal{KLM}}} d_{\overline{\mathcal{MNP}}} U_{\overline{\mathcal{K}}}{}^{\mathcal{M}} \partial_{\overline{\mathcal{L}}} U_{\mathcal{M}}^{\overline{\mathcal{P}}}, \\ \mathbf{351}: \quad & Z^{\overline{\mathcal{MN}}} = 5 d^{\overline{\mathcal{MKL}}} U_{\overline{\mathcal{L}}}{}^{M} \partial_{\overline{\mathcal{K}}} U_{M}^{\overline{\mathcal{N}}} + \frac{15}{2} d^{\overline{\mathcal{MNK}}} \theta_{\mathcal{K}}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Покажем, что (4.30) имеет тот же вид, что и тензор погружения $D = 5$ максимальной супергравитации, полученный в [88, 85]:

$$X_{\mathcal{MN}}{}^{\mathcal{K}} = \Theta_{\mathcal{M}}{}^{\alpha}(t_\alpha)_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}} + \left(\frac{9}{2}(t^\alpha)_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{P}}(t_\alpha)_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}} - \delta_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{P}}\delta_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}\right)\theta_{\mathcal{P}} \tag{4.32}$$

где мы опускаем черту над индексами для ясности обозначений, t_α обозначает генераторы алгебры $\mathfrak{e}_6$ в представлении **27**. Тензор $\Theta_{\mathcal{M}}{}^{\alpha}$ содержит только компоненты в представлении **351** и с учетом квадратичных условий может быть представлен в виде

$$\Theta_{\mathcal{M}}{}^{\alpha} = d_{\mathcal{MPK}} d_{\mathcal{SQL}} d^{\mathcal{RKL}} (t^\alpha)_{\mathcal{R}}{}^{\mathcal{S}} Z^{\mathcal{PQ}}. \tag{4.33}$$

С учетом следующих соотношений для проектора на фундаментальное представление

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{L}} &= (t^\alpha)_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}(t_\alpha)_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{L}}, \\ \mathbb{P}_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{L}} &= -\frac{5}{3} d^{\mathcal{MNP}} d_{\mathcal{KLP}} + \frac{1}{18}\delta_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}\delta_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{L}} + \delta_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{L}}\delta_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{N}} \end{aligned} \tag{4.34}$$

имеем

$$X_{\mathcal{MN}}{}^{\mathcal{K}} = \mathbb{P}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{R}}{}^{\mathcal{S}} d^{\mathcal{RTL}} d_{\mathcal{SQL}} d_{\mathcal{MPT}} Z^{\mathcal{PQ}} + \left(\frac{9}{2}\mathbb{P}_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}} - \delta_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{P}}\delta_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}\right)\theta_{\mathcal{P}}. \tag{4.35}$$

В первом слагаемом представим свертку $d^{\mathcal{RTL}} d_{\mathcal{SQL}}$ через проектор и воспользуемся свойством $\mathbb{P}_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{N}}{}_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{L}}\mathbb{P}_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{P}}{}^{\mathcal{Q}} = \mathbb{P}_{\mathcal{K}}{}^{\mathcal{L}}{}_{\mathcal{P}}{}^{\mathcal{Q}}$. Получим

$$X_{\mathcal{MN}}{}^{\mathcal{K}} = -\frac{2}{5}\mathbb{P}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{P}}{}^{\mathcal{Q}} Z_{\mathcal{MP}}{}^{\mathcal{Q}} + \left(\frac{9}{2}\mathbb{P}_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{P}}{}_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}} - \delta_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{P}}\delta_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}\right)\theta_{\mathcal{P}}. \tag{4.36}$$

Наконец, пользуясь соотношениями (4.34) для проектора, получаем точно (4.30).

Представленные в этой главе результаты показывают, что все компоненты тензора погружения могут быть получены в размерных редукциях исключительной теории поля на обобщенный твистованный тор в терминах твистовых матриц и их производных. Поскольку твистовые матрицы принадлежат тому же пространству, что и обобщенный репер, они могут быть параметризованы теми же полями. Такая (верхнетреугольная) параметризация дает соотношение между негеометрическими флаксами и производными от обычных супергравитационных полей по дуальным координатам, сводя негеометрию к нетривиальной зависимости от дуальных координат. С другой стороны, выбирая нижнетреугольную параметризацию, можно избавиться от интерпретации негеометрии в терминах дуальных координат ценой альтернативной формулировки супергравитации в терминах других полей. Для десятимерной теории такая формулировка известна под названием β-супергравитации по обозначению бивекторного поля β^{mn}, заменяющего степени свободы поля Калба–Рамона. Действие, уравнения движения и симметрии теории были проанализированы в работах [153, 154, 155]. В Главе 5 будет показано, что такие параметризации действительно оказываются удобными при описании фоновых пространств для экзотических бран.

Важно отметить, что при размерной редукции действия для обобщенной метрики следует считать, что так называемый тромбон $\theta_{\overline{\mathcal{M}}}$ равен нулю. Компоненты тензора погружения $\theta_{\overline{\mathcal{M}}}$, называемые тромбоном, появляются в калиброванной супергравитации при локализации глобальной симметрии относительно перескалирования полей с соответствующим весом. Очевидно, такая симметрия не является симметрией действия, но является симметрией уравнений движения. По этой причине, возможно записать уравнения движения максимальной супергравитации, содержащие все компоненты тензора погружения, включая тромбон, но невозможно написать действие с ненулевым тромбоном. То же верно для обобщенной редукции Шерка–Шварца. Для иллюстрации рассмотрим полную производную от скаляра с весом единица и применим твистовый анзац

$$\partial_{\mathcal{M}} W^{\mathcal{M}} = \theta_{\overline{\mathcal{M}}} W^{\overline{\mathcal{M}}}. \tag{4.37}$$

Интегрируя, мы с одной стороны получаем интеграл от полной производной, который должен равняться нулю, а с другой стороны выражение, пропорциональное тромбону. Для произвольного вектора $W^{\mathcal{M}}$ веса единица согласованность обобщенного анзаца Шерка–Шварца с принципом наименьшего действия (обнуление полной производной) требует равенства нулю тромбона.

4.2.2 Скалярный потенциал

Поле внешней метрики $g_{\mu\nu}$ в D-мерном пространстве-времени является скаляром с весом β_d по отношению к обобщенной производной Ли. По этой причине, в схеме обобщенной редукции Шерка–Шварца внешняя метрика, вообще говоря, должна иметь дополнительный твистовый скаляр. В полных редукциях исключительных теорий поля действительно вводится такой скаляр и учитывается нетривиальный вес метрики, однако для редукции скалярного сектора удобнее переопределить обобщенную и внешнюю метрики так, чтобы первая имела детерминант не равный единице, а вторая имела нулевой вес. Определим:

$$g_{\mu\nu}(x,\mathbb{X}) = e^{\beta_d\varphi}h^{\beta_d}\bar{g}_{\mu\nu}(x), \;\; M_{\mathcal{MN}}(\mathbb{X}) = e^{\beta_d\varphi}h^{\beta_d}m_{\mathcal{MN}}(\mathbb{X}), \tag{4.38}$$

где $h = \det h_{mn}(\mathbb{X})$ — детерминант $d \times d$ блока полной 11-мерной метрики. Кроме этого, для изучения динамики скалярного сектора отдельно, делаем предположение, что поля φ, h, $m_{\mathcal{MN}}$ зависят только от координат обобщенного пространства, а метрика $\bar{g}_{\mu\nu}$ зависит только от координат x^μ внешнего пространства-времени. Дополнительно считаем, что все поля p-форм равны нулю.

Поясним выбор степеней для множителей в анзаце для внешней и обобщенной метрики. Степень h диктуется весом поля $g_{\mu\nu}$ и требованием, чтобы в результирующей теории не оставалось явно степеней h. Действительно, лагранжиан теории поля, ограниченной таким анзацем имеет вид:

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathcal{L} =& -\frac{1}{2}\mathcal{R}[g_{\mu\nu}] - V(M),\\
V =& -\frac{1}{4\alpha_d}M^{\mathcal{MN}}\partial_M M^{\mathcal{KL}}\partial_N M_{\mathcal{KL}} + \frac{1}{2}M^{\mathcal{MN}}\partial_M M^{\mathcal{KL}}\partial_L M_{NK}\\
& -\frac{1}{2}(g^{-1}\partial_M g)\partial_N M^{\mathcal{MN}} - \frac{1}{4}M^{\mathcal{MN}}(g^{-1}\partial_M g)(g^{-1}\partial_N g) - \frac{1}{4}M^{\mathcal{MN}}\partial_M g^{\mu\nu}\partial_N g_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Тогда требование явной независимости от h и φ эквивалентно требованию равенства множителей, выносимых из гравитационной части и из скалярного потенциала, что полностью фиксирует вид анзаца.

Подставляя (4.38) в лагранжиан и учитывая зависимость полей от координат, получим:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= m^{-\frac{1}{2\mathcal{D}\beta_d}}\sqrt{\bar{g}}\Big[\mathcal{R}[\bar{g}_{\mu\nu}] - V(m)\Big],\\
V &= -\frac{1}{4\alpha_d} m^{\mathcal{MN}}\partial_{\mathcal{M}} m_{\mathcal{KL}}\partial_{\mathcal{N}} m^{\mathcal{KL}} + \frac{1}{2} m^{\mathcal{LM}}\partial_{\mathcal{M}} m^{\mathcal{NK}}\partial_{\mathcal{N}} m_{\mathcal{KL}}\\
&\quad + \frac{1}{2\mathcal{D}\beta_d}\partial_{\mathcal{M}} m^{\mathcal{MN}} m^{-1}\partial_{\mathcal{N}} m\\
&\quad - \frac{1}{(2N\beta_d)^2}\left(\frac{N\beta_d^2}{\alpha_d} + \beta_d + 1\right) m^{\mathcal{MN}}\big(m^{-1}\partial_{\mathcal{M}} m\big)\big(m^{-1}\partial_{\mathcal{N}} m\big),
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

где $m = \det m_{\mathcal{MN}}$ — детерминант перескалированной обобщенной метрики. В таком виде можно рассматривать самосогласованные редукции исключительно теории поля в D-мерную максимальную супергравитацию с метрикой $\bar{g}_{\mu\nu}$. Дополнительный анализ уравнений движения для p-форм показывает, что сектор с нулевыми значениями этих полей полностью отцепляется от полной теории и может рассматриваться независимо [156].

В работах [157, 129] было показано, что обобщенная редукция Шерка–Шварца скалярного сектора исключительной теории поля в виде (4.40) воспроизводит скалярный потенциал максимальной D-мерной калиброванной супергравитации. Продемонстрируем соответствующие вычисления на примере $D = 7$ теории с группой SL(5). Вычисления для SO(5,5) и $\mathrm{E}_{6(6)}$ повторяют все особенности и воспроизводят те же результаты, что и приведенные ниже.

Запишем потенциал для SL(5) теории в терминах обобщенной метрики в представлении **5**:

$$
\begin{aligned}
-V &= \frac{1}{8} m^{PR} m^{QS}\partial_{PQ} m^{MN}\partial_{RS} m_{MN} - \frac{1}{24} m^{PR} m^{QS}(m^{-1}\partial_{PQ} m)(m^{-1}\partial_{MN} m)\\
&\quad - \frac{1}{2} m^{PQ} m^{QS}\partial_{PQ} m^{KL}\partial_{KS} m_{RL} + \frac{1}{2}\partial_{PQ} m^{PK}\partial_{KL} m^{LQ} + m^{MQ} m^{IJ}\partial_{PQ} m_{IJ}\partial_{MK} m^{KP}\\
&\quad + \frac{2}{3} m^{PR} m^{QS}(m^{-1}\partial_{PQ} m)(m^{-1}\partial_{MN} m).
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

Поскольку обобщенная редукция Шерка–Шварца не предполагает наложения условия проекции на поля, мы можем добавить дополнительно член вида

$$
V_0 = 2\varepsilon^{MKLPQ}\varepsilon_{MRSUV} m^{AC} m^{BD}\partial_{KL} E_{AB}^{RS}\partial_{PQ} E_{BD}^{UV}\,, \tag{4.42}
$$

где E_{AB}^{RS} обозначает обобщенный репер в представлении **10**. При выполнении условия проекции этот член в действии тождественно равен нулю, но, как показано ниже, он оказывается существенен для воспроизведения полного скалярного потенциала максимальной супергравитации.

Используя твистовый анзац (4.12) и связь (4.13) между твистовыми матрицами в представлениях **10** и **5** получим для скалярного потенциала:

$$-V = -32V_{gauged} + \Lambda^{\overline{M}}{}_{\overline{NKL}}\Lambda^{\overline{N}}{}_{\overline{MPQ}}\left(m^{\overline{KP}}m^{\overline{LQ}} - m^{\overline{KL}}m^{\overline{PQ}}\right), \tag{4.43}$$

где введены обозначения

$$\Lambda^{\overline{M}}{}_{\overline{NKL}} = V^{\overline{M}}_m\partial_{\overline{NK}}V^m_{\overline{L}}\ , \quad \Lambda^{\overline{M}}{}_{\overline{NKM}} = \chi_{\overline{NK}}\ , \quad \Lambda^{\overline{M}}{}_{\overline{MNK}} = \psi_{\overline{NK}}\ . \tag{4.44}$$

Первое слагаемое V_{gauged} здесь это скалярный потенциал максимальной $D = 7$ калиброванной супергравитации без тромбона, полученный в [90]:

$$\begin{aligned} V_{gauged} = \frac{1}{64}&\left(2m^{\overline{MN}}Y_{\overline{NK}}m^{\overline{KL}}Y_{\overline{LM}} - (m^{\overline{MN}}Y_{\overline{MN}})^2\right) \\ &+ Z^{\overline{MN},\overline{K}}Z^{\overline{LP},\overline{Q}}\left(m_{\overline{ML}}m_{\overline{NP}}m_{\overline{KQ}} - m_{\overline{ML}}m_{\overline{NK}}m_{\overline{PQ}}\right)\ . \end{aligned} \tag{4.45}$$

Таким образом, размерная редукция скалярного сектора исключительной теории поля воспроизводит скалярный потенциал калиброванной супергравитации с точностью до некоторого множителя, который связан с нормировкой компонент тензора погружения и не играет роли. Оставшиеся слагаемые записываются в виде полной производной:

$$\Lambda^{\overline{M}}{}_{\overline{NKL}}\Lambda^{\overline{N}}{}_{\overline{MPQ}}\left(m^{\overline{KP}}m^{\overline{LQ}} - m^{\overline{KL}}m^{\overline{PQ}}\right) = 2\partial_{kl}\left(m^{pk}m^{\bar{q}\bar{l}}V^{[q}_{\bar{q}}\partial_{pq}V^{l]}_{\bar{l}}\right)\ , \tag{4.46}$$

и могут быть отброшены под знаком интеграла.

Следует отметить, что полученный результат верен только в присутствии дополнительного слагаемого V_0, пропорционального условию проекции, но вообще говоря не равного нулю при ре,Это свойство не является присущим лишь редукциям SL(5) теории, но является общим свойством всех исключительных теорий поля. Можно считать, что слагаемое V_0 всегда присутствует в лагранжиане, но оказывается тождественно равным нулю при выполнении условия проекции.

Заметим, что требование равенства нулю тромбона необходимо только при размерной редукции, то есть, если считать $X_{\overline{\mathcal{MN}}}{}^{\mathcal{K}}$ постоянными величинами. Альтернативно, можно рассматривать выражение (4.12) не как анзац схемы редукции, а как переопределение теории в терминах других полевых переменных. В таком случае $X_{\overline{\mathcal{MN}}}{}^{\mathcal{K}}$ является функцией всех координат и называется обобщенным флаксом, а полное действие исключительной теории поля может быть полностью переписано в терминах обобщенного флакса. При этом тромбон уже не обязан быть равен нулю, поскольку соотношение (4.37) не выполняется.

4.3 Самосогласованные редукции D=6 супергравитации

Рассмотрим размерные редукции $D = 6$ супергравитации на трехмерные многообразия, которые могут быть описаны редукциями Шерка–Шварца исключительных теорий поля с трехмерным внешним пространстве, как описано выше. Особенностью трех измерений является электромагнитная дуальность между векторными и скалярными полями. Дополнительные степени свободы в скалярном мультиплете расширяют глобальную группу симметрий супергравитации, редуцированной до трех измерений [158, 159]. Например, полумаксимальная супергравитация, взаимодействующая с n векторными мультиплетами (для $n = 16$ — гетеротическая супергавитация) оказывается симметричной относительно глобальной группы $\mathrm{O}(d,d+n)$. Теория, инвариантная относительно локальной группы $\mathrm{O}(d,d+n)$ была построена в работах [105, 160, 161]. Как было показано в [162], таким же образом симметрия гетеротической супергравитации расширяется до O(8,24). Для бозонной струны на 23-мерном торе группа дуальности расширяется до O(24,24). Обобщая эти наблюдения, можно утверждать, что теория струн, компактифицированная на d-мерный тор из $d+3$ измерений является симметричной относительно глобальной группы дуальности $\mathrm{O}(d+1,d+1)$.

Целью настоящей главы является построение теории поля с группой симметрии $\mathrm{O}(d,d)$ с трехмерным внешним пространством. Такая теория является расширением двойной теории поля в том смысле, что лагранжиан дополняется дуальностью между скалярными полями и векторным мультиплетом. При этом расширенное пространство не принадлежит фундаментальному представлению глобальной группы дуальности. Будем считать группу симметрий теории более общей группой $\mathrm{O}(p,q)$. Построение инвариантной теории полностью повторяет шаги, описанные выше. Чтобы исключить повторения, опишем основные особенности конструкции в трех измерениях. Детально построение описано в работе автора [143].

4.3.1 Расширенная двойная теория поля

Отличие от формулировки двойной теории поля проявляется уже на этапе построения расширенного пространства, которое параметризуется координатами $Y^{\mathcal{M}} = Y^{[MN]}$ в присоединенном представлении глобальной группы $\mathrm{O}(p,q)$. Здесь индексы $M,N,\ldots = 1,\ldots,p+q$ нумеруют компоненты векторного представления. В отличие от двойной теории поля и в соответствии с общей конструкцией исключительных теорий, $\mathrm{O}(p,q)$ расширенная теория допускает неэквивалентные решения условия проекции. Полезным следствием такой неэквивалентности является возможность вложения как киральных, так и некиральных теорий в $D = 6$.

Ключевым следствием электромагнитной дуальности между векторами и скалярами в размерности три является необходимость включения степеней свободы т.н. дуального гравитона в формулировку исключительной теории поля. Действительно, векторный мультиплет в низкоразмерной теории включает в том числе компоненты метрики родительской теории. Таким образом, им дуальные должны быть частью дуального гравитона, описание которого в рамках стандартных теорий поля затруднительно вследствие сильных запрещающих теорем [163]. В исключительной геометрии этот факт находит свое отражение в том, что обобщенная производная Ли не образует самосогласованную алгебру обобщенных калибровочных симметрий для групп, соответствующих трем внешним направлениям, таким как $\mathrm{O}(8,8)$ [164]. В исключительной теории поля такая несамосогласованность требует введения дополнительной калибровочной симметрии и дополнительного калибровочного потенциала с дополнительными условиями проекции.

Говоря более конкретно, необходимо дополнительно к обобщенным диффеоморфизмам, параметризуемым $\Lambda^{\mathcal{M}}$, ввести калибровочные симметрии с параметрами $\Sigma_{\mathcal{M}}$. Дополнительные расширенные условия проекции вводятся из соображений, чтобы параметры калибровочной симметрии входили в них, как производные, например $\Sigma^{\mathcal{M}}\partial_{\mathcal{M}} = 0$. Важно отметить при этом, что такие дополнительные калибровочные параметры не могут быть сведены к производной от другого калибровочного параметра, а соответствующее калибровочное поле не может быть переопределено в терминах других калибровочных полей и/или их производных.

4.3.2 Условие проекции и его решения

Условие проекции расширенной двойной теории поля записывается в виде следующей системы уравнений на производные от полей и их комбинаций

$$\partial_{[MN} \otimes \partial_{KL]} \; = \; 0 \; = \; \eta^{NK} \, \partial_{MN} \otimes \partial_{KL} \; . \tag{4.47}$$

Видно, что вид условия существенно отличается от такового в обычной двойной теории поля, что имеет следствия для классификации решений. Покажем, что существует два неэквивалентных решения, соответствующие вложению киральной и некиральной $D = 6$ теорий.

Первый случай соответствует теории с группой симметрии $\mathrm{O}(d+1,d+1+n)$. Рассмотрим следующее вложение ее подгруппы $\mathrm{GL}(d)$

$$\mathrm{O}(d+1,d+1+n) \supset \; \mathrm{O}(d,d) \; \supset \; \mathrm{GL}(d) \; . \tag{4.48}$$

Фундаментальное векторное представление при этом раскладывается на представления подгруппы следующим образом:

$$\left\{V^M\right\} \longrightarrow \; \left\{V^i, V^0, V_i, V_0, \tilde{V}^p\right\} \; , \quad i = 1, \ldots, d \; , \quad p = 1, \ldots, n \; . \tag{4.49}$$

Инвариантный тензор η_{MN} (форма Картана-Киллинга) представляется в виде комбинаций инвариантных тензоров группы $\mathrm{GL}(d)$

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0_{d\times d} & 0 & \delta_i{}^j & 0 & 0_{d\times n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \delta^i{}_j & 0 & 0_{d\times d} & 0 & 0_{d\times n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{n\times d} & 0 & 0_{n\times d} & 0 & \mathbb{1}_{n\times n} \end{pmatrix} . \tag{4.50}$$

Раскладывая условия проекции (4.47) таким же образом, получим, что поля, зависящие только от d координат $y^i = Y^{i0}$, т.е.

$$\left\{y^i \equiv Y^{i0}\right\} \; , \qquad \Phi(x^\mu, Y^{MN}) \; = \; \Phi(x^\mu, y^i) \; , \tag{4.51}$$

тождественно ему удовлетворяют. Действительно, нарушим группу $\mathrm{O}(d+1,d+1+n)$ до $\mathrm{O}(d,d)$ и выделим зависимость от $\{Y^I\} \equiv \{Y^{i0}, Y_{i0}\}$. Таким образом уравнения (4.47) упрощаются до условия $\eta^{IJ}\,\partial_I \otimes \partial_J = 0$, повторяющего таковое для двойной теории поля. В таком виде очевидно, что выбор (4.51) решает данное условие. Расширенная двойная теория поля на таком решении воспроизводит уравнения для бозонной струны в размерности $d+3$, взаимодействующей с n абелевыми векторными полями [143].

Другой класс решений условия проекции (4.47) удобно рассматривать для группы $\mathrm{O}(3+n_{\mathrm{L}},3+n_{\mathrm{R}})$. Разложим мультиплеты по действию ее подгруппы GL(3), вложенной следующим образом:

$$\mathrm{O}(3+n_{\mathrm{L}},3+n_{\mathrm{R}}) \supset \ \mathrm{O}(3,3) \ \supset \ \mathrm{GL}(3) \ . \tag{4.52}$$

Для векторного представления имеем

$$\begin{gathered} \left\{V^M\right\} \longrightarrow \left\{V^i, V_i, \tilde{V}^p, \bar{V}^q\right\} \ , \\ i=1,\ldots,3 \ , \quad p=1,\ldots,n_{\mathrm{L}} \ , \quad q=1,\ldots,n_{\mathrm{R}} \ . \end{gathered} \tag{4.53}$$

Инвариантный тензор может быть записан в следующем виде:

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0_{d\times d} & \delta_i{}^j & 0_{d\times n_{\mathrm{L}}} & 0_{d\times n_{\mathrm{R}}} \\ \delta^i{}_j & 0_{d\times d} & 0_{d\times n_{\mathrm{L}}} & 0_{d\times n_{\mathrm{R}}} \\ 0_{n\times d} & 0_{n\times d} & \mathbb{I}_{n_{\mathrm{L}}\times n_{\mathrm{L}}} & 0_{n_{\mathrm{L}}\times n_{\mathrm{R}}} \\ 0_{n\times d} & 0_{n\times d} & 0_{n_{\mathrm{R}}\times n_{\mathrm{L}}} & -\mathbb{I}_{n_{\mathrm{R}}\times n_{\mathrm{R}}} \end{pmatrix} . \tag{4.54}$$

Тогда, условия проекции (4.47) тождественно удовлетворяются при ограничении зависимости полей до зависимости только от $\tilde{y}_i = \varepsilon_{ijk}Y^{jk}$, т.е.

$$\left\{\tilde{y}_i \equiv \varepsilon_{ijk}Y^{jk}\right\} \ , \qquad \Phi(x^\mu, Y^{MN}) \ = \ \Phi(x^\mu, \tilde{y}_i) \ . \tag{4.55}$$

В этом случае теория воспроизводит уравнения движения $D = 6$ супергравитации, взаимодействующей с n_{L} самодуальными и n_{R} антисамодуальными 2-формами и $n_{\mathrm{L}} \cdot n_{\mathrm{R}}$ скалярными полями. Частный случай $n_{\mathrm{L}} = n_{\mathrm{R}} = 0$ соответствует обычной эйнштейновской гравитации в размерности $D = 6$ с группой симметрий Элера $\mathrm{SO}(3,3) \sim \mathrm{SL}(4)$. Такая симметрия появляется при размерной редукции в три измерения. Структура алгебры калибровочных преобразований и условия проекции для этого случая были изучены в работах [164, 165]. Интересно, что результирующая теория не может быть частью теории с размерностью выше шести, что и следует ожидать для киральных теорий, взаимодействующих с (анти-)самодуальными тензорными полями.

Сравнивая два решения (4.51) и (4.55) условия проекции, видно, что при $d \leqslant 2$ координаты, от которых зависят поля в (4.51) могут рассматриваться как подмножество таковых для решения (4.55). В таком случае теории в размерности $D \leqslant 5$, получаемые из расширенной двойной теории поля решением (4.51) оказываются размерными редукциями $D = 6$ теорий, соответствующих решению (4.55). Таким образом, два рассмотреных решения не являются независимыми. Напротив, для $d > 3$ решения оказываются независимыми, поскольку множество координат (4.55) не может быть дополнено без нарушения условия проекции (4.47), и соответственно не может быть эквивалентно координатам из множества (4.51)). Соответствующие теории тоже неэквивалентны. Особым случаем оказывается теория с $d = 3$, $n = 0$ (т.е. $n_{\mathrm{L}} = n_{\mathrm{R}} = 1$) с группой симметрий O(4,4). При этом два выбора координат (4.51) и (4.55) связаны друг с другом внешним автоморфизмом группы SO(4,4), и соответствующие должны быть эквивалентны. Действительно, $D = 6$ теория, следующая из (4.55) и описывающая гравитацию, взаимодействующую с одним самодуальным тензором, одним антисамодуальным тензором и скалярным полем, эквивалентна бозонной струне, соответствующей решению (4.51).

Обсудим также два класса теорий с группами симметрии $\mathrm{O}(4,n)$ и $\mathrm{O}(8,n)$. Добавлением фермионного сектора такие теории могут быть дополнены до полумаксимальной и четвертьмаксимальной теории поля соответственно. Как следует из обсуждения выше, теория с группой O(4,4) имеет единственное решение условия проекции, которое описывает вложение $D = 6$, $\mathcal{N} = (1,0)$ супергравитации, взаимодействующей с одним тензорным мультиплетом. Таким образом, полный полевой состав теории и взаимодействия оказываются некиральными. Напротив, теории, построенные по группе $\mathrm{O}(4,4+n)$ для $n > 0$, допускают два неэквивалентных решения, (4.51) и (4.55), соответствующие $D = 6$ супергравитации, взаимодействующей с $\mathcal{N} = (1,0)$ векторными мультиплетами и киральными тензорными мультиплетами. Решение (4.51) условия проекции для класса теорий с группой $\mathrm{O}(8,n)$ описывает вложение $D = (2+n)$ полумаксимальной супергравитации для $n \leqslant 8$, и вложение $D = 10$, $\mathcal{N} = 1$ супергравитации с $n_V = n - 8$ векторными мультиплетами для $n \geqslant 8$. Второе решение (4.55) описывает вложение $D = 6$, $\mathcal{N} = (2,0)$ киральной супергравитации, взаимодействующей с $n_T = n - 3$ тензорными мультиплетами . Описанные варианты вложения теории в расширенную двойную теорию поля сведены в Таблицу 13.

Таблица 13 — Гравитационные теории, вкладываемые в расширенную двойную теорию поля при разных решениях условия проекции. Здесь n_s — число скалярных мультиплетов, $n_{\rm V}$ — число абелевых векторных мультиплетов, $n_{\pm}$ — число (анти-)самодуальных тензорных полей.

Решение условия проекции	Теория
$\mathrm{O}(d+1,d+1+n) \hookleftarrow \mathrm{O}(d,d) \hookleftarrow \mathrm{GL}(d)$ $Y^{MN} \longrightarrow (Y^{i0},Y_{i0}) \longrightarrow y^i = Y^{i0}$	бозонная струна в $D=d+3$, условие (4.51) и $n_{\rm V}=n$
$\mathrm{O}(3+n_L,3+n_R) \hookleftarrow \mathrm{O}(3,3) \hookleftarrow \mathrm{GL}(3)$ $Y^{MN} \longrightarrow (Y^{i0},Y_{i0}) \longrightarrow y^i = Y^{i0}$	гравитация в $D=6$, условие (4.55) и $n_{\pm}=n_{\rm R,\mathit{L}}$
$\mathrm{O}(4,4+n) \hookleftarrow \mathrm{O}(3,3) \hookleftarrow \mathrm{GL}(3)$	бозонная струна в $D=6$, при (4.51) $n_{\rm V}=n$; при (4.55) $n_{-}{=}n$. с фермионным сектором: $\frac{1}{4}$ SUSY
$\mathrm{O}(8,n+1) \hookleftarrow \mathrm{O}(7,7) \hookleftarrow \mathrm{GL}(7)$ $\mathrm{O}(8,n+1) \hookleftarrow \mathrm{O}(n,n) \hookleftarrow \mathrm{GL}(n)$ $\mathrm{O}(8,n+1) \hookleftarrow \mathrm{O}(3,3) \hookleftarrow \mathrm{GL}(3)$	при (4.51) и $n \geqslant 7$: бозонная струна в $D=10$ с $n_{\rm V}=n-7$. с фермионным сектором: $\frac{1}{2}$ SUSY при (4.51) и $n \leqslant 7$: $D=n+3$ супергравитация. с фермионным сектором: $\frac{1}{2}$ SUSY для условия (4.55): $D=6$, $\mathcal{N}=(2,0)$ супергравитация, $n_T=n-2$

4.3.3 Общий твистовый анзац

Рассмотрим обобщенную редукцию Шерка–Шварца исключительной теории поля и, в частности, расширенной двойной теории на $\mathbb{S}^3$. В предыдущей главе подробно была рассмотрена редукция скалярного сектора исключительных теорий. Для полной формулировки анзац (4.1) необходимо дополнить анзацем для p-форм и внешней метрики. Непосредственный интерес в настоящей главе представляет $\mathrm{O}(p,q)$ теория, поэтому запишем ШШ анзац сразу в соответствующих обозначениях

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu}(x,\mathbb{X}) &= \rho(\mathbb{X})^{-2}\, g_{\mu\nu}(x)\ , \\
\mathcal{M}_{MN}(x,\mathbb{X}) &= U_M{}^{\overline{M}}(\mathbb{X})\, U_N{}^{\overline{N}}(\mathbb{X})\, \mathcal{M}_{\overline{MN}}(x)\ , \\
\mathcal{A}_\mu{}^{MN}(x,\mathbb{X}) &= \rho(\mathbb{X})^{-1}\, U^M{}_{\overline{M}}(\mathbb{X})\, U^N{}_{\overline{N}}(\mathbb{X})\, A_\mu{}^{\overline{MN}}(x)\ , \\
\mathcal{B}_{\mu\, KL}(x,\mathbb{X}) &= -\frac{1}{4}\,\rho(\mathbb{X})^{-1}\, U^M{}_{\overline{N}}(\mathbb{X})\, \partial_{KL} U_{M\overline{M}}(\mathbb{X})\, A_\mu{}^{\overline{MN}}(x)\ .
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

Здесь греческие индексы $\mu,\nu = 0,1,2$ нумеруют направления внешнего пространства, большие латинские индексы $M,N = 1,\ldots,p+q$ нумеруют направления расширенного пространства. Координаты $\mathbb{X}^{[MN]}$ преобразуются в присоединенном представлении глобальной группы $\mathrm{O}(p,q)$. Твистовые матрицы при этом определены в фундаментальном векторном представлении. Индексы поднимаются и опускаются инвариантным тензором η_{MN}, например, $U_M{}^{\overline{M}} U^{M\overline{N}} = \eta^{\overline{MN}}$.

Калибровочное поле $\mathcal{B}_{\mu\, KL}$ соответствует дополнительной калибровочной симметрии, необходимой для самосогласованности алгебры обобщенных диффеоморфизмов, и удовлетворяет собственным условиям проекции

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\mu\,[MN} \otimes \partial_{KL]} \ &= \ 0 \ = \ \eta^{NK}\, \mathcal{B}_{\mu\, MN} \otimes \partial_{KL}, \\
\mathcal{B}_{\mu\,[MN} \otimes \mathcal{B}_{\nu\, KL]} \ &= \ 0 \ = \ \eta^{NK}\, \mathcal{B}_{\mu\, MN} \otimes \mathcal{B}_{\nu\, KL}.
\end{aligned}
\tag{4.57}
$$

Видно, что анзац (4.56) согласован с условиями (4.57). Параметры калибровочных преобразований Λ^{MN}, Σ_{MN} потенциалов $\mathcal{A}_\mu{}^{MN}$, $\mathcal{B}_{\mu\, MN}$ удовлетворяют анзацу такого же вида

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{MN}(x,\mathbb{X}) &= \rho(\mathbb{X})^{-1} U^M{}_{\overline{M}}(\mathbb{X}) U^N{}_{\overline{N}}(\mathbb{X}) \Lambda^{\overline{MN}}(x)\ , \\
\Sigma_{KL}(x,\mathbb{X}) &= -\frac{1}{4}\,\rho(\mathbb{X})^{-1}\, U_{M\overline{N}}(\mathbb{X})\, \partial_{KL} U^M{}_{\overline{M}}(\mathbb{X})\, \Lambda^{\overline{MN}}(x)\ .
\end{aligned}
\tag{4.58}
$$

Для обобщенной производной Ли получим

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{(\Lambda,\Sigma)}\, g_{\mu\nu} &= 2\,\rho^{-2} \left(\Lambda^{\overline{KL}}\, \theta_{\overline{KL}}\, g_{\mu\nu}\right)\ , \\
\mathcal{L}_{(\Lambda,\Sigma)}\, \mathcal{M}_{MN} &= -2\, U_M{}^{\overline{M}} U_N{}^{\overline{N}} \left(\Lambda^{\overline{KL}}\, X_{\overline{KL},(\overline{M}}{}^{\overline{Q}}\, \mathcal{M}_{\overline{N})\overline{Q}}\right)\ ,
\end{aligned}
\tag{4.59}
$$

где внешняя метрика ожидаемо преобразуется пропорционально тромбону. Тензор погружения $X_{\overline{KL},\overline{M}}{}^{\overline{N}}$ содержит информацию о калибровочных взаимодействиях результирующей трехмерной теории и имеет следующий вид:

$$
X_{\overline{KL},\overline{PQ}} = \ \theta_{\overline{KLPQ}} + \frac{1}{2}\left(\eta_{\overline{P}[\overline{K}}\theta_{\overline{L}]\overline{Q}} - \eta_{\overline{Q}[\overline{K}}\theta_{\overline{L}]\overline{P}}\right) + \theta\, \eta_{\overline{P}[\overline{K}}\eta_{\overline{L}]\overline{Q}}\ .
\tag{4.60}
$$

В терминах твистовых матриц неприводимые компоненты тензора погружения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\theta_{\overline{KLPQ}} &= 6\,\rho^{-1}\,\partial_{LP}U_{N\,[\overline{K}}U^{N}{}_{\overline{L}}U^{L}{}_{\overline{P}}U^{P}{}_{\overline{Q}]}\ , \\
\theta_{\overline{PQ}} &= 4\,\rho^{-1}\,U^{K}{}_{\overline{P}}\,\partial_{KL}U^{L}{}_{\overline{Q}} - \frac{4\,\rho^{-1}}{p+q}\,\eta_{\overline{PQ}}U^{K\overline{L}}\partial_{KL}U^{L}{}_{\overline{L}} - 4\rho^{-2}\,\partial_{\overline{PQ}}\rho\ , \\
\theta &= \frac{4\,\rho^{-1}}{p+q}\,U^{K\overline{L}}\partial_{KL}U^{L}{}_{\overline{L}}\ .
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Редукция Шерка–Шварца, вообще говоря, не требует от твистовых матриц удовлетворения условию проекции. Однако, для построения самосогласованных редукций, необходимо дополнительно наложить это условие на твистовые матрицы. В терминах неприводимых компонент условие сводится к

$$\theta_{[\overline{M}_1\ldots\overline{M}_4}\theta_{\overline{M}_5\ldots\overline{M}_8]} = 0. \tag{4.62}$$

В качестве общего анзаца для редукций, которые будут рассмотрены ниже, выберем твистовые матрицы $U_M{}^{\overline{N}}(Y)$, принадлежащие максимальной $\mathrm{GL}(d+1)$ подгруппе $\mathrm{O}(d+1,d+1)$. В явном виде

$$U_M{}^{\overline{M}} = \begin{bmatrix} \varphi\,V_A{}^{\overline{A}} & 0 \\ 0 & \varphi^{-1}\,(V^{-1})_{\overline{A}}{}^{A} \end{bmatrix}. \tag{4.63}$$

Здесь $\mathrm{SL}(d+1)$ матрица $V_A{}^{\overline{A}}$ и скалярная функция φ определены следующим образом: [132]

$$\begin{aligned}
\rho &= \varphi^{-(d+1)/2} = (1-u)^{1/2}, \\
\varphi V_A{}^{\overline{A}} &= \begin{pmatrix} (1-u)^{-1}\,(1+u\,k(u)) & -y^j\,(1-u)^{-1/2}\,k(u) \\ -y^i\,(1-u)^{-1/2} & \delta_i{}^j \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.64}$$

и мы обозначили $u \equiv y^i y^i$. Скалярная функция $k(u)$ является решением дифференциального уравнения

$$2\,u\,(1-u)\,k'(u) = ((d-1)\,u - d)\,k(u) - 1\ . \tag{4.65}$$

Относительно подгруппы $\mathrm{GL}(d+1)$ координаты расширенного пространства раскладываются на неприводимые представления

$$\left\{Y^{MN}\right\} \longrightarrow \left\{Y^{AB},\ Y_{AB},\ Y_A{}^{B}\right\}\ , \tag{4.66}$$

где индексы $A,B = 1,\ldots,d+1$ нумеруют векторы фундаментального представления $\mathrm{SL}(d+1)$. При этом условие проекции (4.51) требует, чтобы поля зависели только от $\{Y^{AB}\}$ и не зависели от $\{Y_{AB},Y_A{}^B\}$. Такой анзац для твистовых матриц согласован с условием постоянства неприводимых компонент (4.61) и повторяет анзац, полученный в работе [132] для редукции на сферу и гиперболоид.

Для твистовой матрицы вида (4.63) неприводимые компоненты $\theta_{[\overline{AB}]} = 0$, $\theta_{\overline{ABCD}}\eta^{\overline{CD}} = 0$ и $\theta_{(AB)} \propto \delta_{AB}$. Вычисляя преобразования (4.59) со структурными константами (4.60), получим, что такой анзац соответствует калибровочной группе

$$\mathrm{G}_{gauge} = \mathrm{SO}(d+1) \ltimes \mathbb{T}^{d(d+1)/2}\ . \tag{4.67}$$

Нильпотентные генераторы преобразуются в присоединеном представлении группы $\mathrm{SO}(d+1)$. Здесь важно отметить, что калибровочный сектор результирующей трехмерной теории полученной вычислением действия для расширенной двойной теории поля на анзаце ШШ задается действием типа Черна–Саймонса вместо стандартного действия Янга–Миллса для векторных полей. Однако, в работе [166] было показано, что такая теория с калибровочной группой (4.67) и с конкретной структурой тензора погружения, заданной (4.60), может быть переформулирована в виде $\mathrm{SO}(d+1)$ теории Янга–Миллса. При этом пространство модулей скалярных полей вкладывается согласно $\mathrm{SO}(d+1,d+1)/(\mathrm{SO}(d+1)\times\mathrm{SO}(d+1)) \to \mathrm{GL}(d+1)/\mathrm{SO}(d+1)$. Обобщенная редукция Шерка–Шварца в таком случае описывает самосогласованную редукцию $(d+3)$-мерной бозонной струны на сферу $\mathbb{S}^d$, которая была построена в явном виде в работе [167]. Частным случаем является редукция бозонного сектора 10-мерной супергравитации $\mathbb{S}^7$ до $D = 3$ $\mathcal{N} = 8$ полумаксимальной теории.

4.3.4 Редукция на $\mathbb{S}^3$

Пусть $d = 3$, тогда $\mathrm{GL}(4)$ твистовая матрица (4.63), (4.64) описывает общую редукцию на сферу $\mathbb{S}^3$ минимальной $D = 6$, $\mathcal{N} = (1,0)$ супергравитации, взаимодействующей с тензорным мультиплетом [167]. Таким образом, полевой состав $D = 6$ теории включает метрику, некиральное поле 2-формы и скалярное поле. Редукция такой теории на тор $\mathbb{T}^3$ дает $D = 3$ теорию со скалярными полями, параметризующими фактор-группу SO(4,4)/(SO(4) $\times$ SO(4). В формализме тензора погружения деформация некалиброванной супергравитации до супергравитации, редуцированной на сферу, индуцирует следующие компоненты

$$\theta_{\overline{AB}} = 4\,\delta_{\overline{AB}} \qquad \Longrightarrow \qquad \Theta_{\overline{AB},\overline{CD}} \;=\; 2\,\delta_{\overline{C}[\overline{A}}\delta_{\overline{B}]\overline{D}}\ . \tag{4.68}$$

Потенциал теории имеет убегающие направления и, следовательно, не имеет минимума [167].

Интересно отметить, что рассматриваемое решение допускает представление с альтернативным выбором координат, а именно (4.55). В новых координатах анзац для твистовой матрицы принимает вид

$$U_M{}^{\overline{M}}(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} \varphi\,(V^{-1})_{\overline{A}}{}^{A} & 0 \\ 0 & \varphi^{-1}\,V_A{}^{\overline{A}} \end{pmatrix}, \tag{4.69}$$

где V задается тем же выражением (4.64). Ненулевые компоненты тензора погружения равны

$$\theta_{\overline{ABC}}{}^{\overline{D}} = \varepsilon_{\overline{ABCE}}\,\delta^{\overline{ED}}\ . \tag{4.70}$$

Полученный результат является $\mathrm{O}(p,q)$ аналогом конструкции, использованной в [168] для получения соотношения между самосогласованными редукциями IIA и IIB теорий в рамках исключительной теории поля. Тензоры погружения (4.68) и (4.70) связаны преобразованием триальности группы O(4), отображающей представления $\mathbf{35}_v \leftrightarrow \mathbf{35}_c$. Таким образом, тензоры погружения эквивалентны и описывают одну и ту же редукцию.

4.3.5 $D = 6$, $\mathcal{N} = (1{,}0)$ теория на $\mathrm{AdS}_3 \times \mathbb{S}^3$

Общая редукция на сферу $\mathbb{S}^3$ в три измерения, построенная в [167], может быть модифицирована интегрированием по 2-формам в результирующей трехмерной теории, что дает дополнительные вклады в скалярный потенциал. Модифицированный потенциал допускает стабильное суперсимметричное решение AdS_3, поднимающееся до суперсимметричного решения $\mathrm{AdS}_3 \times \mathbb{S}^3$ минимальной $D = 6$ супергравитации [169]. В терминах редукции Шерка–Шварца рассматриваемой расширенной теории поля такое решение соответствует твистовой матрице вида

$$\mathcal{U}(y) = \; U(y)\,\mathring{U}_\alpha(y)\;, \tag{4.71}$$

где GL(4) матрица $U(y)$ имеет тот же вид, что и в (4.63), (4.64), а дополнительная матрица $\mathring{U}(y)$ получена экспоненцированием отдельных нильпотентных генераторов группы SO(4,4) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathring{U}_\alpha = \exp\Big(\alpha\,(1+k(u))(1-u)^{-1/2}N_0\Big)\;,\\
&N_0 \equiv \begin{pmatrix} 0_{4\times4} & n_0 \\ 0_{4\times4} & 0_{4\times4} \end{pmatrix}\;, \qquad n_0 \;\equiv \begin{pmatrix} 0 & y^3 & -y^2 & 0 \\ -y^3 & 0 & y^1 & 0 \\ y^2 & -y^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\;.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Функция $k(u)$ дается тем же выражением (4.65), что и ранее, α — некоторая константа. Результирующий тензор погружения дополнительно к (4.68) имеет следующие ненулевые компоненты

$$\theta_{\overline{ABCD}} = \; -2\,\alpha\,\varepsilon_{\overline{ABCD}}\;. \tag{4.73}$$

Трехмерная теория имеет ту же калибровочную группу $\mathrm{SO}(4) \ltimes T^6$, но скалярный потенциал оказывается модифицированным и при $\alpha = 1$ имеет минимум, соответствующий суперсимметричному решению AdS_3 найденному в [169]. Таким образом, твистовая матрица (4.71) описывает самосогласованную редукцию $D = 6$, $\mathcal{N} = (1{,}0)$ супергравитацию на $\mathrm{AdS}_3 \times \mathbb{S}^3$.

Как и в предыдущей главе, твистовая матрица (4.71) может быть представлена в терминах дуальных координат (4.55). Неприводимые компоненты тензора погружения при этом связаны преобразованием триальности.

4.3.6 $\mathcal{N} = (1{,}1)$ и $\mathcal{N} = (2{,}0)$ теория на $\mathrm{AdS}_3 \times \mathbb{S}^3$

Вложением группы SO(4,4) в $\mathrm{SO}(4+m, 4+n)$ та же твистовая матрица $\mathcal{U}$ может быть использована для построения самосогласованной редукции

$D = 6$ супергравитации, взаимодействующей с тензорными или векторным мультиплетами. Рассмотрим для примера SO(8,4) теорию с решением условия проекции, заданным (4.51). Тогда твистовая матрица (4.71) будет соответствовать самосогласованной редукции полумаксимальной $D = 6$, $\mathcal{N} = (1,1)$ некиральной супергравитации на $\mathrm{AdS}_3 \times \mathbb{S}^3$. Компоненты тензор погружения заданы выражениями

$$\theta_{\overline{AB}} = 4\,\delta_{\overline{AB}}\,, \qquad \theta_{\overline{ABCD}} = -2\,\alpha\,\varepsilon_{\overline{ABCD}} \tag{4.74}$$

для индексов $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D} \in \{1,2,3,4\}$, и равны нулю в противном случае.

Альтернативный выбор решения условия проекции (4.55) для той же SO(8,4) теории с твистовой матрицей (4.69), (4.72) описывает самосогласованную редукцию полумаксимальной $D = 6$, $\mathcal{N} = (2,0)$ киральной супергравитации, взаимодействующей с тензорным мультиплетом на $\mathrm{AdS}_3 \times \mathbb{S}^3$. Тензор погружения теории задается выражениями

$$\theta_{\overline{ABC}}{}^{\overline{D}} = \varepsilon_{\overline{ABCE}}\,\delta^{\overline{ED}}\,, \qquad \theta_{\overline{ABCD}} = -2\,\alpha\,\varepsilon_{\overline{ABCD}}\,, \tag{4.75}$$

для индексов $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D} \in \{1,2,3,4\}$, и равен нулю в противном случае. Такой же результат был получен в работе [170] для тензора погружения, соответствующего $\mathcal{N} = (2,0)$ компактификации. Описанная здесь конструкция задает полный нелинейный анзац для вложения полей трехмерной теории в шесть измерений. Важно, что неприводимые компоненты тензора погружения, заданные (4.74) и (4.75) более не эквивалентны, поскольку не существует преобразования триальности между ними.

5.1 Экзотические браны и потенциалы смешанной симметрии

В Главе 2 обсуждались преобразования БПС состояний максимальной супергравитации в низких размерностях под действием симметрий Креммера–Джулиа. Поскольку БПС состояния соответствуют суперсимметричным бранам М-теории или теории струн, они также преобразуются под действием этих симметрий. То же верно для потенциалов, с которыми браны взаимодействуют. При размерной редукции пространственные направления браны могут оставаться полностью во внешнем пространстве или быть намотанными на компактные циклы внутреннего пространства (для простоты, d-мерного тора). Низкоэнергетическое описание второго случая соответствует схеме размерной редукции супергравитации в присутствии потоков p-форм или негеометрических флаксов, в зависимости от типа браны. С другой стороны, полное описание возможных деформаций максимальной супергравитации на d-мерном торе за счет включения геометрических или негеометрических флаксов известно в в виде формализма тензора погружения, рассмотренного в Главе 2. Тензорная иерархия калиброванной супергравитации позволяет получить информацию о возможных стандартных и экзотических бранах теории. Рассмотрим для примера NS5-брану теории типа IIB, которая магнитно взаимодействует с 3-формой тензора напряженности H_{mnk}. Уравнения движения для потенциала B_2 могут быть записаны в виде тождеств Бьянки:

$$
\begin{aligned}
&d\Big(e^{-2\varphi} * H_3 + C_0 \wedge *G_3 + \frac{1}{2}C_2 \wedge G_5 + \frac{1}{2}C_2 \wedge dC_4\Big) = 0,\\
&G_{p+1} = dC_p + H_3 \wedge C_{p-2}.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Определяя тензор напряженности $H_7 = e^{-2\varphi} * H_3$ можем определить локально решение уравнений в терминах магнитного потенциала D_6

$$
H_7 = dD_6 - C_0 \wedge *G_3 - \frac{1}{2}C_2 \wedge G_5 - \frac{1}{2}C_2 \wedge dC_4. \tag{5.2}
$$

При этом, тождество Бьянки для тензора напряженности H_3 может быть записано в виде уравнения для H_7:

$$
dH_3 = d(e^{-2\varphi} * H_7) = 0. \tag{5.3}
$$

В присутствии магнитного источника, например, NS5B-браны, правая часть уравнения для H_7 пропорциональна току j_6, что модифицирует тождества Бьянки для H_3. Таким образом, наблюдаем стандартную картину, когда ток магнитных источников модифицирует тождества Бьянки для электрических полей. В дальнейшем удобнее будет работать именно с тождествами Бьянки для электрических потенциалов, а не уравнениями движениями магнитных потенциалов, поскольку последние не всегда могут быть сформулированы в полной нелинейной теории. Например, потенциал для дуального гравитона, связанного с тождествами Бьянки для коэффициентов неголономичности, может быть получен только в линейном приближении.

В ковариантном подходе двойной теории поля с группой $\mathrm{O}(d,d)$ 2-форма $B_{\mu\nu}$ является частью полного набора полей, включающего обобщенную метрику $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$, дилатон d, внешнюю метрику $g_{\mu\nu}$ и векторный мультиплет $A_\mu{}^{\mathcal{M}}$. Заметим, что обобщенная метрика и векторный мультиплет тоже включают степени свободы, наследуемые из поля Калба–Рамона при разбиении $10 = D + d$. Тогда дополнительно к тензору напряженности $H_{\mu\nu\rho}$ имеем набор обобщенных флаксов $\mathcal{F}_{\mathcal{MNK}}$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$, коэффициенты неголономичности внешнего репера $f_{\mu\nu}{}^\rho$ и тензор напряженности $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}$ для калибровочных полей. Обобщенные флаксы $\mathcal{F}_{\mathcal{MNK}} = E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} E_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{B}} E_{\mathcal{K}}{}^{C} \mathcal{F}_{ABC}$ определяются по аналогии с коэффициентами неголономичности (см. ниже)

$$[E_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{B}}]^{\mathcal{M}} = \mathcal{F}_{AB}{}^{C} E_{C}{}^{\mathcal{M}}, \tag{5.4}$$

где скобка обобщенных реперов $E_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{M}}$ определяется через обобщенную производную Ли. Обобщенный флакс $\mathcal{F}_{\mathcal{M}} = E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} \mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ определен следующим выражением

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{M}} \partial_{\mathcal{M}} d - E_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{M}} E^{-1} \partial_{\mathcal{M}} E, \tag{5.5}$$

где $E = \det E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}}$. Определение тензоров $\mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}}$ и $H_{\mu\nu\rho}$ повторяет таковое для исключительной теории поля.

Запишем схематически тождества Бьянки для обобщенные флаксов $\mathcal{F}_{\mathcal{MNK}}, \mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ которые задают дуальные (магнитные) потенциалы, взаимодействующие с 5-бранами NS сектора [37, 171]:

$$
\begin{aligned}
D_{[\mu} H_{\nu\rho\sigma} + \ldots &= Z_{\mu\nu\rho\sigma} = 0,\\
D_{[\mu} \mathcal{F}_{\nu\rho]}{}^{\mathcal{M}} + \ldots &= Z_{\mu\nu\rho}{}^{\mathcal{M}},\\
\partial^{[M} \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{N]} + \ldots &= Z_{\mu\nu}{}^{\mathcal{M}\mathcal{N}},\\
\partial_M \mathcal{F}_{\mu\nu}{}^{M} + \ldots &= Z_{\mu\nu},\\
D_\mu \mathcal{F}_{\mathcal{M}} + \ldots &= Z_{\mu M} = 0,\\
D_\mu \mathcal{F}_{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}} + \ldots &= Z_{\mu\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}} = 0,\\
\partial_{[M} \mathcal{F}_{NKL]} - \frac{3}{4} \mathcal{F}_{[\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{P} \mathcal{F}_{KL]P} &= Z_{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}\mathcal{L}} = 0,\\
\partial^K \mathcal{F}_{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}} + 2\partial_{[M} \mathcal{F}_{N]} - \mathcal{F}^K \mathcal{F}_{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}} &= Z_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = 0,\\
\partial_{\mathcal{M}} \mathcal{F}^{\mathcal{M}} - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mathcal{M}} \mathcal{F}^{\mathcal{M}} + \frac{1}{12} \mathcal{F}_{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}} \mathcal{F}^{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}} &= Z = 0.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Здесь точками обозначены слагаемые, которые не представляют интереса для обсуждения магнитных потенциалов. Ковариантная производная определена стандартным образом $D_\mu = \partial_\mu - \mathcal{L}_{A_\mu}$. Следуя стандартному алгоритму введения дуальных потенциалов в теорию, добавим в действие двойной теории поля слагаемое с множителем Лагранжа:

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathcal{S}_{DFT} = \int & Z_4 \wedge D_{D-4} + Z_3{}^{\mathcal{M}} \wedge D_{D-3,M} + Z_2{}^{\mathcal{M}\mathcal{N}} \wedge D_{D-2,\mathcal{M}\mathcal{N}} + Z_2 \wedge D_{D-2}\\
& + Z_1{}^{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}} \wedge D_{D-1,\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}} + Z_1{}^{\mathcal{M}} \wedge D_{D-1,M}\\
& + Z^{\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}\mathcal{L}} \wedge D_{D,\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}\mathcal{L}} + Z^{\mathcal{M}\mathcal{N}} \wedge D_{D,\mathcal{M}\mathcal{N}} + Z \wedge D_D,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

где нижний цифровой индекс обозначает ранг формы. Важно отметить, что в отличие от рассмотренного выше примера для поля Калба–Рамона, полностью переписать двойную теорию поля в терминах дуальных потенциалов, разрешая обобщенные тождества Бьянки, не представляется возможным [172, 173]. Это утверждение сродни утверждению о невозможности полной нелинейной формулировки теории гравитации в терминах дуального гравитона. Тем не менее, как минимум на линейном уровне можно интерпретировать лагранжевы множители в выражении выше, как дуальные потенциалы

$$
\begin{array}{lllll}
D_{D-4}, & D_{D-3,M}, & D_{D-2,\mathcal{M}\mathcal{N}}, & D_{D-1,\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}}, & D_{D,\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{K}\mathcal{L}},\\
 & & D_{D-2}, & D_{D-1,M}, & D_{D,\mathcal{M}\mathcal{N}},\\
 & & & & D_D.
\end{array}
\tag{5.8}
$$

Такой же набор магнитных потенциалов, взаимодействующих с солитонными бранами был получен в работе [94] из анализа солитонных 1/2БПС состояний максимальной суперaлгебры в размерности D.

Очевидно, что в полной O(10,10) теории присутствуют только потенциалы из последнего столбца в (5.8), поскольку все тождества Бьянки сводятся к таковым для $\mathcal{F}_{\mathcal{MNK}}, \mathcal{F}_M$. Как будет показано ниже, именно с этим потенциалом взаимодействуют браны, принадлежащие орбите NS5-браны в ковариантном формализме. При этом, соответствующие потенциалы смешанной симметрии определяются пуанкаре дуализацией компонент $D^{\mathcal{MNKL}}$

$$\begin{aligned}
B_{m_1\dots m_6} &= \varepsilon_{m_1\dots m_{10}} D^{m_7 m_8 m_9 m_{10}},\\
A_{m_1\dots m_7,m} &= \varepsilon_{m_1\dots m_{10}} D^{m_8 m_9 m_{10}}{}_m,\\
B_{m_1\dots m_8,mn} &= \varepsilon_{m_1\dots m_{10}} D^{m_9 m_{10}}{}_{mn},\\
B_{m_1\dots m_9,mnk} &= \varepsilon_{m_1\dots m_{10}} D^{m_{10}}{}_{mnk},\\
B_{m_1\dots m_{10},mnkl} &= \varepsilon_{m_1\dots m_{10}} D_{mnkl}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Полная классификация магнитных NS-NS потенциалов и соответствующих солитонных объектов была получена в работах [174, 94, 96].

Полученные результаты можно обобщить на исключительные теории поля, переходя к так называемой флакс-формулировке, когда действие теории сформулировано полностью в терминах обобщенных флаксов и тензоров напряженности калибровочных полей. При этом, обобщенный флакс имеет тот же вид, что и тензор погружения, но не считается постоянным. Квадратичные условия на тензор погружения обобщаются до полных тождеств Бьянки, задавая магнитные потенциалы теории. потенциалы. В такой флакс-формулировке исключительной теории поля удобно описывать орбиты бран, взаимодействующих магнитно с калибровочными потенциалами смешанной симметрии, решая уравнения движения и тождества Бьянки совместно. При этом решения уравнений исключительной теории поля могут включать поля, зависящие не только от стандартных координат, но и от дуальных, причем условие проекции выполняется. Действительно, рассмотрим простой пример двойной теории поля с группой O(2,2). В таком случае расширенное пространство параметризуется координатами $(x^1, x^2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, а условие проекции ограничивает зависимость только одной координатой из каждой пары $(x^1, \tilde{x}_1)$, $(x^2, \tilde{x}_2)$. Считая (x^1, x^2) геометрическими координатами, то есть, теми, которые используются для измерения расстояния в физическом пространстве, можно удовлетворить условие проекции, допустив зависимость от $(x^1,\tilde{x}_2)$. Естественно, такие решения исключительной теории поля не могут решать уравнения стандартной супергравитации, при этом являясь образами обычных полевых конфигураций при формальной T(U)-дуальности. Ниже будут рассмотрены особенно интересные примеры таких решений, соответствующие экзотическим бранам, и построены динамические действия для объектов, которые их генерируют.

5.1.1 g_s^{-3}-браны в теориях типа II

Рассмотрим более подробно соответствие между компонентами обобщенного флакса $E_{7(7)}$ исключительной теории, магнитными потенциалами и экзотическими бранами супергравитации типа II. Теории типа II объединяются в рамках двойной теории поля, причем, описание включает как RR, так и NS-NS секторы, поэтому удобно рассмотреть вложение O(6,6) двойной теории поля. Представления обобщенного флакса $\mathbf{912} \oplus \mathbf{56}$ (включая тромбон) под действием подгруппы $SO(6,6) \times SL(2)$ раскладываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{912} &\longrightarrow (\mathbf{12},\mathbf{2}) \oplus (\mathbf{32},\mathbf{3}) \oplus (\mathbf{220},\mathbf{2}) \oplus (\mathbf{352},\mathbf{1}), \\ \mathbf{56} &\longrightarrow (\mathbf{12},\mathbf{2}) \oplus (\mathbf{32},\mathbf{1}). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Поскольку группа S-дуальности SL(2) нетривиально действует на аксио–дилатон, для разложения по степеням $g_s = e^{-\varphi}$ она должна быть нарушена до $SL(2) \hookleftarrow \mathbb{R}_+$. В итоге имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{912} &\longrightarrow \mathbf{32}_{-2} \oplus \mathbf{220}_{-1} \oplus \mathbf{12}_{-1} \oplus \mathbf{352}_0 \oplus \mathbf{32}_0 \oplus \mathbf{220}_{+1} \oplus \mathbf{12}_{+1} \oplus \mathbf{32}_{+2}, \\ \mathbf{56} &\longrightarrow \mathbf{12}_{-1} \oplus \mathbf{32}_0 \oplus \mathbf{12}_{+1}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Вес по отношению к группе $\mathbb{R}_+$ линейно связан со степенью g_s, которой пропорционально натяжение соответствующей браны или, эквивалентно, массе 1/2БПС состояния максимальной $D = 4$ супергравитации. Изложение ниже следует соглашениям, принятым в работе [175], где компоненты представления $\mathbf{32}_2$ отождествляются с потоками RR полей ($T \sim g_s^{-1}$), компоненты $\mathbf{220}_1$ — с потоками полей NS-NS сектора ($T \sim g_s^{-2}$), компоненты $\mathbf{352}_0$ — с негеометрическими P-флаксами ($T \sim g_s^{-3}$). Остальные компоненты соответствуют негеометрическим флаксам, создаваемым экзотическими бранами с натяжением, пропорциональным меньшим степеням g_s.

Для идентификации флаксов в теории типа II разложим представления под действием вложения O(6,6) $\hookleftarrow$ GL(6). Для флаксов, соответствующих натяжению с $g_s^{-\alpha}$ при $\alpha \leqslant 3$, имеем:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{32}_2 &\longrightarrow \mathbf{1}_{-3/2} \oplus \mathbf{15}_{-1/2} \oplus \overline{\mathbf{15}}_{1/2} \oplus \mathbf{1}_{3/2} \\
\mathbf{220}_1 &\longrightarrow \mathbf{20}_{-3/2} \oplus \bar{\mathbf{6}}_{-1/2} \oplus \overline{\mathbf{84}}_{-1/2} \oplus \mathbf{84}_{1/2} \oplus \mathbf{6}_{1/2} \oplus \mathbf{20}_{3/2} \\
\mathbf{352}_0 &\longrightarrow \mathbf{35}_{-3/2} \oplus \mathbf{15}_{-1/2} \oplus \mathbf{21}_{-1/2} \oplus \mathbf{105}_{-1/2} \oplus \overline{\mathbf{105}}_{1/2} \\
&\quad \oplus \overline{\mathbf{21}}_{1/2} \oplus \overline{\mathbf{15}}_{1/2} \oplus \mathbf{35}_{3/2},
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

где соглашения для обозначения представлений и им сопряженных выбраны таким образом, чтобы воспроизводить теорию типа IIA. Как и прежде, нижний индекс обозначает вес по отношению к GL(1) подгруппе и отражает перескалирование натяжения по отношению к преобразованиям координаты 11-го измерения. В компонентном виде разложение выше можно записать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\alpha = 1: &\quad \theta_{\mathcal{A}} \longrightarrow F \oplus F_{a_1a_2} \oplus F_{a_1\dots a_4} \oplus F_{a_1\dots a_6}, \\
\alpha = 2: &\quad \theta_{\mathcal{MNK}} \longrightarrow R^{abc} \oplus f^a \oplus Q_a{}^{bc} \oplus f_{ab}{}^c \oplus f_a \oplus H_{abc}, \\
\alpha = 3: &\quad \theta_{\mathcal{M}\dot{A}} \longrightarrow P^a{}_b \oplus P^a{}_{b_1b_2b_3} \oplus P^a{}_{b_1\dots b_5} \oplus P_{b_1b_2} \oplus P_{a,b}, \\
&\qquad \oplus P_{a,b_1b_2b_3} \oplus P_{a,b_1\dots b_5} \oplus P_{b_1\dots b_4}.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Здесь следует сделать важное замечание. На уровне $\alpha = 2$ присутствуют компоненты f^a и f_a, соответствующие неприводимым компонентам $\mathcal{F}_\mathcal{M}$ тензора погружения полумаксимальной супергравитации. Известно, что такие компоненты не соответствуют потенциалам, взаимодействующим с бранами, а дополняют бесследовые компоненты $\mathcal{F}_{ab}{}^c$ и $\mathcal{F}_a{}^{bc}$ обобщенного флакса. С точки зрения действия Весса–Зумино, описывающего взаимодействие бран с калибровочными потенциалами, такие флаксы соответствуют потенциалам, которые не входят в действие, но необходимы для обеспечения калибровочной инвариантности [94]. То же верно для компонент P_{ab} и P_{abcd}, которые впредь не будут обсуждаться, наряду с $\mathcal{F}_\mathcal{M}$.

При редукции к теории типа IIB поля RR сектора принадлежат спинору $\theta_{\dot{A}}$ противоположной киральности, а негеометрические P-флаксы — спин-вектору θ_{MA}. Как обсуждалось в Главе 2, такой переход соответствует альтернативному вложению группы GL(6) в O(6,6), отбрасывающему другой спинорный корень. Очевидно, в полной O(10,10) двойной теории поля негеометрические P-флаксы принадлежат тому же спин–векторному представлению группы дуальности. Поэтому, можем записать

$$
\begin{aligned}
\text{IIA:}\quad & \theta_{\mathcal{M}\dot{A}} \longrightarrow P_{a,b} \oplus P_{a,b_1\dots b_3} \oplus P_{a,b_1\dots 5} \oplus P_{a,b_1\dots b_7} \oplus P_{a,b_1\dots b_9} \\
& \qquad \oplus P^a{}_b \oplus P^a{}_{b_1\dots b_3} \oplus P^a{}_{b_1\dots 5} \oplus P^a{}_{b_1\dots b_7} \oplus P^a{}_{b_1\dots b_9}, \\
\text{IIB:}\quad & \theta_{\mathcal{M}A} \longrightarrow P_a \oplus P_{a,b_1b_2} \oplus P_{a,b_1\dots 4} \oplus P_{a,b_1\dots b_6} \oplus P_{a,b_1\dots b_8} \oplus P_{a,b_1\dots b_{10}} \\
& \qquad \oplus P^a \oplus P^a{}_{b_1b_2} \oplus P^a{}_{b_1\dots 4} \oplus P^a{}_{b_1\dots b_6} \oplus P^a{}_{b_1\dots b_8} \oplus P^a{}_{b_1\dots b_{10}}.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Зная действие преобразований (факторизованной) T-дуальности, описанное подробно в Главах 1 и 2, получим преобразования негеометрических P-флаксов. Действительно, первый индекс компоненты $P_{x,b_1\dots b_n}$ (эквивалентно, $P^x{}_{b_1\dots b_n}$) принадлежит вектору O(10,10) и, следовательно, опускается (эквивалентно, поднимается), если преобразование T-дуальности T_x действует вдоль x. Оставшиеся индексы являются частью спинорного представления и поэтому преобразуются так же, как и калибровочные поля RR сектора. А именно: если флакс имеет ненулевую компоненту вдоль направления x, тогда при T-дуальности соответствующий индекс убирается, и наоборот. Так сформулированные правила преобразований можно резюмировать в виде следующих формул [175]:

$$
\begin{aligned}
T_a: &\quad P_a{}^{b_1\dots b_p} \longleftrightarrow P^{a,b_1\dots b_p a}, \\
T_{b_p}: &\quad P_a{}^{b_1\dots b_p} \longleftrightarrow P_a{}^{b_1\dots b_{p-1}}.
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

В работах [96, 175] было показано, что соответствующими калибровочными потенциалами являются следующие тензоры смешанной симметрии:

$$
\begin{aligned}
\text{IIA}: &\qquad E_{8,1} \oplus E_{8,3} \oplus E_{8,5} \oplus E_{8,7} \oplus E_{10,3,2} \\
&\qquad E_{9,1,1} \oplus E_{9,3,1} \oplus E_{9,5,1} \oplus E_{9,7,1} \oplus E_{10,5,2}, \\
\text{IIB}: &\qquad E_{8,0} \oplus E_{8,2} \oplus E_{8,4} \oplus E_{8,6} \oplus E_{10,2,2} \\
&\qquad \oplus E_{9,2,1} \oplus E_{9,4,1} \oplus E_{9,6,1} \oplus E_{9,8,1} \oplus E_{10,4,2}.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Здесь символ $E_{p,q,r}$ обозначает потенциал с тремя наборами из p, q и r антисимметричных индексов, т.е. $E_{a_1\dots a_p,b_1\dots b_q,c_1\dots c_r}$. Проиллюстрируем связь между негеометрическим флаксом и потенциалом смешанной симметрии так же, как мы в Главе 2 получали потенциал $A_{8,1}$, взаимодействующий с КК6 монополем. Рассмотрим для примера IIB флакс $P_{a,bc}$, являющийся S–дуальным партнером Q-флакса. Как обсуждалось выше, компоненты тензора погружения суть интегральные потоки магнитных потенциалов. Поэтому, следует начать с дуализации флакса в полном 10-мерном пространстве:

$$P_{a,bc} \longrightarrow P_{a_1\dots a_{10},bc,a} = 10\partial_{[a_1}E_{a_2\dots a_9],bc,a} + \cdots\ , \tag{5.17}$$

где точки обозначают возможные нелинейные вклады от других потенциалов более низкого ранга. Таким образом, получаем IIB экзотический потенциал смешанной симметрии $E_{9,2,1}$. Повторяя рассуждения для Р-флакса $P^a{}_{bc}$ с верхним индексом

$$P^a{}_{bc} \longrightarrow P_{a_1\dots a_9,bc} = 9\partial_{[a_1}E_{a_2\dots a_9],bc} + \dots, \tag{5.18}$$

получаем IIB потенциал $E_{8,2}$.

Получаемые потенциалы соответствуют правилам намоток бран, сформулированным в работе [96]. В частности, из правил намоток для экзотических бран следует, что все индексы должны принимать такие значения, что в итоге получается некоторая p-форма во внешнем пространстве. Проще всего аргументировать это требование тем, что в теории D-мерной максимальной супергравитации нет потенциалов смешанной симметрии. Другими словами, если у потенциала есть дополнительный набор индексов, самые правые индексы должны быть индексами компактного направления (намотанными в терминологии [96]). Оставшиеся соответствуют мировым направлениям браны. Таким образом, например, для потенциала $E_{9,5,1}$ пишем

$$E_{a_1\dots a_4 x_1x_2x_3x_4y,x_1x_2x_3x_4y,y}, \tag{5.19}$$

где направления $x_1,\dots,x_4$ и y принадлежат компактному пространству, направления $a_1,\dots,a_4$ при этом соответствуют мировым направлениям браны. Очевидно, что такой потенциал взаимодействует с 3-браной. Направления $x_1,\dots,x_4$ и y при этом являются обобщенными Taub–NUT циклами, причем, y встречается трижды. Таким образом, в обозначениях [60] имеем $3_3^{(4,1)}$ брану. В общем виде потенциал $E_{b+c+d,c+d,d}$ взаимодействует с браной, натяжение которой пропорционально d радиусам в третьей степени, c радиусам во второй степени и b радиусам в первой степени. В обозначениях [60] для соответствия

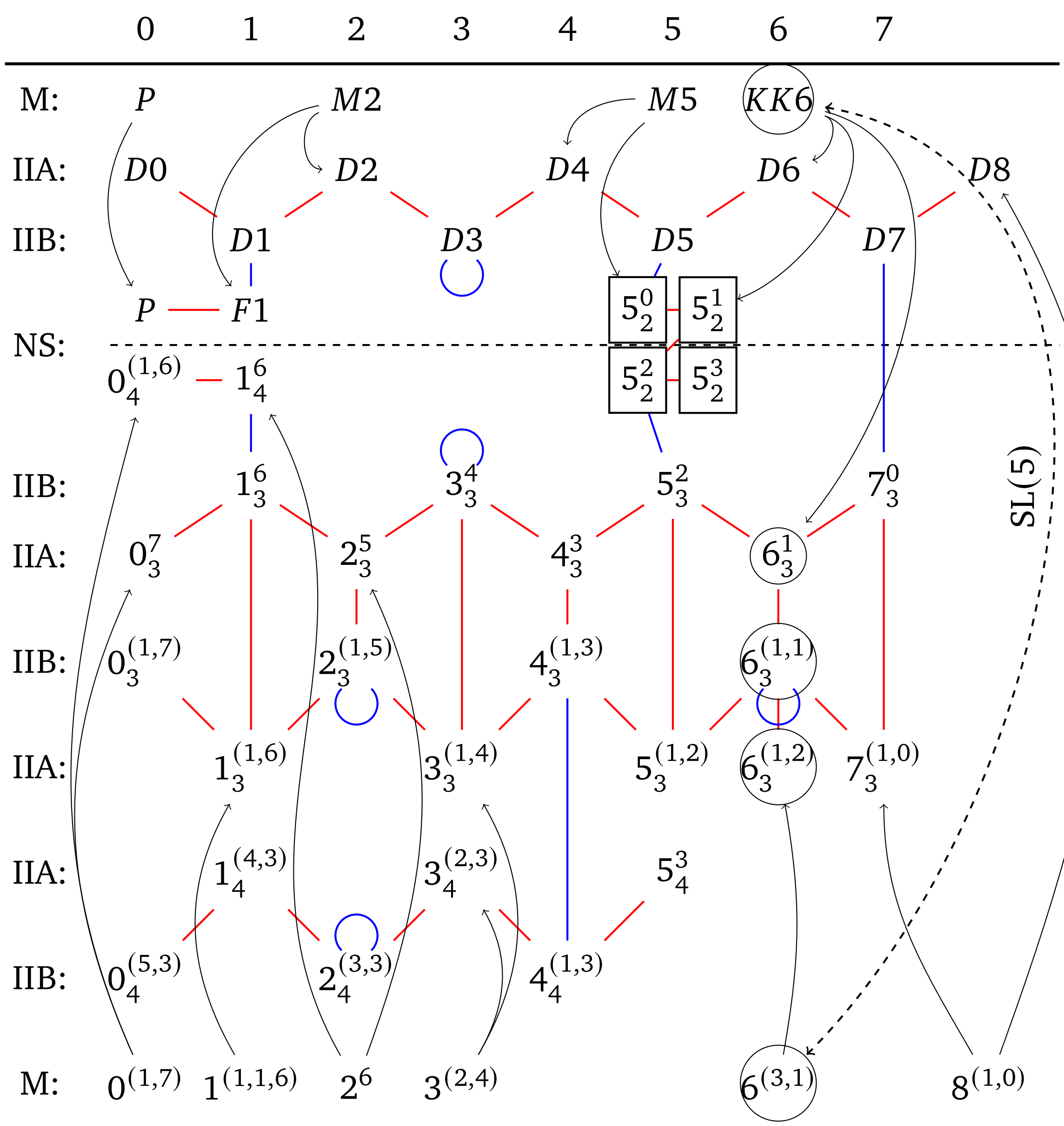

Рисунок 5.1 — Браны в теориях типа II с натяжением, пропорциональным $g_s^{-\alpha}$ при $\alpha \leqslant 4$ и соотношения между ними и бранами М-теории (изображены только некоторые браны). Черные, красные и синие линии обозначают редукцию, T-дуальность и S-дуальность соответственно. Квадратами показаны состояния, поднимающиеся до DFT-монополя. Кругом обведены состояния, принадлежащие орбите KK6-монополя при действии U-дуальности T_{123} (пунктир).

между потенциалами и бранами пишем:

$$
\begin{aligned}
E_{b+c+1,c} &\Longleftrightarrow b_3^c, \\
E_{b+c+d+1,c+d,d} &\Longleftrightarrow b_3^{(d,c)},
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

где индекс $_3$ обозначает зависимость натяжения от g_s^{-3}. Для масс имеем (ср. с (2.62)):

$$
\begin{aligned}
M_{b_3^c} &= \frac{R_{i_1}\cdots R_{i_b}R_{j_1}^2\cdots R_{j_c}^2}{g_s^3 l_s^{b+2c+1}},\\
M_{b_3^{(d,c)}} &= \frac{R_{i_1}\cdots R_{i_b}R_{j_1}^2\cdots R_{j_c}^2 R_{k_1}^3\cdots R_{k_d}^3}{g_s^3 l_s^{b+2c+3d+1}}\,.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

На Рисунке 5.1 изображены орбиты стандартных и экзотических бран под действием преобразований T- и S-дуальности:

$$
\begin{aligned}
T_x:&\quad R_x \longrightarrow \frac{l_s^2}{R_x},\quad g_s \longrightarrow \frac{l_s}{R_x}g_s,\\
S:&\quad g_s \longrightarrow \frac{1}{g_s},\quad l_s \longrightarrow g_s^{1/2}l_s,
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

являющихся вейлевскими отражениями. Все ${g_s}^{-3}$ браны, взаимодействующие с потенциалами (5.16), перечислены в Таблице 14. Конечно, все браны в

Таблица 14 — Потенциалы смешанной симметрии и взаимодействующие с ними браны в теориях типа IIA/B.

	IIA		IIB	
Коразмерность	Потенциал	Брана	Потенциал	Брана
$n=2$	$E_{8,1}$	6_3^1	$E_{8,0}$	7_3^0
	$E_{8,3}$	4_3^3	$E_{8,2}$	5_3^2
	$E_{8,5}$	2_3^5	$E_{8,4}$	3_3^4
	$E_{8,7}$	0_3^7	$E_{8,6}$	1_3^6
$n=1$	$E_{9,1,1}$	$7_3^{(1,0)}$	$E_{9,2,1}$	$6_3^{(1,1)}$
	$E_{9,3,1}$	$5_3^{(1,2)}$	$E_{9,4,1}$	$4_3^{(1,3)}$
	$E_{9,5,1}$	$3_3^{(1,4)}$	$E_{9,6,1}$	$2_3^{(1,5)}$
	$E_{9,7,1}$	$1_3^{(1,6)}$	$E_{9,8,1}$	$0_3^{(1,7)}$
$n=0$	$E_{10,3,2}$	$6_3^{(2,1)}$	$E_{10,2,2}$	$7_3^{(2,0)}$
	$E_{10,5,2}$	$4_3^{(2,3)}$	$E_{10,4,2}$	$5_3^{(2,2)}$
	$E_{10,7,2}$	$2_3^{(2,5)}$	$E_{10,6,2}$	$3_3^{(2,4)}$

теории типа IIA, как стандартные, так и экзотические получаются из стандартных и экзотических бран M-теории при размерной редукции. Однако, задача непосредственного обобщения логики классификации экзотических бран в терминах компонент тензора погружения на максимальную супергравитацию оказывается чересчур сложной. Действительно, полной группой U-дуальности является бесконечномерная группа E_{11}. Несмотря на существенные прогресс, представленный работами [61, 62, 64, 65, 67, 64] и построение обобщенной геометрии для E_{11} исключительной теории поля, мы еще далеки от полного понимания структуры соответствующего тензора погружения. По этой причине, в дальнейшем изложении мы будем в том числе опираться на правила редукции и восстановления бран M-теории и теории типа IIA:

$$\begin{aligned} \mathrm{IIA} \to \mathrm{M}: \ \ & l_s \to \frac{l_{11}^{3/2}}{{R_{10}}^{1/2}}, \ \ g_s :\to \frac{R_{10}^{3/2}}{l_{11}^{3/2}}, \\ \mathrm{M} \to \mathrm{IIA}: \ \ & R_x \to g_s l_s, \qquad l_{11} \to {g_s}^{1/3} l_s. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Во второй строке подразумевается редукция вдоль направления x. На Рис. 5.1 эти правила представлены графически в виде черных стрелок для бран с $\alpha \leqslant 3$. В дальнейшем изложении мы подробно рассматриваем решения SL(5) исключительной и двойной, соответствующие бранам, обведенным окружностью на Рис. 5.1. В явном виде строим преобразование U-дуальности между 5^3-браной и KK6-монополем, обозначенное пунктирной линией на Рис. 5.1.

5.1.2 Экзотические NS 5-браны

Рассмотрим более подробно орбиту группы T-дуальности $5^0_2 - 5^1_2 - 5^2_2 - 5^3_2$ в терминах преобразований между решениями уравнений супергравитации. 5^0_2-брана (или в более стандартных обозначениях NS5-брана) является источником решения уравнений 10-мерной супергравитации типа II, характеризующегося нетривиальной метрикой и полем Калба–Рамона B_2 магнитного типа. В струнной картине решение имеет вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= {ds_{056789}}^2 + H(R)^2 ds^2_{1234}, \\ B_{056789} &= H(R)^{-1} - 1, \\ e^{-2(\varphi-\varphi_0)} &= H(R), \quad \varphi_0 = \mathrm{const}, \\ H(R) &= 1 + \frac{h}{R^2}, \end{aligned} \tag{5.24}$$

где $R^2 = \sum_{i=1}^4 (x^i)^2$, постоянная h зависит от натяжения браны и ее конкретный вид несущественен для последующей дискуссии. Потенциал B_6 является магнитно дуальным полю Калба–Рамона и определяется следующими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
IIA:&\quad H_7 = dB_6 - C_1 \wedge G_6 + C_3 \wedge G_4 - C_5 \wedge G_2,\\
IIB:&\quad H_7 = dB_6 - C_0 \wedge G_7 + C_2 \wedge G_5 - C_4 \wedge G_3 - C_6 \wedge G_1,\\
&\quad G_p = dC_{p-1} - H_3 \wedge C_{p-3},
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

где $H_7 = e^{-2\varphi} * H_3$ и $H_3 = dB_2$. Соотношения выше получаются из уравнений супергравитации на поле B_2, которые принимают вид тождеств Бьянки для 6-формы $ddB_6 \equiv 0$. Функция $H(R)$ является гармонической в четырехмерном пространстве трансверсальном к бране и удовлетворяет уравнению

$$\triangle H = h\delta^{(4)}(x^i). \tag{5.26}$$

Ниже под NS5-браной будем понимать именно такое решение уравнений супергравитации, порожденное источником — собственно NS5-браной, фундаментальным объектом теории струн.

В стандартном подходе правила Бушера могут быть применены только вдоль изометрических направлений решения. Однако, T–дуализация решения (5.24) вдоль очевидных изометрий, соответствующих направлениям пространственного объема браны, не меняют решения. Заметим, что благодаря такой инвариантности NS5-браны, теория на мировом объеме NS5-браны (малая теория струн) также обладает симметриями T-дуальности, как и полная теория струн [176, 177]. Для воспроизведения решения KK5-монополя следует T–дуализировать NS5-брану вдоль трансверсальных направлений, для чего необходимо организовать изометрическое направление путем размазывания решения вдоль, например, $x^4 = z$. Процедура размазывания основана на том факте, что NS5-браны являются 1/2БПС объектами и, соответственно, не взаимодействуют друг с другом [178, 99]. Это позволяет рассмотреть бесконечный набор NS5-бран, расставленных вдоль оси x^4 с периодом R^4. Поля от такой конфигурации являются простой суммой полей каждой браны и соответствующее решение характеризуется гармонической функцией

$$H = 1 + \sum_n \frac{h}{\sqrt{r^2 + (x^4 + R^4 n)^2}}, \tag{5.27}$$

где $r^2 = \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$. В пределе $R^4 \to 0$ получаем непрерывное распределение заряда NS5-браны вдоль оси x^4, и гармоническая функция принимает вид

$$H = 1 + \frac{h}{r}. \tag{5.28}$$

Константа h, вообще говоря, теперь другая хотя бы по соображениям размерности, однако, будем использовать те же обозначения, чтобы не перегружать формулы. Такая гармоническая функция решает уравнение Пуассона в трех измерениях, а полное решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds^2_{056789} + H ds^2_{1234}, \\ B_2 &= A \wedge dz, \\ e^{-2(\varphi-\varphi_0)} &= H^{-1}. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Решение удобнее записывать в терминах 2-формы, а не 6-формы, которая, однако, имеет вид магнитного потенциала, поскольку определяется 1-формой $A = A_i dx^i$, удовлетворяющей уравению

$$2\partial_{[i}A_{j]} = \varepsilon_{ijk}\partial_k H. \tag{5.30}$$

Действительно, определив поле напряженности $\vec{\mathcal{H}} = \mathrm{rot}\vec{A}$, получим $\mathrm{div}\vec{\mathcal{H}} = \triangle H = h\delta^{(3)}(r)$. Таким образом, справедливо называть решение (5.29) H-монополем. Полный магнитный заряд H-монополя равен $Q_H = 2\pi R^4 h$, и естественно равен заряду неразмазанной NS5-браны.

Таблица 15 — Под действием Т-дуальности (размазанная) NS5-брана, ориентированная вдоль направлений, обозначенных $\times$, переходит в калуца–кляйновский монополь и 5^2_2-брана. Знак $\odot$ обозначает специальные Taub–NUT циклы.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5	·	·	·	·	×	×	×	×	×
KKM	·	·	·	$\odot$	×	×	×	×	×
5^2_2	·	·	$\odot$	$\odot$	×	×	×	×	×

Применим теперь преобразование Т-дуальности вдоль компактного направления z. Результатом будет решение КК-монополя

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds^2_{056789} + H ds^2_{123} + H^{-1}(dx^4 + A)^2, \\ B &= 0. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Здесь потенциал магнитного поля A_i оказывается компонентой g_{i4} метрического тензора. Соответственно, КК–мопоноль имеет гравимагнитный заряд, оправдывая свое название. Такое решение характеризуется нулевым H-флаксом, при этом геометрический флакс (коэффициенты неголономичности базиса) $f^z{}_{ij}$ оказывается неравным нулю.

Поскольку КК5-монополь не преобразуется при Т-дуальности вдоль его продольных направлений, чтобы двигаться далее вдоль орбиты, следует его размазать вдоль, например, направления x^3. Такая процедура уменьшает количество трансверсальных направлений до двух, и соответствующая гармоническая функция оказывается логарифмически расходящейся. Это стандартное свойство всех решений коразмерности два, которое означает необходимость их доопределения на бесконечности. Конкретная реализация такого доопределения нас здесь не интересует, поэтому ограничимся введением обрезания Λ по радиальной координате ρ на бесконечности. Тогда гармоническую функцию можно записать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&H = 1 + h \log \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + \rho^2}}{\rho^2} \approx h_0 + h \log \frac{\mu}{\rho}, \\
&\rho^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2.
\end{aligned} \tag{5.32}
$$

Первое выражение в первой строке расходится при $\Lambda \to \infty$, однако, может быть записано в терминах “голой” величины h_0, которая тоже считается расходящейся в рассматриваемом пределе, и некоторой “шкалы перенормировки” μ (см. [10]). Уравнение (5.30) имеет в таком случае простое решение $A = -h\theta dx^3$,где θ — полярный угол в плоскости (x^1,x^2). Заметим, что обход вокруг КК5-монополя, т.е. вокруг начала координат, на угол $\theta \to \theta + 2\pi$ сдвигает компоненты поля A на константу. Глобальная определенность метрики таким образом требует введение склеивающего преобразования при таком обходе

$$
\begin{aligned}
x^3 &\to x^3 - 2\pi h x^4, \\
x^4 &\to x^4.
\end{aligned} \tag{5.33}
$$

В случае КК-монополя склеивающим преобразованием является преобразование координат. Не так дело обстоит для 5^2_2-браны, фоновое пространство которой получается из размазанного КК5-монополя Т-дуальностью вдоль x^3 и имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= H(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2) + \frac{H}{H^2 + \tilde{h}^2\theta^2} ds^2_{34} + ds^2_{056789}, \\
B^{(2)} &= \frac{\tilde{h}\theta}{H^2 + \tilde{h}^2\theta^2} dx^3 \wedge dx^4, \\
e^{2(\varphi - \varphi_0)} &= \frac{H}{H^2 + \tilde{h}^2\theta^2}.
\end{aligned} \tag{5.34}
$$

Обход вокруг начала координат преобразует метрику и B–поле так, что фоновое пространство в точках $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ склеивается при помощи некоторого O(2,2) преобразования. Действительно, заметим, что при сдвиге $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ преобразуются только компоненты метрики и B–поля в направлениях двумерного тора (x^3,x^4). Тогда, в терминах обобщенной метрики на двумерном торе преобразование имеет следующий вид:

$$\mathcal{H}(\theta' = \theta + 2\pi) = \mathcal{O}^{tr}\mathcal{H}(\theta)\mathcal{O}, \tag{5.35}$$

где матрица $\mathcal{O}$ представляет собой т.н. негеометрический β-сдвиг

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ \Delta\beta(\theta') & \mathbf{1}_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta\beta(\theta) = h\theta\, \partial_3 \wedge \partial_4. \tag{5.36}$$

Видим, что для глобальной определенности фонового пространства 5^2_2-браны следует функции склейки определять в группе дуальности O(2,2). Это значит, что, вообще говоря, понятие метрики и B-поля не определены глобально, глобально определено лишь понятие обобщенной метрики, что делает пространство негеометрическим. Такие же свойства имеют T-образия и U-образия, рассматриваемые в работах [179, 180, 181]. Экзотические браны являются источниками негеометрических фоновых пространств и взаимодействуют с потенциалами смешанной симметрии.

Вернемся теперь к вопросу логарифмической расходимости определяющей функции $H(\rho)$. Напомним, что гармоническая функция NS5-браны с обратной квадратичной зависимостью R^{-2} была преобразована в логарифмическую функцию, чтобы организовать изометрические направления, вдоль которых может действовать T-дуальность в стандартном формализме правил Бушера. Однако, в двойной теории поля T-дуальность является лишь частным случаем преобразования координат обобщенного пространства и соответствует замене координаты x на ей дуальную $\tilde{x}$. В таком подходе, зависимость гармонической функции у всех представителей орбиты NS5-браны будет всегда оставаться обратно квадратичной, но при T-дуальности будет возникать зависимость от дуальных координат:

$$\frac{1}{R^2} \;\rightarrow\; \frac{1}{r^2 + (\tilde{x}_4)^2} \;\rightarrow\; \frac{1}{\rho^2 + (\tilde{x}^3)^2 + (\tilde{x}_4)^2} \;\rightarrow\; \cdots, \tag{5.37}$$

где обозначения R,r,ρ такие же, как и для решений выше. Более подробно интерпретация подобной зависимости решений от дуальных координат в рамках подхода двойной теории поля будет дана в следующей главе. Здесь же остановимся на интерпретации зависимости от дуальной координаты $\tilde{x}_4$ фонового пространства, получающегося формальным применением правил Бушера к полному решению NS5-браны и замене $x^4 \longrightarrow \tilde{x}_4$.

Задача о получении T–дуального решения для NS5-браны на фоне пространства с компактным но неизометричным направлением x^4 была рассмотрена в работах [182, 183] и позднее более подробно изучена в работе [184, 185]. В последней было показано, что поправки к объемлющему пространству двумерной сигма–модели на фоне обычного KK5-монополя от инстантонов на мировом листе дают решение т.н. локализованного KK5-монополя с зависимостью от дуальной координаты, как описано выше. Продемонстрируем это наблюдение при помощи простого вычисления, следуя [182]. Гармоническая функция NS5-браны на фоне пространства с компактным направлением, параметризуемом (угловой) координатой z имеет вид

$$
\begin{aligned}
H(x^i,z) &= 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h}{r^2 + (z + 2\pi k)^2} \\
&= 1 + \frac{h}{2r}\frac{\sinh r}{\cosh r - \cos z}.
\end{aligned} \tag{5.38}
$$

Действительно, такая ситуация эквивалентна бесконечному количеству NS5-бран, расставленных периодически вдоль (некомпактного) направления z. Вместо взятия предела малого радиуса, который нас приведет к непрерывному распределению NS5-бран, разложим выражение в ряд Фурье

$$
H(x^i,z) = 1 + \frac{h}{2r}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kr+ikz} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kr-ikz}\right). \tag{5.39}
$$

Полученное выражение действительно имеет вид суммирования по инстантонным поправкам к гармонической функции H-монополя с действием для инстантонов $S_{\text{inst}} = kr \pm ikz$. Более строго это было показано в работе [184] прямым вычислением инстантонных поправок в $\mathcal{N} = (4,4)$ линейной сигма–модели и поправки от фермионной вершины к тензору Римана объемлющего пространства. Таким образом видим, что струнные инстантонные поправки локализуют фоновое пространство H-монополя до полного решения NS5-браны.

Естественно, то же вычисление можно повторить для KK5-монополя, что и было проделано в работе [185, 186]. В том же подходе линейной сигма–модели было показано, что локализованный KK5-монополь имеет вид решения, формально T–дуального NS5-бране с заменой $z \longrightarrow \tilde{z}$. Причем, $\tilde{z}$ должна быть интерпретирована именно как дуальная координата в смысле мод намоток. Такие же результаты для 5^2_2-браны (5.34) (которую логично называть Q-монополем) были получены в работе [187]. В дальнейшем размазанные решения будем называть монополями, полные локализованные решения будем называть бранами.

5.1.3 Некоммутативность и неассоциативность замкнутых струн

Сравнивая нетривиальную монодромию для 5^2_2-браны, параметризованную β-сдвигом и замечая, что фоновое пространство для дважды размазанной NS5-браны при таком же обходе вокруг начала координат склеивается калибровочным преобразованием $B \longrightarrow B + h\theta dx^3 \wedge dx^4$, естественно перейти для 5^2_2-браны к параметризации в терминах бивектора β^{mn}. Такая параметризация является альтернативным представлением элемента $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$ фактор-группы $\mathrm{O}(d,d)/\mathrm{O}(d) \times \mathrm{O}(d)$ ($d = 4$ в нашем случае), соответствующей верхнетреугольной параметризации обобщенного репера. Напомним, что стандартная параметризация, соответствующая полям супергравитации типа II, выглядит следующим образом:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{MN}} = E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} E_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{B}} \mathcal{H}_{\mathcal{AB}}, \quad E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} e_m{}^a & 0 \\ B_{mp} e_b{}^p & e_b{}^n \end{bmatrix}, \tag{5.40}$$

где индексы $m,n = 1,\ldots,d$ и $a,b = 1,\ldots,d$ нумеруют координаты пространства и векторы базиса в касательном пространстве соответственно. В верхнетреугольной калибровке для обобщенного репера имеем:

$$E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_m{}^a & \tilde{e}_p{}^a \beta^{pn} \\ 0 & \tilde{e}_b{}^n \end{bmatrix}. \tag{5.41}$$

Конечно, формулировка двойной теории поля не зависит от выбранной параметризации для представителя фактор-пространства, однако, от нее зависит интерпретация теории, как теории в обычном d-мерном пространстве. Для нижнетреугольной параметризации после решения условия проекции имеем стандартную супергравитацию типа II, тогда как в верхнетреугольной параметризации имеем некоторую теорию поля для метрики $\tilde{g}_{mn}$ и бивектора

β^{mn}. Свойства такой теории, названной β-супергравитацией, были проанализированы в работах [153, 154, 155, 188]. Правильно будет думать, что β-супергравитация (по-крайней мере, ее бозонный сектор) является формулировкой стандартной супергравитации в терминах других полей. Такая формулировка оказывает удобной для описания негеометрических фоновых пространств экзотических бран. Так, для 5^2_2-браны имеем

$$\begin{aligned} ds^2 &= H(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2) + H^{-1} ds^2_{34} + ds^2_{056789}, \\ \beta &= h\theta \frac{\partial}{\partial x^3} \wedge \frac{\partial}{\partial x^4}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Негеометрическим флаксом, ассоциированным с таким пространством, будет т.н. Q-флакс, который в терминах бивектора определяется как ${Q_m}^{kl} = \nabla_m \beta^{kl}$. Для решения выше имеем только одну компоненту ${Q_\theta}^{34}$. Следует отметить, что для 5^2_2-браны в формулировке (5.34) определить понятие Q-флакса оказывается затруднительно без привлечения формализма двойной теории поля. Ниже вычисление геометрических и негеометрических флаксов через обобщенный тензор кручения будет рассмотрено более подробно. Заметим, что несмотря на формально хорошую глобальную определенность решения (5.42), оно все еще является негеометрическим, поскольку сформулировано в терминах бивекторного поля, которое не является калибровочным. Его преобразования оказываются сильно нелинейными и включают компоненты метрики.

Интересно, что в терминах метрики и B–поля переход к верхнетреугольной параметризации может быть записан в виде

$$\tilde{G}^{-1} + \beta = (G + B)^{-1}, \tag{5.43}$$

напоминающем связь между метрикой, наблюдаемой открытой (слева) и замкнутой (справа) струны. В такой интерпретации бивектор β^{mn} оказывается параметром некоммутативности для координат концов открытой струны:

$$[X^m, X^n] = 2\pi\alpha' \beta^{mn}. \tag{5.44}$$

Возникновение некоммутативности в теории открытых струн на фоне с ненулевым полем Калба–Рамона является известным свойством, которое было обнаружено в работе [189] для матричной модели на торическом фоне, и в работах [190, 191, 192, 193] для теории открытых струн и D-бран. В случае постоянного параметра некоммутативности, бивектор задает пуассонову структуру на мировой поверхности соответствующей D-браны. В более общем случае, когда тождество Якоби не выполняется, структура не является пуассоновой, а соответствующая геометрия оказывается неассоциативной [194, 195].

Рассматриваемые выше решения предоставляют фоновые пространства для замкнутой струны, которая, вообще говоря, не должна проявлять свойства некоммутативности или неассоциативности для стандартных решений, типа NS5-браны. С другой стороны, монодромия вокруг 5_2^2-браны параметризуется бивектором, что позволяет предположить некоммутативность замкнутой струны на фоне экзотической браны. Действительно, в работах [196, 197, 198, 198, 199] прямым вычислением коммутатора координат на фоне T-образия с нетривиальной монодромией было показано, что координаты замкнутой струны не коммутируют. При этом, коммутатор оказывается пропорционален Q-флаксу, определенному выше:

$$[X^m,X^n] = iQ_k{}^{mn}w^k, \tag{5.45}$$

где w^k — моды намоток струны. Видимо, что некоммутативность для замкнутых струн является нелокальным эффектом по причине явной зависимости коммутатора от мод намоток. При этом для геометрического фонового пространства некоммутативными являются дуальные координаты. Далее, фоновое пространство 5_2^3-браны для координат замкнутой струны оказывается неассоциативным:

$$[X^m,X^n] = iR^{mnk}p_k, \tag{5.46}$$

где p_k — канонический импульс для координаты X^m. Пользуясь каноническими коммутационными соотношениями, видим, что ассоциатор координат пропорционален т.н. R-флаксу $[X^m,X^n,X^k] = R^{mnk}$. Решение уравнений двойной теории поля, соответствующее 5_2^3-бране, более подробно будет рассмотрено ниже. В последнее время задача изучения динамики открытых и замкнутых струн на фоне с нетривиальными флаксами и свойства некоммутативности и неассоциативности вызывает большой интерес. Обзоры современного состояния этой области науки можно найти в [200, 201, 202].

5.2 Решения с экзотическими источниками

Рассмотренные выше полевые конфигурации являются решениями уравнений стандартной супергравитации, при этом негеометрические решения, соответствуя объектам коразмерности 2, характеризуются логарифмическими расходимостями определяющей функции около ядра и на бесконечности. Поправки от инстантонов на мировом листе струны способны исправить эту ситуацию, локализуя решение вдоль специальных Taub–NUT циклов и изменяя зависимость от координат на степенную. При этом, однако, конфигурация перестает быть решением уравнений супергравитации. Покажем, что такие локализованные конфигурации, зависящие от дуальных координат, являются решением уравнений двойной теории поля. То же верно для экзотических бран M-теории, фон вокруг локализованных версий которых решает уравнения исключительной теории поля. Описываемые ниже результаты показывают, что расширенные теории поля являются не просто ковариантным переписыванием теории супергравитации, но, например, несут информацию о (некоторых) непертурбативных эффектах на мировом листе струны за счет допустимой зависимости от дуальных координат. Изложение ниже основано на работе [203], где показано, что определенные вложения DFT-монополя в удвоенное пространство описывают экзотические 5_2^a-браны с $a = 2,3,4$, локализованные в дуальном пространстве, и дана интерпретация в терминах инстантонных поправок. Решение DFT-монополя было предложено ранее в литературе [204]. Локализованные экзотические браны M-теории и соответствующее решение монополя в SL(5) и $\mathrm{E}_{7(7)}$ теориях были рассмотрены в работах [205, 206]. Обзоры полученных результатов можно найти в [207, 208, 209]. Ниже рассматриваются монополи двойной тории поля и SL(5) теории, подробное описание монополя $\mathrm{E}_{7(7)}$ теории и соответствующих орбит U-дуальности описаны в диссертации Р. Отсуки [210].

5.2.1 DFT-монополь

Динамика полной O(10,10) двойной теории поля формулируется в терминах уравнений для обобщенной метрики $\mathcal{H}_{MN}$ и обобщенного дилатона d, которые связаны с полями стандартной супергравитации следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{MN} &= \begin{bmatrix} g_{\mu\nu} - B_\mu{}^\rho B_{\rho\nu} & B_\mu{}^\nu \\ B_\mu{}^\nu & g^{\mu\nu} \end{bmatrix}, \\ d &= \varphi - \frac{1}{4}\det ||g_{\mu\nu}||,\end{aligned} \tag{5.47}$$

где индексы $\mu,\nu = 0,\ldots,9$. При такой параметризации и таком решении условия проекции, что поля зависят только от геометрических координат, уравнения двойной теория поля воспроизводят таковые для супергравитации. Поэтому, подставляя в (5.47) поля $g_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ и φ, решающие уравнения супергравитации, получим обобщенные метрику и дилатон, решающие уравнения двойной теории поля. В таком виде применение T-дуальности вдоль направления, например, $\mu = 1$ соответствует перестановке столбцов и строк с номерами $_\mu = {}_1$ (нижний индекс) и $^\mu = {}^1$ (верхний индекс). Для удобства таких манипуляций представим обобщенную метрику в виде следующей формальной конструкции:

$$ds^2_{DFT} = (g_{\mu\nu} - B_\mu{}^\rho B_{\rho\nu})dx^\mu dx^\nu + 2B_\mu{}^\nu dx^\mu d\tilde{x}_\nu + g^{\mu\nu} d\tilde{x}_\mu d\tilde{x}_\nu, \tag{5.48}$$

называемой псевдоинтервалом. Важно отметить, что псевдоинтервал не является инвариантным относительно обобщенных диффеоморфизмов и не задает расстояние в обобщенном пространстве ни в каком смысле. Псевдоинтервал лишь предоставляет удобный формализм для применения T-дуальности к обобщенной метрике.

Для вложения решения H-монополя в двойную теорию поля обозначим координаты следующим образом:

$$\begin{aligned}\{x^\mu\} &= \{x^0,\ldots,x^5,y^1,y^2,y^3,z\}, \\ \{\tilde{x}_\mu\} &= \{\tilde{x}_0,\ldots,\tilde{x}_5,\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\tilde{y}_3,\tilde{z}\}.\end{aligned} \tag{5.49}$$

Считая теперь координаты $\tilde{x}_\mu$ негеометрическими, а x^μ — геометрическими, можем записать обобщенную метрику для H-монополя в виде

$$\begin{aligned} ds^2_{DFT} &= H(1+H^{-2}A^2)dz^2 + H^{-1}d\tilde{z}^2 + 2H^{-1}A_i(dy^i d\tilde{z} - \delta^{ij}d\tilde{y}_j dz) \\ &\quad + H(\delta_{ij} + H^{-2}A_iA_j)dy^i dy^j + H^{-1}\delta^{ij}d\tilde{y}_i d\tilde{y}_j \\ &\quad + \eta_{rs}dx^r dx^s + \eta^{rs}d\tilde{x}_r d\tilde{x}_s, \\ e^{-2d} &= He^{-2\varphi_0}, \end{aligned} \tag{5.50}$$

где функции $H = H(y), A_i = A_i(y)$ определены соотношениями

$$\begin{aligned} H(y) &= 1 + \frac{h}{\sqrt{\delta_{ij}y^i y^j}}, \\ 2\partial_{[i}A_{j]} &= \varepsilon_{ijk}\partial_k H. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Индексы $r,s = 0,\ldots,5$ нумеруют направления вдоль браны, соответствующей решению, и им дуальные, координаты с индексами $i,j = 1,2,3$ и $z,\tilde{z}$ параметризуют трансверсальные к бране направления и им дуальные. Обобщенные метрика и дилатон, заданные выражениями (5.50) являются решениями уравнений двойной теории поля.

Заметим теперь, что геометрические и дуальные координаты входят в формализм совершенно эквивалентно, что означает симметричность решения (5.50) относительно любых перестановок любых пар $x^\mu \leftrightarrow \tilde{x}_\mu$. Например, если заменить y^1 везде на $\tilde{y}_1$ и наоборот, то выражение (5.50) останется решением уравнений двойной теории поля. Это довольно очевидное и тривиальное для обычной теории гравитации свойство оказывается существенно нетривиальным для двойной теории поля благодаря условию проекции. Действительно, согласно условию проекции любое решение уравнений двойной теории поля должно зависеть только от половины координат, однако, каждая из десяти координат может быть либо геометрической, либо дуальной, что дает множество решений, принадлежащих одной орбите T-дуальности. На примере решения (5.50) видим, что оно записано в терминах координат $(z,y^i,x^r,\tilde{z},\tilde{y}_i,\tilde{x}_r)$. Для идентификации полей супергравитации дополнительно требуется информация, какие из этих координат являются геометрическими, то есть входят в выражение для обычного интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{5.52}$$

Вообще говоря, следует ожидать существования конструкции подлинного инвариантного интервала и дополнительно условия проекции, которое в зависимости от его решения проецировало бы подлинный инвариантный интервал в физический. К сожалению, в настоящее время такая конструкция не известно, по какой причине мы будем ограничиваться алгоритмическим подходом. А именно, разложим координаты $\mathbb{X}^{\mathcal{M}}$ на удвоенном пространстве следующим образом:

$$\mathbb{X}^{\mathcal{M}} = (x^z, x^i, x^r, \tilde{x}_z, \tilde{x}_i, \tilde{x}_r), \tag{5.53}$$

причем, $x^{z,i,r}$ всегда являются геометрическими, а $\tilde{x}_{z,i,r}$ всегда являются дуальными. Дополнительно, следует отождествить координаты, параметризующие решение (5.50) с (5.53). В зависимости от способа отождествления будем получать разные решения, принадлежащие орбите H-монополя. Понятно, что замена $x^r \leftrightarrow \tilde{x}_r$ ничего не меняет, поэтому будем следить только за оставшимися четырьмя координатами.

Следует отметить, что вследствие симметрии струны относительно преобразований T-дуальности любая полевая конфигурация, получаемая проекцией DFT-монополя, является самосогласованным фоном для струны. Проще всего это увидеть в формализме двойной сигма-модели [103, 211], где за счет нарушения явной лоренцевой симметрии на мировом листе получается сформулировать теорию в O(10,10)–ковариантном виде.

H- и KK-монополи

Рассмотрим в качестве примера самый очевидный вариант отождествления:

$$(x^i, x^z, \tilde{x}_i, \tilde{x}_z) = (y^i, z, \tilde{y}_i, \tilde{z}), \tag{5.54}$$

то есть (y^i, z) являются физическими координатами. Тогда, сравнивая (5.50) с разложением (5.48) находим, например, что члены

$$H^{-1}\delta^{ij} d\tilde{y}_i d\tilde{y}_j + H^{-1} d\tilde{z}^2 \tag{5.55}$$

задают компоненты g^{ij}, g^{iz}, g^{zz} обратной метрики. В итоге имеем поля $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \varphi$ задающие решение H-монополя

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{rs}dx^r dx^s + H(dz^2 + \delta_{ij}dy^i dy^j),\\ B &= A_i dy^i \wedge dz,\\ e^{-2(\varphi-\varphi_0)} &= H^{-1}. \end{aligned} \tag{5.56}$$

В обозначениях [10, 60] мы получаем фоновое пространство для (размазанной) 5^0_2-браны. Как будет показано далее в Главе 5.2.1, обобщенный флакс двойной теории поля для такого отождествления дает правильные компоненты тензора напряжения $H_{zij} = \varepsilon_{ijk}\partial_k H$, индуцированного H-монополем.

Рассмотрим теперь альтернативное отождествление:

$$(x^i, x^z, \tilde{x}_i, \tilde{x}_z) = (y^i, \tilde{z}, \tilde{y}_i, z), \tag{5.57}$$

означающее, что $\tilde{z}$ является геометрической координатой. Тогда член $H^{-1}d\tilde{z}^2$ будет давать не компоненту g^{zz} обратной метрики, а комбинацию вида $g_{zz} - B_z{}^\mu B_{\mu z}$. Замена $z \leftrightarrow \tilde{z}$ на языке двойной теории поля означает T-дуальность вдоль направления z, и мы ожидаемо получаем решение KK5-монополя:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{rs}dx^r dx^s + H^{-1}(d\tilde{z} + A_i dy^i)^2 + H\delta_{ij}dy^i dy^j,\\ B &= 0,\\ e^{-2(\varphi-\varphi_0)} &= 1. \end{aligned} \tag{5.58}$$

Поднятие решений H– и KK5-монополя до единого решения уравнений двойной теории поля было рассмотрено в работе [204]. При этом, гармоническая функция $H = H(y^i)$ остается функцией геометрических координат.

Заметим, что мы для простоты здесь рассматриваем орбиту H-монополя, а не полной NS5-браны. Повторяя рассуждение для второго случая, мы уже на первом шаге пришли бы к гармонической функции $H = H(y^i, z)$, зависящей от одной дуальной координаты z. Здесь важно заметить, что сама определяющая функция не меняется, меняется только смысл координат, от которых она зависит. Если z является компактной координатой, то мы получим в точности решение для KK5-монополя, локализованного за счет инстантонных поправок. Таким образом, можно заключить, что двойная теория поля несет некоторую информацию о непертурбативных свойствах струны. В случае монопольных решений зависимость от дуальных координат появляется лишь на следующем шаге для экзотических 5^b_2-бран с $b = 2,3,4$. Рассмотрим соответствующие решения подробнее.

Q-монополь

Решение, соответствующее экзотической 5^2_2-бране получается из DFT-монополя отождествлением координат:

$$x^\mu = (\tilde{z}, y^1, y^2, \tilde{y}_3, x^r). \tag{5.59}$$

Сравнивая (5.50) с разложением (5.48) с учетом смысла координат получаем следующее 10-мерное фоновое пространство:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{rs} dx^r dx^s + \frac{H}{H^2 + A_3^2}\Big((d\tilde{z} + A_\alpha dy^\alpha)^2 + d\tilde{y}_3^2\Big) + H\delta_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta, \\ B &= \frac{A_3}{H^2 + A_3^2}(d\tilde{z} + A_\alpha dy^\alpha) \wedge d\tilde{y}_3, \\ e^{-2(\varphi-\varphi_0)} &= \frac{H}{H^2 + A_3^2}. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Здесь $\alpha,\beta = 1,2$ нумеруют координаты $y^{1,2}$. Заметим, что определяющая функция H не меняется и при любой проекции зависит от всё тех же y^1, y^2, y^3. Однако, теперь координата y^3 является дуальной, поэтому пишем

$$H = 1 + \frac{h}{\sqrt{\delta_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + (y^3)^2}}. \tag{5.61}$$

Видно, что так определенное фоновое пространство 5^2_2-браны не страдает от логарифмической расходимости в том же смысле, что и решение уравнений стандартной супергравитации. Считая координату y^3 компактной, получим определяющую функцию для 5^2_2-браны, локализованной в дуальном пространстве за счет инстантонных поправок. Такое решение, локализованное в направлениях y^3, z было получено в работе [187]. Заметим однако, что при локализации за счет инстантонных поправок на мировом листе, дуальная координата оказывается компактной, и определяющая функция зависит от нее через периодические функции, как в (5.38). В рассматриваемом формализме дуальные координаты, вообще говоря, не являются периодическими. Удовлетворительная интерпретация такой зависимости в терминах стандартного подхода к динамике струны в настоящее время не известна. Наконец, размазывая решение вдоль y^3 получим логарифмическую зависимость:

$$\begin{aligned} H &= 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h}{\sqrt{\delta_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + (y^3 + 2\pi k)^2}} \\ &\approx h_0 + h \log \frac{\mu}{\rho}, \end{aligned} \tag{5.62}$$

где $\rho^2 = \delta_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta$. При этом для метрики, B–поля и дилатона имеем известные выражения (5.34)

Рассмотрим теперь подробнее свойства полного решения. Решение обладает аксиальной симметрией, поскольку определяющая функция не зависит от (геометрической) координаты $\tilde{y}_3$. В таком случае удобно перейти к цилиндрическим координатам

$$\begin{aligned} y^1 &= \rho \cos\theta, \\ y^2 &= \rho \sin\theta. \end{aligned} \tag{5.63}$$

Уравнения (5.51) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho \partial_3 H &= \partial_\rho A_\theta - \partial_\theta A_\rho \\ 0 &= \partial_3 A_\rho - \partial_\rho A_3, \\ \rho \partial_\rho H &= \partial_\theta A_3 - \partial_3 A_\theta. \end{aligned} \tag{5.64}$$

С учетом фиксации калибровки $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ уравнения сводятся к уравнению Пуассона $\triangle \vec{A} = 0$. Уравнения имеют тот же вид, что и для KK5-монополя, поэтому решение имеет формально вид g_{iz} компоненты метрики Taub–NUT

$$A_\theta = h\left(1 - \frac{y^3}{\sqrt{\rho^2 + (y^3)^2}}\right), \tag{5.65}$$

с разницей, что y^3 — дуальная координата. Интересно, что в итоге решение оказывается чисто метрическим, т.е. поле Калба–Рамона B равно нулю. Метрика имеет следующий вид:

$$ds^2 = H^{-1}\left[\left(d\tilde{z} + A_\theta d\theta\right)^2 + d\tilde{y}_3^2\right] + H\left(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2\right). \tag{5.66}$$

Как и фоновое пространство KK5-монополя, полученное решение имеет Taub–NUT сингулярность, которая оказывается координатной, если координата $\tilde{z}$ компактна с определенным периодом. Поскольку мы стартовали с нелокализованного монополя, будем считать, что условие выполнено.

Интересно, что полученное пространство не обладает нетривиальной монодромией при обходе вокруг начала координат $\theta \to \theta + 2\pi$. При этом, его негеометричность выражена в явной зависимости от дуальных координат. Как будет показано далее, именно такая зависимость дает ненулевой Q-флакс даже в отсутствии бивекторного поля β^{mn}.

R-монополь

Возвращаясь к решениям уравнений стандартной супергравитации, заметим, что при размазывании решения для 5^2_2-браны с логарифмической расходимостью получим решение 5^3_2-браны с определяющей функцией, имеющей линейную расходимость. Как обсуждалось выше, координаты замкнутой струны на таком фоне оказываются некоммутативными, причем, ассоциатор оказывается также неравным нулю. Как и прежде, инстантонные поправки локализуют решение в дуальных направлениях. На языке двойной теории поля мы имеем следующее отождествление для геометрических координат:

$$x^{\mu} = (\tilde{z}, y^1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, x^r). \tag{5.67}$$

В верхнетреугольной параметризации обобщенной метрики решение DFT-монополя принимает вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{rs} dx^r dx^s + H^{-1}\left(d\tilde{z}^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2\right) + H(dy^1)^2, \\ \beta^{\theta z} &= A_\theta = h\left(1 - \frac{y^1}{\sqrt{\tilde{\rho}^2 + (y^1)^2}}\right), \\ e^{-2(\varphi-\varphi_0)} &= 1. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Здесь мы выбираем цилиндрическую систему координат в дуальном и обычном пространстве следующим образом:

$$\begin{aligned} x^2 = \tilde{y}_2 = \rho\cos\theta, \quad \tilde{x}_2 = y^2 = \tilde{\rho}\cos\tilde{\theta}, \\ x^3 = \tilde{y}_3 = \rho\sin\theta, \quad \tilde{x}_3 = y^3 = \tilde{\rho}\sin\tilde{\theta}. \end{aligned} \tag{5.69}$$

Заметим, что радиус $\tilde{\rho}$ в плоскости дуальных координат $(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ не является дуальной координатой к радиусу ρ, поскольку инвариантная метрика более не является косо-блочно-диагональной, а условие проекции не записывается в виде $\partial_\rho \otimes \tilde{\partial}^{\tilde{\rho}} = 0$. Видим, что решение зависит от двух дуальных и одной геометрической координаты. Таким же образом можно получить решение для 5^4_2-браны, которая является объектом коразмерности 0 с точки зрения стандартной супергравитации, и соответствует постоянному фону. После локализации такое решение будет зависеть только от дуальных координат.

Обобщенный флакс

В терминах компонент флаксов, появляющихся в правой части коммутационных соотношений для геометрических и дуальных координат замкнутой струны, орбиту T-дуальности (размазанной) NS5-браны можно представить в виде следующей схемы:

$$H_{abc} \longleftrightarrow f^a{}_{bc} \longleftrightarrow Q_a{}^{bc} \longleftrightarrow R^{abc}. \tag{5.70}$$

Поскольку эти тензоры имеют ненулевые компоненты только вдоль четырех направлений, трансверсальных бране, будем для простоты отбрасывать шесть оставшихся координат вдоль мирового объема.

Поднятие решений уравнений супергравитации до решений уравнений двойной теории поля и локализации их в дуальных направлениях позволяет вычислить флаксы для каждой из конфигураций прямым способом. Для начала обратим внимание на решение KK5-монополя, которое является чисто метрическим. Соответствующий флакс представлен коэффициентами анголономии, определяемыми как

$$[e_a,e_b] = f_{ab}{}^c e_c, \tag{5.71}$$

где $e_a = e_a{}^m \partial_m$ — базисные векторы, дуальные формам Маурера–Картана. Поскольку решение DFT-монополя также формулируется только в терминах (обобщенной) метрики, естественно определить обобщенные флаксы следующим образом:

$$\begin{gathered}
[E_{\mathcal{B}},E_{C}]^{\mathcal{M}}_{C} = \mathcal{F}^{A}{}_{\mathcal{B}C} E^{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}, \\
[E_{\mathcal{A}},d] = \mathcal{F}_{\mathcal{A}} d,
\end{gathered} \tag{5.72}$$

что в компонентах дает

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{\mathcal{A}}{}_{\mathcal{B}\mathcal{C}} &= 2E^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}}E^{\mathcal{N}}_{[\mathcal{B}}\partial_{\mathcal{N}}E^{\mathcal{M}}_{\mathcal{C}]} - E^{\mathcal{A}}_{\mathcal{M}}\eta^{\mathcal{M}\mathcal{N}}\eta_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\partial_{\mathcal{N}}E^{\mathcal{K}}_{[\mathcal{B}}E^{\mathcal{L}}_{\mathcal{C}]},\\
\mathcal{F}_{\mathcal{A}} &= \partial_{\mathcal{M}}E^{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}} + 2E^{\mathcal{M}}_{\mathcal{A}}\partial_{\mathcal{M}}d.
\end{aligned}
\tag{5.73}
$$

Компоненты обобщенного репера в верхне- и нижнетреугольном базисе заданы выражениями (5.41) и (5.40) соответственно.

Обобщенный флакс $\mathcal{F}_{AB}{}^{C}$, или он же записанный в пространственных индексах $\mathcal{F}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{K}$ содержит все флаксы: (5.70)

$$
\begin{aligned}
[E_a,E_b]_C &= \mathcal{F}_{abc}E^c + \mathcal{F}_{ab}{}^{c}E_c,\\
[E_a,E^b]_C &= -\mathcal{F}_{ac}{}^{b}E^c + \mathcal{F}^{bc}_{a}E_c,\\
[E^a,E^b]_C &= \mathcal{F}^{ab}_{c}E^c + \mathcal{F}^{abc}E_c.
\end{aligned}
\tag{5.74}
$$

В явном виде для компонент обобщенного флакса имеем:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{abc} &= 3\left[\nabla_{[a}B_{bc]} - B_{d[a}\tilde{\nabla}^{d}B_{bc]}\right],\\
\mathcal{F}_{ab}{}^{c} &= 2\Gamma_{[ab]}{}^{c} + \tilde{\nabla}^{c}B_{ab} + 2\Gamma^{lc}{}_{[a}B_{b]l} + \beta^{cd}\mathcal{F}_{dab},\\
\mathcal{F}^{ab}_{c} &= 2\Gamma^{[ab]}{}_{c} + \partial_c\beta^{ab} + B_{cd}\tilde{\partial}^{l}\beta^{ab} + 2\mathcal{F}_{dc}{}^{[a}\beta^{b]d} - \mathcal{F}_{dec}\beta^{da}\beta^{eb},\\
\mathcal{F}^{abc} &= 3\left[-\beta^{d[a}\nabla_{d}\beta^{bc]} + \tilde{\nabla}^{[a}\beta^{bc]} + B_{de}\tilde{\nabla}^{e}\beta^{[ab}\beta^{c]d} - \beta^{d[a}\beta^{b|e|}\tilde{\nabla}^{c]}B_{de}\right]\\
&\quad + \beta^{ad}\beta^{be}\beta^{cf}\mathcal{F}_{def},\\
\mathcal{F}_{a} &= -\tilde{\nabla}^{b}B_{ab} - \Gamma^{cd}{}_{a}B_{cd} - \Gamma_{ca}{}^{c} + 2B_{ac}\tilde{\nabla}^{c}d + 2\nabla_{a}d,\\
\mathcal{F}^{a} &= -\Gamma^{ca}{}_{c} + \tilde{\nabla}^{c}\beta^{al}B_{cd} - \Gamma^{da}{}_{b}\beta^{bc}B_{cd} - \beta^{ac}\tilde{\nabla}^{d}B_{cd} + 2\tilde{\nabla}^{a}d + 2\beta^{ac}B_{cd}\tilde{\nabla}^{d}d\\
&\quad + 2\beta^{ab}\nabla_{b}d - \nabla_{b}\beta^{ab} - \Gamma_{cd}{}^{a}\beta^{cd},
\end{aligned}
\tag{5.75}
$$

где мы вводим следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
B_{ab} &= e_a{}^{m}e_b{}^{n}B_{mn}, & \beta^{ab} &= e_m{}^{a}e_n{}^{b}\beta^{mn},\\
\partial_a &= e_a{}^{m}\partial_m, & \tilde{\partial}^{a} &= e_m{}^{a}\tilde{\partial}^{m},\\
\nabla_a B_{bc} &= \partial_a B_{bc} + 2\Gamma_{a[b}{}^{l}B_{c]d}, & \tilde{\nabla}^{a}B_{bc} &= \tilde{\partial}^{a}B_{bc} - 2\Gamma^{ad}{}_{[b}B_{c]d},\\
\nabla_a\beta^{bc} &= \partial_a\beta^{bc} - 2\Gamma_{ad}{}^{[b}\beta^{c]d}, & \tilde{\nabla}^{a}\beta^{bc} &= \tilde{\partial}^{a}\beta^{bc} + 2\Gamma^{a[b}{}_{d}\beta^{c]d}.
\end{aligned}
\tag{5.76}
$$

Наконец, символы $\Gamma_{ab}{}^{c}$ и $\Gamma^{ab}{}_{c}$ определяются производными от репера по обычными и дуальным координатам:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{ab}{}^{c} &= e_a{}^{m}\partial_m e_b{}^{n}e^{c}{}_{n},\\
\Gamma^{ab}{}_{c} &= e^{a}{}_{m}\tilde{\partial}^{m}e^{b}{}_{n}e_c{}^{n}.
\end{aligned}
\tag{5.77}
$$

Видим, что так определенные флаксы отличаются от обычных выражений на члены, содержащие производные по дуальным координатам. Например, $\mathcal{F}_{abc}$ содержит стандартный член $H_{abc} = 3\nabla_{[a}B_{bc]}$ и квадратичное слагаемое $B_{d[a}\tilde{\nabla}^{d}B_{bc]}$. Для NS5-браны второе равно нулю и $\mathcal{F}_{abc}$ воспроизводит ожидаемый результат. То же верно для (локализованного) KK5-монополя. Для экзотических же бран 5_2^b с $b = 2,3,4$, фоновые поля которых содержат либо зависимость от дуальной координаты, либо нетривиальное поле β^{mn}, выражения выше служат определением флакса.

Вычислим компоненты обобщенного флакса для различных ориентаций DFT-монополя. Для полноты картины начнем с потоков тензора напряженности поля Калба–Рамона, индуцированного солитонной NS5-браной:

$$\mathcal{H}_{\bar{z}\bar{a}\bar{b}} = 2e^{z}{}_{\bar{z}}e^{k}{}_{\bar{a}}e^{l}{}_{\bar{b}}\partial_{[k}A_{l]}, \quad \mathcal{F}^{\bar{a}}{}_{\bar{b}\bar{c}} = -\delta^{\bar{a}}{}_{[\bar{b}}\mathfrak{f}_{\bar{c}]}, \quad \mathcal{F}_{\bar{a}} = \frac{3}{2}\,\mathfrak{f}_{\bar{a}}, \tag{5.78}$$

где $\mathfrak{f}_{\bar{a}} = H^{-1}\partial_{\bar{a}}H$. Ожидаемо, решение H-монополя взаимодействует с магнитным полем, заданным компонентами тензора $\mathcal{H}_{zkl}$.

Для KK5-монополя поле Калба–Рамона равно нулю и под соответствующим флаксом понимаются компоненты тензор неголономичности репера:

$$\mathcal{F}^{\bar{a}}{}_{\bar{b}\bar{c}} = 2e^{\bar{a}}{}_{z}e^{k}{}_{\bar{b}}e^{l}{}_{\bar{c}}\partial_{[k}A_{l]} - \frac{1}{3}\delta^{\bar{a}}{}_{[\bar{b}}\mathfrak{f}_{\bar{c}]}, \quad \mathcal{F}_{\bar{a}} = -\frac{3}{2}\mathfrak{f}_{\bar{a}}. \tag{5.79}$$

Соответственно названию, KK-монополь взаимодействует с магнитным полем $\mathcal{F}^{z}{}_{ij}$, являющимся тензором напряженности для калибровочного потенциала $A_i = g_{zi}$.

Здесь следует отметить, что неравенство «тромбона» нулю не должно смущать читателя, поскольку речь идет не о компонентах тензора погружения, которые считаются постоянными, а о компонентах тензора напряженности. Разница в том, что в терминах тензора погружения говорят о схемах размерной редукции, для которой действительно компактные внутренние пространства не генерируют тромбон. Здесь же невозможность самосогласованно получить уравнения движения из вариации некоторого действия с ненулевым постоянным тромбоном. Напротив, в рассматриваемой ситуации, говоря о тромбоне, имеем в виду определенные компоненты обобщенного флакса, которые не являются постоянными. Соответствующая теория, являясь переписыванием двойной теории поля в других терминах, имеет хорошо определенное действие и может иметь ненулевой тромбон. Та же ситуация с исключительной теорией поля, рассматриваемой ниже.

Рассмотрим теперь негеометрические решения, первое из которых, Q-монополь, также является метрическим. Однако, поля теперь зависят от дуальной координаты y^3, что генерирует ненулевой Q-флакс:

$$
\begin{aligned}
Q_{\bar\alpha}{}^{\bar 3\bar z} &= \varepsilon_{\bar\alpha\bar\beta}H^{-1}\partial_{\bar\beta}H, & \mathcal{F}^{\bar\alpha}{}_{\bar 12} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\overline{\alpha\beta}}H^{-1}\partial_{\bar\beta}H\\
Q_{\bar\alpha}{}^{\bar\beta 3} &= -\frac{1}{2}\delta^{\bar\beta}{}_{\bar\alpha}H^{-\frac{3}{2}}\partial_3 H, & \mathcal{F}^{\bar 3}{}_{\bar\alpha 3} &= \frac{1}{2}H^{-1}\partial_{\bar\alpha}H,\\
Q_{\bar z}{}^{\bar z 3} &= \frac{1}{2}H^{-\frac{3}{2}}\partial_3 H, & \mathcal{F}^{\bar z}{}_{\overline{\alpha\beta}} &= -\varepsilon_{\overline{\alpha\beta}}H^{-\frac{3}{2}}\partial_3 H,\\
& & \mathcal{F}^{\bar z}{}_{\bar\alpha z} &= \frac{1}{2}H^{-1}\partial_{\bar\alpha}H,\\
\mathcal{F}^{\bar 3} &= \frac{3}{2}H^{-3/2}\partial_3 H & \mathcal{F}_{\bar\alpha} &= \frac{3}{2}H^{-1}\partial_{\bar\alpha}H.
\end{aligned}
\tag{5.80}
$$

Заметим, что здесь ∂_3 является производной по дуальной координате. Видно, что компоненты $Q_{\bar\alpha}{}^{\bar 3\bar z}$ имеют тот же вид, что и для 5^2_2 решения уравнений стандартной супергравитации. После размазывания вдоль дуальной координаты y^3, единственной ненулевой компонентой будет $Q_\theta{}^{z3} = h$.

Рассмотрим, наконец, R-монополь, характеризующийся ненулевым значением R-флакса:

$$
\begin{aligned}
R^{\bar z\overline{\alpha}\beta} &= \varepsilon^{\overline{\alpha}\beta}H^{-\frac{3}{2}}\partial_1 H, & Q_{\bar z}{}^{\bar z\alpha} &= Q_{\bar 1}{}^{\bar 1\alpha} = -\frac{1}{2}H^{-1}\tilde\partial^{\bar\alpha}H,\\
\mathcal{F}_{\bar a}{}^{\bar b\bar c} &= \delta_1{}^{[\bar b}\delta_{\bar a}{}^{\bar c]}H^{-\frac{3}{2}}\partial_1 H, & Q_{\bar\alpha}{}^{\bar\beta\gamma} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\bar\beta\gamma}\varepsilon_{\overline{\alpha}\delta}H^{-1}\tilde\partial^{\bar\delta}H,\\
& & Q_{\bar 1}{}^{\bar z\alpha} &= \varepsilon^{\overline{\alpha}\beta}H^{-1}\tilde\partial^{\bar\beta}H\\
\mathcal{F}^{\bar\alpha} &= \frac{3}{2}H^{-1}\tilde\partial^{\bar\alpha}H & \mathcal{F}_{\bar 1} &= \frac{3}{2}H^{-\frac{3}{2}}\partial_1 H,
\end{aligned}
\tag{5.81}
$$

где $\alpha,\beta = 2,3$, а $\tilde\partial^\alpha = \partial/\partial\tilde x_\alpha$. В терминах бивекторного поля β^{mn} R-флакс может быть записан в виде

$$
R^{\bar z\overline{\alpha}\beta} = -2\, e^{\bar z}{}_z e^{\bar\alpha}{}_\alpha e^{\bar\beta}{}_\beta \tilde\partial^{[\alpha}\beta^{\beta]z},
\tag{5.82}
$$

что согласовано с пониманием R-флакса, как негеометрического тензора напряженности.

5.2.2 Монополь SL(5)-теории и $6^{(3,1)}$-брана

Преобразование U-дуальности

Формализм, описанный выше, непосредственно обобщается на случай исключительных теорий поля и позволяет получать решения, соответствующие экзотическим бранам М-теории. Действительно, например, для SL(5)-теории можно по аналогии ввести псевдоинтервал

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \frac{1}{2}M_{,KL}d\mathbb{X}^{\cdot}d\mathbb{X}^{KL} \\
&= M_{5m,5n}dx^m dx^n + 2M_{5m,kl}dx^m d\mathbb{X}^{kl} + \frac{1}{2}M_{mn,kl}d\mathbb{X}^{mn}d\mathbb{X}^{kl},
\end{aligned}
\tag{5.83}
$$

и дополнительно к условию проекции правило отождествления четырех из десяти координат $\mathbb{X}^{MN}$ с координатами на геометрическом подпространстве расширенного пространства. Преобразуя геометрические координаты в негеометрические некоторым SL(5) преобразованием, получим орбиту для любого решения. Однако, здесь есть существенное отличие с предыдущей картиной, состоящее в том, что группы U-дуальности являются односвязными и не содержат дискретной подгруппы факторизованных дуальностей. При этом, исходя из преобразований 1/2БПС состояний максимальной алгебры суперсимметрии естественным аналогом факторизованных T-дуальностей будут вейлевские отражения.

Рассмотрим конкретный пример реализации такого отражения, отображающего КК6-монополь в негеометрическую $6^{(3,1)}$-брану, в рамках SL(5)-теории. В качестве преобразования U-дуальности выберем

$$
T^m \longrightarrow U^m{}_n T^n, \qquad U^m{}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.84}
$$

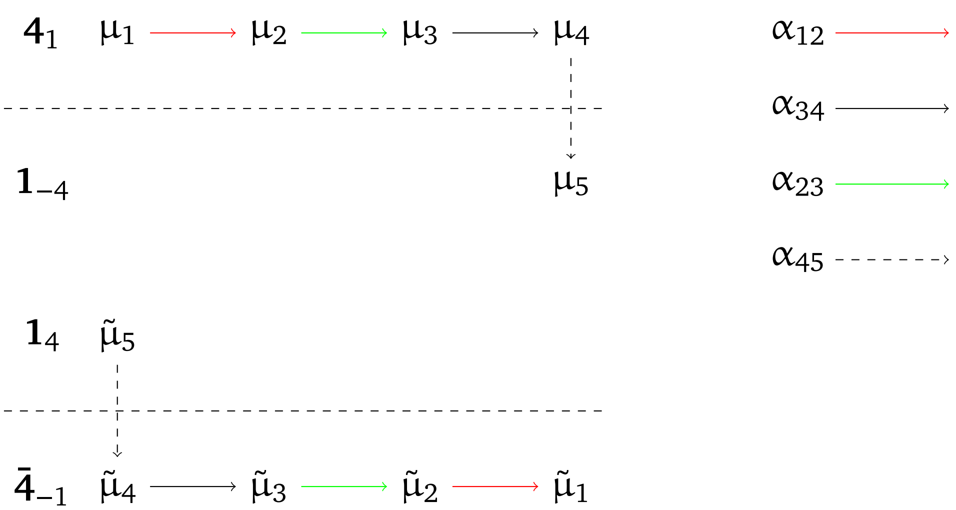

Рисунок 5.2 — Диаграмма весов фундаментального **5** и сопряженного фундаментальному $\bar{\mathbf{5}}$ представлений алгебры $\mathfrak{sl}(5)$. Веса объединены в представления подгруппы $\mathrm{SL}(4) \times \mathrm{GL}(1) < \mathrm{SL}(5)$, получаемой при удалении корня α_{45}. Старшими весами являются μ_1 и $\tilde{\mu}_5$ соответственно. Действие корней обозначено цветами в соответствии с легендой справа. Стрелки обозначают понижение веса.

соответствующее преобразованию T_{123} в терминологии Главы 2.4 (см. формулу (2.54)). Выбирая базис фундаментального представления в виде

$$\mu_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mu_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mu_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mu_5 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \tag{5.85}$$

получаем, что преобразование U выше соответствует вейлевскому отражению относительно корня α_{45}, отображающему вес μ_4 в μ_5. В ω-базисе фундаментальных весов координаты корней имеют вид:

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= (2, -1{,}0{,}0),\\
\alpha_{23} &= (-1{,}2, -1{,}0),\\
\alpha_{34} &= (0, -1{,}2, -1),\\
\alpha_{45} &= (0{,}0, -1{,}2).
\end{aligned} \tag{5.86}$$

Здесь нижние индексы показывают номера базисных векторов фундаментального представления, связанных действием соответствующего корня (см. Рис 5.2).

Фоновое пространство $6^{(3,1)}$-браны

Аналогично предыдущей главе ограничимся действием дуальности в направлениях трансверсальных к КК6-монополю. Считая вложение заданным координатами $(x^0,\ldots,x^6)$ вдоль мирового листа, координатами (y^1,y^2,y^3) в перпендикулярном направлении и координатой z вдоль специального цикла, имеем следующее решение:

$$
\begin{aligned}
&ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + h_{ab}dy^a dy^b,\\
&g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \qquad ||h_{ab}|| = \begin{bmatrix} H\delta_{ij} + H^{-1}A_iA_j & H^{-1}A_i \\ H^{-1}A_j & H^{-1} \end{bmatrix},\\
&H(y) = 1 + \frac{h}{r}, \qquad r^2 = \delta_{ij}y^iy^j.
\end{aligned}
\tag{5.87}
$$

Здесь индексы $\mu,\nu = 0,\ldots,6$; $a,b = 1,\cdots,4$, при этом $i,j = 1,2,3$ и $a = (i,z)$. Его поднятие до решения SL(5)-теорию задается вложением в Таблице 16.

	t	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	$\mathbb{X}^{15}$	$\mathbb{X}^{25}$	$\mathbb{X}^{35}$	$\mathbb{X}^{45}$	$\mathbb{X}^{ab}$
КК6	×	×	×	×	×	×	×	•	•	•	⊙	

Таблица 16 — Вложение КК6-монополя в расширенное пространство SL(5)-теории. Координаты $(x^\mu, \mathbb{X}^{a5})$ считаются геометрическими.

Под действием преобразования T_{123}, задаваемого матрицей U в выбранном базисе, координаты преобразуются следующим образом:

$$
\begin{bmatrix}
0 & \mathbb{X}^{12} & \mathbb{X}^{13} & \mathbb{X}^{14} & \mathbb{X}^{15}\\
-\mathbb{X}^{12} & 0 & \mathbb{X}^{23} & \mathbb{X}^{24} & \mathbb{X}^{25}\\
-\mathbb{X}^{13} & -\mathbb{X}^{23} & 0 & \mathbb{X}^{34} & \mathbb{X}^{35}\\
-\mathbb{X}^{14} & -\mathbb{X}^{24} & -\mathbb{X}^{34} & 0 & \mathbb{X}^{45}\\
-\mathbb{X}^{15} & -\mathbb{X}^{25} & -\mathbb{X}^{35} & -\mathbb{X}^{45} & 0
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
0 & \mathbb{X}^{12} & \mathbb{X}^{13} & \mathbb{X}^{15} & -\mathbb{X}^{14}\\
-\mathbb{X}^{12} & 0 & \mathbb{X}^{23} & \mathbb{X}^{25} & -\mathbb{X}^{24}\\
-\mathbb{X}^{13} & -\mathbb{X}^{23} & 0 & \mathbb{X}^{35} & -\mathbb{X}^{34}\\
-\mathbb{X}^{15} & -\mathbb{X}^{25} & -\mathbb{X}^{35} & 0 & \mathbb{X}^{45}\\
\mathbb{X}^{14} & \mathbb{X}^{24} & \mathbb{X}^{34} & -\mathbb{X}^{45} & 0
\end{bmatrix}.
\tag{5.88}
$$

Удобно представить преобразование в виде

$$
\mathbb{X}^{i4} \to \mathbb{X}^{i5}, \qquad \mathbb{X}^{i5} \to -\mathbb{X}^{i4},
\tag{5.89}
$$

формулируемом мнемоническим правилом $4 \leftrightarrow 5$, что соответствует действию корня α_{45}.

Как и в двойной теории поля, в исключительной теории обобщенный репер может быть выбран в верхне– или в нижнетреугольной калибровке, что соответствует параметризации обобщенной метрики в терминах 3-формы C_{mnk} или 3-вектора Ω^{mnk}. Для записи фонового пространства $6^{(3,1)}$-браны, дуальнй КК6-монополю удобно использовать вторую параметризацию. Таким образом, для преобразованной обобщенной метрики имеем

$$m_{MN} = \begin{bmatrix} \delta_{ij} + H^{-2}A_iA_j & 0 & H^{-2}A_i \\ 0 & H & 0 \\ H^{-2}A_j & 0 & H^{-2} \end{bmatrix}, \tag{5.90}$$

что дает следующее фоновое пространство:

$$\begin{aligned} h_{ab} &= \mathrm{diag}[H^{-1},H^{-1},H^{-1},1], \\ \Omega^{ij4} &= -\varepsilon^{ijk}A_k, \\ e^{\varphi} &= H \longrightarrow g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}[H,\ldots,H]. \end{aligned} \tag{5.91}$$

Определяющая функция H остается функцией координат y^i, которые теперь отождествляются с $\mathbb{X}^{i4}$, что дает

$$H = 1 + \frac{h}{\sqrt{(\mathbb{X}^{14})^2 + (\mathbb{X}^{24})^2 + (\mathbb{X}^{34})^2}}. \tag{5.92}$$

Заметим, что переход от C–параметризации к Ω–параметризации может быть интерпретирован, как переход от фона, воспринимаемого пробной замкнутой мембраной к фону, воспринимаемому пробной открытой мембраной в полной аналогии с отображением Зайберга–Виттена [212, 213]. Однако, полного понимания параметра Ω^{mnk} в терминах некоммутативности или неассоциативности в литературе не достигнуто.

Видим, что полученное решение зависит только от дуальных координат и, будучи размазанным вдоль дуальных направлений, оказывается постоянным фоном с точки зрения обычной супергравитации. Тем не менее, можно увидеть, что такой фон соответствует именно $6^{(3,1)}$-бране непосредственной проверкой преобразования соответствующего 1/2БПС состояния, пользуясь формулами Главы 2.4 и Главы 5.1. Для этого заметим, что в используемых здесь обозначениях 11-е направление М-теории соответствует координате $\mathbb{X}^{15}$, а координата специального Taub–NUT цикла $\mathbb{X}^{45}$ не преобразуется. Тогда для масс

Таблица 17 — Вложение КК6-монополя и $6^{(3,1)}$-браны в расширенное пространство. Точки обозначают направления, от которых зависит гармоническая функция, знаком × обозначены направления мирового объема, знаком ⊙ обозначены специальные квадратичные направления (Taub-NUT цикл). Специальные кубические направление $6^{(3,1)}$-браны соответствуют направлениям вдоль дуальных координат $\mathbb{X}^{i4}$. Знаком ⊗ обозначены размазанные направления $6^{(3,1)}$-браны.

	t	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	$\mathbb{X}^{15}$	$\mathbb{X}^{25}$	$\mathbb{X}^{35}$	$\mathbb{X}^{45}$	$\mathbb{X}^{14}$	$\mathbb{X}^{24}$	$\mathbb{X}^{34}$	$\cdots$
КК6	×	×	×	×	×	×	×	•	•	•	⊙				
$6^{(3,1)}$	×	×	×	×	×	×	×	⊗	⊗	⊗	⊙	•	•	•	

1/2БПС состояний можем записать (предполагая редукцию вдоль $\sharp = 7$)

$$KK6 = 6^1 : \quad \frac{R_1R_2R_3R_4R_5R_6R_{10}^2}{\ell_{11}^9} \tag{5.93}$$

$$6_3^1 : \quad \frac{R_1R_2R_3R_4R_5R_6R_{10}^2}{g_s^3\ell_s^9} \tag{5.94}$$

$$6_3^{(2,1)} : \quad \frac{R_1R_2R_3R_4R_5R_6R_8^3R_9^3R_{10}^2}{g_s^3\ell_s^{15}} \tag{5.95}$$

$$6^{(3,1)} : \quad \frac{R_1R_2R_3R_4R_5R_6R_7^3R_8^3R_9^3R_{10}^2}{\ell_{11}^{18}}. \tag{5.96}$$

Здесь состояние 6^1 редуцируется в 6_3^1 состояние IIA теории вдоль направления 7, далее две Т-дуальности вдоль 8 и 9 переводят его в состояние $6_3^{(2,1)}$, которое является редукцией $6_3^{(2,1)}$ вдоль 7. Соответствующая орбита помечена на Рис. 5.1 окружностями и пунктирной линией.

Обобщенный флакс

Флакс для потенциал $A_{11,4,3}$, взаимодействующего с $6^{(3,1)}$-браной, нельзя определить в терминах стандартной супергравитации. С точки зрения SL(5)-теории флакс принадлежит пространству 7-форм, принадлежащих мультиплетам $\overline{\mathbf{10}}$, $\overline{\mathbf{15}}$, $\mathbf{40}$ группы дуальности. Причем, ненулевыми компоненты в первых двух мультиплетах будут только для браны, локализованной в дуальном пространстве, что аналогично случаю локализованного KK5-монополя, где $f_a \neq 0$. При разложении полной группы дуальности $\mathrm{E}_{11} \hookleftarrow \mathrm{GL}(7) \times \mathrm{SL}(5)$ на геометрическую подгруппу и группу дуальности 4-тора, потенциалы, взаимодействующие с орбитой KK6-монополя представлены в виде 7-форм по группе GL(7), принадлежащих мультиплетам $\mathbf{5} \oplus \mathbf{45} \oplus \mathbf{70}$ группы SL(5). Причем, мультиплеты **5** и **45** соответствуют корням E_{11} отрицательной и нулевой длины соответственно и, по определению, не считаются взаимодействующими с браной в стандартном подходе [9, 100, 214, 64]. Тогда в линейном приближении имеем для флаксом в точности компоненты в $\overline{\mathbf{10}}$, $\overline{\mathbf{15}}$, **40**:

$$
\begin{aligned}
\partial^{(10)} A_{\mu_1\ldots\mu_7}{}^{(5)} &\longrightarrow \mathcal{F}^{(10)} + \mathcal{F}^{(40)} \Longleftrightarrow (\theta_{MN}, Z^{MN,K}),\\
\partial^{(10)} A_{\mu_1\ldots\mu_7}{}^{(45)} &\longrightarrow \mathcal{F}^{(10)} + \mathcal{F}^{(15)} \Longleftrightarrow (\theta_{MN}, Y_{MN}),\\
\partial^{(10)} A_{\mu_1\ldots\mu_7}{}^{(70)} &\longrightarrow \mathcal{F}^{(10)} + \mathcal{F}^{(40)} \Longleftrightarrow (Z^{MN,K}).
\end{aligned}
\tag{5.97}
$$

Где представления **10** и $\overline{\mathbf{10}}$ считаем эквивалентными, поскольку в линейном приближении фоновая метрика $\overline{m}_{MN}$ используется для опускания и поднимания индексов.

Вычислим явно компоненты обобщенного флакса для полученного решения. В SL(5) исключительной теории поля обобщенный флакс имеет те же неприводимые представления, что и тензор погружения максимальной $D = 7$ супергравитации (включая тромбон) и может быть записан следующим образом:

$$
\Theta_{\bar{k}\bar{l},\bar{n}}{}^{\bar{m}} = \delta^{\bar{m}}_{[\bar{k}} Y_{\bar{l}]\bar{n}} - \frac{10}{3}\delta^{\bar{m}}_{[\bar{k}}\theta_{\bar{l}]\bar{n}} - 2\varepsilon_{\bar{k}\bar{l}\bar{n}\bar{p}\bar{q}} Z^{\bar{p}\bar{q},\bar{m}} + \frac{1}{3}\theta_{\bar{k}\bar{l}}\delta^{\bar{m}}_{\bar{n}}. \tag{5.98}
$$

В терминах компонент обобщенного репера $V^{\bar{m}}{}_m$ в представлении **5**, неприводимые компоненты имеют вид [130]:

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{10}}:&\quad \theta_{\bar{m}\bar{n}} = \frac{1}{10}\left(V^{\bar{k}}{}_k \partial_{\bar{m}\bar{n}} V^k{}_{\bar{k}} - V^{\bar{k}}{}_k \partial_{\bar{k}[\bar{m}} V^k{}_{\bar{n}]}\right),\\
\overline{\mathbf{15}}:&\quad Y_{\bar{m}\bar{n}} = V^{\bar{k}}{}_k \partial_{\bar{k}(\bar{m}} V^k{}_{\bar{n})},\\
\mathbf{40}:&\quad Z^{\bar{m}\bar{n},\bar{p}} = -\frac{1}{24}\left(\varepsilon^{\bar{m}\bar{n}\bar{i}\bar{j}\bar{k}} V^{\bar{p}}{}_t \partial_{\bar{i}\bar{j}} V^t{}_{\bar{k}} + V^{[\bar{m}|}{}_t \partial_{\bar{i}\bar{j}} V^t{}_{\bar{k}} \varepsilon^{|\bar{n}]\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{p}}\right),
\end{aligned}
\tag{5.99}
$$

где мы обозначаем производные $\partial_{\bar{m}\bar{n}} := V^m{}_{\bar{m}} V^n{}_{\bar{n}} \partial_{mn}$.

Вычислим ненулевые компоненты такого обобщенного флакса для КК6-монополя и $6^{(3,1)}$-браны. Для монополя имеем:

$$\begin{aligned}\theta_{5\bar a} &= -\frac{1}{4}e^a{}_{\bar a}H^{-2}\partial_{5a}H = \frac{2}{3}f_{\bar b\bar\imath}{}^{\bar b},\\ Y_{5\bar a} &= -\frac{1}{4}e^a{}_{\bar a}H^{-2}\partial_{5a}H = \frac{2}{3}f_{\bar b\bar\imath}{}^{\bar b},\\ Z^{\bar a\bar b,\bar c} &= -5H^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\bar a\bar b\bar d\bar e}f_{\bar d\bar e}{}^{\bar c} - 5H^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{\bar c\bar d\bar e[\bar a}f_{\bar d\bar e}{}^{\bar b]}.\end{aligned} \tag{5.100}$$

В соответствии с общей теорией видим, что только вклад от компонент тензора неголономичности оказывается ненулевым. Подставляя решение для КК6-монопля, получаем, что ненулевыми компонентами флакса в представлении **20** являются

$$\begin{aligned}Z^{4[\bar\imath,\bar\jmath]} &= -5H^{\frac{1}{2}}e^{\bar\imath}{}_i e^{\bar\jmath}{}_j\varepsilon^{ijk}\partial_k H,\\ Z^{4\bar\imath,4} &= 15H^{-\frac{1}{2}}e^{\bar\imath}{}_i\partial_i H.\end{aligned} \tag{5.101}$$

При преобразовании U-дуальности U_{123} такие компоненты переходят в $Q_{[4,i]} \in \mathbf{6}^{(Z)}_{-2}$ и $L^i \in \mathbf{4}^{(Z)}_{-7}$, генерируемые $6^{(3,1)}$-браной. Вычисляя компоненты обобщенного флакса для негеометрического решения, ожидаемо имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{6}:\quad \theta_{\bar a\bar b} &= \frac{1}{4}e^4{}_{[\bar a}e^a{}_{\bar b]}H^{-1}\partial_{a4}H = \delta^4_{[\bar a}Q_{\bar b],4},\\ \mathbf{10}:\quad Y_{\bar a\bar b} &= \frac{1}{4}e^4{}_{(\bar a}e^a{}_{\bar b)}H^{-1}\partial_{a4}H = \delta^4_{(\bar a}Q_{\bar b),4},\\ \mathbf{6}_{-2}:\quad Z^{5[\bar a,\bar b]} &= 5\varepsilon^{\bar a\bar b\bar c\bar d}e^4{}_{[\bar c}e^a{}_{\bar d]}H^{-1}\partial_{a4}H = -20\varepsilon^{\bar a\bar b\bar c4}Q_{\bar c,4},\\ \mathbf{4}_{-7}:\quad Z^{5\bar a,5} &= \frac{15}{2}e^{\bar a}{}_a\varepsilon^{abcd}A_b\partial_{cd}H^{-1} = L^{\bar a}.\end{aligned} \tag{5.102}$$

Рассматривая исключительные теории с большей группой симметрий и, следовательно, расширенным пространством большей размерности, можно получить решения, которые оказываются локализованными в обычном пространстве, и их размазывание в дуальном пространстве дает нетривиальные решения супергравитации. Для $E_{7(7)}$ теории такие решения были рассмотрены автором с коллегами в работе [206] и представлены в диссертации Р. Отсуки, доступной по ссылке [210].

5.3 Эффективное действие для DFT-монополя

Рассмотренное выше решение DFT-монополя имеет естественную интерпретацию в терминах некоторого объекта, динамика которого задается в полном расширенном пространстве, но разные вложения которого для геометрического наблюдателя выглядят, как разные браны, принадлежащие орбите $5^0_2 - \ldots - 5^4_2$. Действительно, поднимая полное решение NS5-браны до решения уравнений двойной теории поля, видим, что конструкция оказывается полностью симметричной относительно выбора способа вложения в удвоенное пространство четырехмерного подпространства, от координат которого зависит функция H, (см. Таблицу 18). Поскольку источником ре-

Таблица 18 — Вложение определяющей функции для полностью локализованных решений. Точка обозначает направление, от которого зависит определяющая функция, знак $\times$ обозначает направление, от которого функция не зависит.

	x^1	x^2	x^3	x^4	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
NS5	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
KK5	$\times$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$
5^2_2	$\times$	$\times$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\times$	$\times$
5^3_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\times$
5^4_2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

шения для NS5-браны является фундаментальный объект теории, магнитно дуальный фундаментальной струне, то же должно быть верно и для остальных решений, принадлежащих орбите. Действие для KK5-монополя в теории IIA было получено в работе [215] путем двойной размерной редукции действия для KK6-монополя, которое в свою очередь было получено в той же работе из симметрийных соображений. В работе [216] преобразованием T-дуальности действия KK5A-монополя было получено действие для NS5B-браны, которое оказалось S–дуальным известному действию D5-браны, как и ожидалось. Продолжая цепочку преобразований T-дуальности, в работах [140, 217] были предъявлены эффективные действия для 5^2_2– и 5^3_2-бран и проанализированы их взаимодействия с экзотическими потенциалами в линейном приближении. Единое ковариантное описание действия для всей орбиты было сформулировано автором совместно с К. Блэром в работе [218]. Полученное эффективное действие может быть интерпретировано как действие одного объекта, аналогичного калуца–кляйновскому монополю, динамика которого формулируется в полном удвоенном пространстве. Действие для KK5A-монополя характеризуется вектором Киллинга, направление которого в ковариантной формулировке не задано, а симметрия GL(10) объемлющего пространства формально не нарушена. Совместное решение уравнений движения KK5A-монополя и уравнений супергравитации приводит к известным фоновым полям, не зависящим от одной координаты.

Из симметрийных соображений, представленных в Таблице 18, естественно строить действие для ковариантного объекта по аналогии с действием для KK5-монополя, но в расширенном пространстве. Такой объект обладает набором из 10 обобщенных векторов Киллинга $k_a^{\mathcal{M}}$, удовлетворяющих свойству

$$k_a^{\mathcal{M}} k_b^{\mathcal{N}} \eta_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = 0, \tag{5.103}$$

напоминающему по форме условие проекции. Дополнительно требуется

$$T^{\mathcal{M}_1 \ldots \mathcal{M}_{10}} = \varepsilon^{a_1 \ldots a_{10}} k_{a_1}{}^{\mathcal{M}_1} \ldots k_{a_{10}}{}^{\mathcal{M}_{10}} \neq 0, \tag{5.104}$$

где индексы $a,b = 1,\ldots,10$ нумеруют обобщенные вектора Киллинга. Совместное решение этих двух условий ограничивает обобщенные вектора Киллинга так, что можно выбрать набор из p векторов Киллинга в геометрическом пространстве и $q = 10 - p$ в дуальном пространстве, причем, направления не должны быть взаимно дуальными. Решая совместные уравнения для DFT-монополя и двойной теории поля, получим полевую конфигурацию, с зависимостью только от $20 - 10 - 6 = 4$ координат. Здесь выбор калибровки дополнительно фиксирует шесть изометрических направлений вдоль мирового объема объекта. В зависимости от выбора векторов Киллинга получаем зависимость от геометрических или дуальных координат. Например, пусть решение условий выбрано в виде

$$k_a{}^{\mathcal{M}} = (0; \tilde{k}_{am}), \tag{5.105}$$

то есть, объект характеризуется десятью обобщенными векторами Киллинга вдоль дуальных направлений. Соответствующее решение полных уравнений не будет иметь зависимости от дуальных координат, характеризуясь только функциями, зависящими от четырех геометрических координат. Естественно ожидать, что такой выбор соответствует NS5-бране. Альтернативно выберем девять векторов вдоль дуальных направлений и один вектор вдоль геометрического направления

$$\begin{aligned} k_a{}^{\mathcal{M}} &= (0; \tilde{k}_{am}), \quad a = 1, \ldots, 9, \\ k_{10}{}^{\mathcal{M}} &= (k^m; 0). \end{aligned} \tag{5.106}$$

Решением будет конфигурация, зависящая от трех геометрических координат и от одной дуальной координаты, то есть, локализованный KK5-монополь. Как показано в работе [218] и проиллюстрировано ниже, само действие повторяет действие для KK5-монополя, полученное в [216], но решая уравнения, совместные с двойной теорией поля, а не стандартной супергравитацией и отождествляя дополнительное скалярное поле на мировом объеме с дуальной координатой, получаем локализованное решение.

Рассмотрим построение инвариантого действия для DFT-монополя более подробно, начиная со стандартной формулировки действия для NS5B-браны. Подход для построения действия для орбиты NS5B– и NS5A-бран кардинально отличается, поскольку во втором случае полевой состав теории на мировом объеме включает самодуальную 2-форму. В литературе представлены различные подходы к эффективному действию для такой системы, в основном, фокусирующиеся на действии для M5-браны, которое воспроизводит действие для NS5A-браны при размерной редукции [219, 220, 59, 221, 222, 223]. Обсуждение эквивалентности различных подходов можно найти в работе [224] и в обзоре [225]. Далее мы не будем возвращаться к вопросу теории самодуальных форм, фокусируясь на орбите NS5B-браны.

5.3.1 Действие для NS5B-браны

Тогда как исторически действие для NS5B-браны было получено размерной редукцией и последующей T-дуализацией действия для KK6-монополя M-теории, удобнее его получить S-дуальностью эффективного действия для D5-браны. Кинетическое действие для Dp-браны (бозонной теории струн) было получено в работе [226] в качестве действия нелинейной электродинамики, описывающего взаимодействие концов открытых струн с абелевым векторным полем (полем Борна–Инфельда). Позднее, в работе [227] действие DBI для D-браны было получено интегрированием струнных мод открытой струны, описываемой сигма–моделью со смешанными граничными условиями. Обозначим $A = A_i d\sigma^i$, $i = 0,1,\ldots,p$ — потенциал на мировом объеме Dp-браны, взаимодействующий с концом открытой струны, его тензор напряженности $F = \frac{1}{2}F_{ij}d\sigma^i \wedge d\sigma^j = dA$. Тогда DBI действие для Dp-браны имеет следующий вид:

$$S^{Dp}_{DBI} = -T_p \int d^{p+1}\sigma e^{-\varphi}\sqrt{-\det(G_{ij} + \mathcal{F}_{ij})}, \tag{5.107}$$

где $\mathcal{F}_{ij} = F_{ij} + B_{ij}$, $G_{ij} = \partial_i X^m \partial_j X^n G_{mn}$, $B_{ij} = \partial_i X^m \partial_j X^n B_{mn}$ — индуцированные метрика и B-поле на мировом объеме, $G = \det G_{ij}$. Здесь для удобства мы считаем множитель $2\pi\alpha' = 1$, который впоследствии может быть восстановлен по размерным соображениям. Видим, что натяжение действительно пропорционально обратной степени $g_s = e^{\langle\varphi\rangle}$, в соответствии с классификацией 1/2БПС состояний.

Dp-брана взаимодействует с RR полями теории супергравитации типа II. В литературе присутствует как минимум три соглашения относительно RR потенциалов: 1) потенциалы, соответствующие возбуждениям замкнутых струн; 2) потенциалы, преобразующиеся ковариантно при S-дуальности; 3) потенциалы, преобразующиеся, как компоненты O(10,10) спинора под действием T-дуальности. Ниже мы будем использовать первые и третьи соглашения, используя обозначения C_p и $\mathcal{C}_p$ соответственно. Для последовательности изложения начнем с низкоэнергетического действия для замкнутой струны типа II, выраженного в терминах потенциалов C_p. Нас здесь интересует теория типа IIB, однако, все выражения повторяются для типа IIA с минимальными изменениями. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} S_{IIB} = \kappa \int e^{-2\varphi}\Big(*R + \frac{1}{4}d\varphi * d\varphi + \frac{1}{2}H_3 \wedge *H_3\Big), \\ + \frac{1}{2}G_1 \wedge *G_1 + \frac{1}{2}G_3 \wedge *G_3 + \frac{1}{4}G_5 \wedge *G_5 - \frac{1}{2}dC_2 \wedge dC_4 \wedge B_2, \end{aligned} \tag{5.108}$$

где тензоры напряженности определены следующими соотношениями

$$\begin{aligned} H_3 &= dB_2, \\ G_{p+1} &= dC_p + H_3 \wedge C_{p-2}, \\ G_5 &= *G_5, \end{aligned} \tag{5.109}$$

и являются инвариантными относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta B_2 &= d\Lambda_1, \\ \delta C_p &= d\tilde{\lambda}_{p-1} + H_3 \wedge \tilde{\lambda}_{p-3}. \end{aligned} \tag{5.110}$$

Тильда над параметром преобразования $\tilde{\lambda}_p$ введена для последующего удобства.

Полевой состав теории типа IIB включает RR потенциалы, представленные только формами четного ранга C_{2p}, калибровочное преобразование которых включает NS-NS поле H_3. Поэтому наивное действие взаимодействия Dp-браны с потенциалом C_{p+1} вида $S^{Dp}_{WZ} = T_p \int C_{p+1}$ не является калибровочно инвариатным. Несложно проверить, что правильным инвариантным выражением является

$$S^{Dp}_{WZ} = \int (e^{\mathcal{F}_2} C)\Big|_{p+1}. \tag{5.111}$$

Здесь подынтегральное выражение представляет собой ограничение формальной суммы форм разного ранга на $p+1$-форму, т.е.

$$(e^{\mathcal{F}_2} C)\Big|_p = C_p + \mathcal{F}_2 \wedge C_{p-2} + \frac{1}{2}\mathcal{F}_2 \wedge \mathcal{F}_2 \wedge C_{p-4} + \dots. \tag{5.112}$$

Действительно, калибровочное преобразование вектора Борна–Инфельда $\delta A_1 = -\Lambda_1$ гарантирует инвариантность тензора напряженности $\mathcal{F}_2$ относительно Λ_1. Преобразования разных членов в сумме относительно $\tilde{\lambda}_p$ компенсируют друг друга. Такая форма действия Весса–Зумино естественно предлагает введение потенциалов

$$\mathcal{C} = e^{B_2} C, \tag{5.113}$$

которые преобразуются как компоненты O(10,10) спинора при T-дуальности (см. например [228]).

В выбранных обозначениях преобразования S-дуальности имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &\tau \to -\frac{1}{\tau}, && B_2 \to -C_2, \\ &C_2 \to B_2, && G \to |\tau|\, G, \\ &C_4 \to C_4 + C_2 \wedge B_2, && A_1 \to -c_1, \\ &C_6 \to -B_6 + \frac{1}{2} B_2 \wedge C_2 \wedge C_2, && \end{aligned} \tag{5.114}$$

где аксиодилатон обозначен $\tau = C^{(0)} + ie^{-\varphi}$. Действие для D5-браны при таком преобразовании дает действие NS5-браны. Для кинетической части действия имеем

$$S^{NS5B}_{DBI} = -T_5 \int d^6\sigma e^{-2\varphi}\sqrt{1+e^{2\varphi}(C_0)^2}\sqrt{-\det\left(G_{ij} - \frac{e^{\varphi}}{\sqrt{1+e^{2\varphi}(C^{(0)})^2}}\mathcal{G}_{ij}\right)}, \tag{5.115}$$

где $\mathcal{G}_{ij} = 2\partial_{[i}c_{j]} + C_{ij}$ — образ $\mathcal{F}_{ij}$. Натяжение NS5-браны связано с натяжением D5-браны $T_{NS5} = g_s^{-1}T_{D5}$. Очевидно, полученное действие остается инвариантным относительно калибровочных преобразований (5.110).

5.3.2 RR сектор в демократической формулировке

Потенциалом RR сектора старшей степени, с которым взаимодействует D5-брана является C_6-форма. При этом, в стандартной формулировке в супергравитации типа IIB (5.108) присутствуют только потенциалы C_0, C_2, C_4. Потенциал C_6 является магнитно дуальным потенциалу C_2, что означает, что D5-брана является магнитным партнером D1–струны. Именно поэтому соответствующее состояние образует дублет по S-дуальности вместе с NS5-браной, как D1 образует дублет с F1–струной. В демократической формулировке супергравитации присутствуют все потенциалы, как электрические, так и магнитные. При этом уравнения для электрических потенциалов оказываются тождествами Бьянки для магнитных потенциалов, и наоборот. Покажем это на примере теории типа IIB, действие которой в стандартной формулировке имеет вид (5.108). Запишем уравнения для потенциалов C_0, C_2, C_4, следующие из этого действия:

$$\begin{aligned} d*G_1 - H_3\wedge *G_3 &= 0,\\ d*G_3 - \frac{1}{2}H_3\wedge *G_5 + \frac{1}{2}dC_4\wedge H_3 &= 0,\\ d*G_5 - dC_2\wedge H_3 &= 0. \end{aligned} \tag{5.116}$$

Дополнительно накладывается условие самодуальности $G_5 = *G_5$, с учетом которого второе уравнение выше можно записать в виде тождества Бьянки

$$d\big(*G_3 + H_3\wedge C_4\big) = 0. \tag{5.117}$$

В локальной карте такое уравнение имеет решение $*G_3+H_3\wedge C_4=-dC_6$, определяя потенциал, магнитно дуальный C_2. Тогда уравнение на C_0 тоже может быть записано в виде тождества Бьянки

$$\begin{aligned} 0 &= d*G_1 - H_3\wedge *G_3 = d*G_1 + H_3\wedge dC_6 \\ &= d\big(*G_1 - H_3\wedge C_6\big), \end{aligned} \tag{5.118}$$

которое локально определяет магнитный потенциал C_8. Наконец, с учетом самодуальности уравнение для $*G_5$ эквивалентно тождествам Бьянки для G_5

$$d*G_5 = dG_5 = -H_3\wedge dC_2. \tag{5.119}$$

В итоге имеем набор электрических и магнитных потенциалов C_p и соответствующих инвариантных тензоров напряженности

$$G_{p+1} = dC_p + H_3\wedge C_{p-2}, \quad p = 0,2,4,6,8. \tag{5.120}$$

В таком демократическом формализме уравнения движения и тождества Бьянки могут быть записаны в единой форме тождеств Бьянки и условий электромагнитной дуальности

$$\begin{aligned} &dG_p = -H_3\wedge G_{p-2}, \\ &*G_p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} G_{10-p}, \quad p = 1,3,5,7. \end{aligned} \tag{5.121}$$

Соответствующее псевдодействие имеет лаконичный вид:

$$S^{dem}_{IIB} = \int \frac{1}{2}e^{-2\varphi} H\wedge *H + \frac{1}{4}\sum_p G_p\wedge *G_p. \tag{5.122}$$

Заметим, что выражение выше является именно псевдодействием, поскольку, накладывая условия дуальности, получим тождественный ноль для RR сектора. При этом, псевдодействие инвариантно относительно калибровочных преобразований (5.110).

Как уже отмечалось выше, поля C_p не преобразуются ковариантно относительно T-дуальности, тогда как поля $\mathcal{C} = e^{B_2}C$ преобразуются как компоненты O(10,10) спинора. Соответствие между компонентами форм и компонентами спинора устанавливается стандартным способом. Определим O(d,d) гамма-матрицы

$$\{\Gamma_{\mathcal{M}},\Gamma_{\mathcal{N}}\} = 2\eta_{\mathcal{M}\mathcal{N}}. \tag{5.123}$$

С учетом блочной косодиагональности инвариатного тензора $\eta_{\mathcal{MN}}$ коммутационные соотношения на $\psi_{\mathcal{M}} = 1/\sqrt{2}\Gamma_{\mathcal{M}}$ имеют вид соотношений на фермионные операторы рождения и уничтожения

$$\{\psi_m, \psi^n\} = \delta_m{}^n. \tag{5.124}$$

Определим клиффордов вакуум $|0\rangle$ соотношением $\psi_m|0\rangle = 0$, тогда для набора р-форм C_p можем определить спинор

$$C = \sum \frac{1}{p!} C_{m_1 \dots m_p} \psi^{m_1} \dots \psi^{m_p} |0\rangle. \tag{5.125}$$

Как было показано в работе [228], соответствующий ковариантный тензор напряженности $\Gamma^m \partial_{\mathcal{M}} C$ определяет действие для RR сектора двойной теории поля. Ниже мы будем пользоваться именно таким определением клиффордова вакуума.

Рассмотрим теперь уравнения для поля Калба–Рамона B_2, которые в демократическом формализме также могут быть записаны в виде тождеств Бьянки:

$$d\Big(e^{-2\varphi} * H_3 - \frac{1}{2} C_0 \wedge G_7 + \frac{1}{2} C_2 \wedge G_5 - \frac{1}{2} C_4 \wedge G_3 + \frac{1}{2} C_6 \wedge G_1\Big) = 0, \tag{5.126}$$

определяющих дуальный потенциал D_6. Электромагнитная дуальности и тензор напряженности H_7 тогда задаются следующими уравнениями

$$-2e^{-2\varphi} * H_3 = H_7 = dD_6 + C_0 \wedge G_7 - C_2 \wedge G_5 - C_6 \wedge G_1. \tag{5.127}$$

Потенциал D_6 электрически взаимодействует с NS5-браной и магнитно с фундаментальной струной. Требование калибровочной инвариантности тензора напряженности H_7 однозначно фиксирует вид калибровочных преобразований потенциала D_6, которые включают как собственный калибровочный параметр Λ_5, так и калибровочные параметры $\tilde{\lambda}_p$ RR сектора

$$\delta D_6 = d\Lambda_5 + \tilde{\lambda}_1 \wedge G_5 - \tilde{\lambda}_3 \wedge G_3 + \tilde{\lambda}_5 \wedge G_1. \tag{5.128}$$

По этой причине наивное действие Весса–Зумино $S^{NS5B}_{WZ(0)} \sim \int_{NS5} D_6$ не является калибровочно инвариантным и преобразуется как

$$\delta S^{NS5B}_{WZ(0)} \sim \int \tilde{\lambda}_1 \wedge G_5 - \tilde{\lambda}_3 \wedge G_3 + \tilde{\lambda}_5 \wedge G_1. \tag{5.129}$$

Здесь мы считаем NS5-брану бесконечной и не учитываем граничные члены. Как и для Dp-браны действие Весса–Зумино может быть сделано калибровочно инвариантным путем введения дополнительных полей c_p на мировом объеме. Действительно, добавляя члены вида $dc_p \wedge d\tilde{\lambda}_{4-p}$ можем переписать калибровочное преобразование наивного действия в виде:

$$\begin{aligned}\delta S^{NS5B}_{WZ(0)} \sim \int C_0 \wedge \left(d\tilde{\lambda}_5 + H_3 \wedge \tilde{\lambda}_3\right) - \left(dc_1 + C_2\right) \wedge \left(d\tilde{\lambda}_3 + H_3 \wedge \tilde{\lambda}_1\right) \\ + \left(dc_3 + C_4 + H_3 \wedge c_1\right) \wedge d\tilde{\lambda}_1 \\ = \int \mathcal{G}_0 \wedge \delta C_6 - \mathcal{G}_2 \wedge \delta C_4 + \mathcal{G}_4 \wedge \delta C_2.\end{aligned} \tag{5.130}$$

Здесь мы определяем инвариантные тензоры напряженности для полей c_p и соответствующие калибровочные преобразования следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_p &= dc_{p-1} + H_3 \wedge c_{p-3} + C_p, \\ \delta c_p &= -\tilde{\lambda}_p.\end{aligned} \tag{5.131}$$

Таким образом, калиброчно инвариантное действие Весса–Зумино для NS5-браны может быть записано в виде

$$S^{NS5B}_{WZ} \sim \int D_6 - \mathcal{G}_0 \wedge C_6 + \mathcal{G}_2 \wedge C_4 - \mathcal{G}_4 \wedge C_2 + \ldots, \tag{5.132}$$

где многоточие означает возможные дополнительные члены, которые сами по себе калибровочно инвариантны и не могут быть фиксированы проведенным анализом. При этом, однако, все такие члены обязаны быть записаны в терминах $\mathcal{G}_p$ и RR потенциалов. Такое ограничение следует из смысла потенциалов c_p, которые взаимодействуют с границами Dp-бран, оканчивающихся на NS5-бране. В частности, из соображений симметрии добавляют слагаемое $\mathcal{G}_6 \wedge C_0$.

В работах [173, 172] дуализация двойной теории поля рассмотрена более подробно, в частности, получены выражения для дуальных потенциалов в линейном приближении. Интересно, что потенциалы D_{AB} и D не соответствуют 1/2БПС фундаментальным объектам, но являются вспомогательными полями, необходимыми для обеспечения калибровочной инвариантности действия Весса–Зумино. Потенциалы, взаимодействующие с бранами, натяжением пропорциональным g_s^{-2} были подробно рассмотрены в работе [94]. Более подробный анализ тождеств Бьянки двойной теории поля и интерпретация ненулевой правой части, пропорциональной дельта–функции Дирака, представлены в работе автора [171]. Подробнее к вопросу взаимодействия DFT-монополя с потенциалом D_{ABCD} и интерпретации его компонент в терминах потенциалов смешанной симметрии мы вернемся в Главе 5.3.

При T-дуальности потенциал D_6, взаимодействующий с NS5-браной, переходит в потенциал смешанной симметрии $D_{(7,1)}$, взаимодействующий с KK5-монополем. И далее в $D_{(8,2)}$, $D_{(9,3)}$, $D_{(10,4)}$, взаимодействующие с бранами 5^2_2, 5^3_2, 5^4_2 соответственно. Такие потенциалы при T-дуальности преобразуются как компоненты p-формы $D_{p,M_1,\ldots,M_m}$, принимающей значения в $\mathrm{O}(d,d)$ антисимметричных тензорах ранга m. Эту же картину мы наблюдали при анализе решения DFT-монополя. Более подробно структура взаимодействия DFT-монополя с такими ковариантными потенциалами будет проанализирована ниже.

5.3.3 Ковариантное DBI действие

Ковариантный заряд и общее выражение

Анализ решения DFT-монополя показал, что с соответствующим объектом естественным образом ассоциируются десять обобщенных векторов Киллинга, в зависимости от направления которых в удвоенном пространстве воспроизводится то или иное решение на орбите NS5-браны. Такие обобщенные симметрии, определяемые векторами Киллинга, будут центральным объектом при построении эффективного действия для DFT-монополя. А именно, в терминах обобщенных векторов Киллинга $k_a^{\mathcal{M}}$ будут определяться заряды браны, проекции полей на мировом объеме и главное слагаемое в действии Весса–Зумино. Конкретнее, определим тензорный $T_{M_1\ldots M_{10}}$ и спинорный $|\lambda_b\rangle$ заряды DFT-монополя следующим образом:

$$
\begin{aligned}
T^{\mathcal{M}_1\ldots\mathcal{M}_{10}} &= \varepsilon^{a_1\ldots a_{10}} k_{a_1}^{\mathcal{M}_1}\ldots k_{a_{10}}^{\mathcal{M}_{10}},\\
k_a{}^{\mathcal{M}}\Gamma_{\mathcal{M}}|\lambda_b\rangle &= 0,\\
\frac{1}{2^5}\langle\lambda_b|\Gamma^{\mathcal{M}_1\ldots\mathcal{M}_{10}}|\lambda_b\rangle &= T^{\mathcal{M}_1\ldots\mathcal{M}_{10}}.
\end{aligned}
\tag{5.133}
$$

Спинорный заряд $|\lambda_b\rangle$, который эквивалентно будем обозначать λ_b, опуская бра и кет символы, определяется второй строкой выше. Третья строка определяет общую нормировку спинорного заряда. Заметим, что бозонный заряда DFT-монополя определяет его взаимодействие с NS-NS потенциалом, тогда как спинорный заряд определяет взаимодействие с полями RR сектора и полями c_p, взаимодействующими с концами Dp-бран. Поскольку λ_b преобразуется как O(10,10) спинор, результирующие выражения будут полностью инвариантными. На обобщенные вектора Киллинга накладывается алгебраическое условие

$$k_a{}^{\mathcal{M}} k_b{}^{\mathcal{N}} \eta_{\mathcal{N}} = 0, \tag{5.134}$$

являющееся отражением условия проекции низкоэнергетической теории. Тогда общее выражение для спинорного заряда имеет вид

$$|\lambda_b\rangle = \alpha T_{M_1\dots M_{10}} \Gamma^{M_1\dots M_{10}} |0\rangle, \tag{5.135}$$

где фактор α зависит от конкретного решения алгебраического условия.

Определим теперь матрицу $h_{ab} = k_a{}^{\mathcal{M}} k_b{}^{\mathcal{N}} \mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$, являющуюся проекцией обобщенной метрики на направления, задаваемые векторами Киллинга. В анализе решения DFT-монополя мы видели, что именно такие проекции задавали метрику и B–поле для каждого представителя орбиты. Спектр полей теории на мировом объеме DFT-монополя представлен двадцатью скалярами $Y^{\mathcal{M}}$, преобразующимися как вектор под действием O(10,10), и p-формами $\tilde{c}_p$, каждая из которых преобразуется как O(10,10) спинор. Заметим при этом, что из двадцати скаляров только десять непосредственно дают вклад в действие, что обеспечивается проектором:

$$\hat{\partial}_i Y^{\mathcal{M}} = \partial_i Y^{\mathcal{M}} - h^{ab} k_a{}^{\mathcal{M}} k_b{}^{\mathcal{N}} \mathcal{H}_{NP} \partial_i Y^P, \tag{5.136}$$

где h^{ab} обозначает матрицу, обратную h_{ab}. При этом, ковариантность всех выражений по O(10,10) нарушается явным выбором решения условия (5.134).

Дополнительно к стандартному DFT спинору C определим p-формы, принимающие значения в DFT спинорах:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_p &= \frac{(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}}{p!(\sqrt{2})^p} \Gamma_{M_1} \dots \Gamma_{M_p} C \hat{d}Y^{M_1} \wedge \dots \wedge \hat{d}Y^{M_p}, \\ \tilde{\mathcal{G}}_p &= d\tilde{c}_p - \frac{1}{2} \eta_{\mathcal{M}\mathcal{N}} d\hat{d}Y^{\mathcal{M}} \wedge \hat{d}Y^{\mathcal{N}} \wedge \tilde{c}_{p-3} + \tilde{C}_p. \end{aligned} \tag{5.137}$$

При этом, потенциалы c_p, взаимодействующие с границами Dp-бран на DFT-монополе, определяются спинорным зарядом $\langle \lambda_b | \tilde{c}_p \rangle \sim c_p$. Конкретный вид (постоянного) коэффициента пропорциональности зависит от выбора векторов Киллинга.

В терминах определенных выше полей полностью ковариантное относительно O(10,10) действие для DFT-монополя было предложено в работе автора [218] совместно с К. Блэром и имеет вид

$$
\begin{aligned}
S = Q \int d^6\sigma e^{-2d}\sqrt{\det h}\sqrt{-\det\left|\mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\hat\partial_i Y^{\mathcal{M}}\hat\partial_j Y^{\mathcal{N}} - \frac{e^d(\det h)^{-\frac14}\langle\lambda_b|\tilde{\mathcal{G}}_{ij}\rangle}{\sqrt{1+e^{2d}(\det h)^{-\frac12}\langle\lambda_b|C\rangle^2}}\right|}\\
+ Q\int D^{M_1\dots M_4}T_{M_1\dots M_{10}}\hat d Y^{M_5}\wedge\dots\wedge\hat d Y^{M_{10}}\\
+\frac{Q}{2}\int \langle\lambda_b|\tilde{\mathcal{G}}_6\rangle\wedge\langle\lambda_b|\tilde C_0\rangle - \langle\lambda_b|\tilde{\mathcal{G}}_4\rangle\wedge\langle\lambda_b|\tilde C_2\rangle\\
+\langle\lambda_b|\tilde{\mathcal{G}}_2\rangle\wedge\langle\lambda_b|\tilde C_4\rangle - \langle\lambda_b|\tilde{\mathcal{G}}_0\rangle\wedge\langle\lambda_b|\tilde C_6\rangle + \dots,
\end{aligned}
\tag{5.138}
$$

где Q — заряд, пропорциональный натяжению NS5-браны. Ковариантная конструкция действия Весса–Зумино, рассмотренная в [218], основывается на калибровочно инвариантном подходе и, соответственно, дает действие с точностью до членов, которые преобразуются через себя. Такие члены обозначены многоточием. Покажем, что так определенное действие воспроизводит известные выражение для эффективных действий NS5-браны и KK5-монополя.

NS5-брана

Пусть все обобщенные вектора Киллинга направлены вдоль дуальных направлений $k_a{}^{\mathcal{M}} = (0, \tilde k_{a\mu})$, что дает

$$
\begin{aligned}
h_{ab} &= \tilde k_{a\mu}k_{b\nu}G^{\mu\nu},\\
T_{\mu_1\dots\mu_{10}} &= \det|\tilde k_{a\mu}|\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_{10}},\\
|\lambda_b\rangle &= \frac{\sqrt{\det|\tilde k_{a\mu}|}}{2^5}\Gamma^1\dots\Gamma^{10}|0\rangle.
\end{aligned}
\tag{5.139}
$$

Здесь удобно понимать $\tilde k_{a\mu}$, как $10{\times}10$ невырожденную матрицу, причем $\det h = (\det|\tilde k|)^2\det G^{-1}$. Для $\hat\partial_i Y^{\mathcal{M}}$ имеем следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
\hat\partial_i Y^\mu &= \partial_i Y^\mu,\\
\hat\partial_i Y_\mu &= B_{\mu\nu}\partial_i Y^\nu.
\end{aligned}
\tag{5.140}
$$

Заметим, что правая часть не содержит дуальных скаляров $\tilde{Y}_\mu$. Тогда первое слагаемое в детерминанте DBI действия принимает стандартный вид индуцированной метрики

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\hat{\partial}_i Y^{\mathcal{M}}\hat{\partial}_j Y^{\mathcal{N}} = G_{\mu\nu}\partial_i Y^\mu \partial_j Y^\nu. \tag{5.141}$$

Вклады от RR полей принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\langle\lambda_b|\tilde{C}_p\rangle &= \sqrt{\det\tilde{k}}\frac{1}{p!}C_{\mu_1\ldots\mu_p}dY^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dY^{\mu_p},\\
\langle\lambda_b|\tilde{c}_p\rangle &= \sqrt{\det\tilde{k}}c_p,\\
\langle\lambda_b|d\tilde{c}_p\rangle &= \sqrt{\det\tilde{k}}dc_p,\\
\frac{1}{2}\eta_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\hat{d}Y^{\mathcal{M}}\wedge\hat{d}Y^{\mathcal{N}} &= -H_{\mu\nu\rho}dY^\mu\wedge dY^\nu\wedge dY^\rho,
\end{aligned} \tag{5.142}$$

где вторая строка может пониматься, как определение спинора $|\tilde{c}_p\rangle$ в терминах потенциалов c_p. В итоге получаем известные выражения:

$$\langle\lambda_b|\tilde{\mathcal{G}}_p\rangle = \langle\lambda_b|d\tilde{c}_p\rangle - \frac{1}{2}\eta_{\mathcal{M}\mathcal{N}}\hat{d}Y^{\mathcal{M}}\wedge\hat{d}Y^{\mathcal{N}}\wedge\langle\lambda_b|\tilde{c}_{p-3}\rangle + \langle\lambda_b|\tilde{C}_p\rangle = \sqrt{\det\tilde{k}}\mathcal{G}_p. \tag{5.143}$$

Подставляя результат в ковариантное действие видим, что воспроизводится стандартное выражение для эффективного действия NS5-браны, причем

$$T_5 = Q\det\tilde{k}. \tag{5.144}$$

Отдельно рассмотрим слагаемое, содержащее 6-форму $D^{M_1\ldots M_4}\hat{d}Y^{M_5}\wedge\cdots\wedge\hat{d}Y^{M_{10}}$, для которого получаем

$$\begin{aligned}
D^{M_1\ldots M_4}T_{M_1\ldots M_{10}}\hat{d}Y^{M_5}\wedge\cdots\wedge\hat{d}Y^{M_{10}} &= \det\tilde{k}\,D^{\mu_1\cdots\mu_4}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}}dY^{\mu_5}\wedge\cdots\wedge dY^{\mu_{10}}\\
&= \det\tilde{k}\,B_{\mu_1\ldots\mu_6}dY^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dY^{\mu_6},
\end{aligned} \tag{5.145}$$

где связь магнитного потенциала B_6 и компонент $D^{\mu_1\cdots\mu_4}$ антисимметричного тензора определяется соотношением $B_{\mu_1\ldots\mu_6} = \varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_{10}}D^{\mu_7\cdots\mu_{10}}$.

KK5-монополь

Покажем теперь, что то же выражение (5.138) дает эффективное действие для KK5-монополя при другом выборе обобщенных векторов Киллинга.

Пусть теперь имеем 9 векторов Киллинга в дуальных направлениях $\tilde{k}_{\alpha\mu}$, $\alpha = 1,\ldots,9$ и один вектор в нормальном направлении $k_*{}^{\mu}$. Тогда для ненулевых компонент бозонного заряда получим:

$$T_{\mu_1\ldots\mu_9}{}^{\mu} = \varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_9}\tilde{k}_{\alpha_1\mu_1}\ldots k_{\alpha_9\mu_9}k_*{}^{\mu} = \det||\tilde{K}||\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_9\nu}k_*{}^{\mu}k_*{}^{\nu}, \tag{5.146}$$

где удобно определить матрицу $\tilde{K}_{a\mu}$ через ее компоненты $\tilde{K}_{\alpha\mu} = \tilde{k}_{\alpha\mu}$, $\tilde{K}_{9\mu} = \partial_{\mu}\omega$, причем $k^{\mu}\partial_{\mu}\omega = 1$. Здесь мы использовали тождество

$$\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_9}\tilde{k}_{\alpha_1\mu_1}\ldots k_{\alpha_9\mu_9} = \det||\tilde{K}||\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_9\nu}k_*{}^{\nu}, \tag{5.147}$$

которое следует из простых наблюдений: во-первых, компоненты 9 дуальных векторов Киллинга $\tilde{k}_{\alpha}$ могут пониматься, как контравариантные компоненты векторов в обычном пространстве, а оставшийся ортогональный им вектор k_*^{μ} дополняет систему до полного базиса. Тогда левая часть уравнения (5.147) представляет собой векторное произведение 9 векторов в 10-мерном пространстве, что очевидно дает вектор, ортогональный гиперплоскости, натянутой на эти девять векторов. Такой вектор будет пропорционален k_*^{μ}, коэффициент пропорциональности фиксируется сверткой с $\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{10}}$. С учетом тождества имеем для спинорного заряда:

$$\begin{aligned}|\lambda_b\rangle &= \frac{1}{2^{\frac{9}{2}}9!}\sqrt{\det||\tilde{K}||}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_9\mu}k_*^{\mu}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_9}|0\rangle,\\ \langle\lambda_b| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\det||\tilde{K}||}\langle 0|k_*^{\mu}\Gamma_{\mu}.\end{aligned} \tag{5.148}$$

Компоненты матрицы h_{ab} теперь включают как метрику, так и поле Калба–Рамона:

$$\begin{aligned}h_{\alpha\beta} &= \tilde{k}_{\alpha\mu}\tilde{k}_{\beta\nu}g^{\mu\nu},\\ h_{*\alpha} &= \tilde{k}_{\alpha\mu}k_*{}^{\nu}B_{\nu}{}^{\mu},\\ h_{**} &= k_*{}^{\mu}k_*{}^{\nu}(g_{\mu\nu} - B_{\mu}{}^{\rho}B_{\rho\nu}),\end{aligned} \tag{5.149}$$

в соответствии с преобразованием Т-дуальности между NS5-браной и KK5-монополем. Действительно, выражения выше могут быть записаны в лаконичной форме $h_{ab} = \tilde{K}_{a\mu}\tilde{K}_{b\nu}g'^{\mu\nu}$ с использованием метрики $g'_{\mu\nu}$, являющейся образом $g_{\mu\nu}$,$B_{\mu\nu}$ при Т-дуальности вдоль k_*^{μ}:

$$\begin{aligned}g'^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + (k_*{}^2 + K^2)k_*{}^{\mu}k_*{}^{\nu} + 2k_*{}^{(\mu}K^{\nu)},\\ K &= \iota_{k_*}B - d\omega.\end{aligned} \tag{5.150}$$

Здесь индексы в правой части поднимаются и опускаются начальной метрикой $g_{\mu\nu}$.

Вообще, все выражения ниже являются повторением тех же выражений для NS5-браны с полями, замененными по правилам T-дуальности вдоль $k_*{}^\mu$, что и следует ожидать. В частности, для $\tilde{\partial}_i Y^{\mathcal{M}}$ имеем:

$$
\begin{aligned}
\hat{\partial}_i Y^\mu &= \left(\delta_\nu{}^\mu - \frac{k_\nu k_*^\mu}{k_*^2}\right)\partial_i Y^\nu,\\
\hat{\partial}_i \tilde{Y}_\mu &= \frac{1}{k_*^2} k_{*\mu} k_*^\nu \partial_i \tilde{Y}_\nu + \left(B_{\mu\nu} + \frac{2}{k_*^2} k_{*[\mu} B_{\nu]\rho} k_*^\rho\right)\partial_i Y^\nu.
\end{aligned}
\tag{5.151}
$$

Видим, что выражение в скобках в первой строке является ничем иным, как проектором на гиперплоскость, ортогональную вектору k_*^μ. Вследствие этого комбинация скалярных полей Y^ν вдоль изометрического направления не входит в действие. При этом, только одна компонента $\tilde{Y}_\mu$, спроецированная на k_*^μ, остается в действии, тогда как остальные оказываются пропорциональными Y^μ. Удобно всего увидеть такую проекцию в адаптированном базисе, где единственной ненулевой компонентой вектора k_*^μ является $k_*^z = 1$. Нумеруя оставшиеся направления индексом $m = 0, \ldots, 8$, имеем:

$$
\begin{aligned}
\hat{\partial}_i Y^m &= \partial_i Y^m, & \hat{\partial}_i Y^z &= 0,\\
\hat{\partial}_i \tilde{Y}_m &= B_{mn}\partial_i Y^n, & \hat{\partial}_i \tilde{Y}_z &= \partial_i \tilde{Y}_z.
\end{aligned}
\tag{5.152}
$$

В итоге действие будет зависеть от 10 скалярных полей $\{Y^m, \tilde{Y}_z\}$, при этом решение для фоновых полей будет зависеть от дуальной координаты $\mathbb{X}_z$, что соответствует локализованному KK5-монополю.

Следует отметить, что полученное из выражения (5.138) эффективное действие имеет известный вид. Однако, существенным отличием ковариантного подхода является возможность рассмотрения полной самосогласованной задачи взаимодействия DFT-монополя с фоновыми полями двойной теории поля. Выбирая больше векторов Киллинга в нормальном пространстве, будем получать эффективные действия для $5_2^2, \ldots, 5_2^4$ бран. При этом, степень вырождения имеющихся решений довольно высока. Например, выбирая пять векторов Киллинга вдоль нормальных координат и пять вдоль дуальных, мы не получим некую новую 5_2^5-брану, по причине отсутствия соответствующего 1/2БПС состояния. Действительно, для фиксации калибровки требуется расположить брану так, что шесть мировых координат совпадают с шестью скалярными полями. Выбранные шесть координат обязательно должны быть геометрическими, поскольку объект воспринимается как 5-брана в геометрическом пространстве, а T-дуальность вдоль мирового объема его не меняет. Им ортогональные четыре направления могут быть либо изометрическими, либо нет, давая всего пять нетривиальных решений уравнения (5.134).

Вернемся к действию KK5-монополя и рассмотрим слагаемое, содержащее 6-форму $D^{M_1\dots M_4}\hat{d}Y^{M_5}\wedge\dots\wedge\hat{d}Y^{M_{10}}$, для которого получаем:

$$
\begin{aligned}
&D^{M_1\dots M_4}T_{M_1\dots M_{10}}\hat{d}Y^{M_5}\wedge\dots\wedge\hat{d}Y^{M_{10}}\\
&=T_{\mu_1\dots\mu_9}{}^{\nu}\Big(6D^{\mu_1\dots\mu_4}\hat{d}Y^{\mu_5}\wedge\dots\wedge\hat{d}Y^{\mu_9}\wedge\hat{d}Y_{\nu}+4D^{\mu_1\dots\mu_3}{}_{\nu}\hat{d}Y^{\mu_4}\wedge\dots\wedge\hat{d}Y^{\mu_9}\Big)\\
&=\det\tilde{K}\Big[D_{\mu_1\dots\mu_6\mu,\nu}k_*^{\mu}k_*^{\nu}dY^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dY^{\mu_6}+\hat{D}_{\mu_1\dots\mu_5\mu}k_*{}^{\mu}dY^{\mu_5}\wedge\dots\wedge dY^{\mu_9}\wedge d\omega\Big],
\end{aligned}
\tag{5.153}
$$

где мы определяем

$$
\begin{aligned}
D_{\mu_4\dots\mu_9\mu,\nu}&=4D^{\mu_1\mu_2\mu_3}{}_{\mu}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_9\nu},\\
\hat{D}_{\mu_5\dots\mu_9\mu}&=6D^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_9\mu}.
\end{aligned}
\tag{5.154}
$$

Первое слагаемое в действии задает ожидаемое взаимодействие с потенциалом смешанной симметрии $D_{(7,1)}$, тогда как второе слагаемое описывает взаимодействие с 6-формой $B_{\mu_1\dots\mu_6}$. При этом никакой парадоксальной ситуации здесь нет. Действительно, заметим, что второе слагаемое в (5.153) является интегралом от 6-формы, содержащей $d\omega$, что соответствует такой ориентации KK5-монополя, что его Taub–NUT направление совпадает с дуальным направлением. При этом, ненулевой вектор Киллинга k_*^{μ} оказывается не в трансверсальном, а в продольном направлении браны. Это есть ни что иное как размазанная NS5-брана. Заключаем, что для однозначной фиксации DFT-монополя, как KK5-монополя в обычном пространстве, следует зафиксировать вектора Киллинга, задающие ориентацию трансверсального пространства, и дополнительно ориентацию мирового объема.

5.3.4 Связь с другими результатами и интерпретация

Основным результатом, который иллюстрируют приведенная выше конструкция ковариантного эффективного действия и решения DFT-монополя, является то, что представители орбиты NS5B-браны, могут пониматься как один и тот же объект, по-разному ориентированный в удвоенном пространстве. При этом, под ориентацией монополя понимается направление десяти обобщенных векторов Киллинга, которые, вообще говоря, можно выбрать множеством способов. Однако, среди этого множества неэквивалентных, то есть, нетранслируемых друг в друга заменой координат отдельно в обычном или в дуальном пространствах, всего пять. Действительно, поскольку NS 5-браны инвариантны относительно T-дуальности вдоль направлений ее мирового объема, группа симметрии O(10,10) нарушается до O(4,4) выбором калибровки на мировом объеме DFT-монополя. Далее, очевидно, что различными бранами будут те, у которых число векторов Киллинга в обычных (эвивалентно, в дуальных) направлениях различно. Другими словами, например, конфигурация с одним вектором Киллинга вдоль направления x^1 и тремя вдоль дуальных направлений $\{\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\tilde{x}_4\}$ эквивалентна конфигурации с одним вектором Киллинга вдоль направления x^2 и тремя вдоль дуальных направлений $\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_3,\tilde{x}_4\}$, и так далее. Учитывая вышесказанное, рассмотрим возможные вложения DFT-монополя в удвоенное пространство и его взаимодействие с соответствующими потенциалами O(4,4) двойной теории поля. Из тождеств Бьянки в таком случае имеем следующие потенциалы:

$$\begin{array}{lllll} D_2, & D_{3,M}, & D_{4,\mathcal{MN}}, & D_{5,\mathcal{MNK}}, & D_{6,\mathcal{MNKL}}, \\ & & D_4, & D_{5,M}, & D_{6,\mathcal{MN}}, \\ & & & & D_6. \end{array} \tag{5.155}$$

При этом потенциал, представленный здесь $p+1$-формой, взаимодействует с DFT-монополем, вложенным в обобщенное пространство так, что p направлений мирового объема расположены в шестимерном внешнем пространстве, остальные — во внутреннем (см. Таблицу 19).

Покажем это схематически на примере главного вклада в действие Весса–Зумино для DFT-монополя. Учитывая, что потенциалы $D_{5,M}$,D_6 и D_6' не взаимодействуют с 1/2БПС состояниями и, соответственно, не могут давать вклада в главный член, имеем

$$\begin{aligned} S_{WZ} = \int d\sigma^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d\sigma^{\alpha_6} T^{\mathcal{MNKL}} \times \Big(& D_{\alpha_1\ldots\alpha_6\mathcal{MNKL}} + D_{\alpha_1\ldots\alpha_5,\mathcal{MNK}} D_{\alpha_6} Y_{L} \\ & + D_{\alpha_1\ldots\alpha_4,\mathcal{MN}} D_{\alpha_5} Y_{\mathcal{K}} D_{\alpha_6} Y_{L} + D_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,M} D_{\alpha_4} Y_{\mathcal{N}} D_{\alpha_5} Y_{\mathcal{K}} D_{\alpha_6} Y_{L} \\ & + D_{\alpha_1\alpha_2}\, D_{\alpha_3} Y_{\mathcal{M}} D_{\alpha_4} Y_{\mathcal{N}} D_{\alpha_5} Y_{\mathcal{K}} D_{\alpha_6} Y_{L} \Big). \end{aligned} \tag{5.156}$$

Таблица 19 — Возможные вложения шестимерного мирового объема NS5-браны в 10-мерное физическое пространство и соответствующие потенциалы O(4,4) двойной теории поля. Одинарная вертикальная черта отделяет внешнее пространство, параметризованное x^{μ} и внутреннее пространство, являющееся частью удвоенного пространства. $\times$обозначает направление мирового объема.

Возможные вложения										Потенциалы
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\times$	$\times$					$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	D_2,
$\times$	$\times$	$\times$					$\times$	$\times$	$\times$	$D_{3,M}$
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					$\times$	$\times$	$D_{4,\mathcal{MN}}, D_4$
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					$\times$	$D_{5,\mathcal{MNK}}, D_{5,M}$
$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$					$D_{6,\mathcal{MNKL}}, D_{6,\mathcal{MN}}, D_6, D_6'$

Учитывая фиксацию шести из десяти обобщенных векторов Киллинга, заряд пишем в виде:

$$T^{\mathcal{MNKL}} = k_a^{\mathcal{M}} k_b^{\mathcal{N}} k_c^{K} k_d^{L} \varepsilon^{abcd}. \tag{5.157}$$

Видим, что DFT-монополь взаимодействует с правильными потенциалами, найденными в работе [94].

Рассмотрим подробнее первый член в выражении выше для 5_2^p-бран с $p = 0,1,2,3,4$:

$$5_2^0 : \ k_a^{\mathcal{M}} = (\vec{0}; \tilde{k}_{am}) \quad S_{WZ} = \tilde{k}_{1m}\tilde{k}_{2n}\tilde{k}_{3k}\tilde{k}_{4l}\varepsilon^{mnkl}\varepsilon_{1234}\int D_6{}^{1234} + \ldots,$$

$$5_2^1 : \ \begin{array}{r} k_1^{\mathcal{M}} = (k_1^1,0,0,0;\vec{0}) \\ k_{(2,3,4)}^{\mathcal{M}} = (\vec{0}; 0,\tilde{k}_{(2,3,4)\hat{m}}) \end{array} \quad S_{WZ} = 4k_1^m\tilde{k}_{2n}\tilde{k}_{3k}\tilde{k}_{4l}\varepsilon^{1nkl}\varepsilon_{m234}\int D_{6,1}{}^{234} + \ldots,$$

$$5_2^2 : \ \begin{array}{r} k_{(1,2)}^{\mathcal{M}} = (k_{(1,2)}^{\tilde{m}},0,0;\vec{0}) \\ k_{(3,4)}^{\mathcal{M}} = (\vec{0}; 0,0,\tilde{k}_{(3,4)\tilde{n}}) \end{array} \quad S_{WZ} = 4k_1^m k_2^n\tilde{k}_{3k}\tilde{k}_{4l}\varepsilon^{12kl}\varepsilon_{mn34}\int D_{6,12}{}^{34} + \ldots.$$

$$5_2^3 : \ \begin{array}{r} k_1^{\mathcal{M}} = (\vec{0}; \tilde{k}_{11},0,0,0) \\ k_{(2,3,4)}^{\mathcal{M}} = (0,k_{(2,3,4)}^{\hat{m}};\vec{0}) \end{array} \quad S_{WZ} = 4\tilde{k}_{1m}k_2^n k_3^k k_4^l\varepsilon^{m234}\varepsilon_{1nkl}\int D_{6,234}{}^{1} + \ldots.$$

$$5^4_2: \; k_a^{\mathcal{M}} = (k_a^m, \vec{0}) \quad S_{WZ} = k_1^m k_2^n k_3^k k_4^l \varepsilon^{1234} \varepsilon_{mnkl} \int D_{6,1234} + \dots .$$

где компоненты векторов Киллинга $k_a^{\mathcal{M}}$ вдоль геометрических и дуальных направлений отделены точкой с запятой для большей ясности обозначений. Мы обозначаем $\hat{m} = 2,3,4$, $\tilde{m} = 1,2$, $\tilde{n} = 3,4$. Как обсуждалось выше, соответствие между компонентами потенциала $D_{6,\mathcal{MNKL}}$ и потенциалами смешанной симметрии $D_{6+p,p}$, соответствующих решениям с p специальными циклами, дается сверткой с тензором ε^{abcd}:

$$\begin{aligned}
D_{\mu_1\dots\mu_6}{}^{1234} &= B_{\mu_1\dots\mu_6},\\
D_{\mu_1\dots\mu_6,1}{}^{234} &= A_{\mu_1\dots\mu_6 x,x},\\
D_{\mu_1\dots\mu_6,12}{}^{34} &= D_{\mu_1\dots\mu_6 xy,xy},\\
D_{\mu_1\dots\mu_6,123}{}^{4} &= D_{\mu_1\dots\mu_6 xyz,xyz},\\
D_{\mu_1\dots\mu_6,1234} &= D_{\mu_1\dots\mu_6 xyzw,xyzw}.
\end{aligned} \tag{5.158}$$

Отсюда заключаем, что решение DFT-монополя, предъявленное в явном виде выше, соответствует такому вложению фундаментального DFT-монополя в пространство O(4,4) двойной теории поля, что остается только взаимодействие с потенциалом $D_{6,\mathcal{MNKL}}$.

Рассмотрим теперь тождества Бьянки для обобщенного флакса $\mathcal{F}_{\mathcal{MNK}} = 3E_{A[\mathcal{M}}\partial_{\mathcal{N}}E_{\mathcal{K}]}{}^{\mathcal{A}}$, которые имеют вид:

$$S_{\mathcal{MNPQ}} \equiv \partial_{[\mathcal{M}}\mathcal{F}_{\mathcal{NKL}]} - \frac{3}{4}\mathcal{F}_{\mathcal{PMN}}\mathcal{F}_{\mathcal{QKL}}\eta^{\mathcal{PQ}} = 0\,. \tag{5.159}$$

В присутствии источников, правая часть тождеств не равна нулю, но пропорциональна заряду источника, что следует из уравнения на определяющую функцию:

$$\sum_{i=1}^{3}\partial_i\partial_i H(y_1,y_2,y_3) = \alpha\delta(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2). \tag{5.160}$$

Несложно видеть, что правая часть тождеств Бьянки с учетом вклада от источника имеет следующий вид:

$$\partial_{[M}\mathcal{F}_{NKL]} - \frac{3}{4}\mathcal{F}_{P[\mathcal{MN}}\mathcal{F}^{P}{}_{KL]} \propto T_{\mathcal{MNKL}}\delta\big(r^2(Y^{\mathcal{M}})\big). \tag{5.161}$$

Вообще говоря, эти тождества можно считать уравнениями для потенциала $D_{6,\mathcal{MNKL}}$ для полного действия $S = S_{DFT} + S_{mon}$, являющегося суммой действия двойной теории поля и эффективного действия для DFT-монополя. При этом функция $r^2(Y)$ всегда считается суммой квадратов четырех координат, которые выбираются из решения условия проекции. Правая часть выражения выше является теоретико-полевой интерпретацией условия сокращения струнных головастиков, которое является существенным для построения самосогласованных схем размерной редукции в присутствии флаксов. Однако, следует заметить, кто так записанная дельта-функция не является ковариантной относительно Т-дуальности. Вопрос получения ковариантного выражения для тождества Бьянки остается открытым

Предложенное ковариантное описание динамики экзотических бран, принадлежащих орбите NS5B-браны имеет существенные отличия как от стандартных подходов к построению эффективного действия солитонной браны, так и стандартного прочтения формализма двойной теории поля. Рассмотрим имеющиеся на данный момент в литературе результаты, родственные полученным выше. Стандартный подход к построению действий для солитонных NS5-браны и KK5-монополя представлен работами [216, 229], где эффективное действие NS5B-браны получено Т-дуальностью действия KK5A-монополя. Данный подход не является ковариантным в том смысле, что эффективное действие для каждой браны задается собственным выражением. Действие не формулируется в терминах мультиплетов (под)группы O(10,10). Последующей Т-дуальностью действия для KK5A-монополя получены действия для экзотических 5-бран, представленные в работах [140, 217]. Действие Весса–Зумино, включающее потенциалы смешанной симметрии, здесь сформулировано в нековариантном виде. В работе [94] получено действие Весса–Зумино для NS5-браны в демократическом формализме и проанализированы потенциалы смешанной симметрии, принадлежащие тому же мультиплету, что и магнитный потенциал B_6.

Представленное выше единое выражение для ковариантного действия в зависимости от выбора направления обобщенных изометрий воспроизводит действие для любой из бран на NS5B-орбите. При этом, оно является калибровочно инвариантным с некоторыми нюансами, связанными с преобразованием потенциала $D^{\mathcal{MNKL}}$ относительно калибровочных преобразований RR сектора (подробнее ниже). Предложенная конструкция позволяет утверждать, что с точки зрения струны, не отличающей Т-дуальные друг другу фоновые пространства, все представители NS5B-орбиты являются одним и тем же объектом, лишь по-разному ориентированным в удвоенном пространстве.

Для такой интерпретации нами предлагается дополнить формализм двойной теории поля требованием указывать, какие именно из двадцати координат обобщенного пространства-времени являются геометрическими, а именно, используются для измерения расстояния в пространстве. Обычно молчаливо предполагается, что таковыми являются x^m (те, которые имеют верхний индекс). Однако, назначить геометрическими можно любые 10 координат, при условии удовлетворения условия проекции, что позволяет конструировать фоновые пространства экзотических бран как теории струн, так и М-теории. Ту же картину можно наблюдать для Dp-бран, которые являются различными проекциями единого 10-мерного объекта [230].

Важно отметить, что вопрос, можно ли понимать DFT-монополь, как действительно фундаментальный объект, динамика которого описывается представленными выше ковариантным действие, не является решенным до конца. Основной проблемой для подобного далеко идущего утверждения является инвариантность потенциала $D^{\mathcal{MNKL}}$, соответствующего флакса $\mathcal{F}_{\mathcal{MNK}}$ и эффективного действия относительно калибровочных преобразований RR сектора. Как показано, например, в [172, 230], флакс $\mathcal{F}_{\mathcal{MNK}}$ и действие Весса–Зумино для 5^b_2-браны являются калибровочно инвариантными только в том случае, если в геометрическом пространстве присутствует не менее b изометричных направлений (дополнительно к направлениям мирового объема). При таком условии симметрия O(10,10) ковариантного действия нарушается, и оно более не воспроизводит решения для локализованных бран. Автор считает, что формализм, предложенный в [218], позволяет сформулировать правильные калибровочные преобразования и убедиться, что действие инвариантно. Вопрос такой формулировки в настоящее время является открытым.

Глава 6. Неабелевы симметрии пространства вакуумов

Симметрия Т-дуальности является абелевой симметрией сигма-модели в том смысле, что соответствующий нётеровский ток сохраняется, а изометрия, вдоль которой производится дуализация, задается абелевой группой. В Главе 1.5 было описано обобщение процедуры Т-дуальности для случаев, когда изометрия объемлющего пространства является неабелевой, и когда изометрия отсутствует, но поля удовлетворяют специальным соотношениям. Преобразования дуальности в первом случае обычно называют неабелевой Т-дуальностью (NATD), а во втором случае — пуассон–лиевой Т-дуальностью. Особенно интересным является то, что пуассон–лиева Т-дуальность допускает чисто алгебраическое описание, основанное на симметриях фонового пространства без необходимости обращаться к лагранжиану сигма-модели. В таком подходе дуальность является симметрией классического дубля Дринфельда, геометрически реализованного в терминах обобщенного репера и обобщенной производной Ли с полями, независящими от дуальных координат. При этом, обобщенный репер является элементом группы $\mathrm{O}(d,d)$, соответствующей стандартной абелевой Т-дуальности.

Такая конструкция может быть прямым образом обобщена на случай исключительных алгебр, описывающих симметрии Креммера–Джулиа фонового пространства мембраны, и соответствующих абелевым симметриям в том же смысле. Впервые такие дуальности были описаны в работах [231, 232] как симметрии специальным образом построенной алгебры Лейбница, называемой теперь исключительной алгеброй Дринфельда (EDA). Исключительная алгебра Дринфельда является аналогом классического дубля Дринфельда для М-теории. В последующих работах [233, 234, 235] исключительная алгебра Дринфельда была построена для групп E_n с $4 \leqslant n \leqslant 8$, соответствующая симметрия намбу–лиевой U-дуальности была интерпретирована в терминах нётеровских токов трехмерной сигма-модели. Первые явные примеры решений уравнений 11-мерной супергравитации, связанных преобразованиями новой намбу–лиевой U-дуальности, были представлены в работе автора с коллегой [236], общий алгоритм, позволяющий генерировать неабелево U-дуальные решения к заданному, был описан в работе автора [237]. Ниже будет подробнее рассмотрена конструкция исключительной алгебры Дринфельда, ее геометрическая реализация в терминах обобщенных репера и производной Ли исключительной теории поля, соответствующая намбу–лиева U-дуальность и представлены некоторые особенно интересные примеры из работы [236].

6.1 Намбу-лиева U-дуальность

6.1.1 Общий формализм

Исключительная алгебра Дринфельда, являющаяся центральным объектом в обобщении пуассон–лиевой T-дуальности 10-мерной супергравитации до намбу–лиевой U-дуальности 11-мерной супергравитации задается как алгебра Лейбница с дополнительными ограничениями на структурные константы. Описание дубля Дринфельда в терминах тройки Манина здесь обобщается до описания в терминах некоторой подалгебры $\mathfrak{g}$, ее дополнения $\tilde{\mathfrak{g}}$ в линейном пространстве EDA и обобщения квадратичной формы $\eta : D \times D \to \mathbb{R}$. Последнее может пониматься как условие

$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}\Big|_{\mathcal{R}_2} = 0 \tag{6.1}$$

где $\mathcal{R}_2$ обозначает определенное представление абелевой группы дуальности (см. Таблицу 20). Действительно, генераторы классического дубля Дринфель-

$\dim \mathfrak{g}$	$\mathcal{R}_2$	G
n=d	$\mathbf{1}$	$\mathrm{O}(d,d)$
n=4	$\overline{\mathbf{5}}$	SL(5) ,
n=5	$\mathbf{10}$	SO(5,5) ,
n=6	$\overline{\mathbf{27}}$	$\mathrm{E}_{6(6)}$.

Таблица 20 — Размерность геометрической подалгебры $\mathfrak{g}$ и представление $\mathcal{R}_2$ для некоторых групп абелевой симметрии G.

да могут быть записаны в виде множества $T_A = (T_a, \tilde{T}^a)$, тогда условие (6.1) означает, что геометрическая подалгебра $\mathfrak{g}$ натянута на генераторы, которые удовлетворяют условию $\eta^{AB} T_A \otimes T_B = 0$. Где инвариантный тензор η^{AB}

проецирует на синглет. Существуют как минимум два очевидных выбора геометрической подалгебры: $\mathfrak{g} = \mathrm{span}(T_a)$ и $\mathfrak{g} = \mathrm{span}(\tilde{T}^a)$. При этом решения уравнений 10-мерной супергравитации, реализованные этими генераторами, связаны неабелевой Т-дуальностью.

Рассмотрим конструкцию исключительной алгебры Дринфельда подробнее. Пусть генераторы геометрической подалгебры $\mathfrak{g}$ обозначены $\{T_a\} = \mathrm{bas}\,\mathfrak{g}$, а генераторы ее линейного дополнения — $\{T^{a_1a_2}, T^{a_1,\dots a_5}\}$. Обозначая $T_A = \{T_a, T^{a_1a_2}, T^{a_1,\dots a_5}\}$ запишем таблицу умножения в алгебре в виде

$$T_A \circ T_B = \mathcal{F}_{AB}{}^C T_C, \tag{6.2}$$

где структурные константы $\mathcal{F}_{AB}{}^C$, вообще говоря, не антисимметричны по нижним индексам. Умножение $\circ$ удовлетворяет тождеству Лейбница:

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c + b \circ (a \circ b)\,, \tag{6.3}$$

что накладывает квадратичные ограничения на структурные константы. Константы $\mathcal{F}_{AB}{}^C$ имеют тот же вид, что и компоненты $X_{\mathcal{M}\mathcal{N}}{}^{\mathcal{K}}$ обобщенного флакса исключительной теории поля, что диктуется ковариантностью по отношению к группе симметрии Креммера–Джулиа. В явном виде таблицу умножения для исключительной алгебры Дринфельда при $n \leqslant 6$ можно представить следующим образом

$$\begin{aligned}
T_a \circ T_b &= f_{ab}{}^c\, T_c\,,\\
T_a \circ T^{b_1b_2} &= f_a{}^{b_1b_2c}\, T_c + 2\, f_{ac}{}^{[b_1}\, T^{b_2]c} + 3\, Z_a\, T^{b_1b_2}\,,\\
T_a \circ T^{b_1\cdots b_5} &= -f_a{}^{b_1\cdots b_5c}\, T_c - 10\, f_a{}^{[b_1b_2b_3}\, T^{b_4b_5]} - 5\, f_{ac}{}^{[b_1}\, T^{b_2\cdots b_5]c} + 6\, Z_a\, T^{b_1\cdots b_5}\,,\\
T^{a_1a_2} \circ T_b &= -f_b{}^{a_1a_2c}\, T_c + 3\, f_{[c_1c_2}{}^{[a_1}\, \delta^{a_2]}_{b]}\, T^{c_1c_2} - 9\, Z_c\, \delta^{[c}_b\, T^{a_1a_2]}\,,\\
T^{a_1a_2} \circ T^{b_1b_2} &= -2\, f_c{}^{a_1a_2[b_1}\, T^{b_2]c} - f_{c_1c_2}{}^{[a_1}\, T^{a_2]b_1b_2c_1c_2} + 3\, Z_c\, T^{a_1a_2b_1b_2c}\,,\\
T^{a_1a_2} \circ T^{b_1\cdots b_5} &= 5\, f_c{}^{a_1a_2[b_1}\, T^{b_2\cdots b_5]c}\,,\\
T^{a_1\cdots a_5} \circ T_b &= f_b{}^{a_1\cdots a_5c}\, T_c + 10\, f_b{}^{[a_1a_2a_3}\, T^{a_4a_5]} + 20\, f_c{}^{[a_1a_2a_3}\, \delta^{a_4}_b\, T^{a_5]c}\\
&\quad + 5\, f_{bc}{}^{[a_1}\, T^{a_2\cdots a_5]c} + 10\, f_{c_1c_2}{}^{[a_1}\, \delta^{a_2}_b\, T^{a_3a_4a_5]c_1c_2} - 36\, Z_c\, \delta^{[c}_b\, T^{a_1\cdots a_5]}\,,\\
T^{a_1\cdots a_5} \circ T^{b_1b_2} &= 2\, f_c{}^{a_1\cdots a_5[b_1}\, T^{b_2]c} - 10\, f_c{}^{[a_1a_2a_3}\, T^{a_4a_5]b_1b_2c}\,,\\
T^{a_1\cdots a_5} \circ T^{b_1\cdots b_5} &= -5\, f_c{}^{a_1\cdots a_5[b_1}\, T^{b_2\cdots b_5]c}\,.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Условие (6.1) по виду напоминает условие проекции двойной и исключительной теории поля. Напомним, что последнее в двойной теории поля имеет один класс решений, когда функции зависят только от половины координат, а в исключительной теории поля — два класса решений, соответствующих 11-мерной супергравитации и 10-мерной супергравитации типа IIB. Так же и здесь, условие (6.1) для исключительной алгебры Дринфельда имеет два существенно разных типа решений: одно соответствует максимальной размерности $\dim\mathfrak{g} = n$ и описывает фон M-теории, второе соответствует $\dim\mathfrak{g} = n-1$ и описывает фон теории типа IIB. Представление (6.4) соответствует вложению геометрической подалгебры максимальной размерности n и описывает решения 11-мерной супергравитации. Для теории типа IIB исключительная алгебра принимает следующий вид [235]:

$$
\begin{aligned}
T_{\mathsf{a}} \circ T_{\mathsf{b}} &= f_{\mathsf{ab}}{}^{\mathsf{c}}\, T_{\mathsf{c}}\,,\\
T_{\mathsf{a}} \circ T^{\mathsf{b}}_{\beta} &= f_{\mathsf{a}\beta}^{\mathsf{cb}}\, T_{\mathsf{c}} + f_{\mathsf{a}\beta}{}^{\gamma}\, T^{\mathsf{b}}_{\gamma} - f_{\mathsf{ac}}{}^{\mathsf{b}}\, T^{\mathsf{c}}_{\beta} + 2\, Z_{\mathsf{a}}\, T^{\mathsf{b}}_{\beta}\,,\\
T_{\mathsf{a}} \circ T^{\mathsf{b}_1\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3} &= f_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{cb}_1\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3}\, T_{\mathsf{c}} + 3\, \varepsilon^{\gamma\delta}\, f_{\mathsf{a}\gamma}^{[\mathsf{b}_1\mathsf{b}_2}\, T^{\mathsf{b}_3]}_{\delta} - 3\, f_{\mathsf{ac}}{}^{[\mathsf{b}_1}\, T^{\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3]\mathsf{c}} + 4\, Z_{\mathsf{a}}\, T^{\mathsf{b}_1\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3}\,,\\
T^{\mathsf{a}}_{\alpha} \circ T_{\mathsf{b}} &= f_{\mathsf{b}\alpha}^{\mathsf{ac}}\, T_{\mathsf{c}} + 2\, \delta^{\mathsf{a}}_{[\mathsf{b}}\, f_{\mathsf{c}]\alpha}{}^{\gamma}\, T^{\mathsf{c}}_{\gamma} + f_{\mathsf{bc}}{}^{\mathsf{a}}\, T^{\mathsf{c}}_{\alpha} + 4\, Z_{\mathsf{c}}\, \delta^{[\mathsf{a}}_{\mathsf{b}}\, T^{\mathsf{c}]}_{\alpha}\,,\\
T^{\mathsf{a}}_{\alpha} \circ T^{\mathsf{b}}_{\beta} &= -f_{\mathsf{c}\alpha}^{\mathsf{ab}}\, T^{\mathsf{c}}_{\beta} - f_{\mathsf{c}\alpha}{}^{\gamma}\, \varepsilon_{\gamma\beta}\, T^{\mathsf{cab}} + \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{\alpha\beta}\, f_{\mathsf{c}_1\mathsf{c}_2}{}^{\mathsf{a}}\, T^{\mathsf{c}_1\mathsf{c}_2\mathsf{b}} - 2\, \varepsilon_{\alpha\beta}\, Z_{\mathsf{c}}\, T^{\mathsf{abc}}\,,\\
T^{\mathsf{a}}_{\alpha} \circ T^{\mathsf{b}_1\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3} &= -3\, f_{\mathsf{c}\alpha}^{\mathsf{a}[\mathsf{b}_1}\, T^{\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3]\mathsf{c}}\,,\\
T^{\mathsf{a}_1\mathsf{a}_2\mathsf{a}_3} \circ T_{\mathsf{b}} &= -f_{\mathsf{b}}{}^{\mathsf{ca}_1\mathsf{a}_2\mathsf{a}_3}\, T_{\mathsf{c}} - 6\, \varepsilon^{\gamma\delta}\, f_{[\mathsf{b}|\gamma}^{[\mathsf{a}_1\mathsf{a}_2}\, \delta^{\mathsf{a}_3]}_{|\mathsf{c}]}\, T^{\mathsf{c}}_{\delta}\\
&\quad + 3\, f_{\mathsf{bc}}{}^{[\mathsf{a}_1}\, T^{\mathsf{a}_2\mathsf{a}_3]\mathsf{c}} + 3\, f_{\mathsf{c}_1\mathsf{c}_2}{}^{[\mathsf{a}_1}\, \delta^{\mathsf{a}_2}_{\mathsf{b}}\, T^{\mathsf{a}_3]\mathsf{c}_1\mathsf{c}_2} + 16\, Z_{\mathsf{c}}\, \delta^{[\mathsf{a}_1}_{\mathsf{b}}\, T^{\mathsf{a}_2\mathsf{a}_3\mathsf{c}]}\,,\\
T^{\mathsf{a}_1\mathsf{a}_2\mathsf{a}_3} \circ T^{\mathsf{b}}_{\beta} &= -f_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{a}_1\mathsf{a}_2\mathsf{a}_3\mathsf{b}}\, T^{\mathsf{c}}_{\beta} + 3\, f_{\mathsf{c}\beta}^{[\mathsf{a}_1\mathsf{a}_2}\, T^{\mathsf{a}_3]\mathsf{bc}}\,,\\
T^{\mathsf{a}_1\mathsf{a}_2\mathsf{a}_3} \circ T^{\mathsf{b}_1\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3} &= -3\, f_{\mathsf{c}}{}^{\mathsf{a}_1\mathsf{a}_2\mathsf{a}_3[\mathsf{b}_1}\, T^{\mathsf{b}_2\mathsf{b}_3]\mathsf{c}}\,.
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

Здесь индексы $\mathsf{a},\mathsf{b} = 1,\ldots,n-1$ нумеруют генераторы геометрической подалгебры для вложения типа IIB, индексы $\alpha,\beta = \mathbf{1},\mathbf{2}$ нумеруют компоненты дублетов по группе $\mathrm{SL}(2)$ S-дуальности.

Эквивалентно условие (6.1) для $n \leqslant 6$ может быть переписано в виде

$$
\langle T_A, T_B\rangle^C = \eta_{AB}{}^C\,, \tag{6.6}
$$

где индекс $C = 1,\ldots,\dim\mathcal{R}_2$ нумерует компоненты представления $\mathcal{R}_2$ группы $\mathrm{E}_{n(n)}$, а инвариантный тензор $\eta_{AB}{}^C$ является обобщением компонент квадратичной формы η_{AB} классического дубля Дринфельда. При этом компоненты тензор $\eta_{AB}{}^C$ могут пониматься, как коэффициенты Клебша–Гордана, связывающие симметрическое произведение $\mathcal{R}_1 \times_{\mathrm{sym}} \mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$. Заметим, что для выбранного вложения алгебры $\mathfrak{gl}(n)$, которое задает максимальную геометрическую подалгебру $\mathfrak{g} = \mathrm{span}(T_a)$, выполняется $\langle T_a, T_b\rangle^C = 0$.

Геометрическая реализация

Как пуассон–лиева T-дуальность соответствует геометрической реализации альтернативного выбора максимальной изотропной подалгебры классического дубля Дринфельда, намбу–лиева U-дуальность соответствует альтернативному выбору решения условия (6.1) на генераторы исключительной алгебры Дринфельда. Алгоритм построения решения супергравитации для заданной исключительной алгебры Дринфельда следующий.

1. Выберем подалгебру $\mathfrak{g}$, определенную генераторами, удовлетворяющими условиям (6.1). Базис подалгебры $\mathfrak{g}$, которая оказывается лиевой алгеброй, обозначим $\{T_a\}$, где $a = 1,\dots,n$ для M-теории и $a = 1,\dots,n-1$ для теории типа IIB.

2. Построим групповой элемент $g = \mathrm{e}^{x^a T_a} \in G = \exp\mathfrak{g}$ и определим право-инвариантные 1-формы r_i^a и право-инвариантные векторные поля e_a^i стандартным образом:

$$r \equiv r_i^a\,\mathrm{d}x^i\,T_a = \mathrm{d}g\,g^{-1}\,, \qquad e_a^i \equiv (r_i^a)^{-1}\,. \tag{6.7}$$

3. Построим «присоединенное действие» элемента $g^{-1} \equiv \mathrm{e}^h$ на T_A:

$$\begin{aligned} g^{-1} \triangleright T_A &\equiv T_A + h \circ T_A + \tfrac{1}{2!}\,h \circ (h \circ T_A) \\ &\qquad + \tfrac{1}{3!}\,h \circ (h \circ (h \circ T_A)) + \cdots \\ &\equiv M_A{}^B(x)\,T_B\,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Как было показано в работах [231, 232, 234] матрица $M_A{}^B(x)$ оказывается элементом группы $\mathrm{E}_{n(n)}$ и может быть представлена в виде

$$M_A{}^B(x) = \mathbf{\Pi}_A{}^C(x)\,A_C{}^B(x)\,. \tag{6.9}$$

Здесь матрицы $\mathbf{\Pi}_A{}^C$ и $A_A{}^B$ ограничены условием (6.1). Для 11-мерного случая имеем

$$\mathbf{\Pi}_A{}^B = \begin{pmatrix} \delta_a^b & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2!}}\pi^{ba_1a_2} & \delta^{a_1a_2}_{b_1b_2} & 0 \\ \Pi^{ba_1\cdots a_5} & \frac{20}{\sqrt{2!\,5!}}\,\delta^{[a_1a_2}_{b_1b_2}\,\pi^{a_3a_4a_5]} & \delta^{a_1\ldots a_5}_{b_1\ldots b_5} \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

$$A_A{}^B = \begin{pmatrix} a_a{}^b & 0 & 0 \\ 0 & (a^{-1})^{a_1a_2}_{b_1b_2} & 0 \\ 0 & 0 & (a^{-1})^{a_1\ldots a_5}_{b_1\ldots b_5} \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

где

$$\begin{gathered} \Pi^{ba_1\cdots a_5} = -\frac{\pi^{ba_1\cdots a_5} + 5\,\pi^{b[a_1a_2}\,\pi^{a_3a_4a_5]}}{\sqrt{5!}}, \\ \delta^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_p} = \delta^{[a_1}_{b_1}\cdots\delta^{a_p}_{b_p}, \\ (a^{-1})^{a_1\ldots a_q}_{b_1\ldots b_q} = (a^{-1})_{[b_1}{}^{a_1}\ldots(a^{-1})_{b_q]}{}^{a_q}. \end{gathered} \tag{6.12}$$

Для решений уравнений теории типа IIB имеем [235]:

$$\mathbf{\Pi}_A{}^B = \begin{pmatrix} \delta^{\mathrm{b}}_{\mathrm{a}} & 0 & 0 \\ -\pi^{\mathrm{ba}}_{\alpha} & \delta^{\beta}_{\alpha}\,\delta^{\mathrm{a}}_{\mathrm{b}} & 0 \\ \Pi^{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3} & \frac{3\,\varepsilon^{\beta\gamma}\,\delta^{[\mathrm{a}_1}_{\mathrm{b}}\,\pi^{\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3]}_{\gamma}}{\sqrt{3!}} & \delta^{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3}_{\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3} \end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

$$A_A{}^B = \begin{pmatrix} a_{\mathrm{a}}{}^{\mathrm{b}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha{}^\beta\,(a^{-1})_{\mathrm{b}}{}^{\mathrm{a}} & 0 \\ 0 & 0 & (a^{-1})^{\mathrm{a}_1\ldots\mathrm{a}_3}_{\mathrm{b}_1\ldots\mathrm{b}_3} \end{pmatrix}, \tag{6.14}$$

где $\varepsilon^{\mathbf{12}} = \varepsilon_{\mathbf{12}} = 1$ — инвариантный тензор группы SL(2), а $\Pi^{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3} = -\frac{1}{\sqrt{3!}}\pi^{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3} + \frac{3}{2}\,\varepsilon^{\gamma\delta}\,\pi^{\mathrm{b}[\mathrm{a}_1}_{\gamma}\,\pi^{\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3]}_{\delta}$.

4. Определим обобщенный репер $E_A{}^I(x) \equiv \mathbf{\Pi}_A{}^B(x)\,\mathbb{E}_B{}^I(x)$, где матрица $\mathbb{E}_A{}^I$ имеет вид

$$\mathbb{E}_A{}^I = \begin{pmatrix} e^i_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-3\Delta}\,r^{a_1}_{[i_1}\,r^{a_2}_{i_2]} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-6\Delta}\,r_{[i_1}{}^{a_1}\cdots r_{i_5]}{}^{a_5} \end{pmatrix} \tag{6.15}$$

для 11-мерных решений и

$$\mathbb{E}_A{}^I = \begin{pmatrix} e^m_{\mathrm{a}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2\Delta}\,\lambda_\alpha{}^\beta\,r^{\mathrm{a}}_m & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-4\Delta}\,r_{[m_1}{}^{\mathrm{a}_1}\,r_{m_2}{}^{\mathrm{a}_2}\,r_{m_3]}{}^{\mathrm{a}_3} \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

для теории типа IIB. Замечательным результатом работ [231, 232, 234, 235] является доказательство, что так определенный репер $E_A{}^I$ удовлетворяет алгебре

$$\hat{\mathcal{L}}_{E_A} E_B{}^I = -\mathcal{F}_{AB}{}^C\, E_C{}^I\,, \tag{6.17}$$

где $\mathcal{F}_{AB}{}^C$ являются ничем иным, как структурными константами исключительной алгебры Дринфельда, а $\hat{\mathcal{L}}_V$ обозначает обобщенную производную Ли исключительной теории поля на полях, независящих от дуальных координат. Таким образом, формализм оказывается полностью ковариантным относительно группы U-дуальности $E_{n(n)}$, и фактически речь идет о флакс-формулировке исключительной теории поля на групповых многообразиях. Для двойной теории поля такая формулировка была построена в работах [238, 239].

5. Определим далее обобщенную метрику $\mathcal{M}_{IJ}(x) \equiv E_I{}^A(x)\, E_J{}^B(x)\, \hat{\mathcal{M}}_{AB}$, где $\hat{\mathcal{M}}_{AB} \in E_{n(n)} \times \mathbb{R}^+$ — некоторая постоянная матрица, а $E_I{}^A(x)$ обозначает обратный репер. Используя стандартную параметризацию обобщенной метрики в терминах метрики внутреннего пространства, детерминанта метрики внешнего пространства и полей 3- и 6-форм, восстанавливаем полное решение. Заметим, что поскольку внешняя метрика не является синглетом по группе U-дуальности, блок $(11-n)\times(11-n)$ полной 11-мерной метрики не равен метрике $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ исключительной теории поля, а связан с ней фактором некоторой степени детерминанта внутренней метрики, а именно:

$$\begin{aligned} \underline{\text{M-theory}}: &\qquad \mathfrak{g}_{\mu\nu} \equiv |\det g_{ij}|^{\frac{1}{9-n}}\, g_{\mu\nu}\,, \\ \underline{\text{Type IIB}}: &\qquad \mathfrak{g}_{\mu\nu} \equiv |\det \mathrm{g}_{mn}|^{\frac{1}{9-n}}\, \mathrm{g}_{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Во всех примерах ниже метрика $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ принимается постоянной диагональной.

Дуальность

Алгоритм получения решения, намбу–лиево U-дуального заданному, следующий.

1. Для заданной EDA преобразуем генераторы $T_A \longrightarrow T'_A = C_A{}^B\, T_B$ так, что новые генераторы T'_A также удовлетворяют условиям EDA. При этом структурные константы преобразуются как:

$$\mathcal{F}_{AB}{}^C \longrightarrow \mathcal{F}'_{AB}{}^C = C_A{}^D\, C_B{}^E\, (C^{-1})_F{}^C\, \mathcal{F}_{DE}{}^F\,. \tag{6.19}$$

Заметим, что этот шаг является технически самым сложным в алгоритме, поскольку общая процедура, гарантированно дающая EDA из EDA неизвестна. Такая процедура для специального вида матриц $C_A{}^B$, соответствующего внешним автоморфизмам исключительных алгебр, была предложена автором в работе [237].

2. Определим преобразованную постоянную матрицу

$$\hat{\mathcal{M}}'_{AB} = C_A{}^C\, C_B{}^D\, \hat{\mathcal{M}}_{CD}\,. \tag{6.20}$$

3. По новым генератором построим преобразованные обобщенные реперы $E'_A{}^I$ и новую обобщенную метрику $\mathcal{M}'_{IJ} = E'^A_I\, E'^B_J\, \hat{\mathcal{M}}'_{AB}$, которая задает преобразованные поля 11-мерной супергравитации или супергравитации типа IIB. Для внешней метрики имеем:

$$\begin{aligned} &\underline{\text{M-theory}}: && g'_{\mu\nu} \equiv |\det g'_{ij}|^{-\frac{1}{9-n}}\, \mathfrak{g}_{\mu\nu}\,,\\ &\underline{\text{Type IIB}}: && \mathrm{g}'_{\mu\nu} \equiv |\det \mathrm{g}'_{mn}|^{-\frac{1}{9-n}}\, \mathfrak{g}_{\mu\nu}\,, \end{aligned} \tag{6.21}$$

Строго говоря, поскольку полная флакс-формулировка исключительной теории поля не построена, нельзя утверждать, что описанный выше алгоритм всегда преобразует решения в решения. Однако, поскольку структура в целом идентична таковой для двойной теории поля, оснований встретиться с неожиданным поведением преобразований нет. Тем не менее, автор выражает надежду, что в ближайшее время такая формулировка исключительной теории поля будет построена. В настоящей диссертации представлены явные примеры намбу–лиевой дуальности между решениями супергравитации, следующие описанному выше алгоритму.

Наконец, прокомментируем название преобразований намбу–лиевой дуальности, которое дано по аналогии с пуассон–лиевой дуальностью. Построенное выше присоединенное действие элемента g^{-1} определяет три-векторное поле

$$\pi \equiv \frac{1}{3!}\, \pi^{ijk}\, \partial_i \wedge \partial_j \wedge \partial_k \equiv \frac{1}{3!}\, \pi^{abc}\, e_a \wedge e_b \wedge e_c\,, \tag{6.22}$$

которое удовлетворяет следующим свойствам:

$$
\begin{aligned}
0 &= \pi^{a_1a_2d}\,\nabla_d\pi^{b_1b_2c} - 3\,\pi^{d[b_1b_2}\,\nabla_d\pi^{c]a_1a_2} - f_{d_1d_2}{}^{[a_1}\,\pi^{a_2]b_1b_2cd_1d_2}\,,\\
\mathcal{L}_{v_a}\pi^{i_1i_2i_3} &= \mathrm{e}^{-3\Delta}\,f_a{}^{b_1b_2b_3}\,v^{i_1}_{b_1}\,v^{i_2}_{b_2}\,v^{i_3}_{b_3}\,.
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

Здесь по определению $\nabla_b\pi^{a_1a_2a_3} \equiv D_b\pi^{a_1a_2a_3} - \frac{3}{2}\,f_{bc}{}^{[a_1|}\,\pi^{c|a_2a_3]}$. Получаем в точности условия, что три-вектор π задает намбу–лиеву структуру на многообразии. Аналогично можно записать условия для гекса-вектора $\pi^{i_1\cdots i_6}$ и всех поливекторов теории типа IIB.

6.1.2 Неабелева U-дуальность в 11-мерной теории

Преобразование неабелевой T-дуальности 10-мерной теории на языке алгебры Дринфельда соответствует замене $T_a \leftrightarrow T^a$ генераторов геометрической и дуальной максимально изотропных подалгебр. Для исключительной алгебры Дринфельда такое преобразование определить довольно затруднительно хотя бы в силу различности размерностей подалгебры $\mathfrak{g}$, натянутой на генераторы T_a, и ее линейного дополнения $\tilde{\mathfrak{g}}$, натянутого на генераторы $\{T^{a_1a_2}, T^{a_1\dots a_5}\}$. Возможное обобщение канонического преобразования $T_a \leftrightarrow T^a$ на случай EDA было предложено в работе автора [237] и основано на его соответствии внешнему автоморфизму алгебры U-дуальности. Действительно, преобразование $T_a \leftrightarrow T^a$ отображает заданное вложение подалгебры $\mathfrak{gl}(n)$ в альтернативное и соответствует внешнему автоморфизму, переставляющему спинорные корни алгебры $\mathfrak{so}(n,n)$. Таким образом, естественным обобщением канонического преобразования генераторов будет такой внешний автоморфизм алгебры абелевой U-дуальности, который связывает два вложения максимальной $\mathfrak{gl}(n)$ подалгебры. В работе [237] было показано, что автоморфизма, связывающего 11-мерные фоновые пространства, для случая группы SL(5) не существует, тогда как для $n = 3{,}5{,}7$ можно предъявить явно преобразование, которое гарантированно переводит EDA в EDA. В терминах генераторов исключительной алгебры Дринфельда преобразования, связывающие два вложения максимальной $\mathfrak{gl}(n)$ подалгебры, имеют следующий вид:

$$n=3: \qquad \begin{cases} T'_{\dot a} = T^{\dot a 3}\,, \\ T'_3 = T^{12}\,, \\ T'^{12} = -T_3\,, \\ T'^{\dot a 3} = T_{\dot a}\,, \end{cases} \tag{6.24}$$

$$n=5: \qquad \begin{cases} T'_a = T^{a5}\,, \\ T'_5 = -T^{1\cdots 5}\,, \\ T'^{ab} = -\frac{1}{2!}\,\varepsilon_{abcd5}\,T^{cd}\,, \\ T'^{a5} = T_a\,, \\ T'^{1\cdots 5} = -T_5\,, \end{cases} \tag{6.25}$$

$$n=7: \qquad \begin{cases} T'_{\dot a} = T^{\dot a 7}\,, \\ T'_5 = -T^{1\cdots 7,7}\,, \\ T'^{\dot a_1 \dot a_2} = -\frac{1}{5!}\,\varepsilon_{\dot a_1 \dot a_2 b_1\cdots b_5}\,T^{b_1\cdots b_5}\,, \\ T'^{\dot a 7} = T_{\dot a}\,, \\ T'^{\dot a_1\cdots \dot a_5} = \varepsilon_{\dot a_1\cdots \dot a_5 \dot b 7}\,T^{1\cdots 7,\dot b}\,, \\ T'^{\dot a_1\cdots \dot a_4 7} = \frac{1}{2!}\,\varepsilon_{\dot a_1\cdots \dot a_4 \dot b_1 \dot b_2 7}\,T^{\dot b_1 \dot b_2}\,, \\ T'^{1\cdots 7,\dot a} = -\frac{1}{5!}\,\varepsilon_{\dot a \dot b_1\cdots \dot b_5 7}\,T'^{\dot b_1\cdots \dot b_5}\,, \\ T'^{1\cdots 7,7} = T_5\,, \end{cases} \tag{6.26}$$

где принято обозначение $\varepsilon_{1\cdots n} = 1$. Условие, что так преобразованная алгебра опять имеет структуру исключительной алгебры Дринфельда, накладывает существенные ограничения на структурные константы, которые мы рассмотрим ниже для $n = 3$ и $n = 5$. Для $n = 4$ соответствующие условия сводят преобразование к пуассон–лиевой Т-дуальности. В терминах генераторов EDA генераторы классического дубля Дринфельда $T^{\dot a}$ ($\dot a = 1, \ldots, n-1$) соответствуют $T^{\dot a \#}$ (где # обозначает компактное направление М-теории). Таким образом подмножество преобразований вида

$$T'_{\dot a} = T^{\dot a \#}\,, \qquad T'^{\dot a \#} = T_{\dot a} \tag{6.27}$$

является подгруппой пуассон–лиевой Т-дуальности полной группы намбу–лиевой U-дуальности (которая, впрочем, не известна).

Стоит отметить, что множество преобразований, заданное внешними автоморфизмами, не является исчерпывающим и соответствует неабелевой

Т-дуальности. Поиск преобразований, соответствующих пуассон–лиевой Т-дуальности, приходится вести, вручную проверяя свойства алгебры относительно преобразований, заданных конкретными матрицами $C_A{}^B$.

Рассмотрим наиболее интересные примеры намбу–лиевой U-дуальности, найденные в работе [236]. Пусть $n = 5$, что соответствует группе абелевой U-дуальности SO(5,5). Находим, что преобразования (6.25) сохраняют структуру исключительной алгебры Дринфельда, если положить

$$\begin{aligned}
&f_{\dot a\dot b}{}^{\dot b} = f_{a5}{}^{b} = 0\,, && f_{\dot b}{}^{\dot b\dot a5} = f_{\dot a}{}^{\dot b\dot c\dot d} = f_5{}^{abc} = 0\,, \quad Z_a = 0\,,\\
&f'_{\dot a\dot b}{}^{\dot c} = -f_{\dot c}{}^{\dot a\dot b5}\,, && f'_{\dot a}{}^{\dot b\dot c5} = -f_{\dot b\dot c}{}^{\dot a}\,,\\
&f'_{\dot a\dot b}{}^{5} = -\tfrac{1}{2!}\,\varepsilon_{\dot a\dot b\dot c\dot d5}\,f_{\dot c\dot d}{}^{5}\,. &&
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Условия во второй строке имеют тот же вид, что и таковые для пуассон–лиевой дуальности, если принять $f_{\dot a}{}^{\dot b\dot c} = -f_{\dot a}{}^{\dot b\dot c5}$. Последнее же условие является специфическим именно для исключительной алгебры Дринфельда и соответствующее преобразование, очевидно, не является тривиальным поднятием пуассон–лиевой дуальности в 11 измерений. Соответственно, для решений, удовлетворяющих $f_{\dot a\dot b}{}^5 = 0$, преобразование является ничем иным как пуассон–лиевой Т-дуальностью и не представляет особый интерес в рамках исследования новых симметрий. Конкретные реализации таких преобразований предъявлены в работе [236]. Рассмотрим здесь нетривиальный случай $f_{\dot a\dot b}{}^5 \neq 0$, а именно:

$$f_{12}{}^5 = -1\,, \quad f_{13}{}^2 = 1\,, \quad f_{23}{}^1 = -1\,. \tag{6.29}$$

Применяя преобразование (6.28), получим следующие структурные константы исключительной алгебры Дринфельда:

$$f'_{34}{}^5 = 1\,, \quad f'_2{}^{135} = -1\,, \quad f'_1{}^{235} = 1\,. \tag{6.30}$$

Следуя описанному выше алгоритму, определим обобщенную метрику через обобщенный репер и плоскую метрику $\hat{\mathcal{M}}_{AB}$. Последняя находится из условия, что алгебра $\mathfrak{g}$, заданная начальными структурными константами, генерирует решение уравнений 11-мерной супергравитации. Получим

$$
\hat{\mathcal{M}}_{AB} = 2^{\frac{5}{4}} \begin{pmatrix}
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{32}
\end{pmatrix}. \tag{6.31}
$$

Находим, что блок обобщенной метрики, соответствующий метрике дуального пространства, оказывается вырожденным, что соответствует т.н. нериманово-му фону. Такие фоновые пространства, имеющие интерпретацию в терминах обобщенной метрики, но не обычной римановой метрики, подробно рассматривались в работах [240, 241, 242]. Здесь мы хотим избежать подобного патологического поведения, поэтому дополнительно преобразуем полученный нериманов фон стандартной U-дуальностью $\exp[\eta\, R_{123}]$, что дает для новых структурных констант

$$
f'_{34}{}^{5} = 1\,, \;\; f'_{2}{}^{135} = -1\,, \;\; f'_{1}{}^{235} = 1\,, \;\; f'_{4}{}^{125} = -\eta\,. \tag{6.32}
$$

В параметризации $g' = \exp[x'\,T'_1 + y'\,T'_2 + z'\,T'_3]\,\exp[u'\,T'_4 + v'\,T'_5]$ находим следующий вид для право-инвариантной 1-формы:

$$
r'^{a}_{i} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & z' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \tag{6.33}
$$

и намбу–лиевой структуры:

$$\pi' = \left(-y'\,\partial_1 \wedge \partial_3 + x'\,\partial_2 \wedge \partial_3 - \eta\, u'\,\partial_1 \wedge \partial_2\right) \wedge \partial_5\,. \tag{6.34}$$

Дуальная 11-мерная полевая конфигурация тогда задается следующими метрикой и 3-формой:

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \frac{(2\eta)^{-\frac{4}{3}}}{(8+u^2)^{\frac{2}{3}}}\times \\
&\times\begin{pmatrix}
8-x^2 & -xy & \eta ux & \eta xz & \eta x \\
-xy & 16-y^2 & \eta uy & \eta yz & \eta y \\
\eta ux & \eta uy & \eta^2\left(-u^2\right) & -\eta(\eta uz+16) & -\eta^2 u \\
\eta xz & \eta yz & -\eta(\eta uz+16) & \eta z(4u-\eta z)-4x^2-2y^2+32 & \eta(2u-\eta z) \\
\eta x & \eta y & -\eta^2 u & \eta(2u-\eta z) & -\eta^2
\end{pmatrix}, \\
C_3 &= \frac{1}{\eta\,(8+u^2)}\Bigg\{8\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - \left(u\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}u + 2x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}u\right)\wedge\mathrm{d}v \\
&\quad - \left[\left(\frac{16-2x^2-y^2}{\eta}+uz\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + (uy\,\mathrm{d}x - 2ux\,\mathrm{d}y)\wedge\mathrm{d}z\right]\wedge\mathrm{d}u\Bigg\}, \\
g_{\mu\nu} &= 2^{-\frac{7}{12}}\,\eta^{\frac{2}{3}}\left(8+u^2\right)^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{diag}(1,1,1,1,1,1)\,,
\end{aligned} \tag{6.35}$$

и является фоном для так называемой M*-теории. Звезда означает, что низкоэнергетическое описание задается действием 11-мерной супергравитации с обратным знаком перед кинетическим слагаемым для 3-формы, что формально соответствует двум времениподобным направлениям. Подобные теории изучались в работе [243], где было показано, что фон M-теории (или теории типа IIA) и фон M*-теории (или, соответственно, теории типа IIA*) связаны времени подобной T-дуальностью. Видно, что в пределе $\eta \to 0$ становятся сингулярными поля супергравитации, но не обобщенная метрика.

Убедиться, что полученная дуальность не является тривиальным поднятием пуассно–лиевой T-дуальности можно следующим простым наблюдением. Пусть $x^5 = v$ соответствует компактной координате M-теории. Тогда в результирующей теории типа IIA находим RR формы ранга 1 и 3, тогда как изначальный фон был чисто гравитационным. Пуассон–лиева T-дуальность не может генерировать RR поля, поэтому рассматривая дуальность является новым преобразованием.

Заметим, наконец, что полученная обобщенная метрика обладает нетривиальной монодромией из группы U-дуальности SO(5,5), если считать координаты (x,y) компактными с радиусами (c^x,c^y), и следовательно может пониматься как U-образие. Монодромия задается следующим преобразованием:

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_{IJ}(x + c^x, y + c^y, u) \\ &= \left(\Omega_{c^x}\, \Omega_{c^y}\, \mathcal{M}'\, \Omega_{c^y}^{\mathrm{T}}\, \Omega_{c^x}^{\mathrm{T}}\right)_{IJ}(x,y,u)\,. \end{aligned} \tag{6.36}$$

где групповой элемент задан выражениями

$$\Omega_{c^x} = \mathrm{e}^{c^x R_{235}} \in \mathrm{SO}(5,5), \quad \Omega_{c^y} = \mathrm{e}^{-c^y R_{135}} \in \mathrm{SO}(5,5)\,. \tag{6.37}$$

6.1.3 Неабелева дуальность между решениями 11-мерной супергравитации и теории типа IIB

Рассмотрим теперь пример неабелевой U-дуальности, связывающей решения 11-мерной супергравитации и супергравитации типа IIB. Пусть группа абелевой U-дуальности $\mathrm{SL}(3) \times \mathrm{SU}(2)$, а исключительная алгебра Дринфельда задана единственной ненулевой структурной константой

$$f_{23}{}^1 = 1\,. \tag{6.38}$$

Правоинвариантная 1-форма, соответствующая параметризации $g = \mathrm{e}^{x\,T_1}\,\mathrm{e}^{y\,T_2}\,\mathrm{e}^{z\,T_3}$, имеет следующий вид:

$$r = \mathrm{d}x\, T_1 + \mathrm{d}y\, T_2 + \mathrm{d}z\,(T_3 + y\, T_1)\,. \tag{6.39}$$

Фиксируем плоскую метрику $\hat{g}_{ab}$ и получаем метрику на трехмерном «внутреннем» пространстве:

$$\hat{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2\,y \end{pmatrix}. \tag{6.40}$$

Напомним, что внешняя метрика предполагается пропорциональной единичной матрице, поэтому для инвариантной метрики имеем:

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,1,1,1,1,1,1) = \mathfrak{g}_{\mu\nu}\,. \tag{6.41}$$

Такая метрика является локально плоской, и фактически мы имеем дело с плоским 11-мерным пространством, очевидно, удовлетворяющим уравнениям Эйнштейна. Чтобы избежать расходимости метрики при $y \to \infty$, будем считать, что y является циклической координатой. В таком случае дуальный фон будет обладать SL(2) монодромией и представлять собой U-образие.

Пусть теперь плоская метрика $\hat{\mathcal{M}}_{AB} \in \mathrm{E}_{3(3)} \times \mathbb{R}^{+}$ имеет следующий вид:

$$\hat{\mathcal{M}}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.42}$$

а преобразование генераторов $T_A \longrightarrow T'_A = C_A{}^B T_B$ задается матрицей

$$C_A{}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.43}$$

Легко видеть, что если считать z компактной координатой М-теории, такое преобразование является стандартной Т-дуальностью в направлении x. Тогда преобразованные генераторы образуют исключительную алгебру Дринфельда типа IIB и задаются структурными константами вида:

$$f'_{2\mathbf{2}}{}^{\mathbf{1}} = 1\,. \tag{6.44}$$

Здесь принято обозначение $f'_{a\alpha}{}^{\beta}$ для структурных констант, причем $\{a,\alpha,\beta\} = \{2,\mathbf{2},\mathbf{1}\}$. Параметризуя элемент дуальной группы $g' = \mathrm{e}^{x' T'_1 + y' T'_2}$, получим обобщенный репер следующего вида:

$$E'_I{}^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y' & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.45}$$

Вложение теории типа IIB в SL(3) × SL(2) исключительную теорию поля, задается в частности параметризацией обобщенной метрики, которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$\mathcal{M}'_{IJ} = E'^{\,A}_{I}\, E'^{\,B}_{J}\, \mathcal{M}'_{AB} = \begin{pmatrix} g_{mn} & 0 \\ 0 & m_{\alpha\beta}\, g^{mn} \end{pmatrix}. \tag{6.46}$$

Отсюда получим метрику на «внутреннем» пространстве g_{mn} и матрицу $m_{\alpha\beta}$, параметризованную аксио-дилатоном, в следующем виде:

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2\,y \end{pmatrix}. \tag{6.47}$$

Окончательно для полного 10-мерного фона получим:

$$\begin{aligned} &g_{(10)} = \sqrt{2\,y}\ \mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1)\,, \qquad C_0 = -\frac{1}{2\,y}\,, \\ &\mathrm{e}^{\Phi} = 2\,y\,, \end{aligned} \tag{6.48}$$

Как и ранее, такая конфигурация является фоном для теории типа IIB*. Для возврата к более стандартным фоновым конфигурациям преобразуем решение T-дуальностью вдоль времениподобного направления. В результате имеем решение уравнений супергравитации типа IIA:

$$\begin{aligned} &g_{mn} = \mathrm{diag}\Big(-\tfrac{1}{\sqrt{2\,y}},\sqrt{2\,y},\ldots,\sqrt{2\,y}\Big)\,, \qquad C_1 = -\frac{\mathrm{d}t}{2\,y}\,, \\ &\mathrm{e}^{-2\Phi} = (2\,y)^{-\frac{3}{2}}\,. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Наконец, дополнительная T-дуальность вдоль направления x и S-дуальность дает решение без нетривиальных RR полей:

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}s^2 = \frac{-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2}{2\,y} + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z_1^2 + \cdots + \mathrm{d}z_7^2\,, \\ &B_2 = \frac{\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x}{2\,y}\,, \qquad \mathrm{e}^{-2\Phi} = 2\,y\,. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Легко видеть, что тензор напряженности для поля Калба–Рамона не равен нулю, что означает, что решение нетривиальное. Это позволяет заключить, что неабелева U-дуальность генерирует нетривиальные решения из плоского пространства. Вопрос, в какой степени такие пространства являются эквивалентными с точки зрения струны/мембраны остается открытым.

6.2 Деформации решений супергравитации

Полученные выше примеры являются в дискретными преобразованиями, в том смысле, что связывают две точки в пространстве вакуумов М-теории, что неудивительно, поскольку они заданы дискретными внешними автоморфизмами соответствующей алгебры U-дуальности. Рассмотрим теперь отдельный класс намбу–лиевой U-дуальности, представляющей собой непрерывное (вообще говоря, многопараметрическое) преобразование фонового пространства. Для пуассон–лиевой T-дуальности замечательным частным случаем является т.н. янг–бакстерова деформация фонового пространства, которая сохраняет интегрируемость двумерной сигма-модели, понимаемой здесь в смысле построения пары Лакса. Интегрируемые деформации сигма-моделей известны по крайней мере с 1981 года, когда И.В. Чередник в работе [244] построил пару Лакса для однопараметрической деформации главной киральной SU(2) сигма-модели. Ранее в работе [245] была получена пара Лакса для любой главной сигма-модели с простой группой Ли. На основе этих результатов в работе [246] 2008 года явным построением пары Лакса была доказана интегрируемость янг–бакстеровой деформации главой киральной сигма-модели, то есть, такой деформации, которая задается r-матрицей, решающей классическое уравнение Янга–Бакстера. С точки зрения приложений к изучению симметрий пространства вакуумов теории струн особый интерес представляет аналогичный результат для двумерной сигма-модели на фоне пространства $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$, в формулировке Мецаева–Цейтлинав. В работе [247] была показана интегрируемость такой сигма–модели, а позднее в работе [14] описана однопараметрическая интегрируемая деформация. В терминах фонового пространства решение $\mathrm{AdS}_5 \times \mathbb{S}^5$ деформируется в некоторый фон, называемый сейчас ABF по первым буквам фамилий авторов работ [248, 15], который не является решением уравнений супергравитации. Вместо этого, такой фон решает уравнения так называемой обобщенной супергравитации [17]. Несложно заметить, что получение деформированных фоновых пространств для струны деформацией сигма-модели и извлечением фоновых полей является довольно трудоемким процессом, применимым по-видимому только для сигма-модели на фактор-группе. Более общий метод деформации решений уравнений супергравитации, применимый для произвольного фона, допускающего как минимум два вектора Киллинга, был предложен в работах [249, 250, 251]. В предложенном подходе классическая r-матрица r^{ab} объединяется с векторами Киллинга $k_a{}^m$ в бивектор $\beta^{mn} = 1/2 r^{ab} k_a{}^m k_b{}^n$. Применяя к фону, заданному метрикой g_{mn}, преобразование, схожее по виду с отображением Зайберга–Виттена

$$g^{-1} + \beta = (G + B)^{-1}, \tag{6.51}$$

получим деформированное фоновое пространство, заданное метрикой G_{mn} и полем B_{mn}. В работах [252, 253] было доказано, что такое преобразование всегда отображает решение в решение, если $I^m \equiv \nabla_n \beta^{mn} = 0$. Дополнительно, в работе автора с коллегой [253] был предложен систематический подход к описанию таких бивекторных деформаций в терминах двойной теории поля. А именно, с точки зрения обобщенного репера преобразование (6.51) может рассматриваться как переход от нижнетреугольной к верхнетреугольной параметризации. При этом очевидно, что поскольку обобщенная метрика не меняется, условие, что набор (G_{mn}, B_{mn}) удовлетворяет уравнениям движения стандартной супергравитации эквивалентен тому, что обобщенная метрика, параметризованная (g_{mn}, β^{mn}), удовлетворяет уравнениям двойной теории поля, при условии независимости от дуальных координат. Такая формулировка позволила автору с коллегами в работе [254] обобщить понятие янг–бакстеровской бивекторной деформации решений 10-мерной супергравитации на некоторый класс тривекторных деформаций решений 11-мерной супергравитации. Ниже в разделе 6.2.1 описана реализация три- и гексавекторных деформаций как намбу–лиевых преобразований, применимая для групповых многообразий. В разделе 6.2.2 описан более общий подход, основанный на репараметризации обобщенной метрики SL(5) теории.

6.2.1 Реализация поливекторных деформаций намбу–лиевыми преобразованиями

Напомним, что реализация янг–бакстеровых деформаций струнного фона в терминах пуассон–лиевой T-дуальности задается матрицей вида

$$C_A{}^B = \begin{pmatrix} \delta_a^b & 0 \\ r^{ab} & \delta_b^a \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(d,d)\,, \tag{6.52}$$

где r^{ab} удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера

$$r^{da}\, r^{eb}\, f_{de}{}^c + r^{db}\, r^{ec}\, f_{de}{}^a + r^{dc}\, r^{ea}\, f_{de}{}^b = 0\,, \tag{6.53}$$

что является следствием требования сохранения структуры классического дубля Дринфельда. При этом обобщенная метрика преобразуется линейно, $\mathcal{H}_{IJ} \to \mathcal{H}'_{IJ} = (U\,\mathcal{H}\,U^t)_{IJ}$, где

$$U_I{}^J(x) = \exp\left[\beta^{mn} R_{mn}\right] = \begin{pmatrix} \delta_m^n & 0 \\ \beta^{mn}(x) & \delta_n^m \end{pmatrix}, \quad \beta^{mn} = \frac{1}{2} r^{ab}\, v_a^m\, v_b^n\,, \tag{6.54}$$

а v_a^m обозначают компоненты лево-инвариантных векторных полей (векторы Киллинга), удовлетворяющих $[v_a, v_b] = f_{ab}{}^c\, v_c$. Соответственно, такое преобразование называется бивекторной деформацией.

Естественно обобщить такую деформацию на случай 11-мерных фоновых конфигураций M-теории, используя матрицу $C_A{}^B$ вида

$$C = \exp\left[\frac{1}{3!}\rho^{abc} R_{abc}\right] \exp\left[\frac{1}{6!}\rho^{a_1\ldots a_6} R_{a_1\ldots a_6}\right] \in \mathrm{E}_{n(n)}. \tag{6.55}$$

Интересно, что такие тривекторные преобразования 11-мерных решений были предложены в работе [254] автора с коллегами для произвольных решений, обладающих минимум тремя векторами Киллинга. Интерпретация в терминах намбу–лиевой U-дуальности была получена позднее в работе [231] для фоновых конфигураций, представляющих собой групповые многообразия. Первые нетривиальные примеры обобщенных янг–бакстеровых деформаций были получены автором с коллегой в работе [236] на основе подхода EDA. Здесь в угоду связности изложения мы отойдем от исторического пути развития этих идей и рассмотрим сначала реализацию поливекторных деформаций намбу–лиевыми преобразованиями на примере конкретного решения.

Пусть $E_{6(6)}$ исключительная алгебра Дринфельда задана следующими структурными константами:

$$f_{24}{}^{1} = 1\,, \qquad f_{34}{}^{2} = 1\,. \tag{6.56}$$

Параметризуя групповой элемент $g = \exp[wT_4]\exp[xT_1 + yT_2 + zT_3 + uT_5 + vT_6]$, получим для право-инвариантной 1-формы следующее выражение:

$$\begin{aligned} r = {} & \mathrm{d}x\, T_1 + \mathrm{d}y\,(T_2 - w\,T_1) + \mathrm{d}z\left(T_3 - w\,T_2 + \frac{w^2}{2}\,T_1\right) \\ & + \mathrm{d}w\, T_4 + \mathrm{d}u\, T_5 + \mathrm{d}v\, T_6\,. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Плоская метрика и соответствующая Риччи-плоская метрика на «внутреннем» шестимерном пространстве имеют вид:

$$\hat{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\,w & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2\,w & 2\,w^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.58}$$

Поскольку внешняя метрика исключительной теории поля $\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ выбрана постоянной диагональной, а $|\det(g_{ij})| = 1$, связанный с ней 5×5 блок $g_{\mu\nu} \equiv |\det(g_{ij})|^{-\frac{1}{3}}\,\mathfrak{g}_{\mu\nu}$ полной 11-мерной метрики тоже представлен постоянной диагональной матрицей. Таким образом, начальный фон имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 = \delta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}y^\mu\,\mathrm{d}y^\nu + g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\,. \tag{6.59}$$

Пусть теперь матрица

$$C = \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\,R_{123} - \sqrt{2}\,R_{456}}\;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,R_{123456}}\,, \tag{6.60}$$

что продиктовано условием сохранения структуры исключительной алгебры Дринфельда. Дуальная алгебра задается следующими структурными константами:

$$\begin{aligned} f_{24}{}^{1} &= 1\,, & f_{34}{}^{2} &= 1\,, \\ f_{2}{}^{156} &= \sqrt{2}\,, & f_{3}{}^{256} &= \sqrt{2}\,. \end{aligned} \tag{6.61}$$

Линейное преобразование обобщенной метрики $\mathcal{M}'_{IJ} = (U\,\mathcal{M}\,U^t)_{IJ}$, задается матрицей, вообще говоря принадлежащей $E_{6(6)}$, и имеющей вид

$$\begin{aligned} U &= \mathrm{e}^{\frac{1}{3!}\Omega^{i_1 i_2 i_3}\,R_{i_1 i_2 i_3}}\;\mathrm{e}^{\Omega^{123456}\,R_{123456}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}R_{123} - \sqrt{2}\,(R_{456} + y\,R_{156} + z\,R_{256})}\;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}R^{1\cdots 6}}\,. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Здесь три-вектор $\rho^{i_1 i_2 i_3}$ и гекса-вектор ρ^{123456} определены соотношениями

$$
\begin{aligned}
\Omega^{i_1 i_2 i_3} &\equiv \rho^{a_1 a_2 a_3}\, v_{a_1}^{i_1}\, v_{a_2}^{i_2}\, v_{a_3}^{i_3}\,,\\
\Omega^{i_1 \cdots i_6} &\equiv \rho^{a_1 \cdots a_6}\, v_{a_1}^{i_1} \cdots v_{a_6}^{i_6}\,,
\end{aligned}
\tag{6.63}
$$

через компоненты постоянных ρ-тензоров

$$
\rho^{123} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,, \qquad \rho^{456} = -\sqrt{2}\,, \qquad \rho^{123456} = \frac{1}{2}\,,
\tag{6.64}
$$

и лево-инвариантные векторы Киллинга начального решения заданы выражениями

$$
v_4 = \partial_w + y\,\partial_x + z\,\partial_y\,, \qquad v_a = \partial_a \quad (a \neq 4).
\tag{6.65}
$$

Результирующее деформированное решение уравнений 11-мерной супергравитации имеет вид:

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= (1+z^2)^{1/3}\,\delta_{\mu\nu}\\
g_{ij} &= -\frac{1}{2(1+z^2)^{2/3}}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 4(1+z^2) & 0 & 0 & 0\\
 & 4 & -4(2w+yz) & -2z & 0 & 0\\
 & & 4w[4yz+2w(1-z^2)]-4y^2 & 2(2wz-y) & 0 & 0\\
 & & & 1+2z^2 & 0 & 0\\
 & & & & 1 & 0\\
 & & & & & 1
\end{pmatrix},\\
C_3 &= -\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - \frac{1}{\sqrt{2}\,(1+z^2)}\left[z\,\mathrm{d}y + (y-2wz)\,\mathrm{d}z + \tfrac{\mathrm{d}w}{2}\right]\wedge\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\,,\\
C_6 &= -\frac{1}{4\,(1+z^2)}\,\mathrm{d}x\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}
\tag{6.66}
$$

Заметим, что за десять месяцев до публикации данного примера поливекторной деформации, в работе [156] были представлены поливекторные деформации решения $\mathrm{AdS}_4 \times \mathbb{S}^7$, полученные в рамках более общего подхода, описанного ниже. Однако, впоследствии оказалось, что в отдельных найденных примерах соответствующий ρ-тензор не является решением обобщенного уравнения Янга–Бакстера, что не было проверено в работе [156] по причине неизвестности последнего на тот момент. Таким образом, полученные автором с коллегой решения можно считать первыми примерами поливекторных деформаций решений 11-мерной супергравитации. При этом, описанный выше подход, являясь алгебраическим, имеет существенное ограничение в том, что применим только к групповым многообразиям. Ниже мы рассмотрим подход, предложенный в [254] и, вообще говоря, еще ранее в [253], свободный от этого ограничения.

6.2.2 Деформации произвольного решения

Бивекторные деформации

Обобщение преобразований намбу–лиевой и пуассон–лиевой дуальностей за пределы класса фоновых пространств, представленных (фактор-)групповыми многообразиями в общем случае неизвестно, хотя определенный прогресс в этом направлении представлен работой [255]. Однако, подмножество таких преобразований, соответствующих поливекторными деформациям, может быть обобщено на любые фоновые пространства с достаточным количеством изометрий. Пусть начальный фон, который задан метрикой $g_{mn} = e_m{}^a e_n{}^b \eta_{ab}$, полем Калба–Рамона b_{mn} и дилатоном φ, обладает набором векторов Киллинга $k_\alpha{}^m$. Определим бивектор

$$\beta^{mn} = r^{\alpha\beta} k_\alpha^m k_\beta^n, , \tag{6.67}$$

где $r^{\alpha\beta} = -r^{\beta\alpha}$ — постоянная матрица, и выберем базис генераторов $T_{\mathcal{MN}} = \{T_{mn}, T^m{}_n, T^{mn}\}$ группы дуальности $\mathrm{O}(d,d)$ в разложении по максимальной подгруппе $\mathrm{GL}(d)$. Тогда преобразование (6.54) может быть записано в самом общем виде как

$$\begin{aligned} E'_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{M}} &= U^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}} E_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{N}}, \\ U &= \exp\left[\beta^{mn} T_{mn}\right] = \begin{bmatrix} \delta_k^m & -\beta^{ml} \\ 0 & \delta_n^l \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{6.68}$$

где мы воспользовались явным видом компонент генераторов в векторном представлении:

$$(T_{\mathcal{MN}})^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\Big(\eta_{\mathcal{ML}} \delta^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{N}} - \eta_{\mathcal{NL}} \delta^{\mathcal{K}}{}_{\mathcal{M}}\Big). \tag{6.69}$$

Замечательным наблюдением работы [256] было, что такие преобразования фоновых полей (записанные, однако, в другом виде, см. ниже) переводят решение в решение, если постоянная матрица $r^{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнению

$$f_{\delta\varepsilon}{}^{[\alpha}r^{\beta|\delta|}r^{\gamma]\varepsilon} = 0. \tag{6.70}$$

Здесь $f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ обозначают структурные константы алгебры изометрии начального фона $[k_\alpha,k_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}k_\gamma$. Другими словами, $r^{\alpha\beta}$ является классической (постоянной) матрицей Янга–Бакстера. В последующей работе автора [257] это утверждение было полностью доказано для конфигураций с $b_{mn} = 0$ с использованием формализма β-супергравитации. Предпочтительнее, однако, более элегантный метод, основанный на флакс-формулировке двойной теории поля и наблюдении об инвариантности обобщенного флакса относительно янг–бакстеровых деформаций [258].

Рассмотрим подробнее преобразование полей NS-NS сектора 10-мерной супергравитации типа II при бивекторной деформации. Обобщенный репер двойной теории поля $E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} \in O(d,d)$ и соответствующая обобщенная метрика $\mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}}E_{\mathcal{N}}{}^{\mathcal{B}}\mathcal{H}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ параметризуются репером $e_m{}^a$ и полем b_{mn}:

$$E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} e_m^a & 0 \\ & \\ -e_b^l B_{lm} & e_b^n \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} g_{mn} - b_m{}^l b_{ln} & b_m{}^q \\ & \\ b_n{}^p & g^{pq} \end{bmatrix}, \tag{6.71}$$

где плоская метрика $\mathcal{H}_{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \mathrm{diag}[\eta_{ab},\eta^{cd}]$ имеет блочно-диагональный вид. Преобразованный согласно (6.68) обобщенный репер и соответствующая ему метрика принимают вид:

$$E_{\mathcal{M}}{}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} e_m^a + e_k^a\beta^{kl}b_{lm} & -e_k^a\beta^{kn} \\ & \\ -e_b^l b_{lm} & e_b^n \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}'_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} g_{mn} - b_m{}^l b_{ln} - 2\beta_{(m}{}^l b_{n)l} + b_{ml}\beta^l{}_p\beta^{pq}b_{qn} & -\beta_m{}^q + b_m{}^q - b_{ml}\beta^l{}_k\beta^{kq} \\ & \\ -\beta_n{}^p + b_n{}^p - b_{nl}\beta^l{}_k\beta^{kp} & g^{pq} - \beta^p{}_l\beta^{lq} \end{bmatrix}. \tag{6.72}$$

Поскольку деформация $U \in \mathrm{O}(d,d)$ преобразованная обобщенная метрика принадлежит $\mathrm{O}(d,d)$. Более того, легко проверить, что

$$\mathcal{H}' \in \frac{\mathrm{O}(d,d)}{\mathrm{O}(d)\times\mathrm{O}(d)} \tag{6.73}$$

при помощи следующего простого аргумента: если (6.73) верно, то $\mathcal{H}'_{\mathcal{MN}}$ может быть параметризована некой новой деформированной метрикой G_{mn} и полем Калба–Рамона B_{mn}:

$$\mathcal{H}'_{\mathcal{MN}} = \begin{bmatrix} G_{mn} - B_m{}^l B_{ln} & B_m{}^q \\ \\ B_n{}^p & G^{pq} \end{bmatrix}, \tag{6.74}$$

где индексы поднимаются и опускаются метрикой G_{mn}. Получим преобразование

$$G + B = \Big((g + b)^{-1} + \beta\Big)^{-1}, \tag{6.75}$$

являющееся обобщением отображения Зайберга–Виттена между фоном открытой и замкнутой струны. Действительно, считая $b_{mn} = 0$, g_{mn} — метрикой открытой струны, а $\beta^{mn} = \Theta^{mn}$ — параметром некоммутативности, получаем в точности стандартное отображение между фоном для открытой и фоном для замкнутой струны. Следует отметить, что двойная теория поля в рассматриваемой формулировке является теорией для фоновых полей замкнутых струн, и аналогия с отображением Зайберга–Виттена, по видимому, не является далеко идущей. Справедливости ради заметим, что такие же отображения между фоном для открытой и фоном для замкнутой мембраны появляются при рассмотрении поливекторных деформаций решений 11-мерной супергравитации (см. ниже).

Преобразование (6.75) является сильно нелинейным и прямая проверка, что уравнения супергравитации выполняются, оказывается исключительно затруднительной. В работе [252] разложением в ряд по параметру деформации выполнение уравнений движения было проверено с точностью до второго порядка. Подобное вычисление для двойной теории поля оказывается довольно простым по причине линейности преобразований. Рассмотрим для этого формулировку в терминах обобщенного флакса, который определяется через скобку обобщенных реперов:

$$[E_{\mathcal{A}}, E_{\mathcal{B}}]^{\mathcal{M}} = \mathcal{F}_{\mathcal{AB}}{}^{\mathcal{C}} E_{\mathcal{C}}{}^{\mathcal{M}}. \tag{6.76}$$

Далее, с одной стороны обобщенный флакс $\mathcal{F}'_{\mathcal{AB}}{}^{\mathcal{C}}$, вообще говоря, преобразуется нетривиально при действии (6.68). С другой стороны матрица $U^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}}$ действует только на пространственные индексы $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$, но не на индексы репера $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, а следовательно ковариантность преобразования требует

$$\mathcal{F}'_{\mathcal{AB}}{}^{\mathcal{C}} = \mathcal{F}_{\mathcal{AB}}{}^{\mathcal{C}}. \tag{6.77}$$

Как было показано в [258] равенство действительно выполнено, если $r^{\alpha\beta}$ удовлетворяет классическому уравнению Янга–Бакстера (6.70). Таким образом, бивекторная янг–бакстерова деформация связывает фоновые конфигурации, соответствующие одному и тому же набору обобщенных флаксов. Это является обобщением алгебраической формулировки, где деформация, реализованная пуассон–лиевой дуальностью, соответствовала разным параметризациям классического дубля Дринфельда. Разница в том, что $\mathcal{F}_{\mathcal{AB}}{}^{\mathcal{C}} \neq$const, и удовлетворяют не квадратичным условиям дубля Дринфельда, а уравнениям движения двойной теории поля. Раскрывая обобщенный флакс в терминах деформированной метрики и B-поля, получим, что последние удовлетворяют уравнениям движения супергравитации.

Инвариантность второго обобщенного флакса $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ двойной теории поля накладывает т.н. условие унимодулярности $r^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$. Название происходит из того факта, что при таком условии сгенерированная дуальная алгебра $\tilde{\mathfrak{g}}$ в тройке Манина оказывается унимодулярной. При этом, оказывается можно рассматривать деформации, нарушающие условие инвариантности $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$, что приводит к фоновым пространствам, не удовлетворяющим уравнениям супергравитации. Вместо этого они удовлетворяют уравнениям обобщенной супергравитации [16, 17], которые оказываются более общим следствием суперсвязей, накладываемых κ–симметрией струны Грина–Шварца, чем стандартные уравнения супергравитации типа II. Кроме того, уравнения обобщенной супергравитации можно получить специальным твистовым анзацем из исключительной теории поля [259], или допусканием зависимости обобщенного дилатона от дуальной координаты в двойной теории поля [260, 261]. Интересно, что в терминах бивектора условия янг–бакстеровости и унимодулярности формулируются в виде равенства нулю R-флакса и следа Q-флакса соответственно:

$$\begin{aligned} R^{mnk} &= 3\beta^{[m|l|}\nabla_l \beta^{nk]} = 0, \\ Q_m{}^{mn} &= \nabla_m \beta^{mn} = 0, \end{aligned} \tag{6.78}$$

где ∇_m — ковариантная производная, согласованная с начальной метрикой g_{mn}. На момент написания настоящей диссертации не известно, имеет ли данный факт глубокие причины или является лишь следствием разложения обобщенного флакса по представлениям максимальной $\mathfrak{gl}(d)$ подалгебры.

Для полноты исторического повествования рассмотрим подход, использованный в [253] для доказательства того, что янг–бакстерово деформированный фон удовлетворяет уравнениям супергравитации. Для этого рассмотрим начальный фон с $b_{mn} = 0$. Тогда преобразованная обобщенная метрика

$$
\mathcal{H}'_{\mathcal{MN}} = \begin{bmatrix} g_{mn} & -\beta_m{}^q \\ \\ -\beta_n{}^p & g^{pq} - \beta^p{}_l \beta^{lq} \end{bmatrix} \tag{6.79}
$$

может пониматься, как альтернативная параметризация фактор-группы $O(d,d)/O(d)\times O(d)$. Раскрывая уравнения двойной теории поля, следующие из ковариантного действия вариацией по $\mathcal{H}_{\mathcal{MN}}$, в терминах такой параметризации, получим уравнения на метрику g_{mn}, параметр деформации β^{mn} и дилатон φ, совпадающие с уравнениями β-супергравитации [154]. Пользуясь услови-

Рисунок 6.1 — Схематическое представление бивекторной янг–бакстеровой деформации. Здесь b-параметризация относится к стандартной параметризации обобщенной метрики, β-параметризация соответствует верхнетреугольному виду репера.

$$
\begin{tikzcd}
g_{mn},\varphi \arrow[r, "\text{деформация}"] \arrow[rr, bend left, "\text{деформация Янга–Бакстера}"] \arrow[d] & g_{mn},\, \beta^{mn},\, \varphi \arrow[r, leftrightarrow, "\text{open/closed}"] \arrow[d] & g'_{mn},\, b'_{mn},\, \varphi' \arrow[d] \\
\text{b-парам. решение} \arrow[dr, bend right] & \text{β-парам. решение} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, bend right] & \text{b-парам. решение} \\
 & \text{условия на } \beta^{mn} &
\end{tikzcd}
$$

ем, что начальный фон (g_{mn},φ) удовлетворяет уравнениям супергравитации, несложно свести оставшиеся уравнения на β^{mn} к уравнениям Янга–Бакстера на $r^{\alpha\beta}$. Схематично отношения между параметризациями и деформациями представлены на Рис. 6.1.

Тривекторные деформации

Преобразование (6.68) решений 10-мерной супергравитации может быть теперь легко обобщено на случай решений 11-мерной супергравитацией заменой ортогональной группы на исключительную $\mathrm{E}_{d(d)}$. Базис генераторов разложении по отношению к $\mathfrak{gl}(d)$ подалгебре принимает теперь вид

$$T_{\mathcal{M}} = \{\dots, T^{m_1\dots m_6}, T^{m_1\dots m_3}, T^m{}_n, T_{m_1\dots m_3}, T_{m_1\dots m_6}, \dots\}. \tag{6.80}$$

Соответственно, в самом общем виде поливекторные деформации задаются матрицей

$$\begin{aligned} E'_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{M}} &= U^{\mathcal{M}}{}_{\mathcal{N}} E_{\mathcal{A}}{}^{\mathcal{N}}, \\ U &= \exp\left[\Omega^{m_1\dots m_3} T_{m_1\dots m_3} + \Omega^{m_1\dots m_6} T_{m_1\dots m_6} + \dots\right], \end{aligned} \tag{6.81}$$

размер и конкретный вид которой зависит от выбранной группы дуальности. Проиллюстрируем формализм на примере SL(5) теории. Пусть обобщенная метрика задана в представлении **5**:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{MN} &= |g_7|^{-1/14} \begin{bmatrix} |g|^{-1/2} g_{mn} & V_m \\ & \\ V_b & |g|^{1/2}(1+V^2) \end{bmatrix} \in \frac{\mathrm{SL}(5)}{\mathrm{SO}(5)} \times \mathbb{R}^+, \\ V^m &= \frac{1}{3!}\frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{mnkl} C_{nkl}, \end{aligned} \tag{6.82}$$

где $V^2 = g_{mn} V^m V^n$, общий фактор $g_7 = \det g_{\mu\nu}$ несет информацию о внешней семимерной метрике, а антисимметричный символ ε^{mnkl} задан условием $\varepsilon^{1234} = 1$. Здесь мы используем ту же параметризацию, что и в [262]. Матрица деформации тогда имеет следующий простой вид:

$$U^M{}_N = \begin{bmatrix} \delta_n{}^m & 0 \\ w_n & 1 \end{bmatrix}, \tag{6.83}$$

где $w_m = 1/3!\varepsilon_{mnkl}\Omega^{nkl}$. Заметим, что матрица деформации не содержит метрики, как и должно быть. Пусть теперь для простоты начальный фон является чисто метрическим, т.е. $C_{mnk} = 0$, тогда преобразованная обобщенная метрика имеет вид

$$\mathcal{M}'_{MN} \mathcal{M}_{KL} U^K{}_M U^L{}_N = |g_7|^{-1/14} \begin{bmatrix} |g|^{-1/2}(g_{mn} + W_m W_n) & W_n \\ & \\ W_n & |G|^{1/2} \end{bmatrix}, \tag{6.84}$$

где $W_m = \sqrt{g}\, w_m$ — компоненты 1-формы. Следуя той же логике, что и ранее, перепишем деформированную обобщенную метрику в C-параметризации, поскольку к изначальным метрическим степеням свободы добавились компоненты антисимметричного тензора Ω^{mnk}, которые однако стоят в «неправильных» местах. Для «правильной» параметризации имеем:

$$|g_7'|^{-\frac{1}{14}} \begin{bmatrix} |g'|^{-1/2} g'_{ab} & V_a \\ \\ V_b & |g|^{1/2}(1+V^2) \end{bmatrix} = |g_7|^{-\frac{-1}{14}} \begin{bmatrix} |g|^{-1/2}(g_{ab} + W_a W_b) & W_a \\ \\ W_b & |g|^{1/2} \end{bmatrix}, \tag{6.85}$$

откуда получаем связь между начальным и деформированным фоновыми конфигурациями. В отличие от 10-мерного случая формула не имеет такой же простой вид, как отображение Зайберга–Виттена, в частности потому, что мембрана взаимодействует с 3-формой, а не 2-формой, и составить комбинацию, подобную $g + b$, нельзя. Вместо этого имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= K^{-1/3} g_{\mu\nu}, \\ g'_{mn} &= K^{2/3} \left(g_{mn} \pm W_m W_n \right), \\ C'_{mnk} &= K \Omega^{pql} g_{mp} g_{nq} g_{kl}. \\ K &= \left(1 + V^2\right)^{-1} = \left(1 + W^2\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{6.86}$$

где $W^2 = W_m W_n g^{mn}$. Замечательным наблюдением является то, что соотношения выше оказываются преобразованием между фоновой метрикой и C-поля для замкнутой мембраны и фоновой метрикой открытой мембраны и параметром Ω, названным обобщенным параметром Θ в работах [212, 213]. В работе [254] было высказано предположение (позднее доказанное в других работах), что условие удовлетворения деформированным решением уравнений 11-мерной супергравитации также сводится к равенству нулю R-флакса и следа Q-флакса для мембраны:

$$\begin{aligned} R^{m,pqrs} &= \Omega^{mn[p} \nabla_n \Omega^{qrs]}, \\ Q_m{}^{mnk} &= \nabla_m \Omega^{mnk}, \end{aligned} \tag{6.87}$$

где ∇_m обозначает ковариантную производную, согласованную с начальной метрикой g_{mn}. Схематично связь между фоновой конфигурацией в Ω-, C-параметризации и обобщенной деформацией Янга–Бакстера показана на Рис. 6.2. Так же как из условий (6.78) следует классическое уравнение Янга–Бакстера на матрицу $r^{\alpha\beta}$, из условий выше следует некоторое его обобщение

Рисунок 6.2 — Схематическое представление тривекторной обобщенной янг–бакстеровой деформации. Здесь C-параметризация относится к стандартной параметризации обобщенной метрики, Ω-параметризация соответствует верхнетреугольному виду репера.

$$
\begin{tikzcd}
g_{\mu\nu}, g_{mn} \arrow[r, "\text{деформация}"] \arrow[rr, bend left, "\text{обобщенная деформация ЯБ}"] \arrow[d] & g_{\mu\nu}, g_{mn}, \Omega^{mnk} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{open/closed}"] \arrow[d] & g'_{\mu\nu}, g'_{mn}, C'_{mnk}, \varphi' \arrow[d] \\
\begin{matrix} C\text{-парам.} \\ \text{решение} \end{matrix} \arrow[d] & \begin{matrix} \Omega\text{-парам.} \\ \text{решение} \end{matrix} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dl] & \begin{matrix} C\text{-парам.} \\ \text{решение} \end{matrix} \\
\text{условия на } \Omega^{mnk} & &
\end{tikzcd}
$$

для ρ-тензора:

$$
\begin{aligned}
6\rho^{\alpha\beta[\gamma}\rho^{\delta\varepsilon|\zeta|}f_{\alpha\zeta}{}^{\eta]} + \rho^{[\gamma\delta\varepsilon}\rho^{\eta]\alpha\zeta}f_{\alpha\zeta}{}^{\beta} &= 0, \\
\rho^{\alpha\beta\gamma}f_{\alpha\beta}{}^{\delta} &= 0.
\end{aligned}
\tag{6.88}
$$

Уравнение, которое эквивалентно первой строке выше, было получено в работе [231] из анализа SL(5) исключительной алгебры Дринфельда.

Особенный интерес здесь представляет квантовая версия обобщенного уравнения Янга–Бакстера, то есть уравнение, классическим пределом которого оно является. В работе [234] была предложена подобная конструкция, которая, однако, не является удовлетворительной по причине присутствия дополнительных операторов перестановок и разных типов обобщенной квантовой R-матрицы. Учитывая, что речь идет о фоне М-теории, естественным кандидатом на роль квантового уравнения является уравнение Замолодчикова для тетраэдра, которое является условием факторизации S-матрицы для рассеяния прямых струн. Напомним, что уравнение Янга–Бакстера аналогично тому же условию для частиц. Однако, уравнение тетраэдра не имеет естественного классического предела, который можно было бы применить к уравнению в виде, независящем от представления. В настоящее время вопрос поиска квантового обобщенного уравнения Янга–Бакстера является открытым.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Построены теории (т.н. исключительные теории поля), предлагающие формулировку одиннадцатимерной супергравитации ковариантную относительно групп U-дуальности SL(5), SO(5,5), E_6. Для теории с группой симметрии E_6 построено суперсимметричное обобщение. Показано, что можно выбрать решения условия проекции так, что построенные теории эквивалентны стандартной одиннадцатимерной супергравитации или десятимерной супергравитации типа IIB.
2. Построены редукции Шерка–Шварца скалярного сектора исключительных теорий поля с группами SL(5), SO(5,5), E_6. Продемонстрирована связь редуцированных теорий с калиброванными супергравитациями в размерности $D = 7,6,5$ в формализме тензора погружения. Предложена интерпретация компонент тензора погружения (калибрований) в терминах твистовых матриц и геометрии обобщенного пространства.
3. Найдены решения полевых уравнений двойной теории поля, описывающие орбиту по действию группы Т-дуальности, содержащую экзотические NS 5-браны в размерности 10. Для найденных решений вычислены компоненты флаксов для смешанных потенциалов и показано, что они генерируются экзотическими 5_2^b-бранами с $b = 2,3,4$. Показано, что такие объекты локализуются в дуальном пространстве, соответствующем модам намотки струн и мембран. Продемонстрирована связь такой локализации с непертурбативным вкладом от инстантонов на мировом листе струны.
4. Построены действия для NS 5-бран, Dp-бран и экзотических бран с натяжением g_s^{-3}, ковариантные относительно преобразований Т-дуальности. Построенные действия включают кинетическое DBI действие (для NS 5-бран), действие Весса-Зумино, описывающее взаимодействие со смешанными потенциалами. Показано, что браны, экзотические с точки зрения стандартной десятимерной супергравитации, могут пониматься как стандартные браны особым образом ориентированные в удвоенном пространстве.

5. Предложен общий формализм описания деформаций решений десятимерной и одиннадцатимерной супергравитации типа Янга–Бакстера, основанный на подходе исключительной теории поля. В рамках предложенного формализма доказано, что бивекторные деформации, пропорциональные векторам Киллинга свернутым с постоянной r-матрицей, генерируют решения уравнений супергравитации, если выполняются классические уравнения Янга-Бакстера. На примере бивекторных деформаций, не сводимых к бикиллинговому анзацу, показано, что формализм описывает более широкий класс деформаций, чем стандартный подход главной сигма-модели и сигма-моделей фактор-пространств. В явном виде получены преобразования фоновых полей 11-мерной супергравитации при тривекторных деформациях в рамках SL(5) теории.
6. Найден класс преобразований генераторов исключительной алгебры Дринфельда, соответствующий внешнему автоморфизму алгебры U-дуальности $E_{d(d)}$, сохраняющий ее структуру. Такие преобразования генерируют дуальности решений 11-мерной супергравитации, являющиеся обобщением неабелевой T-дуальности 10-мерной теории. Найдены явные примеры таких неабелевых U-дуальностей, являющиеся первыми примерами намбу–лиевой дуальности. Найдены примеры поливекторных деформаций, реализованных намбу–лиевыми дуальностями.

Представленные результаты показывают, что разработанный формализм исключительной теории поля является исключительно мощным инструментом изучения как пространства вакуумов M-теории, так и фундаментальных объектов, в том числе, экзотических бран. В частности, на настоящий момент в литературе можно встретить множество работ по построению самосогласованных редукций 11-мерной супергравитации, выполненных в формализме обобщенных редукций Шерка–Шварца. На основе этого подхода в работах [148, 149] был разработан метод т.н. калуца–кляйновской спектроскопии, позволяющий строить спектр масс компактифицированной теории. На стороне теории поля при голографической дуальности этот формализм позволяет вычислять спектр защищенных и незащищенных операторов. Представляет интерес приложение разработанного в диссертации формализма поливекторных деформаций к изучению ренормгруппового потока таких операторов с гравитационной стороны.

Рассматривая самосогласованные модели струнной флакс компактификации, следует учитывать источники флаксов, которыми являются браны, в том числе экзотические. Одним из подходов к построению моделей флакс компактификаций является учет сокращения диаграмм головастиков при помощи тождеств Бьянки. Для негеометрических схем редукции такие тождества будут включать флаксы экзотических бран наряду со стандартными бранами. В исключительной теории поля такие тождества проявляются в виде соотношений на обобщенные флаксы, которые следуют из их определения и трансформационных свойств относительно обобщенной производной Ли. Задача нахождения всех тождеств Бьянки исключительных теорий поля представляется заслуживающей внимания.

Особенно интригующим остается вопрос интерпретации обобщенного уравнения Янга–Бакстера, как классического предела некоторого квантового уравнения, описывающего интегрируемость трехмерных систем. Интуитивные соображения указывают на то, что таковым должно быть уравнение Замолодчикова, описывающее условие факторизации S-матрицы рассеяния плоских струн, однако его классический предел плохо определен, и требуется дополнительное исследование. Знание полного квантового уравнения позволит ставить вопрос о построении аналога дринфельдовского твиста, который, как было показано например в [263], позволяет строить деформированную теорию поля. Предположительно, обобщенный твист будет полезен при построении деформаций теорий, типа ABJM, описывающих динамику полей на M2-бранах и их пересечениях.

Все представленные в диссертации примеры намбу–лиевой U-дуальности в качестве начального фона имеют чисто метрическое пространство, заданное групповым многообразием. Естественным стремлением будет обобщение формализма на произвольные пространства с заданным набором изометрий. В литературе представлен определенный прогресс в обобщении неабелевой T-дуальности за пределы фактор-групповых пространств (см. например [255]). Автору интересным видится продолжение работы в данном направлении для неабелевой U-дуальности и приложение к пространствам, имеющим известную голографическую интерпретацию. Известно, что неабелева T-дуальность позволяет генерировать пространства, голографически дуальные $\mathcal{N} = 1$

суперконформным теориям поля [264, 265]. Ожидается, что конструкция неабелевой U-дуальности, основанная на внешнем автоморфизме, описанная в настоящей диссертации окажется полезной для приложения к суперконформным теориям, дуальным решениям 11-мерной супергравитации.

С математической точки зрения представляет интерес вопрос классификации исключительных алгебр Дринфельда и, соответственно, возможных орбит намбу–лиевой U-дуальности. Для пуассон–лиевой T-дуальности такая классификация, основанная на классификации Бьянки трехмерных алгебр Ли была представлена в работе [266] для шестимерных алгебр Дринфельда. Для шестимерных исключительных алгебр Дринфельда классификация была найдена в работе [267]. Основываясь на классификации алгебр более высоких размерностей, интересно получить классификацию соответствующих исключительных алгебр Дринфельда и сопоставить классы решений 11-мерной супергравитации, дуальных (плюральных) друг другу.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность Ахмедову Э. Т. за помощь на самых ранних этапах изучения теоретической физики; Патрину Е. В. за знакомство с современными математическими методами; Берману Д. С. за руководство PhD диссертацией и введение в тему дуальностей в теории струн и в М-теории. Автор благодарит всех своих коллег за помощь в разработке результатов, представленных в диссертации, и вдохновляющие обсуждения, которые сделали данную работу возможной. Также автор благодарит Каспера Питерса за создание программы компьютерной алгебры Cadabra [268, 269]; создателей пакета LieART [270, 271]; и авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации. Особую благодарность автор выражает своей семье за понимание, неоценимую помощь и поддержку во время подготовки результатов и текста диссертации.

Список литературы

[1] T. H. Buscher. — «Quantum Corrections and Extended Supersymmetry in New σ Models». — B: *Phys. Lett. B* 159 (1985), c. 127—130. — DOI: 10.1016/0370-2693(85)90870-6.

[2] T. H. Buscher. — «A Symmetry of the String Background Field Equations». — B: *Phys. Lett.* B194 (1987), c. 59—62. — DOI: 10.1016/0370-2693(87)90769-6.

[3] T. H. Buscher. — «Path Integral Derivation of Quantum Duality in Nonlinear Sigma Models». — B: *Phys. Lett.* B201 (1988), c. 466—472. — DOI: 10.1016/0370-2693(88)90602-8.

[4] M.J. Duff. — «Duality rotations in string theory». — B: *Nucl.Phys.* B335 (1990), c. 610. — DOI: 10.1016/0550-3213(90)90520-N.

[5] Edward Witten. — «String theory dynamics in various dimensions». — B: *Nucl.Phys.* B443 (1995), c. 85—126. — DOI: 10.1016/0550-3213(95)00158-O. — arXiv: hep-th/9503124 [hep-th].

[6] M.J. Duff и J.X. Lu. — «Duality rotations in membrane theory». — B: *Nucl.Phys.* B347 (1990), c. 394—419. — DOI: 10.1016/0550-3213(90)90565-U.

[7] E. Cremmer и др. — «Dualization of dualities. 1.» — B: *Nucl.Phys.* B523 (1998), c. 73—144. — DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00136-9. — arXiv: hep-th/9710119 [hep-th].

[8] E. Cremmer и др. — «Dualization of dualities. 2. Twisted self-duality of doubled fields, and superdualities». — B: *Nucl. Phys.* B535 (1998), c. 242—292. — DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00552-5. — arXiv: hep-th/9806106 [hep-th].

[9] Axel Kleinschmidt. — «Counting supersymmetric branes». — B: *JHEP* 10 (2011), c. 144. — DOI: 10.1007/JHEP10(2011)144. — arXiv: 1109.2025 [hep-th].

[10] Jan de Boer и Masaki Shigemori. — «Exotic Branes in String Theory». — B: *Phys. Rept.* 532 (2013), c. 65—118. — DOI: 10.1016/j.physrep.2013.07.003. — arXiv: 1209.6056 [hep-th].

[11] Eric A. Bergshoeff, Fabio Riccioni и Luca Romano. — «Branes, Weights and Central Charges». — В: *JHEP* 06 (2013), с. 019. — DOI: 10.1007/JHEP06(2013)019. — arXiv: 1303.0221 [hep-th].

[12] Cesar Damian и др. — «Slow-Roll Inflation in Non-geometric Flux Compactification». — В: *JHEP* 06 (2013), с. 109. — DOI: 10.1007/JHEP06(2013)109. — arXiv: 1302.0529 [hep-th].

[13] Bernard de Wit, Henning Samtleben и Mario Trigiante. — «On Lagrangians and gaugings of maximal supergravities». — В: *Nucl. Phys. B* 655 (2003), с. 93—126. — DOI: 10.1016/S0550-3213(03)00059-2. — arXiv: hep-th/0212239.

[14] Francois Delduc, Marc Magro и Benoit Vicedo. — «An integrable deformation of the $AdS_5 \times S^5$ superstring action». — В: *Phys. Rev. Lett.* 112.5 (2014), с. 051601. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.051601. — arXiv: 1309.5850 [hep-th].

[15] Gleb Arutyunov, Riccardo Borsato и Sergey Frolov. — «Puzzles of η-deformed $AdS_5 \times S^5$». — В: *JHEP* 12 (2015), с. 049. — DOI: 10.1007/JHEP12(2015)049. — arXiv: 1507.04239 [hep-th].

[16] B. Hoare и A. A. Tseytlin. — «Type IIB supergravity solution for the T-dual of the η-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring». — В: *JHEP* 10 (2015), с. 060. — DOI: 10.1007/JHEP10(2015)060. — arXiv: 1508.01150 [hep-th].

[17] G. Arutyunov и др. — «Scale invariance of the η-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring, T-duality and modified type II equations». — В: *Nucl. Phys.* B903 (2016), с. 262—303. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2015.12.012. — arXiv: 1511.05795 [hep-th].

[18] Chris D.A. Blair, Emanuel Malek и Daniel C. Thompson. — «O-folds: Orientifolds and Orbifolds in Exceptional Field Theory». — В: *JHEP* 09 (2018), с. 157. — DOI: 10.1007/JHEP09(2018)157. — arXiv: 1805.04524 [hep-th].

[19] Olaf Hohm и Henning Samtleben. — «Exceptional Form of D=11 Supergravity». — В: *Phys.Rev.Lett.* 111 (2013), с. 231601. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.231601. — arXiv: 1308.1673 [hep-th].

[20] David S. Berman и Malcolm J. Perry. — «Generalized Geometry and M theory». — В: *JHEP* 06 (2011), с. 074. — DOI: 10.1007/JHEP06(2011)074. — arXiv: 1008.1763 [hep-th].

[21] David S. Berman, Hadi Godazgar и Malcolm J. Perry. — «SO(5,5) duality in M-theory and generalized geometry». — В: *Phys.Lett.* B700 (2011), с. 65—67. — DOI: 10.1016/j.physletb.2011.04.046. — arXiv: 1103.5733 [hep-th].

[22] David S. Berman и др. — «The Local symmetries of M-theory and their formulation in generalised geometry». — В: *JHEP* 1201 (2012), с. 012. — DOI: 10.1007/JHEP01(2012)012. — arXiv: 1110.3930 [hep-th].

[23] David S. Berman и др. — «Duality Invariant Actions and Generalised Geometry». — В: *JHEP* 1202 (2012), с. 108. — DOI: 10 . 1007 / JHEP02(2012)108. — arXiv: 1111.0459 [hep-th].

[24] Emanuel Malek. — «U-duality in three and four dimensions». — В: *Int. J. Mod. Phys. A* 32.27 (2017), с. 1750169. — DOI: 10 . 1142 / S0217751X1750169X. — arXiv: 1205.6403 [hep-th].

[25] L. Brink, P. Di Vecchia и Paul S. Howe. — «A Locally Supersymmetric and Reparametrization Invariant Action for the Spinning String». — В: *Phys. Lett. B* 65 (1976), с. 471—474. — DOI: 10.1016/0370-2693(76)90445-7.

[26] Stanley Deser и B. Zumino. — «A Complete Action for the Spinning String». — В: *Phys. Lett. B* 65 (1976). Под ред. A. Salam и E. Sezgin, с. 369—373. — DOI: 10.1016/0370-2693(76)90245-8.

[27] Michael B. Green, J.H. Schwarz и Edward Witten. — *Superstring theory. Vol. 1: Introduction*. — Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987.

[28] J. Polchinski. — *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. — Cambridge University Press, Cambridge, England, 1998.

[29] David Tong. — «String theory». — В: (2009). — arXiv: 0908 . 0333 [hep-th].

[30] E. T. Akhmedov. — «Review of modern string theory». — В: *Phys. Atom. Nucl.* 72 (2009), с. 1574—1600. — DOI: 10.1134/S106377880909021X.

[31] Xenia C. de la Ossa и Fernando Quevedo. — «Duality symmetries from nonAbelian isometries in string theory». — В: *Nucl. Phys. B* 403 (1993), с. 377—394. — DOI: 10.1016/0550-3213(93)90041-M. — arXiv: hep-th/9210021.

[32] Konstadinos Sfetsos и Daniel C. Thompson. — «On non-abelian T-dual geometries with Ramond fluxes». — В: *Nucl.Phys.* B846 (2011), с. 21—42. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2010.12.013. — arXiv: 1012.1320 [hep-th].

[33] Yolanda Lozano и др. — «Non-abelian T-duality, Ramond Fields and Coset Geometries». — В: *JHEP* 06 (2011), с. 106. — DOI: 10.1007/JHEP06(2011)106. — arXiv: 1104.5196 [hep-th].

[34] Aybike Catal-Ozer. — «Non-Abelian T-duality as a Transformation in Double Field Theory». — В: *JHEP* 08 (2019), с. 115. — DOI: 10.1007/JHEP08(2019)115. — arXiv: 1904.00362 [hep-th].

[35] Moonju Hong, Yoonsoo Kim и Eoin O Colgain. — «On non-Abelian T-duality for non-semisimple groups». — В: *Eur. Phys. J.* C78.12 (2018), с. 1025. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-6502-9. — arXiv: 1801.09567 [hep-th].

[36] C. Klimcik и P. Severa. — «Dual nonAbelian duality and the Drinfeld double». — В: *Phys. Lett. B* 351 (1995), с. 455—462. — DOI: 10.1016/0370-2693(95)00451-P. — arXiv: hep-th/9502122.

[37] David Geissbuhler и др. — «Exploring Double Field Theory». — В: *JHEP* 06 (2013), с. 101. — DOI: 10.1007/JHEP06(2013)101. — arXiv: 1304.1472 [hep-th].

[38] L. Snobl и L. Hlavaty. — «Classification of six-dimensional real Drinfeld doubles». — В: *Int. J. Mod. Phys. A* 17 (2002), с. 4043—4068. — DOI: 10.1142/S0217751X02010571. — arXiv: math/0202210.

[39] Rikard Von Unge. — «Poisson Lie T plurality». — В: *JHEP* 07 (2002), с. 014. — DOI: 10.1088/1126-6708/2002/07/014. — arXiv: hep-th/0205245.

[40] W. Nahm. — «Supersymmetries and their Representations». — В: *Nucl. Phys. B* 135 (1978), с. 149. — DOI: 10.1016/0550-3213(78)90218-3.

[41] E. Cremmer, B. Julia и Joel Scherk. — «Supergravity Theory in Eleven-Dimensions». — В: *Phys. Lett. B* 76 (1978), с. 409—412. — DOI: 10.1016/0370-2693(78)90894-8.

[42] E. Cremmer и B. Julia. — «The SO(8) supergravity». — В: *Nucl.Phys.* B159 (1979), с. 141. — DOI: 10.1016/0550-3213(79)90331-6.

[43] E. Cremmer и B. Julia. — «The N=8 supergravity theory. 1. The lagrangian». — В: *Phys.Lett.* B80 (1978), с. 48. — DOI: 10.1016/0370-2693(78)90303-9.

[44] E. Bergshoeff, L. A. J. London и P. K. Townsend. — «Space-time scale invariance and the superp-brane». — В: *Class. Quant. Grav.* 9 (1992), с. 2545—2556. — DOI: 10.1088/0264-9381/9/12/002. — arXiv: hep-th/9206026.

[45] M. J. Duff и др. — «Superstrings in D=10 from Supermembranes in D=11». — В: *Phys. Lett. B* 191 (1987), с. 70. — DOI: 10.1016/0370-2693(87)91323-2.

[46] C.M. Hull и P.K. Townsend. — «Unity of superstring dualities». — В: *Nucl.Phys.* B438 (1995), с. 109—137. — DOI: 10.1016/0550-3213(94)00559-W. — arXiv: hep-th/9410167 [hep-th].

[47] P. K. Townsend. — «Four lectures on M theory». — В: *ICTP Summer School in High-energy Physics and Cosmology*. — Дек. 1996. — arXiv: hep-th/9612121.

[48] M. J. Duff. — «M theory (The Theory formerly known as strings)». — В: *Int. J. Mod. Phys. A* 11 (1996), с. 5623—5642. — DOI: 10.1142/S0217751X96002583. — arXiv: hep-th/9608117.

[49] M. J. Duff. — «M-history without the M». — В: *Contemp. Phys.* 57 (2016), с. 83. — DOI: 10.1080/00107514.2014.992964. — arXiv: 1501.04098 [physics.hist-ph].

[50] M. J. Duff и K. S. Stelle. — «Multimembrane solutions of D = 11 supergravity». — В: *Phys. Lett. B* 253 (1991), с. 113—118. — DOI: 10.1016/0370-2693(91)91371-2.

[51] Rahmi Gueven. — «Black p-brane solutions of D = 11 supergravity theory». — В: *Phys. Lett. B* 276 (1992), с. 49—55. — DOI: 10.1016/0370-2693(92)90540-K.

[52] C. M. Hull. — «Exact *pp* Wave Solutions of Eleven-dimensional Supergravity». — В: *Phys. Lett. B* 139 (1984), с. 39. — DOI: 10.1016/0370-2693(84)90030-3.

[53] R. d. Sorkin. — «Kaluza-Klein Monopole». — В: *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983), с. 87—90. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.87.

[54] David J. Gross и Malcolm J. Perry. — «Magnetic Monopoles in Kaluza-Klein Theories». — В: *Nucl. Phys. B* 226 (1983), с. 29—48. — DOI: 10.1016/0550-3213(83)90462-5.

[55] Atish Dabholkar и др. — «Superstrings and Solitons». — В: *Nucl. Phys. B* 340 (1990), с. 33—55. — DOI: 10.1016/0550-3213(90)90157-9.

[56] J.A. de Azcarraga и др. — «Topological Extensions of the Supersymmetry Algebra for Extended Objects». — В: *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989), с. 2443. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.63.2443.

[57] Thomas Curtright. — «GENERALIZED GAUGE FIELDS». — В: *Phys. Lett. B* 165 (1985), с. 304—308. — DOI: 10.1016/0370-2693(85)91235-3.

[58] Petr Horava и Edward Witten. — «Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary». — В: *Nucl. Phys. B* 475 (1996), с. 94—114. — DOI: 10.1016/0550-3213(96)00308-2. — arXiv: hep-th/9603142.

[59] P. K. Townsend. — «D-branes from M-branes». — В: *Phys. Lett. B* 373 (1996), с. 68—75. — DOI: 10.1016/0370-2693(96)00104-9. — arXiv: hep-th/9512062.

[60] N.A. Obers и B. Pioline. — «U duality and M theory». — В: *Phys.Rept.* 318 (1999), с. 113—225. — DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00004-6. — arXiv: hep-th/9809039 [hep-th].

[61] Peter C. West. — «E(11) and M theory». — В: *Class.Quant.Grav.* 18 (2001), с. 4443—4460. — DOI: 10.1088/0264-9381/18/21/305. — arXiv: hep-th/0104081 [hep-th].

[62] Peter C. West. — «Brane dynamics, central charges and E(11)». — В: *JHEP* 0503 (2005), с. 077. — DOI: 10.1088/1126-6708/2005/03/077. — arXiv: hep-th/0412336 [hep-th].

[63] Fabio Riccioni и Peter C. West. — «The E(11) origin of all maximal supergravities». — В: *JHEP* 07 (2007), с. 063. — DOI: 10.1088/1126-6708/2007/07/063. — arXiv: 0705.0752 [hep-th].

[64] Eric A. Bergshoeff и др. — «E(10) and Gauged Maximal Supergravity». — В: *JHEP* 01 (2009), с. 020. — DOI: 10.1088/1126-6708/2009/01/020. — arXiv: 0810.5767 [hep-th].

[65] Fabio Riccioni, Duncan Steele и Peter West. — «The E(11) origin of all maximal supergravities: The Hierarchy of field-strengths». — В: *JHEP* 0909 (2009), с. 095. — DOI: 10.1088/1126-6708/2009/09/095. — arXiv: 0906.1177 [hep-th].

[66] Laurent Houart, Axel Kleinschmidt и Josef Lindman Hornlund. — «An M-theory solution from null roots in E_{11}». — В: *JHEP* 01 (2011), с. 154. — DOI: 10.1007/JHEP01(2011)154. — arXiv: 1101.2816 [hep-th].

[67] Guillaume Bossard, Axel Kleinschmidt и Ergin Sezgin. — «A master exceptional field theory». — В: *JHEP* 06 (2021), с. 185. — DOI: 10.1007/JHEP06(2021)185. — arXiv: 2103.13411 [hep-th].

[68] B. Julia. — «APPLICATION OF SUPERGRAVITY TO GRAVITATION THEORY». — В: *International School of Cosmology and Gravitation: 8th Course: Unified Field Theories of More than Four Dimensions, Including Exact Solutions*. — Авг. 1982.

[69] Neil Marcus и John H. Schwarz. — «Three-Dimensional Supergravity Theories». — В: *Nucl. Phys. B* 228 (1983). Под ред. A. Salam и E. Sezgin, с. 145. — DOI: 10.1016/0550-3213(83)90402-9.

[70] E. Cremmer. — «Supergravities in 5 dimensions». — В: *Supergravities in diverse dimensions*. — Под ред. A. Salam и E. Sezgin. — Т. 1. — 1980, — С. 422—437.

[71] Y. Tanii. — «N=8 Supergravity in Six Dimensions». — В: *Phys.Lett.* B145 (1984), с. 197—200. — DOI: 10.1016/0370-2693(84)90337-X.

[72] E. Sezgin и Abdus Salam. — «Maximal Extended Supergravity Theory in Seven-dimensions». — В: *Phys. Lett.* B118 (1982), с. 359. — DOI: 10.1016/0370-2693(82)90204-0.

[73] B. de Wit и H. Nicolai. — «The Consistency of the S**7 Truncation in D=11 Supergravity». — В: *Nucl. Phys. B* 281 (1987), с. 211—240. — DOI: 10.1016/0550-3213(87)90253-7.

[74] Hadi Godazgar, Mahdi Godazgar и Hermann Nicolai. — «Nonlinear Kaluza-Klein theory for dual fields». — В: *Phys. Rev. D* 88.12 (2013), с. 125002. — DOI: 10.1103/PhysRevD.88.125002. — arXiv: 1309.0266 [hep-th].

[75] Hadi Godazgar, Mahdi Godazgar и Hermann Nicolai. — «Generalised geometry from the ground up». — В: *JHEP* 02 (2014), с. 075. — DOI: 10.1007/JHEP02(2014)075. — arXiv: 1307.8295 [hep-th].

[76] H. Nicolai и H. Samtleben. — «Maximal gauged supergravity in three-dimensions». — В: *Phys.Rev.Lett.* 86 (2001), с. 1686—1689. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.1686. — arXiv: hep-th/0010076 [hep-th].

[77] H. Nicolai и H. Samtleben. — «Compact and noncompact gauged maximal supergravities in three-dimensions». — В: *JHEP* 04 (2001), с. 022. — DOI: 10.1088/1126-6708/2001/04/022. — arXiv: hep-th/0103032.

[78] Bernard de Wit, Henning Samtleben и Mario Trigiante. — «The Maximal D=4 supergravities». — В: *JHEP* 06 (2007), с. 049. — DOI: 10.1088/1126-6708/2007/06/049. — arXiv: 0705.2101 [hep-th].

[79] C. M. Hull. — «The Minimal Couplings and Scalar Potentials of the Gauged $N = 8$ Supergravities». — В: *Class. Quant. Grav.* 2 (1985), с. 343. — DOI: 10.1088/0264-9381/2/3/010.

[80] C. M. Hull. — «More Gaugings of $N = 8$ Supergravity». — В: *Phys. Lett. B* 148 (1984), с. 297—300. — DOI: 10.1016/0370-2693(84)90091-1.

[81] C. M. Hull. — «Noncompact Gaugings of $N = 8$ Supergravity». — В: *Phys. Lett. B* 142 (1984). Под ред. A. Salam и E. Sezgin, с. 39. — DOI: 10.1016/0370-2693(84)91131-6.

[82] C. M. Hull. — «A New Gauging of $N = 8$ Supergravity». — В: *Phys. Rev. D* 30 (1984), с. 760. — DOI: 10.1103/PhysRevD.30.760.

[83] Francesco Cordaro и др. — «N=8 gaugings revisited: An Exhaustive classification». — В: *Nucl. Phys. B* 532 (1998), с. 245—279. — DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00449-0. — arXiv: hep-th/9804056.

[84] B. de Wit и H. Nicolai. — «N=8 Supergravity». — В: *Nucl. Phys. B* 208 (1982), с. 323. — DOI: 10.1016/0550-3213(82)90120-1.

[85] Arnaud Le Diffon и Henning Samtleben. — «Supergravities without an Action: Gauging the Trombone». — В: *Nucl.Phys.* B811 (2009), с. 1—35. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2008.11.010. — arXiv: 0809.5180 [hep-th].

[86] Paul S. Howe, N. D. Lambert и Peter C. West. — «A New massive type IIA supergravity from compactification». — В: *Phys. Lett. B* 416 (1998), с. 303—308. — DOI: 10.1016/S0370-2693(97)01199-4. — arXiv: hep-th/9707139.

[87] I. V. Lavrinenko, Hong Lu и C. N. Pope. — «Fiber bundles and generalized dimensional reduction». — В: *Class. Quant. Grav.* 15 (1998), с. 2239—2256. — DOI: 10.1088/0264-9381/15/8/008. — arXiv: hep-th/9710243.

[88] Bernard de Wit, Henning Samtleben и Mario Trigiante. — «The Maximal D=5 supergravities». — В: *Nucl.Phys.* B716 (2005), с. 215—247. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2005.03.032. — arXiv: hep-th/0412173 [hep-th].

[89] E. Bergshoeff, H. Samtleben и E. Sezgin. — «The Gaugings of Maximal D=6 Supergravity». — В: *JHEP* 0803 (2008), с. 068. — DOI: 10.1088/1126-6708/2008/03/068. — arXiv: 0712.4277 [hep-th].

[90] Henning Samtleben и Martin Weidner. — «The Maximal D=7 supergravities». — В: *Nucl.Phys.* B725 (2005), с. 383—419. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2005.07.028. — arXiv: hep-th/0506237 [hep-th].

[91] G. Dibitetto и др. — «Duality orbits of non-geometric fluxes». — В: *Fortsch.Phys.* 60 (2012), с. 1123—1149. — DOI: 10.1002/prop.201200078. — arXiv: 1203.6562 [hep-th].

[92] Eric A. Bergshoeff и др. — «IIA ten-forms and the gauge algebras of maximal supergravity theories». — В: *JHEP* 07 (2006), с. 018. — DOI: 10.1088/1126-6708/2006/07/018. — arXiv: hep-th/0602280.

[93] Eric A. Bergshoeff и Fabio Riccioni. — «D-Brane Wess-Zumino Terms and U-Duality». — В: *JHEP* 11 (2010), с. 139. — DOI: 10.1007/JHEP11(2010)139. — arXiv: 1009.4657 [hep-th].

[94] Eric A. Bergshoeff и Fabio Riccioni. — «String Solitons and T-duality». — В: *JHEP* 05 (2011), с. 131. — DOI: 10.1007/JHEP05(2011)131. — arXiv: 1102.0934 [hep-th].

[95] Eric A. Bergshoeff и Fabio Riccioni. — «Dual doubled geometry». — В: *Phys. Lett. B* 702 (2011), с. 281—285. — DOI: 10.1016/j.physletb.2011.07.009. — arXiv: 1106.0212 [hep-th].

[96] Eric A. Bergshoeff и Fabio Riccioni. — «Branes and wrapping rules». — В: *Phys. Lett. B* 704 (2011), с. 367—372. — DOI: 10.1016/j.physletb.2011.09.043. — arXiv: 1108.5067 [hep-th].

[97] Eric A. Bergshoeff и др. — «IIB supergravity revisited». — В: *JHEP* 08 (2005), с. 098. — DOI: 10.1088/1126-6708/2005/08/098. — arXiv: hep-th/0506013.

[98] Eric A. Bergshoeff и др. — «SL(2,R)-invariant IIB brane actions». — В: *JHEP* 0702 (2007), с. 007. — DOI: 10.1088/1126-6708/2007/02/007. — arXiv: hep-th/0611036 [hep-th].

[99] Eric A. Bergshoeff и др. — «Seven-branes and Supersymmetry». — В: *JHEP* 02 (2007), с. 003. — DOI: 10.1088/1126-6708/2007/02/003. — arXiv: hep-th/0612072.

[100] Eric A. Bergshoeff, Iwein De Baetselier и Teake A. Nutma. — «E(11) and the embedding tensor». — В: *JHEP* 0709 (2007), с. 047. — DOI: 10.1088/1126-6708/2007/09/047. — arXiv: 0705.1304 [hep-th].

[101] E. A. Bergshoeff и др. — «IIA/IIB Supergravity and Ten-forms». — В: *JHEP* 05 (2010), с. 061. — DOI: 10.1007/JHEP05(2010)061. — arXiv: 1004.1348 [hep-th].

[102] Cumrun Vafa. — «Evidence for F theory». — В: *Nucl. Phys. B* 469 (1996), с. 403—418. — DOI: 10.1016/0550-3213(96)00172-1. — arXiv: hep-th/9602022.

[103] Arkady A. Tseytlin. — «Duality symmetric formulation of string world sheet dynamics». — В: *Phys.Lett.* B242 (1990), с. 163—174. — DOI: 10.1016/0370-2693(90)91454-J.

[104] E.S. Fradkin и Arkady A. Tseytlin. — «QUANTUM EQUIVALENCE OF DUAL FIELD THEORIES». — В: *Annals Phys.* 162 (1985), с. 31. — DOI: 10.1016/0003-4916(85)90225-8.

[105] W. Siegel. — «Manifest duality in low-energy superstrings». — В: *International Conference on Strings 93*. — Сент. 1993. — arXiv: hep-th/9308133.

[106] Olaf Hohm, Chris Hull и Barton Zwiebach. — «Background independent action for double field theory». — В: *JHEP* 1007 (2010), с. 016. — DOI: 10.1007/JHEP07(2010)016. — arXiv: 1003.5027 [hep-th].

[107] Olaf Hohm, Chris Hull и Barton Zwiebach. — «Generalized metric formulation of double field theory». — В: *JHEP* 1008 (2010), с. 008. — DOI: 10.1007/JHEP08(2010)008. — arXiv: 1006.4823 [hep-th].

[108] Olaf Hohm и Barton Zwiebach. — «Large Gauge Transformations in Double Field Theory». — В: (2012). — arXiv: 1207.4198 [hep-th].

[109] David S. Berman и др. — «The gauge structure of generalised diffeomorphisms». — В: *JHEP* 1301 (2013), с. 064. — DOI: 10.1007/JHEP01(2013)064. — arXiv: 1208.5884 [hep-th].

[110] Guillaume Bossard и др. — «Generalized diffeomorphisms for E_9». — В: *Phys. Rev. D* 96.10 (2017), с. 106022. — DOI: 10.1103/PhysRevD.96.106022. — arXiv: 1708.08936 [hep-th].

[111] Daniel C. Thompson. — «Duality Invariance: From M-theory to Double Field Theory». — В: *JHEP* 1108 (2011), с. 125. — DOI: 10.1007/JHEP08(2011)125. — arXiv: 1106.4036 [hep-th].

[112] Olaf Hohm и Henning Samtleben. — «Exceptional Field Theory I: $E_{6(6)}$ covariant Form of M-Theory and Type IIB». — В: *Phys.Rev.* D89 (2014), с. 066016. — DOI: 10.1103/PhysRevD.89.066016. — arXiv: 1312.0614 [hep-th].

[113] Edvard Musaev и Henning Samtleben. — «Fermions and supersymmetry in $\mathrm{E}_{6(6)}$ exceptional field theory». — В: *JHEP* 03 (2015), с. 027. — DOI: 10.1007/JHEP03(2015)027. — arXiv: 1412.7286 [hep-th].

[114] Olaf Hohm и Henning Samtleben. — «Exceptional field theory. II. $\mathrm{E}_{7(7)}$». — В: *Phys.Rev.* D89.6 (2014), с. 066017. — DOI: 10.1103/PhysRevD.89.066017. — arXiv: 1312.4542 [hep-th].

[115] Hadi Godazgar и др. — «Supersymmetric $\mathrm{E}_{7(7)}$ Exceptional Field Theory». — В: *JHEP* 1409 (2014), с. 044. — DOI: 10.1007/JHEP09(2014)044. — arXiv: 1406.3235 [hep-th].

[116] Olaf Hohm и Henning Samtleben. — «U-duality covariant gravity». — В: *JHEP* 1309 (2013), с. 080. — DOI: 10.1007/JHEP09(2013)080. — arXiv: 1307.0509 [hep-th].

[117] Mary K. Gaillard и Bruno Zumino. — «Duality Rotations for Interacting Fields». — В: *Nucl.Phys.* B193 (1981), с. 221. — DOI: 10.1016/0550-3213(81)90527-7.

[118] Yoshiaki Tanii. — «Introduction to supergravities in diverse dimensions». — В: *YITP Workshop on Supersymmetry*. — Февр. 1998. — arXiv: hep-th/9802138.

[119] Henning Samtleben. — «Lectures on Gauged Supergravity and Flux Compactifications». — В: *Class.Quant.Grav.* 25 (2008), с. 214002. — DOI: 10.1088/0264-9381/25/21/214002. — arXiv: 0808.4076 [hep-th].

[120] Aidar Abzalov, Ilya Bakhmatov и Edvard T. Musaev. — «Exceptional field theory: $SO(5{,}5)$». — В: *JHEP* 06 (2015), с. 088. — DOI: 10.1007/JHEP06(2015)088. — arXiv: 1504.01523 [hep-th].

[121] Henning Samtleben, Ergin Sezgin и Robert Wimmer. — «(1,0) superconformal models in six dimensions». — В: *JHEP* 1112 (2011), с. 062. — DOI: 10.1007/JHEP12(2011)062. — arXiv: 1108.4060 [hep-th].

[122] Olaf Hohm и Henning Samtleben. — *Exceptional Field Theory I: $E_{6(6)}$ covariant Form of M-Theory and Type IIB*. — 2013. — arXiv: 1312.0614 [hep-th]. — URL: https://arxiv.org/abs/1312.0614.

[123] André Coimbra, Charles Strickland-Constable и Daniel Waldram. — «$E_{d(d)} \times \mathbb{R}^+$ generalised geometry, connections and M theory». — В: *JHEP* 1402 (2014), с. 054. — DOI: 10.1007/JHEP02(2014)054. — arXiv: 1112.3989 [hep-th].

[124] Andre Coimbra, Charles Strickland-Constable и Daniel Waldram. — «Supergravity as Generalised Geometry II: $E_{d(d)} \times \mathbb{R}^+$ and M theory». — В: *JHEP* 03 (2014), с. 019. — DOI: 10.1007/JHEP03(2014)019. — arXiv: 1212.1586 [hep-th].

[125] G. Aldazabal и др. — «Extended geometry and gauged maximal supergravity». — В: *JHEP* 06 (2013), с. 046. — DOI: 10.1007/JHEP06(2013)046. — arXiv: 1302.5419 [hep-th].

[126] Martin Cederwall, Joakim Edlund и Anna Karlsson. — «Exceptional geometry and tensor fields». — В: *JHEP* 07 (2013), с. 028. — DOI: 10.1007/JHEP07(2013)028. — arXiv: 1302.6736 [hep-th].

[127] Joel Scherk и John H. Schwarz. — «How to Get Masses from Extra Dimensions». — В: *Nucl.Phys.* B153 (1979), с. 61—88.

[128] Mariana Graña и Diego Marques. — «Gauged Double Field Theory». — В: *JHEP* 1204 (2012), с. 020. — DOI: 10.1007/JHEP04(2012)020. — arXiv: 1201.2924 [hep-th].

[129] Edvard T. Musaev. — «Gauged supergravities in 5 and 6 dimensions from generalised Scherk-Schwarz reductions». — В: *JHEP* 05 (2013), с. 161. — DOI: 10.1007/JHEP05(2013)161. — arXiv: 1301.0467 [hep-th].

[130] David S. Berman и др. — «Duality Invariant M-theory: Gauged supergravities and Scherk-Schwarz reductions». — В: *JHEP* 10 (2012), с. 174. — DOI: 10.1007/JHEP10(2012)174. — arXiv: 1208.0020 [hep-th].

[131] Walter H. Baron. — «Gaugings from $E_{7(7)}$ extended geometries». — В: *Phys.Rev.* D91.2 (2015), с. 024008. — DOI: 10.1103/PhysRevD.91.024008. — arXiv: 1404.7750 [hep-th].

[132] Olaf Hohm и Henning Samtleben. — «Consistent Kaluza-Klein Truncations via Exceptional Field Theory». — В: *JHEP* 1501 (2015), с. 131. — DOI: 10.1007/JHEP01(2015)131. — arXiv: 1410.8145 [hep-th].

[133] Arnaud Baguet, Olaf Hohm и Henning Samtleben. — «Consistent Type IIB Reductions to Maximal 5D Supergravity». — В: *Phys. Rev.* D92.6 (2015), с. 065004. — DOI: 10.1103/PhysRevD.92.065004. — arXiv: 1506.01385 [hep-th].

[134] Davide Cassani и др. — «Exceptional generalised geometry for massive IIA and consistent reductions». — В: *JHEP* 08 (2016), с. 074. — DOI: 10.1007/JHEP08(2016)074. — arXiv: 1605.00563 [hep-th].

[135] Emanuel Malek. — «7-dimensional $\mathcal{N} = 2$ Consistent Truncations using SL(5) Exceptional Field Theory». — В: *JHEP* 06 (2017), с. 026. — DOI: 10.1007/JHEP06(2017)026. — arXiv: 1612.01692 [hep-th].

[136] Emanuel Malek, Henning Samtleben и Valenti Vall Camell. — «Supersymmetric AdS_7 and AdS_6 vacua and their consistent truncations with vector multiplets». — В: *JHEP* 04 (2019), с. 088. — DOI: 10.1007/JHEP04(2019)088. — arXiv: 1901.11039 [hep-th].

[137] Oscar de Felice. — «Flux Backgrounds and Exceptional Generalised Geometry». — Дис. . . . док. Paris, LPTHE, март 2018. — arXiv: 1808.04225 [hep-th].

[138] Emanuel Malek. — «Half-Maximal Supersymmetry from Exceptional Field Theory». — В: *Fortsch. Phys.* 65.10-11 (2017), с. 1700061. — DOI: 10.1002/prop.201700061. — arXiv: 1707.00714 [hep-th].

[139] David Andriot и др. — «A geometric action for non-geometric fluxes». — В: (2012). — arXiv: 1202.3060 [hep-th].

[140] Athanasios Chatzistavrakidis и др. — «Effective actions of nongeometric five-branes». — В: *Phys. Rev.* D89.6 (2014), с. 066004. — DOI: 10.1103/PhysRevD.89.066004. — arXiv: 1309.2653 [hep-th].

[141] Hadi Godazgar и др. — «Consistent 4-form fluxes for maximal supergravity». — В: *JHEP* 10 (2015), с. 169. — DOI: 10 . 1007 / JHEP10(2015)169. — arXiv: 1507.07684 [hep-th].

[142] Henning Samtleben и Özgür Sarıoglu. — «Consistent S^3 reductions of six-dimensional supergravity». — В: *Phys. Rev. D* 100.8 (2019), с. 086002. — DOI: 10.1103/PhysRevD.100.086002. — arXiv: 1907.08413 [hep-th].

[143] Olaf Hohm, Edvard T. Musaev и Henning Samtleben. — «$O(d+1,d+1)$ enhanced double field theory». — В: *JHEP* 10 (2017), с. 086. — DOI: 10.1007/JHEP10(2017)086. — arXiv: 1707.06693 [hep-th].

[144] Andre Coimbra, Charles Strickland-Constable и Daniel Waldram. — «Supergravity as Generalised Geometry I: Type II Theories». — В: *JHEP* 1111 (2011), с. 091. — DOI: 10 . 1007 / JHEP11(2011) 091. — arXiv: 1107.1733 [hep-th].

[145] Kanghoon Lee, Charles Strickland-Constable и Daniel Waldram. — «Spheres, generalised parallelisability and consistent truncations». — В: *Fortsch. Phys.* 65.10-11 (2017), с. 1700048. — DOI: 10 . 1002 / prop . 201700048. — arXiv: 1401.3360 [hep-th].

[146] Pascal du Bosque, Falk Hassler и Dieter Lüst. — «Generalized parallelizable spaces from exceptional field theory». — В: *JHEP* 01 (2018), с. 117. — DOI: 10.1007/JHEP01(2018)117. — arXiv: 1705.09304 [hep-th].

[147] Emanuel Malek, Henning Samtleben и Valenti Vall Camell. — «Supersymmetric AdS_7 and AdS_6 vacua and their minimal consistent truncations from exceptional field theory». — В: *Phys. Lett. B* 786 (2018), с. 171—179. — DOI: 10.1016/j.physletb.2018.09.037. — arXiv: 1808.05597 [hep-th].

[148] Emanuel Malek и Henning Samtleben. — «Kaluza-Klein Spectrometry for Supergravity». — В: *Phys. Rev. Lett.* 124.10 (2020), с. 101601. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.101601. — arXiv: 1911.12640 [hep-th].

[149] Emanuel Malek и Henning Samtleben. — «Kaluza-Klein Spectrometry from Exceptional Field Theory». — В: *Phys. Rev. D* 102.10 (2020), с. 106016. — DOI: 10.1103/PhysRevD.102.106016. — arXiv: 2009.03347 [hep-th].

[150] Nikolay Bobev и др. — «Kaluza-Klein Spectroscopy for the Leigh-Strassler SCFT». — В: *JHEP* 04 (2021), с. 208. — DOI: 10.1007/JHEP04(2021)208. — arXiv: 2012.07089 [hep-th].

[151] Mattia Cesaro, Gabriel Larios и Oscar Varela. — «Supersymmetric spectroscopy on $AdS_4\times S^7$ and $AdS_4\times S^6$». — В: *JHEP* 07 (2021), с. 094. — DOI: 10.1007/JHEP07(2021)094. — arXiv: 2103.13408 [hep-th].

[152] Mattia Cesaro, Gabriel Larios и Oscar Varela. — «The spectrum of marginally-deformed $\mathcal{N} = 2$ CFTs with AdS_4 S-fold duals of type IIB». — В: (сент. 2021). — arXiv: 2109.11608 [hep-th].

[153] David Andriot и др. — «Non-Geometric Fluxes in Supergravity and Double Field Theory». — В: *Fortsch. Phys.* 60 (2012), с. 1150—1186. — DOI: 10.1002/prop.201200085. — arXiv: 1204.1979 [hep-th].

[154] David Andriot и André Betz. — «β-supergravity: a ten-dimensional theory with non-geometric fluxes, and its geometric framework». — В: *JHEP* 12 (2013), с. 083. — DOI: 10.1007/JHEP12(2013)083. — arXiv: 1306.4381 [hep-th].

[155] David Andriot и André Betz. — «NS-branes, source corrected Bianchi identities, and more on backgrounds with non-geometric fluxes». — В: *JHEP* 07 (2014), с. 059. — DOI: 10.1007/JHEP07(2014)059. — arXiv: 1402.5972 [hep-th].

[156] Ilya Bakhmatov, Kirill Gubarev и Edvard T. Musaev. — «Non-abelian tri-vector deformations in $d = 11$ supergravity». — В: *JHEP* 05 (2020), с. 113. — DOI: 10.1007/JHEP05(2020)113. — arXiv: 2002.01915 [hep-th].

[157] David S. Berman, Edvard T. Musaev и Malcolm J. Perry. — «Boundary Terms in Generalized Geometry and doubled field theory». — В: *Phys.Lett.* B706 (2011), с. 228—231. — DOI: 10.1016/j.physletb.2011.11.019. — arXiv: 1110.3097 [hep-th].

[158] Peter Breitenlohner, Dieter Maison и Gary W. Gibbons. — «Four-Dimensional Black Holes from Kaluza-Klein Theories». — В: *Commun. Math. Phys.* 120 (1988), с. 295. — DOI: 10.1007/BF01217967.

[159] E. Cremmer и др. — «Higher dimensional origin of D = 3 coset symmetries». — В: (сент. 1999). — arXiv: hep-th/9909099.

[160] W. Siegel. — «Superspace duality in low-energy superstrings». — В: *Phys.Rev.* D48 (1993), с. 2826—2837. — DOI: 10.1103/PhysRevD.48.2826. — arXiv: hep-th/9305073 [hep-th].

[161] Olaf Hohm и Seung Ki Kwak. — «Double Field Theory Formulation of Heterotic Strings». — В: *JHEP* 1106 (2011), с. 096. — DOI: 10.1007/JHEP06(2011)096. — arXiv: 1103.2136 [hep-th].

[162] Ashoke Sen. — «Strong - weak coupling duality in three-dimensional string theory». — В: *Nucl. Phys. B* 434 (1995), с. 179—209. — DOI: 10.1016/0550-3213(94)00461-M. — arXiv: hep-th/9408083.

[163] Xavier Bekaert, Nicolas Boulanger и Sandrine Cnockaert. — «No self-interaction for two-column massless fields». — В: *J. Math. Phys.* 46 (2005), с. 012303. — DOI: 10.1063/1.1823032. — arXiv: hep-th/0407102.

[164] Charles Strickland-Constable. — «Subsectors, Dynkin Diagrams and New Generalised Geometries». — В: *JHEP* 08 (2017), с. 144. — DOI: 10.1007/JHEP08(2017)144. — arXiv: 1310.4196 [hep-th].

[165] Martin Cederwall и J. A. Rosabal. — «E_8 geometry». — В: *JHEP* 07 (2015), с. 007. — DOI: 10 . 1007 / JHEP07(2015) 007. — arXiv: 1504 . 04843 [hep-th].

[166] Hermann Nicolai и Henning Samtleben. — «Chern-Simons versus Yang-Mills gaugings in three-dimensions». — В: *Nucl. Phys. B* 668 (2003), с. 167—178. — DOI: 10.1016/S0550-3213(03)00569-8. — arXiv: hep-th/0303213.

[167] Mirjam Cvetic, Hong Lu и C. N. Pope. — «Consistent Kaluza-Klein sphere reductions». — В: *Phys. Rev. D* 62 (2000), с. 064028. — DOI: 10.1103/PhysRevD.62.064028. — arXiv: hep-th/0003286.

[168] Emanuel Malek и Henning Samtleben. — «Dualising consistent IIA / IIB truncations». — В: (2015). — arXiv: 1510.03433 [hep-th].

[169] Nihat Sadik Deger и др. — «A supersymmetric reduction on the three-sphere». — В: *Nucl. Phys. B* 890 (2014), с. 350—362. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2014.11.014. — arXiv: 1410.7168 [hep-th].

[170] Hermann Nicolai и Henning Samtleben. — «Kaluza-Klein supergravity on AdS(3) x S**3». — В: *JHEP* 09 (2003), с. 036. — DOI: 10.1088/1126-6708/2003/09/036. — arXiv: hep-th/0306202.

[171] Edvard T. Musaev. — «Gauge Field Fluxes and Bianchi Identities in Extended Field Theories». — В: *Theor. Math. Phys.* 200.2 (2019). [Teor. Mat. Fiz.200,no.2,269(2019)], с. 1158—1170. — DOI: 10 . 1134 / S0040577919080087,10.4213/tmf9671. — arXiv: 1907.12222 [hep-th].

[172] Eric A. Bergshoeff и др. — «Dual Double Field Theory». — В: *JHEP* 06 (2016), с. 026. — DOI: 10.1007/JHEP06(2016)026. — arXiv: 1603.07380 [hep-th].

[173] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm и Fabio Riccioni. — «Exotic Dual of Type II Double Field Theory». — В: *Phys. Lett. B* 767 (2017), с. 374—379. — DOI: 10.1016/j.physletb.2017.01.081. — arXiv: 1612.02691 [hep-th].

[174] E. A. Bergshoeff и др. — «Non-geometric fluxes and mixed-symmetry potentials». — В: *JHEP* 11 (2015), с. 020. — DOI: 10.1007/JHEP11(2015)020. — arXiv: 1508.00780 [hep-th].

[175] Davide M. Lombardo, Fabio Riccioni и Stefano Risoli. — «*P* fluxes and exotic branes». — В: *JHEP* 12 (2016), с. 114. — DOI: 10.1007/JHEP12(2016)114. — arXiv: 1610.07975 [hep-th].

[176] Ofer Aharony. — «A Brief review of 'little string theories'». — В: *Class. Quant. Grav.* 17 (2000). Под ред. O. Lechtenfeld и др., с. 929—938. — DOI: 10.1088/0264-9381/17/5/302. — arXiv: hep-th/9911147.

[177] Jungmin Kim, Seok Kim и Kimyeong Lee. — «Little strings and T-duality». — В: *JHEP* 02 (2016), с. 170. — DOI: 10.1007/JHEP02(2016)170. — arXiv: 1503.07277 [hep-th].

[178] Brian R. Greene и др. — «Stringy Cosmic Strings and Noncompact Calabi-Yau Manifolds». — В: *Nucl. Phys. B* 337 (1990), с. 1—36. — DOI: 10.1016/0550-3213(90)90248-C.

[179] C.M. Hull. — «A geometry for non-geometric string backgrounds». — В: *JHEP* 0510 (2005), с. 065. — arXiv: hep-th/0406102 [hep-th].

[180] C.M. Hull. — «Global aspects of T-duality, gauged sigma models and T-folds». — В: *JHEP* 0710 (2007), с. 057. — DOI: 10.1088/1126-6708/2007/10/057. — arXiv: hep-th/0604178 [hep-th].

[181] C M Hull. — «Doubled geometry and T-folds». — В: *JHEP* 0707 (2007), с. 080. — DOI: 10.1088/1126-6708/2007/07/080. — arXiv: hep-th/0605149 [hep-th].

[182] Jerome P. Gauntlett, Jeffrey A. Harvey и James T. Liu. — «Magnetic monopoles in string theory». — В: *Nucl. Phys. B* 409 (1993), с. 363—381. — DOI: 10.1016/0550-3213(93)90584-C. — arXiv: hep-th/9211056.

[183] Ruth Gregory, Jeffrey A. Harvey и Gregory W. Moore. — «Unwinding strings and t duality of Kaluza-Klein and h monopoles». — В: *Adv. Theor. Math. Phys.* 1 (1997), с. 283—297. — DOI: 10.4310/ATMP.1997.v1.n2.a6. — arXiv: hep-th/9708086.

[184] David Tong. — «NS5-branes, T duality and world sheet instantons». — В: *JHEP* 07 (2002), с. 013. — DOI: 10.1088/1126-6708/2002/07/013. — arXiv: hep-th/0204186.

[185] Jeffrey A. Harvey и Steuard Jensen. — «Worldsheet instanton corrections to the Kaluza-Klein monopole». — В: *JHEP* 10 (2005), с. 028. — DOI: 10.1088/1126-6708/2005/10/028. — arXiv: hep-th/0507204.

[186] Steuard Jensen. — «The KK-Monopole/NS5-Brane in Doubled Geometry». — В: *JHEP* 1107 (2011), с. 088. — DOI: 10.1007/JHEP07(2011)088. — arXiv: 1106.1174 [hep-th].

[187] Tetsuji Kimura и Shin Sasaki. — «Worldsheet instanton corrections to 5^2_2-brane geometry». — В: *JHEP* 08 (2013), с. 126. — DOI: 10.1007/JHEP08(2013)126. — arXiv: 1305.4439 [hep-th].

[188] Falk Hassler и Dieter Lust. — «Non-commutative/non-associative IIA (IIB) Q- and R-branes and their intersections». — В: *JHEP* 1307 (2013), с. 048. — DOI: 10.1007/JHEP07(2013)048. — arXiv: 1303.1413 [hep-th].

[189] Alain Connes, Michael R. Douglas и Albert S. Schwarz. — «Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori». — В: *JHEP* 02 (1998), с. 003. — DOI: 10.1088/1126-6708/1998/02/003. — arXiv: hep-th/9711162.

[190] Michael R. Douglas и Christopher M. Hull. — «D-branes and the noncommutative torus». — В: *JHEP* 02 (1998), с. 008. — DOI: 10.1088/1126-6708/1998/02/008. — arXiv: hep-th/9711165.

[191] Chong-Sun Chu и Pei-Ming Ho. — «Noncommutative open string and D-brane». — В: *Nucl. Phys. B* 550 (1999), с. 151—168. — DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00199-6. — arXiv: hep-th/9812219.

[192] Volker Schomerus. — «D-branes and deformation quantization». — В: *JHEP* 06 (1999), с. 030. — DOI: 10.1088/1126-6708/1999/06/030. — arXiv: hep-th/9903205.

[193] Nathan Seiberg и Edward Witten. — «String theory and noncommutative geometry». — В: *JHEP* 9909 (1999), с. 032. — arXiv: hep-th/9908142 [hep-th].

[194] Lorenzo Cornalba и Ricardo Schiappa. — «Nonassociative star product deformations for D-brane world volumes in curved backgrounds». — В: *Commun. Math. Phys.* 225 (2002), с. 33—66. — DOI: 10.1007/s002201000569. — arXiv: hep-th/0101219.

[195] Manfred Herbst, Alexander Kling и Maximilian Kreuzer. — «Star products from open strings in curved backgrounds». — В: *JHEP* 09 (2001), с. 014. — DOI: 10.1088/1126-6708/2001/09/014. — arXiv: hep-th/0106159.

[196] Cezar Condeescu, Ioannis Florakis и Dieter Lust. — «Asymmetric Orbifolds, Non-Geometric Fluxes and Non-Commutativity in Closed String Theory». — В: *JHEP* 04 (2012), с. 121. — DOI: 10.1007/JHEP04(2012)121. — arXiv: 1202.6366 [hep-th].

[197] David Andriot и др. — «(Non-)commutative closed string on T-dual toroidal backgrounds». — В: *JHEP* 06 (2013), с. 021. — DOI: 10.1007/JHEP06(2013)021. — arXiv: 1211.6437 [hep-th].

[198] Chris D. A. Blair. — «Non-commutativity and non-associativity of the doubled string in non-geometric backgrounds». — В: *JHEP* 06 (2015), с. 091. — DOI: 10.1007/JHEP06(2015)091. — arXiv: 1405.2283 [hep-th].

[199] Ioannis Bakas и Dieter Lüst. — «T-duality, Quotients and Currents for Non-Geometric Closed Strings». — В: *Fortsch. Phys.* 63 (2015), с. 543—570. — DOI: 10.1002/prop.201500031. — arXiv: 1505.04004 [hep-th].

[200] Erik Plauschinn. — «Non-geometric backgrounds in string theory». — В: *Phys. Rept.* 798 (2019), с. 1—122. — DOI: 10.1016/j.physrep.2018.12.002. — arXiv: 1811.11203 [hep-th].

[201] Richard J. Szabo. — «An Introduction to Nonassociative Physics». — В: *PoS* CORFU2018 (2019). Под ред. Konstantinos Anagnostopoulos и др., с. 100. — DOI: 10.22323/1.347.0100. — arXiv: 1903.05673 [hep-th].

[202] Jörg Michael Fuchs. — «Target Spaces of Non-Geometric String Backgrounds». — Дис. … док. Munich U., 2017. — DOI: 10.5282/edoc.21164.

[203] Ilya Bakhmatov, Axel Kleinschmidt и Edvard T. Musaev. — «Non-geometric branes are DFT monopoles». — В: *JHEP* 10 (2016), с. 076. — DOI: 10.1007/JHEP10(2016)076. — arXiv: 1607.05450 [hep-th].

[204] David S. Berman и Felix J. Rudolph. — «Branes are Waves and Monopoles». — В: *JHEP* 05 (2015), с. 015. — DOI: 10.1007/JHEP05(2015)015. — arXiv: 1409.6314 [hep-th].

[205] Ilya Bakhmatov и др. — «Exotic branes in Exceptional Field Theory: the SL(5) duality group». — В: *JHEP* 08 (2018), с. 021. — DOI: 10.1007/JHEP08(2018)021. — arXiv: 1710.09740 [hep-th].

[206] David S. Berman, Edvard T. Musaev и Ray Otsuki. — «Exotic Branes in Exceptional Field Theory: $E_{7(7)}$ and Beyond». — В: *JHEP* 12 (2018), с. 053. — DOI: 10.1007/JHEP12(2018)053. — arXiv: 1806.00430 [hep-th].

[207] Edvard Musaev. — «Exotic branes in Double Field Theory». — В: *EPJ Web Conf.* 125 (2016), с. 05017. — DOI: 10.1051/epjconf/201612505017.

[208] David S. Berman, Edvard T. Musaev и R. Otsuki. — «Exotic Branes in M-Theory». — В: *PoS* CORFU2018 (2019), с. 138. — DOI: 10.22323/1.347.0138. — arXiv: 1903.10247 [hep-th].

[209] Edvard T. Musaev. — «U-Dualities in Type II and M-Theory: A Covariant Approach». — В: *Symmetry* 11.8 (2019), с. 993. — DOI: 10.3390/sym11080993.

[210] Ray Otsuki. — «Exotic Aspects of Extended Field Theories». — Дис. ... док. Queen Mary, U. of London (main), 2020. — arXiv: 2008.05934 [hep-th].

[211] Neil B. Copland. — «A Double Sigma Model for Double Field Theory». — В: *JHEP* 04 (2012), с. 044. — DOI: 10.1007/JHEP04(2012)044. — arXiv: 1111.1828 [hep-th].

[212] David S. Berman и др. — «Deformation independent open brane metrics and generalized theta parameters». — В: *JHEP* 02 (2002), с. 012. — DOI: 10.1088/1126-6708/2002/02/012. — arXiv: hep-th/0109107.

[213] David S. Berman и Boris Pioline. — «Open membranes, ribbons and deformed Schild strings». — В: *Phys. Rev. D* 70 (2004), с. 045007. — DOI: 10.1103/PhysRevD.70.045007. — arXiv: hep-th/0404049.

[214] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm и Teake A. Nutma. — «A Note on E(11) and Three-dimensional Gauged Supergravity». — В: *JHEP* 05 (2008), с. 081. — DOI: 10.1088/1126-6708/2008/05/081. — arXiv: 0803.2989 [hep-th].

[215] Eric Bergshoeff, Eduardo Eyras и Yolanda Lozano. — «The Massive Kaluza-Klein monopole». — В: *Phys. Lett. B* 430 (1998), с. 77—86. — DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00501-2. — arXiv: hep-th/9802199.

[216] Eduardo Eyras, Bert Janssen и Yolanda Lozano. — «Five-branes, K K monopoles and T duality». — В: *Nucl. Phys. B* 531 (1998), с. 275—301. — DOI: 10.1016/S0550-3213(98)00575-6. — arXiv: hep-th/9806169.

[217] Tetsuji Kimura, Shin Sasaki и Masaya Yata. — «World-volume Effective Actions of Exotic Five-branes». — В: *JHEP* 07 (2014), с. 127. — DOI: 10.1007/JHEP07(2014)127. — arXiv: 1404.5442 [hep-th].

[218] Chris D. A. Blair и Edvard T. Musaev. — «Five-brane actions in double field theory». — В: *JHEP* 03 (2018), с. 111. — DOI: 10.1007/JHEP03(2018)111. — arXiv: 1712.01739 [hep-th].

[219] Paolo Pasti, Dmitri P. Sorokin и Mario Tonin. — «Covariant action for a D = 11 five-brane with the chiral field». — В: *Phys. Lett. B* 398 (1997), с. 41—46. — DOI: 10.1016/S0370-2693(97)00188-3. — arXiv: hep-th/9701037.

[220] Igor A. Bandos и др. — «Covariant action for the superfive-brane of M theory». — В: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), с. 4332—4334. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4332. — arXiv: hep-th/9701149.

[221] Malcolm Perry и John H. Schwarz. — «Interacting chiral gauge fields in six-dimensions and Born-Infeld theory». — В: *Nucl. Phys. B* 489 (1997), с. 47—64. — DOI: 10.1016/S0550-3213(97)00040-0. — arXiv: hep-th/9611065.

[222] Mina Aganagic и др. — «World volume action of the M theory five-brane». — В: *Nucl. Phys. B* 496 (1997), с. 191—214. — DOI: 10.1016/S0550-3213(97)00227-7. — arXiv: hep-th/9701166.

[223] Paul S. Howe и E. Sezgin. — «D = 11, p = 5». — В: *Phys. Lett. B* 394 (1997), с. 62—66. — DOI: 10.1016/S0370-2693(96)01672-3. — arXiv: hep-th/9611008.

[224] Igor A. Bandos и др. — «On the equivalence of different formulations of the M theory five-brane». — В: *Phys. Lett. B* 408 (1997), с. 135—141. — DOI: 10.1016/S0370-2693(97)00784-3. — arXiv: hep-th/9703127.

[225] Dmitri P. Sorokin. — «Superbranes and superembeddings». — В: *Phys. Rept.* 329 (2000), с. 1—101. — DOI: 10.1016/S0370-1573(99)00104-0. — arXiv: hep-th/9906142.

[226] E. S. Fradkin и Arkady A. Tseytlin. — «Nonlinear Electrodynamics from Quantized Strings». — В: *Phys. Lett. B* 163 (1985), с. 123—130. — DOI: 10.1016/0370-2693(85)90205-9.

[227] R. G. Leigh. — «Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model». — В: *Mod. Phys. Lett. A* 4 (1989), с. 2767. — DOI: 10.1142/S0217732389003099.

[228] Olaf Hohm, Seung Ki Kwak и Barton Zwiebach. — «Double Field Theory of Type II Strings». — В: *JHEP* 09 (2011), с. 013. — DOI: 10.1007/JHEP09(2011)013. — arXiv: 1107.0008 [hep-th].

[229] Eduardo Eyras и Yolanda Lozano. — «The Kaluza-Klein monopole in a massive IIA background». — В: *Nucl. Phys. B* 546 (1999), с. 197—218. — DOI: 10.1016/S0550-3213(99)00098-X. — arXiv: hep-th/9812188.

[230] Eric Bergshoeff и др. — «The different faces of branes in Double Field Theory». — В: *JHEP* 09 (2019). [JHEP19,110(2020)], с. 110. — DOI: 10.1007/JHEP09(2019)110. — arXiv: 1903.05601 [hep-th].

[231] Yuho Sakatani. — «*U*-duality extension of Drinfel'd double». — В: *PTEP* 2020.2 (2020), 023B08. — DOI: 10.1093/ptep/ptz172. — arXiv: 1911.06320 [hep-th].

[232] Emanuel Malek и Daniel C. Thompson. — «Poisson-Lie U-duality in Exceptional Field Theory». — В: *JHEP* 04 (2020), с. 058. — DOI: 10.1007/JHEP04(2020)058. — arXiv: 1911.07833 [hep-th].

[233] Yuho Sakatani и Shozo Uehara. — «Non-Abelian *U*-duality for membranes». — В: *PTEP* 2020.7 (2020), 073B01. — DOI: 10.1093/ptep/ptaa063. — arXiv: 2001.09983 [hep-th].

[234] Emanuel Malek, Yuho Sakatani и Daniel C. Thompson. — «$\mathrm{E}_{6(6)}$ exceptional Drinfel'd algebras». — В: *JHEP* 01 (2021), с. 020. — DOI: 10.1007/JHEP01(2021)020. — arXiv: 2007.08510 [hep-th].

[235] Yuho Sakatani. — «Extended Drinfel'd algebras and non-Abelian duality». — В: *PTEP* 2021.6 (2021), 063B02. — DOI: 10.1093/ptep/ptaa188. — arXiv: 2009.04454 [hep-th].

[236] Edvard T. Musaev и Yuho Sakatani. — «Non-Abelian U duality at work». — В: *Phys. Rev. D* 104.4 (2021), с. 046015. — DOI: 10.1103/PhysRevD.104.046015. — arXiv: 2012.13263 [hep-th].

[237] Edvard T. Musaev. — «On non-abelian U-duality of 11D backgrounds». — В: (июль 2020). — arXiv: 2007.01213 [hep-th].

[238] Ralph Blumenhagen, Falk Hassler и Dieter Lüst. — «Double Field Theory on Group Manifolds». — В: *JHEP* 02 (2015), с. 001. — DOI: 10.1007/JHEP02(2015)001. — arXiv: 1410.6374 [hep-th].

[239] Pascal du Bosque, Falk Hassler и Dieter Lust. — «Flux Formulation of DFT on Group Manifolds and Generalized Scherk-Schwarz Compactifications». — В: *JHEP* 02 (2016), с. 039. — DOI: 10.1007/JHEP02(2016)039. — arXiv: 1509.04176 [hep-th].

[240] Kyoungho Cho, Kevin Morand и Jeong-Hyuck Park. — «Kaluza–Klein reduction on a maximally non-Riemannian space is moduli-free». — В: *Phys. Lett. B* 793 (2019), с. 65—69. — DOI: 10.1016/j.physletb.2019.04.042. — arXiv: 1808.10605 [hep-th].

[241] David S. Berman, Chris D. A. Blair и Ray Otsuki. — «Non-Riemannian geometry of M-theory». — В: *JHEP* 07 (2019), с. 175. — DOI: 10.1007/JHEP07(2019)175. — arXiv: 1902.01867 [hep-th].

[242] Jeong-Hyuck Park и Shigeki Sugimoto. — «String Theory and non-Riemannian Geometry». — В: *Phys. Rev. Lett.* 125.21 (2020), с. 211601. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.211601. — arXiv: 2008.03084 [hep-th].

[243] C. M. Hull. — «Duality and the signature of space-time». — В: *JHEP* 11 (1998), с. 017. — DOI: 10.1088/1126-6708/1998/11/017. — arXiv: hep-th/9807127.

[244] I. V. Cherednik. — «Relativistically Invariant Quasiclassical Limits of Integrable Two-dimensional Quantum Models». — В: *Theor. Math. Phys.* 47 (1981), с. 422—425. — DOI: 10.1007/BF01086395.

[245] V. E. Zakharov и A. V. Mikhailov. — «Relativistically Invariant Two-Dimensional Models in Field Theory Integrable by the Inverse Problem Technique. (In Russian)». — В: *Sov. Phys. JETP* 47 (1978), с. 1017—1027.

[246] Ctirad Klimčik. — «On integrability of the Yang-Baxter sigma-model». — В: *J. Math. Phys.* 50 (2009), с. 043508. — DOI: 10.1063/1.3116242. — arXiv: 0802.3518 [hep-th].

[247] Iosif Bena, Joseph Polchinski и Radu Roiban. — «Hidden symmetries of the AdS(5) x S**5 superstring». — В: *Phys. Rev. D* 69 (2004), с. 046002. — DOI: 10.1103/PhysRevD.69.046002. — arXiv: hep-th/0305116.

[248] Gleb Arutyunov, Riccardo Borsato и Sergey Frolov. — «S-matrix for strings on η-deformed AdS5 x S5». — В: *JHEP* 04 (2014), с. 002. — DOI: 10.1007/JHEP04(2014)002. — arXiv: 1312.3542 [hep-th].

[249] Thiago Araujo и др. — «Conformal twists, Yang-Baxter σ-models & holographic noncommutativity». — В: *J. Phys.* A51.23 (2018), с. 235401. — DOI: 10.1088/1751-8121/aac195. — arXiv: 1705.02063 [hep-th].

[250] T. Araujo и др. — «Yang-Baxter σ-models, conformal twists, and noncommutative Yang-Mills theory». — В: *Phys. Rev.* D95.10 (2017), с. 105006. — DOI: 10.1103/PhysRevD.95.105006. — arXiv: 1702.02861 [hep-th].

[251] T. Araujo и др. — «*I* in generalized supergravity». — В: *Eur. Phys. J.* C77.11 (2017), с. 739. — DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5316-5. — arXiv: 1708.03163 [hep-th].

[252] I. Bakhmatov и др. — «Yang-Baxter Deformations Beyond Coset Spaces (a slick way to do TsT)». — В: *JHEP* 06 (2018), с. 161. — DOI: 10.1007/JHEP06(2018)161. — arXiv: 1803.07498 [hep-th].

[253] Ilya Bakhmatov и Edvard T. Musaev. — «Classical Yang-Baxter equation from β-supergravity». — В: *JHEP* 01 (2019), с. 140. — DOI: 10.1007/JHEP01(2019)140. — arXiv: 1811.09056 [hep-th].

[254] Ilya Bakhmatov и др. — «Tri-vector deformations in $d = 11$ supergravity». — В: *JHEP* 08 (2019), с. 126. — DOI: 10.1007/JHEP08(2019)126. — arXiv: 1906.09052 [hep-th].

[255] Yuho Sakatani. — «Type II DFT solutions from Poisson-Lie T-duality/plurality». — В: (2019). [PTEP,073B04(2019)]. — DOI: 10.1093/ptep/ptz071. — arXiv: 1903.12175 [hep-th].

[256] I. Bakhmatov и др. — «Classical Yang-Baxter Equation from Supergravity». — В: *Phys. Rev.* D98.2 (2018), с. 021901. — DOI: 10.1103/PhysRevD.98.021901. — arXiv: 1710.06784 [hep-th].

[257] Ilya Bakhmatov и Edvard T. Musaev. — «Classical Yang-Baxter equation from β-supergravity». — В: *JHEP* 01 (2019), с. 140. — DOI: 10.1007/JHEP01(2019)140. — arXiv: 1811.09056 [hep-th].

[258] Riccardo Borsato и Linus Wulff. — «Non-abelian T-duality and Yang-Baxter deformations of Green-Schwarz strings». — В: *JHEP* 08 (2018), с. 027. — DOI: 10.1007/JHEP08(2018)027. — arXiv: 1806.04083 [hep-th].

[259] Arnaud Baguet, Marc Magro и Henning Samtleben. — «Generalized IIB supergravity from exceptional field theory». — В: *JHEP* 03 (2017), с. 100. — DOI: 10.1007/JHEP03(2017)100. — arXiv: 1612.07210 [hep-th].

[260] Yuho Sakatani, Shozo Uehara и Kentaroh Yoshida. — «Generalized gravity from modified DFT». — В: *JHEP* 04 (2017), с. 123. — DOI: 10.1007/JHEP04(2017)123. — arXiv: 1611.05856 [hep-th].

[261] Aybike Çatal-Özer и Seçil Tunalı. — «Yang-Baxter Deformation as an $O(d,d)$ Transformation». — В: *Class. Quant. Grav.* 37.7 (2020), с. 075003. — DOI: 10.1088/1361-6382/ab6f7e. — arXiv: 1906.09053 [hep-th].

[262] Chris D. A. Blair и Emanuel Malek. — «Geometry and fluxes of SL(5) exceptional field theory». — В: *JHEP* 03 (2015), с. 144. — DOI: 10.1007/JHEP03(2015)144. — arXiv: 1412.0635 [hep-th].

[263] Stijn J. van Tongeren. — «Yang–Baxter deformations, AdS/CFT, and twist-noncommutative gauge theory». — В: *Nucl. Phys.* B904 (2016), с. 148—175. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2016.01.012. — arXiv: 1506.01023 [hep-th].

[264] Georgios Itsios и др. — «Non-Abelian T-duality and the AdS/CFT correspondence:new N=1 backgrounds». — В: *Nucl. Phys. B* 873 (2013), с. 1—64. — DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2013.04.004. — arXiv: 1301.6755 [hep-th].

[265] Georgios Itsios и др. — «On Non-Abelian T-Duality and new N=1 backgrounds». — В: *Phys. Lett. B* 721 (2013), с. 342—346. — DOI: 10.1016/j.physletb.2013.03.033. — arXiv: 1212.4840 [hep-th].

[266] L. Hlavaty и L. Snobl. — «Classification of 6-dimensional manin triples». — В: (февр. 2002). — arXiv: math/0202209.

[267] Ladislav Hlavaty. — «Classification of 6D Leibniz algebras». — В: *PTEP* 2020.7 (2020), 071B01. — DOI: 10.1093/ptep/ptaa082. — arXiv: 2003.06164 [hep-th].

[268] Kasper Peeters. — «Introducing Cadabra: A Symbolic computer algebra system for field theory problems». — B: (2007). — arXiv: hep-th/0701238 [hep-th].

[269] Kasper Peeters. — «Cadabra2: computer algebra for field theory revisited». — B: *J. Open Source Softw.* 3.32 (2018), c. 1118. — DOI: 10.21105/joss.01118.

[270] Robert Feger и Thomas W. Kephart. — «LieART—A Mathematica application for Lie algebras and representation theory». — B: *Comput. Phys. Commun.* 192 (2015), c. 166—195. — DOI: 10.1016/j.cpc.2014.12.023. — arXiv: 1206.6379 [math-ph].

[271] Robert Feger, Thomas W. Kephart и Robert J. Saskowski. — «LieART 2.0 – A Mathematica application for Lie Algebras and Representation Theory». — B: *Comput. Phys. Commun.* 257 (2020), c. 107490. — DOI: 10.1016/j.cpc.2020.107490. — arXiv: 1912.10969 [hep-th].

Список рисунков

Список таблиц