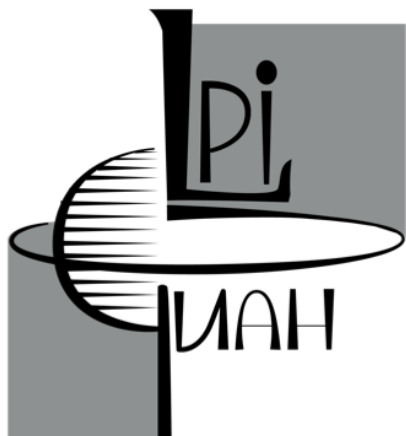


Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук»
(ФИАН)



На правах рукописи

Куров Александр Валерьевич

**Модели классической и квантовой гравитации и их
анализ методом ренормгруппы**

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., в.н.с.
Барвинский Андрей Олегович

Москва — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Бета-функции в (3+1)-мерной проектируемой гравитации Хоравы–Лифшица	14
1.1 Введение	14
1.2 Фиксация калибровки и однопетлевое эффективное действие	18
1.2.1 Выбор фона и фоновая ковариантная фиксация калибровки	18
1.2.2 Действие для функции сдвига и духов	20
1.2.3 Метрическая часть действия	22
1.2.4 Полное однопетлевое действие	23
1.3 Трёхмерная редукция — однопетлевое эффективное действие как след от квадратного корня из оператора	24
1.3.1 Квадратный корень из главного символа и четыре выбора калибровок	27
1.3.2 Каноническая форма псевдодифференциальных операторов	33
1.3.3 Решение уравнения Сильвестра	34
1.3.4 Пертурбативная схема	35
1.4 Универсальные функциональные следы	39
1.4.1 Типы универсальных функциональных следов	39
1.5 Бета функции	43
1.6 Фиксированные точки РГ потока	46
Глава 2. Аномальные масштабные размерности составных операторов	49
2.1 Ренормгрупповые потоки и составные операторы	49
2.1.1 Уравнение Веттериха и анзац Гильберта–Эйнштейна	49
2.1.2 Анзац Гильберта–Эйнштейна	51
2.1.3 Формализм составных операторов	55
2.2 Аномальная масштабная размерность геометрических операторов	57
2.2.1 Вычисление аномальной размерности γ_n	58

2.3	Вычисление матрицы аномальных размерностей	60
2.3.1	Спектральные свойства матрицы стабильности	63
Глава 3. Обобщённая унимодулярная гравитация		64
3.1	Тёмная жидкость и обобщённая унимодулярная инвариантность	64
3.1.1	Пространственно замкнутые модели	67
3.1.2	Асимптотически плоские модели	68
3.2	Линеаризованная теория	69
3.2.1	Действие линеаризованной теории и её свойства калибровочной инвариантности	70
Заключение		75
Список литературы		77
Список рисунков		89
Список таблиц		90
Приложение А. Явные выражения для бета функций		91
A.1	Бета функция для G	91
A.2	Полиномы в β -функциях существенных констант связи	92
Приложение Б. Асимптотическое разложение для коммутатора с оператором в дробной степени		103
Приложение В. Примеры универсальных функциональных следов		105
V.1	Следы с $a = 0$, кубичные по кривизне	105
V.2	Следы с $a = 2$, квадратичные по кривизне	107
V.3	Следы с $a = 6$, нулевого порядка по кривизне	111
Приложение Г. Вычисление следов с добавлением неминимальных операторов		113
G.1	Разложение ядра теплопроводности и преобразование Меллина	113
G.2	Вычисление следов	114

Введение

Актуальность темы. Построение квантовой теории гравитационных взаимодействий остается одной из главных задач теоретической физики. Несмотря на впечатляющие достижения в этом направлении, многие фундаментальные вопросы остаются открытыми. Представляет особый интерес, может ли такая теория быть сформулирована на языке локальной, унитарной и перенормируемой квантовой теории поля в четырёх пространственно-временных измерениях, как это было сделано для всех других взаимодействий в стандартной модели физики элементарных частиц.

Главным препятствием для такого построения в рамках общей теории относительности (ОТО) является хорошо известный факт, что постоянная гравитационного взаимодействия является размерной при числе измерений больше двух. Этот факт делает теорию неперенормируемой по теории возмущений – в каждом порядке петлевого разложения появляются новые расходимости. Возможное решение состоит в том, чтобы дополнить гравитационный лагранжиан слагаемыми, квадратичными по кривизне, тем самым увеличив количество производных, действующих на метрическое поле [1]. Для некоторых областей в пространстве параметров теория даже асимптотически свободна и, следовательно, УФ-полна [2; 3]. Однако из-за присутствия в лагранжиане четырёх производных по времени теория содержит духи – состояния с отрицательной нормой, и не допускает обычной интерпретации в духе унитарной квантовой механики.

Интересная идея была предложена Хоравой [4] (см. также [5–9]), который указал, что унитарность может быть сохранена за счёт потери лоренц-инвариантности. Ключевая идея заимствована из физики конденсированного состояния и использует понятие анизотропного масштабирования времени и пространственных координат. В этом случае в действии теории можно сохранить вторые производные по времени, добавляя только слагаемые, содержащими высшие пространственные производные. Это позволяет построить действие для гравитации, перенормируемым в смысле анализа размерностей, т.е. оно содержит только маргинальные и релевантные операторы по отношению к масштабным преобразованиям. Такое действие имеет хорошие шансы быть пертурбативно перенормируемым в строгом смысле, т.е. все расходимости, порождённые в

рамках теории возмущений могут быть поглощены переопределением констант взаимодействия в действии.

Для числа пространственных измерений больше единицы, время и пространство масштабируются по-разному. Теория гравитации, сформулированная в такой постановке, не может быть полностью инвариантной относительно диффеоморфизмов. Особая роль времени ограничивает возможные симметрии к диффеоморфизмам, сохраняющим слоение, которые оставляют инвариантными слои с постоянным временем. Другими словами, остаются репараметризации времени и зависящие от времени пространственные диффеоморфизмы.

Действие гравитации Хоравы–Лифшица записывается через функции, входящие в АДМ-разложение четырёхмерной метрики: функцию хода, вектор сдвига и трёхмерную метрику. Точная форма действия и его физическое содержание зависят от предположения о виде функции хода. В непроектируемой версии гравитации Хоравы функция хода считается полноценным динамическим полем, зависящим как от пространства, так и от времени. В этом случае лагранжиан может зависеть от пространственных производных функции хода [10] и число независимых операторов в лагранжиане очень велико (порядка $O(100)$) [11]. Действие упрощается при низких энергиях, где оно сводится к ОТО и сектору, описывающему динамику предпочтительного слоения [7; 12]. Последний сектор стабилен и его взаимодействия с гравитацией и видимой материей можно подавить подходящим выбором констант связи. Другими словами, несмотря на отсутствие лоренц-инвариантности или общей ковариантности как фундаментальных принципов в гравитации Хоравы, теория может воспроизвести известную феноменологию ОТО на масштабах, в которых она была проверена [13]. В то время как пространство параметров теории было строго ограничено проверками лоренц-инвариантности в секторе материи [14] и в гравитационном секторе [15], оно по-прежнему остается феноменологически жизнеспособным [16]. В литературе появляются работы, указывающие на перенормируемость непроектируемой версии [17].

Мы будем рассматривать проектируемую версию гравитации Хоравы, её пертурбативная перенормируемость была доказана в любом числе пространственно-временных измерений [18]. В этой версии функция хода является функцией только времени. Это предположение совместимо с преобразованиями, которые оставляют инвариантными слои с постоянным временем. С помощью

репараметризации времени функция хода может быть положена любым постоянным значением, скажем единице. Таким образом, функция хода полностью исключается из модели. В случае трёх пространственных измерений, действие содержит 11 констант связи, 7 из которых соответствуют маргинальным операторам.

Целью данной работы является вычисление бета функций существенных констант связи проектируемой (3+1)-мерной модели. Для этого необходимо вычислить функциональный след от однопетлевого эффективного действия. Эту задачу мы решаем с использованием инструментов на основе метода ядра теплопроводности Швингера–ДеВитта [19–25] или Гилки–Сили [26–28]. Они обеспечивают эффективное пересуммирование ряда теории возмущений и позволяют получить УФ-расходимости не в виде разложения по степеням возмущений поля, а в виде полных нелинейных контрчленов — локальных нелинейных функционалов общего фонового поля. Новаторское применение этого метода в квантовой теории Эйнштейна [29] оказалось очень эффективным и теперь лежит в основе большинства результатов о перенормировке (супер)гравитационных моделей. Основным инструментом этого метода является ядро уравнения теплопроводности, коэффициенты разложения по собственному времени которого — так называемые коэффициенты HAMIDEW [30] или Гилки–Сили — несут полную информацию об УФ-расходимостях и могут быть вычислены систематически.

Несмотря на значительные вычислительные преимущества метода ядра теплопроводности, его применение к гравитации Хоравы сталкивается с двумя основными трудностями. Этот метод применим для ковариантных операторов, в которых все производные по пространству-времени трактуются на равных и образуют ковариантные даламбертианы или пространственные лапласианы. Существование предпочтительного временного слоения явно нарушает это свойство. Было предложено несколько способов как обойти эту проблему и применить метод теплового ядра в теориях типа Лифшица [31–35]. Однако приложения к моделям гравитации Хоравы омрачены дополнительной трудностью — неминимальные операторы, возникающие в этих моделях имеют слагаемые с производными высшего порядка, которые не исчерпываются степенями даламбертиана $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ или лапласиана $\Delta \equiv \gamma^{ij} \nabla_i \nabla_j$. Главный символ этих операторов недиагонален по производным, индексы которых свёрнуты с индексами тензорных полей. Чтобы обойти эту трудность, мы используем технику

так называемых универсальных функциональных следов (УФС), применимую к этому классу неминимальных операторов с высшими производными.

Изначально этот метод был разработан для пространственно-временных ковариантных операторов в [22; 23; 36]. Универсальные функциональные следы — это пределы совпадения ядер нелокальных (псевдодифференциальных) операторов вида

$$\nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_m} \frac{\hat{1}}{\square^n} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad (1)$$

которые определены в искривленном пространстве-времени с общей метрикой $g_{\mu\nu}$ и с ковариантным оператором Даламбера \square , действующим на общий набор полей $\varphi = \varphi^A(x)$ (шляпка обозначает матричную структуру ядра оператора в векторном пространстве φ , $\hat{1}\varphi = \delta_B^A \varphi^B$ и т. д.). Для соответствующих значений параметров m и n эти пределы совпадения расходятся в УФ и содержат всю информацию об однопетлевых УФ-расходимостях теории.

Этот метод допускает обобщение на теории с нарушением симметрии Лоренца и регулярными пропагаторами. К счастью, в нашем случае это обобщение не нужно. В силу свойств проектируемой гравитации Хоравы, перенормировку его потенциального члена можно осуществить с помощью специальной трёхмерной редукции, при которой однопетлевое эффективное действие представляется как след от квадратного корня полностью ковариантного в трёхмерном пространстве оператора 6-го порядка. Этот оператор неминимальный и приведение его квадратного корня к виду, подходящему для применения метода УФС представляет собой большую вычислительную задачу. Мы преодолеваем это с помощью символьной компьютерной алгебры. В результате мы получаем однопетлевое эффективное действие в виде суммы универсальных функциональных следов (1) с полуцелыми n , которые полностью ковариантны в трёхмерном пространстве и могут быть вычислены с помощью техники из [22].

Основным результатом первой главы данной работы являются явные выражения для бета функций существенных констант взаимодействия теории и пять фиксированных точек ренормгруппового потока.

Другим направлением работы является изучение гипотезы асимптотического благополучия. Её ключевым компонентом является нетривиальная (негауссова) фиксированная точка (НГФТ) ренормгруппового потока теории,

которая контролирует поведение констант связи в ультрафиолетовом режиме и избавляет физические величины от расходимостей. Идея нетривиальной фиксированной точки, обеспечивающей возможное УФ-завершение в теории квантовой гравитации, была предложена Вайнбергом [37; 38]. Начиная с основополагающей работы [39], уравнение функциональной ренорм группы (УФРГ) [39–41] предоставило существенные доказательства того, что гравитация действительно обладает подходящей НГФТ. Это включает в себя демонстрацию того, что НГФТ, наблюдаемая в четырёх пространственно-временных измерениях, является аналитическим продолжением пертурбативной фиксированной точки, наблюдаемой в $2 + \epsilon$ пространственно-временных измерениях [42], исследования гравитационного РГ потока с помощью анзаца Гильберта–Эйнштейна [42–58], и его обобщения слагаемыми с высшими кривизнами и высшими производными [59–70], в том числе с добавлением известного двухпетлевого контрчлена Гороффа–Саньотти [71]. В качестве ключевого результата эти работы показывают, что НГФТ обладает значительной предсказательной силой.

Существование НГФТ, контролирующей высокоэнергетическое поведение гравитации, поднимает вопрос о том как охарактеризовать свойства пространства-времени в квантовом режиме. Одна из характеристик может быть основана на аномальной размерности геометрических операторов, включающих, например, объёмы пространства-времени, объёмы поверхностей, вложенных в пространство-время, геодезическую длину или корреляционные функции полей, разделённых фиксированным геодезическим расстоянием [57; 72–74]. Например, в [57] была вычислена аномальная размерность γ_0 , связанная с d -мерным оператором объёма $\mathcal{O}_0 = \int d^d x \sqrt{g}$. В НГФТ в четырёх измерениях эта аномальная размерность оказалась равной $\gamma_0^*|_{d=4} = 3,986$.

Следующей целью настоящей работы является вычисление аномальной размерности бесконечного семейства геометрических операторов, заданных интегралом от n степеней скаляра кривизны R

$$\mathcal{O}_n = \int d^d x \sqrt{g} R^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Эти операторы могут быть определены либо интегралом, охватывающим все пространство-время, либо интегралом по части пространства. В последнем случае инвариантность относительно диффеоморфизмов требует добавления под-

ходящих граничных слагаемых, подобных слагаемому Гиббонса-Хокинга, которые, однако, не важны для настоящего обсуждения.

Наше вычисление аномальных размерностей следует стратегии из [57], и использует формализм составных операторов, основанный на эффективном действии [75–77]. Главная сила формализма заключается в том, что он позволяет вычислить скейлинги геометрических операторов, которые не являются частью эффективного действия. Мы аппроксимируем (регулярные) пропагаторы анзацем Гильберта–Эйнштейна [39; 78; 79] и выбираем геометрические операторы (2). Основными результатами второй главы являются общая формула, дающая замкнутое выражение для аномального скейлинга в любой размерности d и спектры матрицы аномальной размерности. Заметим, что информация о бесконечном числе показателей масштабирования даётся впервые.

Третьим направлением данной работы является изучение явления тёмной энергии, которое представляет собой тёмную сторону современной космологии и, следовательно, является беспрецедентно богатой площадкой для различных модификаций общей теории относительности. Одними из наиболее интересных вариантов модификаций являются те, которые не связаны с особыми типами гравитирующей материи и исходят из чисто метрического сектора теории, подобно моделям локальной $f(R)$ -гравитации. Обычно такие модификации эквивалентны добавлению или удалению некоторых локальных степеней свободы. Ещё более интересен случай, когда нетривиальная модификация происходит без изменения баланса локальных физических переменных. Известные примеры такой концепции включают, в частности, унимодулярную гравитацию (УМГ) [80–84]. Унимодулярная гравитация отличается от ОТО тем, что в ней накладывается условие единичности определителя метрического тензора. Интересный вывод состоит в том, что эта теория имеет то же число локальных степеней свободы, что и ОТО [85]. Это можно объяснить тем, что уменьшение числа независимых полевых переменных компенсируется сокращением локальной группы калибровочной инвариантности, а основным эффектом унимодулярной модификации является возникновение одной глобальной степени свободы, играющей роль космологической постоянной.

Расширение физического сектора теории за счёт частичного нарушения калибровочной инвариантности – явление известное и весьма популярное. В частности, редукция от лоренцевой симметрии к анизотропной масштабной

инвариантности в моделях Лифшица очень продуктивна в контексте теории конденсированного состояния [86], в то время как аналогичная модификация в ранее упомянутых гравитационных моделях Хоравы [4; 18] открывает перспективы для перенормируемых унитарных теорий, сохраняющих гравитацию. Мы рассматриваем синтез нарушения симметрии Лоренца с понятием унимодулярной гравитации [80–84; 87]. Эта обобщённая унимодулярная гравитация (ОУМГ), которая включает нарушение симметрии Лоренца в определении редуцированного конфигурационного пространства метрических коэффициентов – вместо требования единичности метрического определителя эта теория основана на метрическом поле, удовлетворяющем следующему ограничению

$$N = N(\gamma), \quad \gamma \equiv \det \gamma_{ij}, \quad (3)$$

где $N = (-g^{00})^{-1/2}$ функция хода, а $N(\gamma)$ некоторая функция от γ – определителя пространственной метрики γ_{ij} в АДМ (3+1)-разложении метрических коэффициентов $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (N_i N^i - N^2) dt^2 + 2N_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (4)$$

Здесь $x^\mu = (t, x^i)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$ и $N_i = g_{0i}$ соответствующий вектор сдвига.

Мотивация такого обобщения унимодулярной гравитации заключается в том, что на классическом уровне такая теория эффективно включает в себя особый тип источника материи – тёмную жидкость с нелинейным (общим баротропным) уравнением состояния. Таким образом, теория выходит за рамки обычной унимодулярной гравитации, создавая идеальную жидкость, характеризующуюся не только энергией вакуума с $p = -\varepsilon$, но и нетривиальным давлением. Отметим, что эта жидкость имеет полностью метрическое происхождение и может иметь, зависящий от временей параметр состояния $w = w(t)$. Последнее свойство представляет интерес, так как на эксперименте наблюдалась эффективная зависимость параметра состояния тёмной энергии от времени [88; 89]. Для класса степенных функций $N(\gamma)$ в (3) теория порождает уравнение состояния $p = w\varepsilon$ с постоянной w и, кроме того, в сопутствующей системе отсчёта этой жидкости плотность и давление постоянны как в пространстве, так и во времени. Таким образом, подобно исходной унимодулярной гравитации, теория

может включать в качестве пространственно-временной константы движения аналог тёмной энергии, которая имеет постоянный политропный параметр w , отличный от -1 . В частном случае пыли без давления с $w = 0$, соответствующему $N(\gamma) = \text{const}$, плотность этой пыли характеризуется единственной функцией пространственных координат, полностью фиксированной начальными условиями, которые можно интерпретировать как модель неоднородного распределения тёмной материи.

В данной работе особо внимание уделено лагранжевым калибровочным преобразованиям, число которых равно двум, а не трём как можно было изначально предположить. Этот факт является следствием того, параметр калибровочного преобразования, сохраняющий условие обобщённой унимодулярности, подчиняется нетривиальному дифференциальному уравнению по времени. Решение такого уравнения не может иметь компактного носителя во времени. Далее анализируется калибровочная инвариантность действия относительно «третьего» калибровочного преобразования на космологическом фоне с положительной и нулевой кривизной. Важную роль в этом анализе представляют поверхностные слагаемые как на времениподобной, так и на пространственно-подобной границах.

Таким образом, **целями** данной диссертационной работы являются:

1. Нахождение бета-функций всех существенных констант связи в $(3+1)$ -мерной проектируемой гравитации Хоравы.
2. Поиск всех фиксированных точек ренормгруппового потока гравитации Хоравы и установление природы этих точек.
3. Вычисление аномальных масштабных размерностей бесконечного семейства операторов с помощью диагонального приближения, а также вычисление спектра полной матрицы аномальных масштабных размерностей.
4. Изучение лагранжевых калибровочных симметрий в обобщённой унимодулярной гравитации.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Вычисление квадратного корня из пространственной части оператора Хоравы на статическом фоне методом последовательных приближений.

2. Получение всех необходимых универсальных функциональных следов до третьего порядка по кривизне.
3. Численный анализ системы полиномиальных уравнений ренормгруппового потока.
4. Вычисление функциональных следов с помощью метода ядра теплопроводности.
5. Исследование калибровочной инвариантности квадратичного действия на космологическом фоне.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Явный вид пяти бета-функций существенных констант связи $(3+1)$ -мерной проектируемой гравитации Хоравы.
2. Пять фиксированных точек ренормгруппового потока $(3+1)$ -мерной проектируемой гравитации Хоравы.
3. Аномальные масштабные размерности бесконечного семейства операторов в диагональном приближении.
4. Спектр полной матрицы аномальных масштабных размерностей семейства операторов.
5. Анализ лагранжевых калибровочных симметрий обобщённой унимодулярной гравитации.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в понимании $(3+1)$ -мерной гравитации Хоравы. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Приведённые в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

Научная и практическая значимость. Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Полученные в работе выражения для бета-функций существенных констант связи могут быть использованы для построения траекторий ренормгруппового потока и установления природы его фиксированных точек. Существует деформация релевантными операторами $(3+1)$ -мерного действия Хоравы, которая сохраняет условие детального баланса. Такое деформированное действие можно связать через стохастическое квантование Паризи с трёхмерной

массивной гравитацией. Изучение такой связи представляет научный интерес. Разработанные методы вычисления аномальных размерностей могут быть использованы для дальнейшей проверки гипотезы асимптотического благополучия.

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в 4 [90–93] статьях в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Помимо этого, основные результаты диссертации докладывались на семинаре ОТФ ФИАН, на семинаре по квантовой гравитации в университете Радбауда, Нидерланды и на международной конференции “Models in Quantum Field Theory” (MQFT-2022) в Санкт-Петербурге.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и четырёх приложений. Полный объём диссертации составляет 117 страниц с 3 рисунками и 3 таблицами. Список литературы содержит 121 наименование.

В **Главе 1** описано полное действие $(3+1)$ -мерной проектируемой гравитации Хоравы, проведена трёхмерная редукция на статическом фоне, приведён метод вычисления квадратного корня из оператора и его канонизация, перечислены типы всех необходимых универсальных функциональных следов и процедура получения бета-функций.

В **Главе 2** кратко описано введение в уравнение Веттериха и анзац Гильберта–Эйнштейна. В рамках формализма составных операторов получено выражение для аномальной размерности оператора. Приведены вычисления аномальной размерности семейства операторов в двух приближениях.

В **Главе 3** дано введение в лагранжево описание обобщённой унимодулярной гравитации, получено и проанализировано уравнение на параметр калибровочного преобразования теории, исследована калибровочная (не)инвариантность квадратичного действия теории.

В приложениях **A–G** собраны вспомогательные результаты по каждой из глав, включающие доказательства и технические детали.

Глава 1. Бета-функции в (3+1)-мерной проектируемой гравитации Хоравы–Лифшица

1.1 Введение

В действии гравитации Хоравы метрика раскладывается на временную и пространственные компоненты по подобию разложения Арновитта–Дезера–Мизнера (АДМ)¹

$$ds^2 = N^2 dt^2 - \gamma_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt). \quad (1.1)$$

Относительно диффеоморфизмов, сохраняющих слоение (FDiff), которые оставляют инвариантными слои с постоянным временем

$$t \mapsto t'(t), \quad x^i \mapsto x'^i(t, \mathbf{x}), \quad (1.2)$$

где $t'(t)$ — монотонная функция, функция хода N , вектор сдвига N^i и пространственная метрика γ_{ij} преобразуются обычным образом

$$N \mapsto N \frac{dt}{dt'}, \quad N^i \mapsto \left(N^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} - \frac{\partial x'^i}{\partial t} \right) \frac{dt}{dt'}, \quad \gamma_{ij} \mapsto \gamma_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j}. \quad (1.3)$$

Относительно анизотропного скейлинга

$$t \mapsto b^{-d} t, \quad x^i \mapsto b^{-1} x^i, \quad (1.4)$$

где d — число пространственных измерений, а b — положительный параметр масштабирования, компонентным полям присваиваются следующие размерности:²

$$[N] = [\gamma_{ij}] = 0, \quad [N^i] = d - 1. \quad (1.5)$$

Затем лагранжиан строится из всех локальных FDiff-инвариантных операторов, которые могут быть построены из этих полей и имеют размерность мень-

¹Мы используем латинские индексы для обозначения пространственных направлений, $i = 1, \dots, d$.

²Мы говорим, что поле Φ имеет размерность $[\Phi]$, если оно преобразуется при (1.4) как $\Phi \mapsto b^{[\Phi]} \Phi$.

ше или равной $2d$. Последнее ограничение следует из масштабной размерности пространственно-временной меры интегрирования $[dt d^d x] = -2d$ и обеспечивает что слагаемые в действии, соответствующие релевантным ($[\mathcal{O}] < 2d$) и маргинальным ($[\mathcal{O}] = 2d$) операторам, имеют неположительные размерности. Это отличительная черта перенормируемости в смысле анализа размерностей, которая необходима, но не достаточна для истинной пертурбативной перенормируемости.

Как было сказано ранее, мы будем рассматривать проектируемую версию гравитации Хоравы. В этой версии функция хода N является функцией только времени $N = N(t)$ и её можно положить равной единице. Тогда действие модели имеет вид [4],

$$S = \frac{1}{2G} \int dt d^d x \sqrt{\gamma} (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 - \mathcal{V}) , \quad (1.6)$$

где

$$K_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i) , \quad (1.7)$$

— внешняя кривизна расслоения и $K \equiv K_{ij} \gamma^{ij}$ — её след. Здесь точка обозначает производную по времени, а ∇_i — ковариантную производную, относительно пространственной метрики γ_{ij} ; G и λ — безразмерные константы связи. Потенциальная часть \mathcal{V} не содержит производных по времени и построена из тензоров кривизны, соответствующих γ_{ij} . Форма потенциала зависит от количества пространственных измерений. В $d = 3$ он записывается как [94],

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & 2\Lambda - \eta R + \mu_1 R^2 + \mu_2 R_{ij} R^{ij} \\ & + \nu_1 R^3 + \nu_2 R R_{ij} R^{ij} + \nu_3 R_j^i R_k^j R_i^k + \nu_4 \nabla_i R \nabla^i R + \nu_5 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk} , \end{aligned} \quad (1.8)$$

где мы учли, что в трёх измерениях тензор Римана выражается через Риччи R_{ij} . В это выражение входят все релевантные и маргинальные слагаемые, которые не могут быть сведены друг к другу интегрированием по частям и использованием тождеств Бьянки. Оно содержит 9 констант связи $\Lambda, \eta, \mu_1, \mu_2$ и $\nu_a, a = 1, \dots, 5$.

Спектр возмущений, распространяемых этим действием, содержит поперечно-бесследный (tt) гравитон и дополнительную скалярную моду. Обе моды имеют положительные кинетические слагаемые, если G положительна и λ либо

меньше $1/3$, либо больше 1

$$\lambda < 1/3 \text{ или } \lambda > 1, \quad (1.9)$$

из чего следует, что теория допускает унитарное квантование. Их дисперсионные соотношения на плоском фоне³ имеют вид [7; 18]

$$\omega_{tt}^2 = \eta k^2 + \mu_2 k^4 + \nu_5 k^6, \quad (1.10a)$$

$$\omega_s^2 = \frac{1 - \lambda}{1 - 3\lambda} \left(-\eta k^2 + (8\mu_1 + 3\mu_2)k^4 \right) + \nu_s k^6, \quad (1.10b)$$

где k — пространственный импульс, и мы определили

$$\nu_s \equiv \frac{(1 - \lambda)(8\nu_4 + 3\nu_5)}{1 - 3\lambda}. \quad (1.11)$$

Эти дисперсионные соотношения имеют проблемы при низких энергиях, где доминируют k^2 -слагаемые. Из-за отрицательного знака перед этим слагаемым, либо скалярная мода, либо гравитон ведёт себя как тахион при низких энергиях, из чего следует, что плоское пространство не является устойчивым вакуумом теории. Попытки подавить неустойчивость выбором λ близким к 1 приводят к потере пертурбативного контроля [7; 12; 95]. Нестабильность можно также устранить, положив $\eta = 0$ или сделав разложение на искривленном вакууме. В обоих случаях теория не воспроизводит ОТО в низкоэнергетическом пределе, поскольку не существует режима, при котором закон дисперсии для tt -гравитона будет иметь релятивистскую форму $\omega_{tt}^2 \propto k^2$. Эта проблема при низких энергиях не влияет на ультрафиолетовое поведение модели: при больших импульсах оба дисперсионных соотношения (1.10) регулярны при $\nu_5, \nu_s > 0$.

Было доказано, что проектируемая гравитация Хоравы пертурбативно перенормируема [18; 96] в любой размерности. Частичные результаты о РГ-потоке проектируемой гравитации Хоравы в $d = 3$ были получены в [97]. УФ-поведение теории параметризуется семью константами связи, соответствующим маргинальным операторам в (1.6), (1.8) G , λ , ν_a , $a = 1, \dots, 5$. Однако не все эти константы связи имеют физическое значение, что выражается в зависимости их β -функций от выбора калибровки. Всего имеется шесть существенных констант связи, ко-

³Под этим понимается конфигурация $N^i = 0$, $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$. Это решение уравнений, следующее из (1.6), (1.8) при условии, что космологическая постоянная Λ положена равной нулю.

торые входят в эффективное действие на массовой оболочке и чьи β -функции калибровочно инварианты. Их можно выбрать следующим образом [97]

$$\mathcal{G} = \frac{G}{\sqrt{\nu_5}}, \quad \lambda, \quad u_s = \sqrt{\frac{\nu_s}{\nu_5}}, \quad v_a = \frac{\nu_a}{\nu_5}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (1.12)$$

где ν_s определено в (1.11). Однопетлевая β -функция λ зависит только от первых трёх констант связи и имеет вид [97],

$$\beta_\lambda = \frac{\mathcal{G}}{120\pi^2(1-\lambda)(1+u_s)u_s} [27(1-\lambda)^2 + 3u_s(11-3\lambda)(1-\lambda) - 2u_s^2(1-3\lambda)^2]. \quad (1.13)$$

Калибровочно-зависимая β -функция G (не \mathcal{G}) была также вычислена в нескольких калибровках, результаты приведены в приложении A.1.

Одной из целей данной работы является получение β -функций остальных констант связи в (1.12).

Расходящаяся часть однопетлевого фонового эффективного действия даёт нам перенормированные константы связи ν_a , $a = 1, \dots, 5$ и позволяет определить β -функции \mathcal{G} и остальных четырёх существенных констант связи, коллективно обозначенных как $\chi = (u_s, v_1, v_2, v_3)$. Соответствующие выражения имеют вид

$$\beta_{\mathcal{G}} = \frac{\mathcal{G}^2}{26880\pi^2(1-\lambda)^2(1-3\lambda)^2(1+u_s)^3u_s^3} \sum_{n=0}^7 u_s^n \mathcal{P}_n^{\mathcal{G}}[\lambda, v_1, v_2, v_3], \quad (1.14a)$$

$$\beta_\chi = A_\chi \frac{\mathcal{G}}{26880\pi^2(1-\lambda)^3(1-3\lambda)^3(1+u_s)^3u_s^5} \sum_{n=0}^9 u_s^n \mathcal{P}_n^\chi[\lambda, v_1, v_2, v_3], \quad (1.14b)$$

где общие множители $A_\chi = (A_{u_s}, A_{v_1}, A_{v_2}, A_{v_3})$ равны

$$A_{u_s} = u_s(1-\lambda), \quad A_{v_1} = 1, \quad A_{v_2} = A_{v_3} = 2. \quad (1.15)$$

Заметим, что константа \mathcal{G} факторизуется и её степени входят в β -функции только как общие множители. Функции $\mathcal{P}_n^{\mathcal{G}}[\lambda, v_1, v_2, v_3]$, $\mathcal{P}_n^\chi[\lambda, v_1, v_2, v_3]$ — многочлены по λ и v_a , $a = 1, 2, 3$, с целыми коэффициентами. $\mathcal{P}_n^{\mathcal{G}}$, $\mathcal{P}_n^{u_s}$ и $\mathcal{P}_n^{v_a}$ четвертого, пятого и шестого порядка по λ соответственно. Максимальная общая степень

констант v_a равна двум для $\mathcal{P}_n^{\mathcal{G}}$, $\mathcal{P}_n^{u_s}$ и трём для $\mathcal{P}_n^{v_a}$. Явные выражения для этих многочленов очень длинные и приведены в приложении [A.2](#).

1.2 Фиксация калибровки и однопетлевое эффективное действие

1.2.1 Выбор фона и фоновая ковариантная фиксация калибровки

Мы сосредоточимся на части действия, состоящей из маргинальных операторов относительно масштабирования (1.4). Они образуют замкнутый набор относительно перенормировки и определяют УФ-поведение теории. Далее мы будем использовать мнимое “евклидово” время $\tau = it$. В этой “сигнатуре” действие на древесном уровне имеет вид:

$$S = \frac{1}{2G} \int d\tau d^3x \sqrt{\gamma} (K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2 + \nu_1 R^3 + \nu_2 R R_{ij} R^{ij} + \nu_3 R_j^i R_k^j R_i^k + \nu_4 \nabla_i R \nabla^i R + \nu_5 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk}). \quad (1.16)$$

Перенормировка теории подразумевает вычисление УФ-расходящейся части эффективного действия, которая имеет ковариантную структуру классического древесного действия (1.16) при условии использования класса так называемых фоновых ковариантных калибровок [20], которые обсуждались в контексте гравитации Хоравы в [18; 96; 97]. Для перенормировки потенциальной части действия, следовательно, достаточно рассмотреть метрический фон, на котором все пять тензорных структур отличны от нуля и могут быть отделены друг от друга. Таким фоном является четырёхмерная метрика с произвольной статической трёхмерной частью $g_{ij}(\mathbf{x})$ и исчезающей функцией сдвига $N^i = 0$. Статическая природа g_{ij} и нулевая функция сдвига приводят к нулевому кинетическому члену (1.16), вклад которого не требуется для перенормировки констант ν_1, \dots, ν_5 .

Таким образом, мы выполняем разбиение полного набора полей на этот фон и квантовые флуктуации $h_{ij}(\tau, \mathbf{x})$ и $n^i(\tau, \mathbf{x})$,

$$\gamma_{ij}(\tau, \mathbf{x}) = g_{ij}(\mathbf{x}) + h_{ij}(\tau, \mathbf{x}), \quad N^i(\tau, \mathbf{x}) = 0 + n^i(\tau, \mathbf{x}), \quad (1.17)$$

оставляем квадратичную часть полного действия на этом фоне и берём получающийся гауссов функциональный интеграл по возмущениям метрики. Мы начинаем эту процедуру, рассмотрев сначала специальную фиксацию калибровки, сохраняющую калибровочную инвариантность контрчленов и совместимую с анизотропным скейлингом (1.4) [18; 96].

Действие фиксации калибровки выбирается следующим образом

$$S_{\text{gf}} = \frac{\sigma}{2G} \int d\tau d^3x \sqrt{g} F^i \mathcal{O}_{ij} F^j. \quad (1.18)$$

Оно является квадратичной формой от функций калибровочных условий F^i с ядром \mathcal{O}_{ij} . F^i и \mathcal{O}_{ij} зависят параметрически от фоновых полей таким образом, что это действие является инвариантным при одновременных диффеоморфизмах как полного поля (1.17), так и метрического фона — так называемые фоновые калибровочные преобразования. Заметим, что при этих фоновых диффеоморфизмах квантовые поля n^i и h_{ij} преобразуются как вектор и тензор второго ранга соответственно. Для статического g_{ij} и исчезающей фоновой функции сдвига калибровочные условия и матрица фиксации калибровки принимают вид

$$F^i = \dot{n}^i + \frac{1}{2\sigma} \mathcal{O}_{ij}^{-1} (\nabla_k h_{jk} - \lambda \nabla_j h), \quad (1.19a)$$

$$\mathcal{O}_{ij} = (g^{ij} \Delta^2 + \xi \nabla^i \Delta \nabla^j)^{-1}. \quad (1.19b)$$

Здесь и далее ковариантные производные определяются с помощью фоновой метрики g_{ij} . Калибровочные функции F^i представляют собой локальные линейные комбинации квантовых полей h_{ij} и n^i с операторными коэффициентами. Матрица фиксации калибровки \mathcal{O}_{ij} — нелокальная функция Грина ковариантного дифференциального оператора четвертого порядка $\mathcal{O}_{ij}^{-1} = g^{ij} \Delta^2 + \xi \nabla^i \Delta \nabla^j$. Эта нелокальность может быть разрешена путем введения вспомогательного поля и не нарушает локальность контрчленов [18]. При фоновых калибровочных преобразованиях F^i и \mathcal{O}_{ij} преобразуются как вектор и тензор второго ранга соответственно, так что действие, фиксирующее калибровку (1.18), действительно инвариантно и обеспечивает явную калибровочную инвариантность квантовых

контрчленов [96].⁴ Далее, эта фиксация калибровки приводит к однородному убыванию пропагаторов всех полей в УФ и обеспечивает, что все контрчлены совместимы с наивным подсчётом степеней расходимости [18].

Калибровочные условия (1.19) параметризуются двумя константами ξ и σ . Действие, фиксирующее калибровку (1.18), имеет вид

$$S_{\text{gf}} = \frac{1}{2G} \int d\tau d^3x \sqrt{g} \left(\sigma \dot{n}^i \mathcal{O}_{ij} \dot{n}^j + \dot{n}^i (\nabla^j h_{ij} - \lambda \nabla_i h) \right. \\ \left. + \frac{1}{4\sigma} \nabla^k h_{ik} \mathcal{O}_{ij}^{-1} \nabla^l h_{jl} - \frac{\lambda}{2\sigma} \nabla_i h \mathcal{O}_{ij}^{-1} \nabla^k h_{jk} + \frac{\lambda^2}{4\sigma} \nabla_i h \mathcal{O}_{ij}^{-1} \nabla_j h \right). \quad (1.20)$$

Важная особенность этого двухпараметрического семейства заключается в том, что перекрёстные члены между n^i и h_{ij} в S_{gf} полностью сокращают аналогичные члены в кинетической части классического действия в квадратичном порядке,

$$S_{\text{kin}} = \frac{1}{2G} \int d\tau d^3x \sqrt{\gamma} (K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2) = \frac{1}{2G} \int d\tau d^3x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{4} h^{ij} \ddot{h}_{ij} + \frac{\lambda}{4} h \ddot{h} \right. \\ \left. - \dot{n}^i (\nabla^j h_{ij} - \lambda \nabla_i h) - \frac{1}{2} n_i \Delta n^i - \left(\frac{1}{2} - \lambda \right) n^i \nabla_i \nabla_j n^j - \frac{1}{2} n^i R_{ij} n^j \right] + \dots, \quad (1.21)$$

где точки означают высшие члены разложения. В этом выражении мы проинтегрировали по частям как по пространству, так и по времени и использовали статичность фоновой 3-метрики, $\dot{g}_{ij} = 0$. Благодаря сокращению перекрёстных слагаемых между n^i и h_{ij} , шифтовый и метрический сектора можно рассматривать отдельно.

1.2.2 Действие для функции сдвига и духов

Из суммы кинетического действия (1.21) и действия, фиксирующего калибровку, (1.20) мы получаем квадратичную по n^i часть действия с зафиксиро-

⁴Строго говоря, чтобы F^i было вектором относительно фоновых преобразований \dot{n}^i должен быть заменено ковариантной производной по времени $D_\tau n^i = \dot{n}^i - \bar{N}^k \partial_k n^i + \partial_k \bar{N}^i n^k$, где \bar{N}^i фоновая функция сдвига [18], но на нашем фоне $\bar{N}^i = 0$.

ванной калибровкой

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2G} \int d\tau d^3x \sqrt{g} n^i \left[-\sigma \mathcal{O}_{ij} \partial_\tau^2 + \lambda \nabla_i \nabla_j - \frac{1}{2} \nabla_j \nabla_i - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta \right] n^j \\ &= \frac{\sigma}{2G} \int d\tau d^3x \sqrt{g} n^i \mathcal{O}_{ij} \left[-\delta_k^j \partial_\tau^2 + \mathbb{B}_k^j(\nabla) \right] n^k, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где дифференциальный оператор $\mathbb{B}_j^i(\nabla)$ по пространственным производным имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_j^i(\nabla) &= -\frac{1}{2\sigma} \delta_j^i \Delta^3 - \frac{1}{2\sigma} \Delta^2 \nabla_j \nabla^i - \frac{\xi}{2\sigma} \nabla^i \Delta \nabla^k \nabla_j \nabla_k \\ &\quad - \frac{\xi}{2\sigma} \nabla^i \Delta \nabla_j \Delta + \frac{\lambda}{\sigma} \Delta^2 \nabla^i \nabla_j + \frac{\lambda \xi}{\sigma} \nabla^i \Delta^2 \nabla_j. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Весьма примечательно, что выбранное двухпараметрическое семейство калибровочных условий на статичном фоне имеет ещё одно очень полезное свойство — с точностью до умножения на матрицу фиксирующую калибровку соответствующий оператор духов Фаддеева-Попова совпадает с оператором в действии для функции сдвига (1.22). В самом деле, действие для духовых полей c^i и \bar{c}_j имеет вид

$$S_{\text{gh}} = -\frac{1}{G} \int d\tau d^3x \sqrt{g} \bar{c}_i (\mathbf{s}F^i), \quad (1.24)$$

где $\mathbf{s}F^i$ — это БРСТ преобразование калибровочного условия. Оно вычисляется с использованием БРСТ-преобразования квантовых полей h_{ij} и n^i , которые совпадают с инфинитезимальными диффеоморфизмами полных полей γ_{ij} и N^i с заменой калибровочного параметра на грассмановский дух c^i ,

$$\mathbf{s}h_{ij} = \nabla_i c_j + \nabla_j c_i + h_{ik} \nabla_j c^k + h_{jk} \nabla_i c^k + c^k \nabla_k h_{ij}, \quad c_i = g_{ij} c^j, \quad (1.25a)$$

$$\mathbf{s}n^i = \dot{c}^i - n^j \nabla_j c^i + c^j \nabla_j n^i. \quad (1.25b)$$

После подстановки (1.25) в (1.24), действие для духов в квадратичном порядке принимает следующий вид (учитывая нулевые фоновые значения духов)

$$S_{\text{gh}} = \frac{1}{G} \int d\tau d^3x \sqrt{g} \bar{c}_i \left(-\delta_j^i \partial_\tau^2 + \mathbb{B}_j^i(\nabla) \right) c^j, \quad (1.26)$$

где оператор \mathbb{B}_j^i в точности совпадает с оператором (1.22). Это свойство является артефактом особого выбора действия, фиксирующего калибровку, и ста-

тичности фоновой метрики. Этот факт значительно упрощает дальнейшие расчёты, потому что вклады духов и функции сдвига выражаются через функциональный определитель одного и того же оператора.

1.2.3 Метрическая часть действия

Кинетическая часть для возмущений метрики имеет вид

$$-\frac{\sqrt{g}}{2G} h^A \mathbb{G}_{AB} \partial_\tau^2 h^B, \quad (1.27)$$

где мы ввели собирательное обозначение для индексов симметричного тензора ранга 2, $h^A \equiv h_{ij}$. Метрика ДеВитта и обратная к ней в пространстве таких тензоров имеют вид

$$\mathbb{G}^{ij,kl} = \frac{1}{8}(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) - \frac{\lambda}{4}g^{ij}g^{kl}, \quad \mathbb{G}_{ij,kl}^{-1} = 2(g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk}) + \frac{4\lambda}{1-3\lambda}g_{ij}g_{kl}. \quad (1.28)$$

Часть квадратичного действия с пространственными производными метрики слишком длинная (содержит сотни слагаемых) для явной записи. Мы получили её с помощью пакета тензорной компьютерной алгебры *xAct* [98–101] для Mathematica [102]. Схематически, она имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{pot}, hh} + \mathcal{L}_{\text{gf}, hh} = \frac{\sqrt{g}}{2G} h^A \mathbb{D}_{AB} h^B, \quad (1.29)$$

где \mathbb{D}_{AB} — это чисто трёхмерный дифференциальный оператор 6-го порядка. Заметим, что по индексам A, B это не оператор, а квадратичная форма. На плоском фоне (1.29) сводится к слагаемым с ровно 6-ю производными [97]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{pot}, hh} + \mathcal{L}_{\text{gf}, hh} = & \frac{1}{2G} \left[-\frac{\nu_5}{4} h^{ij} \Delta^3 h_{ij} + \left(\frac{\nu_5}{2} - \frac{1}{4\sigma} \right) h^{ik} \Delta^2 \partial_i \partial_j h^{jk} \right. \\ & + \left(-\nu_4 - \frac{\nu_5}{2} - \frac{\xi}{4\sigma} \right) h^{ij} \Delta \partial_i \partial_j \partial_k \partial_l h^{kl} + \left(2\nu_4 + \frac{\nu_5}{2} + \frac{\lambda(1+\xi)}{2\sigma} \right) h \Delta^2 \partial_k \partial_l h^{kl} \\ & \left. + \left(-\nu_4 - \frac{\nu_5}{4} - \frac{\lambda^2(1+\xi)}{4\sigma} \right) h \Delta^3 h \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

1.2.4 Полное однопетлевое действие

Однопетлевое эффективное действие задается функциональный гауссовским интегралом

$$\exp(-\Gamma^{1\text{-loop}}) = \sqrt{\text{Det } \mathcal{O}_{ij}} \int [dh^A dn^i dc^i d\bar{c}_j] \exp(-S^{(2)}[h^A, n^i, c^i, c_j]), \quad (1.31)$$

где квадратичная часть полного действия состоит из трёх вкладов — метрического, вектора сдвига и духового

$$\begin{aligned} S^{(2)}[h^A, n^i, c^i, \bar{c}_j] = & \frac{1}{G} \int d\tau d^3x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} h^A (-\mathbb{G}_{AB} \partial_\tau^2 + \mathbb{D}_{AB}) h^B \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sigma n^i \mathcal{O}_{ik} (-\delta_j^k \partial_\tau^2 + \mathbb{B}^k_j) n^j + \bar{c}_i (-\delta_j^i \partial_\tau^2 + \mathbb{B}^i_j) c^j \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Множитель $\sqrt{\text{Det } \mathcal{O}_{ij}}$ получается из нормировки условий фиксации калибровки [18]. Результат интегрирования

$$\exp(-\Gamma^{1\text{-loop}}) = \sqrt{\text{Det } \mathcal{O}_{ij}} \frac{\text{Det}(-\delta_j^i \partial_\tau^2 + \mathbb{B}^i_j)}{\sqrt{\text{Det}(-\mathbb{G}_{AB} \partial_\tau^2 + \mathbb{D}_{AB})} \sqrt{\text{Det}[\mathcal{O}_{ik}(-\delta_j^k \partial_\tau^2 + \mathbb{B}^k_j)]}}. \quad (1.33)$$

мгновенно показывает, что вклад оператора \mathcal{O}_{ij} сокращается, а шифтовая и духовая части сводятся к вкладу от одного функционального определителя. Отделяя и пренебрегая ультралокальным определителем метрики ДеВитта,⁵ мы записываем эффективное действие как сумму двух частей,

$$\Gamma^{1\text{-loop}} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(-\delta_B^A \partial_\tau^2 + \mathbb{D}_B^A) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(-\delta_j^i \partial_\tau^2 + \mathbb{B}^i_j), \quad (1.34)$$

где

$$\mathbb{D}_B^A = (\mathbb{G}^{-1})^{AC} \mathbb{D}_{CB} \quad (1.35)$$

теперь является *оператором* по индексам A и B . Мы переходим к вычислению функциональных следов, входящих в (1.34).

⁵Который фактически сокращается локальной мерой $\sqrt{\text{Det } \mathbb{G}_{AB} \delta(x, x')}$ возникающей в лагранжевом функциональном интеграле после перехода от канонического интеграла [103].

1.3 Трёхмерная редукция — однопетлевое эффективное действие как след от квадратного корня из оператора

Мы начинаем с использования представления собственного времени для следа от логарифма оператора

$$\mathrm{Tr} \ln \mathbb{F} = - \int_0^\infty \frac{ds_6}{s_6} \mathrm{Tr} e^{-s_6(-\partial_\tau^2 + \mathbb{F})}, \quad (1.36)$$

где \mathbb{F} — это либо \mathbb{D}_B^A , либо \mathbb{B}_j^i . Нижний индекс параметра s_6 подчеркивает его масштабную размерность, $[s_6] = -6$, которая обеспечивает безразмерность показателя степени (напомним, что размерность оператора $-\partial_\tau^2 + \mathbb{F}$ равна 6). Таким образом, мы получаем выражение для метрической тензорной части эффективного действия

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathrm{metric}}^{1\text{-loop}} &= - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{ds_6}{s_6} \mathrm{Tr} e^{-s_6(-\delta_B^A \partial_\tau^2 + \mathbb{D}_B^A)} \\ &= - \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \int \frac{ds_6}{s_6} \mathrm{tr} e^{-s_6(-\delta_B^A \partial_\tau^2 + \mathbb{D}_B^A)} \delta(\tau - \tau') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Big|_{\tau=\tau', \mathbf{x}=\mathbf{x}'}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

где оператор действует на первые аргументы δ -функций до взятия предела совпадения и "tr" обозначает след по матричным индексам $A = (ij)$. Для статического (τ -независимого) фона его можно преобразовать с помощью следующей цепочки соотношений

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathrm{metric}}^{1\text{-loop}} &= - \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \int \frac{ds_6}{s_6} \mathrm{tr} e^{-s_6(-\delta_B^A \partial_\tau^2 + \mathbb{D}_B^A)} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(\tau - \tau')} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Big|_{\tau=\tau', \mathbf{x}=\mathbf{x}'} \\ &= - \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \int \frac{ds_6}{s_6} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-s_6\omega^2} \mathrm{tr} e^{-s_6\mathbb{D}_B^A} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \\ &= - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int d\tau d^3x \int \frac{ds_6}{s_6^{3/2}} \mathrm{tr} e^{-s_6\mathbb{D}_B^A} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \\ &= - \frac{\Gamma(-1/2)}{4\sqrt{\pi}} \int d\tau d^3x \mathrm{tr} \sqrt{\mathbb{D}_B^A} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'} \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau \mathrm{Tr}_3 \sqrt{\mathbb{D}_B^A}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Обращаем внимание, что Tr_3 в итоговой формуле — это функциональный след в трёхмерном смысле (в отличие от четырёхмерного $\text{Tr} \equiv \text{Tr}_4$). Таким образом, мы делаем вывод, что вычисление эффективного однопетлевого действия сводится к вычислению функционального следа от квадратного корня из \mathbb{D}_B^A , который мы обозначаем через $\mathbb{Q}_{\mathbb{D}_B^A} \equiv \sqrt{\mathbb{D}_B^A}$. Это чисто трёхмерная задача. Аналогичную процедуру можно провести для векторной части следа. Вводя обозначение $\mathbb{Q}_{\mathbb{B}^i_j} \equiv \sqrt{\mathbb{B}^i_j}$, полное однопетлевое действие может быть выражено как

$$\Gamma^{1\text{-loop}} = \frac{1}{2} \int d\tau [\text{Tr}_3 \mathbb{Q}_{\mathbb{D}_B^A} - \text{Tr}_3 \mathbb{Q}_{\mathbb{B}^i_j}]. \quad (1.39)$$

Наметим стратегию вычисления вышеуказанных операторных следов. Коммутируя ковариантные производные, свёрнутые друг с другом вправо, и сворачивая их в степени лапласиана, локальные операторы $\mathbb{F} = (\mathbb{D}, \mathbb{B})$ можно представить в следующем схематичном виде:

$$\mathbb{F} = \sum_{a=0}^6 \mathcal{R}_{(a)} \sum_{6 \geq 2k \geq a} \alpha_{a,k} \nabla_1 \dots \nabla_{2k-a} (-\Delta)^{3-k}. \quad (1.40)$$

Здесь $\mathcal{R}_{(a)}$ — тензоры фонового поля, построенные из кривизны и её производных следующей размерности в единицах обратной длины

$$\mathcal{R}_{(a)} = O\left(\frac{1}{l^a}\right). \quad (1.41)$$

Мы будем называть их "коэффициентными функциями". С другой стороны, $\alpha_{a,k}$ — безразмерные скалярные коэффициенты, зависящие от констант связи $\lambda, \nu_1, \dots, \nu_5$. Суммарные степени производных и лапласианов связаны с размерностью коэффициентных функций для обеспечения общей размерности \mathbb{F} , которая равна шести.

Квадратный корень таких операторов может быть получен с помощью теории возмущений по степеням фоновой кривизны и производным от этой кривизны, то есть снова по степеням $1/l$. Однако, в отличие от \mathbb{F} это не полином конечной длины, а нелокальный псевдодифференциальный оператор, заданный

бесконечным рядом по $\mathcal{R}_{(a)}$

$$\sqrt{\mathbb{F}} = \sum_{a=0}^{\infty} \mathcal{R}_{(a)} \sum_{k \geq a/2}^{K_a} \tilde{\alpha}_{a,k} \nabla_1 \dots \nabla_{2k-a} \frac{1}{(-\Delta)^{k-3/2}}, \quad (1.42)$$

с некоторыми другими коэффициентами $\tilde{\alpha}_{a,k}$, полученными из $\alpha_{a,k}$ выше. В каждой размерности a степени производных ограничены сверху некоторым конечным числом $2K_a - a$. Действительно, число свободных тензорных индексов K_{free} оператора зафиксировано характером пространства, на которое он действует: $K_{\text{free}} = 2$ для $\sqrt{\mathbb{B}}$ и $K_{\text{free}} = 4$ за $\sqrt{\mathbb{D}}$. Все индексы производных которые не свёрнуты друг с другом, за вычетом свободных индексов, должны быть свёрнуты с индексами $\mathcal{R}_{(a)}$. А последнее ограничено числом a . Таким образом, можно записать

$$2k - a \leq K_{\text{free}} + a. \quad (1.43)$$

В целом это означает, что УФ-расходящаяся часть (1.39) получается из вычисления УФС вида

$$\int d^3x \mathcal{R}_{(a)}(\mathbf{x}) \nabla_1 \dots \nabla_{2k-a} \frac{1}{(-\Delta)^{k-3/2}} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'}. \quad (1.44)$$

Так как расходимости гравитации Хоравы имеют максимальную размерность $a = 6$, то потребуется лишь конечное число таких следов. Этот метод разбивает задачу на два шага — вычисление квадратного корня из оператора (1.42) и вычисление УФС (1.44).

Первым шагом является пертурбативное вычисление квадратного корня (1.42). Это вычисление основано на том, что в низшем порядке приближения разложения по кривизне ковариантные производные коммутируют. Таким образом, процедура сводится к извлечению квадратного корня из s -числовой матрицы — главного символа оператора, полученной заменой ковариантных производных на s -числовые импульсы и пренебрежением всех слагаемых, пропорциональных кривизне. Возвращаясь в полученной матрице от этих импульсов к ковариантным производным, мы получаем оператор $\mathbb{Q}^{(0)}$. Обозначая все поправки с кривизной в $\sqrt{\mathbb{F}}$ как \mathbb{X} ,

$$\sqrt{\mathbb{F}} = \mathbb{Q}^{(0)} + \mathbb{X} \quad (1.45)$$

можно получить уравнение для этого поправочного слагаемого

$$\mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{X} + \mathbb{X}\mathbb{Q}^{(0)} = \mathbb{F} - (\mathbb{Q}^{(0)})^2 - \mathbb{X}^2. \quad (1.46)$$

Это нелинейное уравнение может быть решено итерациями, поскольку его правая часть по крайней мере линейна по кривизне. Действительно, разность $\mathbb{F} - (\mathbb{Q}^{(0)})^2 \propto R$ отлична от нуля из-за коммутации ковариантных производных, пропорциональных тензору Римана R . На каждом этапе этой итерационной процедуры необходимо переходить от оператора \mathbb{X} к его s -числовому символу. Затем можно найти этот символ из матричного уравнения (1.46), в котором правая часть известна с необходимой точностью из предыдущих этапов итерации. Это так называемое уравнение Сильвестра, его решение будет построено ниже. А пока сосредоточимся на квадратном корне из главного символа \mathbb{F} .

1.3.1 Квадратный корень из главного символа и четыре выбора калибровок

Тензорный сектор

Из уравнения (1.30) мы получаем квадратичную форму $\mathbb{D}^{mn,kl}$ на плоском пространстве. Заменяя производные на импульсы, $\partial_i \mapsto ip_i$ и домножив на обратную метрику ДеВитта $\mathbb{G}_{ij,mn}^{-1}$, получаем главный символ оператора \mathbb{D} ,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\mathbf{p})_{ij}{}^{kl} = & p^6 \left[\frac{\nu_5}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) + \frac{4\nu_4(1-\lambda) + \nu_5}{1-3\lambda} \delta_{ij} \delta^{kl} \right. \\ & + \left(-\frac{\nu_5}{2} + \frac{1}{4\sigma} \right) (\delta_i^k \hat{p}_j \hat{p}^l + \delta_i^l \hat{p}_j \hat{p}^k + \delta_j^k \hat{p}_i \hat{p}^l + \delta_j^l \hat{p}_i \hat{p}^k) \\ & + \left(\frac{-4\nu_4(1-\lambda) - \nu_5}{1-3\lambda} \right) \delta_{ij} \hat{p}^k \hat{p}^l + \left(-4\nu_4 - \nu_5 - \frac{\lambda(1+\xi)}{\sigma} \right) \hat{p}_i \hat{p}_j \delta^{kl} \\ & \left. + \left(4\nu_4 + 2\nu_5 + \frac{\xi}{\sigma} \right) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}^k \hat{p}^l \right], \end{aligned} \quad (1.47)$$

где $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$ — единичный вектор в направлении импульса. Это 6×6 -матрица, действующая в пространстве симметричных тензоров h_{kl} . Чтобы извлечь из неё квадратный корень, нам нужно найти собственные значения и собственные векторы. Мы делаем это с помощью разложения h_{kl} на поперечно-бесследовую,

векторную и скалярную части. А именно, мы пишем

$$h_{kl} = T_{(r)}e_{kl}^{(r)} + V_{(r)}\frac{1}{\sqrt{2}}(e_k^{(r)}\hat{p}_l + \hat{p}_ke_l^{(r)}) + \phi\frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{kl} - \hat{p}_k\hat{p}_l) + \psi\hat{p}_k\hat{p}_l, \quad (1.48)$$

где $e_k^{(r)}$, $r = 1, 2$ образуют базис единичных векторов, ортогональных к $\hat{\mathbf{p}}$, $e_{kl}^{(r)}$, $r = 1, 2$ — два поперечно-бесследовых тензора поляризации, а $T_{(r)}$, $V_{(r)}$, ϕ , ψ — коэффициенты. Легко видеть, что $e_{kl}^{(r)}$ — это собственные векторы (1.47) с собственным значением $\kappa_T = \nu_s p^6$, тогда как векторные поляризации $(e_k^{(r)}\hat{p}_l + \hat{p}_ke_l^{(r)})/\sqrt{2}$ — собственные векторы с собственным значением $\kappa_V = p^6/2\sigma$. Проекторы на соответствующие подпространства:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{ij}^{(T)kl} &\equiv \sum_{r=1,2} e_{ij}^{(r)} e^{(r)kl} = \frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta^{kl} + \frac{1}{2}\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}^k\hat{p}^l \\ &\quad - \frac{1}{2}(\delta_i^k\hat{p}_j\hat{p}^l + \delta_i^l\hat{p}_j\hat{p}^k + \delta_j^k\hat{p}_i\hat{p}^l + \delta_j^l\hat{p}_i\hat{p}^k) + \frac{1}{2}(\delta_{ij}\hat{p}^k\hat{p}^l + \hat{p}_i\hat{p}_j\delta^{kl}), \end{aligned} \quad (1.49a)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{ij}^{(V)kl} &\equiv \sum_{r=1,2} \frac{1}{2}(e_i^{(r)}\hat{p}_j + \hat{p}_ie_j^{(r)})(e^{(r)k}\hat{p}^l + \hat{p}^ke^{(r)l}) \\ &= \frac{1}{2}(\delta_i^k\hat{p}_j\hat{p}^l + \delta_i^l\hat{p}_j\hat{p}^k + \delta_j^k\hat{p}_i\hat{p}^l + \delta_j^l\hat{p}_i\hat{p}^k) - 2\hat{p}_i\hat{p}_j\hat{p}^k\hat{p}^l. \end{aligned} \quad (1.49b)$$

В скалярном секторе ситуация более тонкая. Здесь у нас есть два собственных значения, которые, вообще говоря, не являются вырожденными. Чтобы увидеть это, мы действуем $\mathbb{D}(\mathbf{p})$ на скалярную часть (1.48) и имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\mathbf{p})_{ij}{}^{kl} h_{kl} \Big|_{\text{scalar}} &= p^6 \left[\phi \frac{\nu_s}{\sqrt{2}}(\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j) \right. \\ &\quad \left. + \left(\phi \sqrt{2}\lambda \left(\frac{\nu_s}{1-\lambda} - \frac{1+\xi}{\sigma} \right) + \psi \frac{(1-\lambda)(1+\xi)}{\sigma} \right) \hat{p}_i\hat{p}_j \right], \end{aligned} \quad (1.50)$$

где ν_s определяется уравнением (1.11). Таким образом, в двумерном подпространстве векторов $\Upsilon = (\phi, \psi)^T$ оператор $\mathbb{D}(\mathbf{p})$ действует как матрица

$$p^6 \begin{pmatrix} \nu_s & 0 \\ \sqrt{2}\lambda \left(\frac{\nu_s}{1-\lambda} - \frac{1+\xi}{\sigma} \right) & \frac{(1-\lambda)(1+\xi)}{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

Соответствующие собственные значения и собственные векторы равны

$$\kappa_{S1} = \nu_s p^6, \quad \Upsilon_{S1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}\lambda}{1-\lambda} \end{pmatrix}, \quad (1.52a)$$

$$\kappa_{S2} = \frac{(1-\lambda)(1+\xi)}{\sigma} p^6, \quad \Upsilon_{S2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.52b)$$

Удобно построить операторы $\mathbb{P}^{(S1)}$ и $\mathbb{P}^{(S2)}$, которые проецируют на векторы Υ_{S1} и Υ_{S2} соответственно. Это делается с помощью линейных форм, сопряжённых этим векторам

$$\Upsilon_1^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_2^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}\lambda}{1-\lambda} & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

которые обладают свойством $\Upsilon_r^\dagger \Upsilon_q = \delta_{rq}$, $r, q = 1, 2$. Тогда

$$\mathbb{P}^{(S1)} = \Upsilon_{S1} \otimes \Upsilon_{S1}^\dagger, \quad \mathbb{P}^{(S2)} = \Upsilon_{S2} \otimes \Upsilon_{S2}^\dagger. \quad (1.54)$$

Восстанавливая пространственные индексы, мы имеем

$$\mathbb{P}_{ij}^{(1)kl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \frac{1-3\lambda}{1-\lambda} \hat{p}_i \hat{p}_j \right) (\delta^{kl} - \hat{p}^k \hat{p}^l), \quad \mathbb{P}_{ij}^{(2)kl} = \hat{p}_i \hat{p}_j \left(-\frac{\lambda}{1-\lambda} \delta^{kl} + \frac{1}{1-\lambda} \hat{p}^k \hat{p}^l \right). \quad (1.55)$$

Теперь нетрудно проверить, что главный символ (1.47) разлагается на сумму проекторов

$$\mathbb{D}(\mathbf{p})_{ij}^{kl} = \nu_5 p^6 \mathbb{P}_{ij}^{(T)kl} + \frac{p^6}{2\sigma} \mathbb{P}_{ij}^{(V)kl} + \nu_s p^6 \mathbb{P}_{ij}^{(S1)kl} + \frac{(1-\lambda)(1+\xi)}{\sigma} p^6 \mathbb{P}_{ij}^{(S2)kl}. \quad (1.56)$$

Тогда его квадратный корень получается путём извлечения квадратных корней из коэффициентов

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{D}(\mathbf{p})} = \sqrt{\nu_5} p^3 \sum_{\alpha} u_{\alpha} \mathbb{P}^{(\alpha)}, \quad \alpha = T, V, S1, S2, \quad (1.57)$$

где

$$u_T = 1, \quad u_V = \frac{1}{\sqrt{2\sigma\nu_5}}, \quad u_{S1} = u_s, \quad u_{S2} = \sqrt{\frac{(1-\lambda)(1+\xi)}{\sigma\nu_5}}, \quad (1.58)$$

и u_s определено в (1.12). Подставляя выражения для проекторов, мы наконец приходим к выражению

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\mathbb{D}}(\mathbf{p})_{ij}^{kl} = & \sqrt{\nu_5} p^3 \left[\frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) + \frac{u_s - 1}{2} \delta_{ij} \delta^{kl} \right. \\ & + \frac{u_V - 1}{2} (\delta_i^k \hat{p}_j \hat{p}^l + \delta_i^l \hat{p}_j \hat{p}^k + \delta_j^k \hat{p}_i \hat{p}^l + \delta_j^l \hat{p}_i \hat{p}^k) - \frac{u_s - 1}{2} \delta_{ij} \hat{p}^k \hat{p}^l \\ & \left. - \left(\frac{u_s}{2} \frac{1-3\lambda}{1-\lambda} - \frac{1}{2} + \frac{\lambda u_{S2}}{1-\lambda} \right) \hat{p}_i \hat{p}_j \delta^{kl} + \left(\frac{1}{2} - 2u_V + \frac{u_s}{2} \frac{1-3\lambda}{1-\lambda} + \frac{u_{S2}}{1-\lambda} \right) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}^k \hat{p}^l \right]. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Этот главный символ играет центральную роль в пертурбативном вычислении оператора квадратного корня $\mathbb{Q}_{\mathbb{D}}$. При произвольном выборе калибровочных параметров σ , ξ этот расчёт запредельно сложен. Таким образом, мы ограничиваемся четырьмя вариантами калибровки, которые упрощают выражение (1.59).

Калибровка (а) Сначала рассмотрим выбор, при котором собственные значения калибровочных мод совпадают с физическими модами. А именно, мы берём

$$u_V = 1, \quad u_{S2} = u_s \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = \frac{1}{2\nu_5}, \quad \xi = \frac{\nu_s}{2\nu_5(1-\lambda)} - 1. \quad (1.60)$$

Это даёт

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\mathbb{D}}(\mathbf{p})_{ij}^{kl} = & \sqrt{\nu_5} p^3 \left[\frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) + \frac{u_s - 1}{2} \delta_{ij} \delta^{kl} - \frac{u_s - 1}{2} \delta_{ij} \hat{p}^k \hat{p}^l \right. \\ & \left. - \frac{u_s - 1}{2} \hat{p}_i \hat{p}_j \delta^{kl} + \frac{3}{2} (u_s - 1) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}^k \hat{p}^l \right]. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Важно отметить, что этот выбор пересекается с калибровками, рассмотренными в [97] (см. также Приложение A.1), что позволяет нам использовать ранее полученные результаты для (зависящей от калибровки) β -функции константы G в этой калибровке.

Калибровка (б) Второй выбор похож, но теперь

$$u_V = u_{S2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma = \frac{1}{2\nu_5}, \quad \xi = -\frac{1-2\lambda}{2(1-\lambda)}, \quad (1.62)$$

и мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\mathbb{D}}(\mathbf{p})_{ij}{}^{kl} = \sqrt{\nu_5} p^3 \left[\frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) + \frac{u_s - 1}{2} \delta_{ij} \delta^{kl} - \frac{u_s - 1}{2} \delta_{ij} \hat{p}^k \hat{p}^l \right. \\ \left. - \frac{1 - 3\lambda}{2(1 - \lambda)} (u_s - 1) \hat{p}_i \hat{p}_j \delta^{kl} + \frac{1 - 3\lambda}{2(1 - \lambda)} (u_s - 1) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}^k \hat{p}^l \right]. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Это также пересекается с выборами, рассмотренными в [97].

Калибровка (в) Два других варианта выбираются так, чтобы убрать слагаемое с четырьмя векторами $\hat{\mathbf{p}}$ в (1.59), которое является сложным с вычислительной точки зрения.⁶ Самый простой выбор

$$\begin{aligned} u_V = 1, \quad u_{S2} = \frac{3(1 - \lambda)}{2} - \frac{(1 - 3\lambda)u_s}{2} \iff \sigma = \frac{1}{2\nu_5}, \\ \xi = \frac{(3(1 - \lambda) - (1 - 3\lambda)u_s)^2}{8(1 - \lambda)} - 1. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Главный символ принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\mathbb{D}}(\mathbf{p})_{ij}{}^{kl} = \sqrt{\nu_5} p^3 \left[\frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) + \frac{u_s - 1}{2} \delta_{ij} \delta^{kl} \right. \\ \left. - \frac{u_s - 1}{2} \delta_{ij} \hat{p}^k \hat{p}^l - \frac{1 - 3\lambda}{2} (u_s - 1) \hat{p}_i \hat{p}_j \delta^{kl} \right]. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Недостатком этого выбора является то, что он отличается от калибровок, изучаемых в [97]. Следовательно, в этой калибровке мы не можем вычислить бег существенной константы связи \mathcal{G} (см. ур. (1.12)), который требует знания β -функции для G . Тем не менее мы всё ещё можем вычислить бег u_s и v_a , $a = 1, 2, 3$.

⁶После преобразования обратно в конфигурационное пространство, четыре импульса становятся четырьмя ковариантными производными, которые должны быть прокоммутированы через другие операторы в ходе пертурбативной процедуры, см. ниже.

Калибровка (г) Чтобы устранить указанный выше недостаток калибровки (в), мы также рассмотрим выбор

$$u_V = u_{S2} = \frac{1 - \lambda + (1 - 3\lambda)u_s}{2(1 - 2\lambda)} \iff \sigma = \frac{2(1 - 2\lambda)^2}{\nu_5(1 - \lambda + (1 - 3\lambda)u_s)^2}, \quad (1.66)$$

$$\xi = -\frac{1 - 2\lambda}{2(1 - \lambda)}.$$

Здесь главный символ принимает вид

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{D}}(\mathbf{p})_{ij}{}^{kl} = \sqrt{\nu_5} p^3 \left[\frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) + \frac{u_s - 1}{2} \delta_{ij} \delta^{kl} - \frac{u_s - 1}{2} \delta_{ij} \hat{p}^k \hat{p}^l \right. \\ \left. - \frac{(1 - 3\lambda)(u_s - 1)}{2(1 - 2\lambda)} \hat{p}_i \hat{p}_j \delta^{kl} + \frac{(1 - 3\lambda)(u_s - 1)}{4(1 - 2\lambda)} (\delta_i^k \hat{p}_j \hat{p}^l + \delta_i^l \hat{p}_j \hat{p}^k + \delta_j^k \hat{p}_i \hat{p}^l + \delta_j^l \hat{p}_i \hat{p}^k) \right]. \quad (1.67)$$

Эта калибровка также пересекается с калибровками из [97].

Сравнение результатов, полученных в четырёх разных калибровках (а) — (г) обеспечивает надёжную проверку наших расчётов.

Векторный сектор

Теперь мы повторим анализ для векторного оператора \mathbb{W} , заданного выражением (1.23). Его главный символ имеет вид

$$\mathbb{W}^i{}_j(\mathbf{p}) = p^6 \left(\frac{1}{2\sigma} \delta_j^i + \frac{1 - 2\lambda + 2\xi(1 - \lambda)}{2\sigma} \hat{p}^i \hat{p}_j \right). \quad (1.68)$$

Его можно легко записать в через поперечный и продольный проекторы

$$\mathbb{W}^i{}_j(\mathbf{p}) = \frac{p^6}{2\sigma} \mathbb{P}^{(VT)}{}^i{}_j + \frac{(1 - \lambda)(1 + \xi)}{\sigma} p^6 \mathbb{P}^{(VL)}{}^i{}_j, \quad (1.69)$$

где

$$\mathbb{P}^{(VT)}{}^i{}_j = \delta_j^i - \hat{p}^i \hat{p}_j, \quad \mathbb{P}^{(VL)}{}^i{}_j = \hat{p}^i \hat{p}_j. \quad (1.70)$$

Тогда квадратный корень имеет вид

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{W}}(\mathbf{p}) = \sqrt{\nu_5} p^3 \sum_{\alpha} u_{\alpha} \mathbb{P}^{(\alpha)}, \quad \alpha = VT, VL, \quad u_{VT} = u_V, u_{VL} = u_{S2}. \quad (1.71)$$

1.3.2 Каноническая форма псевдодифференциальных операторов

Следующий шаг в процедуре, описанной в начале этого раздела (см. уравнения (1.45)-(1.46)) состоит в восстановлении псевдодифференциального оператора $\mathbb{Q}^{(0)}$ по его символу $\mathbb{Q}(\mathbf{p})$. Результатом этой процедуры является каноническая форма, которую мы сформулируем следующим образом:

1. Все (дробные) степени p^2 заменены ковариантными лапласианами $-\Delta$ и стоят справа.
2. Остальные импульсы заменены ковариантными производными, $p_i \mapsto -i\nabla_i$. Ковариантные производные, индексы которых сворачиваются с тензорными индексами возмущений метрики или вектора сдвига помещаются вправо.

В качестве примера рассмотрим $\mathbb{Q}_{\mathbb{D}}^{(0)}$ в калибровке **(a)**. Вышеприведённый рецепт даёт

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{\mathbb{D}}^{(0) kl} = & \sqrt{\nu_5} \left[\left(\frac{1}{2}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) + \frac{u_s - 1}{2} g_{ij} g^{kl} \right) (-\Delta)^{3/2} + \frac{u_s - 1}{2} g_{ij} \nabla^k \nabla^l (-\Delta)^{1/2} \right. \\ & \left. + \frac{u_s - 1}{2} g^{kl} \nabla_i \nabla_j (-\Delta)^{1/2} + \frac{3(u_s - 1)}{2} \nabla_i \nabla_j \nabla^k \nabla^l (-\Delta)^{-1/2} \right]. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Заметим, что результат действия этого оператора на симметричное возмущение метрики $\mathbb{Q}_{\mathbb{D}}^{(0) kl} h_{kl}$ автоматически симметричен по индексам (i, j) . Другими словами, этот оператор действует в пространстве симметричных тензоров, как и должно быть. Аналогично для векторного оператора его часть нулевого порядка в общей (σ, ξ) -калибровке принимает вид

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{B}}^{(0) i}{}_j = \sqrt{\nu_5} \left[u_V \delta_j^i (-\Delta)^{3/2} + (u_V - u_{S2}) \nabla^i \nabla_j (-\Delta)^{1/2} \right]. \quad (1.73)$$

В более общем случае зависящей от кривизны части \mathbb{X} оператора квадратного корня, число производных больше и может возникнуть неоднозначность упорядочения. Таким образом, мы дополняем это предписание ещё одним правилом:

3. Производные, не охватываемые правилами 1. и 2., упорядочиваются с помощью команды “SortCovDs” пакета *xAct* [98].

1.3.3 Решение уравнения Сильвестра

Для нахождения оператора квадратного корня \mathbb{Q} по теории возмущений необходимо решать уравнения (1.46) для части с кривизной \mathbb{X} . На каждом этапе соответствующей итерационной процедуры мы столкнемся с матричным уравнением следующего вида,

$$\mathbb{Q}(\mathbf{p})\mathbb{X}(\mathbf{p}) + \mathbb{X}(\mathbf{p})\mathbb{Q}(\mathbf{p}) = \mathbb{Y}(\mathbf{p}) . \quad (1.74)$$

Здесь $\mathbb{Q}(\mathbf{p})$ — s -числовой символ $\mathbb{Q}^{(0)}$, матрица $\mathbb{Y}(\mathbf{p})$, являющаяся символом оператора $\mathbb{Y} \equiv \mathbb{F} - (\mathbb{Q}^{(0)})^2 - \mathbb{X}^2$ в правой части уравнения (1.46), предполагается известной, и нам нужно найти $\mathbb{X}(\mathbf{p})$. Все матрицы зависят от трёхмерного волнового числа \mathbf{p} . Уравнение (1.74) является частным случаем матричного уравнения Сильвестра и его решение можно найти общим методом [104]. Однако в данном случае проще получить решение с использованием представления $\mathbb{Q}(\mathbf{p})$ через проекторы (1.57), (1.70). Решение гласит,

$$\mathbb{X}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{\nu_5} p^3} \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{u_\alpha + u_\beta} \mathbb{P}^{(\alpha)} \mathbb{Y}(\mathbf{p}) \mathbb{P}^{(\beta)} , \quad (1.75)$$

где сумма берётся по $\alpha, \beta = T, V, S1, S2$ (тензорный сектор) или $\alpha, \beta = VT, VL$ (векторный сектор). Доказательство проводится прямой заменой:

$$\mathbb{Q}(\mathbf{p})\mathbb{X}(\mathbf{p}) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{u_\alpha}{u_\alpha + u_\beta} \mathbb{P}^{(\alpha)} \mathbb{Y}(\mathbf{p}) \mathbb{P}^{(\beta)} , \quad \mathbb{X}(\mathbf{p})\mathbb{Q}(\mathbf{p}) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{u_\beta}{u_\alpha + u_\beta} \mathbb{P}^{(\alpha)} \mathbb{Y}(\mathbf{p}) \mathbb{P}^{(\beta)} . \quad (1.76)$$

Здесь мы использовали ортогональность проекторов $\mathbb{P}^{(\alpha)}\mathbb{P}^{(\beta)} = \delta^{\alpha\beta}\mathbb{P}^{(\alpha)}$. Суммируя два выражения, получаем

$$\mathbb{Q}(\mathbf{p})\mathbb{X}(\mathbf{p}) + \mathbb{X}(\mathbf{p})\mathbb{Q}(\mathbf{p}) = \sum_{\alpha, \beta} \mathbb{P}^{(\alpha)} \mathbb{Y}(\mathbf{p}) \mathbb{P}^{(\beta)} = \left(\sum_{\alpha} \mathbb{P}^{(\alpha)} \right) \mathbb{Y}(\mathbf{p}) \left(\sum_{\beta} \mathbb{P}^{(\beta)} \right) = \mathbb{Y}(\mathbf{p}) , \quad (1.77)$$

где в последнем равенстве мы использовали полноту базиса проекторов. В дальнейшем мы будем обозначать линейное отображение из правой части уравнения

Сильвестра в его решение с помощью “Syl”, так что мы напишем

$$\mathbb{X}(\mathbf{p}) = \text{Syl}[\mathbb{Y}(\mathbf{p})] . \quad (1.78)$$

1.3.4 Пертурбативная схема

Как обсуждалось в начале этого раздела, для нахождения однопетлевой перенормировки действия, нам необходимо построить оператор \mathbb{Q} , квадрат которого совпадает с оператором $\mathbb{F} = (\mathbb{D}, \mathbb{B})$, входящим в квадратичное по возмущениям действие. Выполним это построение пертурбативно по степеням фоновой кривизны и её производным. А именно, мы пишем,

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{(0)} + \mathbb{Q}^{(2)} + \mathbb{Q}^{(3)} + \mathbb{Q}^{(4)} + \mathbb{Q}^{(5)} + \mathbb{Q}^{(6)} + \dots , \quad (1.79)$$

где индекс в скобках обозначает порядок оператора по степеням обратной длины. Здесь оператор $\mathbb{Q}^{(0)}$ задается (1.72) или (1.73), и он не содержит фоновой кривизны. Оператор $\mathbb{Q}^{(2)}$ линеен по кривизне, это считается вторым порядком, так как кривизна содержит две производные от метрики. Оператор $\mathbb{Q}^{(3)}$ содержит первые производные кривизны (3 производные метрики) и так далее. Многоточие обозначает слагаемые более высокого порядка, которые не вносят вклад в расходящуюся часть действия.

Подстановка этого разложения в определяющее соотношение

$$\mathbb{Q}^2 = \mathbb{F} \quad (1.80)$$

порождает в каждом порядке уравнение вида

$$\mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(a)} + \mathbb{Q}^{(a)}\mathbb{Q}^{(0)} = \mathbb{Y}^{(a)} , \quad (1.81)$$

с правой частью

$$\mathbb{Y}^{(a)} = \mathbb{F} - \sum_{\substack{b,c < a \\ b+c \leq a}} \mathbb{Q}^{(b)}\mathbb{Q}^{(c)} . \quad (1.82)$$

Оператор $\Upsilon^{(a)}$ содержит слагаемые порядка a и выше. Далее $\mathbb{Q}^{(a)}$ строится по следующему алгоритму:

1. Выбираем часть $\Upsilon^{(a)}$, порядок которой равен в точности a ; обозначим её через $\Upsilon_a^{(a)}$.
2. Заменяем ковариантные производные, действующие на возмущение метрики в $\Upsilon_a^{(a)}$ волновым вектором, $\nabla_i \mapsto ip_i$. Это даёт s -матричный символ $\Upsilon_a^{(a)}(\mathbf{p})$.
3. Решаем соответствующее уравнение Сильвестра и определяем матрицу

$$\mathbb{Q}^{(a)}(\mathbf{p}) = \text{Syl}[\Upsilon_a^{(a)}(\mathbf{p})] . \quad (1.83)$$

4. Заменяем волновые векторы в $\mathbb{Q}^{(a)}(\mathbf{p})$ обратно на ковариантные производные, упорядочив их каноническим образом (см. Разд. 1.3.2). Для тензорных операторов симметризуем $\mathbb{Q}_{ij}^{(a)kl}$ по индексам (ij) и (kl) .
5. Строим комбинацию $\mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(a)} + \mathbb{Q}^{(a)}\mathbb{Q}^{(0)}$ и приводим её к каноническому виду. По построению эта комбинация совпадает с $\Upsilon_a^{(a)}$ с точностью до слагаемых порядка выше a . Вычитаем её из $\Upsilon^{(a)}$, чтобы определить новый оператор $\mathbb{Z}^{(a+1)}$.
6. Строим другие произведения $\mathbb{Q}^{(b)}\mathbb{Q}^{(c)}$ с $b, c < a$, $b + c = a + 1$, приводим их к каноническому виду и вычитаем из $\mathbb{Z}^{(a+1)}$. Это определяет $\Upsilon^{(a+1)}$ в соответствии с уравнением (1.82).

Таким образом, мы приходим к итеративной процедуре для последовательного определения $\mathbb{Q}^{(a)}$. Согласно (1.82) правая часть (1.81) на разных шагах определяется выражениями

$$\Upsilon^{(2)} = \mathbb{F} - (\mathbb{Q}^{(0)})^2 , \quad (1.84a)$$

$$\Upsilon^{(3)} = \Upsilon^{(2)} - \mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(2)} - \mathbb{Q}^{(2)}\mathbb{Q}^{(0)} , \quad (1.84b)$$

$$\Upsilon^{(4)} = \Upsilon^{(3)} - \mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(3)} - \mathbb{Q}^{(3)}\mathbb{Q}^{(0)} - (\mathbb{Q}^{(2)})^2 , \quad (1.84c)$$

$$\Upsilon^{(5)} = \Upsilon^{(4)} - \mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(4)} - \mathbb{Q}^{(4)}\mathbb{Q}^{(0)} - \mathbb{Q}^{(2)}\mathbb{Q}^{(3)} - \mathbb{Q}^{(3)}\mathbb{Q}^{(2)} , \quad (1.84d)$$

$$\Upsilon^{(6)} = \Upsilon^{(5)} - \mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(5)} - \mathbb{Q}^{(5)}\mathbb{Q}^{(0)} - \mathbb{Q}^{(2)}\mathbb{Q}^{(4)} - \mathbb{Q}^{(4)}\mathbb{Q}^{(2)} - (\mathbb{Q}^{(3)})^2 . \quad (1.84e)$$

Мы автоматизировали описанный выше алгоритм с помощью пакета *xAct* [98] для Mathematica [102] .

Несколько комментариев. Во-первых, коэффициентные функции 5-го порядка оператора $\mathbb{Q}^{(5)}$ содержат либо третью производную кривизны или произведение кривизны со своей первой производной. Ни одна из этих комбинаций не может породить расходящийся контрчлен в однопетлевом действии. Действительно, из перенормируемости теории следует, что контрчлены имеют ту же структуру, что и члены в голом действии, которые имеют порядок 6 см. [18; 96]. Для получения вклада 6-го порядка коэффициенты $\mathbb{Q}^{(5)}$ нужно будет умножить на ковариантный объект построенный из метрики с использованием одной производной. Но таких объектов не существует. Таким образом, мы заключаем, что $\mathbb{Q}^{(5)}$ действительно не вносят вклада в бета-функции и могут быть отброшены. Далее можно убедиться, что вклады 5-го порядка можно последовательно опустить во всех $\Upsilon^{(a)}$ на всех стадиях вычисления. В частности, вместо последовательного решения для $\mathbb{Q}^{(5)}$, а затем для $\mathbb{Q}^{(6)}$ с помощью оператора Υ (1.84d), (1.84e), мы можем построить $\mathbb{Q}^{(6)}$ за один шаг, решив уравнение (1.81) с правой частью

$$\Upsilon^{(6)} = \Upsilon^{(4)} - \mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(4)} - \mathbb{Q}^{(4)}\mathbb{Q}^{(0)} - \mathbb{Q}^{(2)}\mathbb{Q}^{(3)} - \mathbb{Q}^{(3)}\mathbb{Q}^{(2)} - \mathbb{Q}^{(2)}\mathbb{Q}^{(4)} - \mathbb{Q}^{(4)}\mathbb{Q}^{(2)} - (\mathbb{Q}^{(3)})^2 . \quad (1.85)$$

Во-вторых, наиболее трудоёмкой частью вычисления являются шаги 5.-6., которые включают приведение различных операторов к каноническому виду. В деталях эта канонизация происходит следующим образом (для конкретности, ориентируемся на метрический сектор):

- Все (дробные) степени лапласиана, действующие на возмущения метрики коммутируются через коэффициентные функции и ковариантные производные направо и схлопываются до одного дробного лапласиана. Коммутация выполняется по формуле

$$[A^\alpha, B] = \sum_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n \underbrace{[A, [A, \dots, [A, B]] \dots]}_n A^{\alpha-n} , \quad (1.86)$$

справедливой для произвольных операторов A и B . Здесь

$$C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (1.87)$$

- это биномиальные коэффициенты. Эта формула доказана в приложении **Б**.
- Далее, мы коммутируем направо все ковариантные производные, свернутые с возмущениями метрики. Например, выражение $\nabla^k \nabla \dots \nabla (-\Delta)^\alpha h_{kl}$ после приведения к каноническому виду будет иметь вид

$$\nabla \dots \nabla \nabla^k (-\Delta)^\alpha h_{kl} + \dots ,$$

где точки обозначают слагаемые с кривизной, которые образовались в результате коммутации.

- Остальные производные (включая возможные производные, действующие на кривизны) упорядочиваются с помощью команды “SortCovDs” пакета *xAct*.
- Тензоры Римана, возникающие при коммутации заменяются с помощью разложения Риччи на выражения с тензором Риччи и скаляром кривизны. Этот шаг может сгенерировать дополнительные лапласианы или свертки производных с возмущениями метрики, поэтому процедуру упорядочения, возможно, нужно будет повторить несколько раз.

При выполнении коммутации дробных степеней лапласиана формула (Б.1) усекается в порядке, соответствующем данному шагу вычисления. Один коммутатор лапласиана с ковариантной производной пропорционален кривизне, поэтому имеет 2-й порядок в нашем подсчёте. Каждый следующий коммутатор увеличивает порядок как минимум на единицу. Кроме того, можно показать, что коэффициентная функция низшего порядка в повторном коммутаторе

$$\underbrace{[\Delta, [\Delta, \dots, [\Delta, \nabla]] \dots]}_n \quad (1.88)$$

является полной производной. Следовательно, она не будет давать вклада в эффективное действие, если не будет умножаться на другой фоновый тензор. Последний имеет размерность минимум 2, что дополнительно ограничивает количество повторных коммутаторов, которые нам нужно рассмотреть в заданном порядке. Прямой анализ возможных случаев говорит нам о том, что для коммутатора дробного лапласиана с ковариантной производной нам нужно следующее количество слагаемых:

- $n = 4$ в вычислении $(\mathbb{Q}^{(0)})^2$,

- $n = 3$ в вычислении $\mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(2)}$ и $\mathbb{Q}^{(2)}\mathbb{Q}^{(0)}$,
- $n = 2$ в $\mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(3)}$ и $\mathbb{Q}^{(3)}\mathbb{Q}^{(0)}$,
- $n = 1$ в $\mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(4)}$, $\mathbb{Q}^{(4)}\mathbb{Q}^{(0)}$ и $(\mathbb{Q}^{(2)})^2$,
- в операторах 5-го порядка $\mathbb{Q}^{(2)}\mathbb{Q}^{(3)}$, $\mathbb{Q}^{(3)}\mathbb{Q}^{(2)}$ и операторах 6-го порядка $\mathbb{Q}^{(2)}\mathbb{Q}^{(4)}$, $\mathbb{Q}^{(4)}\mathbb{Q}^{(2)}$, $(\mathbb{Q}^{(3)})^2$ все производные можно считать коммутирующими.

Аналогично, каждый коммутатор лапласиана с коэффициентной функцией, состоящей из кривизны, увеличивает порядок по крайней мере на единицу, слагаемое низшего порядка в

$$\underbrace{[\Delta, [\Delta, \dots, [\Delta, \mathcal{R}_{(a)}]] \dots]}_n \quad (1.89)$$

снова будет полной производной. Рассматривая возможные случаи, мы делаем вывод, что при коммутировании дробного лапласиана с коэффициентными функциями нам нужно сохранить до:

- 3 вложенных коммутаторов в $\mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(2)}$,
- 2 вложенных коммутаторов в $\mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(3)}$ и $(\mathbb{Q}^{(2)})^2$,
- один коммутатор в $\mathbb{Q}^{(2)}\mathbb{Q}^{(3)}$, $\mathbb{Q}^{(3)}\mathbb{Q}^{(2)}$,
- в $\mathbb{Q}^{(0)}\mathbb{Q}^{(4)}$ и $\mathbb{Q}^{(4)}\mathbb{Q}^{(2)}$, $\mathbb{Q}^{(2)}\mathbb{Q}^{(4)}$, $(\mathbb{Q}^{(3)})^2$ коммутатор между дробными лапласианами и коэффициентными функциями можно вообще опустить.

Итерационный алгоритм этого раздела даёт нам оператор квадратного корня в форме (1.42), подходящей для дальнейшей обработки по методике универсальных функциональных следов. Сейчас мы опишем эту технику и составим список необходимых УФС.

1.4 Универсальные функциональные следы

1.4.1 Типы универсальных функциональных следов

Здесь мы рассматриваем типы универсальных функциональных следов, возникающих в следе оператора \mathbb{Q} относительно количества производных и

степеней лапласиана, на который действуют эти производные. Сначала сосредоточимся на тензорном секторе. Как указано в разделе 1.3, разложение по кривизне $\mathbb{Q}_{\mathbb{D}}$ в канонической форме (1.42) гласит:

$$\mathbb{Q}_{\mathbb{D}ij}{}^{kl} = \left[\sum_{a,p} \mathcal{R}_{(a)} \tilde{\alpha}_{a,p} \nabla_1 \dots \nabla_p \frac{1}{(-\Delta)^{N+1/2}} \right]_{ij}{}^{kl}, \quad (1.90)$$

где в каждом слагаемом мы переопределили общую отрицательную полуцелую степень лапласиана как $N + 1/2$ и число производных как p . Напомним, что $\mathcal{R}_{(a)}$ — это тензоры фонового поля, построенные из кривизны и её производных, размерности a в единицах обратной длины, см. уравнение (1.41). Для $a = 2$ этот тензор есть просто кривизна Риччи $\mathcal{R}_{(2)} = R^{ij}$, для $a = 3$ это $\mathcal{R}_{(3)} = \nabla^k R^{ij}$ и т. д. Очевидно, что при любом a тензорная величина имеет *максимум* a индексов, $\mathcal{R}_{(a)} = \mathcal{R}_{(a)}^{i_1 \dots i_r}$, $r \leq a$. Кроме того, как упоминалось в разделе 1.3, параметр N не независим, а следует из общей размерности оператора $\mathbb{Q}_{\mathbb{D}}$, которая равна 3, так что $a + p - 2N - 1 = 3$ или

$$2N = a + p - 4, \quad (1.91)$$

откуда, в частности, следует, что $a + p$ всегда чётно (обозначено как $2k$ в (1.42)). Таким образом

$$\text{Tr } \mathbb{Q}_{\mathbb{D}} = \int d^3x \sum_{a,p} \text{tr} \left[\mathcal{R}_{(a)} \tilde{\alpha}_{a,p} \nabla_1 \dots \nabla_p \frac{1}{(-\Delta)^{N+1/2}} \delta_{ij}{}^{kl}(x,y) \Big|_{y=x} \right], \quad (1.92)$$

где tr — след, который берётся по мультииндексам ij и kl *после* того как было применено действие каждого нелокального оператора на тензорную дельта-функцию.

Ещё один важный момент, также упомянутый в разделе 1.3, заключается в том, что для каждого a существует верхняя граница числа производных p в этих функциональных следах. Действительно, p индексов может быть свёрнуто максимум с r индексами $\mathcal{R}_{(a)}$ и 4-мя индексами $\delta_{ij}{}^{kl}(x,y)$.⁷ Поэтому $p \leq r + 4$,

⁷Если некоторые из этих $r + 4$ индексов свёрнуты друг с другом, то возможное число производных меньше, потому что индексы не могут быть свёрнуты с чем-либо ещё, кроме индексов производных. Эти сокращения, однако, не учитываются, потому что они просто сдвигают степень N лапласиана.

а ввиду того, что $r \leq a$ верхняя граница p равна

$$p \leq a + 4, \quad (1.93)$$

что совпадает с (1.43) при $K_{\text{free}} = 4$. Вместе с (1.91) это приводит к верхней границе для N

$$N \leq a. \quad (1.94)$$

В (1.92) каждый УФС с p производными, сопряжённый тензору фонового поля $\mathcal{R}_{(a)}$ размерности a

$$T_p^{(a)} \equiv \nabla_1 \dots \nabla_p \frac{1}{(-\Delta)^{N+1/2}} \delta_{ij}{}^{kl}(x, y) \Big|_{y=x}, \quad N = \frac{a+p}{2} - 2, \quad (1.95)$$

расходится, когда его степень расходимости $\Omega(T_p^{(a)}) = p - 2N + 2 = 6 - a$ положительна, или $a \leq 6$. Это, конечно, соответствует логарифмически расходящимся контрчленам размерности 6. Следовательно, множество логарифмически расходящихся слагаемых в (1.92) задаётся условиями

$$a = 0, 2, 3, 4, 6, \quad (1.96)$$

где вклады с $a = 1$ и $a = 5$ отсутствуют поскольку тензоров фонового поля размерности 1 не существует. Таким образом, мы имеем следующие пять наборов универсальных функциональных следов, которые вносят вклад в логарифмические расходимости:

Следы с $a = 0$, $p \leq 4$, p -чётно, $N + \frac{1}{2} = \frac{p-3}{2}$:

$$(-\Delta)^{3/2} \hat{\delta}(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla_{i_1} \nabla_{i_2} (-\Delta)^{1/2} \hat{\delta}(x, y) \Big|_{y=x}, \quad (1.97)$$

$$\nabla_{i_1} \nabla_{i_2} \nabla_{i_3} \nabla_{i_4} \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}. \quad (1.98)$$

Это самые сложные следы, потому что они требуют знания пределов совпадений до $\nabla^8 \sigma(x, y) \Big|_{y=x}$, $\nabla^6 \mathcal{D}^{1/2}(x, y) \Big|_{y=x}$, $\nabla^6 \hat{a}_0(x, y) \Big|_{y=x}$, $\nabla^4 \hat{a}_1(x, y) \Big|_{y=x}$, $\nabla^2 \hat{a}_2(x, y) \Big|_{y=x}$, и $\hat{a}_3(x, x)$.

Следы с $a = 2$, $p \leq 6$, p -чётно, $N + \frac{1}{2} = \frac{p-1}{2}$:

$$(-\Delta)^{1/2} \hat{\delta}(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^2 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{1/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^4 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{3/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad (1.99)$$

$$\nabla^6 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{5/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x} \quad (1.100)$$

Здесь и далее мы для краткости опускаем индексы у производных.

Следы $a = 3$, $p \leq 7$, p -нечётно, $N + \frac{1}{2} = \frac{p}{2}$:

$$\nabla \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{1/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^3 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{3/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^5 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{5/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad (1.101)$$

$$\nabla^7 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{7/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x} \quad (1.102)$$

Следы с $a = 4$, $p \leq 8$, p -чётно, $N + \frac{1}{2} = \frac{p+1}{2}$:

$$\frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{1/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^2 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{3/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^4 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{5/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x},$$

$$\nabla^6 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{7/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^8 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{9/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x} \quad (1.103)$$

Следы с $a = 6$, $p \leq 10$, p -чётно, $N + \frac{1}{2} = \frac{p+3}{2}$:

$$\frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{3/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^2 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{5/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^4 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{7/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}$$

$$\nabla^6 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{9/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^8 \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{11/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \nabla^{10} \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{13/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x} \quad (1.104)$$

В этой пятой группе число производных велико, но эти следы являются самыми простыми, потому что они могут быть посчитаны на плоском пространстве и сводятся к симметризованным произведениям метрического тензора.

Классификация УФС в векторном секторе проходит аналогично. Единственная разница заключается в изменении границ (1.93), (1.94) из-за разного

количества свободных индексов $\mathbb{Q}_{\mathbb{B}}^i$. Теперь мы имеем

$$p \leq a + 2, \quad N \leq a + 1, \quad (1.105)$$

что убирает последний случай в каждом порядке в списке возможных структур (1.98)–(1.104).

Мы вычислили расходимости всех необходимых тензорных и векторных УФС с использованием символьной компьютерной алгебры [98]. Код доступен в [105]. Полные выражения очень длинные, поэтому мы не пишем их явно. В приложении В мы представляем самые трудоемкие следы с $a = 0$ и $a = 2$.

1.5 Бета функции

На последнем шаге нашего вычисления мы объединяем извлечение квадратного корня из оператора с помощью процедуры, описанной в разделе 1.3.4 с результатами для УФС, перечисленных в разделе 1.4.1, чтобы получить расходящуюся часть однопетлевого эффективного действия. А именно, мы используем (1.39), в которое мы подставляем (1.92) (и аналогичное уравнение для $\text{Tr } \mathbb{Q}_{\mathbb{B}}$). После приведения подобных, интегрирования по частям и использования тождеств Бьянки, расходящаяся часть принимает вид

$$\begin{aligned} \Gamma^{1\text{-loop}} \Big|_{\text{div}} = \ln L^2 \int d\tau d^3x \sqrt{g} & (C_{\nu_1} R^3 + C_{\nu_2} R R_{ij} R^{ij} + C_{\nu_3} R_j^i R_k^j R_i^k \\ & + C_{\nu_4} \nabla_i R \nabla^i R + C_{\nu_5} \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk}). \end{aligned} \quad (1.106)$$

Только потенциальная часть действия имеет логарифмические расходимости на нашем статическом фоне. Коэффициенты C_{ν_a} , которые являются функциями констант связи $\lambda, \nu_1, \dots, \nu_5$ представляют ключевой результат вычисления.

Фактор УФС-расходимости $\ln L^2$ связан с интегралом по параметру собственного времени

$$\ln L^2 = \int \frac{ds_2}{s_2}. \quad (1.107)$$

Этот интеграл получается из представления ядра теплопроводности для степеней пространственного лапласиана. Следовательно, здесь размерность собствен-

ного времени равна $[s_2] = -2$, этот факт мы подчеркнули нижним индексом. Это означает, что расходящийся логарифм связан с масштабом перенормировки импульса k_* как

$$\ln L^2 \simeq \ln \left(\frac{\Lambda_{UV}^2}{k_*^2} \right), \quad (1.108)$$

где Λ_{UV} это УФ-обрезание.

Теперь мы готовы вычислить β -функции констант ν_a , $a = 1, \dots, 5$. Сравнивая уравнения (1.16) и (1.106), получаем перенормированные комбинации констант связи

$$\left(\frac{\nu_a}{2G} \right)_{\text{ren}} = \frac{\nu_a}{2G} + C_{\nu_a} \ln L^2, \quad (1.109)$$

откуда

$$\beta_{\nu_a} \equiv \frac{d\nu_{a,\text{ren}}}{d \ln k_*} = -4GC_{\nu_a} + \nu_a \frac{\beta_G}{G}, \quad a = 1, 2, \dots, 5. \quad (1.110)$$

Следовательно, потенциальное слагаемое β -функций выражается через константы C_{ν_a} и β -функцию G

$$\beta_G \equiv \frac{dG_{\text{ren}}}{d \ln k_*}, \quad (1.111)$$

которая была ранее получена в [97] (см. также приложение A.1).

Ни β_G , ни β_{ν_a} не являются калибровочно-инвариантными. Хорошо известно, что изменение калибровки добавляет к фоновому эффективному действию линейную комбинацию уравнений движения [106; 107]. Такой вклад исчезает на массовой оболочке, но не на нашем фоне вне массовой оболочки. Это приводит к калибровочной зависимости однопетлевого эффективного действия и перенормированных констант связи. Как показано в [97], эта зависимость образует однопараметрическое семейство преобразований, которое для бесконечно малого изменения калибровки, имеет вид

$$G \mapsto G - 2G^2 \epsilon, \quad \nu_a \mapsto \nu_a - 4G\nu_a \epsilon, \quad (1.112)$$

где ϵ – это бесконечно малый параметр.

Теперь мы можем построить комбинации, инвариантные относительно этих преобразований, β -функции которых будут калибровочно-инвариантными. Таким образом, мы приходим к набору существенных констант связи (1.12). Их

бег легко получить из β_{ν_a} , β_G и β_λ (см. ур. (1.13)):

$$\beta_G = \mathcal{G} \left(\frac{\beta_G}{G} - \frac{1}{2} \frac{\beta_{\nu_5}}{\nu_5} \right), \quad (1.113a)$$

$$\beta_{\nu_a} = \frac{1}{\nu_5} \left(\beta_{\nu_a} - \nu_a \frac{\beta_{\nu_5}}{\nu_5} \right), \quad a = 1, 2, 3, \quad (1.113b)$$

$$\beta_{u_s} = \frac{u_s \beta_\lambda}{(1 - \lambda)(1 - 3\lambda)} + \frac{4(1 - \lambda)\beta_{\nu_4}}{(1 - 3\lambda)u_s}, \quad (1.113c)$$

где $\nu_4 = \nu_4/\nu_5$ и её β -функция определена в так же, как в (1.113b) при $a = 4$. Это приводит к нашим основным результатам, (1.14), (1.15), (A.4)–(A.5).

Мы вычислили β_G в трёх разных калибровках **а**, **б**, **в**, а β_{u_s} , β_{ν_a} , $a = 1, 2, 3$ в четырёх калибровках **а**, **б**, **в**, **г** из разд. 1.3.1. Мы получили одинаковые результаты. Все этапы расчёта выполнялись двумя независимыми кодами — один для калибровок **а**, **б** и один для калибровок **в**, **г**. Обратите внимание, что хотя окончательные результаты совпадают, промежуточные выражения существенно различаются в разных калибровках. Особенно сильно различаются коэффициенты, зависящие от констант связи, в операторе квадратного корня $\mathbb{Q}_{\mathbb{D}}$ (который содержит несколько тысяч различных тензорных структур) в калибровках **а**, **б** и **в**, **г**. В общем, это рациональные функции со знаменателем, являющимся произведением комбинаций $(u_\alpha + u_\beta)$, где u_α , $\alpha = T, V, S1, S2$, являются собственными значениями главного символа $\mathbb{Q}_{\mathbb{D}}(\mathbf{p})$ определенного в уравнении (1.58). Это следует из формулы для решения уравнения Сильвестра (1.75), используемого на каждой итерации пертурбативной процедуры построения $\mathbb{Q}_{\mathbb{D}}$. В калибровках **а**, **б** собственные значения, соответствующие калибровочным модам совпадают с физическими модами, так что в знаменателе из коэффициентов получаем только степени u_s и $(1 + u_s)$. На с другой стороны, в калибровках **в** и **г** калибровочные собственные значения различны, и мы получаем несколько дополнительных множителей u_V , $(1 + u_V)$, u_{S2} , $(1 + u_{S2})$ и т. д. Все эти дополнительные множители сокращаются в существенных β -функциях, что обеспечивает очень мощную проверку правильности и непротиворечивости нашего результата.

В заключение сделаем следующее замечание. После того, как калибровочная инвариантность существенных β -функций проверена явно, мы можем инвертировать логику и вывести коэффициенты C_{ν_a} в однопетлевом эффективном действии для произвольных значений калибровочных параметров σ, ξ . Действительно, из калибровочной инвариантности β -функций для отношений

$v_a = \nu_a/\nu_5$, $a = 1, 2, 3, 4$, следует, что калибровочно-зависимые части коэффициентов C_{ν_a} в однопетлевом эффективном действии пропорциональны самим константам связи ν_a с общим множителем

$$C_{\nu_a}^{\text{gauge}} = \nu_a \Xi(\lambda, \{\nu\}, \sigma, \xi) , \quad a = 1, \dots, 5 . \quad (1.114)$$

Если добавить к этому инвариантность β -функции для существенной константы связи \mathcal{G} , то можно получить зависящую от калибровки часть β -функций для G и ν_a

$$\beta_G^{\text{gauge}} = -4G^2 \Xi , \quad \beta_{\nu_a}^{\text{gauge}} = -8G\nu_a \Xi . \quad (1.115)$$

Функция Ξ может быть зафиксирована вычислением эффективного действия на сферическом фоне, которое может быть выполнено в общей (σ, ξ) -калибровке. Это вычисление даёт удивительно простой результат

$$\Xi(\lambda, \{\nu\}, \sigma, \xi) = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ 4\sqrt{2\sigma} + \frac{1}{(1-\lambda)} \sqrt{\frac{\sigma}{(1-\lambda)(1+\xi)}} \right\} . \quad (1.116)$$

1.6 Фиксированные точки РГ потока

Важным вопросом является существование и природа неподвижных точек РГ потока. Как уже отмечалось, зависимость β -функций от константы \mathcal{G} факторизуется. Эта константа определяет общую силу взаимодействий в гравитации Хоравы и должна быть мала для справедливости пертурбативного разложения. Её УФ-поведение определяет, является ли модель асимптотически свободной ($\mathcal{G} \rightarrow 0$) или имеет полюс Ландау ($\mathcal{G} \rightarrow \infty$). С другой стороны, остальные константы связи λ, u_s, v_a являются отношениями коэффициентов в действии и не обязаны быть малы. Таким образом, поиск неподвижных точек РГ потока разбивается на два этапа. Сначала нужно найти фиксированные точки потока в подпространстве констант связи λ, u_s, v_a , решая систему

$$\beta_\lambda/\mathcal{G} = 0 , \quad (1.117a)$$

$$\beta_\chi/\mathcal{G} = 0 , \quad \chi = u_s, v_1, v_2, v_3 . \quad (1.117b)$$

В полном пространстве параметров эти решения соответствуют линиям потока вдоль направления \mathcal{G} . Далее вычисляется $\beta_{\mathcal{G}}$ на заданном решении, знак которой определяет, идёт ли линия потока к гауссовой фиксированной точке или полюсу Ландау.

Опуская знаменатели в выражениях (1.13), (1.14b), система (1.117) становится системой из 5 полиномиальных уравнений от 5 неизвестных λ, u_s, v_a , $a = 1, 2, 3$. Мы изучили её численно и получили следующие результаты:

- i) Мы не нашли решений в правой части унитарной области, $\lambda > 1$. В этом отношении $(3 + 1)$ -мерная гравитация Хоравы оказывается отличной от $(2 + 1)$ -мерного аналога, обладающего асимптотически свободной фиксированной точкой при $\lambda = 15/14$ [108].
- ii) В левой части унитарной области $\lambda < 1/3$ найдено 5 решений, приведённых в таблице 1. Все эти фиксированные точки оказываются асимптотически свободными. Как обсуждалось в [97], фиксированные точки $\lambda < 1/3$ являются УФ-отталкивающими в направлении λ .
- iii) В пределе $\lambda \rightarrow \infty$ найдено 8 фиксированных точек, они приведены в таблице 2. Существование УФ фиксированных точек в таком пределе было впервые предложено в работе [109]. Стоит отметить, что аналогичный предел естественным образом возникает при связи нерелятивистской гравитации с потоками Перельмана–Риччи [110].

λ	u_s	v_1	v_2	v_3	$\beta_{\mathcal{G}}/\mathcal{G}^2$
0.1787	60.57	-928.4	-6.206	-1.711	-0.1416
0.2773	390.6	-19.88	-12.45	2.341	-0.2180
0.3288	54533	3.798×10^8	-48.66	4.736	-0.8484
0.3289	57317	-4.125×10^8	-49.17	4.734	-0.8784
0.333332	3.528×10^{11}	-6.595×10^{23}	-1.950×10^8	4.667	-3.989×10^6

Таблица 1 — Решения системы (1.117). В шестом столбце указано значение β -функции константы \mathcal{G} на соответствующем решении. Все фиксированные точки асимптотически свободны.

№	u_s	v_1	v_2	v_3	$\beta_{\mathcal{G}}/\mathcal{G}^2$	Можно вытечь из $\lambda = \infty$?
1	0.01950	0.4994	-2.498	2.999	-0.2004	нет
2	0.04180	-0.01237	-0.4204	1.321	-1.144	нет
3	0.05530	-0.2266	0.4136	0.7177	-1.079	нет
4	12.28	-215.1	-6.007	-2.210	-0.1267	да
5	21.60	-17.22	-11.43	1.855	-0.1936	да
6	440.4	-13566	-2.467	2.967	0.05822	да
7	571.9	-9.401	13.50	-18.25	-0.07454	да
8	950.6	-61.35	11.86	3.064	0.4237	да

Таблица 2 — Решения системы (1.117) соответствующие фиксированным точкам гравитации Хоравы при $\lambda = \infty$. В предпоследнем столбце указано значение β -функции константы \mathcal{G} на каждом решении, знак которой определяет, будет ли поток асимптотически свободен или убегает в сильную связь.

Глава 2. Аномальные масштабные размерности составных операторов

2.1 Ренормгрупповые потоки и составные операторы

2.1.1 Уравнение Веттериха и анзац Гильберта-Эйнштейна

Мы начинаем с обзора уравнения Веттериха, его решения с помощью анзаца Гильберта-Эйнштейна и формализма составных операторов [79].

Уравнение Веттериха для эффективного действия Γ_k имеет вид [39–41; 111]

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \partial_t \mathcal{R}_k \right], \quad \partial_t \equiv k \partial_k. \quad (2.1)$$

здесь k – это масштаб, $\Gamma_k^{(2)}$ – вторая функциональная производная Γ_k по квантовым полям, а Tr представляет собой сумму по квантовым полям и интеграл по петлевым импульсам. Инфракрасный регулятор \mathcal{R}_k имеет вид k -зависимого массового слагаемого для флуктуаций с импульсом $p^2 \lesssim k^2$ и исчезает для $p^2 \gg k^2$. Как следствие аргумент под знаком следа имеет максимум при $p^2 \approx k^2$. При понижении k высвобождаются дальнейшие моды флуктуаций, которые потом будут отинтегрированы. Таким образом уравнение функциональной ренормгруппы (УФРГ) (2.1) реализует идею Вильсона о перенормировке.

Важным свойством УФРГ является возможность построения приближённых решений, которые не опираются на разложение по малому параметру. Главная идея заключается в формальном разложении Γ_k по мономам взаимодействия, умноженных на зависящую от масштаба константу связи $\bar{u}_i(k)$

$$\Gamma_k = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{u}_i(k) \mathcal{O}_i. \quad (2.2)$$

Ограничивая сумму конечным набором, $i = 1, \dots, N$, подставляя полученный анзац для Γ_k в УФРГ и проецируя полученное уравнение на мономы взаимодействия, содержащиеся в анзаце, мы получаем набор уравнений $k \partial_k \bar{u}_i(k) =$

$\bar{\beta}_{\bar{u}_i}(\{\bar{u}_j\}, k)$. Вводя безразмерные константы связи $u_i(k) \equiv k^{-d_i} \bar{u}_i(k)$, где d_i обозначает массовую размерность размерной константы связи $\bar{u}_i(k)$, поток может быть записан в терминах автономных бета-функций

$$\partial_t u_i = \beta_{u_i}(\{u_j\}), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

По определению, фиксированная точка $\{u_i^*\}$ – это точка, где все бета-функции одновременно обращаются в нуль

$$\beta_{u_i}(\{u_j^*\}) = 0. \quad (2.4)$$

Поток в окрестности такой фиксированной точки удобно изучать с помощью линеаризации системы (2.3)

$$\partial_t u_i \approx \sum_j \mathbf{B}_i^j (u_j - u_j^*), \quad \mathbf{B}_i^j \equiv \left. \frac{\partial \beta_{u_i}}{\partial u_j} \right|_{u_i=u_i^*}. \quad (2.5)$$

Собственные значения λ_i матрицы стабильности \mathbf{B}_i^j определяют, притягивается ли ренормгруппой поток ($\text{Re} \lambda_i < 0$) или отталкивается ($\text{Re} \lambda_i > 0$) неподвижной точкой вдоль соответствующего собственного направления при $k \rightarrow \infty$. В зависимости от того, равны ли собственные значения канонической размерности или получают квантовые поправки, различают гауссову фиксированную точку (ГФТ) или негауссову фиксированную точку (НГФТ).

Примечательно, что собственные значения матрицы стабильности \mathbf{B}_i^j инвариантны при переопределении констант связи (координат), параметризующих функционалы действия (2.2). В этом можно убедиться следующим образом. Рассмотрим новое определение безразмерных констант связи $u'_i = u'_i(u_j)$. При таком изменении бета-функции преобразуются как векторное поле

$$\beta'_{u'_i}(u') = \frac{\partial u'_i}{\partial u_j} \beta_{u_j}(u). \quad (2.6)$$

Тогда в общей точке u частная производная $\mathbf{B}_i^j(u) = \frac{\partial}{\partial u_j} \beta_{u_i}$ затем преобразует в соответствии с законом

$$\mathbf{B}'_i{}^j(u') = \frac{\partial u'_i}{\partial u_k} \mathbf{B}_k{}^l(u) \frac{\partial u_l}{\partial u'_j} + \beta_{u_l}(u) \frac{\partial u_l}{\partial u'_j} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial u_k \partial u_l}. \quad (2.7)$$

В фиксированной точке $\beta_{u_i}(u_*) = 0$ и второе слагаемое в правой части обращается в нуль. Как следствие, $\mathbf{V}'_i{}^j(u'_*)$ и $\mathbf{V}_i{}^j(u_*)$ связаны преобразованием подобия, гарантируя, что их собственные значения совпадают. Ясно, что это свойство сохраняется только для собственных значений и не распространяется на элементы матрицы устойчивости.

2.1.2 Анзац Гильберта–Эйнштейна

Наиболее простым анзацем для уравнения Веттериха (2.1) является действие Гильберта–Эйнштейна вместе с фиксацией калибровки и слагаемым для духов

$$\Gamma_k \simeq \frac{1}{16\pi G_k} \int d^d x \sqrt{g} [-R + 2\Lambda_k] + \Gamma_k^{\text{gf}} + S^{\text{ghost}}. \quad (2.8)$$

Этот анзац имеет две зависящие от масштаба константы связи, постоянную Ньютона G_k и космологическую постоянную Λ_k , и был подробно изучен [39; 42; 43; 45; 46]. Следуя [39], бета-функции, получаемые из этого анзаца, находятся следующим образом. Сначала мы разбиваем метрику пространства-времени $g_{\mu\nu}$ на фоновую метрику $\bar{g}_{\mu\nu}$ и флуктуации $h_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Чтобы упростить вычисления, мы выбираем фоновую метрику в качестве метрики на d -мерной сфере, в результате чего

$$\bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\bar{R}}{d(d-1)} [\bar{g}_{\mu\rho}\bar{g}_{\nu\sigma} - \bar{g}_{\mu\sigma}\bar{g}_{\nu\rho}], \quad \bar{R}_{\mu\nu} = \frac{\bar{R}}{d} \bar{g}_{\mu\nu}, \quad \bar{D}_\mu \bar{R} = 0. \quad (2.10)$$

Ковариантные производные и тензоры кривизны, построенные из $\bar{g}_{\mu\nu}$, обозначены чертой. Далее мы выбираем гармоническую калибровку

$$\Gamma_k^{\text{gf}} = \frac{1}{32\pi G_k} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} F_\mu F_\nu, \quad F_\mu = \bar{D}^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{D}_\mu \bar{g}^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (2.11)$$

Пренебрегая членами, содержащими поле $h_{\mu\nu}$, которые не требуются для данного вычисления, духовое действие для этого калибровочного условия имеет

вид

$$S^{\text{ghost}} = \sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \left[\Delta - \frac{1}{d} \bar{R} \right] C^\mu \quad (2.12)$$

где $\Delta \equiv -\bar{g}^{\mu\nu} \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu$. Разложив флуктуации на следовую и бесследовую части

$$h_{\mu\nu} = \hat{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} h, \quad \bar{g}^{\mu\nu} \hat{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.13)$$

пропагаторы флуктуаций метрики могут быть представлены в блочно-диагональной форме

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)}|_{\hat{h}\hat{h}} &= \frac{1}{32\pi G_k} [\Delta - 2\Lambda_k + C_T \bar{R}], \\ \Gamma_k^{(2)}|_{hh} &= -\frac{1}{32\pi G_k} \frac{d-2}{2d} [\Delta - 2\Lambda_k + C_S \bar{R}], \end{aligned} \quad (2.14)$$

где

$$C_T \equiv \frac{d(d-3)+4}{d(d-1)}, \quad C_S \equiv \frac{d-4}{d}. \quad (2.15)$$

Результат для духового сектора может быть найден в [39; 79], но здесь он не нужен.

Регулятор \mathcal{R}_k должен обеспечивать зависящий от k массовый член для флуктуаций с импульсом меньше k^2 . Мы строим матрицу \mathcal{R}_k из правила подстановки для обрезания типа I [112], $\Delta \mapsto \Delta + R_k(\Delta)$. Получаемый регулятор является блочно-диагональным в пространстве полей. Его компоненты в гравитационном секторе задаются как

$$\mathcal{R}_k|_{\hat{h}\hat{h}} = \frac{1}{32\pi G_k} R_k, \quad \mathcal{R}_k|_{hh} = -\frac{1}{32\pi G_k} \frac{d-2}{2d} R_k. \quad (2.16)$$

На практике мы полагаем $R_k = k^2 R^{(0)}(\Delta/k^2)$, где $R^{(0)}(z)$ является безразмерной функцией, пробегаящей значения между $\lim_{z \rightarrow \infty} R^{(0)}(z) = 0$ и $R^{(0)}(0) = 1$. При представлении численных результатов мы будем работать с регулятором Литима [113; 114],

$$R^{(0)} = (1-z)\Theta(1-z), \quad (2.17)$$

где $\Theta(x)$ обозначает ступенчатую функцию.

Бета-функции, определяющие поведение G_k и Λ_k находятся путем подстановки анзаца (2.8) в уравнение Веттериха (2.1) и проецирования потока на

взаимодействующие мономы $\int d^d x \sqrt{g}$ и $\int d^d x \sqrt{g} \bar{R}$. Это вычисление может быть выполнено довольно просто, применив разложение для ядра теплопроводности [112]. Результат удобно выражается через безразмерные константы связи

$$g_k = k^{d-2} G_k, \quad \lambda_k = \Lambda_k k^{-2}, \quad (2.18)$$

и имеет вид

$$\partial_t g_k = [d - 2 + \eta_N] g_k, \quad \partial_t \lambda_k = \beta_\lambda(g_k, \lambda_k). \quad (2.19)$$

Явные выражения для β_λ и аномальной размерности ньютоновской постоянной $\eta_N \equiv (G_k)^{-1} \partial_t G_k$ были вычислены в [39] и имеют вид

$$\beta_\lambda = (\eta_N - 2)\lambda + \frac{g}{2(4\pi)^{d/2-1}} \left[2d(d+1)\Phi_{d/2}^1(-2\lambda) - 8d\Phi_{d/2}^1(0) - d(d+1)\eta_N \tilde{\Phi}_{d/2}^1(-2\lambda) \right], \quad (2.20)$$

и

$$\eta_N(g, \lambda) = \frac{gB_1(\lambda)}{1 - gB_2(\lambda)}, \quad (2.21)$$

где

$$B_1(\lambda) = \frac{1}{3(4\pi)^{d/2-1}} \left[d(d+1)\Phi_{d/2-1}^1(-2\lambda) - 6d(d-1)\Phi_{d/2}^2(-2\lambda) - 4d\Phi_{d/2-1}^1(0) - 24\Phi_{d/2}^2(0) \right], \quad (2.22)$$

$$B_2(\lambda) = -\frac{1}{6(4\pi)^{d/2-1}} \left[d(d+1)\tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(-2\lambda) - 6d(d-1)\tilde{\Phi}_{d/2}^2(-2\lambda) \right].$$

Безразмерные пороговые функции $\Phi_n^p(w)$ и $\tilde{\Phi}_n^p(w)$ определяются как

$$\Phi_n^p(w) \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z) - zR^{(0)'}(z)}{[z + R^{(0)}(z) + w]^p}, \quad (2.23)$$

$$\tilde{\Phi}_n^p(w) \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R^{(0)}(z) - zR^{(0)'}(z)}{[z + R^{(0)}(z) + w]^p},$$

и определяют зависимость потока от регулятора. Для регулятора (2.17) интегралы могут быть посчитаны аналитически, что дает

$$\Phi_n^{p, \text{Litim}}(w) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{(1+w)^p}, \quad \tilde{\Phi}_n^{p, \text{Litim}}(w) = \frac{1}{\Gamma(n+2)} \frac{1}{(1+w)^p}. \quad (2.24)$$

Для дальнейшего удобства мы также вводим комбинацию

$$q_n^p(w) \equiv \Phi_n^p(w) - \frac{1}{2} \eta_N \tilde{\Phi}_n^p(w). \quad (2.25)$$

Система (2.19) имеет ГФТ, расположенную в начале координат $\{g_*, \lambda_*\} = 0$. Вдобавок также можно найти НГФТ. Для регулятора (2.17) последняя расположена при следующих значениях

$$\begin{aligned} d = 3: \quad \{g_*, \lambda_*\} &= \{0.199, 0.063\}, \\ d = 4: \quad \{g_*, \lambda_*\} &= \{0.707, 0.193\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Вычисляя матрицу стабильности (2.5) в этих НГФТ, имеем

$$\mathbf{V}_i^j|_{d=3} = \begin{bmatrix} -1.258 & 1.225 \\ -0.569 & -1.037 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_i^j|_{d=4} = \begin{bmatrix} -0.608 & 0.959 \\ -10.44 & -2.342 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Элементы \mathbf{V}_i^j не являются ни симметричными, ни “почти диагональными” в том смысле, что недиагональные элементы малы по сравнению с диагональными. Вычисление собственных значений дает

$$\begin{aligned} d = 3: \quad \lambda_{1,2} &= -1.148 \pm 0.827i, \\ d = 4: \quad \lambda_{1,2} &= -1.475 \pm 3.043i. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Таким образом, в обоих случаях НГФТ представляет собой спиральный УФ-аттрактор, который захватывает ренормгрупповые траектории в своей окрестности в пределе $k \rightarrow \infty$. Существование и качественные свойства НГФТ стабильны по отношению к изменениям в регуляторе [42; 56].

Систему (2.19) удобно решать численно. Особый интерес представляет решение, которое соединяет НГФТ при больших значениях k и ГФТ для $k \rightarrow 0$. Для $d = 4$ это решение показано на рис. 2.1. Его характерная особенность состоит в том, что значение постоянной Ньютона, $G_0 \equiv \lim_{k \rightarrow 0} G_k$, является константой, в то время как космологическая константа $\Lambda_0 \equiv \lim_{k \rightarrow 0} \Lambda_k = 0$ исчезает. Позже мы вычислим аномальные размерности γ_n вдоль этого решения.

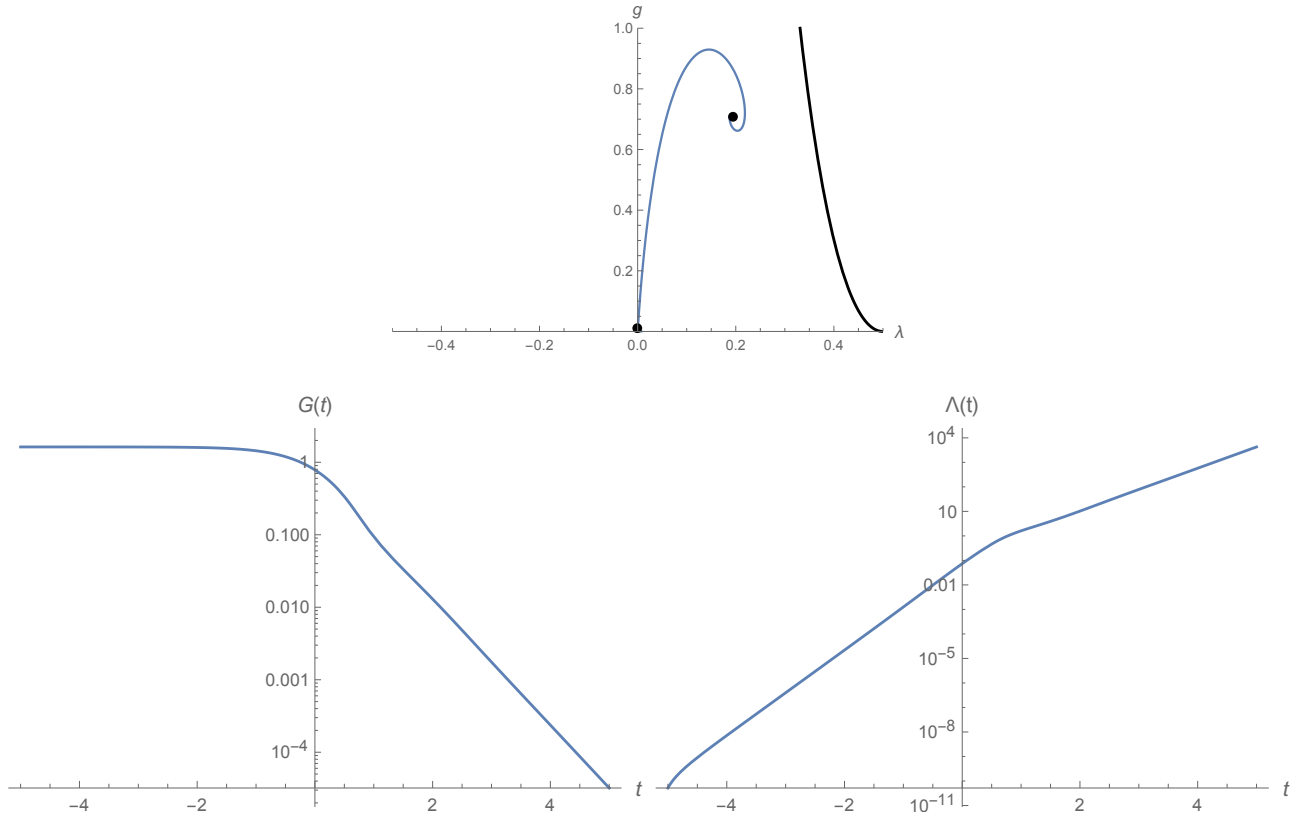


Рисунок 2.1 — Вверху: Решение системы (2.19) для $d = 4$, соединяющее ГФТ и НГФТ, отмеченные черными точками. Черная линия, исходящая из точки $(\lambda, g) = (1/2, 0)$, представляет собой сингулярное геометрическое место бета-функций, в котором η_N расходится. Полную классификацию РГ траекторий, возникающих в рамках анзаца Гильберта–Эйнштейна, см. [42].

Внизу: размерные константы связи Λ_k и G_k как функции РГ времени $t \equiv \ln(k/k_0)$. Решения пробегают значения между режимом с фиксированной точкой, где $G_k = g_*/k^2$, $\Lambda_k = \lambda_* k^2$ и классическим режимом, когда постоянная Ньютона замораживается до постоянного значения. Масштаб k_0 выбран таким, чтобы переход между режимами происходил при $k \approx k_0$.

2.1.3 Формализм составных операторов

Ключевым достоинством формализма составного оператора является то, что он позволяет вычислять аномальную размерность произвольных операторов \mathcal{O} , которые не являются частью анзаца для эффективного действия Γ_k .

Следуя изложению [57], мы объясним основные шаги, ведущие к уравнению

$$\gamma_n \mathcal{O}_n = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \mathcal{O}_n^{(2)} \left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \partial_t \mathcal{R}_k \right] \Big|_{\mathcal{O}}. \quad (2.29)$$

Для начала рассмотрим среднее от оператора \mathcal{O} , построенного на основе регуляризованного производящего функционала с подходящей фиксацией калибровки

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(x) \rangle &\equiv \mathcal{N} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{O}(x) e^{-S[\chi]} \\ &= -\frac{\delta}{\delta \epsilon(x)} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\chi \mathcal{O}(x) e^{-S[\chi] - \epsilon \mathcal{O}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Здесь \mathcal{N} – нормировочный множитель, и мы ввели $\epsilon(x)$ как источник, связанный с новым оператором. Производящий функционал для связанных функций Грина $W[J; \epsilon]$ определяется через

$$e^{W[J; \epsilon]} = \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\chi] + J \cdot \chi - \epsilon \mathcal{O}}. \quad (2.31)$$

Эффективное действие $\Gamma[\varphi; \epsilon]$ зависит от классических полей $\varphi \equiv \frac{\delta W}{\delta J}$ и задается преобразованием Лежандра от $W[J; \epsilon]$

$$\Gamma[\varphi; \epsilon] = J \cdot \varphi - W[J; \epsilon]. \quad (2.32)$$

Поскольку J и φ не зависят от источника ϵ , из этого определения следует

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi; \epsilon]}{\delta \epsilon} = -\frac{\delta W[J; \epsilon]}{\delta \epsilon}. \quad (2.33)$$

Несложно обобщить эту конструкцию на эффективное действие зависящее от масштаба. Включив новый источник ϵ in $\Gamma_k[\varphi; \epsilon]$ и взяв вариацию уравнения Веттериха (2.1) по источнику, мы получаем [57; 115–117]

$$\partial_t \left(\frac{\delta}{\delta \epsilon} \Gamma_k[\varphi; \epsilon] \right) \Big|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \frac{\delta \Gamma_k^{(2)}}{\delta \epsilon} \left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \partial_t \mathcal{R}_k \right] \Big|_{\epsilon=0}. \quad (2.34)$$

Таким образом, масштабная зависимость оператора \mathcal{O} определяется вставкой оператора $\mathcal{O}^{(2)}$ в след в правой части уравнения Веттериха.

Теперь мы перепишем (2.34) в более практичной форме, введя набор k -зависимых операторов $[\mathcal{O}_k]_i$, $i = 1, \dots, N$, которые мы связываем с эффективным действием

$$[\mathcal{O}_k]_i = \frac{\delta}{\delta \epsilon_i} \Gamma_k[\varphi; \epsilon_1, \dots, \epsilon_N] \Big|_{\epsilon=0}. \quad (2.35)$$

Тогда удобно выразить зависящий от масштаба оператор $[\mathcal{O}_k]_i$ через k -независимый базис

$$[\mathcal{O}_k]_i = \sum_{j=1}^N Z_{ij}(k) \mathcal{O}_j. \quad (2.36)$$

Здесь матрица $Z_{ij}(k)$ напоминает перенормировку волновой функции, связанную с операторами \mathcal{O}_j . Поэтому предлагается определить (матричнозначную) аномальную размерность множества операторов следующим образом

$$\gamma_{ij} \equiv (Z^{-1} \partial_t Z)_{ij}. \quad (2.37)$$

Подставляя соотношение (2.35) вместе с определениями, данными в уравнениях (2.36) и (2.37) в (2.34), получаем следующее уравнение для аномальных размерностей γ_{ij} :

$$\sum_{j=1}^N \gamma_{ij} \mathcal{O}_j = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \mathcal{O}_i^{(2)} \left(\Gamma_k^{(2)} + \mathcal{R}_k \right)^{-1} \partial_t \mathcal{R}_k \right] \Big|_{\mathcal{O}}. \quad (2.38)$$

Ограничивая набор $\{\mathcal{O}_i\}$ одним оператором \mathcal{O} , это соотношение упрощается до основного уравнения (2.29).

2.2 Аномальная масштабная размерность геометрических операторов

В этом разделе мы используем уравнение для составных операторов (2.29) для вычисления аномальных размерностей γ_n , связанных с геометрическими операторами (2). Наш основной результат получен в подразделе 2.2.1.

2.2.1 Вычисление аномальной размерности γ_n

Цель этого подраздела – посчитать (2.29) для класса геометрических операторов, заданных (2). Пропагаторы взяты в приближении Эйнштейна-Гильберта и приведены в формуле (2.14).

Начнем с разложения \mathcal{O}_n по флуктуациям на фоне (2.10). Член, квадратичный по $h_{\mu\nu}$, равен

$$\begin{aligned} \delta^2 \mathcal{O}_n = & \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{R}^{n-2} \left[\hat{h}_{\mu\nu} \left[-\frac{n}{2} \Delta \bar{R} + \left(n \frac{d-2}{d(d-1)} - \frac{1}{2} \right) \bar{R}^2 \right] \hat{h}^{\mu\nu} \right. \\ & - \hat{h}_{\mu\nu} \left[n \bar{R} \delta_\alpha^\mu \bar{D}^\nu \bar{D}_\beta - n(n-1) \bar{D}^\mu \bar{D}^\nu \bar{D}_\alpha \bar{D}_\beta \right] \hat{h}^{\alpha\beta} \\ & + h \left[n(n-1) \frac{(d-1)^2}{d^2} \Delta^2 + n \frac{d^2 - (4n-1)d + 4n-2}{2d^2} \bar{R} \Delta + \left(\frac{d-2}{4d} - \frac{n(d-n-1)}{d^2} \right) \bar{R}^2 \right] h \\ & \left. + h \left[\left(n \frac{d-2n}{d} \bar{R} + 2n(n-1) \frac{d-1}{d} \Delta \right) \bar{D}_\mu \bar{D}_\nu \right] \hat{h}^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Поскольку гравитационные пропагаторы и регуляторы диагональны после того, как $h_{\mu\nu}$ разложено на бесследовую и следовую части, недиагональный член, содержащий h и $\hat{h}_{\mu\nu}$, не внесит вклад в аномальную размерность. Таким образом, два необходимых матричных элемента $\mathcal{O}_n^{(2)}$ равны

$$\mathcal{O}_n^{(2)} \Big|_{hh} = c_0^S \bar{R}^n + c_1^S \Delta \bar{R}^{n-1} + c_2^S \Delta^2 \bar{R}^{n-2}, \quad (2.40)$$

$$\left[\mathcal{O}_n^{(2)} \Big|_{\widehat{hh}} \right]^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \left[c_0^T \bar{R}^n + c_1^T \Delta \bar{R}^{n-1} \right] [\mathbb{1}_T]^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + \left[\mathcal{O}_n^{(2),\text{nm}} \Big|_{\widehat{hh}} \right]^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \quad (2.41)$$

с неминимальной (nm) -частью в тензорном секторе равной

$$\left[\mathcal{O}_n^{(2),\text{nm}} \Big|_{\widehat{hh}} \right]^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = -n \bar{R}^{n-1} \delta_{(\alpha}^{(\mu} \bar{D}^{\nu)} \bar{D}_{\beta)} + n(n-1) \bar{R}^{n-2} \bar{D}^{(\mu} \bar{D}^{\nu)} \bar{D}_{(\alpha} \bar{D}_{\beta)}. \quad (2.42)$$

где

$$[\mathbb{1}_T]^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} \left[\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu \right] - \frac{1}{d} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\alpha\beta} \quad (2.43)$$

обозначает единицу в пространстве бесследовых симметричных матриц, а симметризация задана как $(\alpha\beta) = (\alpha\beta + \beta\alpha)/2$. Коэффициенты $c_i^S(d, n)$ и $c_i^T(d, n)$

равны

$$\begin{aligned} c_0^T &= \frac{n(d-2)}{d(d-1)} - \frac{1}{2}, & c_1^T &= -\frac{n}{2}, \\ c_0^S &= \frac{d-2}{4d} - \frac{n(d-n-1)}{d^2}, & c_1^S &= \frac{n}{2d^2} (d^2 - (4n-1)d + 4n - 2), \\ c_2^S &= \frac{(d-1)^2}{d^2} n(n-1). \end{aligned} \quad (2.44)$$

На этом этапе доступны все ингредиенты для построения (2.29) для геометрических операторов (2). Блочнo-диагональная форма регулятора \mathcal{R}_k , (2.16), означает, что полный след распадается на сумму скалярного и тензорного вкладов

$$\gamma_n \mathcal{O}_n = -\frac{1}{2} \left(\text{Tr}_T \left[\mathcal{O}_n^{(2)} \Big|_{\widehat{hh}} W_T(\Delta) \right] + \text{Tr}_S \left[\mathcal{O}_n^{(2)} \Big|_{hh} W_S(\Delta) \right] \right) \Big|_{\mathcal{O}_n}. \quad (2.45)$$

Операторнозначные функции $W^T(\Delta)$ и $W^S(\Delta)$ являются функциями Лапласиана и содержат пропагаторы и регуляторы соответствующих секторов

$$\begin{aligned} W_T(\Delta) &\equiv \left[\Gamma_k^{(2)} \Big|_{\widehat{hh}} + \mathcal{R}_k \Big|_{\widehat{hh}} \right]^{-2} \partial_t \mathcal{R}_k \Big|_{\widehat{hh}}, \\ W_S(\Delta) &\equiv \left[\Gamma_k^{(2)} \Big|_{hh} + \mathcal{R}_k \Big|_{hh} \right]^{-2} \partial_t \mathcal{R}_k \Big|_{hh}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Их явные выражения получаются подстановкой пропагаторов (2.14) и регуляторов (2.16):

$$\begin{aligned} W_T(\Delta) &\equiv 32\pi G_k \left[\Delta + R_k - 2\Lambda_k + C_T \bar{R} \right]^{-2} (\partial_t R_k - \eta_N R_k), \\ W_S(\Delta) &\equiv -32\pi G_k \frac{2d}{d-2} \left[\Delta + R_k - 2\Lambda_k + C_S \bar{R} \right]^{-2} (\partial_t R_k - \eta_N R_k). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Следы (2.45) затем легко вычисляются с использованием разложения ядра теплопроводности в сочетании с методами преобразования Лапласа. Мы предоставляем технические детали этого вычисления в приложении Г.

Из структуры операторных вставок следует, что аномальные размерности γ_n являются полиномами второго порядка по n .

$$\gamma_n = \frac{32\pi g}{(4\pi)^{d/2}} (A_0(\lambda) + A_1(\lambda) n + A_2(\lambda) n^2). \quad (2.48)$$

Коэффициенты A_i зависят от безразмерных констант связи g, λ , а также от размерности пространства-времени d . Их удобно задавать в терминах пороговых функций $q_n^p \equiv q_n^p(-2\lambda)$, определенных в уравнении (2.25):

$$\begin{aligned} A_0(\lambda) &= \frac{1}{4}d(d+1)q_{d/2}^2, \\ A_1(\lambda) &= d_1^0 q_{d/2}^2 + d_1^1 q_{d/2+1}^3 + d_1^2 q_{d/2+2}^4, \\ A_2(\lambda) &= d_2^0 q_{d/2}^2 + d_2^1 q_{d/2+1}^3 + d_2^2 q_{d/2+2}^4. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Коэффициенты, зависящие от d , входящие в $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$:

$$\begin{aligned} d_1^0 &= \frac{30d^6 - 185d^5 - 528d^4 + 2515d^3 - 1500d^2 - 3500d + 2448}{1440d(d-1)(d-2)}, \\ d_1^1 &= -\frac{3d^6 - 19d^5 + 67d^4 - 109d^3 - 94d^2 + 392d - 288}{12d(d-1)(d-2)}, \\ d_1^2 &= -\frac{3}{4} \frac{d^5 - 12d^4 + 29d^3 + 26d^2 - 128d + 96}{d(d-1)(d-2)}, \\ d_2^0 &= \frac{5d^5 - 162d^4 - 355d^3 + 1620d^2 + 2060d - 2448}{1440d(d-1)(d-2)}, \\ d_2^1 &= -\frac{d^5 - 22d^4 + 31d^3 + 190d^2 - 440d + 288}{12d(d-1)(d-2)}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

а $d_2^2 = -d_1^2$. Для $n = 0$ это согласуется с более ранним выводом аномальной масштабной размерности пространственно-временного объема [57].

2.3 Вычисление матрицы аномальных размерностей

Матрица аномальных размерностей имеет следующую треугольную форму

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{02} & \gamma_{03} & \gamma_{04} & \gamma_{05} & \gamma_{06} & \cdots \\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} & \gamma_{15} & \gamma_{16} & \cdots \\ \gamma_{20} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} & \gamma_{25} & \gamma_{26} & \cdots \\ 0 & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} & \gamma_{35} & \gamma_{36} & \cdots \\ 0 & 0 & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} & \gamma_{45} & \gamma_{46} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{53} & \gamma_{54} & \gamma_{55} & \gamma_{56} & \cdots \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

В предыдущем разделе мы использовали диагональное приближение, то есть не учитывали недиагональные элементы матрицы (2.51).

Явное значение элементов матрицы также легко вычисляется с использованием методов ядра теплопроводности, рассмотренных в приложении Г. Мы снова ограничим разложение ядра теплопроводности до порядка R^2 , положив коэффициенты a_n , $n \geq 3$ равными нулю. Для элементов матрицы γ_{nm} это означает, что все элементы на диагонали и ниже (отмечены черным) вычисляются точно, в то время как слагаемые над диагональю (отмечены синим) будут получать дополнительные вклады от более высоких порядков в разложении ядра теплопроводности. В частности, все элементы γ_{nm} with $m \geq n + 3$ генерируются исключительно из разложения слагаемых с кривизной, пропорциональных C_T и C_S , в бесследовых поперечных и скалярных пропагаторах.

Вычисление (2.45) на основе этих приближений приводит к бесконечному семейству производящих функционалов $\Gamma_n(\bar{R})$, $n \geq 0 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_n(\bar{R}) = \frac{16\pi g}{(4\pi)^{d/2}} & \left[c_1^T q_{d/2+1}^2(w_T^{\bar{R}}) \left(\frac{\bar{R}}{k^2}\right)^{-1} + c_2^T q_{d/2}^2(w_T^{\bar{R}}) \right. \\ & + c_3^T q_{d/2-1}^2(w_T^{\bar{R}}) \left(\frac{\bar{R}}{k^2}\right) + c_4^T q_{d/2-2}^2(w_T^{\bar{R}}) \left(\frac{\bar{R}}{k^2}\right)^2 \\ & + c_1^S q_{d/2+2}^2(w_S^{\bar{R}}) \left(\frac{\bar{R}}{k^2}\right)^{-2} + c_2^S q_{d/2+1}^2(w_S^{\bar{R}}) \left(\frac{\bar{R}}{k^2}\right)^{-1} + c_3^S q_{d/2}^2(w_S^{\bar{R}}) \\ & \left. + c_4^S q_{d/2-1}^2(w_S^{\bar{R}}) \left(\frac{\bar{R}}{k^2}\right) + c_5^S q_{d/2-2}^2(w_S^{\bar{R}}) \left(\frac{\bar{R}}{k^2}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Пороговые функции $q_n^p(w)$ определены в уравнении (2.25), а их аргументы в бесследовом и скалярном секторах равны

$$w_T = -2\lambda, \quad w_S \equiv -\frac{d}{d-1}\lambda, \quad w_T^{\bar{R}} = w_T + C_T \bar{R}/k^2, \quad w_S^{\bar{R}} \equiv w_S + C_S \bar{R}/k^2. \quad (2.53)$$

Коэффициенты c_k^i зависят от d и n . В тензорном секторе они имеют вид

$$\begin{aligned} c_1^T &= \frac{1}{2}n d a_0^T, & c_2^T &= \frac{1}{2}n(d-2)a_1^T - \left(\frac{2n(d-2)}{d(d-1)} - 1\right) a_0^T, \\ c_3^T &= \frac{1}{2}n(d-4)a_2^T - \left(\frac{2n(d-2)}{d(d-1)} - 1\right) a_1^T, & c_4^T &= -\left(\frac{2n(d-2)}{d(d-1)} - 1\right) a_2^T. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Их аналоги в скалярном секторе равны

$$\begin{aligned}
c_1^S &= \frac{n(n-1)(d-1)d(d+2)}{2(d-2)} a_0^S, \\
c_2^S &= \frac{1}{2}n(n-1)d(d-1)a_1^S + \frac{nd(d+2-4n)}{2(d-2)} a_0^S, \\
c_3^S &= \frac{1}{2}n(n-1)(d-1)(d-4)a_2^S + \frac{1}{2}n(d+2-4n)a_1^S \\
&\quad + \frac{d^2 - 2d(2n+1) + 4n(n+1)}{2(d-1)(d-2)} a_0^S, \\
c_4^S &= \frac{n(d-4)(d+2-4n)}{2(d-2)} a_2^S + \frac{d^2 - 2d(2n+1) + 4n(n+1)}{2(d-1)(d-2)} a_1^S, \\
c_5^S &= \frac{d^2 - 2d(2n+1) + 4n(n+1)}{2(d-1)(d-2)} a_2^S.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Наконец, a_n^i – это коэффициенты ядра теплопроводности, перечисленные в таблице 3.

Элементы γ генерируются как коэффициенты разложения в ряд Лорана

$$\Gamma_n(\bar{R}) = \sum_{m=-2}^{\infty} \gamma_{n,n+m} \bar{R}^m, \quad n \geq 0, \quad m+n \geq 0. \tag{2.56}$$

Например, две строки записей под диагональю, $\gamma_{n,n-2}, n \geq 2$ и $\gamma_{n,n-1}, n \geq 1$, полученные таким образом равны

$$\begin{aligned}
\gamma_{n,n-2} &= \frac{16\pi g}{(4\pi)^{d/2}} \frac{n(n-1)(d-1)d(d+2)}{2(d-2)} k^4 q_{d/2+2}^2(w_S), \\
\gamma_{n,n-1} &= \frac{16\pi g}{(4\pi)^{d/2}} n d k^2 \left[\frac{1}{4}(d-2)(d+1) q_{d/2+1}^2(w_T) + \frac{1}{12}(n-1)(d-1) q_{d/2+1}^2(w_S) \right. \\
&\quad \left. + \frac{d+2-4n}{2(d-2)} q_{d/2+1}^2(w_S) - \frac{(n-1)(d-4)(d+2)}{2(d-2)} q_{d/2+2}^3(w_S) \right].
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Уравнения (2.52) – (2.56) дают полностью аналитические выражения для всех элементов матрицы аномальной размерности γ .

2.3.1 Спектральные свойства матрицы стабильности

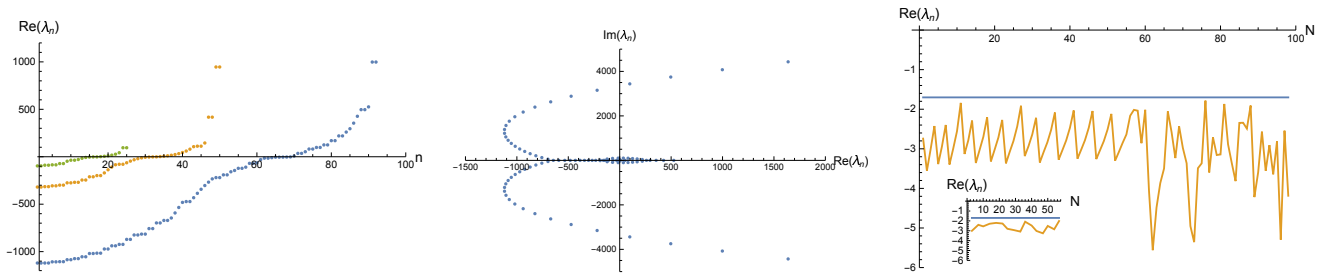


Рисунок 2.2 — $\text{Spec}(\mathbf{B})$ в $d = 4$ измерениях. На левой диаграмме показаны действительные части $\text{Re}(\lambda_n)$ собственных значений, найденных для матриц стабильности размеров $N = 25$ (левая линия, зеленые точки), $N = 50$ (средняя линия, оранжевые точки) и $N = 100$ (правая линия, синие точки). На средней диаграмме показано расположение собственных значений λ_n ($N = 100$) на комплексной плоскости. На правой диаграмме показаны значения первых двух значимых собственных значений в зависимости от размера матрицы N .

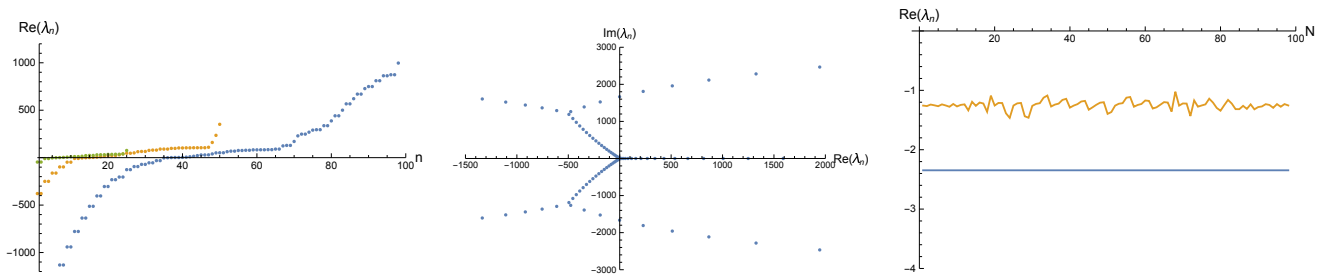


Рисунок 2.3 — $\text{Spec}(\mathbf{B})$ в $d = 3$ измерениях. На левой диаграмме показаны действительные части $\text{Re}(\lambda_n)$ собственных значений, найденных для матриц стабильности размеров $N = 25$ (левая линия, зеленые точки), $N = 50$ (средняя линия, оранжевые точки) и $N = 100$ (правая линия, синие точки). На средней диаграмме показано расположение собственных значений λ_n ($N = 100$) на комплексной плоскости. На правой диаграмме показаны значения первых двух значимых собственных значений в зависимости от размера матрицы N .

Глава 3. Обобщённая унимодулярная гравитация

3.1 Тёмная жидкость и обобщённая унимодулярная инвариантность

Самый простой способ наложить связь

$$N = N(\gamma), \quad \gamma \equiv \det \gamma_{ij}, \quad (3.1)$$

на метрические коэффициенты – это не подставлять её явно в действие Эйнштейна, а включить её в действие с множителем Лагранжа λ

$$S_{GUMG}[g_{\mu\nu}, \lambda] = \int_{[t_-, t_+] \times \Sigma} d^4x \left\{ \frac{M_P^2}{2} g^{1/2} R(g) - \lambda \left((-g^{00})^{-\frac{1}{2}} - N(\gamma) \right) \right\} + S_{GH}, \quad (3.2)$$

где $S_{GH} = S_{\perp} + S_{\parallel}$ – граничные слагаемые типа Гиббонса-Хокинга, которые сокращаются при интегрировании по частям пространственно-временных производных второго порядка из лагранжиана Гильберта-Эйнштейна. Добавление поверхностных членов гарантирует непротиворечивость вариационной процедуры для этого действия. Слагаемые Гиббонса-Хокинга состоят из поверхностных членов S_{\perp} на будущей и прошлой пространственноподобных границах Σ_{\pm} в точках t_{\pm} и поверхностного члена S_{\parallel} на «боковых» времениподобных границах $[t_-, t_+] \times \partial\Sigma$, где $\partial\Sigma$ является границей пространственных сечений Σ .

Варьируя действие по λ и $g_{\mu\nu}$, получаем ограничение (3.1) на метрику и уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{1}{M_P^2} T^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

$$T^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{g^{1/2}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} \int d^4x \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{-g^{00}}} - N(\gamma) \right) = \varepsilon u^{\mu} u^{\nu} + p(g^{\mu\nu} + u^{\mu} u^{\nu}), \quad (3.4)$$

где 4-скорость $u^{\mu} = -g^{\mu 0} N$ – это вектор направленный в будущее и нормальный к пространственноподобным гиперповерхностям АДМ-слоения (4), а плот-

ность энергии и давление имеют вид

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2\sqrt{\gamma}}, \quad p = \frac{\lambda}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{\gamma}{N} \frac{dN}{d\gamma} \right). \quad (3.5)$$

Таким образом, эта тёмная жидкость удовлетворяет уравнению состояния $p = w\varepsilon$ с непостоянным параметром $w = w(\gamma)$, заданным формулой

$$w = 2 \frac{\gamma}{N} \frac{dN}{d\gamma} = 2 \frac{d \ln N}{d \ln \gamma}. \quad (3.6)$$

Как и в унимодулярной гравитации условие обобщённой унимодулярности (3.1) не инвариантно относительно общих диффеоморфизмов метрики – производных Ли относительно 4-мерного векторного поля ξ^μ , которое в (3+1)-разложении можно записать в виде столбца

$$\delta_\xi g^{\mu\nu} = -\nabla^\mu \xi^\nu - \nabla^\nu \xi^\mu, \quad \xi^\mu = \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \xi^i \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Однако это условие остается инвариантным относительно редуцированных диффеоморфизмов подмножества векторных полей ξ^μ , удовлетворяющих уравнению

$$\delta_\xi (N - N(\gamma)) \Big|_{N=N(\gamma)} = N [\partial_t \xi^0 - (1 + w) N^i \partial_i \xi^0 - w \partial_i \xi^i] = 0, \quad (3.8)$$

которое в случае унимодулярной гравитации, $w = -1$, сводится к уравнению на сохраняющие объём диффеоморфизмы $\partial_\mu \xi^\mu = 0$ [80].

С точки зрения динамического содержания теории преобразования инвариантности действия могут рассматриваться как калибровочные (то есть не изменяющие физического состояния системы) только в том случае, если они локальны во времени, а значит, их следует маркировать независимыми калибровочными параметрами и их производными по времени до некоторого конечного порядка. Тогда преобразования инвариантности могут быть наделены конечным носителем на всём временном интервале $[t_-, t_+]$ и должны обращаться в нуль вместе со всеми своими производными по времени при t_\pm , тем самым меняя поля только внутри пространственно-временного интервала. Это означает, что решение уравнения (3.8) для $\xi^\mu(x)$ не должно содержать нелокальности во вре-

мени. По крайней мере наивно, это не относится к нелокальным свойствам этого решения в пространстве – пространственно нелокальную, но локальную во времени систему можно рассматривать как законную систему с калибровочными ограничениями, подлежащую каноническому квантованию [103]. Это означает, что уравнение (3.8) должно быть решено для пространственных компонент ξ^i через его временную компоненту ξ^0 и её производную по времени, но не наоборот. Чтобы получить два решения такого типа, разложим ξ^i на продольную и поперечную части

$$\xi^i = \sqrt{\gamma}(\gamma^{ij}\partial_j\varphi + \xi_{\perp}^i), \quad \partial_i(\sqrt{\gamma}\xi_{\perp}^i) = 0, \quad (3.9)$$

уравнение (3.8) может быть решено относительно φ с помощью пространственно нелокальной функции Грина оператора Лапласа Δ

$$\varphi = \frac{1}{w\Delta}D_t\xi^0, \quad \Delta = \partial_i\gamma^{ij}\sqrt{\gamma}\partial_j, \quad D_t = \partial_t - (1+w)N^i\partial_i. \quad (3.10)$$

Таким образом, одно решение задаётся чисто пространственным трёхмерным поперечным вектором

$$\xi^\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\gamma}\xi_{\perp}^i \end{bmatrix}, \quad \partial_k(\sqrt{\gamma}\xi_{\perp}^k) = 0, \quad (3.11)$$

а второе имеет трёхмерную продольную компоненту, параметризованную ненулевыми ξ^0 и $\dot{\xi}^0$

$$\xi^\mu = \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_j\frac{1}{\Delta}D_t\xi^0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_t = \partial_t - (1+w)N^i\partial_i. \quad (3.12)$$

Здесь возникает важная тонкость, отличающая случай пространственно замкнутых моделей без границы от случая асимптотически плоского пространства-времени или космологий Фридмана с асимптотически плоскими пространственными срезами.

3.1.1 Пространственно замкнутые модели

Замкнутые модели ОУМГ важны для теории космологических возмущений на фоне метрики Фридмана с S^3 -топологией пространственных сечений Σ . Для начала изменим формулировку теорий ОУМГ – введём в формализм своего рода трёхмерную биметрическую ковариантность, введя в условия (3.1) зависимость от вспомогательной пространственной метрики σ_{ij} ,

$$N(\gamma) \rightarrow N(\gamma/\sigma), \quad \sigma = \det \sigma_{ij}. \quad (3.13)$$

Тогда это условие становится скалярным относительно одновременных преобразований координат двух пространственных метрик γ_{ij} и σ_{ij} и позволяет рассматривать модель в произвольной системе координат на Σ . Вспомогательная метрика может быть взята независимой от времени, но, как правило, имеет кривизну и включает пространственные координаты, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x)$, $x = x^i$. Тогда уравнение (3.8) модифицируется простой заменой всех трёхмерных частных производных на ковариантные производные для метрики σ_{ij} ,

$$\partial_i \rightarrow \bar{\nabla}_i, \quad \bar{\nabla}_k \sigma_{ij} = 0, \quad \bar{\nabla}^i = \sigma^{ij} \bar{\nabla}_j. \quad (3.14)$$

То же правило применяется к решениям (3.11) и (3.12), но с последним возникает проблема. Чтобы корректно определить нелокальный продольный вектор

$$\xi_{\parallel}^i = \bar{\nabla}^i \frac{1}{\bar{\Delta}} \frac{\mathcal{D}_t \xi^0}{w}, \quad (3.15)$$

функция $\mathcal{D}_t \xi^0/w$ не должна содержать постоянную нулевую моду ковариантного лапласиана $\bar{\Delta} = \sigma^{ij} \bar{\nabla}_i \bar{\nabla}_j$. На замкнутом компакте Σ этот скалярный лапласиан имеет дискретный спектр с одной постоянной модой, и это условие сводится к

$$\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\sigma} \frac{\dot{\xi}^0 - (1+w)N^k \partial_k \xi^0}{w} = 0. \quad (3.16)$$

Это полностью согласуется с тем фактом, что из ковариантной версии уравнения (3.8) на компактном пространстве без границы следует, что

$$\int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\sigma} \frac{\dot{\xi}^0 - (1+w)N^k \partial_k \xi^0}{w} = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\sigma} \bar{\nabla}_i \xi^i \equiv 0. \quad (3.17)$$

Следовательно, $\xi^0(t, x)$ должна удовлетворять нетривиальному дифференциальному уравнению по времени, так что она не может иметь компактного носителя во временном интервале и не может рассматриваться как локальный калибровочный параметр. Таким образом, на замкнутом компакте ξ^0 -преобразование не является калибровочным преобразованием теории — оно нетривиально изменяет конфигурации поля при t_{\pm} и соответствует изменению физического состояния системы. Только трёхмерные поперечные векторы (3.11) порождают локальные калибровочные преобразования на компактном замкнутом пространстве.

3.1.2 Асимптотически плоские модели

В асимптотически плоских моделях механизм нарушения калибровочной инвариантности относительно ξ^0 -преобразований иной. В этом случае наиболее естественным выбором вспомогательной метрики является $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$, лапласиан плоского пространства имеет непрерывный спектр и ядро его функции Грина

$$\frac{1}{\Delta} \delta(x-y) = -\frac{1}{4\pi |x-y|} \sim \frac{1}{|x|}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

порождает на пространственной бесконечности разложение для ξ_{\parallel}^i в (3.15), начиная с

$$\xi_{\parallel}^i(x) \sim \frac{1}{|x|^2}. \quad (3.19)$$

В отличие от случая замкнутого пространства, для существования этого разложения не требуется никаких уравнений, наложенных на ξ^0 , за исключением требования сходимости интеграла от свёртки ядра функции Грина и $\mathcal{D}_t \xi^0(y)$. Этого можно добиться, наложив условие убывания на бесконечности $\mathcal{D}_t \xi^0(y) \sim 1/|y|^3$, которое, очевидно, выполнено, если $\xi^0(x)$ имеет компактный носитель. Однако,

в отличие от $\xi^0(x)$, $\xi_{\parallel}^i(x)$ убывает на бесконечности медленно, так что поверхностный интеграл по границе пространства-времени оказывается конечным и ненулевым,

$$\int dt \int_{|x| \rightarrow \infty} d^2 \Sigma_i(x) \xi_{\parallel}^i(x) \neq 0. \quad (3.20)$$

Таким образом, ξ^0 -преобразование также не принадлежит локальным калибровочным симметриям теории ОУМГ.

3.2 Линеаризованная теория

В этой главе мы рассмотрим как калибровочная неинвариантность действия относительно ξ^0 -преобразования реализуется на уровне квадратичного действия теории.

Линеаризацию теории удобно проводить с помощью АДМ-разложения четырёхмерной метрики $g_{\mu\nu}$ на функцию хода N , вектор сдвига N^i и пространственную метрику γ_{ij} .

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (N_i N^i - N^2) dt^2 + 2N_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.21)$$

где $x^\mu = (t, x^i)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$. Пространственные индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики γ_{ij} , т.е. $N^i = \gamma^{ij} N_j$. В новых переменных действие (3.2) запишется в следующем виде

$$S_{GUMG}[\gamma_{ij}, N^i] = \int_{t_-}^{t_+} dt \int_{\Sigma} d^3 x N \sqrt{\gamma} ({}^3R + K_{ij}^2 - K^2) \Big|_{N=N(\gamma)} + S_{\pm}, \quad (3.22)$$

где 3R – это скаляр кривизны от метрики γ_{ij} , внешняя кривизна и её след заданы следующим образом

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\nabla_i N_j + \nabla_j N_i - \dot{\gamma}_{ij}), \quad K = \gamma^{ij} K_{ij}, \quad (3.23)$$

где ковариантные производные ∇_i определены относительно метрики γ_{ij} .

Рассмотрим действие (3.22) в линеаризованном приближении на фоне однородной метрики Фрийдмана положительной или нулевой пространственной кривизны, $k = +1$ или $k = 0$ соответственно. В этих случаях метрика и кривизна выражаются через масштабный фактор $a(t)$ и метрику σ_{ij} трёхмерной сферы единичного радиуса или плоскую метрику

$$\gamma_{ij} = a^2(t)\sigma_{ij}(x), \quad N = N(a), \quad N^i = 0, \quad {}^3R = \frac{6}{a^2}k, \quad (3.24)$$

$$K_{ij} = -\frac{a\dot{a}}{N}\sigma_{ij}, \quad H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.25)$$

где H обозначает параметр Хаббла для фона Фрийдмана. Уравнения движения для этого фона имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} = \sqrt{\sigma} \frac{a^3}{N} \left[2\dot{H} + 3(1-w)H^2 + (1+3w)\frac{N^2}{a^2}k \right] \sigma^{ij} = 0, \quad (3.26)$$

$$\frac{\delta S}{\delta N^i} \equiv 0, \quad (3.27)$$

Можно проверить, что первое уравнение имеет интеграл движения

$$3Na^3 \left(\frac{H^2}{N^2} + \frac{1}{a^2} \right) = C \quad (3.28)$$

для некоторой ненулевой константы C .

3.2.1 Действие линеаризованной теории и её свойства калибровочной инвариантности

Теперь разложим действие ОУМГ (3.22) до второго порядка по возмущениям γ_{ij} и N^i , которые обозначим следующим образом

$$\delta\gamma_{ij} = a^2 s_{ij}, \quad \delta N^i = S^i, \quad \delta N = NA, \quad \delta^2 N = \frac{1}{4}wN[(\Omega - 1)s^2 - 2s_{ij}^2], \quad (3.29)$$

вместе с вариациями первого и второго порядка $N(\gamma)$ – функции возмущенной 3-метрики. Ω задаётся выражением

$$\Omega = 1 + w + 2\frac{d \ln w}{d \ln \gamma}, \quad (3.30)$$

в силу того, что $\delta N = wNs/2$ получаем соотношения

$$A = \frac{1}{2} w s, \quad s = \sigma^{ij} s_{ij}, \quad s_{ij}^2 \equiv \sigma^{im} \sigma^{jn} s_{ij} s_{mn}, \quad (3.31)$$

и здесь и далее все пространственные индексы поднимаются и опускаются с помощью метрики σ_{ij} . В результате вторая вариация действия имеет вид

$$\frac{1}{2} \delta^2 S_{GUMG} = S_{(2)} + \int dt d^3x \frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{\sigma} \frac{a^3 H}{N} \left(s_{ij} - \frac{1}{2} s^2 \right) \right\}. \quad (3.32)$$

Первое слагаемое задано как

$$\begin{aligned} S_{(2)} = & \int dt d^3x \sqrt{\sigma} a^3 \left\{ \frac{1}{N} \left(\nabla_{(i} S_{j)} - \frac{\dot{s}_{ij}}{2} \right)^2 - \frac{1}{N} \left(\nabla_k S^k - \frac{\dot{s}}{2} \right)^2 \right. \\ & + \frac{1}{4} \frac{N}{a^2} \left(2 \nabla^k s^{ij} \nabla_i s_{jk} - \nabla^k s^{ij} \nabla_k s_{ij} - 2 \nabla_i s^{ij} \nabla_j s + \nabla^i s \nabla_i s \right) \\ & - \frac{6}{N} H^2 A^2 - \frac{4H}{N} \left(\nabla_k S^k - \frac{\dot{s}}{2} \right) A + \frac{N}{a^2} k \left(s_{ij}^2 - \frac{1}{2} s^2 \right) \\ & \left. - 2 \frac{N}{a^2} k s A - \frac{N}{a^2} (\nabla^j s_{ij} - \nabla^i s) \nabla_i A + \frac{1}{4a^3} C w \Omega s^2 \right\}, \quad (3.33) \end{aligned}$$

где все ковариантные производные определены по метрике σ_{ij} . Можно проверить, что все члены, кроме последнего, совпадают с квадратичной частью действия Эйнштейна на фоне Фридмана [118]. Последнее слагаемое является модификацией обобщённой унимодулярной гравитации, которое обращается в нуль при $C = 0$ (ветвь ОТО модели) и при $w = -1$, когда $\Omega = 0$, что соответствует унимодулярной гравитации.

Сделаем замечание о пространственных поверхностных слагаемых в (3.33). Пространственные производные здесь организованы так, что вариационный принцип непротиворечив относительно фиксированной метрики времениподобной границы (в $S_{(2)}$ входят только квадраты первых производных и отсутствуют вторые производные). С другой стороны, для пространственно замкнутой модели ($k = 1$) эта проблема неактуальна, как и для асимптотически плоского пространства, поскольку условие спада метрических возмущений в квадратичных слагаемых делает все поверхностные члены, возникающие в результате интегрирования по частям, обращаемыми в нуль на бесконечности.¹

¹Эти члены важны в линейном порядке действия в метрических возмущениях и они отвечают за энергию АДМ [119].

Как обычно в линеаризованной теории на фоновом поле, калибровочные преобразования полей возмущений определяются как часть преобразований нулевого порядка по возмущениям (их перекрёстные члены с ξ^μ принадлежат следующему порядку теории возмущений). Поэтому эти преобразования имеют вид

$$\delta^\xi s_{ij} = 2H\sigma_{ij}\xi^0 + \nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i, \quad (3.34)$$

$$\delta^\xi S^k = -\frac{N^2}{a^2}\nabla^k\xi^0 + \dot{\xi}^k, \quad \xi_i = \sigma_{ij}\xi^j, \quad \nabla^i = \sigma^{ij}\nabla_j, \quad (3.35)$$

и для векторов ξ^μ , удовлетворяющих условию ОУМГ (3.1), они, конечно, воспроизводят общерелятивистский закон преобразования для $A = ws/2$, $\delta^\xi A = \partial_t(N\xi^0)/N$. При этих преобразованиях квадратичная часть действия ОУМГ преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \delta^\xi S_{(2)} = & \int dt \int_{\partial\Sigma} d^2\Sigma_i \sqrt{\sigma} Na \left[2 (S_j \nabla^i \nabla^j - S^i (\Delta + 2k)) \xi^0 + (s^{ij} - \dot{s} \nabla^i) \xi^0 \right. \\ & \left. + 4H A \nabla^i \xi^0 + s^{jk} \nabla^i \xi_k - s^{ij} \Delta \xi_j - 4k A \xi^i - \frac{2C}{Na} (1+w) S^i \xi^0 \right] \\ & + \int d^3x \sqrt{\sigma} Na \left[(-\nabla_j s^{ij} \nabla_i + \nabla^i s \nabla_i - 2ks) \xi^0 + \frac{C}{Na} (1+w) s \xi^0 \right] \Big|_{t_-}^{t_+} \\ & + 2C \int dt d^3x \sqrt{\sigma} \left[\frac{d \ln w}{d \ln \gamma} s \xi^0 + (1+w) S^i \nabla_i \xi^0 \right], \quad (3.36) \end{aligned}$$

где мы аккуратно учли все поверхностные члены, возникающие при интегрировании по частям.

Как и ожидалось, это выражение для общерелятивистского случая $C = 0$ сводится к поверхностному интегралу и обращается в нуль при ξ^μ с компактным носителем внутри пространственно-временной области, что является случаем теории, инвариантной относительно локальных калибровочных преобразований. В теории ОУМГ есть дополнительные слагаемые, включающие интегралы по объёму пространства-времени. Это странно, потому что калибровочные преобразования теории ОУМГ по модулю асимптотического поведения на границах пространства-времени являются просто подклассом калибровочных преобразований общей теории относительности, так что различие в калибровочном преобразовании действия может быть только типа граничных членов. Действительно оказывается, что этот дополнительный пространственно-времен-

ной интеграл сводится к поверхностному интегралу на времениподобных и пространственноподобных границах.

Чтобы убедиться в этом, разложим в ряд теории возмущений точное уравнение (3.8) для ξ^μ и получим соотношение

$$w \nabla_i \xi_{(1)}^i = - \left[\frac{d \ln w}{d \ln \gamma} s \dot{\xi}_{(0)}^0 + (1 + w) S^i \nabla_i \xi_{(0)}^0 \right] + \dot{\xi}_{(1)}^0 \quad (3.37)$$

где $\xi_{(1)}^i = \delta \xi^i$ и $\xi_{(1)}^0 = \delta \xi^0$ — возмущения первого порядка ξ^μ при вариациях метрики и функций сдвига на фридмановском фоне (3.24), и мы учли, что фоновое значение w не зависит от пространственных координат. Следовательно, последний интеграл по пространству-времени в (3.36) также становится поверхностным членом

$$\begin{aligned} 2C \int dt d^3x \sqrt{\sigma} \left[\frac{d \ln w}{d \ln \gamma} s \dot{\xi}^0 + (1 + w) S^i \nabla_i \xi^0 \right] \\ = 2C \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\sigma} \xi_{(1)}^0 \Big|_{t_-}^{t_+} - 2C \int dt w \int_{\partial \Sigma} d^2 \Sigma_i \xi_{(1)}^i. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Как мы покажем далее, из этого соотношения следует, что как для замкнутых компактных, так и для открытых асимптотически фридмановских моделей действие не инвариантно относительно ξ^0 -преобразования.

Действительно, для закрытых моделей времениподобные поверхностные интегралы отсутствуют, но ξ^0 не может быть независимой полевой переменной с компактным носителем, поскольку она должна удовлетворять уравнению (3.8), которое нетривиально зависит от полей. При разложении по степеням метрических возмущений $\xi^\mu = \sum_n \xi_{(n)}^\mu$ из этого уравнения следует, что пространственно постоянная мода низшего порядка $\xi_{(0)}^0$ не зависит от времени, $\int d^3x \sqrt{\sigma} \dot{\xi}_{(0)}^0 = 0$, другие гармоники $\xi_{(0)}^0$ произвольны и допускают компактный носитель по времени. С другой стороны, та же мода $\xi_{(1)}^0$ сильно ограничена дифференциальным уравнением по времени

$$\int d^3x \sqrt{\sigma} \left[\dot{\xi}_{(1)}^0 - \frac{d \ln w}{d \ln \gamma} s \dot{\xi}_{(0)}^0 - (1 + w) S^k \nabla_k \xi_{(0)}^0 \right] = 0, \quad (3.39)$$

так что $\xi_{(1)}^0$ не может иметь компактного носителя. В частности, $\xi_{(1)}^0(t_{\pm}) \neq 0$ и калибровочное преобразование (3.36) отлично от нуля ввиду первого члена

уравнения (3.38). Остальные слагаемые исчезают, так как они уже содержат одну степень поля возмущения, так что фактор ξ^0 должен включать только ведущую часть $\xi_{(0)}^0$, имеющую компактный носитель во времени. Таким образом, действие замкнутой модели инвариантно только относительно поперечных пространственных диффеоморфизмов с векторами $\xi^\mu = (0, \xi_\perp^i)$, имеющих компактный носитель во времени.

В случае открытых моделей с асимптотически плоскими пространственными сечениями ξ^0 можно считать независимым от поля, поскольку интеграл уравнения (3.37) больше не ограничивает выбор ξ^0 , а соотношение, определяющее поток вектора $\xi_{(1)}^i$ через удаленную пространственную границу, $\int_\infty d^2 \Sigma_i \xi_{(1)}^i$. Следовательно, ξ^0 может иметь компактный носитель во времени, и все пространственноподобные интегралы при t_\pm в (3.36) и (3.38) равны нулю. Однако $\xi_{(1)}^i(x) \sim 1/|x|^2$, $|x| \rightarrow \infty$ и этот "боковой" поверхностный поток вида (3.20), порожденный последним членом (3.38), не равен нулю. Обращаем внимание, что это также единственный член, который нарушает калибровочную инвариантность действия, потому что другие «боковые» поверхностные интегралы равны нулю в силу условий спада для $s_{ij}(x)$, $S^i(x)$, $\xi^\mu(x)$.

Таким образом, как в закрытом, так и в открытом случае ξ^0 -преобразование действия задается неисчезающим трёхмерным интегралом по полной границе пространства-времени (3.38)

$$\delta^\xi S_{(2)} = 2C \int_{\partial(4M)} d^3 \Sigma_\mu \Xi_{(1)}^\mu, \quad 4M = [t_-, t_+] \times {}^3\Sigma, \quad \Xi_{(1)}^\mu = (\xi_{(1)}^0, -w \xi_{(1)}^i), \quad (3.40)$$

с нулевой времениподобной или "боковой" частью в случае закрытой модели и нулевой пространственноподобной частью, $\Xi_{(1)}^0 = 0$, для асимптотически плоской модели. Действие ОУМГ калибровочно инвариантно только относительно двух пространственных диффеоморфизмов с поперечным 3-вектором, имеющим компактный носитель как в пространстве, так и во времени. Отметим, что теория УМГ с $w = -1$ является исключением из этого правила даже при $C \neq 0$, поскольку уравнение (3.1) в этом случае не зависит от поля и $\xi_{(1)}^\mu = 0$.

Заключение

Перечислим основные результаты диссертационной работы:

1. $(3+1)$ -мерная проектируемая гравитация Хоравы – это один из первых примеров унитарной и перенормируемой теории гравитации. В этой модели были получены бета функции всех существенных констант связи. Выполнение этой задачи выполнялось в два этапа – с помощью трёхмерной редукции на статическом фоне задача взятия полного следа была сведена к вычислению квадратного корня из пространственной части оператора квадратичных возмущений для лагранжиана Хоравы. Далее, было вычислено большое количество универсальных функциональных следов до третьего порядка по кривизне включительно. Основная часть вычислений проводилась на компьютере в пакете *xAct* для *Mathematica*.
2. На сферическом фоне с помощью метода спектральных сумм и регуляризации с помощью дзета-функции была получена калибровочная зависимость бета функций констант из потенциала $(3+1)$ -мерной проектируемой гравитации Хоравы. Эта зависимость имеет поразительно простой характер.
3. Было найдено 5 фиксированных точек полного ренормгруппового потока. А также 8 фиксированных точек для предельного случая $\lambda \rightarrow \infty$. Далее, стоит нарисовать проекции потока ренормгруппы для этих двух случаев и исследовать свойства всех фиксированных точек.
4. В рамках формализма составных операторов для гипотезы асимптотического благополучия были посчитаны аномальные размерности для бесконечного семейства операторов, заданных интегралом от скаляра кривизны в целой степени n . Ответ был дан для произвольной точки плоскости (g, λ) , а не только в окрестности фиксированной точки. Было использовано два приближения – диагональное и полное недиагональное. В последнем приближении все коэффициенты ДеВитта с $n \geq 3$ были положены равными нулю. Это соответствует так называемому парамагнитному приближению. В качестве продолжения работы было бы интересно провести вычисление, учтя все коэффициенты ДеВитта.

5. Был исследован лагранжев формализм в обобщённой унимодулярной гравитации. Интересным свойством этой теории является тот факт, что параметр калибровочных преобразований подчиняется дифференциальному уравнению, содержащему производные по времени. У решения этого уравнения не может быть компактного носителя во временном интервале. Поэтому при наложении одного дифференциального условия на четыре калибровочных параметра, мы получаем две, а не три калибровочные симметрии. Также было показано как возникает калибровочная неинвариантность относительно преобразования с некомпактным носителем по времени на уровне квадратичного действия.

С точки зрения автора, дальнейшее продвижение в $(3+1)$ -мерной проектируемой гравитации Хоравы может быть сделано путём исследования её ренормгруппового потока. Особое внимание стоит уделить траекториям вытекающим из асимптотически свободных точек из таблицы 2. Так как стартуя только из этих точек в ультрафиолете можно притечь в инфракрасии в область, где кинетическое слагаемое имеет вид как и в общей теории относительности.

Благодарности. Я хотел бы выразить признательность и благодарность моему научному руководителю, Андрею Олеговичу Барвинскому, а также Франку Заурессигу и Сергею Михайловичу Сибирякову за возможность работы над интересными проектами, их советы и консультации, без которых была бы невозможная данная работа. Отдельно выражаю благодарность Никите Михайловичу Колганову за совместную работу над разными частями проекта по обобщённой унимодулярной гравитации.

Список литературы

1. *Stelle K. S.* Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity // *Phys. Rev.* — 1977. — т. D16. — с. 953–969. — DOI: [10.1103/PhysRevD.16.953](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.16.953).
2. *Fradkin E. S., Tseytlin A. A.* Renormalizable Asymptotically Free Quantum Theory of Gravity // *Phys. Lett.* — 1981. — т. 104B. — с. 377–381. — DOI: [10.1016/0370-2693\(81\)90702-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90702-4).
3. *Avramidi I. G., Barvinsky A. O.* ASYMPTOTIC FREEDOM IN HIGHER DERIVATIVE QUANTUM GRAVITY // *Phys. Lett.* — 1985. — т. 159B. — с. 269–274. — DOI: [10.1016/0370-2693\(85\)90248-5](https://doi.org/10.1016/0370-2693(85)90248-5).
4. *Hořava P.* Quantum Gravity at a Lifshitz Point // *Phys. Rev.* — 2009. — т. D79. — с. 084008. — DOI: [10.1103/PhysRevD.79.084008](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.79.084008). — arXiv: [0901.3775](https://arxiv.org/abs/0901.3775) [[hep-th](#)].
5. *Mukohyama S.* Horava-Lifshitz Cosmology: A Review // *Class. Quant. Grav.* — 2010. — т. 27. — с. 223101. — DOI: [10.1088/0264-9381/27/22/223101](https://doi.org/10.1088/0264-9381/27/22/223101). — arXiv: [1007.5199](https://arxiv.org/abs/1007.5199) [[hep-th](#)].
6. *Sotiriou T. P.* Horava-Lifshitz gravity: a status report // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2011. — т. 283. — с. 012034. — DOI: [10.1088/1742-6596/283/1/012034](https://doi.org/10.1088/1742-6596/283/1/012034). — arXiv: [1010.3218](https://arxiv.org/abs/1010.3218) [[hep-th](#)].
7. *Blas D., Pujolas O., Sibiryakov S.* Models of non-relativistic quantum gravity: The Good, the bad and the healthy // *JHEP.* — 2011. — т. 04. — с. 018. — DOI: [10.1007/JHEP04\(2011\)018](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2011)018). — arXiv: [1007.3503](https://arxiv.org/abs/1007.3503) [[hep-th](#)].
8. *Wang A.* Horava gravity at a Lifshitz point: A progress report // *Int. J. Mod. Phys.* — 2017. — т. D26, № 07. — с. 1730014. — DOI: [10.1142/S0218271817300142](https://doi.org/10.1142/S0218271817300142). — arXiv: [1701.06087](https://arxiv.org/abs/1701.06087) [[gr-qc](#)].
9. *Blas D.* Horava gravity: motivation and status // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2018. — т. 952, № 1. — с. 012002. — DOI: [10.1088/1742-6596/952/1/012002](https://doi.org/10.1088/1742-6596/952/1/012002).
10. *Blas D., Pujolas O., Sibiryakov S.* Consistent Extension of Horava Gravity // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — т. 104. — с. 181302. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.104.181302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.181302). — arXiv: [0909.3525](https://arxiv.org/abs/0909.3525) [[hep-th](#)].

11. *Kimpton I., Padilla A.* Matter in Horava-Lifshitz gravity // JHEP. — 2013. — т. 04. — с. 133. — DOI: [10.1007/JHEP04\(2013\)133](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2013)133). — arXiv: [1301.6950](https://arxiv.org/abs/1301.6950) [[hep-th](#)].
12. *Blas D., Pujolas O., Sibiryakov S.* On the Extra Mode and Inconsistency of Horava Gravity // JHEP. — 2009. — т. 10. — с. 029. — DOI: [10.1088/1126-6708/2009/10/029](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/10/029). — arXiv: [0906.3046](https://arxiv.org/abs/0906.3046) [[hep-th](#)].
13. *Blas D., Lim E.* Phenomenology of theories of gravity without Lorentz invariance: the preferred frame case // Int. J. Mod. Phys. — 2015. — т. D23. — с. 1443009. — DOI: [10.1142/S0218271814430093](https://doi.org/10.1142/S0218271814430093). — arXiv: [1412.4828](https://arxiv.org/abs/1412.4828) [[gr-qc](#)].
14. *Liberati S.* Tests of Lorentz invariance: a 2013 update // Class. Quant. Grav. — 2013. — т. 30. — с. 133001. — DOI: [10.1088/0264-9381/30/13/133001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/30/13/133001). — arXiv: [1304.5795](https://arxiv.org/abs/1304.5795) [[gr-qc](#)].
15. Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A / B. P. Abbott [и др.] // Astrophys. J. — 2017. — т. 848, № 2. — с. L13. — DOI: [10.3847/2041-8213/aa920c](https://doi.org/10.3847/2041-8213/aa920c). — arXiv: [1710.05834](https://arxiv.org/abs/1710.05834) [[astro-ph.HE](#)].
16. *Emir Gümrükçüoğlu A., Saravani M., Sotiriou T. P.* Hořava gravity after GW170817 // Phys. Rev. — 2018. — т. D97, № 2. — с. 024032. — DOI: [10.1103/PhysRevD.97.024032](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.024032). — arXiv: [1711.08845](https://arxiv.org/abs/1711.08845) [[gr-qc](#)].
17. *Bellorin J., Borquez C., Droguett B.* Cancellation of divergences in the nonprojectable Horava theory // Phys.Rev.D. — 2022. — т. 106. — с. 044055. — DOI: [10.1103/PhysRevD.106.044055](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.044055). — arXiv: [2207.08938](https://arxiv.org/abs/2207.08938) [[hep-th](#)].
18. Renormalization of Horava gravity / A. O. Barvinsky [и др.] // Phys. Rev. — 2016. — т. D93, № 6. — с. 064022. — DOI: [10.1103/PhysRevD.93.064022](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.064022). — arXiv: [1512.02250](https://arxiv.org/abs/1512.02250) [[hep-th](#)].
19. *Schwinger J. S.* On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. / под ред. К. А. Milton. — 1951. — т. 82. — с. 664—679. — DOI: [10.1103/PhysRev.82.664](https://doi.org/10.1103/PhysRev.82.664).
20. *DeWitt B. S.* Dynamical theory of groups and fields. — New York : Gordon, Breach, 1965.

21. *DeWitt B. S.* The global approach to quantum field theory. Vol. 1, 2. — NY : Oxford U. Press, 2003.
22. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* The Generalized Schwinger-Dewitt Technique in Gauge Theories and Quantum Gravity // Phys. Rept. — 1985. — т. 119. — с. 1—74. — DOI: [10.1016/0370-1573\(85\)90148-6](https://doi.org/10.1016/0370-1573(85)90148-6).
23. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* The effective action in quantum field theory: Two-loop approximation // Quantum Field Theory and Quantum Statistics. т. 1 / под ред. I. Batalin, C. J. Isham, G. A. Vilkovisky. — Bristol : Hilger, 1987. — с. 245.
24. *Barvinsky A.* Heat kernel expansion in the background field formalism // Scholarpedia. — 2015. — т. 10, № 6. — с. 31644. — DOI: [10.4249/scholarpedia.31644](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.31644).
25. *Pronin P., K.Stepanyantz.* One loop counterterms for higher derivative regularized Lagrangians // Phys.Lett.B. — 1997. — т. 414. — с. 117—122. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(97\)01147-7](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(97)01147-7). — arXiv: [9707008](https://arxiv.org/abs/9707008) [[hep-th](#)].
26. *Gilkey P. B.* Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem. — Wilmington, DE, USA : Publish or Perish, 1984.
27. *Avramidi I. G.* Heat kernel and quantum gravity. т. 64. — New York : Springer, 2000. — ISBN 978-3-540-67155-8.
28. *Vassilevich D. V.* Heat kernel expansion: User's manual // Phys. Rept. — 2003. — т. 388. — с. 279—360. — DOI: [10.1016/j.physrep.2003.09.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2003.09.002). — arXiv: [hep-th/0306138](https://arxiv.org/abs/hep-th/0306138).
29. *'t Hooft G., Veltman M. J. G.* One loop divergencies in the theory of gravitation // Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A. — 1974. — т. 20. — с. 69—94.
30. *Gibbons G. W.* Quantum Field Theory In Curved Space-time // General Relativity: An Einstein Centenary Survey / под ред. S. W. Hawking, W. Israel. — Cambridge : Cambridge University Press, 04.1979. — с. 639—679.
31. *Nesterov D., Solodukhin S. N.* Gravitational effective action and entanglement entropy in UV modified theories with and without Lorentz symmetry // Nucl. Phys. B. — 2011. — т. 842. — с. 141—171. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2010.08.006](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2010.08.006). — arXiv: [1007.1246](https://arxiv.org/abs/1007.1246) [[hep-th](#)].

32. *D’Odorico G., Saueressig F., Schutten M.* Asymptotic Freedom in Hořava-Lifshitz Gravity // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — т. 113, № 17. — с. 171101. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.113.171101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.171101). — arXiv: [1406.4366](https://arxiv.org/abs/1406.4366) [[gr-qc](#)].
33. *D’Odorico G., Goossens J.-W., Saueressig F.* Covariant computation of effective actions in Hořava-Lifshitz gravity // *JHEP*. — 2015. — т. 10. — с. 126. — DOI: [10.1007/JHEP10\(2015\)126](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2015)126). — arXiv: [1508.00590](https://arxiv.org/abs/1508.00590) [[hep-th](#)].
34. Heat kernel methods for Lifshitz theories / A. O. Barvinsky [и др.] // *JHEP*. — 2017. — т. 06. — с. 063. — DOI: [10.1007/JHEP06\(2017\)063](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2017)063). — arXiv: [1703.04747](https://arxiv.org/abs/1703.04747) [[hep-th](#)].
35. *Grosvenor K. T., Melby-Thompson C., Yan Z.* New Heat Kernel Method in Lifshitz Theories // *JHEP*. — 2021. — т. 04. — с. 178. — DOI: [10.1007/JHEP04\(2021\)178](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2021)178). — arXiv: [2101.03177](https://arxiv.org/abs/2101.03177) [[hep-th](#)].
36. *Jack I., Osborn H.* Background Field Calculations in Curved Space-time. 1. General Formalism and Application to Scalar Fields // *Nucl. Phys. B*. — 1984. — т. 234. — с. 331–364. — DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90067-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90067-1).
37. *Weinberg S.* Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation. — In *General Relativity: An Einstein centenary survey: 790-831*. Ed. S. W. Hawking and W. Israel. Cambridge University Press, 1979.
38. *Weinberg S.* Critical Phenomena for Field Theorists. — *Erice Subnucl. Phys.*, Lectures presented at Int. School of Subnuclear Physics, 1976.
39. *Reuter M.* Nonperturbative evolution equation for quantum gravity // *Phys.Rev. D*. — 1998. — т. 57. — с. 971–985. — DOI: [10.1103/PhysRevD.57.971](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.971). — arXiv: [9605030](https://arxiv.org/abs/9605030) [[hep-th](#)].
40. *Wetterich C.* Exact evolution equation for the effective potential // *Phys. Lett. B*. — 1993. — т. 301. — с. 90–94. — DOI: [10.1016/0370-2693\(93\)90726-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90726-X).
41. *Morris T. R.* The Exact renormalization group and approximate solutions // *J. Mod. Phys. A*. — 1994. — т. 9. — с. 2451–2466. — DOI: [10.1142/S0217751X94000972](https://doi.org/10.1142/S0217751X94000972). — arXiv: [9308265](https://arxiv.org/abs/9308265) [[hep-th](#)].

42. *Reuter M., Saueressig F.* Renormalization group flow of quantum gravity in the Einstein-Hilbert truncation // Phys. Rev. D. — 2002. — т. 65. — с. 065016. — DOI: [10.1103/PhysRevD.65.065016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.065016). — arXiv: [0110054](https://arxiv.org/abs/0110054) [[hep-th](#)].
43. *Souma W.* Nontrivial ultraviolet fixed point in quantum gravity // Prog. Theor. Phys. — 1999. — т. 102. — с. 181—195. — DOI: [10.1143/PTP.102.181](https://doi.org/10.1143/PTP.102.181). — arXiv: [9907027](https://arxiv.org/abs/9907027) [[hep-th](#)].
44. *Falkenberg S., Odintsov S. D.* Gauge dependence of the effective average action in Einstein gravity // Int. J. Mod. Phys. A. — 1998. — т. 13. — с. 607—623. — DOI: [10.1142/S0217751X98000263](https://doi.org/10.1142/S0217751X98000263). — arXiv: [9612019](https://arxiv.org/abs/9612019) [[hep-th](#)].
45. *Lauscher O., Reuter M.* Ultraviolet fixed point and generalized flow equation of quantum gravity // Phys. Rev. D. — 2002. — т. 65. — с. 025013. — DOI: [10.1103/PhysRevD.65.025013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.025013). — arXiv: [0108040](https://arxiv.org/abs/0108040) [[hep-th](#)].
46. *Litim D. F.* Fixed points of quantum gravity // Phys. Rev. Lett. — 2004. — т. 92. — с. 201301. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.92.201301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.92.201301). — arXiv: [0312114](https://arxiv.org/abs/0312114) [[hep-th](#)].
47. *Bonanno A., Reuter M.* Proper time flow equation for gravity // JHEP. — 2005. — т. 02. — с. 035. — DOI: [10.1088/1126-6708/2005/02/035](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2005/02/035). — arXiv: [0410191](https://arxiv.org/abs/0410191) [[hep-th](#)].
48. *Manrique E., Reuter M.* Bimetric Truncations for Quantum Einstein Gravity and Asymptotic Safety // Annals Phys. — 2010. — т. 325. — с. 785. — DOI: [10.1016/j.aop.2009.11.009](https://doi.org/10.1016/j.aop.2009.11.009). — arXiv: [0907.2617](https://arxiv.org/abs/0907.2617) [[gr-qc](#)].
49. *Eichhorn A., Gies H.* Ghost anomalous dimension in asymptotically safe quantum gravity // Phys. Rev. D. — 2010. — т. 81. — с. 104010. — DOI: [10.1103/PhysRevD.81.104010](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.104010). — arXiv: [1001.5033](https://arxiv.org/abs/1001.5033) [[hep-th](#)].
50. *Groh K., Saueressig F.* Ghost wave-function renormalization in Asymptotically Safe Quantum Gravity // J. Phys. A. — 2010. — т. 43. — с. 365403. — DOI: [10.1088/1751-8113/43/36/365403](https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/36/365403). — arXiv: [1001.5032](https://arxiv.org/abs/1001.5032) [[hep-th](#)].
51. Fixed points and infrared completion of quantum gravity / N. Christiansen [и др.] // Phys.Lett. B. — 2014. — т. 728. — с. 114. — DOI: [10.1016/j.physletb.2013.11.025](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.11.025). — arXiv: [1209.4038](https://arxiv.org/abs/1209.4038) [[hep-th](#)].

52. *Codello A., D'Odorico G., Pagani C.* Consistent closure of renormalization group flow equations in quantum gravity // *Phys.Rev. D.* — 2014. — т. 89. — с. 081701. — DOI: [10.1103/PhysRevD.89.081701](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.081701). — arXiv: [1304.4777](https://arxiv.org/abs/1304.4777) [[hep-th](#)].
53. *Benedetti D.* On the number of relevant operators in asymptotically safe gravity // *Europhys. Lett.* — 2013. — т. 102. — с. 20007. — DOI: [10.1209/0295-5075/102/20007](https://doi.org/10.1209/0295-5075/102/20007). — arXiv: [1301.4422](https://arxiv.org/abs/1301.4422) [[hep-th](#)].
54. *Becker D., Reuter M.* En route to Background Independence: Broken split-symmetry, and how to restore it with bi-metric average actions // *Annals Phys.* — 2014. — т. 350. — с. 225. — DOI: [10.1016/j.aop.2014.07.023](https://doi.org/10.1016/j.aop.2014.07.023). — arXiv: [1404.4537](https://arxiv.org/abs/1404.4537) [[hep-th](#)].
55. *Falls K.* On the renormalisation of Newton's constant // *Phys. Rev. D.* — 2015. — т. 92. — с. 124057. — DOI: [10.1103/PhysRevD.92.124057](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.124057). — arXiv: [1501.05331](https://arxiv.org/abs/1501.05331) [[hep-th](#)].
56. *Gies H., Knorr B., Lippoldt S.* Generalized Parametrization Dependence in Quantum Gravity // *Physical Review D.* — 2015. — т. 92. — с. 084020. — DOI: [10.1103/PhysRevD.92.084020](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.084020). — arXiv: [1507.08859](https://arxiv.org/abs/1507.08859) [[hep-th](#)].
57. *Pagani C., Reuter M.* Composite operators in asymptotic safety // *Phys. Rev. D.* — 2017. — т. 95. — с. 066002. — DOI: [10.1103/PhysRevD.95.066002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.066002). — arXiv: [1611.06522](https://arxiv.org/abs/1611.06522) [[hep-th](#)].
58. *Knorr B., Lippoldt S.* Correlation functions on a curved background // *Phys. Rev. D.* — 2017. — т. 96. — с. 065020. — DOI: [10.1103/PhysRevD.96.065020](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.065020). — arXiv: [1707.01397](https://arxiv.org/abs/1707.01397) [[hep-th](#)].
59. *Lauscher O., Reuter M.* Flow equation of quantum Einstein gravity in a higher derivative truncation // *Phys. Rev. D.* — 2002. — т. 66. — с. 025026. — DOI: [10.1103/PhysRevD.66.025026](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.025026). — arXiv: [0205062](https://arxiv.org/abs/0205062) [[hep-th](#)].
60. *Reuter M., Saueressig F.* A Class of nonlocal truncations in quantum Einstein gravity and its renormalization group behavior // *Phys. Rev. D.* — 2002. — т. 66. — с. 125001. — DOI: [10.1103/PhysRevD.66.125001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.125001). — arXiv: [0206145](https://arxiv.org/abs/0206145) [[hep-th](#)].

61. *Codello A., Percacci R.* Fixed points of higher derivative gravity // Phys. Rev. Lett. — 2006. — т. 97. — с. 221301. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.97.221301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.221301). — arXiv: [0607128](https://arxiv.org/abs/0607128) [[hep-th](#)].
62. *Machado P. F., Saueressig F.* On the renormalization group flow of $f(R)$ -gravity // Phys. Rev. D. — 2008. — т. 77. — с. 124045. — DOI: [10.1103/PhysRevD.77.124045](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.124045). — arXiv: [0712.0445](https://arxiv.org/abs/0712.0445) [[hep-th](#)].
63. *Niedermaier M. R.* Gravitational Fixed Points from Perturbation Theory // Phys. Rev. Lett. — 2009. — т. 103. — с. 101303. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.103.101303](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.101303).
64. *Benedetti D., Machado P. F., Saueressig F.* Four-derivative interactions in asymptotically safe gravity // AIP Conf. Proc. — 2009. — т. 1196. — с. 44. — DOI: [10.1063/1.3284399](https://doi.org/10.1063/1.3284399). — arXiv: [0909.3265](https://arxiv.org/abs/0909.3265) [[hep-th](#)].
65. The Universal RG Machine / D. Benedetti [и др.] // JHEP. — 2011. — т. 1106. — с. 079. — DOI: [10.1007/JHEP06\(2011\)079](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2011)079). — arXiv: [1012.3081](https://arxiv.org/abs/1012.3081) [[hep-th](#)].
66. *Rechenberger S., Saueressig F.* The R^2 phase-diagram of QEG and its spectral dimension // Phys. Rev. D. — 2012. — т. 86. — с. 024018. — DOI: [10.1103/PhysRevD.86.024018](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.024018). — arXiv: [1206.0657](https://arxiv.org/abs/1206.0657) [[hep-th](#)].
67. *Ohta N., Percacci R.* Higher Derivative Gravity and Asymptotic Safety in Diverse Dimensions // Class. Quant. Grav. — 2014. — т. 31. — с. 015024. — DOI: [10.1088/0264-9381/31/1/015024](https://doi.org/10.1088/0264-9381/31/1/015024). — arXiv: [1308.3398](https://arxiv.org/abs/1308.3398) [[hep-th](#)].
68. *Eichhorn A.* The Renormalization Group flow of unimodular $f(R)$ gravity // JHEP. — 2015. — т. 04. — с. 096. — DOI: [10.1007/JHEP04\(2015\)096](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2015)096). — arXiv: [1501.05848](https://arxiv.org/abs/1501.05848) [[gr-qc](#)].
69. *Ohta N., Percacci R., Vacca G. P.* Flow equation for $f(R)$ gravity and some of its exact solutions // Phys. Rev. D. — 2015. — т. 92. — с. 061501. — DOI: [10.1103/PhysRevD.92.061501](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.061501). — arXiv: [1507.00968](https://arxiv.org/abs/1507.00968) [[hep-th](#)].
70. *Becker D., Ripken C., Saueressig F.* On avoiding Ostrogradski instabilities within Asymptotic Safety // JHEP. — 2017. — т. 12. — с. 061501. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2017\)121](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2017)121). — arXiv: [1709.09098](https://arxiv.org/abs/1709.09098) [[hep-th](#)].

71. Gravitational Two-Loop Counterterm Is Asymptotically Safe / H. Gies [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2016. — т. 116. — с. 211302. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.211302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.211302). — arXiv: [1601.01800](https://arxiv.org/abs/1601.01800) [hep-th].
72. *Pagani C., Sonoda H.* Products of composite operators in the exact renormalization group formalism // PTEP. — 2018. — т. 2018. — 023B02. — DOI: [10.1093/ptep/ptx189](https://doi.org/10.1093/ptep/ptx189). — arXiv: [1707.09138](https://arxiv.org/abs/1707.09138) [hep-th].
73. *Becker M., Pagani C.* Geometric operators in the asymptotic safety scenario for quantum gravity // Phys. Rev. D. — 2019. — т. 99. — с. 066002. — DOI: [10.1103/PhysRevD.99.066002](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.99.066002). — arXiv: [1810.11816](https://arxiv.org/abs/1810.11816) [gr-qc].
74. *Becker M., Pagani C.* Geometric Operators in the Einstein-Hilbert Truncation // Universe. — 2019. — т. 5 (3). — с. 75. — DOI: [10.3390/universe5030075](https://doi.org/10.3390/universe5030075).
75. *Pawlowski J. M.* Aspects of the functional renormalisation group // Annals Phys. — 2007. — т. 322. — с. 2831. — DOI: [10.1016/j.aop.2007.01.007](https://doi.org/10.1016/j.aop.2007.01.007). — arXiv: [0512261](https://arxiv.org/abs/0512261) [hep-th].
76. *Igarashi Y., Itoh K., Sonoda H.* Realization of Symmetry in the ERG Approach to Quantum Field Theory // Prog. Theor. Phys. Suppl. — 2010. — т. 181. — с. 1. — DOI: [10.1143/PTPS.181.1](https://doi.org/10.1143/PTPS.181.1). — arXiv: [0909.0327](https://arxiv.org/abs/0909.0327) [hep-th].
77. *Pagani C.* Note on scaling arguments in the effective average action formalism // Phys. Rev. D. — 2016. — т. 94. — с. 045001. — DOI: [10.1103/PhysRevD.94.045001](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.045001). — arXiv: [1603.07250](https://arxiv.org/abs/1603.07250) [hep-th].
78. *Percacci R.* An Introduction to Covariant Quantum Gravity and Asymptotic Safety // 100 Years of General Relativity, World Scientific. — 2017. — т. 3. — DOI: [10.1142/10369](https://doi.org/10.1142/10369).
79. *Reuter M., Saueressig F.* Quantum Gravity and the Functional Renormalization Group. — Cambridge University Press, 2019.
80. *Bij J. D., Dam H. van, Ng Y. J.* The exchange of massless spin-two particles // Physica A. — 1982. — т. 116. — с. 307–320. — DOI: [10.1016/0378-4371\(82\)90247-3](https://doi.org/10.1016/0378-4371(82)90247-3).
81. *Henneaux M., Teitelboim C.* The cosmological constant and general covariance // Phys. Lett. B. — 1989. — т. 222. — с. 195–199. — DOI: [10.1016/0370-2693\(89\)91251-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(89)91251-3).

82. *Unruh W. G.* Unimodular theory of canonical quantum gravity // Phys. Rev. D. — 1989. — т. 40. — с. 1048. — DOI: [10.1103/PhysRevD.40.1048](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.40.1048).
83. *Kuchar K. V.* Does an unspecified cosmological constant solve the problem of time in quantum gravity? // Phys. Rev. D. — 1991. — т. 43. — с. 3332—3344. — DOI: [10.1103/PhysRevD.43.3332](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.43.3332).
84. On the trace-free Einstein equations as a viable alternative to general relativity / G. F. R. Ellis [и др.] // Class. Quant. Grav. — 2011. — т. 28. — с. 225007. — DOI: [10.1088/0264-9381/28/22/225007](https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/22/225007). — arXiv: [1603.07250](https://arxiv.org/abs/1603.07250) [[hep-th](#)].
85. *Bufalo R., Oksanen M., Tureanu A.* How unimodular gravity theories differ from general relativity at quantum level // Eur. Phys. J. C. — 2015. — т. 75. — с. 477. — DOI: [10.1140/epjc/s10052-015-3683-3](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3683-3). — arXiv: [1505.04978](https://arxiv.org/abs/1505.04978) [[hep-th](#)].
86. *Lifshitz E. M.* On the Theory of Second-Order Phase Transitions I II // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1941. — т. 11. — с. 255—269. — DOI: [10.1140/epjc/s10052-015-3683-3](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3683-3).
87. *Barvinsky A., Kamenshchik A. Y.* Darkness without dark matter and energy – generalized unimodular gravity // Phys.Lett.B. — 2017. — т. 774. — с. 59—63. — DOI: [10.1016/j.physletb.2017.09.045](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2017.09.045). — arXiv: [1705.09470](https://arxiv.org/abs/1705.09470) [[gr-qc](#)].
88. *al P. A. et.* Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters // Astron. Astrophys. — 2016. — т. 594. — DOI: [10.1051/0004-6361/201525830](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525830). — arXiv: [1502.01589](https://arxiv.org/abs/1502.01589) [[astro-ph](#)].
89. *al P. A. et.* Planck 2015 results. XIV. Dark energy and modified gravity // Astron. Astrophys. — 2016. — т. 594. — DOI: [10.1051/0004-6361/201525814](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525814). — arXiv: [1502.01590](https://arxiv.org/abs/1502.01590) [[astro-ph](#)].
90. Dynamics of the generalized unimodular gravity theory / A. Barvinsky [et al.] // Phys.Rev.D. — 2019. — Vol. 100, issue 2. — P. 023542. — DOI: [10.1103/PhysRevD.100.023542](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.023542).
91. *Houthoff W., Kurov A., Saueressig F.* On the scaling of composite operators in asymptotic safety // JHEP. — 2020. — Vol. 4, no. 099. — DOI: [10.1007/JHEP04\(2020\)099](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2020)099).

92. *Kurov A., Saueressig F.* On characterizing the Quantum Geometry underlying Asymptotic Safety // *Front.in Phys.* — 2020. — Vol. 8. — DOI: [10.3389/fphy.2020.00187](https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00187).
93. *Barvinsky A. O., Kurov A. V., Sibiryakov S. M.* Beta functions of (3+1)-dimensional projectable Horava gravity // *Phys.Rev.D.* — 2022. — Vol. 105, issue 4. — P. 044009. — DOI: [10.1103/PhysRevD.105.044009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.044009).
94. *Sotiriou T. P., Visser M., Weinfurtner S.* Phenomenologically viable Lorentz-violating quantum gravity // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — т. 102. — с. 251601. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.102.251601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.251601). — arXiv: [0904.4464](https://arxiv.org/abs/0904.4464) [[hep-th](#)].
95. *Koyama K., Arroja F.* Pathological behaviour of the scalar graviton in Horava-Lifshitz gravity // *JHEP.* — 2010. — т. 03. — с. 061. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2010\)061](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2010)061). — arXiv: [0910.1998](https://arxiv.org/abs/0910.1998) [[hep-th](#)].
96. Renormalization of gauge theories in the background-field approach / A. O. Barvinsky [и др.] // *JHEP.* — 2018. — т. 07. — с. 035. — DOI: [10.1007/JHEP07\(2018\)035](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2018)035). — arXiv: [1705.03480](https://arxiv.org/abs/1705.03480) [[hep-th](#)].
97. *Barvinsky A. O., Herrero-Valea M., Sibiryakov S. M.* Towards the renormalization group flow of Horava gravity in (3 + 1) dimensions // *Phys. Rev. D.* — 2019. — т. 100, № 2. — с. 026012. — DOI: [10.1103/PhysRevD.100.026012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.100.026012). — arXiv: [1905.03798](https://arxiv.org/abs/1905.03798) [[hep-th](#)].
98. *Martin-Garcia J. M.* xAct: Efficient tensor computer algebra for the Wolfram Language. — <http://www.xact.es/>.
99. *Martin-Garcia J. M.* xPerm: fast index canonicalization for tensor computer algebra // *Comput. Phys. Commun.* — 2008. — т. 179. — с. 597–603. — DOI: [10.1016/j.cpc.2008.05.009](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2008.05.009). — arXiv: [0803.0862](https://arxiv.org/abs/0803.0862) [[cs.SC](#)].
100. *Brizuela D., Martin-Garcia J. M., Mena Marugan G. A.* xPert: Computer algebra for metric perturbation theory // *Gen. Rel. Grav.* — 2009. — т. 41. — с. 2415–2431. — DOI: [10.1007/s10714-009-0773-2](https://doi.org/10.1007/s10714-009-0773-2). — arXiv: [0807.0824](https://arxiv.org/abs/0807.0824) [[gr-qc](#)].
101. *Nutma T.* xTras : A field-theory inspired xAct package for mathematica // *Comput. Phys. Commun.* — 2014. — т. 185. — с. 1719–1738. — DOI: [10.1016/j.cpc.2014.02.006](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2014.02.006). — arXiv: [1308.3493](https://arxiv.org/abs/1308.3493) [[cs.SC](#)].

102. *Wolfram Research, Inc.* Mathematica, Version 12.2. — URL: <https://www.wolfram.com/mathematica> ; Champaign, IL, 2020.
103. *Henneaux M., Teitelboim C.* Quantization of gauge systems. — Princeton University Press, 1992. — ISBN 978-0-691-03769-1.
104. *Hu Q., Cheng D.* The polynomial solution to the Sylvester matrix equation // Applied Mathematics Letters. — 2006. — т. 19, № 9. — с. 859—864. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2005.09.005>. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S089396590500354X>.
105. *Kurov A.* — <https://github.com/AleksandrKurov/Horava-gravity>.
106. *DeWitt B. S.* Quantum Theory of Gravity. 2. The Manifestly Covariant Theory // Phys. Rev. — 1967. — т. 162. — с. 1195—1239. — DOI: [10.1103/PhysRev.162.1195](https://doi.org/10.1103/PhysRev.162.1195).
107. *Kallos R. E.* The Renormalization in Nonabelian Gauge Theories // Nucl. Phys. — 1974. — т. B78. — с. 293—312. — DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90284-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90284-3).
108. Horava Gravity is Asymptotically Free in $2 + 1$ Dimensions / A. O. Barvinsky [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — т. 119, № 21. — с. 211301. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.119.211301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.211301). — arXiv: [1706.06809](https://arxiv.org/abs/1706.06809) [hep-th].
109. *Gumrukcuoglu A. E., Mukohyama S.* Horava-Lifshitz gravity with $\lambda \rightarrow \infty$ // Phys. Rev. D. — 2011. — т. 83. — с. 124033. — DOI: [10.1103/PhysRevD.83.124033](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.124033). — arXiv: [1104.2087](https://arxiv.org/abs/1104.2087) [hep-th].
110. *Frenkel A., Horava P., Randall S.* Perelman’s Ricci Flow in Topological Quantum Gravity. — 2020. — нояб. — arXiv: [2011.11914](https://arxiv.org/abs/2011.11914) [hep-th].
111. *Reuter M., Wetterich C.* Effective average action for gauge theories and exact evolution equations // Nucl. Phys. B. — 1994. — т. 417. — с. 181—214. — DOI: [10.1016/0550-3213\(94\)90543-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90543-6).
112. *Codello A., Percacci R., Rahmede C.* Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation // Annals Phys. — 2009. — т. 324. — с. 414—469. — DOI: [10.1016/j.aop.2008.08.008](https://doi.org/10.1016/j.aop.2008.08.008). — arXiv: [0805.2909](https://arxiv.org/abs/0805.2909) [hep-th].

113. *Litim D. F.* Optimization of the exact renormalization group // Phys. Lett. B. — 2000. — т. 486. — с. 92—99. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(00\)00748-6](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(00)00748-6). — arXiv: [0005245](https://arxiv.org/abs/0005245) [[hep-th](#)].
114. *Litim D. F.* Optimized renormalization group flows // Phys. Rev. D. — 2001. — т. 64. — с. 105007. — DOI: [10.1103/PhysRevD.64.105007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.105007). — arXiv: [0103195](https://arxiv.org/abs/0103195) [[hep-th](#)].
115. *Ellwanger U.* Flow equations and BRS invariance for Yang-Mills theories // Phys. Lett. B. — 1994. — т. 335. — с. 364—370. — DOI: [10.1016/0370-2693\(94\)90365-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)90365-4). — arXiv: [9402077](https://arxiv.org/abs/9402077) [[hep-th](#)].
116. *D’Attanasio M., Morris T. R.* Gauge invariance, the quantum action principle, and the renormalization group // Phys. Lett. B. — 1996. — т. 378. — с. 213—221. — DOI: [10.1016/0370-2693\(96\)00411-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(96)00411-X). — arXiv: [9602156](https://arxiv.org/abs/9602156) [[hep-th](#)].
117. *Litim D. F., Pawłowski J. M.* Flow equations for Yang-Mills theories in general axial gauges // Phys. Lett. B. — 1998. — т. 435. — с. 181—188. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(98\)00761-8](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00761-8). — arXiv: [9802064](https://arxiv.org/abs/9802064) [[hep-th](#)].
118. Canonical quantization of cosmological perturbations in the one-bubble open universe / J. Garriga [и др.] // Nucl.Phys. B. — 1998. — т. 513. — с. 343—374. — DOI: [10.1016/S0550-3213\(97\)00780-3](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(97)00780-3). — arXiv: [9706229](https://arxiv.org/abs/9706229) [[astro-ph](#)].
119. *Arnowitt R. L., Deser S., Misner C. W.* The dynamics of general relativity // Gen.Rel.Grav. — 2008. — т. 40. — с. 1997—2027. — DOI: [10.1007/s10714-008-0661-1](https://doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1). — arXiv: [0405109](https://arxiv.org/abs/0405109) [[gr-qc](#)].
120. *Vassilevich D. V.* Heat kernel expansion: User’s manual // Phys. Rept. — 2003. — т. 388. — с. 279—360. — DOI: [10.1016/j.physrep.2003.09.002](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2003.09.002). — arXiv: [0306138](https://arxiv.org/abs/0306138) [[hep-th](#)].
121. *J. W. York J.* Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial value problem of general relativity // J. Math. Phys. — 1973. — т. 14. — с. 456—464. — DOI: [10.1063/1.1666338](https://doi.org/10.1063/1.1666338).

Список рисунков

- 2.1 Вверху: Решение системы (2.19) для $d = 4$, соединяющее ГФТ и НГФТ, отмеченные черными точками. Черная линия, исходящая из точки $(\lambda, g) = (1/2, 0)$, представляет собой сингулярное геометрическое место бета-функций, в котором η_N расходится. Полную классификацию РГ траекторий, возникающих в рамках анзаца Гильберта–Эйнштейна, см. [42]. Внизу: размерные константы связи Λ_k и G_k как функции РГ времени $t \equiv \ln(k/k_0)$. Решения пробегают значения между режимом с фиксированной точкой, где $G_k = g_*/k^2$, $\Lambda_k = \lambda_*k^2$ и классическим режимом, когда постоянная Ньютона замораживается до постоянного значения. Масштаб k_0 выбран таким, чтобы переход между режимами происходил при $k \approx k_0$ 55
- 2.2 $\text{Spec}(\mathbf{B})$ в $d = 4$ измерениях. На левой диаграмме показаны действительные части $\text{Re}(\lambda_n)$ собственных значений, найденных для матриц стабильности размеров $N = 25$ (левая линия, зеленые точки), $N = 50$ (средняя линия, оранжевые точки) и $N = 100$ (правая линия, синие точки). На средней диаграмме показано расположение собственных значений λ_n ($N = 100$) на комплексной плоскости. На правой диаграмме показаны значения первых двух значимых собственных значений в зависимости от размера матрицы N 63
- 2.3 $\text{Spec}(\mathbf{B})$ в $d = 3$ измерениях. На левой диаграмме показаны действительные части $\text{Re}(\lambda_n)$ собственных значений, найденных для матриц стабильности размеров $N = 25$ (левая линия, зеленые точки), $N = 50$ (средняя линия, оранжевые точки) и $N = 100$ (правая линия, синие точки). На средней диаграмме показано расположение собственных значений λ_n ($N = 100$) на комплексной плоскости. На правой диаграмме показаны значения первых двух значимых собственных значений в зависимости от размера матрицы N 63

Список таблиц

- 1 Решения системы (1.117). В шестом столбце указано значение β -функции константы \mathcal{G} на соответствующем решении. Все фиксированные точки асимптотически свободны. 47
- 2 Решения системы (1.117) соответствующие фиксированным точкам гравитации Хоравы при $\lambda = \infty$. В предпоследнем столбце указано значение β -функции константы \mathcal{G} на каждом решении, знак которой определяет, будет ли поток асимптотически свободен или убегает в сильную связь. 48
- 3 Коэффициенты ядра теплопроводности для скаляров (S), бесследовых симметричных матриц (T) и поперечных векторов (TV) на фоне d -сферы [45]. Прочерк – указывает, что соответствующий коэффициент не используется в данном вычислении. 114

Приложение А

Явные выражения для бета функций

А.1 Бета функция для G

Константа связи G не является существенной, то есть её β -функция зависит от калибровки. В [97] были получены эти β -функции в подмножестве двухпараметрического семейства регулярных калибровок, описанного в разделе 1.2.1. Результаты:

i) σ – произвольное, $\xi = -\frac{1-2\lambda}{2(1-\lambda)}$

$$\begin{aligned} \beta_G = \sqrt{\nu_5} \frac{\mathcal{G}^2}{40\pi^2(1-\lambda)(1-3\lambda)(1+u_s)u_s} & \left[-27 + 74\lambda - 57\lambda^2 \right. \\ & - u_s(5(1-3\lambda)(5-4\lambda)\sqrt{2\sigma\nu_5} + 53 - 142\lambda + 99\lambda^2) \\ & \left. - u_s^2(1-3\lambda)(5(5-4\lambda)\sqrt{2\sigma\nu_5} + 18 - 14\lambda) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

ii) $\sigma = \frac{1}{2\nu_5}$, $\xi = \frac{\nu_s}{2\nu_5(1-\lambda)} - 1$

$$\begin{aligned} \beta_G = -\sqrt{\nu_5} \frac{\mathcal{G}^2}{40\pi^2(1-\lambda)(1-3\lambda)(1+u_s)u_s} & \left[32 - 89\lambda + 57\lambda^2 \right. \\ & \left. + 3u_s(26 - 79\lambda + 53\lambda^2) + 2u_s^2(19 - 74\lambda + 51\lambda^2) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

iii) $\sigma = \frac{1}{2\nu_s}$, $\xi = \frac{\nu_5}{2\nu_s(1-\lambda)} - 1$

$$\begin{aligned} \beta_G = -\sqrt{\nu_5} \frac{\mathcal{G}^2}{40\pi^2(1-\lambda)(1-3\lambda)(1+u_s)u_s} & \left[47 - 154\lambda + 117\lambda^2 \right. \\ & \left. + 3u_s(26 - 79\lambda + 53\lambda^2) + u_s^2(23 - 83\lambda + 42\lambda^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Этот набор калибровок пересекается с калибровками, используемыми в настоящей работе. Таким образом, калибровка ii) совпадает с калибровкой **(а)**, уравнение (1.60), тогда как калибровка i) сводится к калибровкам **(б)** и **(в)** с под-

ходящим выбором σ см. (1.62), (1.66). Выражения (A.1), (A.2) используются в разделе 1.5 для получения β -функции существенной константы связи \mathcal{G} .

A.2 Полиномы в β -функциях существенных констант связи

В этом приложении мы явно выписываем выражения для многочленов из (1.14). Для β -функции константы \mathcal{G} полиномы имеют вид

$$\mathcal{P}_0^{\mathcal{G}} = (1 - \lambda)^4 (1809v_3^2 + 832v_2^2 + 16v_2(159v_3 - 217) - 4494v_3 + 2401), \quad (\text{A.4a})$$

$$\mathcal{P}_1^{\mathcal{G}} = 3\mathcal{P}_0^{\mathcal{G}}, \quad (\text{A.4b})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2^{\mathcal{G}} = & -(1 - \lambda)^2 [3(15779\lambda^2 - 20362\lambda + 3967) + 64v_2^2(81\lambda^2 - 82\lambda + 1) \\ & + 27v_3^2(279\lambda^2 - 238\lambda - 41) - 6v_3(8823\lambda^2 - 10620\lambda + 1561) \\ & + 16v_2(v_3(675\lambda^2 - 582\lambda - 93) - 2307\lambda^2 + 2732\lambda - 365)], \end{aligned} \quad (\text{A.4c})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3^{\mathcal{G}} = & (1 - \lambda)^2 [27v_3^2(961\lambda^2 - 1434\lambda + 401) + 64v_2^2(1717\lambda^2 - 2298\lambda + 581) \\ & + 16v_2(19409\lambda^2 - 26004\lambda + 6415 + 3v_3(2741\lambda^2 - 3690\lambda + 949)) \\ & + 6v_3(39331\lambda^2 - 58728\lambda + 14873) - 345977\lambda^2 + 276750\lambda - 52741], \end{aligned} \quad (\text{A.4d})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4^{\mathcal{G}} = & 2(1 - 3\lambda) \{ 138545\lambda^3 - 328263\lambda^2 - 5888(1 - \lambda)^3 v_2^2 \\ & - (1 - \lambda)^2 [16v_2(3119\lambda + 840v_3(1 - \lambda) - 2396) \\ & - 3v_3(9v_3(353\lambda - 299) - 5012\lambda + 8210)] + 239597\lambda - 49947 \}, \end{aligned} \quad (\text{A.4e})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_5^{\mathcal{G}} = & 2(1 - 3\lambda) \{ 159709\lambda^3 - 378471\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 [16v_2(1243\lambda - 412) \\ & - 3v_3(243v_3(1 - 3\lambda) - 13280\lambda + 4366)] + 273933\lambda - 55375 \}, \end{aligned} \quad (\text{A.4f})$$

$$\mathcal{P}_6^{\mathcal{G}} = -6(1 - 3\lambda)^2 (8465\lambda^2 - 16310\lambda + 3(1 - \lambda)^2 v_3(254 + 27v_3) + 7811), \quad (\text{A.4g})$$

$$\mathcal{P}_7^{\mathcal{G}} = 4(1 - 3\lambda)^2 (48\lambda^2 - 38\lambda + 7). \quad (\text{A.4h})$$

Полиномы в β -функции для u_s имеют вид:

$$\mathcal{P}_0^{u_s} = -3(1 - \lambda)^5 [537600v_1^2 + 78992v_2^2 + 14205v_3^2 + 2688v_1(154v_2 + 67v_3 - 16) + 16v_2(4236v_3 - 959) - 5838v_3 + 329], \quad (\text{A.5a})$$

$$\mathcal{P}_1^{u_s} = 3\mathcal{P}_0^{u_s}, \quad (\text{A.5b})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2^{u_s} = & -2(1 - \lambda)^3 [2419200v_1^2(1 - \lambda)^2 + 8v_2^2(42645\lambda^2 - 86482\lambda + 43837) + v_3^2(58698 - 106947\lambda + 48249\lambda^2) + 4032v_1(462v_2(1 - \lambda)^2 \\ & + 201v_3(1 - \lambda)^2 + 30\lambda^2 - 44\lambda - 10) \\ & + 8v_2(6252\lambda^2 - 9188\lambda - 1468) + 8v_2v_3(34335\lambda^2 - 71196\lambda + 36861) \\ & + v_3(20556\lambda^2 - 30792\lambda - 3696) + 4533\lambda^2 - 3881\lambda + 1448], \quad (\text{A.5c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3^{u_s} = & -2(1 - \lambda)^3 [806400v_1^2(1 - \lambda)^2 + 8v_2^2(20709\lambda^2 - 32026\lambda + 14957) \\ & + v_3^2(61686\lambda^2 - 52875\lambda + 20241) + 4032v_1(98 + 154v_2(1 - \lambda)^2 \\ & + 67v_3(1 - \lambda)^2 + 218\lambda^2 - 388\lambda) \\ & + 8v_2(3v_3(7833\lambda^2 - 9656\lambda + 4231) + 4(8658\lambda^2 - 16817\lambda + 4324)) \\ & + v_3(81594\lambda^2 - 189660\lambda + 50262) - 2970\lambda^2 - 1529 + 6235\lambda], \quad (\text{A.5d}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4^{u_s} = & (1 - \lambda)(1 - 3\lambda) [32v_2^2(1 - \lambda)^2(4081\lambda - 1191) + v_3^2(133083\lambda^3 \\ & - 303453\lambda^2 + 207657\lambda - 37287) + 48384v_1(1 - \lambda)^2(13\lambda - 19) \\ & - 16v_2(1 - \lambda)(7873\lambda^2 - 25922\lambda + 18109 \\ & + 3v_3(5419\lambda^2 - 6970\lambda + 1551)) - v_3(31938\lambda^3 + 15042\lambda^2 \\ & - 127314\lambda + 80334) + 10415\lambda^3 + 11815\lambda^2 - 30239\lambda + 10017], \quad (\text{A.5e}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_5^{u_s} = & (1 - \lambda)(1 - 3\lambda) [32v_2^2(1 - \lambda)^2(661\lambda - 203) + v_3^2(104787\lambda^3 \\ & - 240381\lambda^2 + 168345\lambda - 32751) + 16128v_1(1 - \lambda)^2(13\lambda - 19) \\ & + 16v_2(1 - \lambda)(12761\lambda^2 - 14690\lambda + 69 \\ & - 3v_3(2677\lambda^2 - 3534\lambda + 857)) - v_3(178962\lambda^3 - 468990\lambda^2 \\ & + 347070\lambda - 57042) + 379967\lambda^3 - 512385\lambda^2 + 126609\lambda + 1081], \quad (\text{A.5f}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_6^{u_s} = & -4(1 - 3\lambda)^2 [6584v_2^2(1 - \lambda)^3 - 27v_3^2(1 - \lambda)^2(311\lambda - 284) \\ & + 24v_2(1 - \lambda)^2(405\lambda - 584 + 581v_3(1 - \lambda)) \\ & - 3v_3(1 - \lambda)^2(2507\lambda + 2452) \\ & - 92671\lambda^3 + 205653\lambda^2 - 130039\lambda + 17539], \quad (\text{A.5g}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_7^{u_s} = & -2(1-3\lambda)^2[(1-\lambda)^2(729v_3^2(1-3\lambda) - 16v_2(3133\lambda - 1042) \\ & - 6v_3(11680\lambda - 3863)) \\ & - 212947\lambda^3 + 494301\lambda^2 - 341005\lambda + 61647], \end{aligned} \quad (\text{A.5h})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_8^{u_s} = & -2(1-3\lambda)^3((1-\lambda)^2(243v_3^2 + 3360v_2 + 5646v_3) \\ & + 31443\lambda^2 - 61026\lambda + 29033), \end{aligned} \quad (\text{A.5i})$$

$$\mathcal{P}_9^{u_s} = 4(1-3\lambda)^3(48\lambda^2 - 38\lambda + 7). \quad (\text{A.5j})$$

Полиномы в β -функции для v_1 имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0^{v_1} = & -(1-\lambda)^6[11612160v_1^3 + 472088v_2^3 + 241920v_1^2(50v_2 + 18v_3 - 1) \\ & + 12v_2^2(40758v_3 - 427) + 1008v_1(4124v_2^2 + 4v_2(726v_3 - 23) \\ & + 6v_3(81v_3 + 4) - 31) + 78v_2(6v_3(345v_3 + 28) - 119) \\ & + 18v_3(3v_3(318v_3 + 77) - 119) - 385], \end{aligned} \quad (\text{A.3a})$$

$$\mathcal{P}_1^{v_1} = 3\mathcal{P}_0^{v_1}, \quad (\text{A.3b})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2^{v_1} = & -(1-\lambda)^4\left\{ 34836480v_1^3(1-\lambda)^2 + 24v_2^3(54595\lambda^2 - 112134\lambda \right. \\ & + 57539) + 108v_3^3(213\lambda^2 - 602\lambda + 389) + 161280v_1^2[225v_2(1-\lambda)^2 \\ & + 81v_3(1-\lambda)^2 - 6\lambda^2 + 8\lambda - 4] + 4v_2^2[6v_3(52401\lambda^2 - 110626\lambda \\ & + 58225) - 72285\lambda^2 + 86204\lambda - 22411] \\ & - 36v_3^2(1947\lambda^2 - 2236\lambda + 375) + 2v_1[32v_2^2(190749\lambda^2 - 384238\lambda \\ & + 193489) - 224v_2(2613\lambda^2 - 3196\lambda + 1051) + 528v_2v_3(7935\lambda^2 \\ & - 16124\lambda + 8189) + 243v_3^2(2703\lambda^2 - 5620\lambda + 2917) \\ & - 42v_3(8535\lambda^2 - 9652\lambda + 1885) + 7(22587\lambda^2 - 26516\lambda + 3353)] \\ & + 2v_2[18v_3^2(9687\lambda^2 - 21886\lambda + 12199) - 24v_3(6447\lambda^2 - 7402\lambda \\ & + 1387) + 52401\lambda^2 - 62686\lambda + 8885] \\ & \left. + 18v_3(1245\lambda^2 - 1506\lambda + 205) + 14805\lambda^2 - 18928\lambda + 4151\right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.3c})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_3^{v_1} = & -(1-\lambda)^4 \left\{ 11612160v_1^3(1-\lambda)^2 + 8v_2^3(19267\lambda^2 - 65030\lambda + 45763) \right. \\
& - 324v_3^3(211\lambda^2 - 246\lambda + 35) + 483840v_1^2[25v_2(1-\lambda)^2 \\
& + 9v_3(1-\lambda)^2 - 2\lambda^2] - 12v_2^2[6v_3(1943\lambda^2 + 1938\lambda - 3881) \\
& + 68869\lambda^2 - 79372\lambda + 18995] - 108v_3^2(2255\lambda^2 - 2852\lambda + 683) \\
& + 6v_1[32v_2^2(17541\lambda^2 - 37822\lambda + 20281) \\
& - 224v_2(2061\lambda^2 - 2092\lambda + 499) + 528v_2v_3(543\lambda^2 - 1340\lambda + 797) \\
& + 243v_3^2(15\lambda^2 - 244\lambda + 229) - 42v_3(9303\lambda^2 - 11188\lambda + 2653) \\
& + 7(28539\lambda^2 - 38420\lambda + 9305)] - 6v_2[18v_3^2(2273\lambda^2 - 2034\lambda - 239) \\
& + 24v_3(7175\lambda^2 - 8858\lambda + 2115) - 64777\lambda^2 + 87438\lambda - 21261] \\
& \left. + 18v_3(4687\lambda^2 - 6422\lambda + 1567) + 7(6785\lambda^2 - 8992\lambda + 2219) \right\}, \quad (\text{A.3d})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_4^{v_1} = & -2(1-\lambda)^2(1-3\lambda) \left\{ 1024v_2^3(1-\lambda)^2(45\lambda - 38) \right. \\
& + 1728v_3^3(1-\lambda)^2(7\lambda - 6) + 120960v_1^2(1-\lambda)^2(\lambda + 1) \\
& - 4v_2^2(1-\lambda)[384(59\lambda^2 - 109\lambda + 50)v_3 \\
& + 29133\lambda^2 - 55225\lambda + 25452] - 9v_3^2(877\lambda^3 + 871\lambda^2 - 4213\lambda \\
& + 2465) + v_1[64v_2^2(1-\lambda)^2(1263\lambda - 1343) - 16v_2(1-\lambda)(3v_3(2463\lambda^2 \\
& - 5182\lambda + 2719) + 33534\lambda^2 - 52670\lambda + 19076) \\
& + 3(9v_3^2(1-\lambda)^2(1513\lambda - 1833) + 2v_3(82239\lambda^3 - 226251\lambda^2 \\
& + 205549\lambda - 61537) - 64219\lambda^3 + 203973\lambda^2 \\
& - 210641\lambda + 71335)] + 4v_2[144v_3^2(1-\lambda)^2(101\lambda - 86) \\
& + 12v_3(1961\lambda^3 - 6699\lambda^2 + 7435\lambda - 2697) \\
& + 8085\lambda^3 - 7434\lambda^2 - 9300\lambda + 8755] + 6v_3(4487\lambda^3 \\
& - 9281\lambda^2 + 4807\lambda + 7) \\
& \left. + 55452\lambda^3 - 123853\lambda^2 + 81624\lambda - 13195 \right\}, \quad (\text{A.3e})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_5^{v_1} = & -2(1-\lambda)^2(1-3\lambda) \left\{ 168v_2^3(51\lambda^3 - 149\lambda^2 + 125\lambda - 27) \right. \\
& - 108v_3^3(9\lambda^3 + 9\lambda^2 - 25\lambda + 7) - 4v_2^2(1-\lambda)[18v_3(117\lambda^2 - 366\lambda \\
& + 109) - 284\lambda^2 - 7265\lambda + 5425] + 40320v_1^2(1-\lambda)^2(\lambda+1) \\
& - 9v_3^2(3467\lambda^3 - 8839\lambda^2 + 6237\lambda - 865) \\
& + v_1[64v_2^2(1-\lambda)^2(1717\lambda - 581) \\
& - 16v_2(1-\lambda)(3v_3(2741\lambda^2 - 3690\lambda + 949) + 25940\lambda^2 - 40662\lambda \\
& + 12022) + 27v_3^2(961\lambda^3 - 2395\lambda^2 + 1835\lambda - 401) \\
& + 6v_3(52267\lambda^3 - 148963\lambda^2 + 129881\lambda - 33185) - 288353\lambda^3 \\
& + 542255\lambda^2 - 333355\lambda + 83485] - 2v_2[162v_3^2(3\lambda^3 + 35\lambda^2 - 51\lambda \\
& + 13) + 24v_3(1265\lambda^3 - 2191\lambda^2 + 691\lambda + 235) + 30971\lambda^3 - 40323\lambda^2 \\
& + 13167\lambda - 4451] - 12v_3(6551\lambda^3 - 11593\lambda^2 + 6124\lambda - 1112) \\
& \left. + 109519\lambda^3 - 252396\lambda^2 + 177357\lambda - 34396 \right\}, \tag{A.3f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_6^{v_1} = & 2(1-3\lambda)^2 \left\{ 56v_2^3(1-\lambda)^3(103\lambda - 13) + 108v_3^3(1-\lambda)^3(41\lambda - 11) \right. \\
& + 4v_2^2(1-\lambda)^3(2315\lambda + 54(89\lambda - 19)v_3 + 807) \\
& - 36v_3^2(1-\lambda)^3(657\lambda - 239) - 2v_1(1-\lambda)[5888v_2^2(1-\lambda)^3 \\
& + 16v_2(1-\lambda)^2(840v_3(1-\lambda) + 284\lambda - 1451) \\
& - 27v_3^2(1-\lambda)^2(353\lambda - 299) - 6v_3(1-\lambda)^2(5054\lambda + 1585) \\
& - 146609\lambda^3 + 330783\lambda^2 - 220781\lambda + 36675] \\
& - 2v_2(1-\lambda)^2[54v_3^2(169\lambda^2 - 212\lambda + 43) \\
& + 96v_3(\lambda^2 + 29\lambda - 30) + 49685\lambda^2 - 66892\lambda + 16249] \\
& - 6v_3(1-\lambda)^2(7601\lambda^2 - 11994\lambda + 4203) \\
& \left. - 15115\lambda^4 + 38758\lambda^3 - 23950\lambda^2 - 8038\lambda + 8337 \right\}, \tag{A.3g}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_7^{v_1} = & -2(1-3\lambda)^2 \left\{ 420v_2^2(6v_2+18v_3+17)(1-\lambda)^3(1-3\lambda) \right. \\
& + 108v_3^2(15v_3-67)(1-\lambda)^3(1-3\lambda) \\
& - 2v_1(1-\lambda) [16v_2(1-\lambda)^2(4078\lambda-1357) - 729v_3^2(1-\lambda)^2(1-3\lambda) \\
& + 6v_3(1-\lambda)^2(14200\lambda-4703) + 193645\lambda^3 - 448191\lambda^2 \\
& + 313917\lambda - 59575] + 2v_2(1-\lambda)^2 [3402v_3^2(3\lambda^2-4\lambda+1) \\
& + 2016v_3(3\lambda^2-4\lambda+1) + 39661\lambda^2 - 53228\lambda + 13045] \\
& + 6v_3(1-\lambda)^2(1021\lambda^2-1958\lambda+799) \\
& \left. + 25751\lambda^4 - 95078\lambda^3 + 122898\lambda^2 - 63194\lambda + 9647 \right\}, \tag{A.3h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_8^{v_1} = & -2(1-3\lambda)^3 \left\{ 4(1-\lambda)^3 [210v_2^3 + 9v_3^2(15v_3-67) + 35v_2^2(18v_3+17)] \right. \\
& + 6v_1(1-\lambda) [1680v_2(1-\lambda)^2 + 81v_3^2(1-\lambda)^2 + 2442v_3(1-\lambda)^2 \\
& + 10201\lambda^2 - 19558\lambda + 9323] + 14v_2(1-\lambda)^2 [v_3^2 162(1-\lambda) \\
& + 96v_3(1-\lambda) - 951\lambda + 935] \\
& \left. - 6v_3(1-\lambda)^2(515\lambda-499) + 3349\lambda^3 - 5135\lambda^2 - 105\lambda + 1879 \right\}, \tag{A.3i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_9^{v_1} = & -4(1-3\lambda)^3 [2v_1(48\lambda^3 - 86\lambda^2 + 45\lambda - 7) \\
& + 163\lambda^3 - 537\lambda^2 + 477\lambda - 105]. \tag{A.3j}
\end{aligned}$$

Полиномы в β -функции для v_2 имеют вид:

$$\mathcal{P}_0^{v_2} = -3(1 - \lambda)^6(8v_2 + 9v_3 - 7)^2(30v_3 + 106v_2 + 336v_1 + 7), \quad (\text{A.4a})$$

$$\mathcal{P}_1^{v_2} = 3\mathcal{P}_0^{v_2}, \quad (\text{A.4b})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2^{v_2} = (1 - \lambda)^4 \bigg\{ & -192v_2^3(1197\lambda^2 - 1808\lambda + 611) - 16v_2^2[9v_3(3429\lambda^2 \\ & - 5288\lambda + 1859) + 4(3921\lambda^2 - 4322\lambda + 291)] \\ & - 162v_3^3(447\lambda^2 - 686\lambda + 239) - 18v_3^2(4119\lambda^2 - 4628\lambda + 371) \\ & + 2v_3(6957\lambda^2 - 8772\lambda + 975) - 336v_1[192v_2^2(9\lambda^2 - 14\lambda + 5) \\ & + 8v_2(18v_3(21\lambda^2 - 34\lambda + 13) + 273\lambda^2 - 292\lambda + 11) \\ & + 27v_3^2(51\lambda^2 - 86\lambda + 35) + 18v_3(117\lambda^2 - 120\lambda - 1) \\ & - 1371\lambda^2 + 1618\lambda - 191] - v_2[9v_3^2(37983\lambda^2 - 59248\lambda + 21265) \\ & + 6v_3(54417\lambda^2 - 59380\lambda + 3275) - 143457\lambda^2 + 173720\lambda - 24327] \\ & + 14(2481\lambda^2 - 3182\lambda + 687) \bigg\}, \quad (\text{A.4c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3^{v_2} = -3(1 - \lambda)^4 \bigg\{ & 336v_1[64v_2^2(19\lambda^2 - 26\lambda + 7) + 8v_2(18v_3(13\lambda^2 \\ & - 18\lambda + 5) + 385\lambda^2 - 516\lambda + 123) + 27v_3^2(27\lambda^2 - 38\lambda + 11) \\ & + 18v_3(173\lambda^2 - 232\lambda + 55) - 1763\lambda^2 + 2402\lambda - 583] \\ & + 64v_2^3(2743\lambda^2 - 3728\lambda + 985) + 16v_2^2(3v_3(7423\lambda^2 - 10136\lambda + 2713) \\ & + 4(5349\lambda^2 - 7178\lambda + 1719)) + v_2(9v_3^2(26511\lambda^2 - 36304\lambda + 9793) \\ & + 6v_3(75361\lambda^2 - 101268\lambda + 24219) - 178737\lambda^2 + 244280\lambda - 59607) \\ & + 162v_3^3(327\lambda^2 - 446\lambda + 119) + 18v_3^2(5547\lambda^2 - 7484\lambda + 1799) \\ & - 6v_3(3103\lambda^2 - 4492\lambda + 1109) - 14(2677\lambda^2 - 3574\lambda + 883) \bigg\}, \quad (\text{A.4d}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_4^{v_2} = & (1 - \lambda)^2(1 - 3\lambda) \left\{ 64v_2^3(1 - \lambda)^2(2369\lambda - 1953) \right. \\
& + 1728v_3^3(1 - \lambda)^2(21\lambda - 20) - 16(1 - \lambda)v_2^2 [3v_3(6145\lambda^2 - 11298\lambda \\
& + 5153) + 2(5124\lambda^2 - 14591\lambda + 9193)] - 9v_3^2(16909\lambda^3 \\
& - 30841\lambda^2 + 11563\lambda + 2369) + 1344v_1[-192v_2^2(1 - \lambda)^3 \\
& + 6(1 - \lambda)^2v_2(149\lambda - 48v_3(1 - \lambda) - 137) - 108v_3^2(1 - \lambda)^3 \\
& + 9v_3(1 - \lambda)^2(98\lambda - 93) - 372\lambda^3 + 1225\lambda^2 - 1317\lambda + 462] \\
& + v_2[9v_3^2(1 - \lambda)^2(20741\lambda - 17925) - 6v_3(7139\lambda^3 + 39053\lambda^2 \\
& - 97327\lambda + 51135) + 293769\lambda^3 - 562239\lambda^2 + 237523\lambda + 29971] \\
& + 6v_3(29825\lambda^3 - 68713\lambda^2 + 46923\lambda - 8099) \\
& \left. + 245651\lambda^3 - 551007\lambda^2 + 363249\lambda - 57837 \right\}, \tag{A.4e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_5^{v_2} = & (1 - \lambda)^2(1 - 3\lambda) \left\{ 64v_2^3(\lambda - 1)^2(329 - 961\lambda) + 324v_3^3(39\lambda^3 - 73\lambda^2 \right. \\
& + 41\lambda - 7) - 16v_2^2(\lambda - 1)[3v_3(1085\lambda^2 - 1482\lambda + 397) + 22990\lambda^2 \\
& - 27850\lambda + 3776] - 27v_3^2(7625\lambda^3 - 19677\lambda^2 + 14703\lambda - 2651) \\
& + 1344v_1[2v_2(1 - \lambda)^2(181\lambda - 137) + 9v_3(1 - \lambda)^2(38\lambda - 31) \\
& + 140\lambda^3 - 53\lambda^2 - 215\lambda + 122] + v_2[27v_3^2(683\lambda^3 - 1273\lambda^2 + 681\lambda - 91) \\
& - 6v_3(102523\lambda^3 - 238935\lambda^2 + 159777\lambda - 23365) + 193117\lambda^3 \\
& - 427691\lambda^2 + 258807\lambda - 27161] - 6v_3(31359\lambda^3 - 58643\lambda^2 + 33565\lambda \\
& - 6089) + 499453\lambda^3 - 1131897\lambda^2 + 782671\lambda - 150059 \left. \right\}, \tag{A.4f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_6^{v_2} = & -2(1 - 3\lambda)^2 \left\{ 8576(\lambda - 1)^4v_2^3 - 54v_3^3(1 - \lambda)^3(85\lambda - 31) \right. \\
& - 18v_3^2(1 - \lambda)^3(3397\lambda - 1203) + 16v_2^2(1 - \lambda)^3(1116v_3(1 - \lambda) \\
& + 634\lambda - 709) + 2016v_1(\lambda - 1)^2(35\lambda^2 - 48\lambda + 12) \\
& - v_2(1 - \lambda)[9v_3^2(1 - \lambda)^2(1669\lambda - 1255) + 6v_3(1 - \lambda)^2(8860\lambda - 1737) \\
& + 14503\lambda^3 - 16053\lambda^2 - 9653\lambda + 11135] - 6v_3(1 - \lambda)^2(2180\lambda^2 - 7623\lambda \\
& \left. + 5187) - 29405\lambda^4 + 75256\lambda^3 - 46026\lambda^2 - 16152\lambda + 16351 \right\}, \tag{A.4g}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_7^{v_2} = & -2(1-3\lambda)^2 \left\{ 16v_2^2(1-\lambda)^3(727-2188\lambda) + 1458v_3^3(1-\lambda)^3(1-3\lambda) \right. \\
& + 19602v_3^2(1-\lambda)^3(1-3\lambda) + 672v_1(1-\lambda)^2(35\lambda^2-48\lambda+12) \\
& + v_2(1-\lambda)[1863v_3^2(1-\lambda)^2(1-3\lambda) - 78v_3(1-\lambda)^2(1102\lambda-365) \\
& - 111931\lambda^3 + 255965\lambda^2 - 176459\lambda + 32629] + 6v_3(1-\lambda)^2(14814\lambda^2 \\
& - 18371\lambda + 3829) - 47811\lambda^4 + 180304\lambda^3 - 236654\lambda^2 \\
& \left. + 123472\lambda - 19239 \right\}, \tag{A.4h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_8^{v_2} = & -2(1-3\lambda)^3 \left\{ 6(280v_2^2 + 9v_3^2(9v_3 + 121))(1-\lambda)^3 \right. \\
& - 6v_3(1-\lambda)^2(707\lambda - 715) + v_2(1-\lambda)[621v_3^2(1-\lambda)^2 \\
& + 7410v_3(1-\lambda)^2 + 10597\lambda^2 - 18998\lambda + 8299] - 9739\lambda^3 \\
& \left. + 18073\lambda^2 - 6487\lambda - 1883 \right\}, \tag{A.4i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_9^{v_2} = & -2(1-3\lambda)^3 [2v_2(48\lambda^3 - 86\lambda^2 + 45\lambda - 7) - 295\lambda^3 \\
& + 1253\lambda^2 - 1271\lambda + 301] . \tag{A.4j}
\end{aligned}$$

Полиномы в β -функции для v_3 имеют вид:

$$\mathcal{P}_0^{v_3} = -4(1 - \lambda)^6(8v_2 + 9v_3 - 7)^3, \quad (\text{A.5a})$$

$$\mathcal{P}_1^{v_3} = 3\mathcal{P}_0^{v_3}, \quad (\text{A.5b})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2^{v_3} = & -(1 - \lambda)^4(8v_2 + 9v_3 - 7) \left\{ 768v_2^2(1 - \lambda)(5\lambda - 1) \right. \\ & + 3v_3^2(1 - \lambda)(741\lambda - 31) \\ & + 8v_2(v_3(1 - \lambda)(687\lambda - 85) - 306\lambda^2 + 496\lambda - 206) \\ & \left. + v_3(651\lambda^2 - 76\lambda - 719) - 5286\lambda^2 + 6824\lambda - 1426 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5c})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3^{v_3} = & -(1 - \lambda)^4(8v_2 + 9v_3 - 7) \left\{ 256v_2^2(1 - \lambda)(53\lambda - 17) \right. \\ & + 9v_3^2(1 - \lambda)(1029\lambda - 319) \\ & + 8v_2(3v_3(1 - \lambda)(879\lambda - 277) - 470\lambda^2 + 592\lambda - 170) \\ & \left. + 3v_3(1995\lambda^2 - 2764\lambda + 625) - 17426\lambda^2 + 23608\lambda - 5846 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5d})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4^{v_3} = & -(1 - \lambda)^2(1 - 3\lambda) \left\{ -64v_2^2(1 - \lambda)[384v_2(1 - \lambda)^2 + v_3(495\lambda^2 \right. \\ & - 1358\lambda + 863) - 6(697\lambda^2 - 942\lambda + 261)] \\ & + 16v_2[3v_3^2(1 - \lambda)^2(63\lambda - 895) + v_3(1 - \lambda)(38823\lambda^2 - 53248\lambda \\ & + 15061) + 31674\lambda^3 - 76106\lambda^2 + 57078\lambda - 12630] \\ & - 27v_3^3(1 - \lambda)^2(279\lambda + 425) - 12v_3^2(24879\lambda^3 - 59880\lambda^2 \\ & + 45529\lambda - 10528) + 3v_3(87697\lambda^3 - 220167\lambda^2 + 178243\lambda \\ & \left. - 45677) + 240090\lambda^3 - 542894\lambda^2 + 357966\lambda - 55386 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5e})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_5^{v_3} = & -(1 - \lambda)^2(1 - 3\lambda) \left\{ -64v_2^2(1 - \lambda)[v_3(1069\lambda^2 - 1434\lambda + 365) \right. \\ & - 6026\lambda^2 + 7932\lambda - 2002] + 16v_2[3v_3^2(1 - \lambda)^2(1445\lambda - 517) \\ & - v_3(38317\lambda^3 - 88093\lambda^2 + 62567\lambda - 12791) \\ & + 2(2335\lambda^3 - 9175\lambda^2 + 9161\lambda - 2297)] \\ & + 27v_3^3(169\lambda^3 - 499\lambda^2 + 451\lambda - 121) \\ & - 12v_3^2(15961\lambda^3 - 36412\lambda^2 + 26015\lambda - 5564) \\ & - v_3(216917\lambda^3 - 386819\lambda^2 + 188983\lambda - 19945) \\ & \left. + 2(264149\lambda^3 - 575591\lambda^2 + 382375\lambda - 71269) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5f})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_6^{v_3} = & 2(1-3\lambda)^2 \left\{ (1-\lambda)^3 [3v_3^2(45v_3(73\lambda-67) - 2(6835\lambda-5644)) \right. \\
& - 256v_2^2(32v_3-75)(1-\lambda)] - 16v_2(1-\lambda)^2 [1056v_3^2(1-\lambda)^2 \\
& - v_3(3911\lambda^2 - 7243\lambda + 3332) + 6(213\lambda^2 - 457\lambda + 226)] \\
& - v_3(4877\lambda^4 - 40820\lambda^3 + 91880\lambda^2 - 80876\lambda + 24939) \\
& \left. - 4(3330\lambda^4 - 7283\lambda^3 + 1162\lambda^2 + 6195\lambda - 3396) \right\}, \tag{A.5g}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_7^{v_3} = & -2(1-3\lambda)^2 \left\{ 3v_3^2(1-\lambda)^3 [135v_3(1-3\lambda) - 14(289\lambda-92)] \right. \\
& + 16v_2(1-\lambda)^2 [v_3(1-\lambda)(412-1243\lambda) - 5542\lambda^2 + 7230\lambda - 1788] \\
& + v_3(1-\lambda)(93119\lambda^3 - 211785\lambda^2 + 147207\lambda - 28337) \\
& \left. + 4(4889\lambda^4 - 22219\lambda^3 + 32834\lambda^2 - 18597\lambda + 3117) \right\}, \tag{A.5h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_8^{v_3} = & -6(1-3\lambda)^3 \left\{ 3v_3^2(15v_3-88)(1-\lambda)^3 - v_3(1289\lambda^3 - 3119\lambda^2 \right. \\
& \left. + 2337\lambda - 507) + 4(1297\lambda^3 - 2877\lambda^2 + 1858\lambda - 282) \right\}, \tag{A.5i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_9^{v_3} = & -4(1-3\lambda)^3 [v_3(48\lambda^3 - 86\lambda^2 + 45\lambda - 7) \\
& - 151\lambda^3 + 257\lambda^2 - 135\lambda + 21] . \tag{A.5j}
\end{aligned}$$

Приложение Б

Асимптотическое разложение для коммутатора с оператором в дробной степени

Здесь мы получим следующую формулу

$$[A^\alpha, B] = \sum_{n=1}^{\infty} C_\alpha^n \underbrace{[A, [A, \dots, [A, B]] \dots]}_n A^{\alpha-n}, \quad (\text{Б.1})$$

где

$$C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (\text{Б.2})$$

биномиальные коэффициенты.

Вывод начинается с представления

$$A^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty ds s^{-\alpha-1} e^{-sA}. \quad (\text{Б.3})$$

Далее, для $X(s) \equiv [e^{-sA}, B]$ имеем следующее уравнение

$$\frac{dX}{ds} = -AX - [A, B]e^{-sA}, \quad (\text{Б.4})$$

с начальным условием $X(0) = 0$. Легко проверить, что решение имеет форму

$$X(s) = - \int_0^s ds_1 e^{-(s-s_1)A} [A, B] e^{-s_1 A}. \quad (\text{Б.5})$$

Используя уравнения (Б.3) и (Б.5), получаем

$$\begin{aligned} [A^\alpha, B] &= \frac{-1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty ds s^{-\alpha-1} \int_0^s ds_1 e^{-(s-s_1)A} [A, B] e^{-s_1 A} \\ &= \frac{-1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty ds s^{-\alpha-1} \left(s[A, B] e^{-sA} + \int_0^s ds_1 [e^{-(s-s_1)A}, [A, B]] e^{-s_1 A} \right) \\ &= -\frac{\Gamma(-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha)} [A, B] A^{\alpha-1} - \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty ds s^{-\alpha-1} \int_0^s ds_1 [e^{-(s-s_1)A}, [A, B]] e^{-s_1 A}. \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Для последнего слагаемого можно снова применить формулу (Б.5), которая породит второе слагаемое в разложении (Б.1). Продолжая по индукции, мы получим представление

$$\begin{aligned}
[A^\alpha, B] &= \sum_{n=1}^N C_\alpha^n \underbrace{[A, [A, \dots [A, B] \dots]]}_n A^{\alpha-n} \\
&+ \frac{(-1)^N}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty ds s^{-\alpha-1} \int_0^s ds_1 \frac{s_1^{N-1}}{(N-1)!} [e^{-(s-s_1)A}, \underbrace{[A, [A, \dots [A, B] \dots]]}_N e^{-s_1 A}],
\end{aligned} \tag{Б.7}$$

которое справедливо для произвольного N . Отсюда получаем формулу (Б.1).

Приложение В

Примеры универсальных функциональных следов

В.1 Следы с $a = 0$, кубичные по кривизне

Эти следы имеют размерность 6 и поэтому входят в расходящуюся часть действия без дополнительных коэффициентов с кривизной. Следовательно, для наших целей достаточно рассчитать их со всеми свёрнутыми индексами и проинтегрированными по всему трёхмерному пространству. В интегралах мы свободно интегрируем по частям, чтобы преобразовать выражения в сумму основных инвариантов кривизны уравнения (1.16).

Тензорные следы могут иметь ноль, две или четыре производных. Возможны две свёртки индексов в следах без производных, которые выражаются непосредственно через предел совпадения третьего коэффициента Швингера-Девитта $a_{3ij}{}^{kl}(x,x)$

$$\begin{aligned} \int d^3x \delta_{kl}{}^{ij} (-\Delta)^{3/2} \delta_{ij}{}^{kl}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} &= \frac{3 \ln L^2}{32\pi^2} \int d^3x \sqrt{g} \delta_{kl}{}^{ij} a_{3ij}{}^{kl}(x,x) \\ &= \frac{3 \ln L^2}{32\pi^2} \int d^3x \sqrt{g} \left(\frac{31}{45} R_j^i R_k^j R_i^k - \frac{233}{210} R_{ij} R^{ij} R + \frac{673}{2520} R^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{84} R \Delta R - \frac{67}{420} R_{ij} \Delta R^{ij} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.1a})$$

$$\begin{aligned} \int d^3x g_{kl} g^{ij} (-\Delta)^{3/2} \delta_{ij}{}^{kl}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} &= \frac{3 \ln L^2}{32\pi^2} \int d^3x \sqrt{g} g_{kl} g^{ij} a_{3ij}{}^{kl}(x,x) \\ &= \frac{3 \ln L^2}{32\pi^2} \int d^3x \sqrt{g} \left(-\frac{1}{60} R_j^i R_k^j R_i^k + \frac{1}{35} R_{ij} R^{ij} R - \frac{3}{560} R^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{112} R \Delta R + \frac{1}{280} R_{ij} \Delta R^{ij} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.1b})$$

Следы с двумя производными допускают три возможные свёртки индексов

$$\begin{aligned} \int d^3x g_{ij} \nabla^k \nabla^l (-\Delta)^{1/2} \delta_{kl}{}^{ij}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} &= \int d^3x g_{kl} \nabla^i \nabla^j (-\Delta)^{1/2} \delta_{ij}{}^{kl}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} \\ &= -\frac{\ln L^2}{16\pi^2} \int d^3x \sqrt{g} \left(-\frac{1}{120} R_j^i R_k^j R_i^k + \frac{1}{70} R_{ij} R^{ij} R - \frac{3}{1120} R^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{224} R \Delta R + \frac{1}{560} R_{ij} \Delta R^{ij} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.2a})$$

$$\begin{aligned} \int d^3x \delta_i^j \nabla_k \nabla^i (-\Delta)^{1/2} \delta_{ij}{}^{kl}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} \\ &= -\frac{\ln L^2}{16\pi^2} \int d^3x \sqrt{g} \left(-\frac{23}{80} R_j^i R_k^j R_i^k + \frac{753}{1120} R_{ij} R^{ij} R - \frac{22}{105} R^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{84} R \Delta R - \frac{61}{560} R_{ij} \Delta R^{ij} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.2b})$$

След с четырьмя производными допускает только одну свёртку индексов

$$\begin{aligned} \int d^3x \nabla_k \nabla_l \nabla^i \nabla^j \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta_{ij}{}^{kl}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} \\ &= \frac{\ln L^2}{8\pi^2} \int d^3x \sqrt{g} \left(-\frac{211}{240} R_j^i R_k^j R_i^k + \frac{2987}{1680} R_{ij} R^{ij} R - \frac{703}{2240} R^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{31}{1344} R \Delta R + \frac{141}{1120} R_{ij} \Delta R^{ij} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Векторные следы: В этой группе два следа

$$\begin{aligned} \int d^3x \delta_i^j (-\Delta)^{3/2} \delta_j^i(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} \\ &= \frac{3 \ln L^2}{32\pi^2} \int d^3x \sqrt{g} \left(\frac{23}{180} R_j^i R_k^j R_i^k - \frac{43}{210} R_{ij} R^{ij} R + \frac{253}{5040} R^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{29}{1680} R \Delta R - \frac{5}{168} R_{ij} \Delta R^{ij} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.4a})$$

$$\begin{aligned} \int d^3x \nabla^j \nabla_i (-\Delta)^{1/2} \delta_j^i(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} \\ &= -\frac{\ln L^2}{16\pi^2} \int d^3x \sqrt{g} \left(\frac{1}{20} R_j^i R_k^j R_i^k - \frac{67}{1680} R_{ij} R^{ij} R - \frac{3}{1120} R^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{1120} R \Delta R - \frac{13}{560} R_{ij} \Delta R^{ij} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.4b})$$

В.2 Следы с $a = 2$, квадратичные по кривизне

Эти УФС входят в расходящуюся часть действия с линейными по кривизне коэффициентными функциями, (для формирования логарифмических расходимостей общей кубической степени по кривизне), так что они представляют собой квадратичные по кривизне локальные величины, имеющие два свободных индекса.

Тензорные следы могут иметь чётное число производных от нуля до шести. Для следа без производных есть три способа свёрнуть индексы:

$$g^{ij}(-\Delta)^{1/2}\delta_{ij}{}^{kl}(x,y)|_{y=x}^{\text{div}} = -\frac{\ln L^2}{16\pi^2}\sqrt{g}g^{kl}\frac{1}{30}\left(\frac{1}{2}R^{mn}R_{mn} + \frac{1}{4}R^2 + \Delta R\right). \quad (\text{B.5})$$

$$g_{kl}(-\Delta)^{1/2}\delta_{ij}{}^{kl}(x,y)|_{y=x}^{\text{div}} = -\frac{\ln L^2}{16\pi^2}\sqrt{g}g_{ij}\frac{1}{30}\left(\frac{1}{2}R^{mn}R_{mn} + \frac{1}{4}R^2 + \Delta R\right). \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \delta_k^i(-\Delta)^{1/2}\delta_{ij}{}^{kl}(x,y)|_{y=x}^{\text{div}} &= -\frac{1}{16\pi^2}\ln L^2 \\ &\times \sqrt{g}\left(-\frac{43}{60}\delta_j^l R^{mn}R_{mn} + \frac{7}{12}R_{mj}R^{ml} - \frac{7}{12}RR_j^l + \frac{7}{20}\delta_j^l R^2 + \frac{1}{15}\delta_j^l \Delta R\right). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Для случая двух производных имеется девять свёрток,

$$\begin{aligned} \delta_{mn}{}^{kl}\nabla_i\nabla_j\frac{1}{(-\Delta)^{1/2}}\delta_{kl}{}^{mn}(x,y)|_{y=x}^{\text{div}} &= \frac{\ln L^2}{8\pi^2} \\ &\times \sqrt{g}\left(\frac{19}{15}R_{ik}R_j^k - \frac{41}{60}g_{ij}R_{mn}R^{mn} - \frac{19}{15}RR_{ij} + \frac{1}{2}g_{ij}R^2 + \frac{3}{10}\nabla_i\nabla_j R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{10}\Delta R_{ij} - \frac{1}{10}g_{ij}\Delta R\right), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} g_{mn}g^{kl}\nabla_i\nabla_j\frac{1}{(-\Delta)^{1/2}}\delta_{kl}{}^{mn}(x,y)|_{y=x}^{\text{div}} &= \frac{1}{8\pi^2}\ln L^2 \\ &\times \sqrt{g}\left(-\frac{1}{5}R_{ik}R_j^k + \frac{3}{40}g_{ij}R_{mn}R^{mn} + \frac{1}{5}RR_{ij} - \frac{1}{16}g_{ij}R^2 + \frac{3}{20}\nabla_i\nabla_j R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{20}\Delta R_{ij} - \frac{1}{20}g_{ij}\Delta R\right), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned}
& g_{mn} \nabla^i \nabla^k \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta_{kj}^{mn}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{8\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(-\frac{1}{15} R^{ik} R_{jk} + \frac{1}{40} \delta_j^i R_{mn} R^{mn} + \frac{1}{15} R R_j^i - \frac{1}{48} \delta_j^i R^2 + \frac{1}{20} \nabla^i \nabla_j R \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{60} \Delta R_j^i - \frac{1}{60} \delta_j^i \Delta R \right), \tag{B.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_n^l \nabla^i \nabla^k \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta_{kl}^{jn}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{8\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(\frac{149}{120} R_k^i R^{kj} - \frac{8}{15} g^{ij} R_{mn} R^{mn} - \frac{119}{120} R R^{ij} + \frac{13}{48} g^{ij} R^2 + \frac{37}{120} \nabla^i \nabla^j R \right. \\
& \quad \left. - \frac{7}{40} \Delta R^{ij} - \frac{1}{30} g^{ij} \Delta R \right), \tag{B.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g^{kl} \nabla^i \nabla_m \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta_{kl}^{mj}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{8\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(-\frac{1}{15} R^{ik} R_k^j + \frac{1}{40} g^{ij} R_{mn} R^{mn} + \frac{1}{15} R R^{ij} - \frac{1}{48} g^{ij} R^2 + \frac{1}{20} \nabla^i \nabla^j R \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{60} \Delta R^{ij} - \frac{1}{60} g^{ij} \Delta R \right), \tag{B.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_n^l \nabla^i \nabla_m \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta_{jl}^{mn}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{8\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(-\frac{1}{120} R^{ik} R_{jk} - \frac{7}{60} \delta_j^i R_{mn} R^{mn} + \frac{1}{20} R R_j^i + \frac{1}{16} \delta_j^i R^2 - \frac{13}{120} \nabla^i \nabla_j R \right. \\
& \quad \left. + \frac{29}{120} \Delta R_j^i - \frac{1}{30} \delta_j^i \Delta R \right), \tag{B.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla^k \nabla^l \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta_{kl}^{ij}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{8\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(\frac{14}{15} R_k^i R^{kj} - \frac{37}{120} g^{ij} R_{mn} R^{mn} - \frac{13}{30} R R^{ij} + \frac{7}{48} g^{ij} R^2 + \frac{13}{60} \nabla^i \nabla^j R \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{20} \Delta R^{ij} - \frac{1}{60} g^{ij} \Delta R \right), \tag{B.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla_m \nabla^k \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta_{kl}^{mn}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{8\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(\frac{11}{120} R_{kl} R^{kn} - \frac{3}{20} \delta_l^n R_{mn} R^{mn} - \frac{13}{60} R R_l^n + \frac{1}{80} \delta_l^n R^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{40} \nabla_l \nabla^n R + \frac{1}{120} \Delta R_l^n \right), \tag{B.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla_m \nabla_n \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta_{ij}{}^{mn}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{8\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(-\frac{1}{15} R_i^k R_{jk} + \frac{1}{40} g_{ij} R_{mn} R^{mn} + \frac{1}{15} R R_{ij} - \frac{1}{48} g_{ij} R^2 \right. \\
& \quad \left. - \frac{7}{60} \nabla_i \nabla_j R + \frac{11}{60} \Delta R_{ij} - \frac{1}{60} g_{ij} \Delta R \right). \tag{B.16}
\end{aligned}$$

Для следа с четырьмя производными существует 5 способов свёртки индексов:

$$\begin{aligned}
& g_{mn} \nabla_i \nabla_j \nabla^k \nabla^l \frac{1}{(-\Delta)^{3/2}} \delta_{kl}{}^{mn}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{4\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(\frac{1}{30} R_{ik} R_j^k - \frac{1}{80} g_{ij} R_{mn} R^{mn} - \frac{1}{30} R R_{ij} + \frac{1}{96} g_{ij} R^2 - \frac{1}{40} \nabla_i \nabla_j R \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{120} \Delta R_{ij} + \frac{1}{120} g_{ij} \Delta R \right), \tag{B.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_n^m \nabla_i \nabla_j \nabla_k \nabla^l \frac{1}{(-\Delta)^{3/2}} \delta_{lm}{}^{kn}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{4\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(-\frac{247}{120} R_{ik} R_j^k + \frac{179}{240} g_{ij} R_{mn} R^{mn} + \frac{41}{60} R R_{ij} - \frac{19}{96} g_{ij} R^2 - \frac{13}{10} \nabla_i \nabla_j R \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{60} \Delta R_{ij} + \frac{1}{60} g_{ij} \Delta R \right), \tag{B.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g^{mn} \nabla_i \nabla_j \nabla_k \nabla_l \frac{1}{(-\Delta)^{3/2}} \delta_{mn}{}^{kl}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{4\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(\frac{1}{30} R_{ik} R_j^k - \frac{1}{80} g_{ij} R_{mn} R^{mn} - \frac{1}{30} R R_{ij} + \frac{1}{96} g_{ij} R^2 - \frac{1}{40} \nabla_i \nabla_j R \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{120} \Delta R_{ij} + \frac{1}{120} g_{ij} \Delta R \right), \tag{B.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla^i \nabla_m \nabla^k \nabla^l \frac{1}{(-\Delta)^{3/2}} \delta_{kl}{}^{mj}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{4\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(-\frac{77}{40} R^{ik} R_k^j + \frac{307}{240} g^{ij} R_{mn} R^{mn} + \frac{113}{60} R R^{ij} - \frac{55}{96} g^{ij} R^2 - \frac{17}{30} \nabla^i \nabla^j R \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{30} \Delta R^{ij} + \frac{1}{120} g^{ij} \Delta R \right), \tag{B.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla_i \nabla_k \nabla_l \nabla^m \frac{1}{(-\Delta)^{3/2}} \delta_{mj}^{kl}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{4\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(-\frac{17}{40} R_{ik} R_j^k - \frac{13}{240} g_{ij} R_{mn} R^{mn} - \frac{9}{20} R R_{ij} + \frac{3}{32} g_{ij} R^2 \right. \\
& \left. - \frac{29}{60} \nabla_i \nabla_j R - \frac{1}{20} \Delta R_{ij} + \frac{1}{120} g_{ij} \Delta R \right). \tag{B.21}
\end{aligned}$$

Есть только один способ свёртки индексов для следа с шестью производными

$$\begin{aligned}
& \nabla_i \nabla_j \nabla_k \nabla_l \nabla^m \nabla^n \frac{1}{(-\Delta)^{3/2}} \delta_{mn}^{kl}(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{1}{6\pi^2} \ln L^2 \\
& \times \sqrt{g} \left(\frac{57}{10} R_{ik} R_j^k - \frac{457}{160} g_{ij} R_{mn} R^{mn} - \frac{49}{20} R R_{ij} + \frac{47}{64} g_{ij} R^2 + \frac{283}{80} \nabla_i \nabla_j R \right. \\
& \left. + \frac{1}{80} \Delta R_{ij} + \frac{19}{80} g_{ij} \Delta R \right). \tag{B.22}
\end{aligned}$$

Векторные следы В этой группе есть один след без производных:

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{1/2} \delta_j^i(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = -\frac{\ln L^2}{16\pi^2} \sqrt{g} \left(-\frac{3}{20} \delta_j^i R^{kl} R_{kl} + \frac{1}{6} R^{ik} R_{kj} - \frac{1}{6} R_j^i R \right. \\
\left. + \frac{11}{120} \delta_j^i R^2 + \frac{1}{30} \delta_j^i \Delta R \right), \tag{B.23}
\end{aligned}$$

три следа с двумя производными:

$$\begin{aligned}
& \delta_k^l \nabla_i \nabla_j \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta^l_k(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{\ln L^2}{8\pi^2} \\
& \times \sqrt{g} \left(\frac{2}{15} R_{ik} R_j^k - \frac{11}{120} g_{ij} R_{kl} R^{kl} - \frac{2}{15} R R_{ij} + \frac{1}{16} g_{ij} R^2 + \frac{3}{20} \nabla_i \nabla_j R \right. \\
& \left. + \frac{1}{20} \Delta R_{ij} - \frac{1}{20} g_{ij} \Delta R \right), \tag{B.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla_i \nabla_k \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta_j^k(x,y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{\ln L^2}{8\pi^2} \\
& \times \sqrt{g} \left(\frac{7}{20} R_{ik} R_j^k - \frac{17}{120} g_{ij} R_{kl} R^{kl} - \frac{4}{15} R R_{ij} + \frac{1}{16} g_{ij} R^2 + \frac{2}{15} \nabla_i \nabla_j R \right. \\
& \left. - \frac{1}{15} \Delta R_{ij} - \frac{1}{60} g_{ij} \Delta R \right), \tag{B.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla_i \nabla^j \frac{1}{(-\Delta)^{1/2}} \delta_j^k(x, y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{\ln L^2}{8\pi^2} \\
& \times \sqrt{g} \left(-\frac{3}{20} R_{ij} R^{jk} + \frac{1}{40} \delta_i^k R_{jl} R^{jl} + \frac{3}{20} R R_i^k - \frac{1}{48} \delta_i^k R^2 - \frac{1}{30} \nabla_i \nabla^k R \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{10} \Delta R_i^k - \frac{1}{60} \delta_i^k \Delta R \right) \tag{B.26}
\end{aligned}$$

и один след с четырьмя производными:

$$\begin{aligned}
& \nabla_i \nabla_j \nabla^l \nabla_k \frac{1}{(-\Delta)^{3/2}} \delta_l^k(x, y) \Big|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{\ln L^2}{4\pi^2} \\
& \times \sqrt{g} \left(-\frac{11}{20} R_{ik} R_j^k + \frac{47}{240} g_{ij} R_{kl} R^{kl} + \frac{2}{15} R R_{ij} - \frac{1}{32} g_{ij} R^2 - \frac{21}{40} \nabla_i \nabla_j R \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{120} \Delta R_{ij} + \frac{1}{120} g_{ij} \Delta R \right). \tag{B.27}
\end{aligned}$$

В.3 Следы с $a = 6$, нулевого порядка по кривизне

Наша задача – посчитать следующие следы в нулевом порядке по кривизне

$$\nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_{2N-2}} \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{N+1/2}} \delta(x, y) \Big|_{y=x}, \quad \Delta \equiv \nabla^i \nabla_i. \tag{B.28}$$

Используя представление гамма-функции для лапласиана, можно записать следующие соотношения

$$\begin{aligned}
& \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_{2N-2}} \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{N+1/2}} \delta(x, y)|_{y=x} \\
&= \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_{2N-2}} \frac{1}{\Gamma(N+1/2)} \int_0^\infty ds s^{N-1/2} e^{s\Delta} \hat{\delta}(x, y)|_{y=x} \\
&= \frac{1}{\Gamma(N+1/2)} \frac{1}{8\pi^{3/2}} \int_0^\infty ds s^{N-2} \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_{2N-2}} \left(\mathcal{D}^{1/2} e^{-\frac{\sigma}{2s}} \sum_{n=0}^\infty s^n \hat{a}_n(x, y) \right) |_{y=x} \\
&= \frac{2^N}{(2N-1)!!} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{N-2} \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_{2N-2}} (e^{-\frac{\sigma}{2s}}) |_{y=x} \hat{1} \\
&= \frac{2^N}{(2N-1)!!} \frac{1}{8\pi^2} \ln L^2 \left(-\frac{1}{2} \right)^{N-1} g_{i_1 \cdots 2N-2}^{(N-1)} \hat{1} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(-1)^{N-1}}{(2N-1)!!} \ln L^2 g_{i_1 \cdots 2N-2}^{(N-1)} \hat{1},
\end{aligned} \tag{B.29}$$

где $g_{i_1 \cdots 2N-2}^{(N-1)}$ – это полностью симметризованный тензор

$$g_{ij}^{(1)} = g_{ij}, \tag{B.30}$$

$$g_{ijkl}^{(2)} = g_{ij}g_{kl} + g_{ik}g_{jl} + g_{il}g_{jk}, \tag{B.31}$$

$$g_{i_1 \cdots 2N}^{(N)} = \sum_{i=2}^{2N} g_{i_1 i_i} g_{i_2 \cdots i_{i-1} i_{i+1} \cdots 2N}. \tag{B.32}$$

Для следов нулевого порядка получаем общую формулу

$$\nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_{2N-2}} \frac{\hat{1}}{(-\Delta)^{N+1/2}} \delta(x, y)|_{y=x} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{(-1)^{N-1}}{(2N-1)!!} \ln L^2 g_{i_1 \cdots 2N-2}^{(N-1)} \hat{1}. \tag{B.33}$$

Приложение Г

Вычисление следов с добавлением неминимальных операторов

Вычисление следов оператора (2.45) наиболее удобно выполнять, применяя разложение ядра теплопроводности в сочетании с методами преобразования Лапласа [79; 112]. Основные технические детали собраны в этом приложении.

Г.1 Разложение ядра теплопроводности и преобразование Меллина

Смотря на аргументы следов в уравнении (2.45), можно обнаружить, что они уже содержат не менее $n - 2$ степеней фоновой кривизны \bar{R} . При выполнении проекции на геометрические операторы (3.28) достаточно иметь разложение ядра теплопроводности для скаляров (S) до второго порядка по кривизне, а для бесследовых тензоров (T) и поперечных векторов (VT) – до первого порядка. Вычисление общего выражения [120] для сферически-симметричного фона (2.10) даёт

$$\text{Tr}_i [e^{-s\Delta}] \simeq \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \int d^d x \sqrt{g} [a_0^i + a_1^i s \bar{R} + a_2^i s^2 \bar{R}^2 + \dots], \quad (\text{Г.1})$$

где “ i ” обозначает тип поля, на которое действует лапласиан, а точки представляют члены с кривизнами более высокого порядка, которые не используются в данном вычислении. Коэффициенты a_n^i , необходимые для нашего случая, перечислены в таблице 3.

Формула теплового ядра (Г.1) легко обобщается на функции лапласиана [79; 112]

$$\begin{aligned} \text{Tr}_i [W(\Delta)] = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int d^d x \sqrt{g} [a_0^i Q_{d/2}[W] + a_1^i Q_{d/2-1}[W] \bar{R} \\ + a_2^i Q_{d/2-2}[W] \bar{R}^2 + \dots]. \end{aligned} \quad (\text{Г.2})$$

	S	T	TV
a_0^i	1	$\frac{(d+2)(d-1)}{2}$	$d-1$
a_1^i	$\frac{1}{6}$	$\frac{(d-1)(d+2)}{12}$	$\frac{(d+2)(d-3)}{6d}$
a_2^i	$\frac{5d^2-7d+6}{360d(d-1)}$	$\frac{(d+1)(5d^4-22d^3-83d^2-392d-228+1440\delta_{d,2}+3240\delta_{d,4})}{720d(d-1)2}$	—

Таблица 3 — Коэффициенты ядра теплопроводности для скаляров (S), бесследовых симметричных матриц (T) и поперечных векторов (TV) на фоне d -сферы [45]. Прочерк — указывает, что соответствующий коэффициент не используется в данном вычислении.

Для $n > 0$, Q-функционалы заданы преобразование Меллина $W(z)$,

$$Q_n[W] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} W(z), \quad n > 0, \quad (\text{Г.3})$$

а для $n = 0$

$$Q_0[W] = W(0). \quad (\text{Г.4})$$

Г.2 Вычисление следов

Теперь вычислим следы операторов, определяющие аномальную размерность геометрических операторов (3.28). Начнем со скалярного сектора, а затем определим минимальный и неминимальный вклады бесследовых флуктуаций. Все безразмерные пороговые функции вычисляются от -2λ , и мы опускаем аргумент, чтобы упростить обозначения, то есть $q_n^p \equiv q_n^p(-2\lambda)$. *Скалярные следы.* Скалярный вклад содержится в трех следах.

$$\begin{aligned} T_0^S &= \text{Tr}_S [W^S(\Delta)] |_{\bar{R}^0}, \\ T_1^S &= \text{Tr}_S [\Delta W^S(\Delta)] |_{\bar{R}^1}, \\ T_2^S &= \text{Tr}_S [\Delta^2 W^S(\Delta)] |_{\bar{R}^2}. \end{aligned} \quad (\text{Г.5})$$

Здесь $|_{\bar{R}^n}$ указывает, что для вычислений важны только члены, содержащие n степеней фоновой скалярной кривизны. Обозначая

$$N_S \equiv -32\pi g_k \frac{2d}{d-2}, \quad (\Gamma.6)$$

мы получаем

$$\begin{aligned} T_0^S &= \frac{2N_S}{(4\pi)^{d/2}} q_{d/2}^2 \int_x, \\ T_1^S &= \frac{N_S}{(4\pi)^{d/2}} \left(a_1^S (d-2) q_{d/2}^2 - 2d C_S q_{d/2+1}^3 \right) \int_x \bar{R}, \\ T_2^S &= \frac{N_S}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{3(d+2)d}{2} C_S^2 q_{d/2+2}^4 - a_1^S d(d-2) C_S q_{d/2+1}^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} a_2^S (d-2)(d-4) q_{d/2}^2 \right] \int_x \bar{R}^2. \end{aligned} \quad (\Gamma.7)$$

Тензорные следы I – минимальные слагаемые. Инспектируя слагаемые, пропорциональные $\mathbb{1}$ в (2.41), запишем следы, которые нужно вычислить в тензорном секторе

$$\begin{aligned} T_0^T &= \text{Tr}_T [W^T(\Delta)] |_{\bar{R}^0}, \\ T_1^T &= \text{Tr}_T [\Delta W^T(\Delta)] |_{\bar{R}^1}. \end{aligned} \quad (\Gamma.8)$$

Аналогично вычислениям в скалярном секторе, эти следы равны

$$\begin{aligned} T_0^T &= \frac{64\pi g}{(4\pi)^{d/2}} a_0^T q_{d/2}^2 \int_x, \\ T_1^T &= \frac{32\pi g}{(4\pi)^{d/2}} \left[a_1^T (d-2) q_{d/2}^2 - 2d a_0^T C_T q_{d/2+1}^3 \right] \int_x \bar{R}. \end{aligned} \quad (\Gamma.9)$$

Тензорные следы I – неминимальные слагаемые. В дополнение к следам от функций лапласиана (Г.8) тензорный сектор порождает два дополнительных следа, в которых не все производные сворачиваются в лапласианы

$$\begin{aligned} T_2^T &= \text{Tr}_T \left[\delta_{(\alpha}^{(\mu} \bar{D}^{\nu)} \bar{D}_{\beta)} W_T(\Delta) \right] |_{\bar{R}^1}, \\ T_3^T &= \text{Tr}_T \left[\bar{D}^{(\mu} \bar{D}^{\nu)} \bar{D}_{(\alpha} \bar{D}_{\beta)} W_T(\Delta) \right] |_{\bar{R}^2}. \end{aligned} \quad (\Gamma.10)$$

Вычисление таких следов немного сложнее. Начнём с дальнейшего разложения поля $\widehat{h}_{\mu\nu}$ на его бесследовую часть $h_{\mu\nu}^{\text{TT}}$, поперечный вектор ξ^μ и скаляр σ [65; 121]

$$\widehat{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{\text{TT}} + \bar{D}_\mu \xi_\nu + \bar{D}_\nu \xi_\mu + \left(\bar{D}_\mu \bar{D}_\nu - \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{D}^2 \right) \sigma, \quad (\text{Г.11})$$

где компонентные поля подчиняются дифференциальным связям

$$\bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = 0, \quad \bar{D}^\mu h_{\mu\nu}^{\text{TT}} = 0, \quad \bar{D}_\mu \xi^\mu = 0. \quad (\text{Г.12})$$

Якобиан, связанный с переопределением поля (Г.11), может быть положен единицей путем переопределения полей по следующему закону

$$\sqrt{2} \left[\Delta - \frac{1}{d} \bar{R} \right]^{1/2} \xi_\mu \mapsto \xi_\mu, \quad \left[\frac{d-1}{d} \Delta^2 - \frac{1}{d} \bar{R} \Delta \right]^{1/2} \sigma \mapsto \sigma. \quad (\text{Г.13})$$

После применения бесследово-поперечного разложения на уровне следов, операторы $\left[\mathcal{O}_n^{(2),\text{nm}} \Big|_{\widehat{h}h} \right]^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ уничтожают слагаемые, содержащие бесследово-поперечную часть флуктуационного поля. Кроме того, неминимальные следы (Г.10) сводятся к следам, включающим только операторы типа Лапласа. Явно, бесследово-поперечное разложение T_2^T дает

$$\begin{aligned} T_2^T = & -\frac{1}{2} \text{Tr}_{\text{TV}} \left[\left(\Delta - \frac{1}{d} \bar{R} \right) W_T(\Delta) \right] + \frac{d+1}{2d(d-1)} \bar{R} \text{Tr}_{\text{TV}} \left[\Delta W_T'(\Delta) \right] \\ & - \text{Tr}_0 \left[\left(\frac{d-1}{d} \Delta - \frac{1}{d} \bar{R} \right) W_T(\Delta) \right] + \frac{2}{d} \bar{R} \text{Tr}_0 \left[\Delta W_T'(\Delta) \right], \end{aligned} \quad (\text{Г.14})$$

где штрих обозначает производную по аргументу, а члены порядка \bar{R}^2 опущены. При вычислении слагаемых порядка \bar{R} с использованием разложения ядра теплопроводности вклад, обусловленный T_2^T , равен

$$T_2^T = -\frac{32\pi g}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{(d+2)^2(d+1)}{12d} q_{d/2}^2 - (d+2)(d-1) C_T q_{d/2+1}^3 \right] \int_x \bar{R}. \quad (\text{Г.15})$$

Обращаем внимание, что производные W_T могут быть преобразованы в стандартные q -функции с помощью интегрирования по частям внутри Q -функцио-

нала.

$$\begin{aligned}
T_3^T &= \text{Tr}_0 \left[\left(\frac{d-1}{d} \Delta^2 - \frac{1}{d} \bar{R} \Delta \right) W_T(\Delta) \right] - \frac{2}{d-1} \bar{R} \text{Tr}_0 \left[\left(\frac{d-1}{d} \Delta^2 - \frac{1}{d} \bar{R} \Delta \right) W_T'(\Delta) \right] \\
&\quad + \frac{2}{d(d-1)} \bar{R}^2 \text{Tr}_0 \left[\Delta^2 W_T''(\Delta) \right] ,
\end{aligned} \tag{Г.16}$$

где мы опустили члены порядка \bar{R}^3 . Обозначая вклад в первом, втором и третьем слагаемом как T_{3a}^T , T_{3b}^T , и T_{3c}^T , соответственно, мы записываем следующие промежуточные результаты

$$\begin{aligned}
T_{3a}^T &= \frac{32\pi g}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{3(d-1)(d+2)}{2} C_T^2 q_{d/2+2}^4 - \frac{(d-5)(d+2)}{6} C_T q_{d/2+1}^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(d+2)(d-2)(5d^2 - 37d - 12)}{720d^2} q_{d/2}^2 \right] \int_x \bar{R}^2 . \\
T_{3b}^T &= \frac{32\pi g}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{(d-5)(d+2)}{6(d-1)} q_{d/2}^2 - 2(d+2) C_T q_{d/2+1}^3 \right] \int_x \bar{R}^2 . \\
T_{3c}^T &= \frac{32\pi g}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d+2}{d-1} q_{d/2}^2 \int_x \bar{R}^2 .
\end{aligned} \tag{Г.17}$$

где мы записываем вклады в соответствующем порядке по \bar{R} . Сложение этих слагаемых дает окончательный результат для T_3^T :

$$\begin{aligned}
T_3^T &= \frac{32\pi g}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{3}{2} (d+2)(d-1) C_T^2 q_{d/2+2}^4 - \frac{1}{6} (d+7)(d+2) C_T q_{d/2+1}^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{5d^5 + 78d^4 + 365d^3 + 420d^2 - 100d - 48}{720d^2(d-1)} q_{d/2}^2 \right] \int_x \bar{R}^2 .
\end{aligned} \tag{Г.18}$$

На этом завершается вывод промежуточных результатов, составляющих (2.48).