

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

На правах рукописи

Собьянин Денис Николаевич

**К теории кинетических и магнитных процессов  
в задачах динамики неравновесной астрофизической  
и твердотельной плазмы**

1.3.3. Теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Москва — 2022

## Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Генерация релятивистской плазмы в магнитосфере нейтронной звезды</b>	<b>17</b>
2.1	Рождение электрон-позитронных пар . . . . .	17
2.1.1	Обобщение суперстатистики Бека — Коэна . . . . .	18
2.1.2	Ветвящиеся процессы . . . . .	31
2.1.3	Энергетическое распределение . . . . .	37
2.2	Излучение субрелятивистских частиц . . . . .	42
2.2.1	Медленно вращающиеся нейтронные звёзды . . . . .	46
2.2.2	Поток энергии . . . . .	47
2.2.3	Множественность и лоренц-фактор . . . . .	50
2.2.4	Поток и энергия вытекающих частиц . . . . .	53
2.2.5	Возможные наблюдения . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Вращательная динамика нейтронной звезды и её электромагнитного поля</b>	<b>59</b>
3.1	Внутренняя электродинамика . . . . .	59
3.1.1	Уравнения Максвелла . . . . .	60
3.1.2	Кватернионы . . . . .	65
3.1.3	Вращение электромагнитного поля . . . . .	66
3.1.4	Заряды и токи . . . . .	68
3.1.5	Роль перестройки поля . . . . .	70
3.2	Быстрые радиовсплески . . . . .	75
3.2.1	Прецессия, электрический ток и парадокс коротации . . . . .	78

3.2.2	Иллюстративный пример . . . . .	81
3.2.3	Аномальный момент . . . . .	92
3.2.4	Оценка магнитного поля для периодических FRB . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Динамика релятивистского струйного магнитоактивного плазменного течения в галактике M87</b>	<b>99</b>
4.1	Структура джета . . . . .	99
4.1.1	Основные уравнения и интегралы движения . . . . .	103
4.1.2	Джет в джете . . . . .	108
4.1.3	Механизмы запуска, устойчивость и замыкание токов . . .	115
4.1.4	Оценки величин . . . . .	119
4.2	Связь с центральной машиной . . . . .	126
4.2.1	Вращение и качание джета . . . . .	127
4.2.2	Прецессия Лензе — Тирринга . . . . .	129
4.2.3	Сравнение с другими оценками . . . . .	133
4.2.4	Связь со структурой «джет в джете» . . . . .	136
4.2.5	Магнитно-арестованный диск . . . . .	137
4.3	Уравнение состояния плазмы . . . . .	138
4.3.1	Сохранение энтропии . . . . .	140
4.3.2	Продольное магнитное давление . . . . .	141
4.3.3	Поперечное электромагнитное давление . . . . .	142
4.3.4	Центробежное давление . . . . .	144
4.3.5	Горячий джет и сохранение тока . . . . .	146
4.3.6	Охлаждение, состав плазмы и механизм запуска . . . . .	149
<b>5</b>	<b>Динамика нерелятивистской твердотельной плазмы</b>	<b>152</b>
5.1	Связь спектра излучения и кинетики поляритонов . . . . .	152
5.2	Аномальное магнитное подавление релаксации спина электронов	156
5.2.1	Прецессия и нутация спина . . . . .	158

5.2.2	Релаксация спина . . . . .	162
5.2.3	Связь спиновой релаксации и пространственной диффузии	164
5.2.4	Сравнение с экспериментом и диффузия Бома . . . . .	165
5.3	Резонансное спиновое усиление . . . . .	171
5.3.1	Теория совместного оптического и магнитного резонанса .	173
5.3.2	Сравнение с экспериментом . . . . .	179
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>185</b>
	<b>Список сокращений и условных обозначений</b>	<b>191</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>193</b>
	<b>Список иллюстративного материала</b>	<b>234</b>
	<b>Список работ, опубликованных по теме диссертации</b>	<b>236</b>

## 1 Введение

### **Актуальность темы исследования и степень её разработанности.**

Множество сложных релятивистских и нерелятивистских плазменных систем проявляют динамику, неоднородную по пространству и времени. В последнее время изучение таких неравновесных систем, их свойств и поведения вызывает большой фундаментальный интерес, а подчас просто является необходимым и с прикладной точки зрения, но полное исследование и понимание их свойств является чрезвычайно сложной задачей. Дело в том, что все равновесные системы в определённом смысле слова схожи, но каждая неравновесная система неравновесна по-своему. Так, для описания состояния равновесной системы с постоянным числом частиц достаточно знать её гамильтониан и температуру окружения, тогда как в неравновесном случае, как минимум, важно знать потоки энергии, протекающие через систему, а то и предысторию процесса прихода в данное состояние, то есть в общем случае имеет значение динамика системы. Простейшей иллюстрацией этого может выступать любой источник излучения: он по существу неравновесен, так как в процессе излучения происходит потеря квантов, то есть или в системе изменяется число частиц и она нестационарна, или это число флуктуирует около некоторого среднего значения, но через систему течёт энергия, что поддерживает её в неравновесном стационарном состоянии. Особенности динамики могут отражаться и на уровне эволюции индивидуальных частиц и их функций распределения, и на уровне эволюции сред-

них значений плотностей, скоростей, зарядов, токов и электромагнитных полей, выражаясь в различных кинетических и магнитогидродинамических явлениях. Такие системы встречаются в самых разных областях физики, включая статистическую физику и кинетику, обычную и магнитную гидродинамику, физику твёрдого тела и квантовую оптику, физику плазмы и астрофизику. Их теоретическое изучение весьма актуально ввиду появления новых теоретических подходов и обилия неожиданных фактов, обнаруживаемых в эксперименте и наблюдениях.

Часто неравновесные системы характеризуются иерархической структурой динамики. Иерархия может формироваться в результате разложения динамики системы на различные типы динамики, имеющие место на разных пространственно-временных масштабах, которые сильно между собой разделены. В этом случае статистические свойства системы можно эффективно описать суперпозицией нескольких статистик. Такая «суперстатистика» была сформулирована в работе [53] для рассмотрения систем со стационарным состоянием и флуктуациями интенсивного параметра, происходящими на временном масштабе, превышающем характерное время релаксации локальной динамики. Если изучаемая система может рассматриваться как множество малых пространственных ячеек, то чаще всего в качестве интенсивного параметра выступает обратная температура в ячейке, однако возможны и более общие его интерпретации. В силу значительного разделения временных масштабов в сложной системе можно рассматривать описанный подход как форму медленной модуляции [29], и он нашёл своё приложение в различных задачах [13, 50, 54, 119, 196, 344]. Изучение кинетических и магнитных процессов в неравновесных плазменных системах, в частности, важно для задач спиновой электроники (спинтроники), нацеленной на создание информационных твердотельных устройств на основе манипулирования спиновой степенью свободы [133, 177]. В практических приложениях требуются большие времена жизни спиновой поляризации электрон-

ной плазмы, поэтому важное значение имеет исследование способов создания неравновесной поляризации системы и механизмов резонансных, транспортных и релаксационных явлений [85, 106, 152, 207]. Кроме спиновых систем, для перспективных информационных приложений также предлагаются оптические логические элементы, основанные на поляритонных системах [30, 44, 375], в связи с чем важно понимание кинетики и излучения таких систем [101, 205, 355].

Кроме лабораторий на Земле, неравновесные плазменные явления, которые оказываются связанными и с кинетикой и с магнитогидродинамикой, происходят в «космических лабораториях» — нейтронных звёздах и релятивистских джетах, и судить об их характере и природе можно по наблюдательным проявлениям. Как хорошо известно, классическим наблюдательным проявлением нейтронной звезды является радиопульсар [57]. В последние годы активно изучаются и другие интересные проявления, например, магнитары [262], гамма-пульсары [88], вращающиеся радиотранзиенты (RRAT) [258], экстремальные нуллеры [353] и даже гибриды вышеназванных объектов [82]. Такое разнообразие проявлений связано с переменной активностью внешних областей нейтронной звезды — её магнитосферы — и говорит о том, что магнитосфера может быть не только чисто вакуумной или полностью заполненной плазмой, но и существенно нестационарной, когда состояние некоторых её областей постоянно меняется от вакуумного к плазмозаполненному и наоборот, при этом интересны характеристики рождаемой плазмы и её отличие от плазмы радиопульсаров. Возможность генерации и излучения нейтронными звёздами лептонов изучается не только теоретически [186, 339], но и подтверждается наблюдениями гамма-гало вокруг пульсаров Геминга и B0656+14 [11, 16], то есть нейтронная звезда может выступать как космический источник заряженных частиц. В этой связи важной является задача о происхождении позитронов, отвечающих за Галактическое аннигиляционное излучение: ранее выдвигалось предположение, что источником таких позитронов могут быть обычные и мил-

лисекундные пульсары, но возникли проблемы с объяснением величины энергии частиц, оказавшейся слишком высокой [298, 354].

Другим проявлением нестационарных неравновесных процессов в космосе являются быстрые радиовсплески (FRB) — одиночные вспышки миллисекундной длительности, детектируемые в радиодиапазоне на частотах  $\sim 1$  ГГц с чрезвычайно высоким общим энерговыделением в предположении изотропии  $\sim 10^{40}$  эрг [103, 289]. Что отвечает за такие вспышки, неизвестно, и была предложена их связь с нейтронными звёздами, чёрными дырами или более экзотическими объектами [93, 182, 229, 292, 369], а после обнаружения периодической активности FRB проблема только усложнилась [95, 302]. Релятивистские джеты, то есть космические струйные выбросы плазмы высокой энергии, движущейся со скоростью, близкой к скорости света, также привлекались для объяснения FRB [203], но их изучение очень важно и само по себе, так как природа джетов и механизм их запуска, коллимации, стабилизации и распространения во внешней среде до сих пор до конца не установлены [96, 100, 136, 184, 240] несмотря на то, что их теоретическое исследование началось очень давно [65, 236, 285]. Особый интерес здесь представляет исследование джета в галактике M87, которое благодаря многообразию наблюдаемого излучения, близости и яркости джета, большой массе центральной сверхмассивной чёрной дыры и, как следствие, наблюдательным данным высокого качества наиболее перспективно в плане прояснения физических процессов, происходящих в джетах в активных ядрах галактик.

**Цели и задачи.** Целью диссертации является развитие теории кинетических и магнитных процессов в сложных релятивистских и нерелятивистских плазменных системах, связанных с рядом актуальных направлений современной физики и астрофизики, и объяснение обнаруживаемого в лабораторном эксперименте и астрофизических наблюдениях необычного поведения таких систем. В диссертации решены три большие группы задач, первая из которых



связана с релятивистской плазмой нейтронных звёзд, вторая — с релятивистской плазмой астрофизических джетов, и третья — с нерелятивистской плазмой твёрдых тел:

1. Рассмотреть нелокальное нестационарное рождение релятивистской электрон-позитронной плазмы в магнитосфере нейтронной звезды и вычислить энергетическое распределение частиц при экспоненциальном росте их числа. Изучить возможность работы старых нейтронных звёзд под воздействием внешнего космического гамма-фона и рассчитать характеристики генерируемых плазменных потоков. Исследовать внутреннюю электродинамику нейтронной звезды, твердотельно вращающейся вокруг неподвижной точки, и возникновение самодействия из-за вращения. Обсудить возможные наблюдательные астрофизические проявления исследованных процессов.

2. В свете появления новых данных астрофизических наблюдений высокого разрешения определить возможную структуру релятивистского струйного плазменного выброса в галактике M87 и распределение различных физических параметров, а также дать конкретные оценки величин. Изучить механизм возникновения обнаруженного квазипериодического поперечного смещения джета, связать его параметры с параметрами центральной машины и обсудить характеристики аккреционного потока. Исследовать вопрос об уравнении состояния плазмы и сделать выводы о термодинамике, электродинамике и механизме запуска джета. Сопоставить полученные теоретические результаты с наблюдательными данными.

3. Исследовать задачу о кинетике поляритонов в полупроводниковом микрорезонаторе и спектре излучения. Изучить динамику спина в двумерном электронном газе высокой подвижности в слабом и сильном магнитном поле при различных температурах. Найти связь времени релаксации спина с кинетическими процессами в системе и сделать выводы о характере процессов. Рассмотреть магнитные и оптические резонансные явления в объёмной спиновой си-

стеме и вычислить наблюдаемые спектры спиновой поляризации. Сопоставить полученные теоретические результаты с результатами лабораторных экспериментов.

### **Научная новизна.**

1. Построено обобщение суперстатистики Бека — Коэна, учитывающее флуктуации векторного управляющего параметра неравновесной системы. Рассчитана функция распределения электронов и позитронов по энергиям в магнитосфере нейтронной звезды для нестационарного нелокального случая экспоненциального умножения плазмы. Данная функция, несмотря на нестационарность умножения, оказывается стационарной, но, в отличие от случая стационарной генерации плазмы в магнитосфере обыкновенных пульсаров и магнитаров, не является степенной. Показано, что нейтронные звёзды, которые пересекли линию смерти на диаграмме «период — магнитное поле», могут являться источником субрелятивистских позитронов в Галактике, объясняющим данные по аннигиляционной линии 511 кэВ, при этом генерация позитронов носит существенно нелокальный характер. Найдено, что вращение нейтронной звезды за счёт возникновения некоротационных электрических токов вызывает её вынужденную прецессию, которая может быть связана с наблюдаемой периодичностью быстрых радиовсплесков. На основе этого получены оценки магнитного поля их прогениторов.

2. Построена магнитогидродинамическая модель «джет в джете», в рамках которой вычислены распределения и предсказаны значения различных физических параметров релятивистского джета в галактике М87, таких как электромагнитные поля, заряды, токи, давление, плотность, множественность, потоки масс и температура. В частности, магнитное поле на основании джета порядка 80 Гс оказывается достаточным для обеспечения наблюдаемой светимости джета, то есть часто теоретически обсуждаемых больших величин магнитного поля порядка  $10^3$ — $10^4$  Гс не требуется. Постоянное электрическое на-

пряжение между внешним и внутренним джетами обеспечивает одинаковые наблюдаемые законы их расширения. Из анализа выведенных значений параметра чёрной дыры по вращению и качанию джета предсказано, что аккреционный диск является магнитно-арестованным. Показано, что изменение показателя политропы от первоначального значения  $4/3$  на субпарсековских масштабах до значения  $5/3$  при охлаждении плазмы без промежуточной задержки на значении 1.44 может быть признаком существования чистой электрон-позитронной компоненты в джете.

3. В рамках исследования динамики поляритонов в полупроводниковом микрорезонаторе выведена форма поляритонной линии и получено общее соотношение для её ширины. Обнаруженные осцилляции времени релаксации спина в квантовой яме в зависимости от магнитного поля связаны с осцилляциями плотности состояний на уровне Ферми и соответствуют переходу в режим эффекта Шубникова — де-Гааза и квантового эффекта Холла при сильных магнитных полях и низких температурах, а возникновение аномального магнитного подавления релаксации связано с изменением характера диффузии электронной плазмы. Для объёмного случая исследован новый тип резонанса, возникающий при совместном воздействии на систему электронного спинового резонанса (ЭСР) в магнитном поле и резонансного спинового усиления (РСУ) периодическим импульсным оптическим излучением. Показано согласие теории и эксперимента.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты по обобщению суперстатистики Бека — Коэна позволяют рассматривать неравновесные системы с флуктуирующими управляющими параметрами и допускают обобщение на большее количество динамических уровней и более общие статистики. Результаты по динамике поляритонов в полупроводниковом микрорезонаторе могут применяться для экспериментального определения неравновесной температуры экситонного резервуара. Результаты по нестационарной генерации

плазмы в магнитосфере нейтронной звезды дают представление о доле ускоренных частиц в системе, а результаты по потухшим радиопульсарам позволяют объяснить существующий поток позитронов в Галактике требуемых энергий. Результаты по внутренней электродинамике нейтронной звезды объясняют механизм вынужденной прецессии и позволяют оценить магнитное поле источников повторяющихся быстрых радиовсплесков и судить об их природе. Результаты по исследованию релятивистского джета в галактике M87 раскрывают его структуру, физические параметры и их связь с параметрами центральной машины и позволяют делать выводы о механизме запуска джета и природе аккреционного диска. Эти результаты могут прилагаться и к другим астрофизическим источникам, тем самым внося вклад в расширение представлений о природе джетов в активных ядрах галактик. Кроме того, они могут использоваться для проверки сложных численных магнитогидродинамических расчётов и расчётов методом частиц в ячейках. Результаты по спиновой динамике в магнитном поле могут быть использованы для управления условиями резонансного спинового усиления и тонкой настройки средней спиновой поляризации без изменения параметров оптической накачки.

**Методология и методы исследования.** Результаты диссертации получены путём теоретических вычислений. При решении поставленных научных задач используются методы теоретической и математической физики, проводится изучение имеющихся экспериментальных и наблюдательных данных. Применяются кинетический и магнитогидродинамический подходы, используются общие законы сохранения вещества, энергии и импульса, записанные в релятивистском виде, при этом учитывается энергия и импульс как собственно вещества, так и содержащегося в нём электромагнитного поля. В адиабатическом случае используется закон сохранения энтропии и степенная связь между давлением и плотностью вещества, в идеальном случае — условие бесконечной проводимости плазмы, а эволюция электромагнитного поля, зарядов

и токов определяется самосогласованным образом из уравнений Максвелла. В осесимметричном стационарном случае используются магнитогидродинамические интегралы движения, сохраняющие свою величину при движении вдоль магнитных трубок. Они дают некоторые алгебраические соотношения между различными характеристиками потоков и заменяют собой более сложные общие дифференциальные соотношения, так что рассмотрение системы упрощается. При описании вращений используются кватернионы, при рассмотрении спиновой динамики учитывается возникновение спин-орбитального взаимодействия из-за специфики структуры вещества и влияние магнитного поля. Проводится сравнение результатов теории и лабораторного эксперимента, численного моделирования или астрофизических наблюдений.

#### **Положения, выносимые на защиту.**

1. Каскад умножения плазмы в магнитосфере нейтронной звезды при экспоненциальном нарастании числа частиц характеризуется формированием стационарного энергетического распределения электронов и позитронов. Малая доля полностью ускоренных частиц в системе физически связана с конечностью длины свободного пробега фотонов, излучаемых частицами.

2. Наблюдаемый избыток позитронов в Галактике можно объяснить работой потухших радиопульсаров. Механизм работы этих старых нейтронных звёзд связан с генерацией в их магнитосфере субрелятивистской плазмы за счёт поглощения в магнитном поле космических гамма-квантов и их превращения в электрон-позитронные пары.

3. Периодические быстрые радиовсплески можно связать с вращающимися нейтронными звёздами, совершающими вынужденную прецессию. Механизм возникновения такой прецессии заключается в обратном влиянии электромагнитных сил, индуцируемых вращением замагниченного вещества, на само вращение и имеет место даже при отсутствии деформации звезды.

4. Релятивистский джет в галактике M87 может обладать структурой

«джет в джете». Эта структура может отражать одновременную работу двух различных механизмов запуска джета, один из которых связан с центральной сверхмассивной чёрной дырой, а другой — с окружающим аккреционным диском.

5. Наблюдаемое качание джета в галактике M87 можно связать с общерелятивистской прецессией Лензе — Тирринга наклонённого аккреционного диска. По периоду качания можно дать новые оценки параметра вращения центральной сверхмассивной чёрной дыры в зависимости от её массы и характеристик диска.

6. Джет в галактике M87 на субпарсековых масштабах является горячим и характеризуется релятивистским политропным уравнением состояния, при этом имеет место точное сохранение продольного электрического тока. Наблюдаемое изменение профиля ускорения на более далёких расстояниях может быть связано с охлаждением плазмы и отражать работу механизма Блэндфорда — Знаека.

7. Ширина поляритонной линии излучения полупроводникового микрорезонатора определяется скоростью ухода поляритонов из рассматриваемого поляритонного состояния и его средним числом заполнения. Эту зависимость можно использовать для экспериментального определения временной динамики неравновесной температуры экситонного резервуара.

8. Скорость продольной релаксации спина электронов в квантовой яме связана со скоростью их пространственной диффузии в магнитном поле. Обнаруженное аномальное магнитное подавление спиновой релаксации может являться проявлением диффузии Бома в двумерном электронном газе.

9. Увеличение амплитуды радиочастотного магнитного поля при совместном влиянии на объёмную спиновую систему магнитного и оптического резонанса приводит к расщеплению резонансного спектра. С помощью этого поля можно точно управлять средней спиновой поляризацией системы.

**Личный вклад автора** заключается в непосредственном проведении научных исследований, построении теории исследуемых процессов и выполнении аналитических расчётов, получении результатов и их сравнении с имеющимися экспериментальными и наблюдательными данными, формулировке выводов и их апробации на научных конференциях и семинарах, подготовке и публикации научных статей по теме диссертации. Изложенное в разд. 2.2 исследование излучения позитронов старыми нейтронными звёздами выполнено совместно с Я. Н. Истоминым, остальные результаты, представленные в диссертации, получены лично автором. Результаты из работ, опубликованных с соавторами, отражают личный вклад автора в эти работы. В изложенной в разд. 5.1 задаче по поляритонам автору, кроме представленных теоретических результатов, принадлежит экспериментальное предложение по проведению пространственного фурье-преобразования с помощью линзы для получения спектров высокого качества, реализованное В. В. Белых. Графики с экспериментальными результатами по динамике плазмы твёрдых тел, представленные в гл. 5, построены В. В. Белых.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается тем, что теория основана на известных фундаментальных физических законах и дополнительных соотношениях, выполняющихся в исследуемых системах. При построении теории использовались строгие аналитические методы и физически обоснованные приближения. Показано согласие полученных результатов и предсказаний с современными экспериментальными и наблюдательными данными и результатами численного моделирования, а также сводимость результатов в частных случаях к ранее установленным теоретическим результатам. Некоторые полученные результаты стали использоваться и получили дальнейшее развитие в работах других учёных.

Результаты, вошедшие в диссертацию, были получены в период с 2011

по 2020 год и опубликованы в 36 работах, в том числе в 15 статьях в ведущих международных научных рецензируемых журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией и индексируемых в международной базе данных Web of Science. Результаты диссертационной работы были представлены на 8, 11, 15 и 16 конференции молодых учёных «Фундаментальные и прикладные космические исследования», посвящённой Дню космонавтики (ИКИ РАН, Москва, 2011, 2014, 2018, 2019), конференции, посвящённой 50-летию кафедры проблем физики и астрофизики МФТИ (ФИАН, Москва, 2018), 5 Всероссийской молодёжной конференции «Фундаментальные и инновационные вопросы современной физики» (ФИАН, Москва, 2013), Международной конференции по физике нейтронных звёзд (ФТИ им. А. Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, 2011), 25 Международной научной конференции «Ломоносов» (МГУ, Москва, 2018), 28 Международном симпозиуме «Наноструктуры: физика и технология» (Минск, 2020) и на 1 и 2 Международной Гинзбургской конференции по физике (ФИАН, Москва, 2012, 2017), а также докладывались на астрофизическом семинаре, общем семинаре и семинаре по теории твёрдого тела Отделения теоретической физики им. И. Е. Тамма ФИАН, семинаре Отделения твёрдого тела ФИАН и семинаре Отдела теоретической астрофизики Астрокосмического центра ФИАН. Результаты диссертации неоднократно входили в сборник основных результатов научной деятельности ФИАН и направлялись в Российскую академию наук. Автор за циклы работ по развитым новым направлениям исследований трижды удостоен научных премий: «Теоретическое исследование нестационарных процессов в магнитосферах нейтронных звёзд» (премия им. П. Н. Лебедева ФИАН, 2013), «Теория коллапса антипузырька» (премия им. П. Н. Лебедева ФИАН, 2016), «Бозе-Эйнштейновская конденсация света» (премия им. И. Е. Тамма ФИАН, 2017). В 2016 г. автор выступал в качестве приглашённого эксперта Европейского исследовательского совета (European Research Council).



## 2 Генерация релятивистской плазмы в магнитосфере нейтронной звезды

В данной главе представлены результаты по кинетике и умножению релятивистской электрон-позитронной плазмы в сильном электромагнитном поле нейтронных звёзд [A1–A5, A15–A23].

### 2.1 Рождение электрон-позитронных пар

Некоторое время назад были открыты новые нестационарные космические источники, ассоциированные с нейтронными звёздами, а именно выключающиеся пульсары [213] и вращающиеся радиотранзиенты (RRAT) [258]. Существенная особенность этих источников заключается в их долгом «молчании», когда от них не наблюдается никакого радиоизлучения. Так как за наблюдаемое радиоизлучение ответственна электрон-позитронная плазма, вытекающая из магнитосферы нейтронной звезды, генерация плазмы может на некоторое время выключаться. В этом случае поглощение фотона высокой энергии во внутренней магнитосфере нейтронной звезды запускает нестационарный каскад рождения пар [A1], который в свою очередь приводит к образованию «молнии» [A2], возможным проявлением которых являются радиовспышки RRAT

[A3] (см. разд. 2.2). В молнии мы имеем дело с ультрарелятивистской электрон-позитронной плазмой. Свойства излучения электронов и позитронов определяются их энергией, поэтому важно найти энергетическое распределение частиц. Для этого воспользуемся результатами работы [A4].

### 2.1.1 Обобщение суперстатистики Бека — Коэна

Множество сложных неравновесных систем проявляют динамику, неоднородную по пространству и времени, которая часто имеет иерархическую структуру. Такая иерархия может формироваться в результате разложения динамики системы на различные типы динамики, развёртывающейся на разных пространственно-временных масштабах. В этом случае статистические свойства системы можно эффективно описать суперпозицией нескольких статистик, или «суперстатистикой».

Суперстатистика была сформулирована в работе [53] для рассмотрения систем со стационарным состоянием и флуктуациями интенсивного параметра. Некоторые предварительные понятия формулировались и ранее [47, 49, 357]. Суперстатистические системы характеризуются существованием какого-либо интенсивного параметра  $\beta$ , который флуктуирует на более длительном временном масштабе, нежели типичное время релаксации локальной динамики. Если рассматриваемую систему можно представить как множество малых пространственных ячеек, то обычно в качестве такого параметра берут обратную температуру в ячейке, однако возможны и более общие интерпретации интенсивного параметра. Достаточное разделение временных масштабов двух соответствующих типов динамики в сложной системе позволяет квалифицировать суперстатистику как форму медленной модуляции [29].

Суперстатистика применима к различным сложным системам, и приложения среди прочего включают проблемы энергетических спектров космических лучей и аннигиляции электрон-позитронных пар [50, 52], представления фейнмановских пропагаторов для частиц со спином 0 и 1/2 [196], обобщение теории случайных матриц на системы со смешанной регулярно-хаотической динамикой [19–21], нестационарные динамические процессы с меняющимися во времени показателями мультипликативного шума [119], марковские системы без детального равновесия [237], мезоскопический подход к проблеме броуновского движения [307], модели метастатического каскада в раковых системах [226], сложные сети [15], экосистемы, подверженные гидроклиматическим флуктуациям [293], системы с образованием паттернов [110], солнечные вспышки [43], флуктуации стоимости ценных бумаг [32, 40, 195, 344], статистику задержек в отправлении поездов [75], флуктуации скорости ветра [306] и множество интересных приложений в гидродинамической турбулентности [13, 51, 54, 198, 304, 344].

На некоторое время представим, что мы имеем дело со сложной неравновесной системой, описываемой суперстатистикой. Одной из основных задач является определение распределения  $f(\beta)$  интенсивного параметра  $\beta$ . Его можно найти с помощью принципа максимума энтропии [14]. Кроме того,  $f(\beta)$  можно рассматривать как функцию некоторого набора дополнительных управляющих параметров  $\{\lambda_i\}$  [343],

$$f = f(\beta, \{\lambda_i\}). \quad (1)$$

Эти параметры возникают как множители Лагранжа, определяемые из максимизации энтропии Больцмана — Гиббса — Шеннона  $f(\beta, \{\lambda_i\})$  при определённых ограничениях. Вернёмся к параметру  $\beta$ . В каждой ячейке суперстатистической системы имеется каноническое распределение Гиббса  $\rho_G(E|\beta) = e^{-\beta E}/Z(\beta)$ , где  $Z(\beta)$  — статистическая сумма. Это распределение можно получить с помощью максимизации энтропии Больцмана — Гиббса — Шенно-

на, связанной с нормированным распределением  $\rho(E|\beta)$ , где  $\beta$  — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению на среднюю энергию. Мы видим, что, в общем, и  $\beta$  и  $\{\lambda_i\}$  имеют сходную природу. Однако в суперстатистике  $\beta$  флуктуирует, а управляющие параметры постоянны.

Можно поставить следующий вопрос: какая статистика возникает в случае флуктуирующих управляющих параметров? Далее строится обобщение суперстатистики Бека — Коэна, которое позволяет должным образом рассматривать такие флуктуации. Они формируют отдельный, верхний уровень динамики, тем самым приводя к многомасштабной суперстатистике. Предположения о возможном существовании такой суперстатистики высказывались в работе [14].

Рассмотрим неравновесную систему, состоящую из набора неравновесных подсистем, описываемых своими суперстатистиками. Эту систему можно называть обобщённой суперстатистической системой. Введём случайную переменную  $\xi$ , которая определяет свойства каждой неравновесной суперстатистической системы. Роль  $\xi$  в определении свойств подсистем подобна роли  $\beta$  в определении свойств ячеек, составляющих суперстатистическую подсистему. Иными словами,  $\xi$  является управляющим параметром, определяющим форму суперстатистического распределения для каждой подсистемы. Здесь мы не ограничиваемся рассмотрением  $\xi$  как скалярной случайной переменной и  $\xi$  может быть многомерным вектором. Распределение  $\xi$  характеризуется плотностью вероятности  $c(\xi)$ , которая нормирована,

$$\int c(\xi)d\xi = 1. \quad (2)$$

Можно посмотреть на обобщённую суперстатистическую систему, используя подход гиперансамблей [105]. Развитый в контексте неравновесных систем, данный подход согласуется со стандартной теорией равновесной статистической физики [275]. Суперстатистику можно рассматривать как теорию гиперансамблей [12]. Каждая суперстатистическая подсистема всей системы представляет

собой гиперансамбль, то есть смесь канонических ансамблей. В свою очередь, систему как целое можно описать смесью гиперансамблей, соответствующих подсистемам. Иными словами, обобщённая суперстатистическая система представляет собой обобщённый гиперансамбль, то есть ансамбль гиперансамблей.

В рассматриваемой системе есть три уровня динамики. Первый уровень — это уровень быстрой динамики в ячейке. Вторым уровнем — это уровень суперстатистической динамики в подсистеме. Существование дополнительной динамики, описываемой  $\xi$ , формирует третий уровень в иерархии динамик, а статистику обобщённой суперстатистической системы можно называть обобщённой суперстатистикой, то есть статистикой суперстатистик.

Рассмотрим суперстатистическую подсистему обобщённой суперстатистической системы. Пусть  $\Gamma(E|\xi)$  — неубывающая функция, представляющая собой число состояний с энергией меньше  $E$ . Случайная переменная  $\xi$  определяет плотность энергетических состояний для подсистемы,

$$g(E|\xi) = \frac{\partial \Gamma(E|\xi)}{\partial E}. \quad (3)$$

Включение плотности состояний в суперстатистическое описание является существенным [310]. При записи  $d\Gamma(E|\xi)$  в интегралах мы будем подразумевать интегрирование по  $E$ , так что

$$d\Gamma(E|\xi) = g(E|\xi)dE. \quad (4)$$

Каноническое распределение Гиббса для каждой ячейки подсистемы есть

$$\rho_G(E|\beta, \xi) = \frac{e^{-\beta E}}{Z(\beta|\xi)}, \quad (5)$$

где

$$Z(\beta|\xi) = \int e^{-\beta E} d\Gamma(E|\xi) \quad (6)$$

— статистическая сумма. По аналогии с подходом, использованным в работе [343], мы не включаем плотность состояний в определение энергетического рас-

предела (5); следовательно, условие нормировки имеет вид

$$\int \rho_G(E|\beta, \xi) d\Gamma(E|\xi) = 1. \quad (7)$$

Мы также считаем, что  $\xi$  определяет распределение  $f(\beta|\xi)$  интенсивного параметра  $\beta$ . Это распределение нормировано,

$$\int f(\beta|\xi) d\beta = 1. \quad (8)$$

Отметим, что  $g(E|\xi)$  и  $f(\beta|\xi)$  — не обязательно статистически зависимые переменные. Они будут изменяться независимо, если выбрать  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ , где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — независимые случайные величины, и положить  $g(E|\xi) = g(E|\xi_1)$  и  $f(\beta|\xi) = f(\beta|\xi_2)$ .

Суперстатистическое распределение для подсистемы даётся выражением

$$\rho(E|\xi) = \int \rho_G(E|\beta, \xi) f(\beta|\xi) d\beta, \quad (9)$$

при этом условие нормировки имеет вид

$$\int \rho(E|\xi) d\Gamma(E|\xi) = 1. \quad (10)$$

Если  $\xi$  — неслучайный вектор, то это распределение сводится к обычному суперстатистическому распределению [53]. Усредняя распределение (9) по флуктуирующему  $\xi$ , сразу получаем обобщённое суперстатистическое распределение [A4]

$$\sigma(E) = \int \rho(E|\xi) g(E|\xi) c(\xi) d\xi, \quad (11)$$

которое нормировано,

$$\int \sigma(E) dE = 1. \quad (12)$$

Интересно найти какие-либо общие принципы получения распределения интенсивного и управляющего параметров. Отметим, что в случае обычной суперстатистики основным подходом для нахождения распределения интенсивного параметра является максимизация обобщённой энтропии или энтро-

пии Больцмана — Гиббса — Шеннона при определённых ограничениях [12–14, 105, 275, 340, 343]. Сейчас мы увидим, что такого рода подход можно использовать и в случае обобщённой суперстатистики [A5].

Как уже отмечалось, удобно представлять обобщённую суперстатистическую систему как набор суперстатистических подсистем, каждая из которых в свою очередь состоит из набора ячеек. В этой системе есть три уровня динамики: первый, нижний уровень быстрой динамики в ячейке, второй, средний уровень суперстатистической динамики в подсистеме и третий, верхний уровень глобальной динамики во всей системе. Уровни выстроены в порядке возрастания динамического масштаба времени, так что наименьший масштаб времени соответствует нижнему уровню. Локальная динамика в ячейке характеризуется энергией  $E$ , суперстатистическая динамика в подсистеме — интенсивным параметром  $\beta$ , а глобальная динамика во всей системе — управляющим параметром  $\xi$ , который может быть многомерным вектором.

Иерархия в системе формируется из-за достаточного разделения временных масштабов на различных уровнях динамики. Это позволяет сформулировать принцип максимума энтропии для обобщённой суперстатистической системы как принцип иерархической максимизации энтропии: энтропия должна быть максимизирована сначала для каждой ячейки, затем для каждой подсистемы и наконец для системы в целом.

Хотя существование канонического распределения Гиббса на нижнем динамическом уровне в суперстатистике постулируется, сначала разумно явным образом получить это распределение из принципа максимума энтропии. Этот тривиальный вывод позволит нам далее без труда увидеть аналогию между динамикой на различных уровнях иерархии обобщённой суперстатистической системы.

Выберем суперстатистическую систему обобщённой суперстатистической системы. Этой подсистеме соответствует некоторое фиксированное значение

управляющего параметра  $\xi$ , но интенсивный параметр  $\beta$  всё же может флуктуировать. Выбор подсистемы также фиксирует плотность энергетических состояний (3), а в интегралах с  $d\Gamma(E|\xi)$  совершается интегрирование по  $E$  в соответствии с формулой (4).

Чтобы рассмотреть локальную динамику, выберем ячейку подсистемы. Тогда  $\beta$  также становится фиксированным, но энергия  $E$  не фиксирована и характеризуется распределением вероятностей  $\rho(E|\beta, \xi)$ . Чтобы найти распределение, максимизирующее энтропию Больцмана — Гиббса — Шеннона

$$S[E](\beta|\xi) = - \int \rho(E|\beta, \xi) \ln \rho(E|\beta, \xi) d\Gamma(E|\xi) \quad (13)$$

при условии нормировки

$$N[E](\beta|\xi) = 1 \quad (14)$$

и ограничении на среднюю энергию

$$U[E](\beta|\xi) = U(\beta|\xi), \quad (15)$$

где

$$N[E](\beta|\xi) = \int \rho(E|\beta, \xi) d\Gamma(E|\xi), \quad (16)$$

$$U[E](\beta|\xi) = \int E \rho(E|\beta, \xi) d\Gamma(E|\xi), \quad (17)$$

нужно рассмотреть условие нулевой вариации

$$\delta L_1 = 0 \quad (18)$$

для функции Лагранжа

$$L_1(\nu_1, \beta, \xi) = S[E](\beta|\xi) - (\nu_1 - 1)N[E](\beta|\xi) - \beta U[E](\beta|\xi). \quad (19)$$

Тогда мы приходим к каноническому распределению Гиббса

$$\rho_G(E|\beta, \xi) = \frac{e^{-\beta E}}{Z(\beta|\xi)}, \quad (20)$$



где

$$Z(\beta|\xi) = \int e^{-\beta E} d\Gamma(E|\xi) \quad (21)$$

— статистическая сумма. Энтропия равна

$$S[E](\beta|\xi) = \nu_1(\beta|\xi) + \beta U(\beta|\xi), \quad (22)$$

где средняя энергия

$$U(\beta|\xi) = -\frac{\partial \nu_1(\beta|\xi)}{\partial \beta} \quad (23)$$

выражается через функцию Масьё

$$\nu_1(\beta|\xi) = \ln Z(\beta|\xi). \quad (24)$$

Теперь рассмотрим суперстатистическую динамику выбранной подсистемы. Эта динамика характеризуется флуктуирующим интенсивным параметром  $\beta$ , который определяет свойства ячеек подсистемы. Чтобы найти распределение интенсивного параметра  $f(\beta|\xi)$ , следует максимизировать энтропию совместного распределения вероятностей  $E$  и  $\beta$  при заданном  $\xi$ . Она записывается как [12, 14]

$$S[E, \beta](\xi) = S[\beta](\xi) + \int S[E](\beta|\xi) f(\beta|\xi) d\beta \quad (25)$$

где

$$S[\beta](\xi) = - \int f(\beta|\xi) \ln f(\beta|\xi) d\beta \quad (26)$$

— энтропия, ассоциированная с  $f(\beta|\xi)$ , а  $S[E](\beta|\xi)$  даётся формулой (22). Условие нормировки для  $f(\beta|\xi)$  имеет вид

$$N[\beta](\xi) = 1, \quad (27)$$

где

$$N[\beta](\xi) = \int f(\beta|\xi) d\beta. \quad (28)$$

Кроме того, можно наложить набор  $n$  ограничений, определяемых  $n$ -мерным векторным равенством

$$M[\beta](\xi) = M(\xi), \quad (29)$$

где

$$M[\beta](\xi) = \int m(\beta|\xi) f(\beta|\xi) d\beta, \quad (30)$$

а

$$m(\beta|\xi) = [m_1(\beta|\xi), \dots, m_n(\beta|\xi)] \quad (31)$$

и

$$M(\xi) = [M_1(\xi), \dots, M_n(\xi)] \quad (32)$$

—  $n$ -мерные векторы, задающие соответственно форму и значения ограничений. Каждое  $M_i(\xi)$  — это среднее  $m_i(\beta|\xi)$  по флуктуирующему  $\beta$  при заданном  $\xi$ . Мы рассматриваем  $M[\beta](\xi)$  как некоторый общий вектор ограничений, но он может состоять из ограничений, используемых в обычной суперстатистике, например средних значений энергии, энтропии, квадрата энтропии, энергии, делённой на температуру, или логарифма статистической суммы [13, 105, 275, 343].

Также определим  $n$ -мерный векторный множитель Лагранжа

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n), \quad (33)$$

где каждый  $\mu_i$  — это множитель Лагранжа, соответствующий ограничению

$$M_i[\beta](\xi) = M_i(\xi). \quad (34)$$

Тогда мы имеем следующую функцию Лагранжа:

$$L_2(\nu_2, \mu, \xi) = S[E, \beta](\xi) - (\nu_2 - 1)N[\beta](\xi) - \mu \cdot M[\beta](\xi). \quad (35)$$

Посредством

$$a \cdot b = \sum a_i b_i \quad (36)$$

обозначено скалярное произведение некоторых векторов  $a$  и  $b$ . Условие

$$\delta L_2 = 0 \quad (37)$$

даёт распределение интенсивного параметра

$$\tilde{f}(\beta|\mu, \xi) = \frac{Z(\beta|\xi)}{\tilde{Y}(\mu, \xi)} \exp[-\mu \cdot m(\beta|\xi) + \beta U(\beta|\xi)], \quad (38)$$

где статистическая сумма

$$\tilde{Y}(\mu, \xi) = \int Z(\beta|\xi) \exp[-\mu \cdot m(\beta|\xi) + \beta U(\beta|\xi)] d\beta \quad (39)$$

определяется из условия нормировки  $\tilde{f}(\beta|\mu, \xi)$ .

Отметим, что  $\tilde{f}(\beta|\mu, \xi)$  и  $\tilde{Y}(\mu, \xi)$  всё ещё зависят от множителя Лагранжа  $\mu$ . Неявная зависимость  $\mu$  от управляющего параметра  $\xi$ ,

$$\mu = \mu(\xi), \quad (40)$$

определяется из формулы

$$M(\xi) = -\frac{\partial \tilde{\nu}_2(\mu, \xi)}{\partial \mu}, \quad (41)$$

где

$$\tilde{\nu}_2(\mu, \xi) = \ln \tilde{Y}(\mu, \xi) \quad (42)$$

— функция Масьё, а

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \left( \frac{\partial}{\partial \mu_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \mu_n} \right) \quad (43)$$

—  $n$ -мерный оператор градиента. Формулы (41) и (42) аналогичны формулам (23) и (24) соответственно. Итак, при заданных ограничениях (29) распределение интенсивного параметра (38), статистическая сумма (39) и функция Масьё (42) зависят только от  $\beta$  и  $\xi$ :

$$f(\beta|\xi) = \tilde{f}(\beta|\mu(\xi), \xi), \quad (44)$$

$$Y(\xi) = \tilde{Y}(\mu(\xi), \xi), \quad (45)$$

$$\nu_2(\xi) = \tilde{\nu}_2(\mu(\xi), \xi). \quad (46)$$

Мы можем либо сначала задать вектор ограничений  $M(\xi)$  и затем найти  $\mu(\xi)$  из принципа максимума энтропии, либо наоборот. Это полностью аналогично случаю динамики в ячейке, когда мы можем сначала задать среднюю энергию  $U(\beta)$  и затем найти соответствующий интенсивный параметр  $\beta$  или, что более обычно, задать  $\beta$  и затем найти  $U(\beta)$ . Между прочим, такая двойственность позволяет дать альтернативную формулировку суперстатистики путём введения флуктуаций  $U(\beta)$  вместо флуктуаций  $\beta$  [56]. Отметим, что управляющий параметр  $\xi$  имеет более общую природу, чем  $\beta$ , так как  $\beta$  является точным множителем Лагранжа, в то время как  $\xi$  хотя и управляет множителем Лагранжа  $\mu$ , но может с ним не совпадать. Полная аналогия установится, если выбрать  $\mu(\xi) = \xi$ .

Из формул (22), (24)—(38), (40) и (42)—(46) вытекает, что энтропия, ассоциированная с суперстатистической подсистемой, равна

$$S[E, \beta](\xi) = \nu_2(\xi) + \mu(\xi) \cdot M(\xi). \quad (47)$$

Она аналогична энтропии (22).

Таким образом, распределение интенсивного параметра для суперстатистической подсистемы даётся формулой (44). Суперстатистическое распределение

$$\rho(E|\xi) = \int \rho_G(E|\beta, \xi) f(\beta|\xi) d\beta \quad (48)$$

имеет вид

$$\rho(E|\xi) = \frac{1}{Y(\xi)} \int \exp\{-\beta[E - U(\beta|\xi)] - \mu(\xi) \cdot m(\beta|\xi)\} d\beta, \quad (49)$$

с условием нормировки (10).

Обычная суперстатистика является частным случаем обобщённой суперстатистики: обычная суперстатистическая система — это обобщённая суперстатистическая система без флуктуаций управляющего параметра  $\xi$ . Следовательно, можно легко получить распределение интенсивного параметра  $f = f(\beta|\mu)$

для этой системы, формально убирая  $\xi$  из формулы (38) и из вспомогательных формул (3), (21), (23), (24), (29), (30), (39), (41) и (42). Оно согласуется с распределениями, полученными ранее [13, 14, 343].

Рассмотрим третий уровень динамики. Следует найти вероятностное распределение  $c(\xi)$  флуктуирующего управляющего параметра  $\xi$ . Это распределение нормировано,

$$N[\xi] = 1, \quad (50)$$

где

$$N[\xi] = \int c(\xi) d\xi. \quad (51)$$

Энтропия совместного вероятностного распределения  $E$ ,  $\beta$  и  $\xi$  определяется по аналогии с энтропией, ассоциированной с суперстатистической подсистемой (ср. с формулой (25)):

$$S[E, \beta, \xi] = S[\xi] + \int S[E, \beta](\xi) c(\xi) d\xi, \quad (52)$$

где

$$S[\xi] = - \int c(\xi) \ln c(\xi) d\xi \quad (53)$$

— энтропия, ассоциированная с распределением управляющего параметра  $c(\xi)$ , а  $S[E, \beta](\xi)$  даётся формулой (47). Мы можем наложить набор  $m$  дополнительных ограничений по аналогии с формулами (29) и (30):

$$K[\xi] = K, \quad (54)$$

где

$$K[\xi] = \int k(\xi) c(\xi) d\xi, \quad (55)$$

а

$$k(\xi) = [k_1(\xi), \dots, k_m(\xi)] \quad (56)$$

и

$$K = (K_1, \dots, K_m) \quad (57)$$

—  $m$ -мерные векторы, задающие соответственно форму и значения ограничений. Каждое  $K_i$  — это среднее  $k_i(\xi)$  по флуктуирующему  $\xi$ .

Функция Лагранжа имеет вид

$$L_3(\nu_3, \kappa) = S[E, \beta, \xi] - (\nu_3 - 1)N[\xi] - \kappa \cdot K[\xi], \quad (58)$$

где определён  $m$ -мерный векторный множитель Лагранжа

$$\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m), \quad (59)$$

а каждый  $\kappa_i$  является множителем Лагранжа, соответствующим ограничению

$$K_i[\xi] = K_i. \quad (60)$$

Условие

$$\delta L_3 = 0 \quad (61)$$

даёт распределение управляющего параметра

$$c(\xi, \kappa) = \frac{Y(\xi)}{X(\kappa)} \exp[-\kappa \cdot k(\xi) + \mu(\xi) \cdot M(\xi)], \quad (62)$$

где статистическая сумма равна

$$X(\kappa) = \int Y(\xi) \exp[-\kappa \cdot k(\xi) + \mu(\xi) \cdot M(\xi)] d\xi \quad (63)$$

и  $Y(\xi)$  определяется формулой (45). По аналогии с формулой (41) можно переписать ограничения (54) следующим образом:

$$K = -\frac{\partial \nu_3(\kappa)}{\partial \kappa}, \quad (64)$$

где

$$\nu_3(\kappa) = \ln X(\kappa) \quad (65)$$

— функция Масьё и

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} = \left( \frac{\partial}{\partial \kappa_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \kappa_m} \right) \quad (66)$$

—  $m$ -мерный оператор градиента. Остаётся найти энтропию (52) в точке максимума (ср. с формулами (22) и (47)):

$$S[E, \beta, \xi] = \nu_3(\kappa) + \kappa \cdot K. \quad (67)$$

Итак, распределение интенсивного параметра  $c(\xi) \equiv c(\xi, \kappa)$  даётся формулой (62), где множитель Лагранжа  $\kappa$  определяется из формулы (64). В силу формул (49) и (62) мы получаем, что суперстатистическое распределение

$$\sigma(E) = \int \rho(E|\xi)g(E|\xi)c(\xi)d\xi \quad (68)$$

имеет вид

$$\sigma(E) = \frac{1}{X(\kappa)} \int \exp\{-\beta[E - U(\beta|\xi)] - \mu(\xi) \cdot [m(\beta|\xi) - M(\xi)] - \kappa \cdot k(\xi)\}g(E|\xi)d\beta d\xi \quad (69)$$

с условием нормировки (12).

Важным примером использования разработанных методов является рассмотрение задачи о бозе-эйнштейновской конденсации света в оптической микрорупности с красителем [321, 322, A5].

### 2.1.2 Ветвящиеся процессы

Возникает следующий вопрос: существуют ли неравновесные системы, стационарные или нестационарные, которые можно описать обобщённой суперстатистикой?

Рассмотрим многочастичную систему, состоящую из частиц  $n$  типов. Каждая частица типа  $i$ , которую будем обозначать как  $T_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , имеет случайное время жизни с функцией распределения вероятностей  $G_i(\tau)$ . Другими

словами,  $G_i(\tau)$  — это вероятность того, что время жизни выбранной частицы типа  $i$  не превышает  $\tau$ . В конце жизни частица распадается на случайное число частиц нескольких типов. Конкретно, в момент распада частица производит  $\omega_j \geq 0$  частиц типа  $j$  нулевого возраста,  $1 \leq j \leq n$ :

$$T_i \rightarrow \sum_{j=1}^n \omega_j T_j. \quad (70)$$

Таким образом, мы имеем ветвящийся процесс с несколькими типами частиц и превращениями, зависящими от возраста частиц, — так называемый процесс Севастьянова со многими типами частиц [313].

Преобразование (70) описывается производящей функцией

$$h_i(\tau, x) = \sum_{\omega} p_i^{\omega}(\tau) x_1^{\omega_1} \dots x_n^{\omega_n}, \quad (71)$$

где  $p_i^{\omega}(\tau)$  — условная вероятность превращения (70) при условии, что частица распадается в возрасте  $\tau$ ,

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \quad (72)$$

—  $n$ -мерный вектор с неотрицательными целыми компонентами  $\omega_j$ , а

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad (73)$$

—  $n$ -мерный вектор с комплексными компонентами  $x_j$  такими, что

$$|x_j| \leq 1. \quad (74)$$

Если  $x_1 = \dots = x_n = 1$ , будем писать  $x = 1$ . Условие нормировки гласит

$$h_i(\tau, 1) = 1. \quad (75)$$

Среднее число частиц типа  $j$ , которые рождаются при распаде одной частицы типа  $i$ , даётся матрицей

$$A_{ij} = \int_0^{\infty} a_{ij}(\tau) dG_i(\tau), \quad (76)$$



где

$$a_{ij}(\tau) = \left. \frac{\partial h_i(\tau, x)}{\partial x_j} \right|_{x=1} \quad (77)$$

— то же среднее при условии, что частица распадается в возрасте  $\tau$ . Будем полагать, что матрица  $A = \|A_{ij}\|$  размера  $n \times n$  с компонентами  $0 \leq A_{ij} < \infty$  является неприводимой, или неразложимой, то есть что множество индексов  $\{1, \dots, n\}$  нельзя разделить на два непересекающихся непустых множества  $S_1$  и  $S_2$  таких, что  $A_{ij} = 0$  для всех  $i \in S_1$  и всех  $j \in S_2$  (подробнее см., например, [3]). Более того, мы также будем полагать, что перронов корень  $A$ , то есть максимальное положительное действительное собственное значение  $A$ , больше единицы. Таким образом, мы имеем дело с неразложимым надкритическим ветвящимся процессом [347]. Физически это означает, что, во-первых, частица произвольно выбранного типа потенциально имеет потомков, прямых или далёких, любого типа и, во-вторых, число частиц в системе, в среднем, постоянно увеличивается.

Мы видим, что вся система состоит из  $n$  подсистем, при этом  $i$ -я подсистема включает частицы типа  $i$ . Очевидно, что подсистемы взаимодействуют друг с другом в том смысле, что распад частицы в одной подсистеме ведёт к появлению частиц в других подсистемах. Число частиц и во всей системе, и в её подсистемах не постоянно и изменяется с течением времени. Итак, мы имеем дело с нестационарной неравновесной ситуацией.

Пусть

$$\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_n(t)) \quad (78)$$

—  $n$ -мерный вектор с неотрицательными целыми компонентами. Каждое  $\mu_j(t)$  — это случайная величина, которая даёт число частиц в  $j$ -й подсистеме в момент времени  $t$ . Ветвящийся процесс с превращениями, зависящими от возраста, характеризуется набором производящих функций

$$F_i(t, x) = \sum_{\omega} P_i^{\omega}(t) x_1^{\omega_1} \dots x_n^{\omega_n}, \quad (79)$$

где  $F_i^\omega(t)$  — условная вероятность того, что  $\mu(t) = \omega$ , при условии, что в нулевой момент времени в  $i$ -й подсистеме есть одна частица, а в остальных подсистемах частиц нет. Производящие функции  $F_i(t, x)$  (79),  $1 \leq i \leq n$ , удовлетворяют некоторой системе нелинейных интегральных уравнений [313]. Для нас здесь существенным является вероятностная природа числа частиц и в системе в целом, и в каждой подсистеме. Вообще говоря, нельзя априори предсказать, какое количество частиц находится в каждой подсистеме в некоторый момент времени, но вместо этого можно сосредоточить внимание на усреднённом поведении обобщённого гиперансамбля.

Среднее число частиц в  $j$ -й подсистеме в момент времени  $t$  при условии, что ветвящийся процесс начался с одной частицы типа  $i$  в нулевой момент времени, есть

$$A_{ij}(t) = \left. \frac{\partial F_i(t, x)}{\partial x_j} \right|_{x=1}. \quad (80)$$

Чтобы проанализировать поведение этих средних на больших временных масштабах, определим преобразования Лапласа — Стилтеса

$$L_{ij}(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} dG_{ij}(\tau), \quad (81)$$

где

$$G_{ij}(t) = \int_0^t a_{ij}(\tau) dG_i(\tau). \quad (82)$$

Пусть  $\lambda(\alpha)$  — перронов корень матрицы

$$L(\alpha) = \|L_{ij}(\alpha)\| \quad (83)$$

размера  $n \times n$ . Выберем  $\alpha$  такое, что

$$\lambda(\alpha) = 1, \quad (84)$$

и определим  $n$ -мерный левый собственный вектор

$$v = (v_1, \dots, v_n) \quad (85)$$

матрицы  $L(\alpha)$  с положительными действительными компонентами  $v_j$ , удовлетворяющими уравнению

$$v_j = \sum_{i=1}^n v_i L_{ij}(\alpha). \quad (86)$$

Тогда асимптотическое поведение средних чисел частиц выражается как

$$A_{ij}(t) \sim C_i v_j w_j e^{\alpha t}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (87)$$

где

$$w_j = \int_0^{\infty} e^{-\alpha \tau} (1 - G_j(\tau)) d\tau \quad (88)$$

и  $C_i$  — положительная постоянная [314]. Интересно, что  $A_{ij}(t)$  ведёт себя сходным образом для каждой подсистемы. Так как мы рассматриваем надкритический случай,  $\alpha$  всегда существует и положительно. Следовательно, среднее число частиц в каждой подсистеме возрастает экспоненциально. Отметим, что существование положительного  $\alpha$  эквивалентно условию, что перронов корень  $A$  больше единицы [314, 347].

На большом временном масштабе предельная вероятность того, что произвольно выбранная частица принадлежит  $i$ -й подсистеме, может быть записана как

$$\pi_i = \frac{v_i w_i}{\sum_{j=1}^n v_j w_j}. \quad (89)$$

Отметим, что  $\pi_i$  не зависит от типа первичной частицы, с которой начался ветвящийся процесс. Более того, хотя ситуация и нестационарна, предельная вероятность стационарна.

Предельное распределение по возрасту для  $i$ -й подсистемы имеет вид [A4]

$$L_i(\tau) = \frac{\int_0^{\tau} e^{-\alpha u} (1 - G_i(u)) du}{\int_0^{\infty} e^{-\alpha u} (1 - G_i(u)) du}. \quad (90)$$

Оно найдено путём разделения  $i$ -й подсистемы на две подсистемы, первая из которых содержит частицы типа  $i$ , которые распадаются в возрасте  $u \leq \tau$ , а

вторая из которых содержит остальные частицы, и применения вышеописанного метода к новой системе. Формула (90) даёт вероятность того, что случайным образом выбранная частица типа  $i$  имеет возраст  $u \leq \tau$ . В случае одного типа частиц  $L_i(\tau)$  сводится к предельному распределению по возрасту для одномерного надкритического процесса Севастьянова [368], которое совпадает с классическим распределением по возрасту для одномерного надкритического процесса Беллмана — Харриса, когда вероятность  $p_i^\omega(\tau)$  не зависит от  $\tau$ ,  $p_i^\omega(\tau) = p_i^\omega$  [39, 216].

Теперь можно вычислить распределение частиц по энергиям. Рассмотрим частицу типа  $i$  возраста  $\tau$ . В общем случае её энергию можно рассматривать как случайную величину, характеризующуюся плотностью условной вероятности  $w_i(E|\tau)$ . Более конкретно, вероятность того, что энергия частицы типа  $i$  возраста  $\tau$  лежит в малом интервале  $dE$  вокруг  $E$ , равна  $w_i(E|\tau)d\Gamma_i(E)$ , где  $\Gamma_i(E)$  — число энергетических состояний с энергией меньше  $E$ . Условие нормировки имеет вид

$$\int w_i(E|\tau)d\Gamma_i(E) = 1. \quad (91)$$

Энергетическая плотность вероятности для  $i$ -й подсистемы принимает вид

$$\rho_i(E) = \int_0^\infty w_i(E|\tau)dL_i(\tau) \quad (92)$$

с условием нормировки

$$\int \rho_i(E)d\Gamma_i(E) = 1. \quad (93)$$

Описанную систему можно рассмотреть как обобщённую суперстатистическую систему. Управляющий параметр  $\xi$  — это дискретная случайная величина, которая принимает значения  $\{1, \dots, n\}$  и даёт номер подсистемы, которой принадлежит случайно выбранная частица. Другими словами,  $\xi$  соответствует типу частицы. Он имеет дискретное распределение вероятностей  $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ , где  $\pi_i$  даётся формулой (89). Остаётся найти распределение  $f_i(\beta)$  флуктуиру-

ющего параметра  $\beta$  для каждой подсистемы. Пусть

$$g(s) = \mathfrak{L}[f(x)](s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (94)$$

— преобразование Лапласа функции  $f(x)$ , а

$$f(x) = \mathfrak{L}^{-1}[g(s)](x) \quad (95)$$

— соответствующее обратное преобразование Лапласа. Энергетическое распределение для  $i$ -й подсистемы можно выразить как

$$\rho_i(E) = \mathfrak{L} \left[ \frac{f_i(\beta)}{Z_i(\beta)} \right] (E), \quad (96)$$

где  $Z_i(\beta)$  — статистическая сумма. Тогда

$$f_i(\beta) = Z_i(\beta) \mathfrak{L}^{-1}[\rho_i(E)](\beta). \quad (97)$$

### 2.1.3 Энергетическое распределение

Вернёмся к изначальной задаче. Будем характеризовать энергию заряженной частицы, электрона или позитрона, её лоренц-фактором  $\gamma(\tau)$ . Частица эффективно ускоряется продольным электрическим полем  $E_{\parallel}$ , так что  $\gamma(\tau)$  в итоге достигает некоторого стационарного значения  $\gamma_0$ , которое составляет величину  $\sim 10^8$  в вакуумной магнитосфере нейтронной звезды [188]. Электрон и позитрон каждой рождённой пары хотя и являются ультрарелятивистскими, но сначала обладают лоренц-факторами значительно меньше  $\gamma_0$ . На начальном этапе ускорения  $\gamma(\tau)$  растёт с течением времени линейно,

$$\gamma(\tau) \approx E_{\parallel} \tau. \quad (98)$$

Здесь используется безразмерная система единиц [A1, A2, A3]. В противоположность этому, когда  $t$  достигает значения

$$\tau_0 = \frac{\gamma_0}{E_{\parallel}}, \quad (99)$$

на первый план выходят силы реакции излучения и возникает необходимость использования уравнения Дирака — Лоренца для должного рассмотрения динамики частиц [188–190].

Итак, можно определить два типа частиц. Частица типа 1 может эффективно ускоряться электрическим полем, так как силы радиационного трения пренебрежимо малы. Частица типа 2, в противоположность частице типа 1, не ускоряется электрическим полем из-за эффекта электродинамического самодействия и имеет постоянный лоренц-фактор  $\gamma_0$ . В первом случае частица не генерирует эффективно вторичные пары, но во втором случае генерация происходит с некоторой скоростью  $Q$  [A1]. Отметим, что генерация плазмы, наряду с сопутствующим радиоизлучением, не подавляется даже в сверхсильных магнитных полях [186, 187]. Лоренц-факторы частиц типа 1 и 2 как функции их возрастов принимают вид

$$\gamma_1(\tau) = E_{\parallel}\tau, \quad 0 \leq \tau < \tau_0, \quad (100)$$

$$\gamma_2(\tau) = \gamma_0, \quad 0 \leq \tau < \infty. \quad (101)$$

Частицы каждой рождённой пары хотя и движутся независимо друг от друга, но могут для удобства рассматриваться как единое целое, и по аналогии с отдельными частицами можно определить электрон-позитронные пары типа 1 и типа 2, которые соответственно будем обозначать  $T_1$  и  $T_2$ .

Теперь можно записать следующие превращения:

$$T_1 \rightarrow T_2, \quad (102)$$

$$T_2 \rightarrow T_1 + T_2. \quad (103)$$

Производящие функции имеют вид

$$h_1(\tau, x) = x_2, \quad (104)$$

$$h_2(\tau, x) = x_1 x_2, \quad (105)$$

где  $x = (x_1, x_2)$ . Матрица  $a = \|a_{ij}\|$  размера  $2 \times 2$  приобретает вид

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (106)$$

Функции распределения по времени жизни суть

$$G_1(\tau) = \theta(\tau - \tau_0), \quad (107)$$

$$G_2(\tau) = 1 - e^{-2Q\tau}, \quad (108)$$

где  $\theta(x)$  — функция Хевисайда. Матрица  $A$ , определяемая формулой (76), совпадает с  $a$  и неразложима, так как её недиагональные элементы положительны.

Перронов корень  $A$  равен

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (109)$$

и больше единицы. Следовательно, мы имеем дело с неразложимым надкритическим ветвящимся процессом с двумя типами частиц.

Теперь следует найти должное значение  $\alpha$ , как описано после формулы (82). Интересно, что это можно сделать, не прибегая к прямому нахождению перронова корня  $L(\alpha)$ . Как показано в работе [A1], рождение пар в рассматриваемой системе асимптотически описывается уравнением

$$\frac{dN(t)}{dt} = 2Q^{\text{eff}} N(t), \quad (110)$$

где  $N(t)$  — число электрон-позитронных пар в момент времени  $t$ ,

$$Q^{\text{eff}} = \frac{N_{\tau_0}^{\text{eff}}}{2\tau_0} \quad (111)$$

— эффективная скорость рождения пар, а  $N_{\tau_0}^{\text{eff}}$  удовлетворяет уравнению

$$N_{\tau_0}^{\text{eff}} = \ln N_{\tau_0} - \ln N_{\tau_0}^{\text{eff}}, \quad (112)$$

где

$$N_{\tau_0} = 2Q\tau_0 \quad (113)$$

— число частиц, рождённых полностью ускоренной частицей за время  $\tau_0$ . Отметим, что  $N_{\tau_0}^{\text{eff}}$  можно эквивалентно выразить с помощью функции Ламберта  $W(x)$  (см. определение, например, в работе [38]) как

$$N_{\tau_0}^{\text{eff}} = W(N_{\tau_0}), \quad (114)$$

поэтому  $N_{\tau_0}^{\text{eff}}$  положительно, так как  $W(x)$  положительна при любом положительном  $x$ . Из уравнения (110) следует, что полное количество электрон-позитронных пар в системе нарастает экспоненциально. Сравнивая формулы (110) и (87), получаем

$$\alpha = 2Q^{\text{eff}}, \quad (115)$$

которое положительно, как и должно быть в надкритическом случае.

Энергия любой частицы типа 1 меньше  $\gamma_0$ , тогда как энергия частицы типа 2 равна  $\gamma_0$ . Следовательно, естественно выбрать следующие плотности состояний для подсистем:

$$g_1(\gamma) = 1 - \theta(\gamma - \gamma_0), \quad (116)$$

$$g_2(\gamma) = \delta(\gamma - \gamma_0), \quad (117)$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция. Из формул (100) и (101) мы видим, что энергии частиц являются неслучайными функциями их возрастов, поэтому условные энергетические распределения имеют вид

$$w_1(\gamma|\tau) = \delta(\gamma - \gamma_1(\tau)), \quad (118)$$

$$w_2(\gamma|\tau) = 1. \quad (119)$$

С помощью формул (90), (92), (107), (108), (118) и (119) получаем энергетические распределения для подсистем:

$$\rho_1(\gamma) = \frac{\alpha}{E_{\parallel}} \frac{e^{-\alpha\gamma/E_{\parallel}}}{1 - e^{-\alpha\tau_0}}, \quad (120)$$

$$\rho_2(\gamma) = 1. \quad (121)$$



Соответствующие распределения интенсивного параметра таковы:

$$f_1(\beta) = \delta\left(\beta - \frac{\alpha}{E_{\parallel}}\right), \quad (122)$$

$$f_2(\beta) = \delta(\beta). \quad (123)$$

Найдём распределение вероятностей случайного управляющего параметра  $\xi$ , который соответствует типу случайным образом выбранной частицы. Из формул (88), (107) и (108) имеем

$$w_1 = \frac{1 - e^{-\alpha\tau_0}}{\alpha}, \quad (124)$$

$$w_2 = \frac{1}{\alpha + 2Q}. \quad (125)$$

Компоненты левого собственного вектора  $v = (v_1, v_2)$  матрицы

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\alpha\tau_0} \\ \left(1 + \frac{\alpha}{2Q}\right)^{-1} & \left(1 + \frac{\alpha}{2Q}\right)^{-1} \end{pmatrix} \quad (126)$$

можно выбрать так:

$$v_1 = 1, \quad (127)$$

$$v_2 = 1 + \frac{\alpha}{2Q}. \quad (128)$$

Пользуясь формулами (89), (115), (124), (125), (127) и (128), получаем вероятность  $\pi_{\xi}$  того, что произвольно выбранная частица имеет тип  $\xi$ ,  $\xi = 1, 2$ :

$$\pi_1 = 1 - \frac{\alpha}{2Q}, \quad (129)$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha}{2Q}. \quad (130)$$

Отметим, что  $\pi_2$  можно интерпретировать как вероятность того, что частица вносит значительный вклад в рождение электрон-позитронных пар.

Наконец, с помощью формул (11), (115)–(117), (120), (121), (129) и (130) получаем обобщённое суперстатистическое распределение

$$\sigma(\gamma) = \frac{\alpha}{2Q} \delta(\gamma - \gamma_0) + (1 - \theta(\gamma - \gamma_0)) \frac{\alpha}{E_{\parallel}} e^{-\alpha\gamma/E_{\parallel}}, \quad (131)$$

которое представляет собой распределение по энергиям ультрарелятивистских электронов и позитронов. Слагаемое с дельта-функцией отвечает за частицы, ускоренные до стационарного лоренц-фактора, а слагаемое с экспонентой даёт распределение ускоряющихся частиц. Отметим, что вероятность существенного вклада частицы в рождение пар по порядку величины равна 0.01%. Это означает, что доля ускоренных частиц мала. Малое значение этой вероятности физически связано с конечностью длины свободного пробега фотонов, то есть с существованием временной задержки между рождением заряженными частицами фотонов и последующим поглощением этих фотонов в магнитном поле.

## 2.2 Излучение субрелятивистских частиц

Происхождение позитронов, отвечающих за аннигиляционное излучение из Галактического центра, является одной из наиболее известных загадок, связанных с задачей об ускорении и распространении лептонов в Галактике. Это излучение состоит из линии электрон-позитронной аннигиляции с энергией 511 кэВ и непрерывного излучения за счёт трёхфотонной аннигиляции. Модель аннигиляционного излучения Галактики должна объяснять пространственную морфологию и спектральные свойства излучения. В работе [318] путём анализа данных космической обсерватории INTEGRAL было показано, что источники позитронов должны быть каким-либо образом связаны со старыми звёздами, которых очень много и в балдже и в толстом диске Галактики, а темп аннигиляции должен составлять  $2 \times 10^{43} \text{ с}^{-1}$  в балдже и  $3 \times 10^{43} \text{ с}^{-1}$  в толстом диске. К этим двум условиям необходимо прибавить ограничение на энергию позитронов. Дело в том, что умеренно релятивистские позитроны теряют энергию

главным образом из-за столкновений на свободных или связанных электронах, то есть благодаря кулоновским или ионизационным потерям [298]. Однако те же столкновения приводят к аннигиляции и тормозному излучению, генерируя гамма-излучение выше 511 кэВ с жёстким спектром. Аннигиляционное излучение не коррелирует с Галактическим фоном, поэтому возможно выделить аннигиляционную компоненту и использовать её для ограничения первоначальной энергии позитронов [24]. Анализ показывает [48, 319], что максимальная энергия аннигилирующих позитронов не может превышать 1–3 МэВ для нейтральной среды и 3–10 МэВ для полностью ионизированной среды.

В данном разделе диссертации демонстрируется, что старые нейтронные звёзды, которые ранее являлись радиопульсарами, могут быть источником Галактических позитронов. Обычные радиопульсары представляют собой замагниченные быстро вращающиеся нейтронные звёзды с радиусом  $R \simeq 10^6$  см, и замагниченность означает, что звезда обладает внутренним магнитным моментом  $\mu \simeq 10^{30}$  Гс см<sup>3</sup>, соответствующим типичному магнитному полю на поверхности  $B_0 \simeq 10^{12}$  Гс. Период вращения  $P$  нейтронной звезды варьируется от миллисекунд до примерно десятка секунд, и каждый пульсар можно удобно представить точкой на диаграмме  $P$ – $B$  (рис. 1). Сильное магнитное поле и вращение делают нейтронные звёзды эффективными генераторами плотной релятивистской плазмы, состоящей из электронов и позитронов и определяющей их наблюдаемую активность [186, A1]. Возможность излучения нейтронными звёздами лептонов подтверждается наблюдениями гамма-галло вокруг пульсаров Геминга и В0656+14 [11, 16].

Существование и магнитного поля и вращения нейтронной звезды важно для генерации плазмы. В сильном магнитном поле ( $B \gtrsim 10^8$  Гс, см. рис. 1), происходит однофотонное рождение пар ( $\gamma \rightarrow e^+e^-$ ), и рождённые электрон и позитрон впоследствии ускоряются продольным электрическим полем, направленным по магнитному полю и индуцированным вращением. Такое ускорение

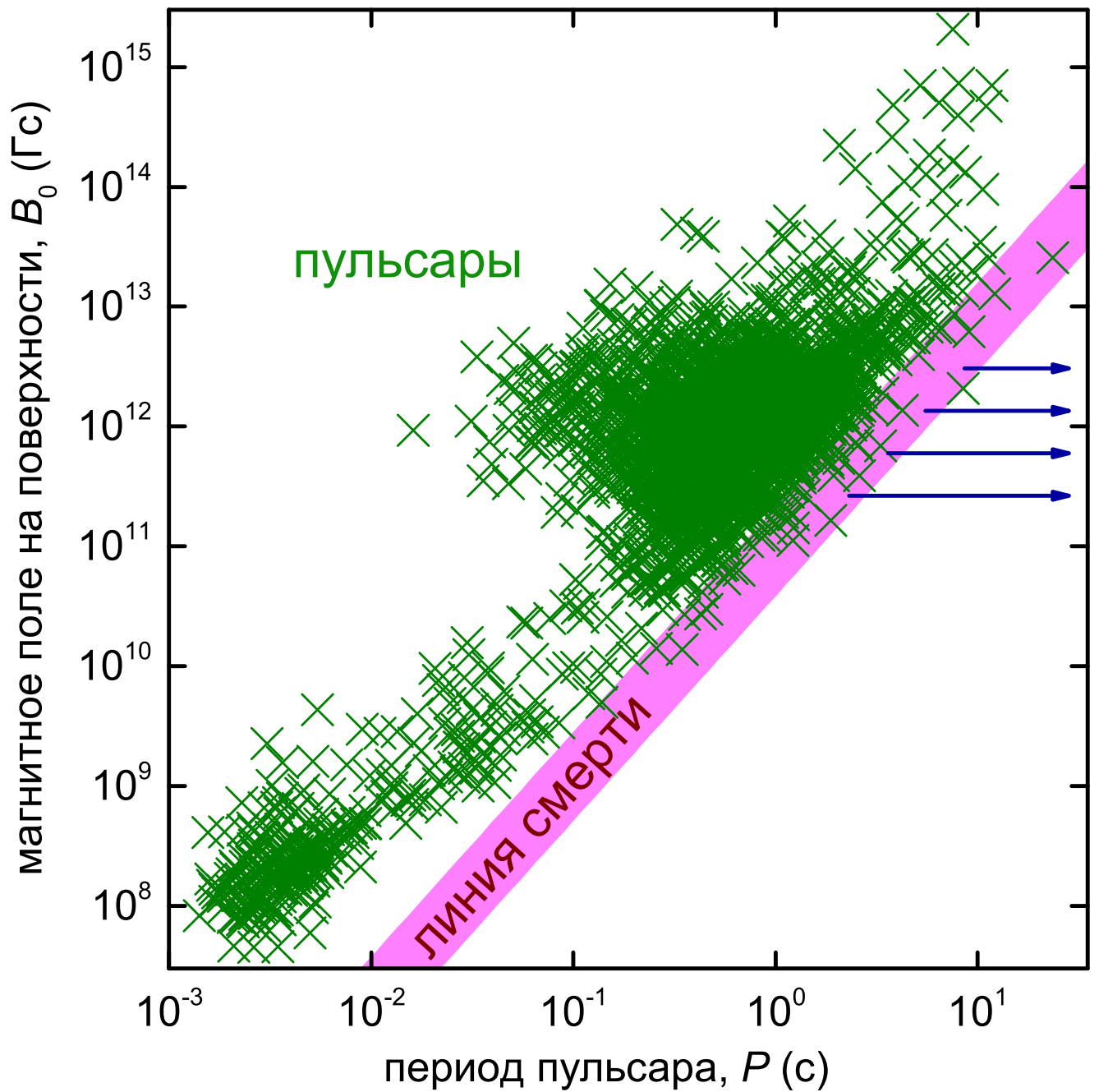


Рис. 1. Магнитное поле на поверхности звезды  $B_0$  как функция периода вращения  $P$  для наблюдаемых пульсаров (диаграмма  $P$ – $B$  в двойном логарифмическом масштабе). Стрелками схематично показаны траектории движения старых нейтронных звёзд, потухших радиопульсаров [A15].

приводит к излучению новых фотонов, а их поглощение даёт новые пары, тем самым образуя каскадный процесс умножения плазмы. Стационарная генерация плазмы около поверхности звезды в полярной магнитосфере поддерживается при условии существования достаточно сильного магнитного поля и достаточно быстрого вращения, что определяет на диаграмме  $P$ — $B$  так называемую линию смерти,  $P \propto B_0^{8/15}$ .

Возможный вклад обычных и миллисекундных пульсаров в поток позитронов в Галактике обсуждался ранее [354], но было найдено, что энергия позитронов слишком высока для объяснения Галактического аннигиляционного излучения [193, 298]. Тем временем, электроны и позитроны будут обладать более малыми энергиями, чем те же частицы, идущие от обычных пульсаров, если они рождаются в магнитосфере менее энергичных нейтронных звёзд. Такие нейтронные звёзды могут иметь большие периоды вращения, но должны иметь магнитные поля типичного пульсара, потому что такие поля необходимы для того, чтобы однофотонное рождение пар было эффективно. Когда вращение нейтронной звезды тормозится и энергия вращения переходит главным образом в генерацию плазмы, звезда достигает границы «смерти» на диаграмме  $P$ — $B$  и перестаёт быть радиопулсаром, становясь тогда «потухшим пульсаром» (см. рис. 1). Далее показывается, что потухшие пульсары способны рождать достаточное количество  $e^+e^-$  пар для объяснения аннигиляционного излучения. Кроме того, эти источники, в отличие от активных пульсаров, рождают частицы с достаточно низкой энергией, позволяющей удовлетворить требованиям на источник позитронов, ответственный за Галактическую аннигиляционную линию 511 кэВ.

### 2.2.1 Медленно вращающиеся нейтронные звёзды

После того как нейтронная звезда замедлилась, пересекла линию смерти на диаграмме  $P$ — $B$  и стала потухшим пульсаром, рождение  $e^+e^-$  пар около поверхности звезды продолжаться не может. Вместо этого рождение пар происходит в магнитосфере. Задача возникновения магнитосферы нейтронной звезды из вакуума с сильным магнитным полем очень сложна [188–190]. Диффузное Галактическое и изотропное внегалактическое гамма-излучение освещает магнитосферу и вызывает однофотонное рождение пар [A1]. Оценки показывают, что около  $2 \times 10^{10}$  гамма-квантов с энергией выше пороговой энергии  $2m_e c^2$  может поглощаться в магнитосфере за секунду [A2]. Рождённые электроны и позитроны ускоряются продольным электрическим полем, присутствующим во вращающейся магнитосфере, и излучают гамма-кванты, которые в свою очередь рождают пары.

Таким образом, развивается каскад умножения плазмы, и плотная электрон-позитронная плазма, заполняющая узкую трубку с размером около 100 м в поперечном направлении, распространяется со скоростью света и в направлении к поверхности звезды, и в противоположном направлении, так что после поглощения одного внешнего гамма-кванта образуется «молния», то есть удлиняющаяся и одновременно расширяющаяся плазменная трубка, развивающаяся на миллисекундных масштабах времени. Молния, распространяющаяся к поверхности, входит в область, где магнитное и продольное электрическое поля увеличиваются, и рождает огромное количество электрон-позитронных пар, достигающее до  $10^{28}$  пар на один внешний фотон [A2]. На основе этого эффекта в работе [A3] строится модель образования RRAT от медленно вращающихся нейтронных звёзд с периодами  $P \simeq 1$ – $10$  с, причём при ударе молнии о поверхность возможен нагрев полярной шапки. Другая часть молнии распространяет-

ся наружу, и если это происходит в открытой полярной области магнитосферы, состоящей из магнитных силовых линий, уходящих на бесконечность, то плазма вытекает в окружающее пространство.

Во внешней магнитосфере напряжённость магнитного и продольного электрического поля быстро падает, каскад умножения плазмы становится менее эффективным, чем во внутренней магнитосфере, и энергии электронов и позитронов становятся не так велики, как в случае части молнии, распространяющейся к поверхности. Здесь рождение пар, включённых в каскад умножения плазмы, сильно нелокально по своей природе. Длина свободного пробега фотонов по отношению к рождению пар, длина ускорения частиц и радиус кривизны магнитных силовых линий становятся сравнимыми с размерами магнитосферы. Схема рождения электрон-позитронных пар показана на рис. 2. Мы определим из общих соображений характеристики электрон-позитронной плазмы, уходящей из магнитосферы, её поток и характерную энергию.

### 2.2.2 Поток энергии

Характерный размер

$$r_L = \frac{c}{\Omega} \sim 10^{10} \text{ см} \quad (132)$$

магнитосферы вращающейся нейтронной звезды, где  $c$  — скорость света и  $\Omega = 2\pi/P \sim 1 \text{ с}^{-1}$  — частота вращения (период  $P \sim 10 \text{ с}$ ), значительно превышает радиус звезды  $R \simeq 10^6 \text{ см}$  и соответствует расстоянию, на котором коротация плазмы нарушается и её магнитное удержание становится невозможным. Он определяет цилиндрическую световую поверхность  $r = r_L$ , которая содержит замкнутую магнитосферу и на которой скорость коротации  $\Omega r$  формально рав-

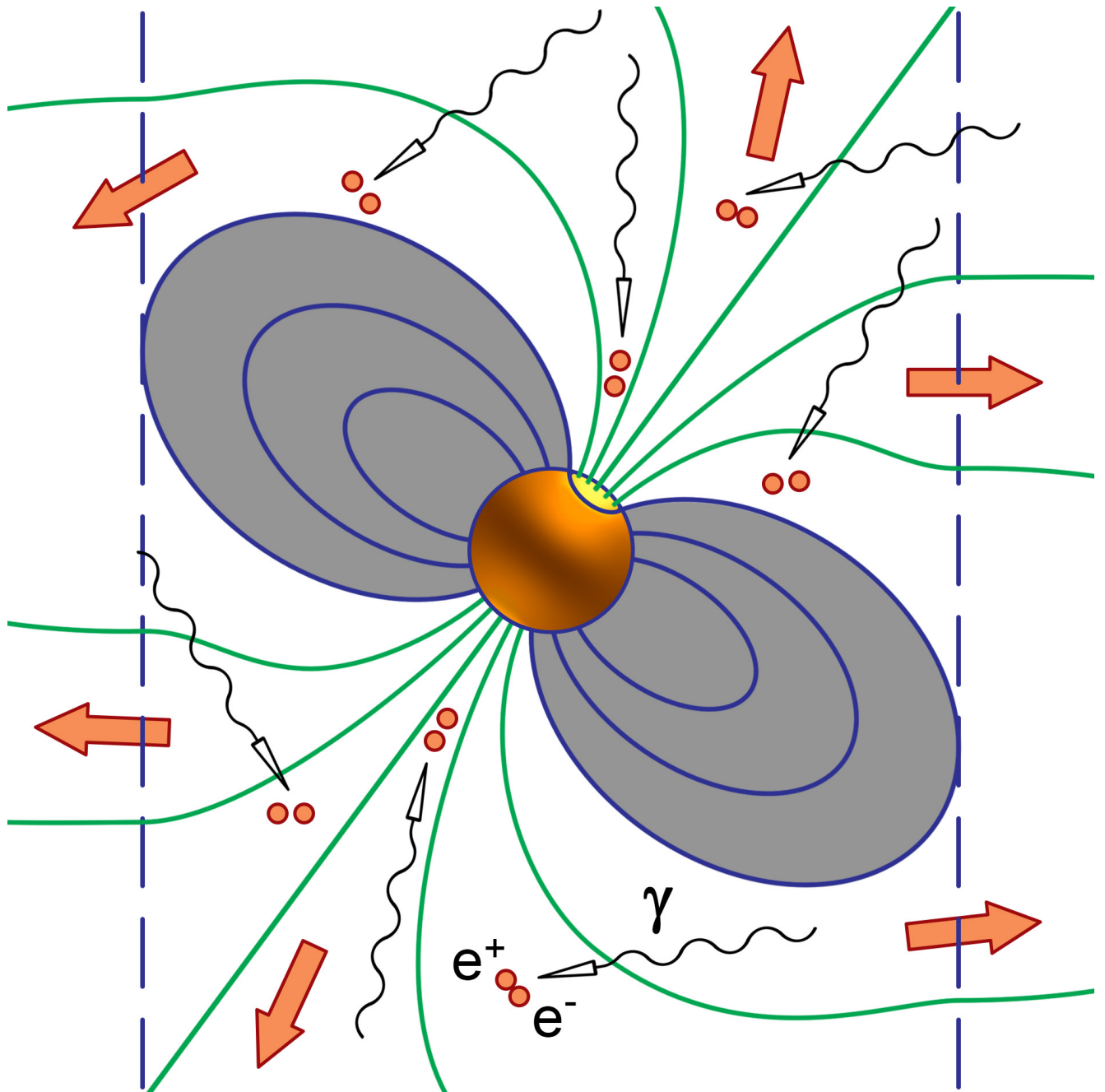


Рис. 2. Рождение электронов и позитронов в открытой магнитосфере нейтронной звезды фотонами высоких энергий космического гамма-фона [A15].



няется  $c$  (см. рис. 2). Типичный вертикальный размер магнитосферы порядка её радиуса, и поток энергии в истекающей из магнитосферы электрон-позитронной плазме равен

$$W = 4\pi r_{\text{L}}^2 n \gamma m_e c^3, \quad (133)$$

где  $n$  — плотность плазмы по числу частиц и  $\gamma$  — лоренц-фактор. В дальнейшем удобно характеризовать плазменную плотность безразмерной множественностью

$$\lambda = \frac{n}{n_{\text{GJ}}}, \quad (134)$$

где  $n_{\text{GJ}}$  — плотность Гольдрайха — Джулиана [156], которая приблизительно соответствует минимальной плотности числа частиц, необходимой для равновесной магнитосферной плотности заряда, когда магнитное поле не является значительно скрученным (см. разд. 3.1) [A7]. На границе магнитосферы имеем

$$n_{\text{GJ}} = \frac{\Omega B_0}{2\pi c e} \left( \frac{\Omega R}{c} \right)^3. \quad (135)$$

Для того чтобы определить поток энергии  $W$  (133) через параметры нейтронной звезды, сперва обратимся к размерности рассматриваемых величин. Поток энергии в конечном счёте идёт из энергии вращения звезды и обязан своим существованием вращающемуся магнитному полю, вмороженному в звезду, то есть магнитному моменту звезды  $\mu$ . Поскольку  $\mu$  — вращающийся вектор,  $W$  не может быть пропорционален первой степени  $\mu$ ; мы имеем  $W \propto \mu^2$ , потому что соответствующие размерности имеют вид  $[W] = ML^2T^{-3}$  и  $[\mu] = M^{1/2}L^{5/2}T^{-1}$ , где  $M$ ,  $L$  и  $T$  — размерности массы, длины и времени, так что  $[W] = [\mu^2]L^{-3}T^{-1}$ . Так как  $R \ll r_{\text{L}}$ , характерная длина имеет вид (132), тогда как характерное время равно  $\Omega^{-1}$ . Таким образом,

$$W = a \frac{\Omega^4 \mu^2}{c^3} = 5.8 \times 10^{31} a B_{12}^2 P^{-4} R_6^6 \text{ эрг с}^{-1}, \quad (136)$$

где  $a \simeq 1$  — безразмерный множитель. Отметим, что  $a = (2/3) \sin^2 \chi$  для вакуумных магнитодипольных потерь и  $a = i \cos^2 \chi$  для токовых потерь в плазменном случае, где  $\chi$  — угол наклона и  $i$  — безразмерный ток, текущий в

магнитосфере [58], так что  $a \simeq 1$  точно соответствует осесимметричному пульсару, с более общей зависимостью в случае наличия наклона [159, 160, 324].

Приравнивание (133) и (136) даёт [A15]

$$\lambda\gamma = \frac{a\omega_c}{2\Omega} \left( \frac{\Omega R}{c} \right)^3 = 1.3 \times 10^7 a B_{12} P^{-2} R_6^3, \quad (137)$$

где

$$\omega_c = \frac{eB_0}{m_e c} \quad (138)$$

— нерелятивистская циклотронная частота для электрона,  $B_0$  — магнитное поле на поверхности звезды,  $B_{12} = B_0/10^{12}$  Гс и  $R_6 = R/10^6$  см — безразмерные поле на поверхности и радиус звезды. Формула (137) даёт разумные оценки для радиопульсаров,  $\lambda \sim 10^4\text{--}10^5$  и  $\gamma \sim 10^2\text{--}10^3$  [186, 339].

### 2.2.3 Множественность и лоренц-фактор

Другой способ оценить множественность следующий. Когда магнитосфера заполнена плазмой, торможение вращения звезды может вызываться только электрическими токами, текущими в магнитосфере и замыкающимися на поверхности звезды. Токи создают момент электромагнитных сил, тормозящий вращение. Поскольку магнитное поле в замкнутой магнитосфере опирается на хорошо проводящую поверхность нейтронной звезды, то всякая магнитная трубка имеет один и тот же электрический потенциал, равный потенциалу звезды, и электрический ток может течь только в открытой магнитосфере. Оценим электрический ток, вытекающий из магнитосферы. Когда магнитные силовые линии в открытой части магнитосферы уходят за световую поверхность, электроны и позитроны движутся со слегка различающимися скоростями  $v_{e,p} = c(1 - \gamma_{e,p}^{-2}/2)$ , потому что продольное электрическое поле ускоряет

один тип частиц и тормозит другой, поэтому итоговый ток равен

$$I = \lambda \frac{B_0 \Omega^2 R^3}{2c} |\gamma_e^{-2} - \gamma_p^{-2}|. \quad (139)$$

Мы имеем  $|\gamma_e^{-2} - \gamma_p^{-2}| = b\gamma^{-2}$  со множителем  $b < 1$ . Работа электрического поля над током  $I$  за единицу времени есть мощность, теряемая звездой,

$$W = UI, \quad (140)$$

где  $U$  — разность потенциалов, генерируемая вращающимся магнитным полем в открытой магнитосфере; это соотношение аналогично соотношению, которое имеет место в релятивистских джетах, где наблюдаемая интенсивность соответствует мощности, высвобождаемой в джете за счёт действия униполярного механизма центральной машины, сверхмассивной чёрной дыры с окружающим её аккреционным диском (см. гл. 4) [A9]. С помощью закона Фарадея  $U = -(\partial\Phi/\partial t)/c$ , где

$$\Phi = 2\pi r_L^2 B_0 \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^3 \quad (141)$$

— магнитный поток через световую поверхность, приходим к соотношению

$$U = 2\pi B_0 \frac{\Omega^2 R^3}{c^2}, \quad (142)$$

и из соотношения (140) получаем  $\pi b \lambda = a \gamma^2$ . Комбинируя его с соотношением (137), можно отдельно найти  $\gamma$  и  $\lambda$ ,

$$\begin{aligned} \gamma &= \left(\frac{\pi b}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega_c}{\Omega}\right)^{1/3} \left(\frac{\Omega R}{c}\right) = \\ &= 3.5 \times 10^2 b^{1/3} B_{12}^{1/3} P^{-2/3} R_6, \end{aligned} \quad (143)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{a^3}{4\pi b}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega_c}{\Omega}\right)^{2/3} \left(\frac{\Omega R}{c}\right)^2 = \\ &= 4 \times 10^4 \left(\frac{a}{b^{1/3}}\right) B_{12}^{2/3} P^{-4/3} R_6. \end{aligned} \quad (144)$$

Интересно, что магнитное поле на поверхности  $B_0$  появляется в соотношениях (143) и (144) в комбинации  $B_0(\Omega R/c)^3$ , которая представляет собой поле

на световой поверхности,  $B_L = \mu/r_L^3$ . Последнее поле не зависит отдельно от поля на поверхности  $B_0$  или радиуса звезды  $R$ , а определяется лишь магнитным моментом звезды  $\mu$  и угловой скоростью  $\Omega$ . Если ввести циклотронную частоту для электронов и позитронов на световой поверхности,

$$\omega_c^L = \frac{eB_L}{m_e c}, \quad (145)$$

то соотношения (143) и (144) принимают простой вид

$$\gamma \simeq \left( \frac{\omega_c^L}{\Omega} \right)^{1/3}, \quad (146)$$

$$\lambda \simeq \left( \frac{\omega_c^L}{\Omega} \right)^{2/3}. \quad (147)$$

Отношение  $\omega_c^L/\Omega$  есть замагниченность частиц на световой поверхности. Зависимость лоренц-фактора частицы от замагниченности, представленная в формуле (146), является универсальным свойством систем, в которых происходит ускорение заряженных частиц в магнитном поле. В частности, невозможно ускорить частицу, циклотронная частота которой  $\omega_c/\gamma$  становится меньше характерной частоты рассматриваемой системы (критерий Хилласа) [176], поэтому максимальный лоренц-фактор равен  $\gamma_{\max} = \omega_c/\Omega$ . В магнитосферах вращающихся массивных чёрных дыр  $\gamma = (\omega_c/\Omega)^\beta$ , где показатель степени  $\beta < 1$  может меняться от  $1/3$  до  $2/3$ . В работах [265, 266]  $\beta$  оказывается равным  $1/3$ . В работе [183] найдено, что непосредственное ускорение протонов электрическим полем, передающим вращение от чёрной дыры к магнитосферной плазме, более эффективно,  $\beta = 1/2$  и  $\beta = 2/3$  в зависимости от тороидального магнитного поля в магнитосфере.

Соотношение (146) также можно получить из следующих порядковых оценок. Основное ускорение частицы происходит около световой поверхности, где электрическое поле  $E$  становится сравнимо с магнитным полем  $B_L$ . Частица во время своего вращения отклоняется от первоначальной магнитной силовой

линии на расстояние  $l$ , и электрическое поле совершает над ней работу, так что  $\gamma mc^2 = eEl$ . Поскольку  $E \simeq B_L$ , мы имеем  $l \simeq l_0 = \gamma mc^2 / eB_L$  и тогда должны воспользоваться критерием  $l = r_c$ . Циклотронный радиус  $r_c = v / (\omega_c / \gamma)$  не равен тождественно  $l_0$ : во-первых, скорость частицы  $v$  несколько меньше скорости света,  $v = c(1 - 1/2\gamma^2)$ , и, во-вторых, эффективное магнитное поле на траектории частицы несколько меньше  $B_L$  из-за своего падения с расстоянием,  $B \simeq B_L(1 - r_c/r_L) \simeq B_L[1 - \gamma(\Omega/\omega_c^L)]$ . Мы отбрасываем несущественные факторы, потому что магнитное поле на световой поверхности отклоняется от дипольной структуры; кроме того, электрическое поле также может отличаться от  $B_L$  на члены порядка  $\gamma^{-2}$ , и то же верно для отличия  $l$  и  $l_0$ . С учётом этих оговорок, из равенства  $l = r_c$  получаем

$$l = l_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \left(1 + \gamma \frac{\Omega}{\omega_c^L}\right). \quad (148)$$

Приравнивание малых членов даёт  $\gamma^3 \simeq \omega_c^L / \Omega$ , что соответствует соотношению (146).

#### 2.2.4 Поток и энергия вытекающих частиц

Теперь найдём поток позитронов

$$L = \frac{W}{2\gamma m_e c^2}, \quad (149)$$

создаваемый нейтронной звездой,

$$L = 1.3 \times 10^{35} ab^{-1/3} B_{12}^{5/3} P^{-10/3} R_6^5 c^{-1}. \quad (150)$$

Множитель  $b < 1$  появляется в соотношениях (143), (144) и (150) в степени  $1/3$ , поэтому можно положить  $b^{1/3} \simeq 1$ .

С повышением периода радиопульсары проходят через линию смерти (см. рис. 1) и в итоге уходят в область больших периодов, где стационарная генерация электрон-позитронной плазмы без внешнего влияния становится невозможной. Фактически, основная доля радиопульсаров обладает периодами  $P < P_0 \simeq 1.5$  с. Хотя и наблюдаются медленно вращающиеся пульсары с периодами, достигающими  $\simeq 10$  с, их мало (отметим уникальный сверхмедленный пульсар PSR J0250+5854 с периодом  $P = 23.5$  с [329]). Работая тогда под влиянием потока гамма-квантов, идущих из внешнего космического фона, нейтронные звёзды продолжают тормозиться и генерировать электрон-позитронную плазму, которая вытекает из магнитосферы вдоль открытых магнитных силовых линий. Эволюция периода вращения описывается соотношением

$$J\Omega\dot{\Omega} = -W, \quad (151)$$

где  $J \simeq 10^{45}$  г см<sup>2</sup> — момент инерции звезды; следовательно,

$$P = P_0 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^{1/2}, \quad (152)$$

где

$$\tau = \frac{c^3 P_0^2 J}{8\pi^2 a B_0^2 R_6^6} = 1.1 \times 10^7 \frac{P_0^2}{a} \frac{J_{45}}{B_{12}^2 R_6^6} \text{ лет}, \quad (153)$$

а  $J_{45} = J/10^{45}$  г см<sup>2</sup> — безразмерный момент инерции звезды.

Магнитное поле одиночных нейтронных звёзд практически не затухает [62, 170, 197] и существует в сверхпроводящих вихрях в ядре звезды, поэтому при оценивании максимального периода вращения  $P_{\max}$  с помощью формулы (152) время  $t$  полагается равным возрасту Галактики  $t_G \simeq 1.3 \times 10^{10}$  лет,

$$P_{\max} = P_0 \left(1 + 1.2 \times 10^3 \frac{a}{P_0^2} \frac{B_{12}^2 R_6^6}{J_{45}}\right)^{1/2} \simeq 35 \frac{a^{1/2} B_{12} R_6^3}{J_{45}^{1/2}} \text{ с}. \quad (154)$$

Мы видим, что максимальный период потухших пульсаров практически не зависит от периода  $P_0$ , при котором произошло пересечение линии смерти. Все

нейтронные звёзды, которые стали радиопульсарами и родились в момент образования Галактики, теперь имеют период  $P = P_{\max} \simeq 35$  с.

Введём частоту рождения пульсаров  $\nu(t)$  посредством соотношения  $dN = \nu(t)dt$ , так что полное число нейтронных звёзд равно [34, 288]

$$N = \int_0^{t_G} \nu(t')dt' \simeq 10^9. \quad (155)$$

Если считать, что каждый взрыв сверхновой приводит к рождению радиопульсара, то частота  $\nu_0$  взрыва сверхновых в Галактике соответствует частоте рождения нейтронных звёзд. Текущие оценки дают  $\nu_0 \simeq 3 \times 10^{-2}$  год $^{-1}$  [23, 116, 328], и если бы эта величина была постоянна во времени, то число нейтронных звёзд составляло бы  $4 \times 10^8$ . Однако могло быть, что в прошлом, когда Галактика была молода, частота взрывов сверхновых была выше, и число старых нейтронных звёзд больше числа молодых [104]. Альтернативой является раннее звёздобразование в Галактическом балдже до количества  $6 \times 10^8$  [279]. В любом случае, трудно определить распределение старых нейтронных звёзд по периодам в настоящее время, не зная историю образования пульсаров. Период лежит в диапазоне от  $P_0 \simeq 1.5$  с до  $P_{\max} \simeq 35$  с и зависит от магнитного поля  $B_0$  (см. линию смерти пульсаров и выражение (154)). Чтобы найти среднее значение лоренц-фактора вытекающих частиц, полагаем  $P = P_{\max}$ , потому что  $\gamma \propto P^{-2/3}$  соответствует интегральной зависимости с положительным показателем  $1/3$ ,

$$\bar{\gamma} \simeq 3.5 \times 10^2 B_{12}^{1/3} P_{\max}^{-2/3} R_6 = 33 \left( \frac{J_{45}}{a B_{12} R_6^3} \right)^{1/3}. \quad (156)$$

Стоит отметить, что оценка (156) относится к энергии электронов и позитронов, истекающих непосредственно из магнитосферы нейтронной звезды. Расширяясь в межзвёздную среду, субрелятивистская плазма охлаждается, и её лоренц-фактор падает, когда плазма входит в окружающий газ. Оценим это значение  $\gamma_f$ . Плазма расширяется свободно до расстояния  $l$ , где её давление

сравнивается с давлением  $P_g$  межзвёздного газа,  $P_g = 2\gamma_f n m_e c^2$ . Для релятивистского газа плотность плазмы  $n$  на границе полости размера  $l$  связана с плотностью на границе магнитосферы соотношением  $n = n_0 (r_L/l)^2$ . С другой стороны, работа плазмы, потраченная на вытеснение газа из полости, равна  $4\pi P_g l^3/3$  и черпается из энергии плазменного потока,  $4\pi(\bar{\gamma} - \gamma_f)m_e c^2 n_0 r_L^2 l$ . В результате  $\bar{\gamma} - \gamma_f = 2\gamma_f/3$ ,  $\gamma_f = 3\bar{\gamma}/5$ . Итак, энергия позитронов, взаимодействующих с межзвёздным газом, равна

$$E_p = \gamma_f m_e c^2 \simeq 20 m_e c^2 = 10 \text{ МэВ}. \quad (157)$$

С учётом соотношения (156)  $\bar{\gamma} \propto B_{12}^{-1/3}$ , значение (157) можно рассматривать как верхний предел; например, для  $B_{12} \simeq 10$  имеем  $E_p \simeq 5 \text{ МэВ}$ .

Чтобы оценить полное число позитронов, производимых старыми нейтронными звёздами, в формуле (150) нужно положить  $P = P_0$ , потому что сильная зависимость  $P^{-10/3}$  с интегральной зависимостью  $P^{-7/3}$  подразумевает основной вклад на нижнем пределе периодов,  $P \simeq P_0$ . В результате имеем [A15]

$$\begin{aligned} L_{\text{tot}} &\simeq 1.3 \times 10^{35} a N B_{12}^{5/3} P_0^{-10/3} R_6^5 \text{ с}^{-1} = \\ &= 3.4 \times 10^{43} a N_9 B_{12}^{5/3} R_6^5 \text{ с}^{-1}. \end{aligned} \quad (158)$$

Здесь  $N = 10^9 N_9$  — число старых нейтронных звёзд,  $N_9 \simeq 1$ .

### 2.2.5 Возможные наблюдения

В конце раздела обсудим вопрос о том, возможно ли наблюдать такие старые нейтронные звёзды, которые дают необходимый поток субрелятивистских позитронов. Как и в радиопульсарах, поток заряженных частиц, электронов и



позитронов, хотя и при низких энергиях, должен излучать радиоволны. Релятивистские частицы, двигаясь с ускорением, направленным поперёк магнитного поля благодаря кривизне магнитных силовых линий, генерируют электромагнитные волны. Это излучение, называемое изгибным излучением, может достигать высокой мощности благодаря эффекту коллективной генерации [185]. Для радиопульсаров эффективность генерации радиоволн в магнитосфере, то есть отношение потока энергии радиоизлучения к потоку энергии релятивистских частиц, составляет величину  $\alpha_r \simeq 10^{-6}$  [59]. В нашем случае старых нейтронных звёзд  $P \simeq 15$  с и  $B_{12} \simeq 1$ , и поток энергии частиц, уходящих из магнитосферы, равен  $W \simeq 10^{27}$  эрг с<sup>-1</sup>. Таким образом, мощность радиоизлучения от старой нейтронной звезды равна  $W_r \simeq 10^{21}$  эрг с<sup>-1</sup>.

Однако излучаемые радиоволны имеют значительно более низкие частоты,

$$\omega = \frac{c\gamma^3}{\rho_c}, \quad (159)$$

где  $\rho_c \simeq r_L = cP/2\pi$  — радиус кривизны магнитных силовых линий в далёкой открытой магнитосфере. Для характерного значения лоренц-фактора электронов и позитронов в магнитосфере  $\gamma \simeq 30$  имеем значение частоты излучаемых радиоволн

$$f = \frac{\gamma^3}{P} \simeq 2 \text{ кГц}. \quad (160)$$

Такие волны не проходят сквозь ионосферу Земли, но могут детектироваться в космосе. Если считать, что ближайшая старая нейтронная звезда располагается на расстоянии  $\simeq 10$  пк, то наблюдаемая плотность потока энергии должна составлять  $\simeq 4$  Ян.

Нужно отметить, что такой вид излучения наблюдается в ближайшем космосе. Это так называемое земное километровое излучение, происходящее в нижней полярной магнитосфере Земли [364]. Наблюдаемые частоты составляют  $f \simeq 5 \times (10^4—10^5)$  Гц, мощность равна  $10^{13}—10^{14}$  эрг с<sup>-1</sup>. Излучение наблюдается на удалённых космических аппаратах, даже на орбите Луны. Подобное

излучение наблюдалось и от других планет Солнечной системы, которые обладают собственным магнитным полем. Так, Юпитер излучает декаметровое радиоизлучение.

### 3 Вращательная динамика нейтронной звезды и её электромагнитного поля

В данной главе представлены результаты по динамике полей, зарядов и токов нейтронной звезды, их генерации вращательным движением замагниченного вещества и обратному влиянию поля на это движение [A7, A14, A24, A25, A34].

#### 3.1 Внутренняя электродинамика

Существующее разнообразие наблюдательных проявлений нейтронной звезды обычно связывается с переменной активностью её магнитосферы, но свойства внутренних областей нейтронной звезды также могут проявляться в различных наблюдаемых эффектах, таких как, например, прецессия [230], глитчи [132] и вспышки [114]. Последние эффекты могут быть связаны с деформацией нейтронной звезды [120, 171, 246]. Внутреннее магнитное поле играет при этом важную роль, так как магнитные напряжения дают вклад в деформацию и могут опосредованно, через механические эффекты, изменять наблюдательные свойства нейтронных звёзд [108, 146, 222]. Могут ли существовать проявления внутреннего магнитного поля, не опосредованные механикой? Одна из

возможностей заключается в генерации токов переменным полем, что может проявиться, например, в нагреве коры и сопровождающем его рентгеновском и радиоизлучении. Токи вызываются перераспределением зарядов и могут быть высоки, если плотность заряда может меняться и достигать значительных величин. Важно, что она не является плотностью Гольдрайха — Джулиана [156] и может значительно её превышать. Далее вычисляются внутренние электромагнитные поля, заряды и токи для общего случая твердотельно вращающейся идеально проводящей замагниченной нейтронной звезды. Рассматривается соотношение между зарядами и токами и демонстрируется, что перераспределение и накопление зарядов может быть реализовано посредством скрутки магнитных силовых линий. Как следствие, перестройка внутреннего магнитного поля потенциально может влиять на наблюдательные свойства нейтронных звёзд даже при отсутствии вклада дополнительных механических эффектов.

### 3.1.1 Уравнения Максвелла

Напомним, что в простейшем случае нейтронную звезду можно представлять себе как твёрдый проводящий шар типичного радиуса  $R \sim 10$  км, вращающийся с периодом, обычно лежащим в диапазоне от  $P \sim 1$  мс для миллисекундных пульсаров до  $P \sim 10$  с для магнитаров. Предполагается, что центр звезды неподвижен; тогда ось вращения проходит через центр. Сама ось вращения не является неподвижной и может менять своё направление с течением времени. Мы не предполагаем, что нейтронная звезда — идеальный шар, и её форма может быть произвольной, не обязательно сферической; в этом случае центр звезды определяется как точка нулевой скорости, вокруг которой происходит вращение нейтронной звезды. Всякая точка нейтронной звезды движется

со скоростью

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (161)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, направленный из центра звезды в эту точку, а  $\boldsymbol{\Omega}$  — угловая скорость, абсолютное значение которой равно  $\Omega = 2\pi/P$ .

Внутри нейтронной звезды выполняются уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (162)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (163)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (164)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (165)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — внутренние электрическое и магнитное поля,  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  — объёмные плотности заряда и тока. Мы полагаем  $c = 1$ , что соответствует измерению всех скоростей в единицах скорости света  $c$  и всех времён в единицах  $1/c$ , так что скорость безразмерна, а время имеет размерность длины. Чтобы восстановить размерности, достаточно во всех формулах произвести замены  $t \rightarrow ct$ ,  $\partial/\partial t \rightarrow (1/c)\partial/\partial t$ ,  $d/dt \rightarrow (1/c)d/dt$ ,  $\boldsymbol{\Omega} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}/c$ ,  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}/c$ ,  $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w}/c^2$ ,  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}/c$ ,  $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}/c$ ,  $\rho \rightarrow \rho/c$ ,  $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{j}/c^2$  и  $\sigma \rightarrow \sigma/c$ .

Электрический ток  $\mathbf{j}$  связан с  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{v}$  через релятивистский закон Ома [153, 192],

$$\mathbf{j} = \sigma\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) + \rho\mathbf{v}, \quad (166)$$

где  $\sigma$  — проводимость нейтронной звезды и  $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$  — лоренц-фактор и где используется обозначение  $\mathbf{a}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ . Уравнение (166) означает, что в сопутствующей инерциальной системе отсчёта, которая мгновенно движется со скоростью рассматриваемой точки, закон Ома имеет обычный вид

$$\mathbf{j}' = \sigma\mathbf{E}', \quad (167)$$

где

$$\mathbf{j}' = \mathbf{j} - \gamma\rho\mathbf{v} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} \quad (168)$$

и

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \quad (169)$$

— ток и электрическое поле в этой системе отсчёта в силу преобразования Лоренца [192].

Предполагается, что нейтронная звезда — идеальный проводник, и это означает, что она формально обладает бесконечной проводимостью,

$$\sigma = \infty. \quad (170)$$

С учётом конечности величины  $\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}$  в соотношении (166) это условие предполагает

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (171)$$

что в свою очередь даёт

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (172)$$

Чтобы проверить соотношение (172), заметим, что если оно выполняется, то выполняется и соотношение (171), потому что  $\mathbf{E}$  ортогонально  $\mathbf{v}$  в силу (172); другими словами, соотношение (172) — это решение уравнения (171). Необходимо лишь проверить, что соотношение (172) — это единственное решение уравнения (171). Для этого запишем электрическое поле в виде

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \boldsymbol{\delta}, \quad (173)$$

где  $\boldsymbol{\delta}$  — некоторое отклонение, и подставим его в уравнение (171); тогда получим

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}. \quad (174)$$

Видно, что  $\boldsymbol{\delta}$  параллельно  $\mathbf{v}$ , а это значит, что

$$|\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}| = v \delta; \quad (175)$$

следовательно,

$$\boldsymbol{\delta} = v^2 \boldsymbol{\delta}. \quad (176)$$

Поскольку всякая точка нейтронной звезды может двигаться лишь со скоростью, меньшей скорости света,  $v < 1$ , мы получаем  $\delta = 0$  и, следовательно,

$$\delta = 0. \quad (177)$$

Соотношение (172) также может быть получено из условия исчезновения электрического поля в сопутствующей системе отсчёта [6] и совпадает с обычным условием бесконечной проводимости в нерелятивистской магнитогидродинамике, когда  $v \ll 1$  [8]; тем временем, оно полностью релятивистское и верно для любого значения  $v < 1$ .

Поскольку  $\mathbf{v}$  известно и даётся формулой (161), соотношение (172) определяет внутреннее электрическое поле через внутреннее магнитное поле; следовательно, остаётся найти последнее. Подставляя соотношение (172) в закон Фарадея (164), получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (178)$$

которое определяет магнитное поле. Уравнение (178) означает, что всякая точка магнитной силовой линии движется со скоростью среды в этой точке [28]; иными словами, магнитные силовые линии «вморожены» — сцеплены со средой.

Учитывая соотношения (161) и (163) и пользуясь известными формулами векторного анализа, из уравнения (178) получаем

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}, \quad (179)$$

где посредством

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (180)$$

обозначена полная, или субстанциальная, производная. Уравнение (179) аналогично уравнению для радиус-вектора,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (181)$$

которое отражает равенство  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  и описывает вращение радиус-вектора  $\mathbf{r}$  вокруг оси  $\mathbf{e}_z = \mathbf{\Omega}/\Omega$  с угловой скоростью  $\Omega$ . Следовательно, вектор магнитного поля в произвольной точке нейтронной звезды, будучи подвергнут параллельному переносу так, что его начало совпадает с центром звезды, вращается аналогично радиус-вектору. Уравнение (179) снова выражает условие вмерзлости и описывает коротацию внутреннего магнитного поля с нейтронной звездой.

Мы видим, что внутреннее магнитное поле определено в любой момент времени  $t$ , если оно задано в произвольный (скажем, нулевой) момент времени и если известно положение нейтронной звезды. Это положение можно получить из начального положения в нулевой момент времени посредством поворота вокруг некоторой оси  $\zeta$ , где  $|\zeta| = 1$ , на некоторый угол  $\alpha$  в силу теоремы Эйлера. Положение может быть задано кватернионом [2, 5, 150]

$$\Lambda = \cos \frac{\alpha}{2} + \zeta \sin \frac{\alpha}{2} = e^{\zeta\alpha/2}, \quad (182)$$

который соответствует упомянутому повороту. Кватернионы — это специальный вид гиперкомплексных чисел, используемый в различных физических задачах и особенно эффективный при рассмотрении вращательной динамики [25, 135, 157, 161, 200, A7]. В общем случае  $\Lambda = \Lambda(t)$ , причём  $\zeta = \zeta(t)$  и  $\alpha = \alpha(t)$ , и описывает, как меняется со временем положение нейтронной звезды. Мы никак не ограничиваем эту временную зависимость и считаем её произвольной.



### 3.1.2 Кватернионы

Напомним некоторые необходимые факты из теории кватернионов. Кватернион

$$M = \mu_0 + \boldsymbol{\mu} \quad (183)$$

представляет собой сумму скалярной части  $\mu_0$  и векторной части  $\boldsymbol{\mu}$ . Интересно, что любой кватернион можно записать в альтернативной форме с помощью базиса спиновых матриц,

$$M = \mu_0 \sigma_0 - i \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (184)$$

где  $\sigma_0 = \mathbf{I}$  — единичная матрица и  $\boldsymbol{\sigma}$  — вектор обычных матриц Паули. Сопряжённый кватернион определяется как

$$\bar{M} = \mu_0 - \boldsymbol{\mu}; \quad (185)$$

для кватерниона (182) имеем

$$\bar{\Lambda} = \cos \frac{\alpha}{2} - \boldsymbol{\zeta} \sin \frac{\alpha}{2} = e^{-\boldsymbol{\zeta} \alpha / 2}. \quad (186)$$

Всякий вектор является кватернионом с нулевой скалярной частью; например, радиус-вектор  $\mathbf{r}$  можно рассматривать как кватернион  $0 + \mathbf{r}$ . Произведение двух кватернионов  $M$  и

$$N = \nu_0 + \boldsymbol{\nu} \quad (187)$$

определяется как

$$M \circ N = \mu_0 \nu_0 - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\nu} + \mu_0 \boldsymbol{\nu} + \nu_0 \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\nu}. \quad (188)$$

Это произведение ассоциативно,

$$(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N) = \Lambda \circ M \circ N, \quad (189)$$

но не коммутативно,

$$M \circ N \neq N \circ M. \quad (190)$$

Последнее свойство означает, что два последовательных поворота твёрдого тела дают в общем случае иное его положение, чем те же повороты, совершённые в обратном порядке.

Для произведения кватернионов (188) выполняется свойство сопряжения

$$\overline{M \circ N} = \bar{N} \circ \bar{M}. \quad (191)$$

Любой кватернион вида (182) обладает единичной нормой, то есть

$$\Lambda \circ \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \circ \Lambda = 1. \quad (192)$$

Из формулы (182) вытекает, что для любого кватерниона  $M$  единичной нормы

$$\exp\left(M \circ \frac{\zeta^\alpha}{2} \circ \bar{M}\right) = M \circ e^{\zeta^{\alpha/2}} \circ \bar{M}. \quad (193)$$

Радиус-вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  связан с первоначальным радиус-вектором  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$  соотношением

$$\mathbf{r} = \Lambda \circ \mathbf{r}_0 \circ \bar{\Lambda}. \quad (194)$$

Угловая скорость связана с кватернионом посредством соотношения

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(t) = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}, \quad (195)$$

где точкой обозначена производная по времени.

### 3.1.3 Вращение электромагнитного поля

Для того чтобы найти внутреннее магнитное поле в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{r}$ , необходимо взять магнитное поле в нулевой момент времени в точке

$\mathbf{r}_0$  и повернуть его аналогично радиус-вектору; тем временем, само начальное положение получается обратным вращением  $\mathbf{r}$ , которое характеризуется сопряжённым кватернионом  $\bar{\Lambda}$ :

$$\mathbf{r}_0 = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{r} \circ \Lambda. \quad (196)$$

Тогда имеем

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Lambda \circ \mathbf{B}(\bar{\Lambda} \circ \mathbf{r} \circ \Lambda, 0) \circ \bar{\Lambda}. \quad (197)$$

Во всех вышеуказанных формулах угловая скорость  $\boldsymbol{\Omega}$  может изменять свою величину и направление с течением времени в соответствии с формулой (195). То, что магнитное поле (197) удовлетворяет уравнению (179), что в свою очередь подразумевает выполнение уравнений Максвелла (163) и (164) и релятивистского закона Ома для бесконечной проводимости (172), можно также проверить непосредственно, путём дифференцирования по времени с учётом соотношения (195). Таким образом, распределение внутреннего магнитного поля вращается как твёрдое тело. Это значит, что любые поправки к магнитному полю в покое, которые могли бы возникнуть из-за вращения и имели бы вид степеней  $v$ , на самом деле отсутствуют. Сразу отметим, что отсюда вытекает независимость тока намагничивания от величины  $\rho \mathbf{v}$ , что в свою очередь даёт нарушение соотношения Гольдрайха — Джулиана для плотности заряда в нейтронной звезде (см. ниже).

Если  $\boldsymbol{\Omega}$  постоянно, то  $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{e}_z$  и  $\alpha = \Omega t$ ; это значит, что нейтронная звезда вращается вокруг неподвижной оси  $\mathbf{e}_z$  с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Формулы (182), (188) и (197) в этом случае дают

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = & \mathbf{B}_0(\mathbf{r}_0) \cos \Omega t + \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_0(\mathbf{r}_0) \sin \Omega t + \\ & + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r}_0) (1 - \cos \Omega t), \end{aligned} \quad (198)$$

где  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$  — внутреннее магнитное поле в нулевой момент времени и

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} \cos \Omega t - \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} \sin \Omega t + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r} (1 - \cos \Omega t). \quad (199)$$

Внутреннее электрическое поле  $\mathbf{E}$  даётся формулой (172), в которой можно определить  $\mathbf{B}$  с помощью формулы (197) в общем случае или с помощью формулы (198) для постоянной  $\boldsymbol{\Omega}$ . В последнем случае  $\mathbf{E}$  удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению (179) для  $\mathbf{B}$ ,  $d\mathbf{E}/dt = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}$ . Следовательно, внутреннее электрическое поле коротитруется с нейтронной звездой, когда угловая скорость постоянна. Уравнение (179), однако, более общее и означает, что внутреннее магнитное поле коротитруется с нейтронной звездой, даже когда угловая скорость меняется со временем. Когда  $\boldsymbol{\Omega}$  не постоянна, мы имеем

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E} - \mathbf{w} \times \mathbf{B}, \quad (200)$$

где  $\mathbf{w} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}$  — вращательное ускорение. Самое правое слагаемое в уравнении (200) описывает изменение электрического поля за счёт изменения скорости вещества нейтронной звезды, которая также определяет поле, см. формулу (172).

### 3.1.4 Заряды и токи

Чтобы вычислить внутреннее электромагнитное поле и понять его поведение, мы до сих пор, наряду с релятивистским законом Ома (172) для бесконечной проводимости, использовали только два из четырёх уравнений Максвелла, уравнения (163) и (164). Оставшиеся два уравнения (162) и (165) позволяют определить электрические заряды и токи, которые генерируют поле:

$$\rho = \frac{\operatorname{div} \mathbf{E}}{4\pi}, \quad (201)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \left( \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (202)$$

Рассмотрим сначала покоящуюся замагниченную нейтронную звезду, когда  $\boldsymbol{\Omega} = 0$  и  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0$ . Нейтронная звезда обладает некоторым распределением

внутреннего магнитного поля  $\mathbf{B}$ , и соответствующий ток определяется стационарной версией уравнения (202):

$$\mathbf{j}_m = \frac{\text{rot } \mathbf{B}}{4\pi}. \quad (203)$$

Хотя нейтронная звезда покоится,  $\mathbf{j}_m$  в общем случае не равен нулю и представляет собой ток намагничивания, генерирующий поле  $\mathbf{B}$ . Это видно из того, что в покое нет токов, связанных с электрическим полем, так как тогда электрическое поле в нейтронной звезде равно нулю и не меняется со временем.

Ток намагничивания существенно связан с внутренним магнитным полем и существует не только в покое, но и когда нейтронная звезда вращается. Поскольку поле вморожено, ток намагничивания также вморожен. Следовательно, мы имеем для  $\mathbf{j}_m$  то же уравнение коротации, что и для  $\mathbf{B}$ ,

$$\frac{d\mathbf{j}_m}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}_m, \quad (204)$$

которое верно для произвольного вращательного движения нейтронной звезды, когда абсолютная величина и направление  $\boldsymbol{\Omega}$  могут меняться со временем. Уравнение (204) также можно проверить и непосредственно — с помощью формул (161), (179), (180) и (203).

Теперь можно рассмотреть соотношение между плотностями заряда и тока в нейтронной звезде. Подставляя формулу (172) в уравнение (201), получаем плотность заряда как функцию тока,

$$\rho = \rho_{GJ0} + \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{v}, \quad (205)$$

где через

$$\rho_{GJ0} = -\frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{B}}{2\pi} \quad (206)$$

обозначена так называемая плотность Гольдрайха — Джулиана для нулевой скорости, в которую переходит плотность Гольдрайха — Джулиана при  $v = 0$  (в центре нейтронной звезды). В этой связи напомним общее выражение для

плотности Гольдрайха — Джулиана [156]:

$$\rho_{\text{GJ}} = \frac{\rho_{\text{GJ}0}}{1 - v^2}. \quad (207)$$

где

$$v = \Omega r \sin \theta \quad (208)$$

— скорость рассматриваемой точки и  $\theta$  — полярный угол.

Важно, что только ток намагничения  $\mathbf{j}_m$ , а не полный ток  $\mathbf{j}$ , входит в формулу (205) для плотности заряда. Более точно, для определения плотности заряда важна лишь азимутальная, тороидальная компонента

$$\mathbf{j}_{m\phi} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}_m}{v^2}, \quad (209)$$

которая параллельна  $\mathbf{v}$ . Сам по себе  $\mathbf{j}_m$ , а значит, и  $\mathbf{j}_{m\phi}$ , связан с магнитным полем и, очевидно, не связан с величиной  $\rho\mathbf{v}$ ; таким образом,

$$\mathbf{j}_{m\phi} \neq \rho\mathbf{v}. \quad (210)$$

Заметим теперь, что если бы выполнялось равенство  $\mathbf{j}_{m\phi} = \rho\mathbf{v}$ , то мы бы из соотношения (205) получили в качестве плотности заряда в точности плотность Гольдрайха — Джулиана (207). Отсюда сразу можно заключить, что плотность заряда не равна плотности Гольдрайха — Джулиана [A7],

$$\rho \neq \rho_{\text{GJ}}. \quad (211)$$

### 3.1.5 Роль перестройки поля

Таким образом, плотность заряда определяется не только угловой скоростью и магнитным полем, как в случае соотношения Гольдрайха — Джулиана (207), но и ротором магнитного поля. Это говорит о важности топологии

магнитного поля: трубка прямых магнитных силовых линий и трубка скрученных магнитных силовых линий, даже если напряжённость магнитного поля одна и та же, имеют разные заряды в движущейся среде, так как скрутка даёт ненулевой ротор. Иными словами, скрутка магнитных силовых линий вызывает локальное накопление заряда и наоборот.

Заряд, накопленный в результате скрутки, может играть основную роль и значительно превышать стандартное значение Гольдрайха — Джулиана. Например, для замкнутой трубки скрученных силовых линий — витого тора, — которая лежит в экваториальной плоскости и охватывает нейтронную звезду (см. рис. 3), очевидные оценки по порядку величины в уравнении (205) дают, что плотность заряда в  $R_0/r_0 \gg 1$  раз больше  $\rho_{\text{GJ0}}$ , где  $R_0$  и  $r_0$  — большой и малый радиусы тора. При  $r_0 \approx 1$  км и  $R_0 \approx 10$  км плотность заряда на порядок величины выше плотности Гольдрайха — Джулиана. Витой тор даёт пример ненулевого тороидального тока намагничивания, не равного  $\rho \mathbf{v}$ . Отметим, что витой тор — возможная структура внутреннего магнитного поля магнитара [71, 73, 74, 98, 99, 220, 221, 252, 254].

Скрутка или раскрутка магнитных силовых линий вызывает скачок или падение плотности заряда и ведёт к появлению токов, которые могут нагреть кору нейтронной звезды. Например, накопление заряда в витом торе приводит к появлению дополнительной энергии электрического поля

$$\varepsilon \sim \frac{q^2}{2R}, \quad (212)$$

где

$$q \sim \frac{R_0 \rho_{\text{GJ0}} V}{r_0} \quad (213)$$

и

$$V \sim 2\pi^2 r_0^2 R_0 \quad (214)$$

— заряд и объём тора. При  $B \sim 10^{15}$  Гс,  $P \sim 1$  с и вышеназванных  $r_0$  и  $R_0$  получаем  $\varepsilon \sim 10^{39}$  эрг, и при возникновении или исчезновении витого тора

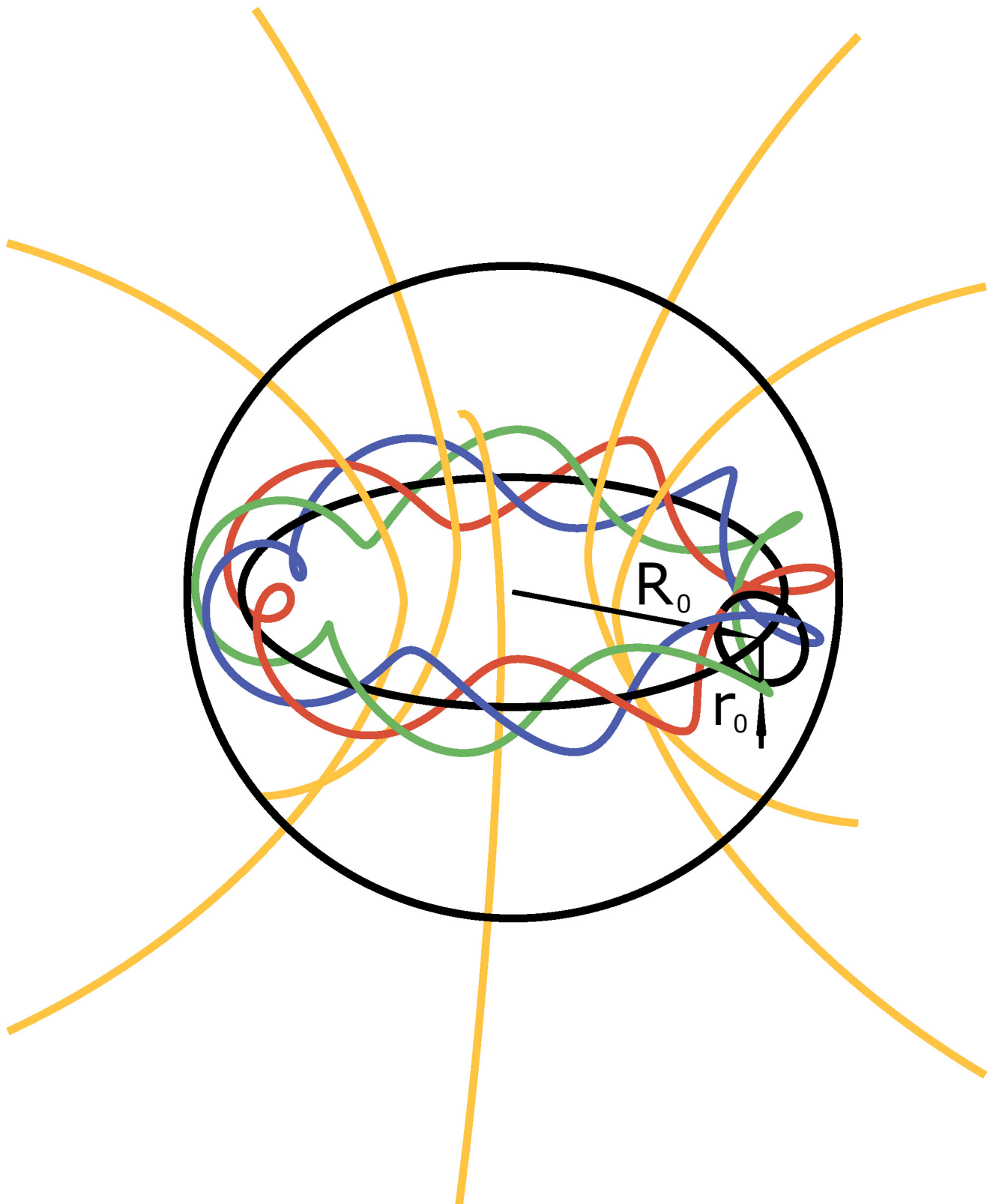


Рис. 3. Витой тор [A7].



можно ожидать выделения тепловой энергии того же порядка. Такое достаточно большое энерговыделение может обеспечиваться торможением в коре потока заряженных частиц, ускоряемых нестационарным электрическим полем в магнитосфере во время перестройки, и поглощением излучаемых ими фотонов.

Отметим, что нагрев может существовать и после перестройки поля за счёт формирования больших стационарных токов намагничения. Энерговыделение в коре для обеспечения теплового излучения магнитара равно  $H \sim 10^{20}$  эрг см<sup>-3</sup> с<sup>-1</sup> [201], что при проводимости  $\sigma \sim 10^{22}$  с<sup>-1</sup> даёт плотность тока  $j \sim \sqrt{\sigma H} \sim 10^{21}$  СГС-ед. Получить такую плотность тока можно в результате перестройки электромагнитного поля, сопровождающейся появлением большой плотности заряда  $\rho = \lambda \rho_{\text{GJ}}$ , где  $\lambda \gg 1$ . Из оценок  $\rho \sim j_m v$ ,  $j \sim j_m$  и  $B \sim 10^{15}$  Гс получаем  $\lambda \sim 100$ . Столь большая величина плотности заряда связана с большой величиной тока намагничения и свидетельствует об изменении магнитного поля в коре на малых пространственных масштабах  $R/\lambda \sim 100$  м. Иными словами, при таких параметрах можно предполагать переход крупномасштабного магнитного поля в мелкомасштабное и рассматривать его как причину дополнительного нагрева коры.

Таким образом, перестройка внутреннего магнитного поля может проявиться через нагрев коры во внешних магнитосферных эффектах, связанных с радиоизлучением. Например, нагрев может инициировать переход нейтронной звезды из состояния RRAT в состояние пульсара [A3], который наблюдался у двух любопытных гибридных радиоисточников PSR J0941-39 и PSR B0826-34 [82, 131]. Другой пример касается обычных магнитаров. Объяснение радиоизлучения магнитаров было дано в 2007 г. в работе [186]. Было показано, что радиоизлучение обязано своим существованием генерации электрон-позитронной плазмы, а генерация не подавлена и может эффективно происходить в сверхсильных магнитных полях, несмотря на квантовый эффект расщепления фотона. В этом случае перестройка внутреннего магнитного поля может

включить или интенсифицировать радиоизлучение магнитара, потому что обратное комптоновское рассеяние, которое возрастает из-за нагрева, усиливает генерацию плазмы. Для выяснения точных условий, при которых реализуются вышеназванные механизмы, требуется отдельное исследование, но здесь мы можем определённо заключить, что эти механизмы позволили бы наблюдать внутренние эффекты, связанные со скруткой силовых линий, даже при отсутствии вклада дополнительных механических эффектов, а это важно для определения структуры внутреннего магнитного поля магнитаров, источника их наблюдаемой активности.

Описанные эффекты скрутки магнитных силовых линий в нейтронной звезде включают в себя связь между нагревом коры и генерацией плазмы, или между рентгеновским и радиоизлучением. Другое отражение этой связи было обнаружено ранее у чистых RRAT: теория [A3] и последующие наблюдения [267] показали, что физические процессы, вызывающие радиовспышки, могут нагревать полярную шапку.

Перестройка магнитного поля требует, чтобы вещество нейтронной звезды допускало внутренние относительные движения. Движения могут очевидно происходить в жидком веществе. Однако твёрдое вещество не перечёркивает возможность перестройки: вещество может растрескаться или расплавиться, например, за счёт эффекта Померанчука [10, 78–81].

Отметим наконец, что отличие плотности заряда от плотности Гольдрайха — Джулиана важно и при рассмотрении электромагнитных процессов, происходящих в магнитосфере нейтронной звезды [338, 374].

### 3.2 Быстрые радиовсплески

Быстрые радиовсплески (FRB) — это космические транзиенты, проявляющие себя как сверхкороткие одиночные вспышки миллисекундной длительности [103, 289]. Высокая мера дисперсии и ассоциация 5 источников с родительскими галактиками (диапазон красных смещений 0.03—0.66) подразумевают космологические расстояния до FRB [45, 249, 300, 303, 335]. В настоящее время вспышки зарегистрированы исключительно в радиодиапазоне, обычно на частотах  $\sim 1$  ГГц с типичным потоком энергии  $\sim 1$  Ян и общим энерговыделением в предположении изотропии  $\sim 10^{40}$  эрг. В 2016 г. была открыта первая повторяющаяся активность FRB [325], относящаяся к ранее известному FRB 121102, и за 2020 г. число повторяющихся источников значительно возросло, составив 20 [94, 140, 217].

FRB 180916.J0158+65 был впервые обнаружен в Канадском эксперименте по отображению интенсивности линии водорода (CHIME) как 10 вспышек в диапазоне частот 400—800 МГц с пиковым потоком, лежащим в диапазоне 0.4—4 Ян, — радиоисточник, аналогичный другим повторяющимся FRB [94]. Последующие наблюдения с использованием радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ, VLBI) позволили ассоциировать FRB 180916 с областью звездообразования в массивной спиральной родительской галактике SDSS J015800.28+654253.0, расположенной на расстоянии около 150 Мпк от Земли, так что этот FRB оказался ближайшим среди обнаруженных на настоящий момент (красное смещение  $z \approx 0.034$ ) [249]. FRB 180916 привлёк колоссальный интерес после открытия неожиданной регулярной активности, характеризующейся существованием периодической 16-дневной модуляции. Оказалось, что наблюдаемые радиовспышки распределены не случайно, а сконцентрированы в 5-дневных временных интервалах вокруг периодов пиковой активности, при-

чём вне интервалов вспышки не обнаруживаются, а сами периоды активности повторяются каждые 16.35 дней [95]. Совсем недавно этот FRB также был обнаружен на ещё более низких радиочастотах, а именно 3 вспышки на 328 МГц на радиотелескопе Сардинии [290] и 7 вспышек в диапазоне частот 300—400 МГц на телескопе Грин Бэнк [92]. Кроме этого, появилась информация о возможном обнаружении периодичности от уже упоминавшегося первого повторителя FRB 121102 на телескопе Ловелла и был предложен наиболее вероятный период  $\sim 157$  дней [302].

Природа одиночных, повторяющихся или периодических FRB пока однозначно не установлена, и были предложены многочисленные теоретические модели, связывающие FRB с нейтронными звёздами, чёрными дырами или более экзотическими объектами [55, 93, 102, 109, 180, 182, 229, 242, 243, 264, 272, 284, 292, 369, 371]. Вспышечная периодичность FRB естественно подразумевает существование какого-либо лежащего в её основе периодического физического явления. Например, наклонённые аккреционные диски вокруг вращающихся чёрных дыр испытывают прецессию Лензе — Тирринга, приводящую к сопутствующей прецессии создаваемых релятивистских джетов, и, как показано в гл. 4, признак этого сценария по всей видимости наблюдается для джета в галактике M87 как его квазипериодическое поперечное смещение [A10]. Эта идея использовалась для объяснения наблюдаемой периодичности FRB 180916 как связанной с прецессией джетов [203]. Альтернативное объяснение привлекает идею о свободной прецессии нейтронной звезды, магнитное поле которой достаточно сильно для того, чтобы вызвать деформацию звезды, и может достигать  $\sim 10^{16}$  Гс, что намекает на возможную магнитарную природу FRB [227, 373]. Этот механизм возникновения свободной прецессии привлекался ранее для объяснения наблюдаемой медленной фазовой модуляции периодических пульсаций в жёстких рентгеновских лучах у магнитара 4U 0142+61 и дал ту же величину магнитного поля [246].

Тем временем, в работе [332] были изучены наблюдения Swift и AGILE источника FRB 180916 с уделением особого внимания 5-дневным временным интервалам, в которых FRB активен в радиодиапазоне, и также был проведён поиск какого-либо временного совпадения на миллисекундных масштабах времени между известными радиовспышками и возможными событиями высоких энергий. Большой энергетический выход FRB в радиодиапазоне естественным образом подразумевал возможное сопутствующее излучение высоких энергий, которое могло бы как-то прояснить природу самого FRB и физического явления, лежащего в основе его необычной периодической активности. Весьма неожиданным оказалось отсутствие обнаружения какого-либо одновременно события или продолжительного рентгеновского или  $\gamma$ -излучения на масштабах времени часов, дней или недель. Отрицательный результат позволил получить верхние пределы на излучение высоких энергий от этого источника,  $\sim 1.5 \times 10^{41}$  эрг  $s^{-1}$  для изотропной рентгеновской светимости (диапазон 0.3–10 кэВ) и поток на один порядок выше для средней светимости в гамма-диапазоне (диапазон  $> 100$  МэВ).

На основе этих энергетических пределов в работе [332] было выведено ограничение, применимое к нейтронной звезде магнитарного типа, которая могла бы отвечать за наблюдаемую вспышечную активность периодического FRB,

$$\left(\frac{R}{10 \text{ км}}\right)^3 \left(\frac{B}{10^{16} \text{ Гс}}\right)^2 \left(\frac{\tau}{10^8 \text{ с}}\right)^{-1} \lesssim 1, \quad (215)$$

где  $R$  — радиус звезды,  $B$  — внутреннее магнитное поле и  $\tau$  — характерное время магнитной диссипации. Из соотношения (215) был сделан вывод о том, что значения  $\tau$  порядка масштабов времени проведённых наблюдений в общем случае не согласуются со существованием сильного магнитного поля порядка  $10^{16}$  Гс в магнитарном прогениторе FRB 180916. Только магнитар с экстремальными свойствами в терминах его магнитного поля или процесса диссипации мог бы питать наблюдаемые радиовсплески. После миллисекундной радиовспышки

гипотетический магнитар должен испытывать общую релаксацию на значительно более длительном временном масштабе.

В данном разделе будет показано, что описанное выше разногласие теоретической гипотезы магнитарного происхождения периодических FRB и современных результатов радионаблюдений и наблюдений в диапазоне высоких энергий не возникает, когда рассматривается вынужденная прецессия сильно замагниченной нейтронной звезды. Такая прецессия нейтронной звезды, которая может быть даже не деформированной, вызывается электромагнитными силами, индуцированными вращением звезды. В результате внутреннее магнитное поле на порядок меньше оказывается достаточным для объяснения наблюдаемой периодичности FRB.

### 3.2.1 Прецессия, электрический ток и парадокс коротации

Вращающееся тело, эллипсоид инерции которого является сферой, не может испытывать свободную прецессию (шар и куб постоянной плотности являются простейшими примерами таких тел). Свободная прецессия замагниченной нейтронной звезды происходит из-за возникновения деформации звезды, например вызванной достаточно сильным магнитным полем. Деформированный шар теряет сферическую симметрию, и тензор инерции больше не пропорционален единичному тензору, так что имеется двухосная или трёхосная ситуация, приводящая к прецессии даже без приложения момента сил.

Однако если эллипсоид инерции остаётся сферой, например когда магнитная деформация не эффективна из-за недостаточно сильного магнитного поля или его сложной структуры, приводящей к возможной компенсации, то прецессия может возникнуть, если момент сил, действующих на тело, не равен нулю.

Эта вынужденная прецессия, как только предполагается гипотетическая связь между периодическими повторителями FRB и прецессирующими нейтронными звёздами, будет иметь те же наблюдательные следствия, что и свободная прецессия, которые уже достаточно обсуждались в работах [227, 373]. Здесь мы посмотрим на происхождение вынужденной прецессии.

По аналогии с работой [373] нейтронная звезда моделируется как идеально проводящий замагниченный шар, который твердотельно вращается вокруг неподвижной точки (форма может быть любой). Тогда внутреннее электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям (179) и (200) [A7]. Вращение предполагается произвольным, то есть абсолютная величина и направление угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$  может меняться со временем.

Полный электрический ток определяется одним из уравнений Максвелла (202) и может быть представлен в удобной форме как сумма трёх членов:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_m + \mathbf{j}_\Omega + \mathbf{j}_{\dot{\Omega}}, \quad (216)$$

где  $\mathbf{j}_m$  — ток намагничения (203), существующий независимо от значений  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ ,

$$\mathbf{j}_\Omega = \frac{\mathbf{v}}{4\pi} \times \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (217)$$

— ток вращения, существующий при  $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ , и

$$\mathbf{j}_{\dot{\Omega}} = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{B}}{4\pi} \quad (218)$$

— ток ускорения, существующий при  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \neq 0$ .

Теперь рассмотрим шар, вращающийся с постоянной угловой скоростью. Тогда ток ускорения исчезает и полный ток есть сумма токов намагничения и вращения,  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_m + \mathbf{j}_\Omega$ . Посмотрим, коротит ли ток. Ток намагничения коротит всегда: поскольку магнитное поле заморожено, ток намагничения, пропорциональный его ротору, также заморожен и для  $\mathbf{j}_m$  верно то же уравнение коротации, что и для  $\mathbf{B}$ , уравнение (204). Когда  $\boldsymbol{\Omega}$  постоянна, полное ускорение

представляет собой только осестремительное ускорение,  $d\mathbf{v}/dt = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ , что говорит о коротации скорости; следовательно, ток вращения коротирует, так как он выражается через коротирующие величины  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ , см. формулу (217). Мы видим, что плотность полного тока коротирует при постоянной  $\boldsymbol{\Omega}$ ,

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j}. \quad (219)$$

Поскольку внутреннее электрическое поле также коротирует при постоянной  $\boldsymbol{\Omega}$ , то коротирует и плотность заряда, определяемая его дивергенцией по формуле (201):

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (220)$$

Плотность заряда в любой точке шара движется со скоростью среды в данной точке, поэтому кажется естественным, что получающийся ток — это так называемый ток коротации [61]

$$\mathbf{j}_c = \rho\mathbf{v}, \quad (221)$$

который мог бы возникать благодаря движению коротирующей плотности заряда, то есть что плотности заряда и тока связаны посредством соотношения коротации  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_c$ .

Весьма неожиданно, что это не так,

$$\mathbf{j} \neq \mathbf{j}_c, \quad (222)$$

и в этом состоит парадокс коротации. В повседневной ситуации, когда мы имеем дело с покоящимся проводящим веществом, подверженным внешнему воздействию электродвижущей силы (скажем, проводом с током, генерируемым внешней батареей), такой парадокс не возникает, потому что ток создаётся внешним электрическим полем, а не движением самого вещества, и определяется сопротивлением. Тем временем, в рамках идеальной релятивистской магнитогидродинамики, когда любое внешнее электромагнитное воздействие отсутствует и



заряды и токи связаны с движением идеально проводящей среды, в которой в сопутствующей системе отсчёта имеется нулевое электрическое поле, вопрос о том, верно ли равенство  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_c$ , становится нетривиальным. Например, при рассмотрении релятивистского движения плазмы в джете в галактике M87 плотность заряда (умноженная на  $c$ ) на единицу длины в магнитной трубке оказывается равной по порядку величины электрическому току, текущему в трубке, без каких-либо искусственных предположений (см. гл. 4) [A9]. Однако на конкретном примере мы увидим, что если бы соотношение коротации выполнялось в общем случае, то не выполнялись бы уравнения Максвелла.

### 3.2.2 Иллюстративный пример

В связи с задачей об аномальном моменте в работе [61] обсуждается пример: нейтронная звезда радиуса  $R$  обладает однородным магнитным полем внутри шара  $R_0 < R$ , центр которого совпадает с центром звезды. Вне шара, в области  $R_0 < r < R$ , нейтронная звезда обладает дипольным магнитным полем. Распределение магнитного поля не является гладким на сфере  $r = R_0$ . На основе этого распределения мы построим распределение магнитного поля, которое не имеет сингулярностей и является гладким, то есть бесконечно дифференцируемым, всюду в нейтронной звезде. Такое распределение позволит иметь гладкие и конечные плотности заряда и тока в каждой точке, избежать проблем, связанных с наличием сингулярностей, и явным образом продемонстрировать нарушение соотношения коротации.

Мы рассматриваем проводящий шар радиуса  $R$ , в котором есть три отдельные области: внутренний шар  $0 \leq r < R_1$ , промежуточный сферический слой  $R_1 \leq r < R_2$  и внешний сферический слой  $R_2 \leq r < R$ . Мы предпо-

лагаем, что магнитное поле однородно в области  $0 \leq r < R_1$  и дипольно в области  $R_2 \leq r < R$ . В промежуточной области  $R_1 \leq r < R_2$  магнитное поле должно каким-либо гладким образом связывать поля во внутренней и внешней областях.

Построим такое гладкое поле. Как и любое магнитное поле, его можно представить через векторный потенциал  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (223)$$

Векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B}_0 \times \mathbf{r}}{2} \quad (224)$$

соответствует однородному полю  $\mathbf{B}_0$  во внутренней области, а векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (225)$$

соответствует дипольному полю во внешней области, где

$$\mathbf{m} = m\mathbf{e}_m \quad (226)$$

— магнитный дипольный момент, параллельный

$$\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_m \quad (227)$$

и задающий направление магнитной оси  $\mathbf{e}_m$ . Теперь нам требуется построить векторный потенциал для промежуточной области.

Во-первых, отметим, что можно рассматривать поле  $\mathbf{B}_0$  во внутренней области как поле на магнитной оси. Во-вторых, поле на магнитной оси во внешней области равно  $2\mathbf{m}/r^3$  и можно представить векторный потенциал в виде, аналогичном виду векторного потенциала во внутренней области,

$$\mathbf{A} = \frac{2\mathbf{m}}{r^3} \times \frac{\mathbf{r}}{2}. \quad (228)$$

Таким образом, в случае отсутствия промежуточной области, когда  $R_0 = R_1 = R_2$ , можно записать общий векторный потенциал для всей области  $0 \leq r < R$  в виде

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{B}_m \times \mathbf{r}}{2}, \quad (229)$$

где

$$\mathbf{B}_m = B_m(r) \mathbf{e}_m \quad (230)$$

— магнитное поле на магнитной оси, абсолютное значение  $B_m(r)$  которого зависит только от радиальной координаты. Поскольку на сфере  $r = R_0$  нормальная компонента  $\mathbf{B}$  непрерывна благодаря уравнению (163), функция  $B_m(r)$  также непрерывна, хотя и не является гладкой:

$$B_m(r) = \begin{cases} B_0, & 0 \leq r < R_0, \\ B_0 \left( \frac{R_0}{r} \right)^3, & R_0 \leq r < R. \end{cases} \quad (231)$$

В общем случае  $R_1 < R_2$ , когда промежуточная область существует, мы строим векторный потенциал так, что он имеет тот же вид (229) во всей области  $0 \leq r < R$  и абсолютное значение поля на магнитной оси является гладким и совпадает с  $B_m(r)$  для однородного поля во внутренней области и для дипольного поля во внешней области. Тогда векторный потенциал является гладким, и гладким является и магнитное поле (223).

Чтобы сделать переход от однородного к дипольному полю в промежуточной области  $R_1 \leq r < R_2$ , мы выбираем полное поле в виде взвешенной суммы однородного и дипольного полей,

$$B_m(r) = [1 - F(r)] B_0 + F(r) B_0 \left( \frac{R_1}{r} \right)^3, \quad (232)$$

где  $F(r)$  — вес, соответствующий пропорции дипольного поля в полном поле. Вес равен 0 во внутренней и 1 во внешней области, и он возрастает монотонно от 0 до 1 при возрастании  $r$  от  $R_1$  до  $R_2$ . Для гладкого  $B_m(r)$  нужно выбрать

гладкий  $F(r)$ . Можно рассматривать  $F(r)$  как некоторую функцию распределения вероятностей, и тогда соответствующая плотность вероятности

$$p(r) = F'(r) \quad (233)$$

является гладкой и становится равной нулю при  $r \leq R_1$  и  $r \geq R_2$ . Сам  $F(r)$  тогда равен

$$F(r) = \int^r p(x) dx. \quad (234)$$

Остаётся выбрать  $p(x)$ . Мы стартуем с гладкой функции-шапочки [348]

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{C_0}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right), & -\varepsilon < x < \varepsilon, \\ 0, & x \leq -\varepsilon \text{ или } x \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (235)$$

где  $\varepsilon > 0$  и

$$C_0 = \frac{1}{\int_{-1}^1 \exp[-1/(1-x^2)] dx} \approx 2.25, \quad (236)$$

так что  $\omega_\varepsilon(x)$  должным образом нормирована,

$$\int \omega_\varepsilon(x) dx = 1. \quad (237)$$

Можно построить  $p(x)$  с необходимыми свойствами так:

$$p(x) = \omega_\varepsilon(x - R_0), \quad (238)$$

где

$$R_0 = \frac{R_1 + R_2}{2} \quad (239)$$

и

$$\varepsilon = \frac{R_2 - R_1}{2}. \quad (240)$$

Тогда мы находим  $F(r)$  и получаем гладкое поле на магнитной оси,

$$B_m(r) = \begin{cases} B_0, & 0 \leq r < R_1, \\ B_0 \int_{r-R_0}^{\varepsilon} \omega_{\varepsilon}(x) dx + B_0 \left(\frac{R_1}{r}\right)^3 \int_{-\varepsilon}^{r-R_0} \omega_{\varepsilon}(x) dx, & \\ R_1 \leq r < R_2, & \\ B_0 \left(\frac{R_1}{r}\right)^3, & R_2 \leq r < R. \end{cases} \quad (241)$$

Наконец, мы вычисляем гладкое магнитное поле во всём шаре, пользуясь формулами (223)—(230),

$$\mathbf{B} = \left[ B_m(r) + \frac{1}{2} r B'_m(r) \right] \mathbf{e}_m - \frac{1}{2} r B'_m(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_m, \quad (242)$$

где штрихом обозначена производная по  $r$  и  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ .

Найдём форму магнитных силовых линий. Из формулы (242) вычисляются компоненты магнитного поля в сферических координатах  $r, \theta, \phi$  с магнитной осью  $\mathbf{e}_m$ , играющую роль полярной оси:

$$B_r = B_m(r) \cos \theta, \quad (243)$$

$$B_{\theta} = - \left[ B_m(r) + \frac{1}{2} r B'_m(r) \right] \sin \theta, \quad (244)$$

$$B_{\phi} = 0. \quad (245)$$

Дифференциальное уравнение для магнитной силовой линии имеет вид

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_{\theta}} \quad (246)$$

и означает, что элементарный элемент линии  $d\mathbf{l} = (dr, rd\theta)$  параллелен полю.

Замечая, что

$$B_m(r) + \frac{r B'_m(r)}{2} = \frac{[r^2 B_m(r)]'}{2r}, \quad (247)$$

мы интегрируем уравнение (246) и приходим к уравнению, определяющему форму магнитных силовых линий,

$$(r \sin \theta)^2 B_m(r) = C, \quad (248)$$

где  $C$  — постоянная, параметризующая линии и связанная с их положением в шаре. Во внутренней области уравнение (248) сводится к уравнению

$$r \sin \theta = r_1 \quad (249)$$

и описывает линию, параллельную магнитной оси, причём

$$r_1 = \sqrt{\frac{C}{B_0}} \quad (250)$$

представляет собой расстояние между линией и осью. Во внешней области уравнение (248) принимает вид

$$r = r_2 \sin^2 \theta \quad (251)$$

и описывает дипольную силовую линию, причём

$$r_2 = \frac{B_0 R_1^3}{C} \quad (252)$$

представляет собой расстояние между центром и точкой пересечения линии с магнитной экваториальной плоскостью  $\theta = \pi/2$  во внешней области.

На рис. 4 показано построенное гладкое распределение внутреннего магнитного поля. Мы выбрали шар радиуса  $R$  с параметрами  $R_1 = R/5$  и  $R_2 = 2R/5$  для того, чтобы ясно показать особенности поля. Магнитное поле однородно во внутренней области  $0 \leq r < R_1$ , дипольно во внешней области  $R_2 \leq r < R$  и даёт требуемый гладкий переход в промежуточной области  $R_1 \leq r < R_2$ . Показанные магнитные силовые линии соответствуют ряду значений величины  $\sqrt{C/B_0}/R$  от 0 (магнитная ось) до 0.24 (последние замкнутые линии вокруг двух точек в промежуточной области) с шагом 0.02. Некоторые линии, начинающиеся во внутренней области, замыкаются в промежуточной области, остальные линии проходят через промежуточную область и либо замыкаются во внешней области, либо выходят из шара. Некоторые замкнутые линии лежат целиком в промежуточной области. Линии вырождаются в точки,

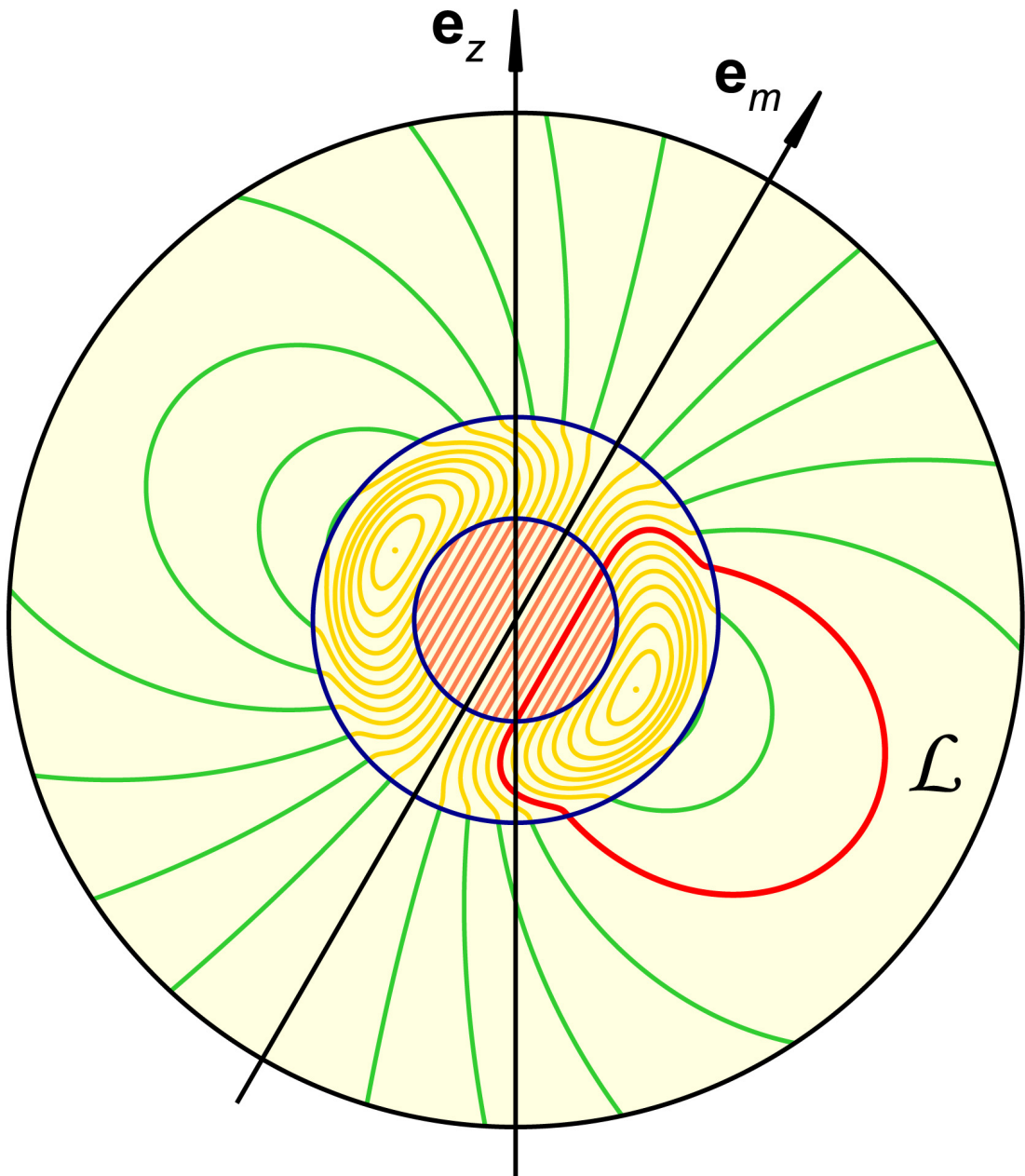


Рис. 4. Иллюстративное гладкое распределение магнитного поля во вращающемся проводящем шаре [A14].

когда магнитное поле исчезает, и в этом случае  $\sqrt{C/B_0}/R$  достигает максимума  $\approx 0.25$ . Точки лежат на магнитной экваториальной плоскости на расстоянии  $\approx 0.27R$  от магнитной оси.

Теперь можно вернуться к парадоксу коротации и показать, что соотношение  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_c$  в общем случае не выполняется и находится в противоречии с уравнениями Максвелла в построенном иллюстративном примере. При постоянной угловой скорости из уравнений Максвелла получаем

$$\text{rot}(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) = 4\pi(\mathbf{j} - \mathbf{j}_c). \quad (253)$$

Будь  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_c$ , мы бы имели

$$\text{rot}(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}) = 0 \quad (254)$$

и

$$\oint [(1 - v^2)\mathbf{B} + \mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad (255)$$

где интегрирование производится по произвольному замкнутому контуру, лежащему внутри шара; мы воспользовались формулой Стокса и учли формулу (172).

Внутреннее магнитное поле определяется формулой (242), и магнитная ось  $\mathbf{e}_m$  в общем случае наклонена относительно оси вращения  $\mathbf{e}_z$  (на рис. 4 выбрано значение угла наклона  $\pi/6$ ). Можно выбрать контур интегрирования, который лежит в плоскости, проходящей через  $\mathbf{e}_z$  и  $\mathbf{e}_m$ . Тогда интеграл последнего члена в формуле (255) исчезает, потому что в этой плоскости  $\mathbf{B}$  ортогонально  $\mathbf{v}$ ,

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (256)$$

Среди всех контуров, лежащих в рассматриваемой плоскости, теперь выбираем контур, который совпадает с замкнутой магнитной силовой линией. Например, в качестве такого контура можно выбрать магнитную силовую линию  $\mathcal{L}$ , задаваемую уравнением (248) с параметром  $C = B_0 R^2/100$  (см. рис. 4). Поскольку



$v < 1$ ,  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl$  и  $B > 0$ , имеем

$$\oint (1 - v^2) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} > 0. \quad (257)$$

Итак, уравнение (255) явно нарушается для контура  $\mathcal{L}$ , что делает неравенство (222) очевидным.

Как разрешить парадокс коротации? Плотность заряда коротатирует вместе с шаром, но коротация — это особый случай изменения. Изменение плотности заряда вызывается токами, и мы имеем закон сохранения заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (258)$$

Токи определяются движением различных типов зарядов, но коротация самих заряженных частиц для обеспечения коротации плотности заряда не требуется. Частицы могут двигаться как угодно, если только обеспечиваются такие токи, дивергенция которых даёт такое изменение плотности заряда, что эффективно имеет место тороидальное движение этой плотности со скоростью движения вещества.

Для полноты рассмотрим распределение электрического тока в нашем примере. Полный ток включает в себя два вклада,

$$\mathbf{j}_m = [4B'_m(r) + rB''_m(r)] \frac{\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_m}{8\pi} \quad (259)$$

и

$$\mathbf{j}_\Omega = \frac{\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{v}}{4\pi} \left[ B_m(r) \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} r B'_m(r) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\Omega} \right]. \quad (260)$$

Ток намагничения  $\mathbf{j}_m$  — тороидальный ток, симметричный относительно магнитной оси  $\mathbf{e}_m$  и не равный нулю только в промежуточной области шара. На рис. 5(а) показано распределение  $\mathbf{j}_m$  в полуплоскости, проходящей через  $\mathbf{e}_m$ . Это распределение осесимметрично, то есть не зависит от азимутального угла  $\phi$ , определяющего положение полуплоскости. Ток намагничения ортогонален полуплоскости, и его плотность показана с помощью цветовой шкалы. Существует

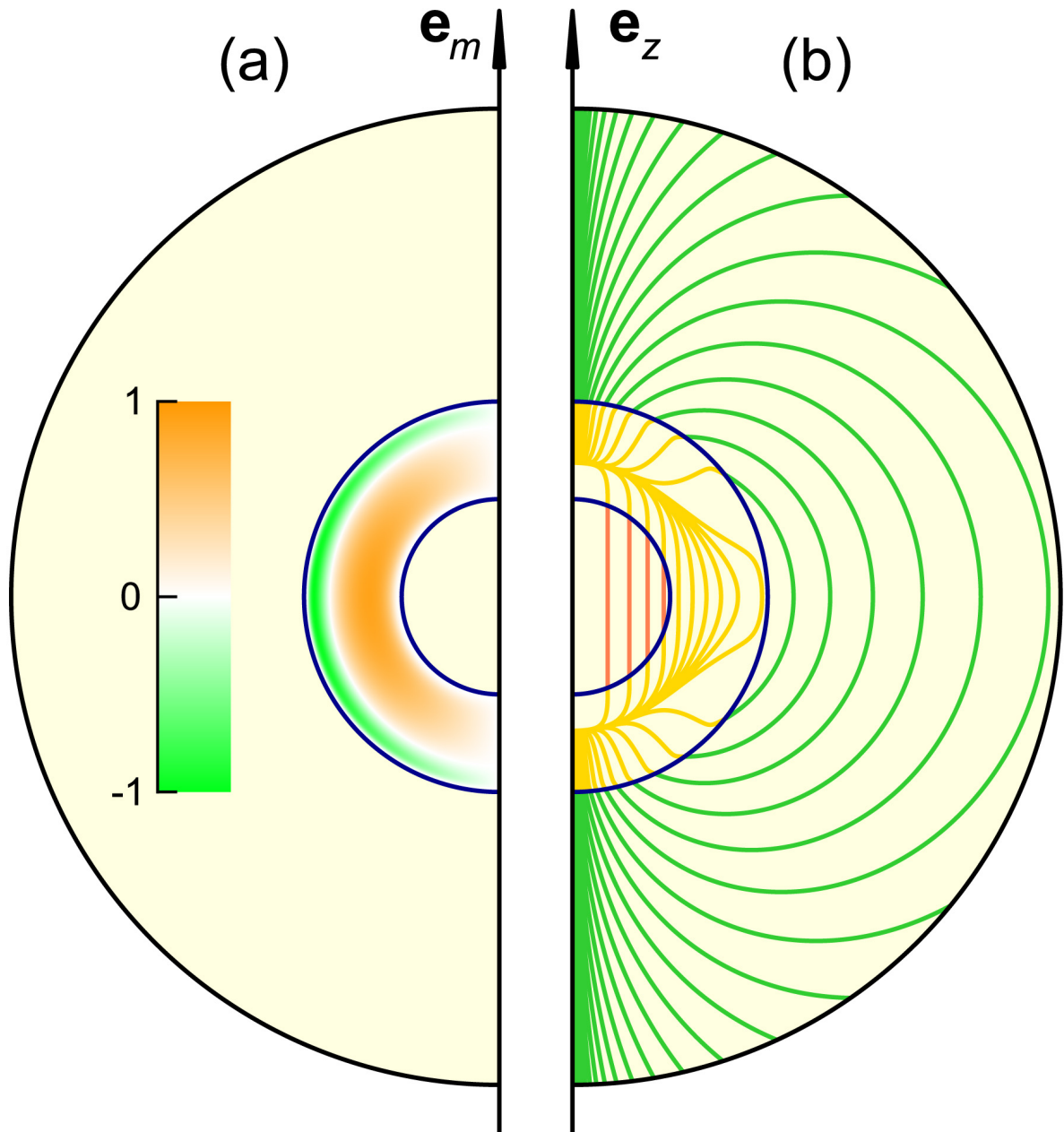


Рис. 5. Иллюстративное распределение тока намагничения (а) и тока вращения (b) во вращающемся проводящем шаре [A14].

и прямой ток намагничения, направление которого согласуется с направлением магнитной оси по правилу винта, и обратный ток намагничения, направление которого противоположно. Положительная плотность соответствует прямому, а отрицательная — обратному току намагничения. Плотность тока нормирована на максимальный обратный ток намагничения, а максимальный прямой ток намагничения имеет нормированную плотность  $\approx 0.90$ .

Ток вращения  $\mathbf{j}_\Omega$ , в противоположность  $\mathbf{j}_m$ , — полоидальный ток, и линии тока лежат в плоскостях, проходящих через ось вращения  $\mathbf{e}_z$ . На рис. 5(b) показано распределение  $\mathbf{j}_\Omega$  в полуплоскости, проходящей через  $\mathbf{e}_z$ . Распределение не осесимметрично, так как плотность и направление тока вращения зависят от азимутального угла  $\varphi$ , определяющего положение полуплоскости (значение  $\varphi = 0$  можно приписать полуплоскости, в которой лежит положительное направление магнитной оси), но структура распределения сама по себе одинакова, а показанные линии тока полностью идентичны в любой полуплоскости. Также отметим, что  $\mathbf{j}_\Omega$  исчезает в плоскости, проходящей через ось вращения и магнитную ось, что соответствует  $\varphi = 0$  и  $\pi$ . Когда  $0 < \varphi < \pi$ , линии тока пересекают экваториальную плоскость сверху вниз, а когда  $\pi < \varphi < 2\pi$ , — снизу вверх.

Итак, реальный электрический ток отличается от формального тока коротации и по величине и по направлению. Это особенно очевидно во внутренней и внешней областях шара, где ток намагничения исчезает и полный ток — это полоидальный ток вращения, который ортогонален скорости. В свою очередь, тороидальный ток коротации параллелен скорости, поэтому электрический ток в этих областях ортогонален току коротации. Здесь эффективное тороидальное движение плотности заряда обеспечивается полоидальными токами. То же самое можно принять и в промежуточной области, поскольку ненулевой ток намагничения не даёт вклада в изменение плотности заряда,

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0. \quad (261)$$

Можно увидеть некоторую гидродинамическую аналогию со случаем гравитационных волн на поверхности жидкости: волны распространяются по поверхности с положительной скоростью, тогда как жидкие частицы, движение которых по существу определяет существование и тип волн, не движутся с этой скоростью, а совершают равномерное круговое движение вокруг неподвижных точек, так что их средняя скорость равна нулю [7].

### 3.2.3 Аномальный момент

Мы уже упоминали о возможности прецессии нейтронной звезды в результате деформации, и тогда мы имели дело со свободной прецессией, когда момент сил отсутствует (случай Эйлера). Под влиянием ненулевого момента сил нейтронная звезда испытывает вынужденную прецессию, и момент сил носит электромагнитную природу,

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV, \quad (262)$$

где интегрирование производится по объёму звезды, включая поверхность. Момент сил, индуцирующий вынужденную прецессию, возникает в результате вращения звезды и представляет собой так называемый аномальный момент, то есть момент сил, значительно превышающий обычный тормозящий момент, в  $(\Omega R)^{-1} \sim 10^3 - 10^4$  раз. Несмотря на долгую историю вопроса [61, 112, 155, 181, 260, 372], пока нет единого мнения о том, как вычислять этот момент сил и какова его точная величина, даже в случае вращающегося однородно намагниченного шара. Тем временем, имея в своём распоряжении все необходимые поля, заряды и токи, можно вычислить этот момент, используя прямой метод, то есть суммируя моменты всех сил Лоренца, действующих на шар, с помощью

формулы (262).

Мы рассматриваем случай нейтронной звезды с магнитосферой, заполненной плазмой. Предполагается, что электромагнитные разрывы при  $r = R$  и соответствующие поверхностные заряды и токи отсутствуют из-за существования плотной окружающей электрон-позитронной плазмы. Даже если стандартная генерация плазмы, подобная пульсарному случаю, отсутствует, нейтронная звезда погружена в фон космического гамма-излучения, которое освещает магнитосферу и вызывает однофотонное рождение пар, дающее необходимую плазму [A1, A2].

Обсуждение справедливости соотношения коротации, детально проведённое в предыдущих подразделах, позволяет заключить, что  $\mathbf{M} \neq 0$ . Это очень важно в свете более раннего заключения, что  $\mathbf{M} = 0$ , основанного на соотношении коротации, когда момент сил, действующий на проводящий шар в вакууме, может генерироваться только поверхностными разрывами [61]. Последнее заключение можно легко проверить, подставив  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  в формулу (262) и учтя соотношение (285). Оно также остаётся в силе, когда поверхностные заряды и токи не равны нулю, но связаны аналогично посредством соотношения  $\mathbf{j}_{\text{surf}} = \rho_{\text{surf}} \mathbf{v}$ . Мы видим, что соотношение коротации никогда не должно приниматься искусственно. В нашем случае неравенство (222) лежит в основе самой возможности рассмотрения вынужденной прецессии как возможной причины наблюдаемой периодической активности FRB.

В случае однородного внутреннего магнитного поля  $\mathbf{B}$  ток намагничивания исчезает, поэтому полный ток даётся формулой (260),

$$\mathbf{j} = \Omega \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}}{4\pi} = -\Omega \mathbf{r} \cdot \frac{\Omega \times \mathbf{B}}{4\pi}, \quad (263)$$

в то время как плотность заряда постоянна,

$$\rho = -\frac{\Omega \cdot \mathbf{B}}{2\pi}. \quad (264)$$

Электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{r} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{B}. \quad (265)$$

Подставляя выражения (263)–(265) в формулу (262), имеем

$$\mathbf{M} = \int \left[ -\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}}{4\pi} \times \mathbf{r} \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B}) \right] dV. \quad (266)$$

Поскольку

$$\int \mathbf{r} \mathbf{r} dV = \frac{4\pi}{15} R^5 \mathbf{I}, \quad (267)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор, мы пользуемся формулой

$$\mathbf{a} \times \mathbf{I} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (268)$$

и окончательно получаем аномальный электромагнитный момент, действующий на вращающийся однородно намагниченный идеально проводящий шар при отсутствии поверхностных зарядов и токов [A14],

$$\mathbf{M} = \frac{2R^5}{15c^2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{B} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{B} = \frac{8}{15Rc^2} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{m} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{m}, \quad (269)$$

где

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{B} R^3}{2} \quad (270)$$

— магнитный момент (восстановлена скорость света  $c$ ). Очевидно,  $\mathbf{M} \neq 0$ . Значение (269) отличается от предыдущих результатов [61, 112, 155, 181, 260, 372], но противоречия нет, потому что в этих работах изучался только вакуумный момент сил.

### 3.2.4 Оценка магнитного поля для периодических FRB

Остаётся связать момент сил с наблюдаемым периодом прецессии  $P_{\text{прец}}$ , предположительно являющимся периодом модуляции активности FRB, и оценить соответствующее внутреннее магнитное поле. Вращающаяся нейтронная

звезда аналогична гироскопу, и если рассмотреть двухосный гироскоп с главными моментами инерции  $A = B$  и  $C$ , где последний момент соответствует оси динамической симметрии, то основная формула гироскопии гласит [9]

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1 \left[ C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right], \quad (271)$$

где  $\mathbf{M}$  — момент, вызывающий вынужденную прецессию,  $\boldsymbol{\omega}_1$  и  $\boldsymbol{\omega}_2$  — угловые скорости собственного вращения и прецессии соответственно и  $\theta_0$  — угол нутации. Отметим, что прецессия нейтронной звезды означает вращение угловой скорости вокруг оси динамической симметрии во вращающейся системе отсчёта, вмороженной в звезду. Следовательно, угловая скорость прецессии нейтронной звезды,  $\boldsymbol{\Omega}_{\text{прец}}$ , соответствует угловой скорости собственного вращения эквивалентного гироскопа,

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\Omega}_{\text{прец}}. \quad (272)$$

Угловые скорости  $\boldsymbol{\Omega}$  и  $\boldsymbol{\Omega}_{\text{прец}}$  одновременно совершают прецессию в лабораторной системе отсчёта с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}_{\text{прец}}. \quad (273)$$

В случае аномального момента сил магнитная ось рассматривается как ось прецессии,  $\boldsymbol{\Omega}_{\text{прец}} = \Omega_{\text{прец}} \mathbf{e}_m$ , где  $\Omega_{\text{прец}} = 2\pi/P_{\text{прец}}$  — прецессионная частота нейтронной звезды. Полагая тогда в формуле (271)  $\omega_2 \approx \Omega$  и  $\theta_0 \approx \theta_m$  на основании неравенства  $P_{\text{прец}} \gg P$ , где  $\Omega = 2\pi/P$  — частота вращения,  $P$  — период вращения и  $\theta_m$  — угол наклона магнитной оси, и сравнивая с формулой (269), получаем период прецессии

$$P_{\text{прец}} = \frac{P}{(\epsilon + \epsilon_{\text{eff}}) \cos \theta_m}, \quad (274)$$

где

$$\epsilon = \frac{A - C}{C} \quad (275)$$

— параметр деформации и

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{eff}} &= \frac{2}{15c^2} \frac{R^5 B^2}{C} = \\ &= 1.33 \times 10^{-7} \left( \frac{M}{1.4 M_{\odot}} \right)^{-1} \left( \frac{R}{10 \text{ км}} \right)^3 \left( \frac{B}{10^{15} \text{ Гс}} \right)^2,\end{aligned}\quad (276)$$

при этом  $M$  — масса звезды и

$$C \approx J = \frac{2MR^2}{5} \quad (277)$$

— эффективный параметр, соответствующий фиктивной деформации такой, что в полностью динамически симметричном случае, когда  $\epsilon = 0$ , вынужденная прецессия недеформированной звезды эквивалентна свободной прецессии так деформированной звезды.

В работе [373] принимается иной эффективный параметр  $\epsilon_{\text{eff}}^* = 3R^5 B^2 / 20c^2 J$ , который будет иметь место, если предположить, что аномальный момент даётся потоком электромагнитного углового момента, входящего в поверхность нейтронной звезды, вращающейся в вакууме. С одной стороны, этот поток отличается от момента, вычисленного по прямому методу; кроме того, неявно предполагается вакуумная магнитосфера. С другой стороны, проведённое в разделе последовательное рассмотрение электромагнитных полей, зарядов и токов даёт почти такой же эффективный параметр деформации  $\epsilon_{\text{eff}} \approx \epsilon_{\text{eff}}^*$  с множителем  $1.33 \times 10^{-7}$  вместо  $1.5 \times 10^{-7}$  в формуле (276). Наиболее важным является то, что представленные результаты дают смысл самому рассмотрению эффекта влияния аномального момента на прецессию, отсутствующего в случае коротационных токов.

Аномальный момент — не единственная причина прецессии, и другие вклады связаны с настоящей деформацией звезды, индуцирующей свободную прецессию. Например ожидается, что прецессионные частоты, возникающие от магнитной деформации  $\epsilon_B$  вещества звезды, значительно превышают частоты



от аномального момента [260, 372],

$$\frac{\epsilon_B}{\epsilon_{\text{eff}}} = \lambda \frac{R}{R_g}, \quad (278)$$

где

$$R_g = \frac{GM}{c^2} \quad (279)$$

— гравитационный радиус и безразмерный фактор  $\lambda$  зависит от точной геометрии поля, и могут быть меньше, если нейтронная звезда обладает значительным тороидальным магнитным полем [251, 253]. Другие вклады рассмотрены в работе [373] и менее эффективны. Из формул (274)—(278) мы получаем следующую оценку на внутреннее магнитное поле прецессирующей нейтронной звезды [A14],

$$\begin{aligned} B &= c \sqrt{\frac{15J}{2R^5 \cos \theta_m} \frac{P}{P_{\text{prec}}} \frac{1}{1 + \lambda R/R_g}} \sim \\ &\sim 7.45 \times 10^{17} \text{ Гс} \sqrt{\frac{P}{P_{\text{prec}}}}, \end{aligned} \quad (280)$$

где в окончательном выражении принимаются значения  $M = 1.4 M_{\odot}$ ,  $R = 10$  км,  $\cos \theta_m = 1$  и  $\lambda = -3$  (соответствующее  $\beta = -1$  в  $\epsilon_B = \beta R^4 B^2 / GM^2$ ). Отрицательное  $\beta$  выбрано для формального согласования с использованием полоидального поля в вычислениях аномального момента, которое вызывает сплюснутость, но положительное  $\beta$  даст сравнимую оценку.

Вращательный период неизвестен, и можно только предполагать типичный вращательный период нейтронных звёзд,  $P \sim 1$  с. Для FRB 180916 с  $P_{\text{prec}} = 16.35$  дней мы тогда имеем  $B \sim 6 \times 10^{14}$  Гс, что представляет собой магнитное поле, но на порядок меньше ранее предполагавшегося поля  $10^{16}$  Гс. Если такая ситуация действительно реализуется, соотношение (215), предложенное в работе [332], более не исключает магнитарную природу FRB: для максимального наблюдательного времени  $\tau \sim 10^5$  с допустимое магнитное поле равно  $\sim 3 \times 10^{14}$  Гс; это ограничение может просто подразумевать слегка более быстрое вращение возможного прогенитора FRB 180916, с периодом

$P \sim 0.2\text{--}0.3$  с. Что касается другого возможного повторителя FRB 121102 с  $P_{\text{prec}} = 157$  дней, для  $P \sim 1$  с имеем магнитное поле  $B \sim 2 \times 10^{14}$  Гс, не превышающее допустимое поле, так что возможен период  $P \sim 2\text{--}3$  с. Наконец отметим, что диссипативные времена, вероятно, превышают наблюдательные времена работы [332] и допускают более высокие значения периодов вращения и магнитных полей. Разрушение прецессии пиннингом вихрей в полученных относительно малых магнитных полях [26, 231, 312, 315] может предотвращаться в предположении, что сверхтекучее вещество приколото во внутренних областях звезды [154].

## 4 Динамика релятивистского струйного магнитоактивного плазменного течения в галактике М87

В данной главе представлены результаты по структуре и динамике релятивистского астрофизического струйного выброса в галактике М87, распределению гидродинамических и электромагнитных параметров, связи с центральной машиной, а также термодинамике, плазменному составу и механизму запуска [А8–А11, А26–А33].

### 4.1 Структура джета

Галактика Мессье 87 (М87, NGC 4486, 3C 274, Virgo A) — это близкая доминирующая эллиптическая галактика в скоплении Девы, содержащая первый внегалактический джет — струйный выброс, открытый более ста лет назад [107]. Это одна из наиболее близких радиогалактик, расстояние до которой составляет всего лишь 16–17 Мпк [64]. Общеизвестно, что наблюдаемый релятивистский джет поддерживается сверхмассивной чёрной дырой, масса которой составляет  $(3–6) \times 10^9 M_{\odot}$  [148, 244, 351], что подразумевает большую величину радиуса Шварцшильда около  $(1–2) \times 10^{15}$  см. На сегодняшний день М87 привлекла к себе значительное внимание как родительская галактика, содержащая

сверхмассивную чёрную дыру, для которой впервые удалось получить изображение тени [124], и по этим данным для чёрной дыры более предпочтительно высокое значение массы.

Излучение джета в галактике M87 разнообразно и наблюдается во всём спектре частот от радиоизлучения до гамма-излучения сверхвысоких энергий [22, 41, 42, 245, 286, 287, 359, 363]. Радиодиапазон здесь особенно важен, так как применяемая РСДБ благодаря очень высокому угловому разрешению, особенно на миллиметровых волнах, достигающему 6—10 радиусов Шварцшильда [165, 209], является подходящим инструментом для отображения тонкой структуры джета и наблюдения кинематики релятивистских потоков. При одновременных наблюдениях джета в разных диапазонах длин волн радиодиапазон позволяет более точно локализовать явления (например, вспышки), наблюдаемые в других диапазонах [18, 22, 164]. Благодаря этим факторам, своей близости и яркости, а также большой массе центральной чёрной дыры, джет в галактике M87 является одной из наиболее перспективных космических лабораторий для исследования процессов, происходящих в непосредственной близости от центральной машины и отвечающих за зарождение джетов в активных ядрах галактик (AGN).

Интерес к теоретическому изучению релятивистских джетов возник после первых работ, посвящённых исследованию выделения энергии чёрной дырой и происхождения джетов [65–67, 236, 285]. В настоящее время этот интерес всё более возрастает, так как необходимо надёжно установить природу джетов и механизм их запуска, коллимации, стабилизации и распространения во внешней среде [33, 60, 76, 87, 96, 100, 130, 136, 138, 184, 240, 295, 296, 320, 333, 370]. По тем же причинам значительная роль отводится наблюдательным исследованиям с высоким разрешением [27, 36, 117, 163, 164, 167, 168, 199, 212, 239], которые могут прояснить некоторые ключевые особенности внутренней структуры джета, такие как кажущиеся сверхсветовые собственные движения, уярчение к краю,

широкий угол раскрытия у основания, возможные особенности реколлимации, параболическая структура относительно близко к ядру и последующий переход к конической форме, а также существование контрджета. Есть надежда, что в прояснении некоторых вопросов может помочь «лабораторная астрофизика» [A8].

Предыдущие исследования говорят о том, что джет в галактике M87 обладает практически параболической структурой на относительно малых расстояниях от основания, не превышающих 100 тыс. радиусов Шварцшильда [35], характеризуется поперечным профилем с краевым уярчением на различных частотах и поэтому может рассматриваться, например, в рамках модели магнитогидродинамического сопла [273]. Однако новые радионаблюдения M87 на частотах 1.6 и 5 ГГц [37] и 15 ГГц [162] показывают существование устойчивой трёхгорбой структуры поперёк джета. Более того, обнаружение в этих наблюдениях сверхузкого центрального пика делает проблематичным объяснение эффекта с помощью существующих моделей типа «сердцевина — оболочка», обычно используемых для объяснения возникновения краевого уярчения [149], и ставит вопрос о том, действительно ли наблюдается единый джет с некоторым затухающим радиальным профилем скорости. В данном разделе изучается возможность того, что описанная структура радиоизображения джета в галактике M87 фактически отражает структуру «джет в джете» (см. рис. 6), когда внутренний джет помещён во внешний цилиндрический джет. Это результат может свидетельствовать об одновременной работе двух различных механизмов запуска джета, один из которых связан с чёрной дырой, а другой — с аккреционным диском.

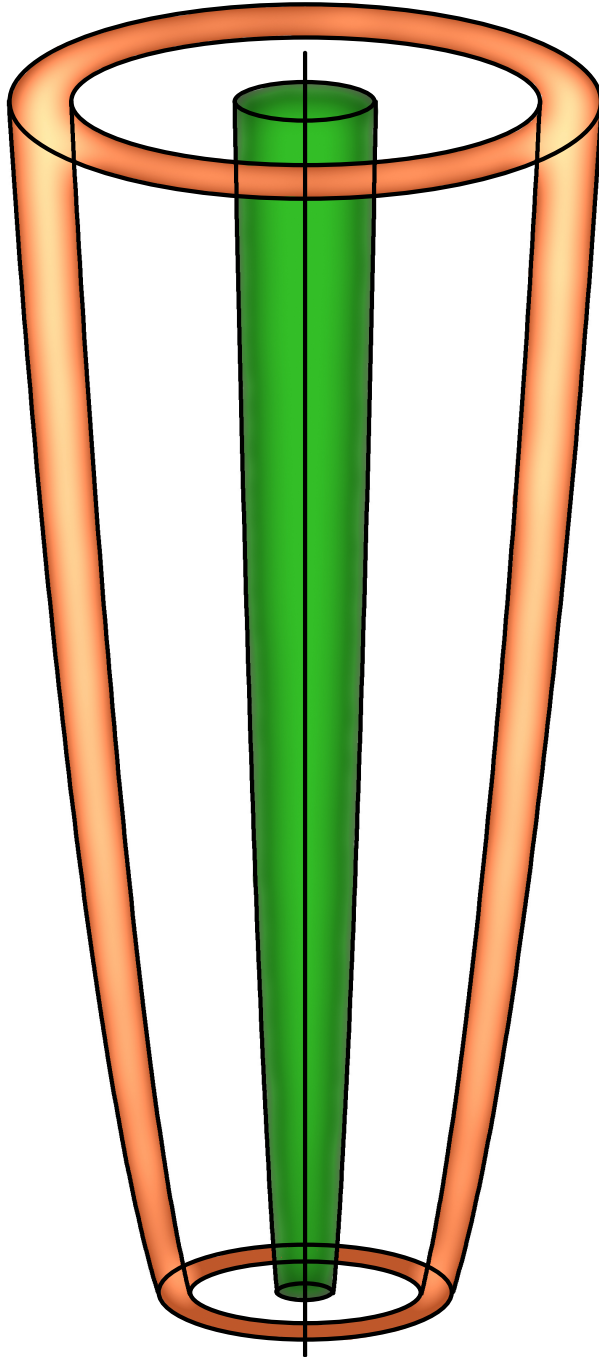


Рис. 6. Джет в джете [А29].

### 4.1.1 Основные уравнения и интегралы движения

Джет как целое описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_e, \quad (281)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (282)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (283)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (284)$$

условием бесконечной проводимости

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (285)$$

и законами сохранения вещества

$$\frac{\partial \gamma\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \gamma\rho\mathbf{v} = 0, \quad (286)$$

энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \gamma^2\rho h - p + \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \left( \gamma^2\rho h\mathbf{v} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} \right) = 0 \quad (287)$$

и импульса

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \gamma^2\rho h\mathbf{v} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} \right) + \\ & + \operatorname{div} \left[ \left( p + \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) \mathbf{I} + \gamma^2\rho h\mathbf{v}\mathbf{v} - \frac{\mathbf{E}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{B}}{4\pi} \right] = 0. \end{aligned} \quad (288)$$

В выписанных уравнениях скорость света  $c = 1$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — соответственно электрическое и магнитное поле,  $\rho_e$  и  $\mathbf{j}$  — объёмные плотности заряда и тока,  $\mathbf{v}$  — скорость плазмы в джете в некоторой выбранной точке,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (289)$$

— соответствующий лоренц-фактор,

$$h = 1 + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \quad (290)$$

— удельная релятивистская энтальпия,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $p$  — давление, а  $\rho$  — массовая плотность в сопутствующей системе отсчёта. Также используются обозначения

$$\mathbf{ab} = ||a_i b_j|| \quad (291)$$

для диады,

$$\mathbf{I} = ||\delta_{ij}|| \quad (292)$$

для единичного тензора и

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T} = \left\| \left\| \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \right\| \right\| \quad (293)$$

для дивергенции тензора

$$\mathbf{T} = ||T_{ij}||. \quad (294)$$

Система дополняется некоторым уравнением состояния

$$p = p(\rho, \varepsilon). \quad (295)$$

Будем рассматривать случай стационарности и цилиндрической симметрии. В цилиндрических координатах можно записать скорость

$$\mathbf{v} = v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_z \mathbf{e}_z \quad (296)$$

и электромагнитное поле

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r = (v_z B_\phi - v_\phi B_z) \mathbf{e}_r, \quad (297)$$

$$\mathbf{B} = B_\phi \mathbf{e}_\phi + B_z \mathbf{e}_z. \quad (298)$$

Компоненты  $v_\phi$ ,  $v_z$ ,  $B_\phi$ ,  $B_z$ , как и остальные скалярные величины, зависят только от  $r$ , то есть от расстояния от оси симметрии до рассматриваемой точки. Формулы (296)—(298) означают, что линии тока вещества и магнитные силовые линии являются спиралями, лежащими на цилиндрической трубке, а электрические силовые линии ортогональны боковой поверхности трубки и радиально



расходятся от оси симметрии (или сходятся к ней). Тогда в стационарном случае уравнения (282), (283) и (285)—(287) автоматически удовлетворяются, тогда как уравнения (281) и (284) просто определяют плотности заряда и тока

$$\rho_e = \frac{(rE_r)'}{4\pi r}, \quad (299)$$

$$\mathbf{j} = -\frac{B_z'}{4\pi} \mathbf{e}_\phi + \frac{(rB_\phi)'}{4\pi r} \mathbf{e}_z, \quad (300)$$

где штрихом обозначается производная по  $r$ . Следовательно, закон сохранения импульса (288), который теперь принимает вид [A9]

$$\left( p + \frac{B_z^2 + B_\phi^2 - E_r^2}{8\pi} \right)' + \frac{B_\phi^2 - E_r^2}{4\pi r} - \gamma^2 \rho h \frac{v_\phi^2}{r} = 0, \quad (301)$$

играет основную роль в определении равновесия джета.

Эквивалентный подход к стационарным осесимметричным плазменным системам основан на уравнении Грэда — Шафранова [60, 136], и он ранее позволил изучить коллимацию джета [33, 96], рассмотреть дифференциальное вращение в бессиловом приближении [136] и далее распространить результаты на полное двумерное решение, зависящее от времени, для коллимированной структуры джета, близкой к диску и центральному объекту [295, 296]. Эквивалентность двух подходов очевидна, так как в стационарном осесимметричном случае, когда радиус магнитной трубки может изменяться с расстоянием от основания джета, мы имеем те же интегралы движения, что и в подходе Грэда — Шафранова.

Итак, джет представляет собой поток релятивистской плазмы, в общем случае подчиняющейся уравнениям Максвелла, описывающим эволюцию электромагнитного поля и связь с зарядами и токами, общими законами сохранения, включающими и вещество и поле, и некоторыми дополнительными ограничениями, такими как высокая проводимость вещества и уравнение состояния. Рассмотрение поведения стационарного осесимметричного идеального релятивистского плазменного течения значительно упрощается, потому что тогда

джет можно разбить на континуум неподвижных вложенных магнитных трубок, вдоль которых имеет место сохранение нескольких физических величин, называемых интегралами движения.

Простейший интеграл — это магнитный поток в трубке, и значение потока перенумеровывает различные трубки. Условие бесконечной проводимости, или условие вмороженности (285), с учётом указанного интеграла потока трансформируется в сохранение так называемой частоты изоротации Ферраро

$$\Omega_F = \frac{v_\phi - v_p B_\phi / B_p}{r}, \quad (302)$$

где  $v_\phi$ ,  $v_p$  и  $B_\phi$ ,  $B_p$  — соответственно тороидальные и полоидальные компоненты скорости и магнитного поля и  $r$  — радиус трубки на рассматриваемом уровне над основанием джета.

Другие интегралы следуют из фундаментальных законов сохранения в комбинации с сохранением магнитного потока. Сохранение вещества (286) подразумевает сохранение

$$\eta = \frac{\gamma \rho v_p}{B_p} \quad (303)$$

вдоль магнитной трубки, сохранение энергии требует сохранения

$$\mathcal{E} = \gamma h \eta - \frac{\Omega_F I}{2\pi}, \quad (304)$$

тогда как сохранение импульса (288) делает необходимым сохранение

$$\mathcal{L} = \gamma h \eta r v_\phi - \frac{I}{2\pi}. \quad (305)$$

С помощью интегралов движения можно учитывать изменение радиуса джета с расстоянием от его основания, и если найти их на каком-либо одном расстоянии, то далее их можно использовать для вычисления различных физических величин на других расстояниях от основания джета.

Интенсивность радиоизлучения возрастает с числом излучающих частиц, поэтому радиоизлучающие области в изображении джета могут просто отра-

жать области с активной плотной плазмой. В этом случае наблюдаемая трёхпиковая структура поперечного радиопрофиля может непосредственно проявлять внутреннюю структуру джета и естественно интерпретироваться так: внутренний джет подобен пинчу и помещён во внешний джет, при этом оба джета соосны (рис. 6). Внутренний джет — сплошной плазменный цилиндр с радиусом  $r_0$ , в внешний джет — полый плазменный цилиндр со внутренним радиусом  $r_1 > r_0$  и толщиной  $d$ , так что радиус целого джета составляет

$$R = r_1 + d. \quad (306)$$

Из уравнения (301) вытекает следующее условие на границе, разделяющей плазму с различными давлениями и электромагнитными полями в отсутствие сингулярного распределения плотности на границе:

$$\Delta \left( p + \frac{B_z^2 + B_\phi^2 - E_r^2}{8\pi} \right) = 0, \quad (307)$$

где  $\Delta$  обозначает разность величин по разные стороны границы.

Основные уравнения допускают сингулярные плотности заряда и тока, такие как токовые слои, и если имеет место скачок электромагнитного поля при переходе через внешнюю границу внутреннего джета или через внутреннюю или внешнюю границу внешнего джета, имеются соответствующие ненулевые поверхностные заряды и токи, которые легко найти стандартным образом. Однако отсутствие разрывов и поверхностных зарядов и токов благоприятно для правильного численного моделирования джетов [158, 208]. На этом основании поверхностные заряды и токи рассматриваются как потенциальный источник неустойчивости и предполагается их отсутствие. Отсюда имеем нулевой скачок электромагнитного поля и, следовательно, давления на границах,

$$\Delta p = \Delta E_r = \Delta B_\phi = \Delta B_z = 0. \quad (308)$$

Таким образом, в случае нулевых поверхностных зарядов и токов электромагнитное поле и давление всюду непрерывны.

### 4.1.2 Джет в джете

Внутренний джет несёт полный аксиальный электрический ток  $I$  и заряд на единицу длины  $Q$ . Оба джета могут вращаться и в плазме допускаются некоторые тороидальные токи, поэтому электромагнитное поле между джетами имеет вид

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2Q}{r}, \\ B_\phi &= \frac{2I}{r}, \\ B_z &= \frac{\alpha}{r} + \beta, \quad r_0 < r < r_1, \end{aligned} \quad (309)$$

где

$$\alpha = \frac{B_{0z} - B_{1z}}{r_0^{-1} - r_1^{-1}}, \quad (310)$$

$$\beta = \frac{B_{1z}r_1 - B_{0z}r_0}{r_1 - r_0}, \quad (311)$$

а  $B_{0z}$  и  $B_{1z}$  — в общем случае различные аксиальные магнитные поля на внешней и внутренней границе соответственно внутреннего и внешнего джета. Радиальная зависимость  $B_z$  непрерывно связывает значения магнитных полей на границах и соответствует концентрации тороидальных токов, которые могут обеспечить более высокую замагниченность в центре, по направлению ко внутреннему джету. Случай

$$\alpha = 0 \quad (312)$$

соответствует отсутствию тороидальных токов и однородной замагниченности плазмы между джетами,

$$B_z = B_{0z} = B_{1z}. \quad (313)$$

Далее мы будем рассматривать случай полной зарядовой нейтральности и полного замыкания тока, что означает, что во внешнем джете линейная плотность заряда равна  $-Q$ , а абсолютное значение аксиального тока равно  $I$ , тогда

как его направление противоположно направлению аксиального тока во внутреннем джете. Также предполагается отсутствие каких-либо внешних зарядов и токов. Тогда полное внешнее поле исчезает:

$$E_r = B_\phi = B_z = 0, \quad r > R. \quad (314)$$

В принципе, поля снаружи могли бы иметь такую же структуру, что и поля между джетами, так что внешнее поле могло бы определяться некоторыми ненулевыми зарядом и током джета как целого, тогда как аксиальное магнитное поле могло бы генерироваться какими-либо тороидальными токами, размещёнными далеко от джета. В таком случае энергия внешнего электромагнитного поля стремится к бесконечности, но этот факт сам по себе не может исключать возможность ненулевого внешнего поля, так как это по большей части артефакт идеализированного цилиндрического рассмотрения, ведь та же ситуация имеет место для простого прямого проводника с током. Тем временем, отсутствие внешнего поля соответствует полной концентрации электромагнитной энергии в джете (что в определённом смысле «энергетически выгодно», когда внутреннее поле остаётся неизменным) и, как мы обсудим ниже, благоприятствует устойчивости джета.

Величины  $Q$ ,  $I$  и  $B_z$  не независимы. Можно связать поля (309) с помощью уравнения (297) с тороидальными и аксиальными скоростями  $v_\phi$  и  $v_z$  промежуточной плазмы:

$$Q = v_z I - \frac{r v_\phi B_z}{2}. \quad (315)$$

Можно пойти на внешнюю границу внутреннего джета или на внутреннюю границу внешнего джета и связать отмеченные три величины с соответствующими скоростями на границе  $v_{0\phi}$  и  $v_{0z}$  при  $r = r_0$  или  $v_{1\phi}$  и  $v_{1z}$  при  $r = r_1$ . С одной стороны, аксиальное магнитное поле и скорости внешнего джета связаны с зарядом и током внутреннего джета, а с другой стороны, аксиальное магнитное поле внутреннего джета определяется тороидальным током в промежуточной

плазме и внешнем джете, поэтому джеты не независимы, а электромагнитно связаны.

Из формулы (315) следует соотношение

$$v_{0z} - v_{1z} = \frac{r_0 v_{0\phi} B_{0z} - r_1 v_{1\phi} B_{1z}}{2I}. \quad (316)$$

Когда аксиальные скорости и магнитные поля совпадают,

$$v_{0z} = v_{1z}, \quad (317)$$

$$B_{0z} = B_{1z}, \quad (318)$$

отношение азимутальных скоростей для внутреннего и внешнего джетов обратно отношению соответствующих радиусов,

$$\frac{v_{1\phi}}{v_{0\phi}} = \frac{r_0}{r_1} < 1. \quad (319)$$

В этом случае внешний джет вращается медленнее внутреннего и отношение угловых скоростей на границах равно

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2 < 1. \quad (320)$$

Теперь заметим, что для электромагнитных полей в форме (309) мы имеем

$$(B_\phi^2 - E_r^2)' = -2 \frac{B_\phi^2 - E_r^2}{r}. \quad (321)$$

Подставляя их в закон сохранения импульса (301), получаем баланс релятивистской центробежной силы и градиента гидродинамического и аксиального магнитного давления,

$$\left( p + \frac{B_z^2}{8\pi} \right)' = \gamma^2 \rho h \frac{v_\phi^2}{r}. \quad (322)$$

При постоянном аксиальном магнитном поле мы бы имели гидродинамический баланс градиента давления и центробежной силы,

$$p' = \gamma^2 \rho h \frac{v_\phi^2}{r}. \quad (323)$$

Так как сохранение полного импульса фактически означает баланс гидродинамических и электромагнитных сил, исчезновение электромагнитных полей из баланса сил означает, что так выбранные поля генерируют нулевые силы Лоренца и, следовательно, гидродинамические силы должны уравновешивать сами себя. Говоря иначе, плазма может нести значительное электромагнитное поле, но, несмотря на это, течь чисто гидродинамическим образом.

Ожидается, что плотность плазмы между джетами значительно меньше, чем в джетах, поэтому в уравнении (322) можно пренебречь центробежным членом,

$$p + \frac{B_z^2}{8\pi} = \text{const}, \quad r_0 < r < r_1. \quad (324)$$

Пользуясь формулами (297) и (309) и полагая для плазмы между джетами параболическое распределение продольной скорости, которая совпадает со скоростью на внешней и внутренней границах внутреннего и внешнего джетов,

$$v_z = \kappa - \lambda r^2, \quad (325)$$

где

$$\kappa = \frac{v_{0z}r_1^2 - v_{1z}r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \quad (326)$$

и

$$\lambda = \frac{v_{0z} - v_{1z}}{r_1^2 - r_0^2}, \quad (327)$$

приходим к распределению тороидальной скорости

$$v_\phi = \frac{\xi - \zeta r^2}{\alpha + \beta r}, \quad (328)$$

где

$$\xi = 2(\kappa I - Q) \quad (329)$$

и

$$\zeta = 2\lambda I. \quad (330)$$

Интересно, что для постоянного аксиального магнитного поля, когда плазма движется гидродинамически, формула (328) совпадает с формулой для вязкого течения Куэтта между вращающимися цилиндрами,

$$v_\phi = \frac{\mu}{r} - \nu r, \quad (331)$$

где

$$\mu = \frac{\xi}{\beta} \quad (332)$$

и

$$\nu = \frac{\zeta}{\beta}, \quad (333)$$

в то время как формула (325) совпадает с формулой для вязкого течения Пуазейля в трубе, когда  $r_0 \ll r_1$  [7], и вязкость могла бы играть роль в формировании описанных распределений скорости. Когда вдобавок постоянна аксиальная скорость между джетами, тороидальная скорость принимает вид

$$v_\phi = \frac{\mu}{r}, \quad (334)$$

где

$$\mu = r_0 v_{0\phi} = r_1 v_{1\phi}. \quad (335)$$

После изучения полей и плазмы между джетами уделим внимание самим джетам. Простейший случай для внутреннего джета соответствует однородному распределению электрического заряда и аксиального тока, и формулы (299) и (300) в результате дают электромагнитные поля

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2Qr}{r_0^2}, \\ B_\phi &= \frac{2Ir}{r_0^2}, \\ B_z &= B_{0z}. \end{aligned} \quad (336)$$

Здесь мы считаем, что аксиальное магнитное поле постоянно, что подразумевает его генерацию тороидальными токами, расположенными за границами внут-



ренного джета. Полагая во всём внутреннем джете постоянную аксиальную скорость  $v_{0z}$ , из формул (297), (315) и (336) получаем радиальное распределение вращательной скорости, подобное твердотельному,

$$v_\phi = \frac{v_{0\phi} r}{r_0}, \quad (337)$$

которое соответствует постоянной угловой скорости

$$\Omega_0 = \frac{v_{0\phi}}{r_0}. \quad (338)$$

Когда плотность

$$\rho_0 \approx \text{const}, \quad (339)$$

релятивистская энтальпия

$$h_0 \approx 1 \quad (340)$$

и лоренц-фактор

$$\gamma_0 \approx \text{const}, \quad (341)$$

из сохранения полного импульса (301) получаем параболический профиль давления

$$p = p_0 - \left[ \frac{I^2 - Q^2}{\pi r_0^2} - \frac{\rho_0 (\gamma_0 v_{0\phi})^2}{2} \right] \left( \frac{r}{r_0} \right)^2, \quad r < r_0, \quad (342)$$

где  $p_0$  — давление на оси джета.

Остаётся рассмотреть распределение электромагнитного поля и давления во внешнем джете. Внешнее поле равно нулю, поэтому для  $E_r$ ,  $B_\phi$  и  $B_z$  необходимо обеспечить некоторый переход от их значений при  $r = r_1$  к нулю при  $r = R$ . Мы предполагаем, что ширина внешнего джета достаточно мала по сравнению с шириной джета как целого,

$$d \ll R. \quad (343)$$

Это условие предполагает, что отмеченный переход полей достаточно резок в том смысле, что

$$E'_r \sim \frac{E_r}{d} \gg \frac{E_r}{R} \quad (344)$$

и

$$B'_\phi \sim \frac{B_\phi}{d} \gg \frac{B_\phi}{R}, \quad (345)$$

что даёт неравенство

$$\frac{(B_\phi^2 - E_r^2)'}{8\pi} \gg \frac{B_\phi^2 - E_r^2}{4\pi r} \quad (346)$$

и тем самым позволяет рассматривать упрощённый закон сохранения импульса

$$\left( p + \frac{B_z^2 + B_\phi^2 - E_r^2}{8\pi} \right)' = \gamma^2 \rho h \frac{v_\phi^2}{r}. \quad (347)$$

Простейший линейный переход поля

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2Q}{r_1} \frac{x}{d}, \\ B_\phi &= \frac{2I}{r_1} \frac{x}{d}, \\ B_z &= B_{1z} \frac{x}{d}, \end{aligned} \quad (348)$$

где

$$x = R - r, \quad (349)$$

даёт постоянную тороидальную скорость

$$v_\phi = v_{1\phi} \quad (350)$$

для постоянной аксиальной скорости

$$v_z = v_{1z}. \quad (351)$$

Итак, полученный закон сохранения импульса аналогичен закону, имеющему место между джетами в случае однородной замагниченности (см. формулу (323)), с той разницей, что обычное давление заменяется величиной

$$p_{\text{eff}} = p + \frac{B^2 - E^2}{8\pi}, \quad (352)$$

где второе слагаемое можно интерпретировать как магнитное давление в сопутствующей системе отсчёта. В лабораторной системе отсчёта член  $B^2$  ответствен

за магнитное давление, в то время как  $-E^2$  ответствен за радиальное натяжение электрических силовых линий. Наконец, получаем давление

$$p = p_{\text{ex}} - \frac{B_z^2 + B_\phi^2 - E_r^2}{8\pi} - \rho_1(\gamma_1 v_{1\phi})^2 \ln \frac{R}{r}, \quad r_1 < r < R, \quad (353)$$

где  $\rho_1$  — плотность плазмы во внешнем джете,  $\gamma_1$  — лоренц-фактор,  $p_{\text{ex}}$  — внешнее давление, а электромагнитное поле даётся формулой (348). Внешняя среда подчиняется уравнению (323), и когда она не вращается, мы имеем некоторое однородное внешнее давление

$$p = p_{\text{ex}}. \quad (354)$$

### 4.1.3 Механизмы запуска, устойчивость и замыкание токов

Структура «джет в джете» может объясняться существованием подобного распределения начальной плотности истекающей плазмы около центральной машины активного галактического ядра, и это распределение играет роль граничных условий. В таком случае приведённые новые радионаблюдения самых внутренних областей галактики M87 могут являться доказательством одновременного действия двух различных механизмов запуска джета, один из которых даёт плазму для внутреннего джета и связан с центральной чёрной дырой, а другой даёт плазму для внешнего джета и связан с аккреционным диском. Иными словами, механизмы Блэндфорда — Знаека и Блэндфорда — Пейна запуска джета могут действовать одновременно.

В общем случае основные уравнения, описывающие равновесие и динамику джетов, допускают бесконечное число возможных конфигураций газовых или плазменных потоков и соответствующих электромагнитных полей, и тот факт, что та же конфигурация «джет в джете» продолжает наблюдаться на до-

статочных больших расстояниях от активного галактического ядра, свидетельствует о достаточной устойчивости всего джета: внутренний и внешний джеты прямые, постепенно расширяются с расстоянием от центральной машины и их соосность не нарушается. Как на качественном уровне понять возможность устойчивости? Электромагнитное поле является прослойкой, поддерживающей разделение джетов. Радиальное электрическое поле притягивает, а тороидальное магнитное поле расталкивает джеты, что соответствует притяжению разноименных зарядов и отталкиванию противоположно направленных аксиальных электрических токов. Если радиоданные по M87 действительно говорят о том, что мы имеем дело со структурой «джет в джете», то совокупное действие электромагнитного поля должно соответствовать отталкиванию, чтобы обеспечить взаимное выравнивание и соосность джетов. Тогда в джете должны протекать значительные продольные электрические токи, потому что электрическое поле само по себе приводит к неустойчивости относительно смещения центрального джета от оси внешнего джета.

Заметим, что если бы внутреннее магнитное поле отсутствовало, разделение зарядов между внешним и внутренним джетами исчезло бы из-за нейтрализации радиального электрического поля в результате перераспределения зарядов. Ненулевое магнитное поле играет значительную роль в предотвращении такого перераспределения. В первом приближении заряженная частица движется вдоль магнитного поля и одновременно дрейфует в поперечном направлении из-за скрещенных электрического и магнитного полей, так что

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (355)$$

Поскольку магнитные силовые линии являются спиралями, а электрическое поле радиально, полное движение заряженной частицы также происходит по спирали, хотя в общем случае не совпадающей с магнитной силовой линией. Мы видим, что электрический дрейф предотвращает движение заряженных частиц

в радиальном направлении и тем самым поддерживает разделение зарядов.

Ток должен стабилизировать положение внутреннего джета, и внешний джет выступает не только как путь для обратного тока, но и как цилиндрическая проводящая стенка, содержащая внутреннее тороидальное магнитное поле и не позволяющая ему выходить наружу, тем самым обеспечивая возникновение возвращающих упругих сил благодаря возрастанию плотности магнитных силовых линий при смещении внутреннего джета от оси. Важно, что продольное магнитное поле тоже даёт вклад в стабилизацию внешнего джета. Джет не является твёрдым, и если внутренний джет примет какую-либо искривлённую форму, стабилизирующий эффект внешнего джета исчезнет, если этот джет примет такую же форму, ведь при этом тороидальное магнитное поле не будет деформироваться. Продольное магнитное поле помогает поддерживать жёсткость внешнего джета, играя роль упругого стержня: любое изгибание внешнего джета приводит к появлению возвращающей силы благодаря струноподобному натяжению искривлённого магнитного поля. Такой же стабилизирующий эффект продольного поля имеет место непосредственно и для внутреннего джета.

В описанной выше стабилизации наряду с зарядовой нейтральностью важно полное замыкание тока, потому что тогда тороидальное магнитное поле во внешней среде отсутствует и сила снаружи определяется только внешним давлением. При неполном замыкании тока достаточно сильное изгибание джета как целого могло бы привести к возрастанию плотности силовых линий тороидального магнитного поля на вогнутой стороне изгиба и дать силу, которая потенциально могла бы преодолеть стабилизирующую силу внутреннего продольного поля и вызвать винтовую неустойчивость всего джета. Отсутствие внешнего тороидального поля и присутствие внутреннего продольного поля также является благоприятным фактором для стабилизации неустойчивости типа перетяжек, так как тогда отсутствует провоцирующее накопление силовых линий тороидального поля вокруг сужения, формирующегося при всестороннем сжа-

тии джета, и в то же время имеется благоприятное повышение внутреннего магнитного давления, сопротивляющееся такому сжатию.

Данное обстоятельство могло бы объяснить, почему астрофизические джеты более устойчивы и протяжённы, чем лабораторные гидродинамические джеты. Даже если джет как целое не генерирует внешнее электромагнитное поле и при взгляде снаружи в этом аспекте формально аналогичен гидродинамическому джету, существование внутренней электромагнитной структуры, характерной для джета в джете и отсутствующей в гидродинамическом джете, даёт дополнительный стабилизирующий эффект.

Что обеспечивает замыкание токов и сами токи? Джет как целое подключён к центральной машине активного галактического ядра, центральной сверхмассивной чёрной дыре с окружающим аккреционным диском. При условии бесконечной проводимости существование вертикального магнитного поля во вращающемся диске приводит к возникновению радиального электрического поля поперёк диска, поэтому индуцированная разность потенциалов между внешним и внутренним джетами может быть источником, поддерживающим циркуляцию электрического тока во всём джете. Этот эффект аналогичен хорошо известной генерации напряжения в униполярном индукторе (диске Фарадея) [281, 316].

Это заключение согласуется с существующими наблюдениями. В наблюдениях [162] ширина внутренней яркой части ведёт себя как  $r_0 \propto z^{0.5}$ , тогда как ширина джета в целом ведёт себя как  $R \propto z^{0.56}$ , где через  $z$  обозначено продольное расстояние. Напряжение между внутренним и внешним джетами одно и то же и не зависит от  $z$ . Его легко оценить из формулы (309) как

$$V \sim 2Q \ln \frac{r_1}{r_0}, \quad (356)$$

и при постоянных  $V$  и  $Q$  имеем  $r_1 \propto r_0$ , что подразумевает одну и ту же зависимость ширины от расстояния для обоих джетов независимо от природы

постепенного расширения, когда  $R \sim r_1$ . Некоторое отличие можно приписать конечной толщине внешнего джета.

Существование разделения зарядов также можно понять с помощью подхода Грэда — Шафранова. Соотношение (315) можно переписать как

$$Q = -\Omega_F \Psi_{\text{eff}}, \quad (357)$$

где

$$\Omega_F = \frac{v_\phi - v_z B_\phi / B_z}{r} \quad (358)$$

— частота изоротации Ферраро и

$$\Psi_{\text{eff}} = \frac{B_z \pi r^2}{2\pi} \quad (359)$$

— эффективный нормированный магнитный поток в джете, который совпадает с действительным нормированным магнитным потоком в случае постоянного аксиального магнитного поля. Поскольку во внутреннем джете предполагается постоянное поле, имеем

$$Q = -\Omega_{F0} \Psi_0, \quad (360)$$

где  $\Omega_{F0}$  и  $\Psi_0$  — частота изоротации и действительный поток, соответствующие внутреннему джету. Обе величины сохраняются вдоль магнитной трубки, радиус которой может изменяться с расстоянием от основания, и тогда эти величины можно брать около центральной машины. Если у основания имеются ненулевой магнитный поток и вращение, то появление заряда необходимо и может рассматриваться как другое отражение униполярной индукции.

#### 4.1.4 Оценки величин

Наконец, оценим в рамках разработанной модели «джет в джете» конкретные физические величины, имеющие отношение к джету в галактике M87.

Полная интенсивность  $L$  связана с мощностью, выделяемой в джете за счёт работы униполярной батареи,

$$L \sim VI. \quad (361)$$

Пользуясь формулой (356) и оценивая  $Q \sim I$  (мы рассматриваем релятивистское движение с  $v_z \sim 1$  и опускаем самый правый член в соотношении (315), справедливость чего будет продемонстрирована ниже), приходим к оценке заряда и тока в джете:

$$Q \sim I \sim \sqrt{\frac{L}{2 \ln(r_1/r_0)}}. \quad (362)$$

Поперечные размеры внутреннего и внешнего джетов оцениваются из профиля радиоинтенсивности на расстоянии 15 угл. мс (в проекции) от ядра, представленного в работе [162], и из сделанного там же утверждения, что  $R/r_0 \sim 8$ . Внутренний радиус внешнего джета оценивается как полурасстояние между пиками, так как полная длина отрезков линии наблюдения, лежащих в излучающих областях полого цилиндра, максимальна, когда эта линия касается внутреннего цилиндра  $r = r_1$ . Принимая 1 угл. мс  $\sim 140 R_{\text{Sch}} \sim 2.5 \times 10^{17}$  см, получаем радиус внутреннего джета,

$$r_{0\text{M87}} \sim 8 \times 10^{16} \text{ см}, \quad (363)$$

и внутренний и внешний радиусы внешнего джета,

$$r_{1\text{M87}} \sim 4 \times 10^{17} \text{ см}, \quad (364)$$

$$R_{\text{M87}} \sim 6 \times 10^{17} \text{ см}. \quad (365)$$

Поскольку интенсивность джета в галактике М87 оценивается из наблюдений как [77]

$$L_{\text{M87}} \sim 10^{44} \text{ эрг с}^{-1} \quad (366)$$

(с фактором неопределённости несколько раз), получаем линейную плотность заряда и электрический ток,

$$Q_{\text{M87}} \sim 10^7 \text{ Кл см}^{-1}, \quad (367)$$



$$I_{\text{M87}} \sim 3 \times 10^{17} \text{ А.} \quad (368)$$

Напряжение между внутренним и внешним джетами и сопротивление джета принимают значения

$$V_{\text{M87}} \sim 3 \times 10^{19} \text{ В,} \quad (369)$$

$$R_{\text{M87}}^{\Omega} \sim 100 \text{ Ом.} \quad (370)$$

Минимальные объёмные плотности частиц (в сопутствующей системе отсчёта; лоренц-фактор принимается равным  $\gamma \sim 3$  из наблюдений [263]) во внутреннем и внешнем джетах, необходимые для обеспечения указанных зарядов и токов, равны

$$n_{e0\text{M87}} \sim 10^{-9} \text{ см}^{-3}, \quad (371)$$

$$n_{e1\text{M87}} \sim 3 \times 10^{-11} \text{ см}^{-3} \quad (372)$$

и, как мы увидим, значительно меньше действительных плотностей частиц.

В работе [263] принимается параметр Керра  $a \sim 0.6$  и оценивается частота изоротации  $2.75 \times 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ , соответствующая чёрной дыре в М87, откуда делается вывод о том, что механизм Блэндфорда — Пейна запуска джета более предпочтителен, потому что наблюдения вращения джета дают частоту изоротации  $1.1 \times 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ , а это соответствует кеплеровскому радиусу и скорости

$$R_{\text{M87}}^{\text{base}} \sim 10^{16} \text{ см,} \quad (373)$$

$$v_{\phi\text{M87}}^{\text{base}} \sim 10^{10} \text{ см с}^{-1}. \quad (374)$$

Поскольку фактически мы имеем оба механизма, мы приписываем первую частоту внутреннему джету, а вторую — внешнему,

$$\Omega_{\text{F0M87}} \sim 3 \times 10^{-6} \text{ с}^{-1}, \quad (375)$$

$$\Omega_{\text{F1M87}} \sim 10^{-6} \text{ с}^{-1}. \quad (376)$$

Действительные угловые скорости джетов можно оценить из сохранения величины

$$l = \gamma h(1 - \Omega_{\text{F}} r v_{\phi}) \quad (377)$$

вдоль магнитной трубки, что следует из комбинации интегралов (303)—(305). Полагая  $l \approx 1$  и  $h \approx 1$ , мы приходим к формуле

$$\Omega \sim \frac{1 - \gamma^{-1}}{\Omega_{\text{F}} r^2} \quad (378)$$

и получаем угловые скорости

$$\Omega_{0\text{M87}} \sim 4 \times 10^{-8} \text{ с}^{-1}, \quad (379)$$

$$\Omega_{1\text{M87}} \sim 3 \times 10^{-9} \text{ с}^{-1} \quad (380)$$

и обычные тороидальные скорости

$$v_{0\phi\text{M87}} \sim 3 \times 10^9 \text{ см с}^{-1}, \quad (381)$$

$$v_{1\phi\text{M87}} \sim 10^9 \text{ см с}^{-1}. \quad (382)$$

Формула (357) позволяет выразить аксиальное магнитное поле через заряд, радиус и частоту изоротации,

$$B_z \sim \frac{2Q}{\Omega_{\text{F}} r^2}, \quad (383)$$

и тем самым найти аксиальные магнитные поля во внутреннем и внешнем джетах,

$$B_{0z\text{M87}} \sim 0.1 \text{ Гс}, \quad (384)$$

$$B_{1z\text{M87}} \sim 0.01 \text{ Гс}. \quad (385)$$

Мы видим, что внутренний джет более замагничен, чем внешний, что может свидетельствовать о том, что внутренний джет формируется и коллимируется благодаря эффекту, аналогичному пинч-эффекту: он может сжиматься тороидальным магнитным полем аксиального тока (если опустить для ясности

обратный эффект электрического поля), а замороженное аксиальное магнитное поле усиливается благодаря такому сжатию. Другая возможность заключается в неоднородной замагниченности диска, которая может формироваться благодаря тороидальным токам или накоплению аккрецирующего вещества с замороженным полем около центра.

Остальные компоненты электромагнитного поля вычисляются по формуле (309). Радиальное электрическое поле

$$E_{0r\text{M87}} \sim 240 \text{ В см}^{-1}, \quad (386)$$

$$E_{1r\text{M87}} \sim 50 \text{ В см}^{-1} \quad (387)$$

и тороидальное магнитное поле

$$B_{0\phi\text{M87}} \sim 0.8 \text{ Гс}, \quad (388)$$

$$B_{1\phi\text{M87}} \sim 0.16 \text{ Гс} \quad (389)$$

для внутреннего и внешнего джетов превышают вышеобозначенное аксиальное магнитное поле. Здесь можно также убедиться, что самый правый член в уравнении (315) в наших оценках можно опустить: его отношение к другому члену,  $v_\phi/(B_\phi/B_z)$ , мало, потому что  $B_\phi \gg B_z$  и  $v_\phi \ll 1$ .

Оценим магнитный поток во внутреннем джете,

$$\Phi_{0\text{M87}} = \pi r_0^2 B_{0z} \sim 2 \times 10^{33} \text{ Гс см}^2, \quad (390)$$

во внешнем джете,

$$\Phi_{1\text{M87}} = \pi d \left( R - \frac{2}{3} d \right) B_{1z} \sim 4 \times 10^{33} \text{ Гс см}^2, \quad (391)$$

и между джетами,

$$\Phi_{\text{inM87}} = \pi (B_{0z} r_0 + B_{1z} r_1) (r_1 - r_0) \sim 1.3 \times 10^{34} \text{ Гс см}^2. \quad (392)$$

Полный магнитный поток сквозь джет становится равным

$$\Phi_{\text{M87}} = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_{\text{in}} \sim 2 \times 10^{34} \text{ Гс см}^2 \quad (393)$$

и позволяет найти магнитное поле на основании джета при условии однородной замагниченности,

$$B_{\text{M87}}^{\text{base}} \sim \frac{\Phi_{\text{M87}}}{\pi(R_{\text{M87}}^{\text{base}})^2} \sim 80 \text{ Гс}. \quad (394)$$

Таким образом, предложенная магнитогидродинамическая модель не требует часто обсуждаемого  $B \sim 10^3\text{--}10^4$  Гс для объяснения наблюдаемой светимости джета. Этот результат согласуется с оценкой

$$50 \text{ Гс} < B < 124 \text{ Гс} \quad (395)$$

для магнитного поля на основании джета в М87, выведенной из наблюдений радиоядра на частоте 230 ГГц с помощью стандартной теории синхротронного излучения [210].

Массовая плотность в диске оценивается из баланса магнитного и динамического давлений,

$$\rho_{\text{M87}}^{\text{disc}} \sim \frac{1}{8\pi} \left( \frac{B_{\text{M87}}^{\text{base}}}{v_{\phi}^{\text{base}}}_{\text{M87}} \right)^2 \sim 3 \times 10^{-18} \text{ г см}^{-3}, \quad (396)$$

что соответствует плотности числа протонов

$$n_{\text{M87}}^{\text{disc}} \sim 2 \times 10^6 \text{ см}^{-3}. \quad (397)$$

Массовая плотность во внутреннем джете оценивается из формулы (342) в предположении, что внутренний джет несёт столько плазмы, сколько он может нести, и это соответствует нулевой квадратной скобке для нулевого давления на границе раздела:

$$\rho_{0\text{M87}} \sim \frac{2}{\pi} \left( \frac{I}{\gamma_0^2 r_0 v_{0\phi}} \right)^2 \sim 2 \times 10^{-22} \text{ г см}^{-3}. \quad (398)$$

Для внешнего джета приходится использовать иной подход, потому что априори неизвестно давление внешней среды, входящее в формулу (353). Полагая, что на основании  $v_r \sim v_\phi$ , и пользуясь сохранением  $\eta$  (303), для  $\rho_{\text{M87}}^{\text{base}} \sim \rho_{\text{M87}}^{\text{disc}}$  получаем

$$\rho_{1\text{M87}} \sim \frac{\rho_{\text{M87}}^{\text{disc}} v_{\phi}^{\text{base}}}{\gamma_1} \frac{B_{1z\text{M87}}}{B_{\text{M87}}^{\text{base}}} \sim 4 \times 10^{-23} \text{ г см}^{-3}. \quad (399)$$

Тогда имеем соответствующие массовые потоки

$$\dot{M}_{0\text{M87}} \sim 5 \times 10^{-3} M_{\odot} \text{ год}^{-1}, \quad (400)$$

$$\dot{M}_{1\text{M87}} \sim 0.05 M_{\odot} \text{ год}^{-1}, \quad (401)$$

протонные плотности частиц

$$n_{0\text{M87}} \sim 100 \text{ см}^{-3}, \quad (402)$$

$$n_{1\text{M87}} \sim 30 \text{ см}^{-3} \quad (403)$$

и множественности  $\lambda = n/n_e$ ,

$$\lambda_{0\text{M87}} \sim 10^{11}, \quad (404)$$

$$\lambda_{1\text{M87}} \sim 10^{12}, \quad (405)$$

для внутреннего и внешнего джетов. Полный поток массы, проходящей через джет,

$$\dot{M}_{\text{M87}} \sim 0.05 M_{\odot} \text{ год}^{-1}, \quad (406)$$

очень велик,

$$\dot{M}_{\text{M87}} \sim 30L_{\text{M87}}, \quad (407)$$

и сравним с измеренной скоростью аккреции Бонди  $0.1\text{--}0.2 M_{\odot} \text{ год}^{-1}$  через радиус Бонди М87 на  $0.12\text{--}0.22$  кпк [308]. Это обстоятельство благоприятствует сценарию, когда почти весь первоначальный аккреционный поток на больших расстояниях от джета переходит во внешний джет, так что джет может существенно подавлять аккрецию на чёрную дыру. Отметим, что из измерений фарадеевского вращения [218] ожидается ограничение на аккреционный поток  $10^{-3} M_{\odot} \text{ год}^{-1}$ , но моделирование миллиметровых данных допускает значительно более высокие темпы аккреции [269].

Внешнее давление можно оценить из уравнений (324) и (353), принимая нулевое давление при  $r = r_0$ ,

$$\begin{aligned} p_{\text{ex M87}} &\sim \frac{B_{0z}^2}{8\pi} + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{I}{\gamma_1 r_1} \right)^2 + \rho_1 (\gamma_1 v_{1\phi})^2 \ln \frac{R}{r_1} \\ &\sim 10^{-3} \text{ дин см}^{-2}. \end{aligned} \quad (408)$$

Отсюда получается температура джета ( $k_B = 1$ ) [A9]

$$T_{\text{M87}} \sim \frac{p_{\text{ex}}}{2n_1} \sim 10^{11} \text{ К.} \quad (409)$$

Такая температура соответствует нерелятивистским протонам,

$$T \sim 0.01 m_p, \quad (410)$$

и релятивистским электронам,

$$T \sim 20 m_e. \quad (411)$$

Температуры того же порядка фигурировали ранее в общерелятивистском магнитогидродинамическом моделировании джета в галактике М87 [269, 270]. Интересно, что эта температура слегка выше или сравнима с яркостными температурами  $10^{10}$ — $10^{11}$  К, наблюдаемыми на меньших расстояниях от основания [209].

## 4.2 Связь с центральной машиной

Недавно в работе [349] были представлены наблюдательные результаты из программы 2007—2008 гг. по интенсивному мониторингу джета в галактике М87 на парсековских и субпарсековских масштабах вместе с примерно ежегодными наблюдениями, проводившимися с 1999 по 2016 г. на Антенной решётке

со сверхдлинными базами (VLBA) на частоте 43 ГГц (7 мм) с разрешением примерно 30 на 60 радиусов Шварцшильда. Среди прочих характеристик джета, в работе говорится об обнаружении любопытного поперечного смещения джета с квазипериодичностью примерно 8—10 лет, которое ранее не наблюдалось. В данном разделе рассматривается новый способ извлечения параметра вращения центральной сверхмассивной чёрной дыры в галактике M87 из известных вращательных характеристик джета и из нового наблюдательного явления качания джета.

#### 4.2.1 Вращение и качание джета

Частота изоротации (302) равняется действительной угловой частоте на основании джета, где  $v_p$  исчезает. С помощью основанного на вейвлетах метода сегментации и оценки изображений, применённого к данным VLBA, в работе [263] была исследована кинематика джета в M87 на линейных масштабах вплоть до 100 радиусов Шварцшильда. Анализировались две области 7-мм VLBA-радиоизображений джета, в совокупности покрывающих диапазон 0.5—4 угл. мс от ядра, и при условии нерелятивистского движения на основании и холодного течения по двумерной кинематике потока удалось оценить частоту изоротации

$$\Omega_F = (1.1 \pm 0.3) \times 10^{-6} \text{ с}^{-1} \quad (412)$$

и соответствующий кеплеровский радиус запуска джета

$$R_{\text{base}} = (4.8 \pm 0.8) R_{\text{Sch}}, \quad (413)$$

где

$$R_{\text{Sch}} = 2M \quad (414)$$

— шварцшильдовский радиус чёрной дыры и  $M$  — её масса ( $G = c = 1$ ). Эти величины будут использованы ниже при оценке параметра вращения чёрной дыры.

В работе [349] было сообщено о новых результатах наблюдательной программы VLBA по галактике M87 на частоте 43 ГГц. Программа изначально посвящалась быстрому отображению процессов около ядра M87 с целью определения кажущихся сверхсветовых движений в джете. Тем временем, попытки обнаружения радиокомпаньонов тэвных вспышек в M87, начатые в 2009 г., вместе с более ранними архивными данными привели к получению примерно ежегодных наблюдений джета за 17-летний период, начиная с 1999 г. Это позволило проследить динамику джета на больших временах и в качестве важного побочного результата обнаружить поперечное движение джета на масштабе времени в несколько лет.

Более конкретно, в работе [349] найдено значительное поперечное смещение джета, особенно в диапазоне 2—8 угл. мс от ядра. Общая динамика смещения согласуется с постепенным линейным изменением позиционного угла джета и дополнительной квазисинусоидальной вариацией. Моделирование данных с помощью эмпирического уравнения, не основанного на какой-либо физической модели, даёт период вариации  $10.3 \pm 0.3$  лет. В то же самое время было отмечено, что данные, взятые исключительно с расстояний 2 и 3 угл. мс от ядра, подразумевают иной результат для периода,  $7.6 \pm 0.3$  лет. Последние данные занимают особое место в том смысле, что они более длительны и включают дополнительные 7 лет наблюдений до 2006 г., тогда как остальные данные покрывают диапазон только с 2006 по 2016 г. Таким образом, авторы сообщают о квазипериодичности поперечного смещения с приблизительным периодом 8—10 лет.

Ситуация может проясниться после нескольких дополнительных лет наблюдений высокого качества, покрывающих, скажем, ещё один полный период



такого «качания» джета. Ввиду имеющейся неопределённости приходится принять примерный период качания

$$T_{\text{wob}} = 9 \pm 1 \text{ лет.} \quad (415)$$

#### 4.2.2 Прецессия Лензе — Тирринга

Как можно объяснить описанное покачивание джета в галактике М87? В работе [349] отмечается, что такое покачивание является естественным следствием процессов ускорения и коллимации джета, как показывает современное трёхмерное общерелятивистское магнитогидродинамическое (МГД) моделирование [334], и может отражать неустойчивость Кельвина — Гельмгольца в джете с плотностью, не превышающей плотность окружающей среды [169]. Отметим, что МГД является приближением со своими границами применимости и менее всеобъемлюща, нежели кинетическая теория, поэтому для того чтобы уловить, например, кинетические неустойчивости джета, приходится прибегать к моделированию методом частиц в ячейках [276].

В то же время в работе [232] было проведено новое МГД моделирование высокого разрешения наклонённых аккреционных дисков вокруг вращающихся чёрных дыр. Численное моделирование аккреционных потоков на чёрные дыры имеет давнюю историю и проводилось в гидродинамической и магнитогидродинамической постановке сначала для случая совпадающих экваториальных плоскостей диска и чёрной дыры [145, 172, 211, 360], а потом и для случая несовпадающих плоскостей [141, 142]. Также появилось моделирование не только аккреции самой по себе, но и сопутствующей генерации джетов [173, 256, 270, 296, 341]. На этом фоне в работе [232] было найдено, что наклонённые диски способны продуцировать замагниченные релятивистские джеты,

которые распространяются вдоль оси вращения диска, а не оси вращения чёрной дыры. Кроме того, создаваемые джеты испытывают прецессию Лензе — Тирринга [225, 336, 337] вместе с диском.

Рассмотрим возможность того, что наблюдаемое покачивание джета в галактике M87 отражает прецессию Лензе — Тирринга [A10]. Этот тип прецессии возникает благодаря общерелятивистскому эффекту увлечения систем отсчёта, когда орбита пробной частицы наклонена относительно экваториальной плоскости вращающейся чёрной дыры. Угловая частота прецессии Лензе — Тирринга равна [358]

$$\Omega_{\text{LT}} = \frac{2J}{R^3}, \quad (416)$$

где  $J$  — угловой момент чёрной дыры и

$$R \gg M \quad (417)$$

— радиус орбиты. Использование кеплеровского распределения по скоростям

$$v = \sqrt{\frac{M}{R}} \quad (418)$$

при том же условии на радиус позволяет работать непосредственно с частотой изоротации Ферраро (412) вместо кеплеровского радиуса запуска джета (413) и выписать удельный угловой момент чёрной дыры, имеющий размерность длины,

$$\frac{J}{M} = \frac{\Omega_{\text{LT}}}{2\Omega_{\text{F}}^2}. \quad (419)$$

Такой манёвр позволяет смягчить существующую двукратную неопределённость по массе центральной сверхмассивной чёрной дыры в галактике M87.

Тогда из формул (412) и (415) получаем

$$\frac{J}{M} = (2.7 \pm 1.5) \times 10^{14} \text{ см}. \quad (420)$$

Для того чтобы оценить безразмерный параметр вращения

$$a = \frac{J}{M^2}, \quad (421)$$

который представляет собой удельный угловой момент в единицах гравитационного радиуса  $R_{\text{Sch}}/2$ , нужно, однако, рассмотреть различные массы чёрных дыр. Масса, оцениваемая по динамике газа [351],

$$M_{\text{GD}} = 3.5_{-0.7}^{+0.9} \times 10^9 M_{\odot}, \quad (422)$$

даёт параметр вращения

$$a_{\text{GD}} = 0.5 \pm 0.3. \quad (423)$$

В свою очередь, масса, оцениваемая по динамике звёзд, почти в два раза выше [148],

$$M_{\text{SD}} = (6.0 \pm 0.4) \times 10^9 M_{\odot} \quad (424)$$

(пересчитана для расстояния до M87 16.4 Мпк [63]), поэтому параметр вращения соответственно меньше,

$$a_{\text{SD}} = 0.31 \pm 0.17. \quad (425)$$

Отметим, что по последним данным Телескопа горизонта событий (ЕНТ) более высокое значение массы чёрной дыры на сегодняшний день является предпочтительным [124]. Большая погрешность параметра вращения определяется главным образом погрешностью  $\Omega_{\text{F}}$ , проистекающей из трудности определения точной кинематики джета по наблюдениям РСДБ, причём последняя погрешность удваивается из-за квадратичной зависимости от  $\Omega_{\text{F}}$ , входящей в формулу (419).

Соотношения (419) и (421) не имеют структурной формы или ограничений, всегда приводящих к получению значения параметра вращения меньше единицы независимо от значений периода покачивания и частоты изоротации Ферраро, поэтому потенциально можно было бы получить, скажем, значение  $10^{-3}$  или 1000. В противном случае можно было бы подставлять периоды различных колебательных явлений и всегда получать разумные значения параметра вращения независимо от того, связаны или нет эти явления с прецессией

Лензе — Тирринга. Таким образом, если даже абстрагироваться от точных значений и погрешностей вычисленного параметра вращения чёрной дыры, само обстоятельство, что полученные значения параметра вращения не превышают единицы и не слишком малы, говорит в пользу того, что наблюдаемое качание джета может действительно проистекать из прецессии Лензе — Тирринга.

Только что мы рассмотрели случай прецессии Лензе — Тирринга пробной частицы, а теперь посмотрим, что изменится, когда аккреционный диск прецессирует как твёрдое тело. Такая ситуация имеет место, когда время пересечения диска звуковой волной мало по сравнению со временем прецессии [142]. Угловая частота Лензе — Тирринга для глобальной твердотельной прецессии равна [179]

$$\Omega_{\text{LT}}^{\text{solid}} = 10J \frac{r^{-1/2} - R^{-1/2}}{R^{5/2} - r^{5/2}} \quad (426)$$

и соответствует усреднению значения (416) по всему диску, имеющему постоянную поверхностную плотность, от внутреннего радиуса  $r$ , принимаемого как радиус  $r_{\text{ISCO}}$  последней устойчивой круговой орбиты (ISCO), до внешнего радиуса  $R$ , принимаемого как радиус запуска джета (413), так что частота теперь имеет дополнительную зависимость от параметра вращения через внутренний радиус. Более сложные соотношения, учитывающие зависимость параметра вращения от локальных частот Лензе — Тирринга и Кеплера, можно найти в работах [143, 271], а их полезные полиномиальные аппроксимации — в работе [113].

Из формул (421) и (426) следует, что безразмерный параметр вращения неявно определяется посредством соотношения

$$a = \frac{\pi M (M\Omega_{\text{F}})^{-5/3} - (r_{\text{ISCO}}/M)^{5/2}}{5T_{\text{wob}} (r_{\text{ISCO}}/M)^{-1/2} - (M\Omega_{\text{F}})^{1/3}}, \quad (427)$$

где  $r_{\text{ISCO}}/M$  — радиус последней устойчивой круговой орбиты, измеряемый в единицах гравитационного радиуса и зависящий от  $a$  [46]. После нескольких итераций, начинающихся с найденных выше значений параметра вращения для

пробной частицы, получаем параметр вращения в случае твердотельной прецессии диска соответственно для газодинамического и звёздодинамического значения массы чёрной дыры,

$$a_{\text{GD}}^{\text{solid}} = 0.16 \pm 0.05, \quad (428)$$

$$a_{\text{SD}}^{\text{solid}} = 0.14 \pm 0.04. \quad (429)$$

Благодаря близости этих значений можно принять для твердотельной дисковой прецессии единый параметр вращения

$$a_{\text{solid}} = 0.15 \pm 0.05. \quad (430)$$

Параметр вращения, полученный для случая твердотельной прецессии, значительно меньше параметра вращения, полученного для случая прецессии пробной частицы. Это естественно, так как в первом случае все внутренние орбиты от радиуса запуска джета до радиуса последней устойчивой круговой орбиты, которые имеют более высокие локальные частоты Лензе — Тирринга, дают вклад в глобальное прецессионное движение диска, так что общая частота для того же параметра вращения выше и, соответственно, тот же период прецессии требует более низких значений параметра вращения.

### 4.2.3 Сравнение с другими оценками

Рассмотрим предыдущие оценки параметра вращения чёрной дыры в M87. Пользуясь наблюдаемой быстрой переменностью M87 в тэвном диапазоне и оценивая оптическую толщину поля излучения адвекционно-доминированного аккреционного течения (ADAF) по отношению к тэвным фотонам, в работе [352] было предложено  $a > 0.65$ . Физический принцип такой оценки заключается

в том, что, для того чтобы быть видимыми, тэвнные фотоны должны покинуть самые внутренние области диска, где они предположительно образуются, и пройти через поля излучения ADAF, зависящие от параметра вращения. Далее, в работе [228] предыдущая модель, основанная на самоподобных решениях ADAF в ньютоновском приближении, была обобщена и рассмотрены общерелятивистские эффекты для гидродинамического радиационно-неэффективного аккреционного течения (RIAF), что дало  $a > 0.8$ . Численное моделирование спектральных аппроксимационных кривых для данных по ядру M87 от радио до жёсткого рентгена при условии, что всё излучение идёт из ближайшего окружения центральной чёрной дыры, проведённое в работе [175], дало то же ограничение из параметров наилучшей аппроксимации. В то же время, в работе [117] проведены 1.3-мм РСДБ наблюдения ядра M87 и найдена полуширина  $(5.5 \pm 0.4)R_{\text{Sch}}$ . Предполагая, что она соответствует диаметру последней устойчивой круговой орбиты, и учитывая его зависимость от  $a$ , авторы пришли к выводу, что диск вращается сонаправленно и что  $a > 0.2$ . Недавно в работе [137] была дана интерпретация миллиметрового подъёма (бампа), обнаруженного в работе [299] в мультиволновых наблюдениях M87 высокого разрешения, как синхротронного излучения тепловых электронов в ADAF и, с ограничениями на темп аккреции и некоторой модельной зависимостью для мощности джета, сделана оценка параметра вращения  $a = 0.98$ .

Эти оценки параметра вращения модельно зависимы и основаны на предположениях об ADAF/RIAF и сопутствующих спектрах излучения, неявных изначально предполагаемых параметрах и соотношениях в моделях диска и джета или наблюдательных параметрах, известных с точностью до фактора несколько раз, таких как мощность джета в M87. Наиболее прямая оценка использует только размер ядра, но основана на предположении о том, что он определяется последней устойчивой круговой орбитой [117]. Оценки, полученные в данном разделе, также носят прямой характер и используют только вращение и кача-

ние джета, где первое даёт размер запуска джета, а второе — частоту прецессии. В некотором смысле, дополнительное измерение прецессии является той ценой, которую нужно заплатить за отказ от предположения о связи радиуса последней устойчивой круговой орбиты и радиуса запуска джета. Другая цена, однако, состоит в том, что оценки зависят от распределения масс в аккреционном диске в случае твердотельной прецессии. С другой стороны, это может позволить сделать некоторые заключения о структуре диска, если использовать какую-либо независимую оценку параметра вращения. Подчеркнём, что оценка параметра вращения для чёрной дыры в галактике M87 позволяет ограничивать общие модели образования джетов, так как для определённых моделей дисков и джетов предпочтительны определённые значения параметра вращения [334].

Значения параметра вращения чёрной дыры в галактике M87, полученные в данном разделе, можно рассматривать как промежуточные или даже низкие. В общем случае низкие значения параметра вращения нельзя отбрасывать. В работе [305] был проведён анализ существующих данных по параметру вращения сверхмассивных чёрных дыр в AGN, полученных с помощью спектроскопии отражённого рентгеновского излучения, и обнаружена возможная тенденция к уменьшению параметра вращения с увеличением массы, так что низкие значения параметра вращения для вращающихся чёрных дыр с массой, сравнимой с массой чёрной дыры в галактике M87, не запрещены и могут быть даже более естественны. Радиогромкость M87 также не отвергает промежуточные или малые параметры вращения, потому что параметр вращения чёрной дыры сам по себе не может позволить различить радиогромкие и радиотихие типы AGN [147, 305].

#### 4.2.4 Связь со структурой «джет в джете»

После всего можно заключить, что если вычисленный параметр вращения, возможно, слишком низок для твердотельной прецессии диска постоянной поверхностной плотности, то на основании внутри радиуса запуска джета недостаточно вещества для обеспечения необходимой поверхностной плотности и частоты Лензе — Тирринга. Интересно, что разработанная модель «джет в джете» для M87 [A9] (см. разд. 4.1) уже содержит неявные признаки этого. Джет как целое фактически состоит из двух коаксиальных вложенных джетов, таких, что внешний джет представляет собой круговой полый плазменный цилиндр, содержащий внутри себя узкий внутренний джет. Вращающиеся релятивистские внутренний и внешний джеты постепенно расширяются с расстоянием и разделены прослойкой плазмы низкой плотности с электромагнитным полем. Низкая плотность в прослойке может являться отражением низкой плотности на основании внутри радиуса запуска джета. Напомним, что полный поток массы в джете определяется главным образом потоком массы во внешнем джете и очень велик (см. формулу (406)), сравниваясь с измеренным темпом аккреции Бонди  $0.1\text{--}0.2 M_{\odot} \text{ год}^{-1}$  [308] (отметим, что поток (406) должен быть удвоен из-за существования контрджета). Это обстоятельство благоприятствует сценарию, в котором почти весь первоначальный аккреционный поток на далёких расстояниях от джета переходит во внешний джет, так что джет может существенно подавлять аккрецию на чёрную дыру.



### 4.2.5 Магнитно-арестованный диск

Такая ситуация соответствует так называемому магнитно-арестованному диску (MAD) [178, 277, 334], так что поток останавливается на радиусе запуска джета магнитным полем и затем переносится в джеты, тогда как аккреция затрудняется. Баланс магнитного и динамического давления на основании определяет плотность, ответственную за поток массы (406) во внешнем джете [A9]. Тот факт, что параметр вращения чёрной дыры для твердотельной прецессии низок и меньше оценки работы [117], может быть дополнительным признаком существования магнитно-арестованного диска в галактике M87. Значения параметра вращения для прецессии пробных частиц уже выше и соответствуют ситуации, в которой вещество между радиусом последней устойчивой круговой орбиты и радиусом запуска джета перемещено на последний радиус, тем самым образуя плотное кольцо. Фактически, возможно, имеется твердотельная прецессия диска, внутренний радиус которого — это не радиус последней устойчивой круговой орбиты, а радиус запуска джета, а внешний радиус которого — это не радиус запуска джета, а некоторый характерный радиус  $R_{\text{acc}}$ , отражающий масштаб накопления вещества снаружи джета за счёт останавливающего действия магнитного поля. Тогда, пользуясь формулой (426) при описанных условиях и принимая  $a = 0.98$  работы [137] (результат не изменяется для предела Торна 0.998 или формального максимума 1), получаем для  $R_{\text{base}} \approx 5R_{\text{Sch}}$  для звёздодинамической и  $R_{\text{base}} \approx 7R_{\text{Sch}}$  для газодинамической массы чёрной дыры почти одинаковый радиус накопления вещества в магнитно-арестованном диске,

$$R_{\text{acc}} \approx 10R_{\text{Sch}}. \quad (431)$$

Между прочим, если посмотреть на проблему с другой стороны и предположить существование магнитно-арестованного диска исключительно из на-

блюдений джета в джете и из большой величины потока массы, то полученные значения параметра вращения для прецессии пробных частиц дают нижнюю границу для параметра вращения чёрной дыры в М87, и это может быть независимым свидетельством того, что магнитно-арестованный диск «предпочитает» промежуточные или высокие параметры вращения и «не любит» низкие параметры вращения при генерации эффективных истечений. Это согласуется с результатами существующего численного моделирования [257, 334].

Отметим наконец, что наблюдаемое покачивание джета, если оно происходит благодаря прецессии Лензе — Тирринга, можно рассматривать в дополнение к целостной структуре «джет в джете» и оценкам на  $R_{\text{base}}$  как доказательство работы механизма Блэндфорда — Пейна запуска внешнего джета в галактике М87.

### 4.3 Уравнение состояния плазмы

Форма джета в галактике М87, так называемый профиль коллимации, дающий зависимость радиуса джета  $r$  от расстояния  $z$  от основания, хорошо описывается степенным законом

$$r \propto z^\alpha, \quad (432)$$

где значение показателя степени  $\alpha$  лежит в диапазоне 0.5—0.6 [35, 166, 209, 263] и соответствует постепенному уменьшению в среднем локального угла раскрытия, что составляет эффект коллимации и имеет место на масштабах расстояний от субпарсеков до сотен парсеков. Параболическая форма поддерживается до депроецированных угловых расстояний  $z \sim 10^3$  угл. мс от основания (1 угл. мс  $\approx 0.08$  пк), когда коллимация прекращается и происходит переход

к конической форме  $r \propto z$  [35]. Отметим, что постепенное степенное расширение происходит в среднем, так как возможна последовательность следующих друг за другом расширений и сжатий. Согласно недавним наблюдениям [349], джет в галактике M87 демонстрирует три последовательных цикла «расширение/реколлапсация» вплоть до расстояний  $z_{\text{obs}} \sim 7.4$  угл. мс.

Релятивистский профиль ускорения для джета в M87, который даёт зависимость лоренц-фактора плазмы от расстояния от основания, измерен в работе [263] и представляется степенным законом

$$\gamma \propto r \propto z^{0.58}, \quad z < 8 \text{ угл. мс.} \quad (433)$$

Эта зависимость изменяется, когда депроецированное расстояние превышает  $z \sim 8$  угл. мс от основания, что соответствует проецированному расстоянию  $z_{\text{obs}} \sim 2.5$  угл. мс, и показывает, что эффективность ускорения значительно падает,

$$\gamma \propto z^{0.16}, \quad z > 8 \text{ угл. мс.} \quad (434)$$

Интересно, что изменение зависимости лоренц-фактора от  $z$  не сопровождается каким-либо изменением формы джета.

В данном разделе будет продемонстрировано, что знание профилей коллимации и ускорения джета в галактике M87 позволяет делать выводы о термодинамике джета [A11]. Из общих законов сохранения и условия бесконечной проводимости будет показано, что политропное уравнение состояния для плазмы на субпарсековых масштабах является релятивистским и характеризуется показателем  $4/3$ . Весьма неожиданно то, что этот вывод оказывается нечувствительным к конкретным предположениям о природе сил, балансирующих джет. Изменение профиля ускорения на расстоянии  $z \sim 8$  угл. мс может вызываться охлаждением плазмы, а характер изменения может отражать работу механизма Блэндфорда — Знаека запуска джета.

### 4.3.1 Сохранение энтропии

Когда рассматривается случай политропы с показателем  $\Gamma$ , что соответствует

$$p = (\Gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (435)$$

в дополнение к интегралам движения, рассмотренным в подразд. 4.1.1, мы имеем дополнительный термодинамический интеграл, связанный с энтропией,

$$S = \frac{p}{\rho^\Gamma}, \quad (436)$$

что отражает сохранение энтропии

$$\frac{\partial \gamma \rho S}{\partial t} + \operatorname{div} \gamma \rho S \mathbf{v} = 0. \quad (437)$$

В этом случае энтальпия (290) принимает вид

$$h = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} S \rho^{\Gamma-1}. \quad (438)$$

Чтобы найти показатель политропы  $\Gamma$  в уравнении состояния, нужно понять, что определяет значение давления  $p$ . Радиальное равновесие джета можно описать либо с помощью уравнения Грэда — Шафранова, либо непосредственно используя закон сохранения импульса (288), который в цилиндрических координатах имеет вид (301). Из последнего уравнения естественно выделяются три предельных равновесных режима, которые соответствуют различным соотношениям термодинамического давления и других физических величин.

### 4.3.2 Продольное магнитное давление

Первый случай соответствует термодинамическому давлению, уравновешиваемому главным образом давлением продольного магнитного поля,

$$p \sim \frac{B_z^2}{8\pi}. \quad (439)$$

Сохранение магнитного потока

$$\Phi \sim B_z \pi r^2 = \text{const} \quad (440)$$

требует

$$B_z \propto r^{-2} \quad (441)$$

и тогда даёт зависимость давления от радиуса джета на данном уровне над основанием,

$$p \propto r^{-4}. \quad (442)$$

Сохранение интеграла  $\eta$  (303) в случае релятивистского продольного движения, когда

$$v_p \approx 1, \quad (443)$$

даёт зависимость плотности от лоренц-фактора и радиуса,

$$\rho \propto \gamma^{-1} r^{-2}. \quad (444)$$

Если для лоренц-фактора взять общую степенную зависимость от радиуса джета с показателем  $\beta$ ,

$$\gamma \propto r^\beta, \quad (445)$$

то приходим к формуле

$$\rho \propto r^{-2-\beta}. \quad (446)$$

Тогда сохранение энтропии (436) вместе с формулами (442) и (446) требует постоянства  $r^{-4+(2+\beta)\Gamma}$ , поэтому показатель политропы в случае доминирующего продольного магнитного давления равен

$$\Gamma_{\text{LM}} = \frac{4}{2 + \beta}. \quad (447)$$

Поскольку из формулы (433) наблюдательный показатель равен

$$\beta_{\text{obs}} = 1, \quad z < 8 \text{ угл. мс}, \quad (448)$$

получаем

$$\Gamma_{\text{LM}} = \frac{4}{3}. \quad (449)$$

### 4.3.3 Поперечное электромагнитное давление

Теперь рассмотрим случай, когда термодинамическое давление уравновешивается главным образом силами, возникающими из-за действия азимутального магнитного поля и радиального электрического поля,

$$p \sim \frac{B_\phi^2 - E_r^2}{8\pi}. \quad (450)$$

Стоит отметить, что комбинация  $B_\phi^2 - E_r^2$  входит в закон сохранения импульса (301) как единый параметр и не должна разделяться. Первый член отвечает за давление тороидального магнитного поля, в то время как второй (со знаком минус) отвечает за натяжение силовых линий радиального электрического поля, и общий эффект с некоторой степенью свободы можно называть «поперечным электромагнитным давлением».

Как следует из формул (285) и (302), радиальное электрическое поле имеет вид

$$E_r = -\Omega_{\text{F}} r B_z, \quad (451)$$

следовательно, поскольку  $\Omega_F$  — интеграл движения,

$$E_r \propto r^{-1}. \quad (452)$$

Тороидальное магнитное поле в свою очередь выражается через продольный электрический ток  $I$ ,

$$B_\phi = \frac{2I}{r}. \quad (453)$$

Можно было бы подумать, что  $B_\phi \propto r^{-1}$  и поэтому, с учётом зависимости (452),  $p \propto r^{-2}$ . Важно, что это не так. Ток  $I$  в общем случае не является точным интегралом движения и потенциально возможен некоторый поперечный ток через магнитную поверхность. Однако ниже мы увидим, см. формулу (477), что в нашем случае  $I$  строго сохраняется. Ответ на вопрос, почему  $p \propto r^{-2}$  не выполняется, заключается в том, что члены  $B_\phi^2$  и  $E_r^2$  почти компенсируют друг друга и вклад в давление — это член более малого порядка величины.

Конкретно, идеальная проводимость означает (см. (285))

$$E_r = v_z B_\phi - v_\phi B_z. \quad (454)$$

Теоретические оценки показывают, что  $B_\phi \gg B_z$  и  $v_\phi \ll 1$  [A9] (см. разд. 4.1), поэтому последним членом в формуле (454) можно пренебречь,

$$E_r \approx v_z B_\phi. \quad (455)$$

Поскольку  $v_z \approx 1$ , то  $E_r \approx B_\phi$  и два члена первого порядка в давлении сокращаются. Тогда из формул (450) и (455) получаем

$$p \sim \frac{E_r^2}{8\pi\gamma^2}. \quad (456)$$

Зависимость давления от радиуса джета принимает вид

$$p \propto r^{-2-2\beta}. \quad (457)$$

Теперь из формул (436), (446) и (457) мы получаем необходимость постоянства  $r^{-2(1+\beta)+(2+\beta)\Gamma}$ , и показатель политропы в случае доминирующего поперечного электромагнитного давления поэтому равен

$$\Gamma_{\text{ТЕМ}} = 2 \frac{1 + \beta}{2 + \beta}. \quad (458)$$

Хотя функциональная форма зависимости  $\Gamma$  от  $\beta$  отличается от предыдущей формы (447), для наблюдательного показателя (448) мы снова имеем

$$\Gamma_{\text{ТЕМ}} = \frac{4}{3}. \quad (459)$$

#### 4.3.4 Центробежное давление

Последний случай соответствует давлению, уравновешиваемому главным образом центробежным давлением,

$$p \sim \gamma^2 \rho h v_\phi^2. \quad (460)$$

Здесь удобно отдельно рассмотреть два случая — случай холодного течения, когда  $h \approx 1$ , и случай горячего течения, когда  $h \gg 1$ . Перед этим напомним о сохранении при движении вдоль магнитной трубки величины (377).

В первом случае имеем

$$p \sim \gamma^2 \rho v_\phi^2. \quad (461)$$

Учитывая нерелятивистское движение у основания джета, имеем равенство

$$1 \approx \gamma(1 - \Omega_{\text{F}} r v_\phi), \quad (462)$$

которое использовалось ранее для оценки частоты изоротации Ферраро для джета в М87 [263]. При больших лоренц-факторах оно преобразуется к виду

$$\Omega_{\text{F}} r v_\phi \sim 1, \quad (463)$$



так что

$$v_\phi \propto r^{-1}. \quad (464)$$

Комбинируя формулы (445), (446), (461) и (464), приходим к выводу, что

$$p \propto r^{\beta-4}. \quad (465)$$

Вспоминая сохранение энтропии (436), видим, что требуется постоянство  $r^{\beta-4+(2+\beta)\Gamma}$ , откуда вытекает показатель политропы

$$\Gamma_{\text{CC}} = \frac{4 - \beta}{2 + \beta}, \quad (466)$$

для наблюдаемого  $\beta$  равный

$$\Gamma_{\text{CC}} = 1. \quad (467)$$

Мы получили невозможное значение показателя  $\Gamma_{\text{CC}} < 4/3$ , а это означает, что случай холодного потока с центробежным давлением для джета в галактике M87 на рассматриваемых расстояниях не реализуется.

Во втором случае из формулы (438) можно записать

$$h \propto \rho^{\Gamma-1}. \quad (468)$$

Поскольку

$$\rho h \propto \rho^\Gamma, \quad (469)$$

сохранение энтропии требует (см. формулу (460))

$$\gamma v_\phi = \text{const}. \quad (470)$$

Примем сразу наблюдаемое значение  $\beta = 1$ ; формула (470) принимает вид

$$r v_\phi = \text{const}. \quad (471)$$

Из формулы (377) мы тогда заключаем, что  $\gamma h$  является точным интегралом движения,

$$\gamma h = \text{const}, \quad (472)$$

откуда

$$p \propto \rho h \propto \frac{\rho}{\gamma}. \quad (473)$$

Зависимость давления от радиуса джета формально совпадает с этой же зависимостью для случая доминирующего поперечного электромагнитного давления,

$$p \propto r^{-2-2\beta} \propto r^{-4}, \quad (474)$$

поэтому мы снова получаем показатель политропы

$$\Gamma_{\text{сн}} = \frac{4}{3}. \quad (475)$$

Для полноты отметим, что можно пользоваться формулой, аналогичной формуле (458), и при  $\beta \neq 1$ ,

$$\Gamma_{\text{сн}} = 2 \frac{1 + \beta}{2 + \beta}, \quad (476)$$

но тогда нужно проверить, что равенство (472) по крайней мере приблизительно выполняется. Это может быть, когда, например,  $\Omega_{\text{F}} r v_{\phi} \ll 1$  (см. формулу (377)) или когда  $I \approx \text{const}$  или  $I = 0$  (см. формулу (304)).

#### 4.3.5 Горячий джет и сохранение тока

Мы получили одинаковый показатель политропы  $\Gamma = 4/3$  независимо от предположений о точном характере сил, дающих основной вклад в уравновешивание термодинамического давления и тем самым обеспечивающих поперечное равновесие джета; при этом показателе также возможна линейная комбинация сил различной природы, скажем, со сравнимыми вкладами в равновесие джета. Значит, джет на субпарсековских масштабах является горячим, так что

мы имеем не только релятивистское объёмное движение, но и релятивистское внутреннее термодинамическое движение частиц, составляющих плазму [A11].

Важно, что наблюдаемое  $\beta = 1$  и полученное  $\Gamma = 4/3$  показывают, что хотя продольный ток в общем случае и не обязан сохраняться вдоль магнитной трубки, но оказывается точным интегралом движения на рассматриваемых масштабах,

$$I = \text{const.} \quad (477)$$

Поскольку

$$\rho \propto r^{-2-\beta} = r^{-3}, \quad (478)$$

мы имеем для горячего потока

$$h \propto \rho^{\Gamma-1} = \rho^{1/3} \propto r^{-1}; \quad (479)$$

следовательно, в силу формулы (433) равенство (472) выполняется независимо от природы баланса сил в джете. Тогда сохранение энергии (304) приводит к заключению выше. Это является прямым доказательством устойчивой структуры продольного тока в джете.

Интересно рассмотреть, что происходит на расстоянии 8 угл. мс. В работе [263] с учётом результатов работы [241] обсуждается, что здесь джет может входить в неравновесный режим или скорее проявлять раннее насыщение преобразования пойнтинговского потока. Тем временем, альтернативным объяснением может быть изменение термодинамики джета. Релятивистский газ не характеризуется единым показателем политропы, и общее выражение для его энтальпии имеет вид

$$h = \frac{K_3(1/\Theta)}{K_2(1/\Theta)}, \quad (480)$$

где  $K_\nu(z)$  — функция Макдональда порядка  $\nu$  и

$$\Theta = \frac{p}{\rho} \quad (481)$$

— температура [327]. Полезные более простые аналитические аппроксимации точного выражения представлены в работах [91, 255, 261]. В двух противоположных предельных случаях оно соответствует политропе с показателем  $\Gamma = 4/3$ , когда  $\Theta \gg 1$ , и с показателем  $\Gamma = 5/3$ , когда  $\Theta \ll 1$ . Из формул (433) и (434) имеем

$$\beta_{\text{obs}} \approx \frac{0.16}{0.58} \approx 0.28, \quad z > 8 \text{ угл. мс}, \quad (482)$$

что позволяет формально оценить показатель политропы соответственно в случае доминирующего продольного магнитного, поперечного электромагнитного и центробежного давления:

$$\Gamma_{\text{LM}} \approx 1.76, \quad (483)$$

$$\Gamma_{\text{ТЕМ}} = \Gamma_{\text{СН}} \approx 1.12, \quad (484)$$

$$\Gamma_{\text{СС}} \approx 1.64. \quad (485)$$

Поскольку  $\Gamma_{\text{ТЕМ}} = \Gamma_{\text{СН}} < 4/3$ , горячее течение с доминирующим поперечным электромагнитным или центробежным давлением не реализуется после 8 угл. мс. Два других показателя соответствуют холодному течению:  $\Gamma_{\text{LM}}$  близко, но всё же слегка больше максимально возможного  $5/3$ , тогда как, что весьма неожиданно,  $\Gamma_{\text{СС}}$  практически совпадает с  $5/3 \approx 1.67$ . Следовательно, переход от  $\gamma \propto z^{0.58}$  к  $\gamma \propto z^{0.16}$  при  $z \sim 8$  угл. мс может быть объяснён охлаждением плазмы и переходом от горячего течения с  $p \propto \rho^{4/3}$  к холодному течению с  $p \propto \rho^{5/3}$ . После 8 угл. мс, по всей видимости, имеется холодное течение, давление которого определяется главным образом центробежными силами, возможно, с некоторым вкладом от давления продольного магнитного поля, в то время как поперечное электромагнитное поле даёт силы, которые практически компенсируют друг друга и приводят к скромному общему эффекту.

### 4.3.6 Охлаждение, состав плазмы и механизм запуска

Определение  $\Gamma$  из профилей ускорения и коллимации джета позволяет определить состав плазмы, что является важным для выводов о точном механизме запуска джета. Переход непосредственно от  $4/3$  к  $5/3$  при охлаждении джета может являться признаком чистой электрон-позитронной плазменной компоненты: электроны и позитроны имеют одинаковую массу и ведут себя как упомянутый однокомпонентный газ Синджа. Однако в случае электрон-протонной плазмы переход от  $4/3$  к  $5/3$  должен происходить через промежуточное значение  $\Gamma \approx 1.44$ , имеющее место в переходной температурной области и играющее роль дополнительной ступени, на которой останавливается показатель политропы, когда безразмерная обратная температура пробегает диапазон значений  $\sim 10$ — $100$  (см. рис. 1 в работе [134] и рис. 1 и 2 в работе [97]).

Если имеется вероятное доминирование центробежных сил не только далее  $z \sim 8$  угл. мс, но и в самой переходной области, то в некотором диапазоне расстояний около 8 угл. мс наблюдался бы профиль ускорения  $\gamma \propto r^{0.46} \propto z^{0.27}$  (см. формулу (466)), если бы во время охлаждения электрон-протонной плазмы имела задержка на  $\Gamma \approx 1.44$  (здесь учтено, что профиль коллимации на рассматриваемых расстояниях не изменяется). Наблюдения, представленные в работе [263], не показывают такого профиля ускорения, поэтому нужно предполагать существование в джете электрон-позитронной плазменной компоненты. Это является доказательством работы механизма Блэндфорда — Знаека запуска джета, генерирующего электрон-позитронные пары около центральной машины [67].

Отметим, что этот вывод не означает, что весь джет обеспечивается исключительно механизмом Блэндфорда — Знаека, потому что имеются свидетельства о том, что внешний джет, вероятно, продуцируется за счёт механизма

Блэндфорда — Пейна. Радиус основания джета составляет  $\sim 10r_g$  [263], и это подразумевает, что внешний джет запускается от аккреционного диска [66]. Другое свидетельство заключается в разрешённой трёхгорбой структуре джета [37, 162], которая может означать, что джет в галактике M87 фактически является джетом в джете [A9], и различные механизмы запуска для внутреннего и внешнего джетов не запрещены (см. разд. 4.1). Дополнительное свидетельство в пользу механизма Блэндфорда — Пейна идёт из наблюдаемого квазипериодического поперечного смещения джета [349], которое может быть интерпретировано как прецессия джета, проистекающая от прецессии Лензе — Тирринга наклонённого аккреционного диска, которому джет перпендикулярен (см. разд. 4.2) [A10].

Новое численное моделирование разрыва сильно наклонённого аккреционного диска вокруг вращающейся чёрной дыры показывает, что центральные части диска испытывают эффект Бардина — Петерсона и выравниваются относительно оси вращения чёрной дыры, а радиус выравнивания составляет  $< 5\text{--}10r_g$  [233]. Тогда радиус основания джета не может быть меньше радиуса выравнивания, потому что в противном случае прецессия бы не наблюдалась. Это согласуется с упомянутой оценкой радиуса основания и возможностью прецессии джета, благоприятствуя механизму Блэндфорда — Пейна запуска внешнего джета. Внутренний джет, даже если он запускается от чёрной дыры, будет выравниваться со внешним джетом и вовлекаться в общую прецессию, потому что поперечные электромагнитные силы индуцируют выравнивание, когда внутренний джет смещается от оси внешнего джета (см. подразд. 4.1.3) [A9]. Это согласуется со строгим сохранением тока, полученным выше: внутренний и внешний джеты хотя и несут противоположные заряды и противоположно направленные электрические токи, не касаются друг друга и не становятся короткозамкнутыми во время прецессии.

Тем не менее, возможность запуска всего джета исключительно чёрной

дырой также обсуждается [274, 280], и прямой наблюдательный признак электрон-протонного плазменного состава был бы полезен для окончательного выбора между смешанным случаем механизмов Блэндфорда — Знаека и Блэндфорда — Пейна и чистым случаем механизма Блэндфорда — Знаека. Отмеченная зависимость  $\gamma \propto r^{0.46}$  около 8 угл. мс (2.5 угл. мс в проекции) могла бы быть таким признаком, и перспективным является наблюдательное изучение профиля ускорения отдельно для самых внешних областей джета на субпарсековых масштабах с высоким продольным разрешением.

## 5 Динамика нерелятивистской твердотельной плазмы

В данной главе представлены результаты по кинетике плазмы твёрдого тела в лабораторных оптических и магнитных системах, в которых происходит взаимодействие квазичастиц с окружением и внешним полем [А6, А12, А13, А35, А36].

### 5.1 Связь спектра излучения и кинетики поляритонов

Связь между кинетикой неравновесной системы и её излучением подразумевает возможность определения по характеристикам наблюдаемого спектра внутренних термодинамических характеристик системы. В качестве примера рассмотрим систему поляритонов, то есть смешанных экситон-фотонных состояний, в квантовой яме, помещённой в микрополость. Поляритонную систему в микрополости можно разделить на радиативную часть с малыми волновыми числами  $k$  и нерадиативную часть с большими  $k$ , и эта часть представляет собой резервуар. В радиативной части велико экситон-фотонное смешивание, что приводит к крутой дисперсионной кривой для поляритонов. Эта поляритонная часть сильно неравновесна из-за малого времени жизни поляритонов, определяемого добротностью микрополости. С другой стороны, нерадиатив-



ный резервуар, содержащий почти всё население электрон-дырочной системы, практически не чувствует влияния микрополости и определяет населённость области с малыми волновыми числами.

Определим форму и ширину поляритонной линии. Рассмотрим подсистему, представляющую собой одно поляритонное состояние с малым волновым числом в микрополости. Эволюция распределения вероятностей для числа заполнения  $n$  состояния описывается основным кинетическим уравнением

$$\dot{p}_n = wnp_{n-1} - [w(n+1) + \gamma n]p_n + \gamma(n+1)p_{n+1}, \quad (486)$$

где  $p_n$  — вероятность обнаружить в подсистеме  $n$  поляритонов,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а  $w$  и  $\gamma$  — скорости соответственно излучения и поглощения поляритона окружением, при этом считается, что взаимодействие с подсистемой практически не влияет на состояние окружения. Стационарное решение уравнения (486) есть

$$p_n^{\text{st}} = \left(1 - \frac{w}{\gamma}\right) \left(\frac{w}{\gamma}\right)^n \quad (487)$$

и представляет собой вероятностное распределение Бозе — Эйнштейна. В этой связи подчеркнём, что в общем случае подсистема находится в неравновесном стационарном состоянии и что окружение может быть общего вида и не должно обязательно являться равновесным резервуаром частиц и энергии. Стационарное среднее число поляритонов равно

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\gamma/w - 1}, \quad (488)$$

конечность которого подразумевает

$$w < \gamma. \quad (489)$$

Теперь находим поляритонный энергетический спектр

$$S(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iE\tau) g^{(1)}(\tau) d\tau \quad (490)$$

с нормировкой

$$\int S(E)dE = 1, \quad (491)$$

где

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle a^+(0)a(\tau) \rangle}{\langle n \rangle} \quad (492)$$

— временная корреляционная функция первого порядка (квантовая степень временной когерентности первого порядка), а  $a^+$  и  $a$  — операторы рождения и уничтожения [235]. Отметим, что мы полагаем  $\hbar = 1$ . Формула (490) имеет форму теоремы Винера — Хинчина [126, 206, 356, 367]. Пренебрегая взаимодействием поляритонов в подсистеме, из уравнения (486) мы восстанавливаем квантовое кинетическое уравнение для приведённого оператора плотности  $\rho$  подсистемы,

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -iE'_0[a^+a, \rho] - \frac{w}{2}(aa^+\rho - 2a^+\rho a + \rho aa^+) - \\ & - \frac{\gamma}{2}(a^+a\rho - 2a\rho a^+ + \rho a^+a), \end{aligned} \quad (493)$$

где энергия  $E'_0$  близка к энергии состояния, не взаимодействующего с окружением. Находя временное поведение  $\langle a \rangle$  из уравнения (493) и пользуясь теоремой о квантовой регрессии [89, 223, 224], имеем [A6]

$$g^{(1)}(\tau) = \exp\left(-iE'_0\tau - \frac{\gamma - w}{2}|\tau|\right). \quad (494)$$

Можно провести аналогию между подсистемой невзаимодействующих поляритонов и хаотическим светом. Аналогия проистекает из того факта, что распределение вероятностей  $\{p_n^{\text{st}}\}$  формально подобно распределению Планка; иными словами, статистические свойства подсистемы подобны свойствам хаотического света, излучаемого равновесным тепловым источником. Из этой аналогии для подсистемы поляритонов мы сразу записываем соотношение, которое имеет место для хаотического света [235],

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2, \quad (495)$$

где

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle a^+(0)a^+(\tau)a(\tau)a(0) \rangle}{\langle n \rangle^2} \quad (496)$$

— временная корреляционная функция второго порядка (квантовая степень временной когерентности второго порядка).

Интересно, что такая аналогия позволяет предугадать формулу (494) непосредственно из уравнения (486), не используя уравнение (493). Определяя временное поведение среднего числа поляритонов  $\langle n \rangle$  из уравнения (486) и пользуясь теоремой о квантовой регрессии, мы приходим к выражению

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \exp[-(\gamma - w)|\tau|]. \quad (497)$$

Ясно, что мы имеем дело с суперпуассоновскими флуктуациями с

$$g^{(2)}(0) = 2, \quad (498)$$

как и должно быть для распределения Бозе — Эйнштейна. Из формул (495) и (497) вытекает, что

$$|g^{(1)}(\tau)| = \exp\left(-\frac{(\gamma - w)|\tau|}{2}\right), \quad (499)$$

а это подразумевает соотношение (494).

Наконец, из формул (490) и (494) можно заключить, что спектр поляритонов — это лоренциана

$$S(E) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma/2}{(E - E'_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (500)$$

с шириной линии (полушириной, то есть полной шириной на половине высоты) [A6]

$$\Gamma = \gamma - w. \quad (501)$$

Пользуясь формулой (488), можно также записать ширину поляритонной линии (501) в альтернативной форме

$$\Gamma = \frac{\gamma}{\langle n \rangle + 1}. \quad (502)$$

Формулы (501) и (502) верны для общего окружения со скоростями  $w$  и  $\gamma$  произвольной природы. В частном случае термализованного резервуара экситонов и отсутствия поляритон-фононного рассеяния формула (502) сводится к известному результату [294].

С помощью формулы (502) был построен метод определения неравновесной температуры резервуара. По измеряемой ширине поляритонной линии и населённости состояния, которая пропорциональна интенсивности излучения, вычисляется темп ухода поляритонов, а его зависящая от времени часть содержит экспоненциальный множитель, в свою очередь зависящий от температуры. Результаты по практическому применению этого метода для определения временной динамики температуры резервуара в эксперименте после импульсного возбуждения микрополости представлены в работе [А6] и приведены на рис. 7.

## 5.2 Аномальное магнитное подавление релаксации спина электронов

Релаксация спина электронов в полупроводниках без центра инверсии при низких температурах обычно определяется влиянием случайных эффективных магнитных полей, действующих на спин [259]. В двумерных квантовых ямах с высокой подвижностью электроны свободны и спиновая релаксация происходит за счёт механизма Дьяконова — Переля [121, 122]. В магнитном поле следует ожидать проявления влияния этого поля на движение электронов, и одним из наиболее ярких эффектов такого рода является квантовый эффект Холла, который проявляется при достаточно низкой температуре и в достаточно сильном магнитном поле, когда отдельные уровни Ландау достаточно разделены, а тепловые эффекты их не размывают [111]. Интерес представляет

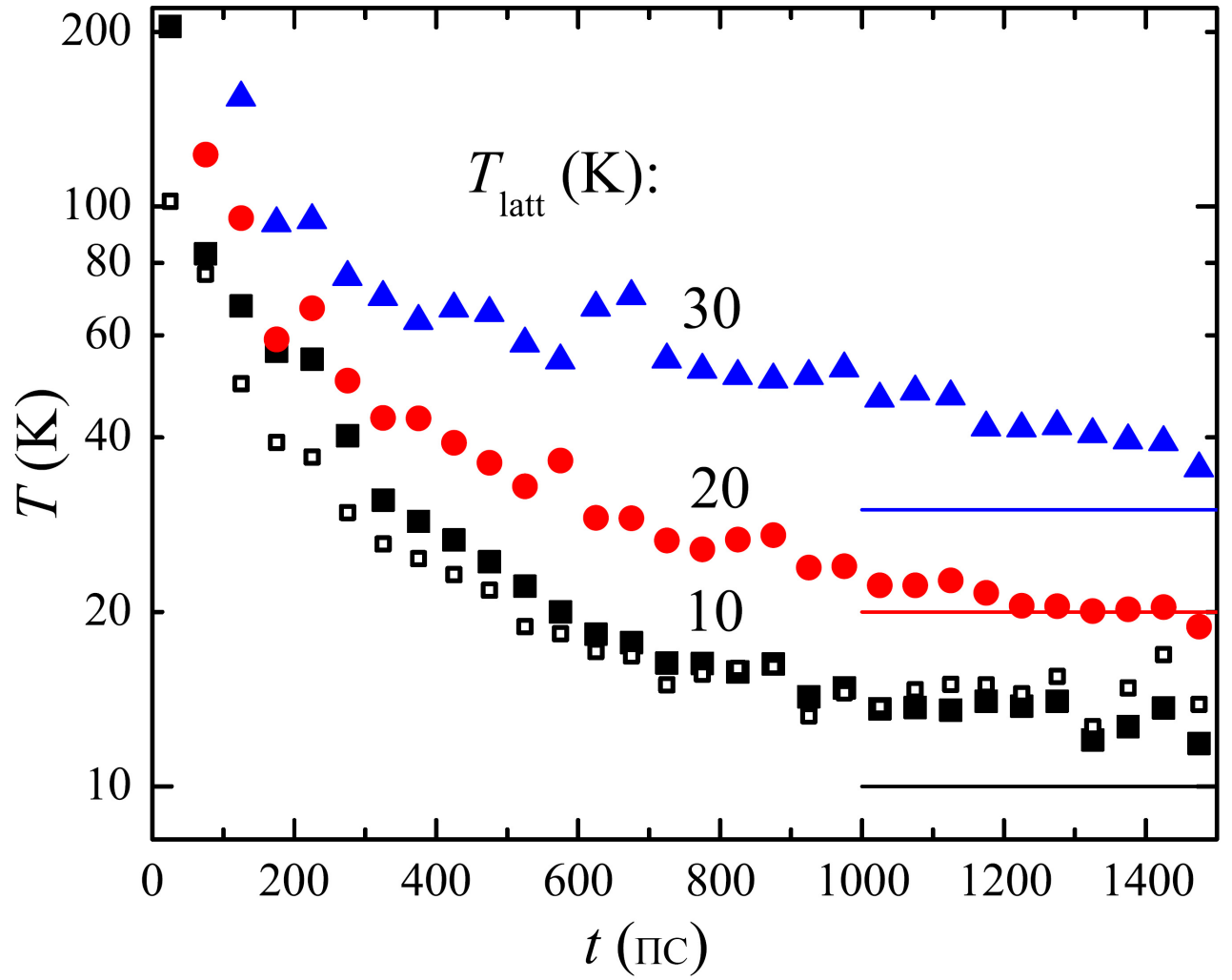


Рис. 7. Динамика температуры резервуара при различной решёточной температуре  $T_{\text{latt}}$  [A6].

изучение поведения спина электронов в такой системе.

В работе [A12] проведено исследование спиновой динамики двумерного электронного газа высокой подвижности в квантовой яме GaAs/AlGaAs при различных температурах и магнитных полях и обнаружено, что с увеличением магнитного поля первоначально квадратичная зависимость времени спиновой релаксации внезапно становится линейной, а потом приобретает осциллирующий характер при низких температурах. Ниже представлена теория, разработанная для объяснения экспериментальных находок, в которой совместно учитываются спиновая прецессия в эффективном спин-орбитальном поле и циклотронное вращение электрона во внешнем магнитном поле. В рамках теории показано, что проблема спиновой релаксации может быть сведена к проблеме пространственной диффузии электрона. Сопоставление теории и эксперимента открыло неожиданное аномальное поведение высокоподвижного двумерного электронного газа, которое соответствует не классической, а боровской диффузии и аналогично поведению, наблюдаемому при определённых условиях в обычной замагниченной плазме.

### 5.2.1 Прецессия и нутация спина

Динамика спина электрона между двумя последовательными столкновениями описывается уравнением Блоха без затухания,

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}, \quad (503)$$

которое означает, что в каждый момент времени спин мгновенно вращается вокруг единичной оси, параллельной  $\boldsymbol{\Omega}$ , с угловой частотой  $\Omega$ . Имеются два

вклада в угловую частоту:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_L + \boldsymbol{\Omega}_D. \quad (504)$$

Первый вклад возникает благодаря расщеплению Зеемана во внешнем магнитном поле:

$$\boldsymbol{\Omega}_L = \Omega_L \mathbf{e}_z, \quad (505)$$

где

$$\hbar\Omega_L = g\mu_B B \sim -0.02 \text{ мЭВ} \left( \frac{B}{1 \text{ Т}} \right). \quad (506)$$

Второй плоскостной вклад возникает благодаря спин-орбитальному взаимодействию Дрессельхауса в полупроводниках типа цинковой обманки [118, 121, 122]:

$$\hbar\boldsymbol{\Omega}_D = 2\beta_D(-k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y), \quad (507)$$

где

$$\beta_D = \frac{\gamma\pi^2}{a^2} \sim 0.4 \text{ мЭВ нм}, \quad (508)$$

ширина квантовой ямы равна  $a \sim 25$  нм и  $\gamma \sim 28$  мЭВ нм<sup>3</sup> [247, 361] (отметим существующую неопределённость при определении  $\gamma$  [90, 214, 350]). Таким образом,

$$\hbar\Omega_D = 2\beta_D k_F \sim 0.07 \text{ мЭВ}, \quad (509)$$

где

$$k_F = \sqrt{2\pi n_e} \quad (510)$$

— волновой вектор Ферми. Здесь рассматривается только случай взаимодействия Дрессельхауса, но результаты можно обобщить на случай взаимодействия Рашбы [84, 346], которое может быть важно в случае асимметричной квантовой ямы [127, 129].

По теореме Эйлера ориентация спина в некоторый более поздний момент времени может быть получена из его первоначальной ориентации в нулевой момент времени путём вращения вокруг некоторой единичной оси  $\boldsymbol{\zeta}$  на некоторый угол  $\alpha$ , при этом ориентация оси и угол в общем случае зависят от времени,

$\zeta = \zeta(t)$  и  $\alpha = \alpha(t)$ . Это значит, что ориентацию можно задать зависящим от времени кватернионом (182) (см. разд. 3.1), и знание временного поведения  $\Lambda$  обеспечивает знание динамики спина. Мгновенный спин  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t)$  получается из начального спина  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}(0)$  посредством вращения, задаваемого  $\Lambda$ , и поэтому выражается так:

$$\mathbf{s} = \Lambda \circ \mathbf{s}_0 \circ \bar{\Lambda}. \quad (511)$$

Сам кватернион  $\Lambda$  можно вычислить из соотношения (195). Электрон в магнитном поле совершает циклотронное вращение с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_c = \omega_c \mathbf{e}_z, \quad (512)$$

где  $\omega_c$  — циклотронная частота, и это вращение описывается кватернионом

$$M = e^{\boldsymbol{\omega}_c t/2}. \quad (513)$$

Угловая скорость Дрессельхауса  $\boldsymbol{\Omega}_D$  и обычная угловая скорость  $\boldsymbol{\Omega}$  вращаются в противоположном направлении, и это вращение описывается сопряжённым кватернионом  $\bar{M}$ . Мы ищем решение в виде произведения последнего кватерниона и другого неизвестного кватерниона  $N$ , так что

$$\Lambda = \bar{M} \circ N. \quad (514)$$

Подставляя данное кватернионное произведение в соотношение (195) и пользуясь упомянутыми свойствами и определениями, находим, что угловая скорость, соответствующая дополнительному вращению, задаваемому кватернионом  $N$ , является постоянным вектором

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_c, \quad (515)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}(0)$  — угловая скорость (504) вращения спина, взятая в нулевой момент времени. Этот вектор имеет абсолютное значение

$$\omega_0 = \sqrt{(\omega_c + \Omega_L)^2 + \Omega_D^2}, \quad (516)$$



и для условий эксперимента  $\omega_0 \approx \omega_c$ , потому что обычно  $\omega_c$  значительно больше  $\Omega_L$  и  $\Omega_D$ . Следовательно,

$$N = e^{\omega_0 t/2}. \quad (517)$$

Итак, кватернион, описывающий ориентацию спина в момент времени  $t$ , даётся формулой

$$\Lambda = e^{-\omega_c t/2} \circ e^{\omega_0 t/2}. \quad (518)$$

Принимая во внимание формулу (511), мы видим, что конечная ориентация спина получается из его начальной ориентации с помощью суперпозиции двух последовательных вращений вокруг неподвижных осей: первое вращение происходит вокруг оси  $\mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\omega}_0/\omega_0$  на угол  $\omega_0 t$ , а второе — вокруг оси  $\mathbf{e}_z$  на угол  $-\omega_c t$  (то есть вращение совершается в обратном направлении). Формула (518) означает, что тот же результат можно получить, непосредственно преобразуя уравнение (503) во вращающуюся систему отсчёта, вращение которой описывается кватернионом  $\bar{M}$ , и затем работая с модифицированной, но уже не вращающейся угловой скоростью, которая определяет  $N$ .

Прямое вращение спина происходит в наклонённой плоскости и вызывает изменение вертикальной проекции спина, то есть проекции на ось  $z$ . С другой стороны, обратное вращение происходит в горизонтальной плоскости, то есть в плоскости  $xy$ , и не оказывает влияния на проекцию спина, возникающую в результате прямого вращения, но вместо этого поворачивает спин при малых временах почти к такой же азимутальной ориентации, что и в начальный момент времени. Поскольку  $\omega_0 \approx \omega_c$ , полная азимутальная фаза меняется медленно. Полярный угол возвращается к своему начальному положению за время

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (519)$$

и тогда азимутальный угол меняется на величину

$$\Delta\phi = 2\pi - \omega_c \tau_0 = 2\pi \frac{\omega_0 - \omega_c}{\omega_0} \ll 1. \quad (520)$$

Это значит, что спин совершает медленную прецессию вокруг оси  $\mathbf{e}_z$  с угловой частотой

$$\Omega_{\text{prec}} = \omega_0 - \omega_c \quad (521)$$

и одновременно быструю нутацию с частотой  $\omega_0$ .

### 5.2.2 Релаксация спина

Из приведённого выше рассмотрения следует, что только первое вращение, задаваемое кватернионом  $\mathbf{N}$ , определяет изменение вертикальной спиновой компоненты и вносит вклад в продольную спиновую релаксацию. Естественно, такое изменение происходит исключительно благодаря наклону  $\mathbf{e}_0$ , то есть благодаря ненулевой  $\Omega_D$ . Однако полярный угол, который характеризует наклон спина по отношению к оси  $\mathbf{e}_z$ , осциллирует с частотой  $\omega_0$ , но остаётся около своего первоначального значения в малом фазовом диапазоне, равном углу наклона  $\mathbf{e}_0$ ,

$$\delta\theta \sim \frac{\Omega_D}{\omega_0} \ll 1. \quad (522)$$

Это значит, что дальнейшая релаксация спина невозможна без какого-либо изменения вращательной фазы полной угловой скорости  $\mathbf{\Omega}$  и поэтому изменения вращательной фазы электрона. Это изменение требует столкновений, которые, что весьма важно, могут иметь любую природу и не обязательно должны вносить вклад в подвижность образца [152, 365].

В эксперименте время  $\tau_{\text{col}}$  между двумя последовательными столкновениями значительно превышает период

$$\tau_c \sim 2 \text{ пс} \left( \frac{B}{1 \text{ Т}} \right)^{-1} \quad (523)$$

циклотронного вращения и, следовательно, период вращения спина,

$$\omega_0 \tau_{\text{col}} \gg 1. \quad (524)$$

Тогда каждое столкновение вызывает случайный сдвиг полярной фазы  $\sim \delta\theta$ , не зависящий от  $\tau_{\text{col}}$ , а также имеющий случайный знак, и приводит к прибавлению фазовой дисперсии  $\sim \delta\theta^2$  к мгновенной дисперсии. За время  $T_1$  продольной спиновой релаксации электрон совершает  $n = T_1/\tau_{\text{col}}$  столкновений, а полное изменение фазы становится порядка единицы,  $n\delta\theta^2 \sim 1$ . Время спиновой релаксации приобретает вид

$$T_1 \sim \tau_{\text{col}} \left( \frac{\omega_0}{\Omega_D} \right)^2. \quad (525)$$

Линейная зависимость от времени столкновений обратна закону  $1/\tau_{\text{col}}$ , ожидаемому для обычного механизма Дьяконова — Переля, и подделывается под механизм Эллиота — Яфета [128, 366]. Тем не менее, она не требует переворота спина при столкновении, а просто отражает влияние внешнего магнитного поля и согласуется с предыдущими результатами [83, 133, 151, 191, 376].

Отметим, что хотя формула (525) формально совпадает с пределом сильных полей модифицированного поведения Дьяконова — Переля  $(1 + \omega_c^2 \tau_{\text{col}}^2)/\Omega_D^2 \tau_{\text{col}}$ , она носит более общий характер и верна не только в режиме сильного рассеяния для самого спина электрона, когда  $\Omega_D \tau_{\text{col}} \ll 1$ , но и в режиме слабого рассеяния, когда  $\Omega_D \tau_{\text{col}} \gg 1$ . В нашем случае формула (525) не является следствием такого поведения, потому что в эксперименте  $\Omega_D \tau_{\text{col}} \gg 1$  и стандартная оценка для нулевого поля  $T_1 \sim 1/\Omega_D^2 \tau_{\text{col}}$  не применима.

### 5.2.3 Связь спиновой релаксации и пространственной диффузии

Кроме сдвига полярной фазы спина электрона, каждое столкновение вызывает соответствующий сдвиг положения электрона, потому что оба сдвига имеют одну и ту же причину — изменение вращательной фазы электрона, вызванное столкновением. Это значит, что диффузия спина на сфере Блоха, приводящая к спиновой релаксации, и диффузия электрона в пространстве близко связаны. Поскольку  $\omega_c \tau_{\text{col}} \gg 1$ , электрон совершает много оборотов на циклотронной орбите между двумя последовательными столкновениями и его пространственный сдвиг при столкновении по порядку величины равен циклотронному радиусу  $r_c = v_F / \omega_c$ , где  $v_F$  — скорость Ферми. Коэффициент пространственной диффузии для электрона имеет вид [1, 174, 219]

$$D \sim \frac{r_c^2}{\tau_{\text{col}}}, \quad (526)$$

тогда как коэффициент диффузии спина по полярному углу равен

$$D_s \sim \frac{\delta\theta^2}{\tau_{\text{col}}} \sim \frac{1}{\tau_{\text{col}}} \left( \frac{\Omega_D}{\omega_0} \right)^2 \sim \frac{1}{T_1}. \quad (527)$$

Отношение первого ко второму коэффициенту имеет размерность квадрата длины,

$$l_s^2 = \frac{D}{D_s}, \quad (528)$$

так что  $l_s$  — спиновая диффузионная длина, равная пространственному сдвигу электрона (более точно, его ведущего центра) за время релаксации спина.

Длина

$$l_s \sim \frac{v_F}{\Omega_D} = \frac{\hbar^2}{2m_e \beta_D} \sim 1.3 \text{ мкм} \quad (529)$$

зависит только от характеристик образца. Выражение для  $l_s$  обобщает недавний результат, полученный для взаимодействия Рашбы в поликристаллическом графене в нулевом магнитном поле и в режиме сильного рассеяния для спина,

когда  $\Omega_R \tau_{\text{col}} \ll 1$  и  $T_1 \sim 1/\Omega_R^2 \tau_{\text{col}}$  [106], и оказывается справедливым в магнитных полях, удовлетворяющих условию  $\omega_c \tau_{\text{col}} \gg 1$ , когда ограничения на  $\Omega_{D(R)} \tau_{\text{col}}$  можно опустить. Из формул (527) и (528) получаем [A12]

$$T_1 \sim \frac{l_s^2}{D}. \quad (530)$$

Итак, время спиновой релаксации оказывается обратно пропорциональным коэффициенту диффузии электрона.

#### 5.2.4 Сравнение с экспериментом и диффузия Бома

На рис. 8 показана зависимость  $T_1$  от магнитного поля  $B$  при температуре  $T = 2$  К в диапазоне магнитного поля до 6 Т (напомним, что  $1 \text{ Т} = 10^4 \text{ Гс}$ ). При малых полях  $T_1 \propto B^2$  и при больших полях  $T_1 \propto B$  с переходом при  $B \sim 0.3 \text{ Т}$ , что согласно формуле (530) означает, что коэффициент диффузии меняет своё поведение с  $D \propto B^{-2}$  на  $D \propto B^{-1}$  с ростом  $B$ . Поведение при малых полях соответствует хорошо известной классической диффузии плазмы поперёк магнитного поля [174], тогда как поведение при больших полях аномально. Изучение аномальной диффузии плазмы в магнитном поле восходит к 1949 г., когда впервые было экспериментально обнаружено, что, в противоположность ожидаемому классическому поведению, диффузия плазмы происходит значительно быстрее и снижает влияние магнитного поля на удержание плазмы [68–70]. Соответствующий коэффициент аномальной диффузии, называемой диффузией Бома или бомовской диффузией, даётся формулой

$$D_B \sim \frac{ck_B T}{eB} \quad (531)$$

(в СИ формула пишется без  $c$ ). Единое объяснение бомовской диффузии, как и других видов отклонения от классического поведения, отсутствует. Такие

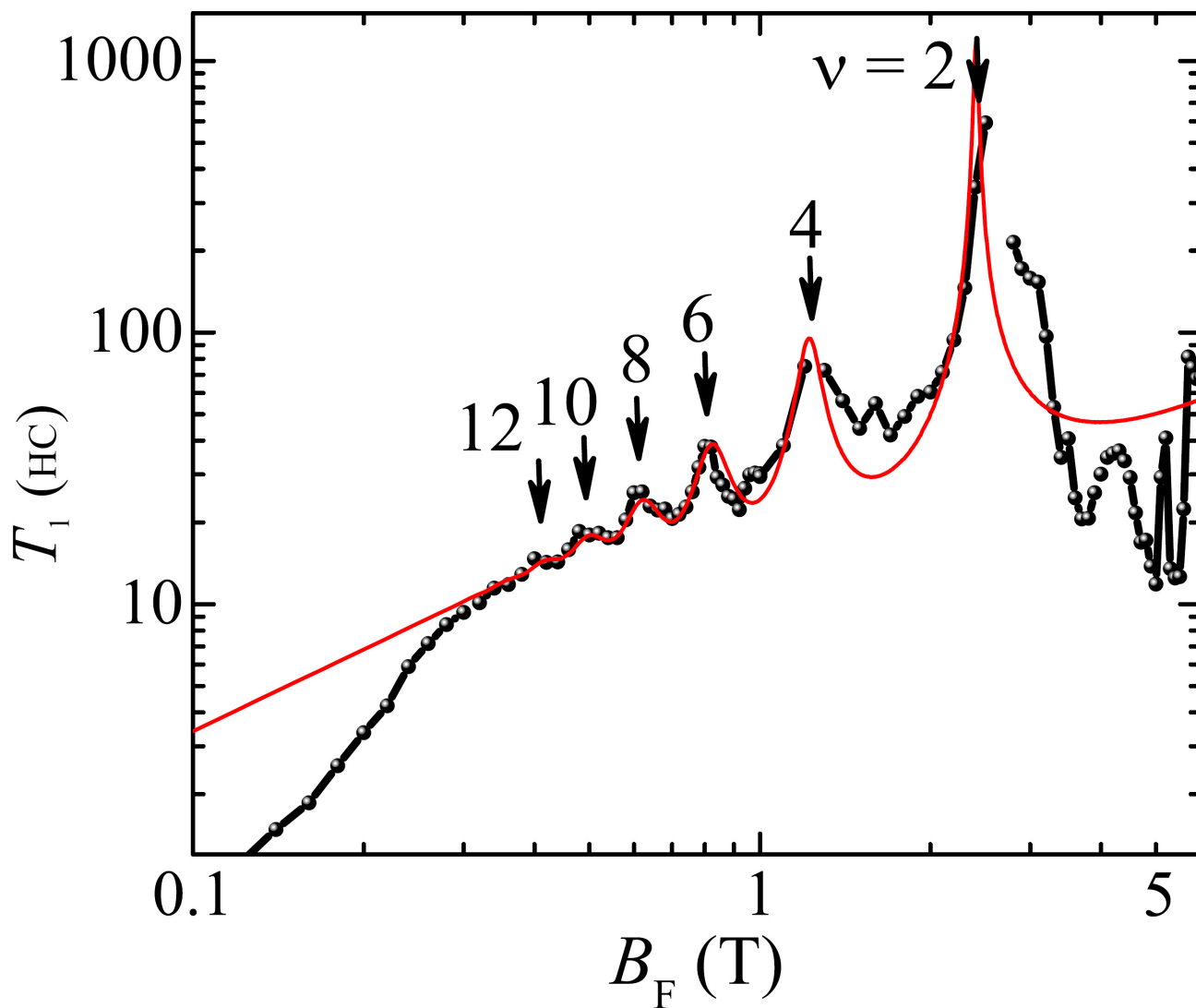


Рис. 8. Зависимость времени спиновой релаксации  $T_1$  от магнитного поля при  $T = 2$  К — экспериментальные данные (шары) и теоретическая кривая (сплошная линия) [A12].

отклонения обычно связываются с электромагнитными флуктуациями, турбулентностью, сильной связью и переходом от трёхмерной к двумерной ситуации [72, 139, 248, 283, 326, 331]. За пределами земных лабораторий аномальное поведение плазмы проявляется и в «космических лабораториях», таких как вращающиеся нейтронные звёзды, магнитные поля которых достигают  $10^{12}$ — $10^{15}$  Гс и делают их эффективными генераторами плотной релятивистской плазмы [186, A1]. Недавние наблюдения и моделирование показывают роль боровской диффузии в транспорте частиц высоких энергий в их окружении [234, 297].

В эксперименте наблюдается (см. рис. 9)

$$T_1 \propto \frac{B}{T}, \quad (532)$$

что, вместе с формулой (530), позволяет заключить, что коэффициент диффузии электрона ведёт себя подобно коэффициенту боровской диффузии. Подставляя выражение (531) в формулу (530), мы приходим ко времени спиновой релаксации в виде

$$T_1 \sim \tau_0 \frac{\hbar \omega_c}{k_B T} \frac{\rho_0}{\rho(\varepsilon_F)}, \quad (533)$$

где эффективное время

$$\tau_0 \sim \frac{m_e l_s^2}{\hbar} \sim 1 \text{ нс}, \quad (534)$$

подобно спиновой диффузионной длине, зависит только от характеристик образца. В выражении (533) учтена зависимость времени столкновений от плотности состояний  $\rho(\varepsilon_F)$  на уровне Ферми,

$$\tau_{\text{col}} = \tau_{\text{col}0} \frac{\rho_0}{\rho(\varepsilon_F)}, \quad (535)$$

где  $\tau_{\text{col}0}$  и

$$\rho_0 = \frac{m_e}{\pi \hbar^2} \quad (536)$$

— время столкновений и плотность состояний при малых магнитных полях [83]; по формуле (525) аналогичное соотношение верно и для времён спиновой релаксации. Это соотношение отражает пропорциональность вероятности перехода

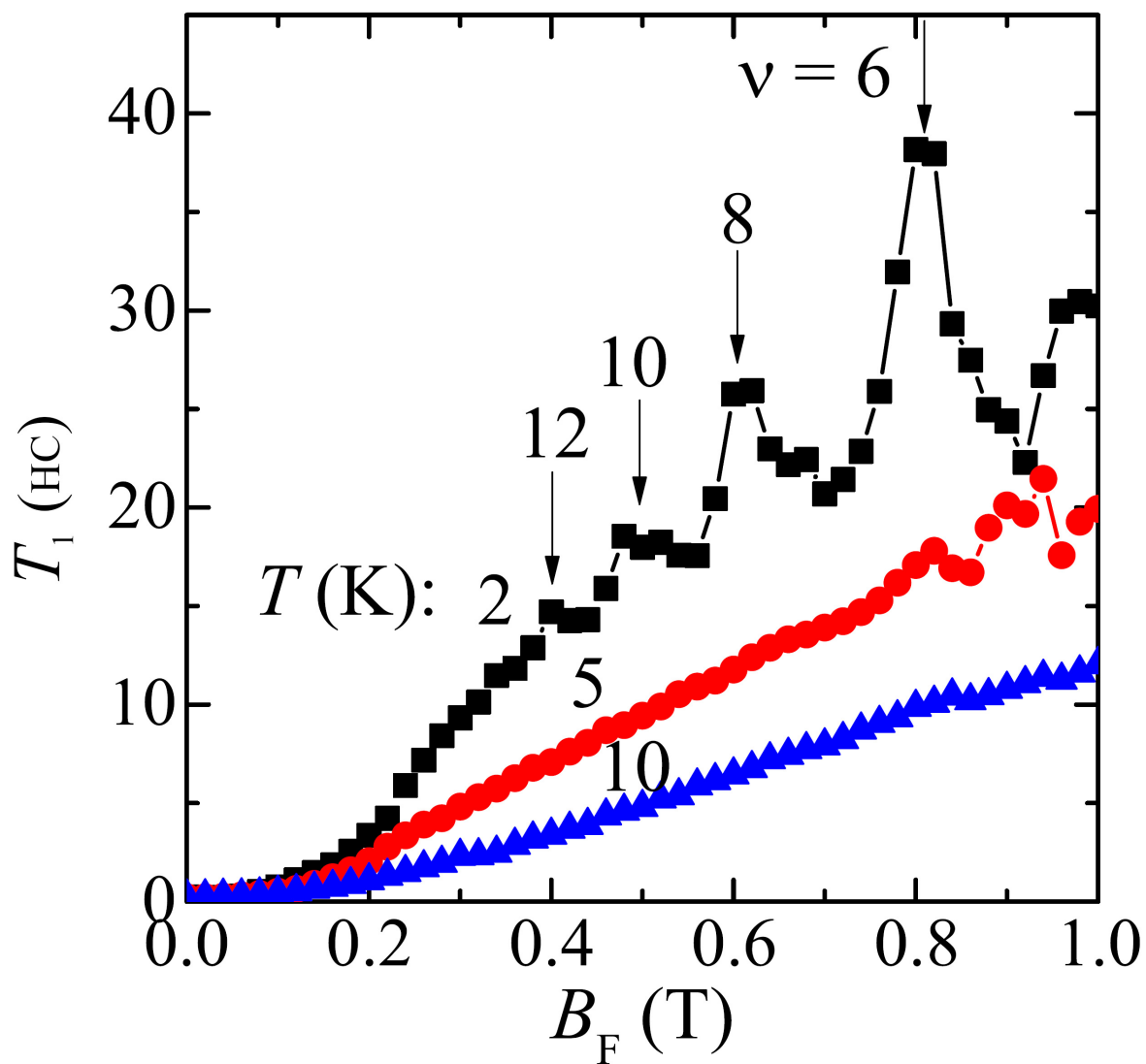


Рис. 9. Зависимость времени спиновой релаксации  $T_1$  от магнитного поля при различных температурах [A12].



плотности конечных состояний [238]. Для каждого отдельного уровня Ландау в  $\rho(\varepsilon)$  принимается гауссова форма уширения со стандартным отклонением

$$\sigma = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_{\text{th}}^2}. \quad (537)$$

Здесь [31, 301]

$$\sigma_0 \propto \sqrt{B}, \quad (538)$$

в то время как

$$\sigma_{\text{th}} \sim k_{\text{B}}T \quad (539)$$

учитывает конечную температуру и следует из идеи, что образец при низкой, но ненулевой температуре можно приближённо считать эквивалентным множеству образцов с энергиями Ферми, распределёнными вокруг энергии Ферми первоначального образца с плотностью вероятности  $-\partial f/\partial\varepsilon$ , где  $f$  — обычное распределение Ферми — Дирака [317].

На рис. 8 показано сравнение теоретической зависимости (533) и экспериментальных результатов. Хорошее совпадение наблюдается в диапазоне магнитных полей  $B = B_{\text{F}} > 0.3$  Т. Осцилляторная зависимость  $T_1$  от  $B$ , где максимумы  $T_1$  соответствуют чётным факторам заполнения  $\nu$  и минимумы — нечётным  $\nu$ , возникает из-за осцилляторной зависимости  $\rho(\varepsilon_{\text{F}})$ : при малых полях плотность состояний сводится к постоянной  $\rho_0$ , но при больших полях, когда расстояние между соседними уровнями Ландау становится больше ширины индивидуальных уровней, возникают осцилляции. В этом смысле наблюдаемый эффект подобен эффекту Шубникова — де-Гааза и квантовому эффекту Холла [111]. Нужно подчеркнуть, что коэффициент пропорциональности в линейной зависимости между  $B$  и  $T_1$  при малых полях, который определяет общую тенденцию наклона в формуле (533), не является свободным параметром модели, а связывается с характеристиками образца и температурой после выбора коэффициента диффузии в виде (531).

Таким образом, наблюдаемое поведение времени спиновой релаксации при магнитных полях выше 0.3 Т может быть признаком аномальной боровской диффузии двумерной электронной плазмы, а при магнитных полях ниже 0.3 Т аномальная диффузия переходит в обычную классическую диффузию [A12]. Наблюдение классического поведения при слабых полях и аномального поведения при сильных полях согласуется с предыдущими результатами по плазме [248, 282].

В обычной невырожденной тепловой плазме аномальную диффузию можно с некоторой свободой интерпретировать как максимально достижимую диффузию [330]. В режиме слабого рассеяния коэффициент диффузии  $D$  даётся формулой (526), в которой циклотронный радиус

$$r_c = \frac{v_{\text{th}}}{\omega_c} \quad (540)$$

определяется тепловой скоростью

$$v_{\text{th}} \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}. \quad (541)$$

В режиме сильного рассеяния, с другой стороны,

$$D \sim v_{\text{th}}^2 \tau_{\text{col}}, \quad (542)$$

а скорость диффузии достигает своего максимума при формальном аномальном времени столкновений

$$\tau_a \sim \frac{1}{\omega_c}, \quad (543)$$

которое соответствует переходу между двумя режимами рассеяния и для которого

$$D \sim \frac{v_{\text{th}}^2}{\omega_c} \quad (544)$$

становится равным боровскому значению (531). Однако мы имеем дело с сильно вырожденным электронным газом, и интересно оценить аномальное время

столкновений  $\tau_{\text{a deg}}$  в этом случае. Из равенства

$$\frac{D_{\text{B}}\rho(\varepsilon_{\text{F}})}{\rho_0} \sim \frac{r_{\text{c}}^2}{\tau_{\text{a deg}}} \quad (545)$$

получаем

$$\omega_{\text{c}}\tau_{\text{a deg}} \sim \frac{2n_{\text{s}}}{\rho(\varepsilon_{\text{F}})k_{\text{B}}T}. \quad (546)$$

В правой части мы видим отношение полного числа электронов к их числу, заключённому в температурном размытии распределения Ферми — Дирака около энергии Ферми, так что

$$\omega_{\text{c}}\tau_{\text{a deg}} \gg 1 \quad (547)$$

и, в отличие от невырожденной ситуации, боровская диффузия вырожденного электронного газа происходит в режиме слабого рассеяния. По-видимому, неравенство  $\tau_{\text{a deg}} \gg \tau_{\text{a}}$  отражает подавление одноэлектронной диффузии в результате уменьшения вероятности индивидуальных скачков из-за эффектов квантового вырождения. Аналогичная ситуация наблюдалась ранее в исследованиях спин-поляризованного транспорта в режиме блокады Паули [85, 86].

### 5.3 Резонансное спиновое усиление

Поведение системы спинов в магнитном поле весьма разнообразно и при определённых условиях может носить резонансный характер. Постоянное внешнее магнитное поле вызывает зеемановское расщепление спиновых подуровней, пропорциональное его напряжённости  $B$ , и этому расщеплению соответствует ларморовская частота прецессии спина  $f_{\text{L}} = \omega_{\text{L}}/2\pi$ . При дополнительном воздействии некоторого переменного магнитного поля, частота  $f_{\text{rf}}$  которого обыкновенно приходится на радиодиапазон, при условии

$$f_{\text{rf}} = f_{\text{L}} \quad (548)$$

в системе наблюдается резкое возрастание поглощения энергии — электронный спиновый резонанс (ЭСР), также называемый электронным парамагнитным резонансом [291]. Резонанса при этом можно добиться, не только работая в постоянном поле и меняя частоту переменного поля, но и наоборот — оставляя частоту переменного поля постоянной, но изменяя напряжённость постоянного поля, что важно при работе в микроволновом диапазоне [123]. Поглощаемое радиочастотное поле вызывает макроскопическую спиновую прецессию.

На систему в постоянном магнитном поле можно воздействовать и оптическим излучением [259]. Синхронное оптическое возбуждение системы последовательными лазерными импульсами, фаза прихода которых совпадает с фазой прецессии спина, приводит к эффекту резонансного спинового усиления (РСУ), когда наблюдаемая спиновая поляризация возрастает на порядок [207]. Условие такого резонанса имеет вид

$$f_L = n f_0, \quad (549)$$

где  $f_0$  — частота повторения импульсов, а  $n$  — целое число.

В данном разделе рассматривается ситуация, когда на спиновую систему в постоянном магнитном поле (в нашем случае  $n$ -легированный объёмный GaAs) воздействуют оба вида возбуждения — и радиочастотное и периодическое оптическое импульсное. Отдельное внимание уделяется исследованию области, когда одновременно удаётся достичь двух типов резонанса (548) и (549). Наблюдаемое поведение спина оказывается очень необычным и характеризуется начальной квадратичной зависимостью спиновой поляризации от величины амплитуды радиочастотного поля. Строится теория совместного РСУ-ЭСР резонанса, в которой с помощью единого аналитического выражения удаётся воспроизвести весь набор экспериментальных данных.

### 5.3.1 Теория совместного оптического и магнитного резонанса

Поведение полного электронного спина  $\mathbf{S}$  во внешнем магнитном поле при РСУ описывается неоднородным уравнением Блоха

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S} - \frac{\mathbf{S}}{\tau_s} + \Delta\mathbf{S}_0 \sum_n \delta(t - nT_0), \quad (550)$$

где  $\tau_s$  — время спиновой релаксации при малых  $B$  и

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_L + \boldsymbol{\Omega}_R \quad (551)$$

— угловая скорость спиновой прецессии, представляющая собой сумму постоянной компоненты

$$\boldsymbol{\omega}_L = \omega_L \mathbf{e}_x, \quad (552)$$

параллельной постоянному магнитному полю  $\mathbf{B}$ , где

$$\omega_L = \frac{g\mu_B B}{\hbar} \quad (553)$$

— ларморовская частота, и вращающейся компоненты

$$\boldsymbol{\Omega}_R = \Omega_R (\mathbf{e}_y \cos \phi + \mathbf{e}_z \sin \phi), \quad (554)$$

ортогональной ему, где

$$\Omega_R = \frac{g\mu_B b}{2\hbar} \quad (555)$$

— частота Раби,

$$\phi = \phi_0 + \omega_{\text{rf}} t \quad (556)$$

и

$$\omega_{\text{rf}} = 2\pi f_{\text{rf}} \operatorname{sgn} g. \quad (557)$$

Напомним, что экспериментальное осциллирующее радиочастотное магнитное поле представляет собой сумму двух полей, вращающихся в противоположных

направлениях с частотой  $\omega_{\text{rf}}$ , и противоположно вращающимся членом можно пренебречь, так как  $b \ll B$  [17]. Неоднородный член в уравнении (550) с дельта-функциями Дирака  $\delta(t - nT_0)$  описывает повторяющееся усиление  $z$ -компоненты спина последовательными эквидистантными лазерными импульсами, приходящими в моменты времени  $nT_0$ , на величину  $\Delta S_0$  за один импульс, так что

$$\Delta \mathbf{S}_0 = \mathbf{e}_z \Delta S_0. \quad (558)$$

Член с термически равновесным спином из уравнения (550) выброшен из-за больших конечных величин усиленного спина, достигаемых в эксперименте.

В промежутке между двумя соседними импульсами спин эволюционирует в соответствии с однородным уравнением Блоха, то есть уравнением (550) без последнего члена. Скалярное умножение данного уравнения на вектор  $\mathbf{S}$  приводит к исчезновению члена  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}$  и проявляет экспоненциальное затухание абсолютной величины спина,

$$S = se^{-t/\tau_s}, \quad (559)$$

поэтому естественно представить вектор спина в виде произведения

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}e^{-t/\tau_s}, \quad (560)$$

где векторная амплитуда  $\mathbf{s}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{s}, \quad (561)$$

что можно проверить, подставив формулу (560) в однородное уравнение Блоха. Уравнение (561) означает, что с течением времени изменяется только ориентация вектора  $\mathbf{s}$ , но не его абсолютная величина  $s$ . Итак, по формуле (560) спин вращается и одновременно затухает, пока не прибудет следующий лазерный импульс, а вращение полностью определяется угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ .

Текущая ориентация спина характеризуется единичным вектором  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(t) = \mathbf{s}/s$  и может быть получена из начальной ориентации спина  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(0)$

вращением вокруг некоторой единичной оси  $\zeta = \zeta(t)$  на некоторый угол  $\alpha = \alpha(t)$ , которое можно выразить так:

$$\mathbf{e} = \Lambda \circ \mathbf{e}_0 \circ \bar{\Lambda}, \quad (562)$$

где кватернион  $\Lambda$  имеет вид (182).

Знание временного поведения  $\Lambda = \Lambda(t)$  означает знание вращательной динамики спина, и последнюю можно найти из кватернионного определения угловой скорости (195). Проведения этих вычислений можно избежать и вместо этого провести аналогию с физической задачей, рассмотренной в предыдущем разделе и касающейся магнитного подавления спиновой релаксации в двумерном электронном газе [A12]. Напомним, что в той задаче спин отдельного электрона между двумя последовательными столкновениями эволюционирует по уравнению (561), в котором угловая скорость также имеет два члена — постоянный поперечный ларморовский вклад и вращающийся плоскостной вклад Дрессельхауса, который имеет иную физическую природу, но формально ведёт себя аналогично  $\Omega_R$ , за исключением направления вращения. Сравнивая две задачи, в результате записываем кватернион (182)

$$\Lambda = M \circ N, \quad (563)$$

где

$$M = e^{\omega_{\text{rf}} t/2}, \quad N = e^{\Omega_0 t/2}, \quad (564)$$

причём

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{rf}} = \omega_{\text{rf}} \mathbf{e}_x. \quad (565)$$

Вектор

$$\Omega_0 = \Omega(0) = -\Delta \omega_{\text{rf}} \mathbf{e}_x + \Omega_R \cos \phi_0 \mathbf{e}_y + \Omega_R \sin \phi_0 \mathbf{e}_z, \quad (566)$$

где

$$\Omega = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{\text{rf}}, \quad (567)$$

имеет абсолютное значение

$$\Omega = \sqrt{\Delta\omega_{\text{rf}}^2 + \Omega_{\text{R}}^2}, \quad (568)$$

где

$$\Delta\omega_{\text{rf}} = \omega_{\text{rf}} - \omega_{\text{L}} \quad (569)$$

— отстройка угловой частоты. Из формул (562) и (563) мы видим, что текущая ориентация спина получается из его первоначальной ориентации с помощью суперпозиции двух последовательных вращений вокруг неподвижных осей: первое вращение происходит вокруг оси  $\mathbf{\Omega}_0/\Omega$  на угол  $\Omega t$  и второе — вокруг оси  $\mathbf{e}_x$  на угол  $\omega_{\text{rf}}t$ .

Теперь можно вернуться к рассмотрению полной динамики и вычислить наблюдаемый спиновый сигнал. В методе спектроскопии «накачка — зондирование» спин (более точно, его  $z$ -компонента) измеряется и одновременно усиливается, но это происходит только в моменты прихода лазерных импульсов, когда спин изменяется на величину  $\Delta\mathbf{S}_0$ . Полагая, что измерение спина происходит прямо перед его усилением, можно связать спины в два соседних момента измерения,

$$\mathbf{S}_{n+1} = \Lambda_n \circ (\mathbf{S}_n + \Delta\mathbf{S}_0) \circ \bar{\Lambda}_n e^{-T_0/\tau_s}, \quad (570)$$

где  $\Lambda_n$  — кватернион, соответствующий вращению спина между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м импульсами. Соотношение (570) равным образом связывает  $\mathbf{S}_n$  и  $\mathbf{S}_{n-1}$ ,  $\mathbf{S}_{n-1}$  и  $\mathbf{S}_{n-2}$  и так далее, поэтому с помощью последовательных итераций получаем спин в некоторый момент его измерения (произвольно выбранный как  $t = 0$ ),

$$\mathbf{S}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \circ \Delta\mathbf{S}_0 \circ \bar{Q}_n e^{-nT_0/\tau_s}, \quad (571)$$

где

$$Q_n = \Lambda_{-1} \circ \dots \circ \Lambda_{-n} \quad (572)$$

— кватернион, задающий вращение, начинающееся в момент времени за  $n$  импульсов до измерения и заканчивающееся в момент измерения.



Каждый  $\Lambda_{-i}$ , входящий в формулу (572), соответствует вращению спина от  $-i$ -го до  $(-i + 1)$ -го импульса и определяется формулой (563), в которой нужно положить  $t = T_0$  и взять в качестве  $\Omega_0$  начальную ориентацию  $\Omega$  в момент времени  $-iT_0$ , что обозначается посредством

$$\Omega_{-i} = \Omega(-iT_0). \quad (573)$$

Вектор  $\Omega$  вращается вокруг  $\mathbf{e}_x$  с частотой  $\omega_{\text{rf}}$ , что по формуле (562) выражается как

$$\Omega = M \circ \Omega_0 \circ \bar{M}. \quad (574)$$

Следовательно,

$$\Omega_{-i} = \bar{M}_0^i \circ \Omega_0 \circ M_0^i, \quad (575)$$

где

$$M_0 = e^{\omega_{\text{rf}} T_0 / 2} \quad (576)$$

и через  $M^n$  обозначена  $n$ -я степень кватерниона  $M$ , то есть кватернионное произведение  $n$  одинаковых кватернионов,

$$M^n = M \circ \dots \circ M. \quad (577)$$

Тогда имеем

$$\Lambda_{-i} = M_0 \circ N_{-i}, \quad (578)$$

где по формуле (193)

$$N_{-i} = e^{\Omega_{-i} T_0 / 2} = \bar{M}_0^i \circ N_0 \circ M_0^i \quad (579)$$

и

$$N_0 = e^{\Omega_0 T_0 / 2}, \quad (580)$$

так что

$$\Lambda_{-i} = \bar{M}_0^{i-1} \circ N_0 \circ M_0^i. \quad (581)$$

Комбинируя формулы (572) и (581), получаем

$$Q_n = N_0 \circ M_0 \circ \bar{M}_0 \circ N_0 \circ M_0^2 \circ \bar{M}_0^2 \circ N_0 \circ M_0^3 \circ \dots \circ \bar{M}_0^{n-1} \circ N_0 \circ M_0^n \quad (582)$$

или окончательно

$$Q_n = N_0^n \circ M_0^n. \quad (583)$$

Из формул (562) и (583) мы видим, что  $Q_n$  описывает вращение  $\Delta S_0$ , первоначально ориентированного по  $\mathbf{e}_z$ , вокруг  $\mathbf{e}_x$  на угол  $n\omega_{\text{rf}}T_0$  и последующее вращение вокруг  $\mathbf{\Omega}_0/\Omega$  на угол  $n\Omega T_0$ .

Чтобы найти наблюдаемое значение  $S_z$ , нужно спроектировать выражение (571) на ось  $\mathbf{e}_z$ , что можно сделать с помощью формулы (188) или применяя тензор вращения [362]:

$$S_z = \Delta S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \cos n\omega_{\text{rf}}T_0 \cos n\Omega T_0 + \frac{\Delta\omega_{\text{rf}}}{\Omega} \sin n\omega_{\text{rf}}T_0 \sin n\Omega T_0 \right) - \frac{\Omega_{\text{R}}^2}{\Omega^2} (1 - \cos n\Omega T_0) \sin \phi_0 \sin(n\omega_{\text{rf}}T_0 - \phi_0) \right] e^{-nT_0/\tau_s}. \quad (584)$$

В эксперименте измеряется сигнал, усреднённый по  $\phi_0$ , более точно, разность

$$\langle \Delta S_z \rangle = \langle S_z \rangle_{b=0} - \langle S_z \rangle \quad (585)$$

между средним сигналом в присутствии,  $\langle S_z \rangle$ , и в отсутствие,  $\langle S_z \rangle_{b=0}$ , радиочастотного магнитного поля. Преобразуя произведения тригонометрических функций в выражении (584) в их суммы, усредняя по  $\phi_0$ , непосредственно суммируя получившиеся ряды с помощью формулы [4]

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-na} \cos nx = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{sh } a}{\text{ch } a - \cos x} - 1 \right) \quad (586)$$

и вычисляя и вычитая  $\langle S_z \rangle_{b=0}$ , мы приходим к окончательному выражению для наблюдаемого спектра ЭСР при РСУ [A13]:

$$\langle \Delta S_z \rangle = \frac{\Delta S_0}{8} \text{sh} \frac{T_0}{\tau_s} \left( \frac{4}{\text{ch } T_0/\tau_s - \cos \omega_{\text{L}}T_0} - \frac{2\Omega_{\text{R}}^2/\Omega^2}{\text{ch } T_0/\tau_s - \cos \omega_{\text{rf}}T_0} - \frac{(1 - \Delta\omega_{\text{rf}}/\Omega)^2}{\text{ch } T_0/\tau_s - \cos(\omega_{\text{rf}} + \Omega)T_0} - \frac{(1 + \Delta\omega_{\text{rf}}/\Omega)^2}{\text{ch } T_0/\tau_s - \cos(\omega_{\text{rf}} - \Omega)T_0} \right). \quad (587)$$

### 5.3.2 Сравнение с экспериментом

На рис. 10—13 показано сравнение теории с данными эксперимента. Видно хорошее согласие теоретической зависимости (587) и экспериментальных данных. Воспроизводится и эффект роста, уширения и расщепления спектра ЭСР в режиме чистого резонанса при РСА при росте напряжения, подаваемого на катушку (рис. 10), и эффект подавления квадратичного роста спиновой поляризации при больших напряжениях в случае полного резонанса (рис. 11), и изменение спектров при постоянной ларморовской частоте (рис. 12) или при постоянной частоте радиочастотного поля (рис. 13) при прохождении резонансной точки. Теория хорошо воспроизводит всю двумерную карту  $\Delta S_z(f_{\text{rf}}, f_L)$ , представленную на рис. 14, при этом время спиновой релаксации равно  $\tau_s = 200$  нс. Путём сравнения теории и эксперимента удаётся связать измеряемый сигнал фарадеевского вращения с изменением спиновой поляризации  $\Delta S_z$ , индуцированным радиочастотным полем, в единицах изменения спиновой поляризации  $\Delta S_0$ , вызываемого воздействием лазерного импульса, а также амплитуду радиочастотного поля  $b$  с амплитудой напряжения на катушке  $U_{\text{rf}}$  (рис. 11). Полученные связи были использованы для всех данных сразу и позволили воспроизвести экспериментальные зависимости единым аналитическим выражением (587).

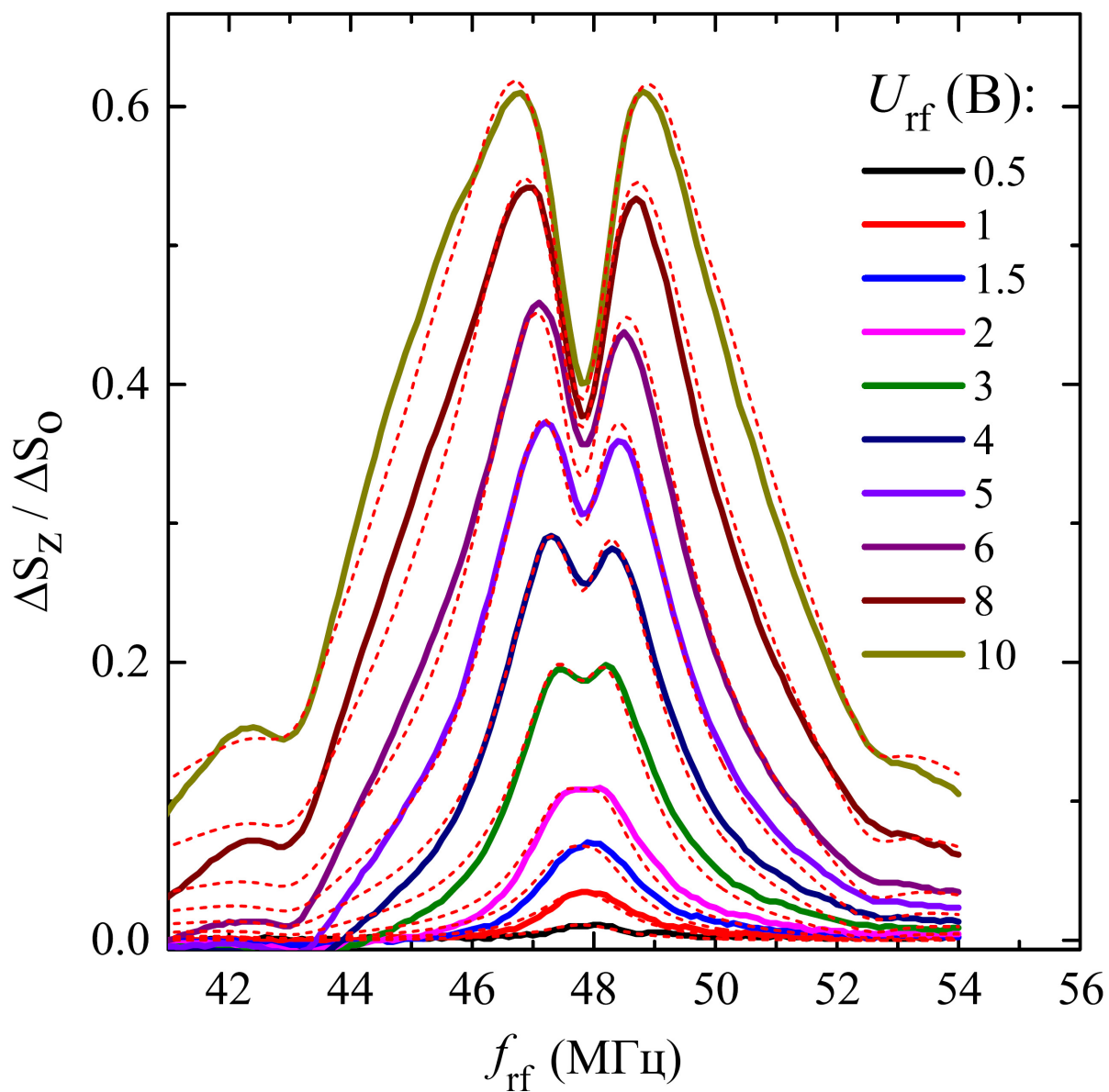


Рис. 10. Спектры ЭСР для различных амплитуд радиочастотного поля, параметризованного амплитудой  $U_{\text{rf}}$  переменного напряжения на катушке, при  $f_L = 10f_0 = 47.8$  МГц и  $T = 6$  К — экспериментальные данные (сплошные линии) и теоретические кривые (штриховые линии) [A13].

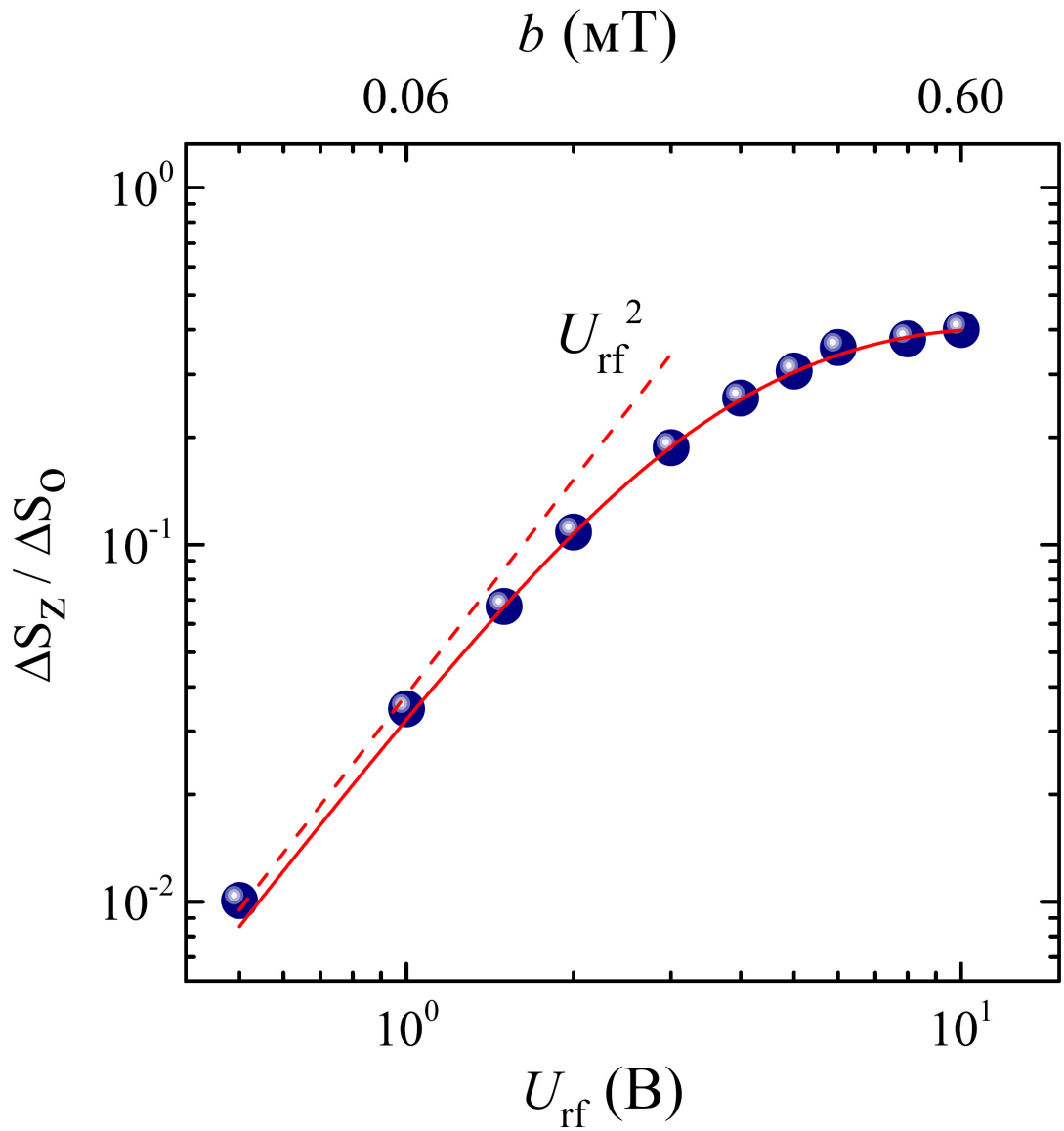


Рис. 11. Сигнал фарадеевского вращения как функция напряжения  $U_{\text{rf}}$  (нижняя ось) или амплитуды радиочастотного поля  $b$  (верхняя ось) в случае полного резонанса  $f_{\text{rf}} = f_{\text{L}} = 10f_0 = 47.8$  МГц — экспериментальные данные (шары) и теоретическая кривая (сплошная линия) [A13].

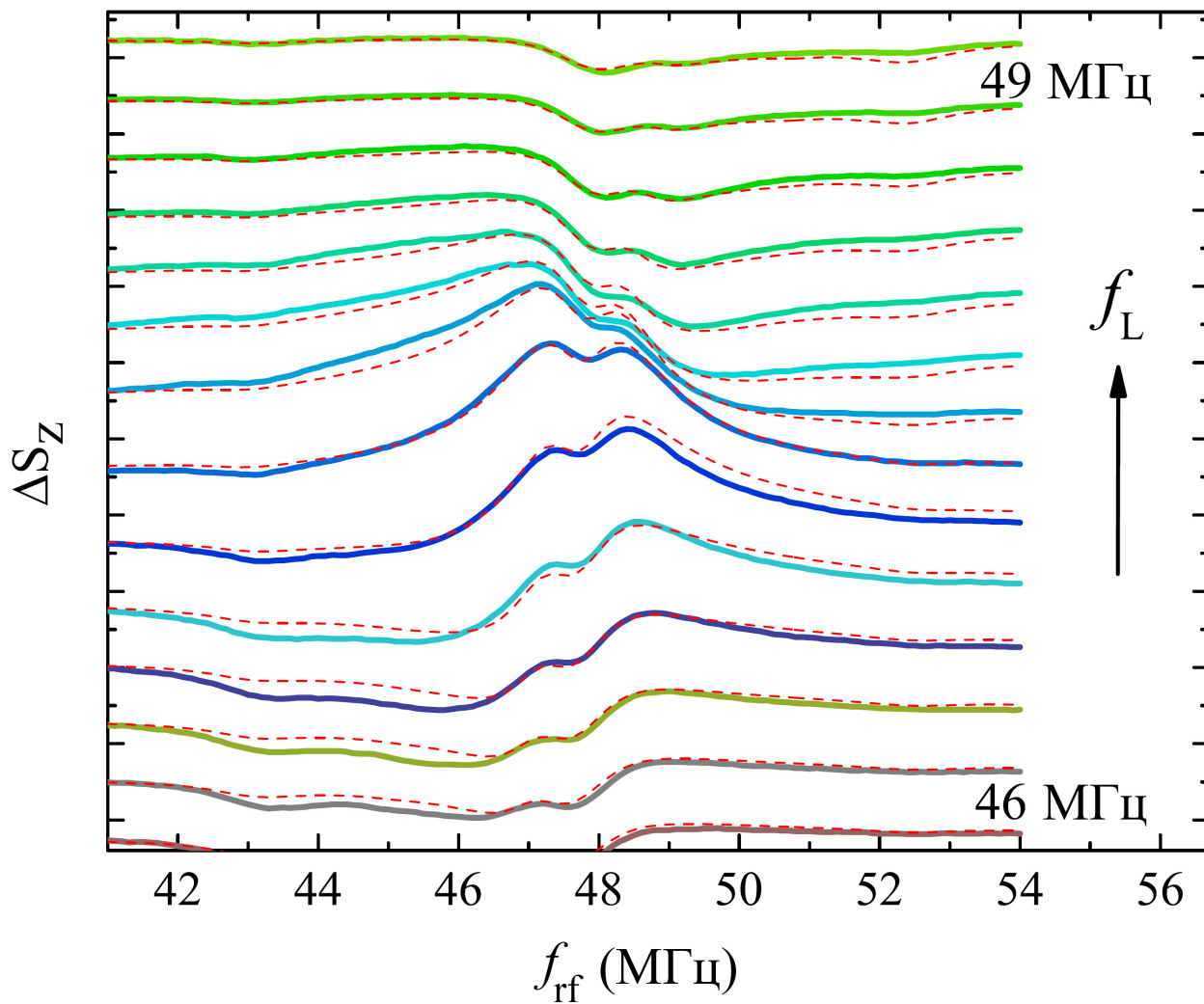


Рис. 12. Спектры ЭСР для различных значений ларморовской частоты при  $U_{\text{rf}} = 4$  В и  $T = 6$  К — экспериментальные данные (сплошные линии) и теоретические кривые (штриховые линии) [A13].

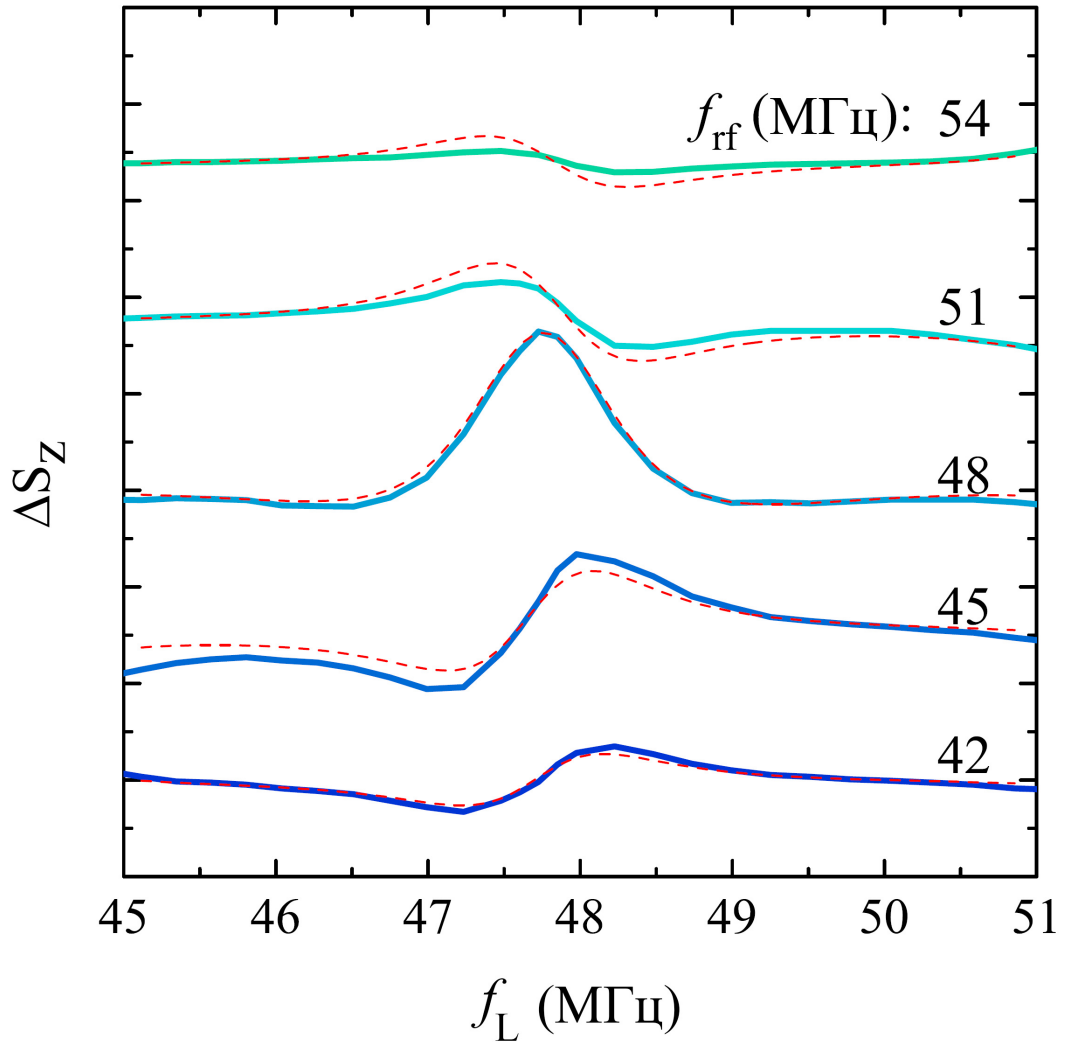


Рис. 13. Сигнал фарадеевского вращения как функция ларморовской частоты для различных частот радиочастотного поля — экспериментальные данные (сплошные линии) и теоретические кривые (штриховые линии). Используемые параметры те же, что и на рис. 12 [A13].

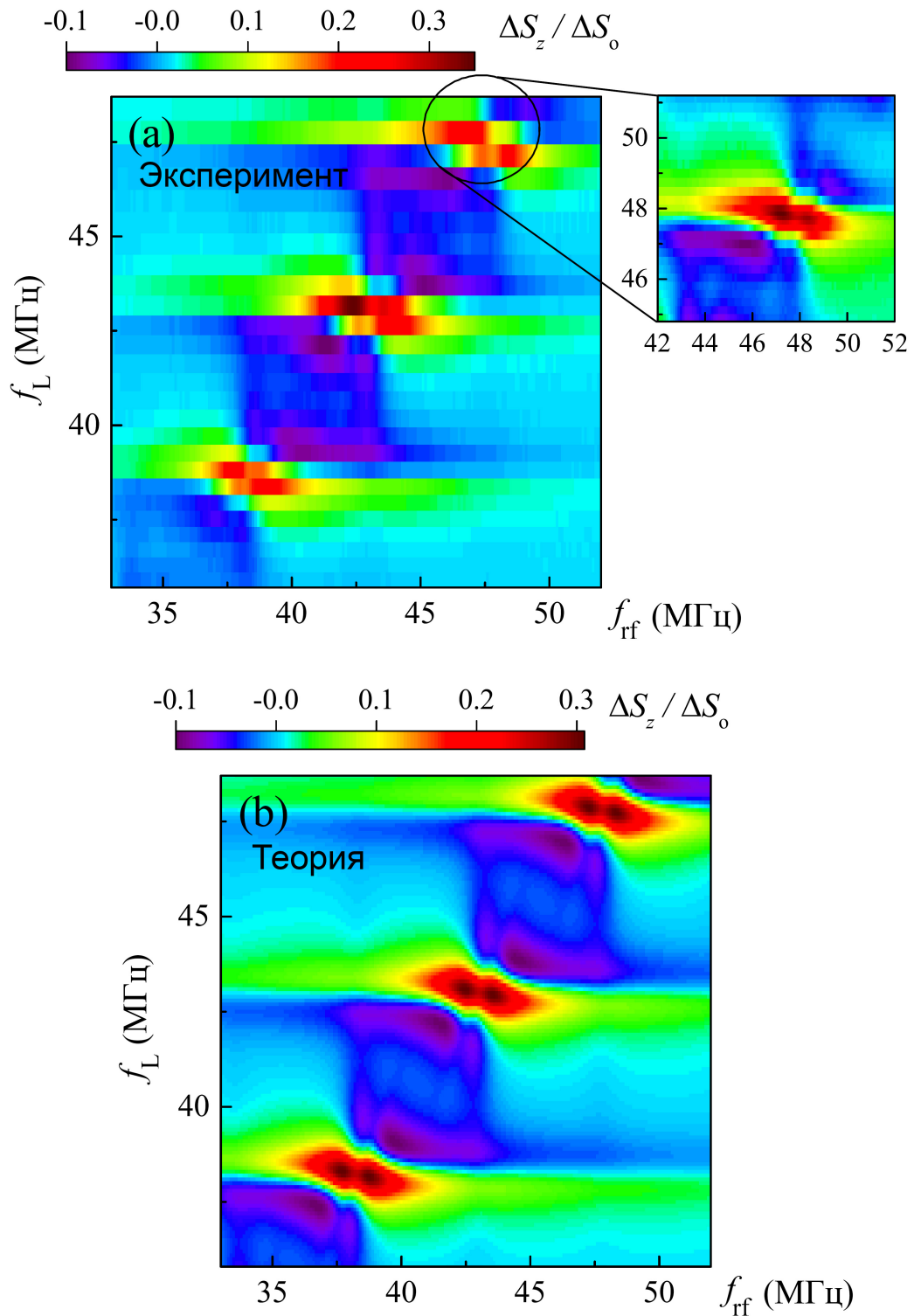


Рис. 14. Двумерная карта сигнала фарадеевского вращения как функция частоты радиочастотного поля  $f_{rf}$  и ларморовской частоты  $f_L$ . Рис. (a) — эксперимент, рис. (b) — теория. Используемые параметры те же, что и на рис. 12 [A13].



## 6 Заключение

1. Построено обобщение суперстатистики Бека — Коэна на случай формирования третьего уровня динамики системы в результате флуктуаций управляющего параметра, определяющего плотность энергетических состояний и распределение интенсивного параметра в суперстатистических подсистемах. В качестве систем, описываемых таким подходом, рассмотрены многочастичные системы с ветвящимися процессами. Каждая частица обладает случайным временем жизни и распадается на случайное число частиц нескольких типов, при этом учитывается зависимость характеристик происходящего распада от типа и возраста распадающейся частицы. Рассмотрено приложение теории к задаче о нестационарном рождении электрон-позитронных пар в магнитосфере нейтронной звезды, вычислено распределение частиц по энергиям и найдена доля полностью ускоренных частиц.

2. Показано, что источником позитронов в Галактике, отвечающим за аннигиляционную линию 511 кэВ и удовлетворяющим современным наблюдательным ограничениям, могут быть потухшие радиопульсары — старые нейтронные звёзды, которые когда-то были обыкновенными радиопульсарами. Энергия электронов и позитронов, возникающих в магнитосфере таких звёзд, значительно ниже, чем в магнитосфере действующих радиопульсаров. Сами звёзды могут обладать значительно большим периодом вращения по сравнению с действующими радиопульсарами, но их магнитное поле должно быть такого же порядка,

потому что в меньших магнитных полях однофотонное рождение пар становится неэффективным. Генерация позитронов происходит благодаря поглощению фотонов Галактического и внегалактического гамма-фона в магнитосфере потухшего радиопульсара.

3. Изучена внутренняя электродинамика нейтронной звезды. В случае вращающейся звезды скрутка магнитных силовых линий вызывает накопление зарядов и протекание токов, что говорит о возможной связи между изменением топологии внутреннего магнитного поля и наблюдаемой активностью нейтронных звёзд. Исследовано возникновение вынужденной прецессии нейтронной звезды за счёт индуцирования момента электромагнитных сил её собственным вращением. Рассмотрены эффекты момента сил и деформации и получены оценки на внутреннее магнитное поле через периоды вращения и прецессии, причём последний период соответствует наблюдаемой периодической модуляции повторяющейся активности FRB. Тем самым преодолены ранее существовавшие проблемы, возникающие при связывании радиовсплесков с магнитарами в свете ограничений, следующих из наблюдательных данных по излучению высоких энергий.

4. Исследована структура релятивистского джета в галактике M87. Наблюдения джета на частотах 1.6, 5 и 15 ГГц демонстрируют существование устойчивой трёхгорбой структуры поперечного профиля с не наблюдавшимся ранее сверхузким центральным пиком. Эта радиоструктура может отражать действительную структуру джета, на самом деле состоящего из двух вложенных соосных джетов. Разработана релятивистская магнитогидродинамическая модель, в которой внутренний джет помещён в полый внешний джет, и рассчитаны термодинамические, гидродинамические и электромагнитные параметры плазменного течения. Структура «джет в джете» может свидетельствовать об одновременной работе механизмов Блэндфорда — Знаека и Блэндфорда — Пейна.

5. Предложен новый способ определения параметра вращения центральной сверхмассивной чёрной дыры в галактике M87. Длительные наблюдения джета на частоте 43 ГГц свидетельствуют о том, что он испытывает поперечное квазипериодическое смещение с периодом от 8 до 10 лет. Описанное явление может отражать прецессию наклонённого аккреционного диска вокруг чёрной дыры, возникающую благодаря общерелятивистскому эффекту увлечения систем отсчёта. Исследован как случай прецессии пробных частиц, так и случай твердотельной прецессии аккреционного диска, рассмотрены различные значения массы центрального источника.

6. Изучены данные радионаблюдений M87 на частоте 43 ГГц, демонстрирующие постепенное релятивистское ускорение плазмы с линейной зависимостью лоренц-фактора от радиуса джета на субпарсековских масштабах. Проведён общий анализ интегралов движения и показано, что в джете имеется политропное уравнение состояния с показателем  $4/3$ . Данный результат не зависит от точной природы сил, поддерживающих поперечное равновесие джета, и является признаком существования на субпарсековских масштабах горячего потока вещества, когда имеется не только релятивистское объёмное движение плазмы как целого, но и релятивистское внутреннее термодинамическое движение частиц, составляющих плазму. Протекающий в джете продольный электрический ток, в общем случае не обязанный сохраняться при движении вдоль магнитной силовой трубки, оказывается точным интегралом движения, что говорит о существовании устойчивой электромагнитной структуры на рассматриваемых масштабах.

7. Исследована связь между кинетикой системы экситонных поляритонов в полупроводниковом микрорезонаторе и свойствами наблюдаемого излучения. С помощью квантового кинетического уравнения вычислены степени временной когерентности первого и второго порядка и рассчитан спектр излучения системы. Продемонстрирована аналогия между подсистемой невзаимодействи-

ющих поляритонов и хаотическим светом. Полученное соотношение для однородной ширины линии нижних поляритонных состояний верно для общего случая неравновесного экситонного резервуара и легло в основу нового метода определения временной динамики его температуры после возбуждения системы коротким лазерным импульсом.

8. Рассмотрено явление продольной спиновой релаксации двумерного электронного газа в квантовой яме во внешнем магнитном поле. При описании прецессии и нутации спина электрона учтено расщепление Зеемана и спин-орбитальное взаимодействие Дрессельхауса в полупроводниках типа цинковой обманки. Для осуществления релаксации спина необходимы столкновения, которые вызывают изменение фазы вращения электрона и смещение в пространстве его ведущего центра. Найдена зависимость времени спиновой релаксации от коэффициента пространственной диффузии электрона и характеристик образца. Исследование зависимости этого времени от магнитного поля обнаружило аномальное поведение двумерного электронного газа, аналогичное наблюдаемому в замагниченной плазме.

9. Построена теория совместного оптического и магнитного резонанса в объёмной спиновой системе. Эта система находится в постоянном внешнем магнитном поле и подвержена действию переменного радиочастотного магнитного поля и периодического импульсного оптического излучения. Двойной резонанс возникает, когда частота переменного поля совпадает с ларморовской частотой, в свою очередь кратной частоте оптического возбуждения системы. Такое комплексное воздействие даёт новый метод управления средней спиновой поляризацией системы. Вычислены резонансные и нерезонансные спектры спиновой поляризации и показано согласие теории и эксперимента.

В заключение отметим, что новые направления исследований, представленные в диссертации, получают своё дальнейшее развитие в работах других учёных. Так, направление по обобщённой суперстатистике и иерархическому

принципу максимума энтропии разрабатывается далее в работах [309, 345], где рассматривается случай иерархической системы с большим количеством разделённых пространственно-временных масштабов — так называемая *H*-теория. В работе [342] идеи обобщённой суперстатистики использовались при анализе финансовых временных рядов. Что касается результатов по нейтронным звёздам, то возможная причастность физических процессов, вызывающих радиовспышки вращающихся радиотранзиентов, к нагреву полярной шапки подтверждается совместными рентгеновскими и радионаблюдениями RRAT J1819-1458 [267]. Для объяснения быстрых радиовсплесков идея о молниях в магнитосфере нейтронной звезды использовалась в работе [202], о прецессии Лензе — Тирринга аккреционного диска и джета — в работе [203], а тестирование модели происхождения FRB от нейтронных звёзд, совершающих вынужденную прецессию, проведено в работе [204]. Наконец, в направлении по исследованиям чёрной дыры и релятивистского джета в галактике M87 идея о коаксиальной структуре джета использовалась в работе [144], а в дополнение к ранним наблюдениям, дающим магнитное поле  $\sim (50\text{--}124)$  Гс на основании джета [210], в 2021 г. появились результаты наблюдений поляризованного излучения Телескопа горизонта событий (ЕНТ) на частоте 230 ГГц [125], подтверждающие теоретические предсказания характеристик джета, изложенные в диссертации и предложенные в 2017 г. [A9]. Выведенные из наблюдений магнитное поле  $\sim (1\text{--}30)$  Гс, плотность электронов  $\sim 10^{4-7}$  см<sup>-3</sup> и их температура  $\sim (1\text{--}12) \times 10^{10}$  К согласуются со значениями поля  $\sim 80$  Гс, плотности протонов в диске  $\sim 2 \times 10^6$  см<sup>-3</sup> (соответствующей плотности электронов в силу электронейтральности) и температуры электронов  $\sim 10^{11}$  К. Кроме того, как оказалось, новым наблюдательным ограничениям удовлетворяют только магнитно-арестованные модели течений, что подтверждает предсказание автора 2018 г. о существовании вокруг чёрной дыры в галактике M87 магнитно-арестованного диска [A10]. Из работ, не вошедших в диссертацию, можно упомянуть работы по бозе-эйнштейн-

новской конденсации света [321, 322] и микрогидродинамике антипузырей [323]. Важность полученных результатов по флуктуациям конденсата фотонов в оптической микрополости отмечается в различных теоретических и экспериментальных работах [215, 250, 268, 278, 311], а на основе построенной теории коллапса антипузырька в дальнейшем было изучено стягивание воздушного слоя и воздушной нити в жидкости и с помощью численного моделирования подтверждено предсказанное автором в 2014 г. возникновение вихревой дорожки за ободком [115, 194].

## Список сокращений и условных обозначений

3C	Third Cambridge Catalogue, третий Кембриджский каталог
4U	Fourth Uhuru Catalog, четвёртый каталог Ухуру
ADAF	advection-dominated accretion flow, адвекционно-доминированное аккреционное течение
AGILE	Astorivelatore gamma ad immagini leggero, Лёгкий астрофизический гамма-телескоп
AGN	active galactic nucleus, активное галактическое ядро
CHIME	Canadian Hydrogen Intensity Mapping Experiment, Канадский эксперимент по отображению интенсивности линии водорода
EHT	Event Horizon Telescope, Телескоп горизонта событий
ESR, ЭСР	electron spin resonance, электронный спиновый резонанс
FRB	fast radio burst, быстрый радиовсплеск
год	365.25 дней, 31.5576 Мс
GaAs/AlGaAs	арсенид галлия/арсенид галлия и алюминия
$\gamma \rightarrow e^+e^-$	превращение гамма-кванта в позитрон и электрон
INTEGRAL	International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory, Международная астрофизическая гамма-обсерватория
ISCO	innermost stable circular orbit, последняя устойчивая круговая орбита
M87	галактика Мессье 87
MAD	magnetically arrested disc, магнитно-арестованный диск

MHD, МГД	magnetohydrodynamics, магнитогидродинамика
$M_{\odot}$	масса Солнца, $1.9891 \times 10^{33}$ г
NGC	New General Catalogue, Новый общий каталог
PSR	pulsar, пульсар
RIAF	radiatively inefficient accretion flow, радиационно-неэффективное аккреционное течение
RRAT	rotating radio transient, вращающийся радиотранзиент
RSA, РСУ	resonant spin amplification, резонансное спиновое усиление
SDSS	Sloan Digital Sky Survey, Слоуновский цифровой обзор неба
Swift	Стриж, многоволновая космическая обсерватория
Virgo	Дева
VLBA	Very Long Baseline Array, Антенная решётка со сверхдлинными базами
VLBI, РСДБ	Very Long Baseline Interferometry, радиоинтерферометрия со сверхдлинными базами
Ян	Янский, $10^{-26}$ Вт м <sup>-2</sup> Гц <sup>-1</sup> , $10^{-23}$ эрг с <sup>-1</sup> см <sup>-2</sup> Гц <sup>-1</sup>



## Список литературы

1. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. — Москва : Атомиздат, 1979. — 320 с.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. — Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 320 с. — (Механика космического полёта).
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — 5-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 560 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — Изд. 4-е, перераб. — Москва : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. — 1108 с.
5. Журавлёв В. Ф. Основы теоретической механики. — Изд. 2-е, перераб. — Москва : Физматлит, 2001. — 320 с.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — Изд. 7-е, испр. — Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 512 с. — (Теоретическая физика ; т. 2).
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. — Изд. 3-е, перераб. — Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 736 с. — (Теоретическая физика ; т. 6).
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — Изд. 2-е, перераб. и доп. Е. М. Лифшицем и Л. П. Питаевским. — Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 621 с. — (Теоретическая физика ; т. 8).
9. Маркеев А. П. Теоретическая механика. — Изд. 2-е, доп. — Ижевск : Ред. журн. «Регулярная и хаотическая динамика», Ижев. респ. тип., 1999. — 572 с.
10. Померанчук И. Я. К теории жидкого  $\text{He}^3$  // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1950. — Т. 20, вып. 10. — С. 919—926.
11. Abdo A. A., Allen B. T., Aune T., et al. Milagro observations of multi-TeV

- emission from Galactic sources in the Fermi Bright Source List // *Astrophysical Journal*. — 2006. — Vol. 700, No. 2. — P. L127—L131.
12. Abe S. Conditional approach to thermo-superstatistics // *Central European Journal of Physics*. — 2009. — Vol. 7, Iss. 3. — P. 401—404.
  13. Abe S. Fluctuations of entropy and log-normal superstatistics // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 82, Iss. 1. — Art. 011131.
  14. Abe S., Beck C., Cohen E. G. D. Superstatistics, thermodynamics, and fluctuations // *Physical Review E*. — 2007. — Vol. 76, Iss. 3. — Art. 031102.
  15. Abe S., Thurner S. Complex networks emerging from fluctuating random graphs: Analytic formula for the hidden variable distribution // *Physical Review E*. — 2005. — Vol. 72, Iss. 3. — Art. 036102.
  16. Abeysekara A. U., Albert A., Alfaro R., et al. Extended gamma-ray sources around pulsars constrain the origin of the positron flux at Earth // *Science*. — 2017. — Vol. 358, Iss. 6365. — P. 911—914.
  17. Abragam A. *The Principles of Nuclear Magnetism*. — Oxford : Clarendon, 1961. — 599 p. — (The International Series of Monographs on Physics / Gen. Eds. W. C. Marshall, D. H. Wilkinson).
  18. Abramowski A., Acero F., Aharonian F., et al. The 2010 very high energy  $\gamma$ -ray flare and 10 years of multi-wavelength observations of M 87 // *Astrophysical Journal*. — 2012. — Vol. 746, No. 2. — Art. 151.
  19. Abul-Magd A. Y. Superstatistics in random matrix theory // *Physica A*. — 2006. — Vol. 361, Iss. 1. — P. 41—54.
  20. Abul-Magd A. Y. Superstatistical random-matrix-theory approach to transition intensities in mixed systems // *Physical Review E*. — 2006. — Vol. 73, Iss. 5. — Art. 056119.
  21. Abul-Magd A. Y., Dietz B., Friedrich T., Richter A. Spectral fluctuations of billiards with mixed dynamics: From time series to superstatistics // *Physical Review E*. — 2008. — Vol. 77, Iss. 4. — Art. 046202.

22. Acciari V. A., Aliu E., Arlen T., et al. Radio imaging of the very-high-energy  $\gamma$ -ray emission region in the central engine of a radio galaxy // *Science*. — 2009. — Vol. 325, Iss. 5939. — P. 444—448.
23. Adams S. M., Kochanek C. S., Beacom J. F., Vagins M. R., Stanek K. Z. Observing the next Galactic supernova // *Astrophysical Journal*. — 2013. — Vol. 778, No. 2. — Art. 164.
24. Agaronyan F. A., Atoyán A. M. On the origin of the galactic annihilation radiation // *Soviet Astronomy Letters*. — 1981. — Vol. 7, No. 6. — P. 395—398.  
Агаронян Ф. А., Атоян А. М. К вопросу о происхождении галактического аннигиляционного излучения // *Письма в Астрономический журнал*. — 1981. — Т. 7, № 12. — С. 714—719.
25. Akemann G., Kieburg M., Mielke A., Prosen T. Universal signature from integrability to chaos in dissipative open quantum systems // *Physical Review Letters*. — 2019. — Vol. 123, Iss. 25. — Art. 254101.
26. Akgün T., Link B., Wasserman I. Precession of the isolated neutron star PSR B1828-11 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2006. — Vol. 365, Iss. 2. — P. 653—672.
27. Akiyama K., Lu R.-S., Fish V. L., et al. 230 GHz VLBI observations of M87: Event-horizon-scale structure during an enhanced very-high-energy  $\gamma$ -ray state in 2012 // *Astrophysical Journal*. — 2015. — Vol. 807, No. 2. — Art. 150.
28. Alfvén, H., Fälthammar, C.-G. *Cosmical Electrodynamics : Fundamental Principles*. — 2nd ed. — Oxford : Clarendon, 1963. — 230 p.
29. Allegrini P., Barbi F., Grigolini P., Paradisi P. Renewal, modulation, and superstatistics in times series // *Physical Review E*. — 2006. — Vol. 73, Iss. 4. — Art. 046136.
30. Amo A., Liew T. C. H., Adrados C., Houdré R., Giacobino E., Kavokin A. V., Bramati A. Exciton-polariton spin switches // *Nature Photonics*. — 2010. — Vol. 4. — P. 361—366.

31. Ando T., Uemura Y. Theory of quantum transport in a two-dimensional electron system under magnetic fields. I. Characteristics of level broadening and transport under strong fields // *Journal of the Physical Society of Japan*. — 1974. — Vol. 36, No. 4. — P. 959—967.
32. Anteneodo C., Duarte Queirós S. M. Superpositions of probability distributions // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. — 2009. — Vol. 2009. — Art. P10023.
33. Appl S., Camenzind M. The structure of relativistic MHD jets: a solution to the nonlinear Grad-Shafranov equation // *Astronomy and Astrophysics*. — 1993. — Vol. 274, Iss. 3. — P. 699—706.
34. Arnett W. D., Schramm D. N., Truran J. W. On relative supernova rates and nucleosynthesis roles // *Astrophysical Journal*. — 1989. — Vol. 339, No. 1. — P. L25—L27.
35. Asada K., Nakamura M. The structure of the M87 jet: A transition from parabolic to conical streamlines // *Astrophysical Journal Letters*. — 2012. — Vol. 745, No. 2. — Art. L28.
36. Asada K., Nakamura M., Doi A., Nagai H., Inoue M. Discovery of sub- to superluminal motions in the M87 jet: An implication of acceleration from sub-relativistic to relativistic speeds // *Astrophysical Journal Letters*. — 2014. — Vol. 781, No. 1. — Art. L2.
37. Asada K., Nakamura M., Pu H. Y. Indication of the black hole powered jet in M87 by VSOP observations // *Astrophysical Journal*. — 2016. — Vol. 833, No. 1. — Art. 56.
38. Asgarani S., Mirza B. Probability distribution of (Schwämmle and Tsallis) two-parameter entropies and the Lambert  $W$ -function // *Physica A*. — 2008. — Vol. 387, Iss. 25. — P. 6277—6283.
39. Athreya K. B., Kaplan N. Convergence of the age distribution in the one-dimensional supercritical age-dependent branching process // *Annals of Probability*.

— 1976. — Vol. 4, No. 1. — P. 38—50.

40. Ausloos M., Ivanova K. Dynamical model and nonextensive statistical mechanics of a market index on large time windows // *Physical Review E*. — 2003. — Vol. 68, Iss. 4. — Art. 046122.

41. Avachat S. S., Perlman E. S., Adams S. C., Cara M., Owen F., Sparks W. B., Georganopoulos M. Multi-wavelength polarimetry and spectral study of the M87 jet during 2002-2008 // *Astrophysical Journal*. — 2016. — Vol. 832, No. 1. — Art. 3.

42. Baes M., Clemens M., Xilouris E. M., et al. The Herschel Virgo Cluster Survey. VI. The far-infrared view of M 87\* // *Astronomy and Astrophysics*. — 2010. — Vol. 518. — Art. L53.

43. Baiesi M., Paczuski M., Stella A. L. Intensity thresholds and the statistics of the temporal occurrence of solar flares // *Physical Review Letters*. — 2006. — Vol. 96, Iss. 5. — Art. 051103.

44. Ballarini D., de Giorgi M., Cancellieri E., Houdré R., Giacobino E., Cingolani R., Bramati A., Gigli G., Sanvitto D. All-optical polariton transistor // *Nature Communications*. — 2013. — Vol. 4. — Art. 1778.

45. Bannister K. W., Deller A. T., Phillips C., et al. A single fast radio burst localized to a massive galaxy at cosmological distance // *Science*. — 2019. — Vol. 365, Iss. 6453. — P. 565—570.

46. Bardeen J. M., Press W. H., Teukolsky S. A. Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation // *Astrophysical Journal*. — 1972. — Vol. 178, No. 2. — P. 347—369.

47. Bashkirov A. G., Sukhanov A. D. The distribution function for a subsystem experiencing temperature fluctuations // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 2002. — Vol. 95, Iss. 3. — P. 440—446.

Башкиров А. Г., Суханов А. Д. Функция распределения для подсистемы, испытывающей флуктуации температуры // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2002. — Т. 122, вып. 3 (9). — С. 513—520.

48. Beacom J. F., Yüksel H. Stringent constraint on Galactic positron production // *Physical Review Letters*. — 2006. — Vol. 97, Iss. 7. — Art. 071102.
49. Beck C. Dynamical foundations of nonextensive statistical mechanics // *Physical Review Letters*. — 2001. — Vol. 87, Iss. 18. — Art. 180601.
50. Beck C. Generalized statistical mechanics of cosmic rays // *Physica A*. — 2004. — Vol. 331, Iss. 1–2. — P. 173–181.
51. Beck C. Statistics of three-dimensional Lagrangian turbulence // *Physical Review Letters*. — 2007. — Vol. 98, Iss. 6. — Art. 064502.
52. Beck C. Superstatistics in high-energy physics : Application to cosmic ray energy spectra and  $e^+e^-$  annihilation // *European Physical Journal A*. — 2009. — Vol. 40, Iss. 3. — P. 267–273.
53. Beck C., Cohen E. G. D. Superstatistics // *Physica A*. — 2003. — Vol. 322. — P. 267–275.
54. Beck C., Cohen E. G. D., Swinney H. L. From time series to superstatistics // *Physical Review E*. — 2005. — Vol. 72, Iss. 5. — Art. 056133.
55. Beniamini P., Wadiasingh Z., Metzger B. D. Periodicity in recurrent fast radio bursts and the origin of ultralong period magnetars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2020. — Vol. 496, Iss. 3. — P. 3390–3401.
56. Bercher J.-F. Maximum entropy with fluctuating constraints: The example of K-distributions // *Physics Letters A*. — 2008. — Vol. 372, Iss. 24. — P. 4361–4363.
57. Beskin V. S. Radio pulsars // *Physics-Uspekhi*. — 1999. — Vol. 42, No. 11. — P. 1071–1098.
- Бескин В. С. Радиопульсары // *Успехи физических наук*. — 1999. — Т. 169, № 11. — С. 1169–1198.
58. Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin Ya. N. Spin-down of pulsars by the current: comparison of theory with observations // *Astrophysics and Space Science*. — 1984. — Vol. 102, Iss. 2. — P. 301–326.
59. Beskin V. S., Gurevich A. V., Istomin Ya. N. Physics of the Pulsar

Magnetosphere. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1993. — 408 p.

60. Beskin V. S., Nokhrina E. E. On the central core in MHD winds and jets // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2009. — Vol. 397, Iss. 3. — P. 1486—1497.

61. Beskin V. S., Zheltoukhov A. A. Anomalous torque applied to a rotating magnetized sphere in a vacuum // Physics-Uspekhi. — 2014. — Vol. 57, No. 8. — P. 799—806.

Бескин В. С., Желтоухов А. А. Аномальный момент сил, действующий на вращающийся намагниченный шар в вакууме // Успехи физических наук. — 2014. — Т. 184, № 8. — С. 865—873.

62. Bhattacharya D., Srinivasan G. The evolution of neutron star magnetic fields // Neutron Stars: Theory and Observation / ed. by J. Ventura and D. Pines. — Dordrecht : Springer Science, 1991. — P. 219—233. — (NATO ASI Series. Series C: Mathematical and Physical Sciences ; Vol. 344).

63. Bird J. C., de Ruiter R., Courbin L., Stone H. A. Daughter bubble cascades produced by folding of ruptured thin films // Nature (London). — 2010. — Vol. 465, No. 7299. — P. 759—762.

64. Blakeslee J. P., Jordán A., Mei S., Côté P., Ferrarese L., Infante L., Peng E. W., Tonry J. L., West M. J. The ACS Fornax cluster survey. V. Measurement and recalibration of surface brightness fluctuations and a precise value of the Fornax-Virgo relative distance // Astrophysical Journal. — 2009. — Vol. 694, No. 1. — P. 556—572.

65. Blandford R. D. Accretion disc electrodynamics — a model for double radio sources // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1976. — Vol. 176, Iss. 3. — P. 465—481.

66. Blandford R. D., Payne D. G. Hydromagnetic flows from accretion disks and the production of radio jets // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1977. — Vol. 199, Iss. 4. — P. 883—903.

67. Blandford R. D., Znajek R. L. Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1977. — Vol. 179, Iss. 3. — P. 433—456.
68. Bohm D. Qualitative description of the arc plasma in a magnetic field // The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields / Ed. by A. Guthrie and R. Wakerling. — New York : McGraw-Hill, 1949. — Chap. 1. — P. 1—12.
69. Bohm D., Burhop E. H. S., Massey H. S. W. The use of probes for plasma exploration in strong magnetic fields // The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields / Ed. by A. Guthrie and R. Wakerling. — New York : McGraw-Hill, 1949. — Chap. 2. — P. 13—76.
70. Bohm D., Burhop E. H. S., Massey H. S. W., Williams R. W. A study of the arc plasma // The Characteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields / Ed. by A. Guthrie and R. Wakerling. — New York : McGraw-Hill, 1949. — Chap. 9. — P. 173—333.
71. Braithwaite J. Axisymmetric magnetic fields in stars: relative strengths of poloidal and toroidal components // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2009. — Vol. 397, Iss. 2. — P. 763—774.
72. Braginskii S. I. Transport processes in a plasma // Reviews of Plasma Physics. Vol. 1 / Ed. by M. A. Leontovich. — New York : Consultants Bureau, 1965. — P. 205—311.
- Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 1 / Под. ред. М. А. Леонтовича. — М. : Госатомиздат, 1963. — С. 183—272.
73. Braithwaite J., Nordlund Å. Stable magnetic fields in stellar interiors // Astronomy and Astrophysics. — 2006. — Vol. 450, Iss. 3. — P. 1077—1095.
74. Braithwaite J., Spruit H. C. A fossil origin for the magnetic field in A stars and white dwarfs // Nature (London). — 2004. — Vol. 431, No. 7010. — P. 819—821.
75. Briggs K., Beck C. Modelling train delays with  $q$ -exponential functions // Physica A. — 2007. — Vol. 378, Iss. 2. — P. 498—504.



76. Britzen S., Fendt C., Eckart A., Karas V. A new view on the M 87 jet origin: Turbulent loading leading to large-scale episodic wiggling // *Astronomy and Astrophysics*. — 2017. — Vol. 601. — Art. A52.
77. Broderick A. E., Narayan R., Kormendy J., Perlman E. S., Rieke M. J., Doeleman S. S. The event horizon of M87 // *Astrophysical Journal*. — 2015. — Vol. 805, No. 2. — Art. 179.
78. Bruk Yu. M. Crystalline nuclei and the Pomeranchuk effect in neutron stars // *Astrophysics*. — 1975. — Vol. 11, Iss. 1. — P. 62—68.
- Брук Ю. М. Кристаллические ядра и эффект Померанчука в нейтронных звёздах // *Астрофизика*. — 1975. — Т. 11, № 1. — С. 97—108.
79. Bruk Ju. M., Kugel K. I. The melting of neutron stars' crystalline cores and gamma-ray bursts // *Astrophysics and Space Science*. — 1976. — Vol. 39, Iss. 1. — P. 243—249.
80. Bruk Yu. M., Kugel' K. I. Some consequences of phase transitions in neutron stars // *Astrophysics*. — 1976. — Vol. 12, Iss. 2. — P. 217—228.
- Брук Ю. М., Кугель К. И. Некоторые следствия фазовых переходов в веществе нейтронных звёзд // *Астрофизика*. — 1976. — Т. 12, № 2. — С. 351—370.
81. Bruk Yu. M., Kugel' K. I. Low-temperature peculiarities in the melting curves of Fermi crystals, and their implications for neutron stars // *Soviet Astronomy*. — 1977. — Vol. 21, No. 1. — P. 57—60.
- Брук Ю. М., Кугель К. И. Низкотемпературные особенности на кривых плавления фермиевских кристаллов и их следствия для нейтронных звёзд // *Астрономический журнал*. — 1977. — Т. 54, № 1. — С. 101—106.
82. Burke-Spolaor S., Bailes M. The millisecond radio sky: transients from a blind single-pulse search // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2010. — Vol. 402, Iss. 2. — P. 855—866.
83. Burkov A. A., Balents L. Spin relaxation in a two-dimensional electron gas in a perpendicular magnetic field // *Physical Review B*. — 2004. — Vol. 69, Iss. 24. —

Art. 245312.

84. Bychkov Yu. A., Rashba E. I. Oscillatory effects and the magnetic susceptibility of carriers in inversion layers // Journal of Physics C. — 1984. — Vol. 17, No. 33. — P. 6039—6045.

85. Cadiz F., Paget D., Rowe A. C. H. Effect of Pauli blockade on spin-dependent diffusion in a degenerate electron gas // Physical Review Letters. — 2013. — Vol. 111, Iss. 24. — Art. 246601.

86. Cadiz F., Paget D., Rowe A. C. H., Amand T., Barate P., Arscott S. Effect of the Pauli principle on photoelectron spin transport in  $p^+$  GaAs // Physical Review B. — 2015. — Vol. 91, Iss. 16. — Art. 165203.

87. Cao X. The launching condition of a jet driven by the magnetic field and radiation pressure of an accretion disc // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2012. — Vol. 426, Iss. 4. — P. 2813—2818.

88. Caraveo P. A. Gamma-ray pulsar revolution // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 2014. — Vol. 52. — P. 211—250.

89. Carmichael H. An Open Systems Approach to Quantum Optics. — Berlin : Springer, 1993. — 179 p.

90. Chantis A. N., van Schilfgaarde M., Kotani T. *Ab initio* prediction of conduction band spin splitting in zinc blende semiconductors // Physical Review Letters. — 2006. — Vol. 96, Iss. 8. — Art. 086405.

91. Chattopadhyay I., Ryu D. Effects of fluid composition on spherical flows around black holes // Astrophysical Journal. — 2009. — Vol. 694, No. 1. — P. 492—501.

92. Chawla P., Andersen B. C., Bhardwaj M., et al. Detection of repeating FRB 180916.J0158+65 down to frequencies of 300 MHz // Astrophysical Journal. — 2020. — Vol. 896, No. 2. — Art. L41.

93. Chernoff D. F., Li S. Y., Tye S.-H. H. Periodic fast radio bursts from axion emission by cosmic superstrings // 2020. — arXiv:2003.07275.

94. CHIME/FRB Collaboration. CHIME/FRB discovery of eight new repeating

- fast radio burst sources / B. C. Andersen, K. Bandura, M. Bhardwaj, et al. // *Astrophysical Journal Letters*. — 2019. — Vol. 885, No. 1. — Art. L24.
95. CHIME/FRB Collaboration. Periodic activity from a fast radio burst source / M. Amiri, B. C. Andersen, K. M. Bandura, et al. // *Nature (London)*. — 2020. — Vol. 582, No. 7812. — P. 351—355.
96. Chiueh T., Li Z.-Y., Begelman M. C. Asymptotic structure of hydromagnetically driven relativistic winds // *Astrophysical Journal*. — 1991. — Vol. 377, No. 2. — P. 462—466.
97. Choi E., Wiita P. J. A multidimensional relativistic hydrodynamic code with a general equation of state // *Astrophysical Journal, Supplement Series*. — 2010. — Vol. 191, No. 1. — P. 113—123.
98. Ciolfi R., Lander S. K., Manca G. M., Rezzolla L. Instability-driven evolution of poloidal magnetic fields in relativistic stars // *Astrophysical Journal Letters*. — 2011. — Vol. 736, No. 1. — Art. L6.
99. Ciolfi R., Rezzolla L. Twisted-torus configurations with large toroidal magnetic fields in relativistic stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. — 2013. — Vol. 435, Iss. 1. — P. L43—L47.
100. Colgate S. A., Fowler T. K., Li H., Hooper E. B., McClenaghan J., Lin Z. Quasi-static model of magnetically collimated jets and radio lobes. II. Jet structure and stability // *Astrophysical Journal*. — 2015. — Vol. 813, No. 2. — Art. 136.
101. Comaron P., Dagvadorj G., Zamora A., Carusotto I., Proukakis N. P., Szymańska M. H. Dynamical critical exponents in driven-dissipative quantum systems // *Physical Review Letters*. — 2018. — Vol. 121, Iss. 9. — Art. 095302.
102. Connor L., Miller M. C., Gardenier D. W. Beaming as an explanation of the repetition/width relation in FRBs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2020. — Vol. 497, Iss. 3. — P. 3076—3082.
103. Cordes J. M., Chatterjee S. Fast radio bursts: an extragalactic enigma // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. — 2019. — Vol. 57. — P. 417—465.

104. Crocker R. M., Ruiter A. J., Seitzzahl I. R., Panther F. H., Sim S., Baumgardt H., Möller A., Nataf D. M., Ferrario L., Eldridge J. J., White M., Tucker B. E., Aharonian F. Diffuse Galactic antimatter from faint thermonuclear supernovae in old stellar populations // *Nature Astronomy*. — 2017. — Vol. 1, No. 6. — Art. 0135.
105. Crooks G. E. Beyond Boltzmann-Gibbs statistics: Maximum entropy hyperensembles out of equilibrium // *Physical Review E*. — 2007. — Vol. 75, Iss. 4. — Art. 041119.
106. Cummings A. W., Dubois S. M.-M., Charlier J.-C., Roche S. Universal spin diffusion length in polycrystalline graphene // *Nano Letters*. — 2019. — Vol. 19, Iss. 10. — P. 7418—7426.
107. Curtis H. D. Descriptions of 762 nebulae and clusters photographed with the Crossley Reflector // *Publications of the Lick Observatory*. — 1918. — Vol. 13, Pt. 1. — P. 9—42.
108. Cutler C. Gravitational waves from neutron stars with large toroidal  $B$  fields // *Physical Review D*. — 2002. — Vol. 66, Iss. 8. — Art. 084025.
109. Dai Z. G., Zhong S. Q. Periodic fast radio bursts as a probe of extragalactic asteroid belts // *Astrophysical Journal Letters*. — 2020. — Vol. 895, No. 1. — Art. L1.
110. Daniels K. E., Beck C., Bodenschatz E. Defect turbulence and generalized statistical mechanics // *Physica D*. — 2004. — Vol. 193, Iss. 1—4. — P. 208—217.
111. Datta S. *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1995. — 377 p. — (Cambridge Studies in Semiconductor Physics and Microelectronic Engineering / Ed. by H. Ahmed, M. Pepper, A. Broers ; 3).
112. Davis L., Goldstein M. Magnetic-dipole alignment in pulsars // *Astrophysical Journal*. — 1970. — Vol. 159, No. 2. — P. L81—L85.
113. De Falco V., Motta S. Polynomial approximation of the Lense-Thirring rigid precession frequency // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2018. — Vol. 476, Iss. 2. — P. 2040—2044.

114. Deibel A. T., Steiner A. W., Brown E. F. Magnetar giant flare oscillations and the nuclear symmetry energy // *Physical Review C*. — 2014. — Vol. 90, Iss. 2. — Art. 025802.
115. Deng P., Jian Z., Thoraval M.-J. Air filament contraction // *Physics of Fluids*. — 2021. — Vol. 33, Iss. 5. — Art. 051702.
116. Diehl R., Halloin H., Kretschmer K., Lichti G. G., Schönfelder V., Strong A. W., von Kienlin A., Wang W., Jean P., Knödlseher J., Roques J.-P., Weidenspointner G., Schanne S., Hartmann D. H., Winkler C., Wunderer C. Radioactive  $^{26}\text{Al}$  from massive stars in the Galaxy // *Nature (London)*. — 2006. — Vol. 439, No. 7072. — P. 45—47.
117. Doeleman S. S., Fish V. L., Schenck D. E., et al. Jet-launching structure resolved near the supermassive black hole in M87 // *Science*. — 2012. — Vol. 338, Iss. 6105. — P. 355—358.
118. Dresselhaus G. Spin-orbit coupling effects in zinc blende structures // *Physical Review*. — 1955. — Vol. 100, Iss. 2. — P. 580—586.
119. Duarte Queirós S. M. On superstatistical multiplicative-noise processes // *Brazilian Journal of Physics*. — 2008. — Vol. 38, No. 2. — P. 203—209.
120. Duncan R. C. Global seismic oscillations in soft gamma repeaters // *Astrophysical Journal*. — 1998. — Vol. 498, No. 1. — P. L45—L49.
121. D'yakonov M. I., Kachorovskii V. Yu. Spin relaxation of two-dimensional electrons in noncentrosymmetric semiconductors // *Soviet Physics — Semiconductors*. — 1986. — Vol. 20, No. 1. — P. 110—112.
- Дьяконов М. И., Качоровский В. Ю. Спиновая релаксация двумерных электронов в полупроводниках без центра инверсии // *Физика и техника полупроводников*. — 1972. — Т. 20, вып. 1. — С. 178—181.
122. D'yakonov M. I., Perel' V. I. Spin relaxation of conduction electrons in noncentrosymmetric semiconductors // *Soviet Physics — Solid State*. — 1972. — Vol. 13, No. 12. — P. 3023—3026.

- Дьяконов М. И., Перель В. И. Спиновая релаксация электронов проводимости в полупроводниках без центра инверсии // Физика твёрдого тела. — 1972. — Т. 13, вып. 12. — С. 3581—3585.
123. Eaton G. R., Eaton S. S., Barr D. P., Weber R. T. Quantitative EPR. — Wien : Springer, 2010. — 185 p.
124. EHT Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole / K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, et al. // Astrophysical Journal Letters. — 2019. — Vol. 875, No. 1. — Art. L1.
125. EHT Collaboration. First M87 Event Horizon Telescope results. VIII. Magnetic field structure near the event horizon / K. Akiyama, J. C. Algaba, A. Alberdi, et al. // Astrophysical Journal Letters. — 2021. — Vol. 910, No. 1. — Art. L13.
126. Einstein A. Method for the determination of the statistical values of observations concerning quantities subject to irregular fluctuations // Archives des Sciences Physiques et Naturelles. — 1914. — Vol. 37, Ser. 4. — P. 254—256.
127. Eldridge P. S., Leyland W. J. H., Lagoudakis P. G., Harley R. T., Phillips R. T., Winkler R., Henini M., Taylor D. Rashba spin-splitting of electrons in asymmetric quantum wells // Physical Review B. — 2010. — Vol. 82, Iss. 4. — Art. 045317.
128. Elliott R. J. Theory of the effect of spin-orbit coupling on magnetic resonance in some semiconductors // Physical Review. — 1954. — Vol. 96, Iss. 2. — P. 266—279.
129. English D. J., Hübner J., Eldridge P. S., Taylor D., Henini M., Harley R. T., Oestreich M. Effect of symmetry reduction on the spin dynamics of (001)-oriented GaAs quantum wells // Physical Review B. — 2013. — Vol. 87, Iss. 7. — Art. 075304.
130. English W., Hardcastle M. J., Krause M. G. H. Numerical modelling of the lobes of radio galaxies in cluster environments — III. Powerful relativistic and non-relativistic jets // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — Vol. 461, Iss. 2. — P. 2025—2043.
131. Esamdin A., Abdurixit D., Manchester R. N., Niu H. B. PSR B0826-34: sometimes a rotating radio transient // Astrophysical Journal Letters. — 2012. —

Vol. 759, No. 1. — Art. L3.

132. Espinoza C. M., Lyne A. G., Stappers B. W., Kramer M. A study of 315 glitches in the rotation of 102 pulsars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2011. — Vol. 414, Iss. 2. — P. 1679—1704.

133. Fabian J., Matos-Abiague A., Ertler C., Stano P., Žutić I. Semiconductor spintronics // *Acta Physica Slovaca*. — 2007. — Vol. 57, No. 4—5. — P. 565—907.

134. Falle S. A. E. G., Komissarov S. S. An upwind numerical scheme for relativistic hydrodynamics with a general equation of state // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1996. — Vol. 278, Iss. 2. — P. 586—602.

135. Faure-Beaulieu A., Noiray N. Symmetry breaking of azimuthal waves: Slow-flow dynamics on the Bloch sphere // *Physical Review Fluids*. — 2020. — Vol. 5, Iss. 2. — Art. 023201.

136. Fendt C. Differentially rotating relativistic magnetic jets. Asymptotic trans-field force-balance including differential rotation // *Astronomy and Astrophysics*. — 1997. — Vol. 323, Iss. 3. — P. 999—1010.

137. Feng J., Wu Q. Constraint on the black hole spin of M87 from the accretion-jet model // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2017. — Vol. 470, Iss. 1. — P. 612—616.

138. Feng J., Wu Q., Lu R. S. An accretion-jet model for M87: Interpreting the spectral energy distribution and Faraday rotation measure // *Astrophysical Journal*. — 2016. — Vol. 830, No. 1. — Art. 6.

139. Feng Y., Goree J., Liu B., Intrator T. P., Murillo M. S. Superdiffusion of two-dimensional Yukawa liquids due to a perpendicular magnetic field // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90, Iss. 1. — Art. 013105.

140. Fonseca E., Andersen B. C., Bhardwaj M., et al. Nine new repeating fast radio burst sources from CHIME/FRB // *Astrophysical Journal*. — 2020. — Vol. 891, No. 1. — Art. L6.

141. Fragile P. C., Anninos P. Hydrodynamic simulations of tilted thick-disk

accretion onto a Kerr black hole // *Astrophysical Journal*. — 2005. — Vol. 623, No. 1. — P. 347–361.

142. Fragile P. C., Blaes O. M., Anninos P., Salmonson J. D. Global general relativistic magnetohydrodynamic simulation of a tilted black hole accretion disk // *Astrophysical Journal*. — 2007. — Vol. 668, No. 1. — P. 417–429.

143. Franchini A., Lodato G., Facchini S. Lense-Thirring precession around supermassive black holes during tidal disruption events // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2016. — Vol. 455, Iss. 2. — P. 1946–1956.

144. Gabuzda D. C., Nagle M., Roche N. The jets of AGN as giant coaxial cables // *Astronomy and Astrophysics*. — 2018. — Vol. 612. — Art. A67.

145. Gammie C. F., McKinney J. C., Tóth G. HARM: a numerical scheme for general relativistic magnetohydrodynamics // *Astrophysical Journal*. — 2003. — Vol. 589, No. 1. — P. 444–457.

146. García F., Ranea-Sandoval I. F. A simple mechanism for the anti-glitch observed in AXP 1E 2259+586 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. — 2015. — Vol. 449, Iss. 1. — P. L73–L76.

147. Garofalo D., Kim M. I., Christian D. J. Constraints on the radio-loud/radio-quiet dichotomy from the Fundamental Plane // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2014. — Vol. 442, Iss. 4. — P. 3097–3104.

148. Gebhardt K., Adams J., Richstone D., Lauer T. R., Faber S. M. The black hole mass in M87 from Gemini/NIFS adaptive optics observations // *Astrophysical Journal*. — 2011. — Vol. 729, No. 2. — Art. 119.

149. Ghisellini G., Tavecchio F., Chiaberge M. Structured jets in TeV BL Lac objects and radiogalaxies. Implications for the observed properties // *Astronomy and Astrophysics*. — 2005. — Vol. 432, Iss. 2. — P. 401–410.

150. Girard P. R. *Quaternions, Clifford Algebras and Relativistic Physics*. — Basel : Birkhäuser, 2007. — 179 p.

151. Glazov M. M. Magnetic field effects on spin relaxation in heterostructures //



Physical Review B. — 2004. — Vol. 70, Iss. 19. — Art. 195314.

152. Glazov M. M., Ivchenko E. L. Precession spin relaxation mechanism caused by frequent electron-electron collisions // JETP Letters. — 2002. — Vol. 75, No. 8. — P. 403—405.

Глазов М. М., Ивченко Е. Л. Прецессионный механизм спиновой релаксации при частых электрон-электронных столкновениях // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2002. — Т. 75, вып. 8. — С. 476—478.

153. (Hans) Goedbloed J. P., Keppens R., Poedts S. Advanced Magnetohydrodynamics : With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2010. — 634 p.

154. Goglichidze O. A., Barsukov D. P. A possible way to reconcile long-period precession with vortex pinning in neutron stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2019. — Vol. 482, Iss. 3. — P. 3032—3044.

155. Goldreich P. Neutron star crusts and alignment of magnetic axes in pulsars // Astrophysical Journal. — 1970. — Vol. 160, No. 1. — P. L11—L15.

156. Goldreich P., Julian W. H. Pulsar electrodynamics // Astrophysical Journal. — 1969. — Vol. 157, No. 2. — P. 869—880.

157. Gorham C. S., Laughlin D. E. Crystallization in three dimensions: Defect-driven topological ordering and the role of geometrical frustration // Physical Review B. — 2019. — Vol. 99, Iss. 14. — Art. 144106.

158. Gourgouliatos K. N., Fendt C., Clausen-Brown E., Lyutikov M. Magnetic field structure of relativistic jets without current sheets // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2012. — Vol. 419, Iss. 4. — P. 3048—3059.

159. Gruzinov A. Power of an axisymmetric pulsar // Physical Review Letters. — 2005. — Vol. 94, Iss. 2. — Art. 021101.

160. Gruzinov A. Pulsar magnetospheres: Variation principle, singularities, and estimate of power // Astrophysical Journal. — 2006. — Vol. 647, No. 2. — P. L119—

L122.

161. Gubbiotti A., Chinappi M., Casciola C. M. Confinement effects on the dynamics of a rigid particle in a nanochannel // *Physical Review E*. — 2019. — Vol. 100, Iss. 5. — Art. 053307.

162. Hada K. The structure and propagation of the misaligned jet M87 // *Galaxies*. — 2017. — Vol. 5, Iss. 1. — Art. 2.

163. Hada K., Doi A., Kino M., Nagai H., Hagiwara Y., Kawaguchi N. An origin of the radio jet in M87 at the location of the central black hole // *Nature (London)*. — 2011. — Vol. 477, No. 7363. — P. 185–187.

164. Hada K., Giroletti M., Kino M., Giovannini G., D'Ammando F., Cheung C. C., Beilicke M., Nagai H., Doi A., Akiyama K., Honma M., Niinuma K., Casadio C., Orienti M., Krawczynski H., Gómez J. L., Sawada-Satoh S., Koyama S., Cesarini A., Nakahara S., Gurwell M. A. A strong radio brightening at the jet base of M 87 during the elevated very high energy gamma-ray state in 2012 // *Astrophysical Journal*. — 2014. — Vol. 788, No. 2. — Art. 165.

165. Hada K., Kino M., Doi A., Nagai H., Honma M., Akiyama K., Tazaki F., Lico R., Giroletti M., Giovannini G., Orienti M., Hagiwara Y. High-sensitivity 86 GHz (3.5 mm) VLBI observations of M87: Deep imaging of the jet base at a resolution of 10 Schwarzschild radii // *Astrophysical Journal*. — 2016. — Vol. 817, No. 2. — Art. 131.

166. Hada K., Kino M., Doi A., Nagai H., Honma M., Hagiwara Y., Giroletti M., Giovannini G., Kawaguchi N. The innermost collimation structure of the M87 jet down to  $\sim 10$  Schwarzschild radii // *Astrophysical Journal*. — 2013. — Vol. 775, No. 1. — Art. 70.

167. Hada K., Kino M., Nagai H., Doi A., Hagiwara Y., Honma M., Giroletti M., Giovannini G., Kawaguchi N. VLBI observations of the jet in M 87 during the very high energy  $\gamma$ -ray flare in 2010 April // *Astrophysical Journal*. — 2012. — Vol. 760, No. 1. — Art. 52.

168. Hada K., Park J. H., Kino M., et al. Pilot KaVA monitoring on the M 87 jet: Confirming the inner jet structure and superluminal motions at sub-pc scales // Publications of the Astronomical Society of Japan. — 2017. — Vol. 69, No. 4. — Art. 71.
169. Hardee P. E. Stability properties of strongly magnetized spine-sheath relativistic jets // Astrophysical Journal. — 2007. — Vol. 664, No. 1. — P. 26—46.
170. Hartman J. W., Bhattacharya D., Wijers R., Verbunt F. A study of the evolution of radio pulsars through improved population synthesis // Astronomy and Astrophysics. — 1997. — Vol. 322, No. 2. — P. 477—488.
171. Haskell B., Melatos A. Models of pulsar glitches // International Journal of Modern Physics D. — 2015. — Vol. 24, No. 3. — Art. 1530008.
172. Hawley J. F. Three-dimensional simulations of black hole tori // Astrophysical Journal. — 1991. — Vol. 381, No. 2. — P. 496—507.
173. Hawley J. F., Krolik J. H. Magnetically driven jets in the Kerr metric // Astrophysical Journal. — 2006. — Vol. 641, No. 1. — P. 103—116.
174. Helander P., Sigmar D. J. Collisional Transport in Magnetized Plasmas. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2002. — 292 p.
175. Hilburn G., Liang E. P. Numerical modeling of multi-wavelength spectra of M87 core emission // Astrophysical Journal. — 2012. — Vol. 746, No. 1. — Art. 87.
176. Hillas A. M. The origin of ultra-high-energy cosmic rays // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. — 1984. — Vol. 22. — P. 425—444.
177. Hirohata A., Yamada K., Nakatani Y., Prejbeanu I.-L., Diény B., Philipp Pirro P., Hillebrands B. Review on spintronics: Principles and device applications // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2020. — Vol. 509. — Art. 166711.
178. Igumenshchev I. V. Magnetically arrested disks and the origin of Poynting jets: A numerical study // Astrophysical Journal. — 2008. — Vol. 677, No. 1. — P. 317—326.
179. Ingram A., Done C., Fragile P. C. Low-frequency quasi-periodic oscillations

spectra and Lense-Thirring precession // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. — 2009. — Vol. 397, Iss. 1. — P. L101—L105.

180. Ioka K., Zhang B. A binary comb model for periodic fast radio bursts // Astrophysical Journal Letters. — 2020. — Vol. 893, No. 1. — Art. L26.

181. Istomin Ya. N. Magnetodipole oven // Progress in Neutron Star Research / Ed. by A. P. Wass. — New York : Nova Science, 2005. — Chap. 2. — P. 27—43.

182. Istomin Ya. N. Radiation of fast radio bursts by hot neutron stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2018. — Vol. 478, Iss. 4. — P. 4348—4356.

183. Istomin Ya. N., Gunya A. A. Centrifugal acceleration of protons by a supermassive black hole // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2020. — Vol. 492, Iss. 4. — P. 4884—4891.

184. Istomin Ya. N., Pariev V. I. Stability of a relativistic rotating electron-positron jet: non-axisymmetric perturbations // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1996. — Vol. 281, Iss. 1. — P. 1—26.

185. Istomin Ya. N., Philippov A. A., Beskin V. S. On the collective curvature radiation // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2012. — Vol. 422, Iss. 1. — P. 232—240.

186. Istomin Ya. N., Sobyenin D. N. Electron-positron plasma generation in a magnetar magnetosphere // Astronomy Letters. — 2007. — Vol. 33, No. 10. — P. 660—672.

Истомин Я. Н., Собынин Д. Н. Рождение электрон-позитронной плазмы в магнитосфере магнитара // Письма в Астрономический журнал. — 2007. — Т. 33, № 10. — С. 740—753.

187. Istomin Ya. N., Sobyenin D. N. Generation of an electron-positron plasma in a magnetar magnetosphere // AIP Conference Proceedings. — 2008. — Vol. 983. — P. 298—300.

188. Istomin Ya. N., Sobyenin D. N. The filling of neutron star magnetospheres

with plasma: Dynamics of the motion of electrons and positrons // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 2009. — Vol. 109, No. 3. — P. 393—407.

Истомина Я. Н., Собьянин Д. Н. Заполнение плазмой магнитосферы нейтронных звёзд: динамика движения электронов и позитронов // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2009. — Т. 136, вып. 3 (9). — С. 458—475.

189. Istomin Ya. N., Sob'yanin D. N. The appearance of a radio-pulsar magnetosphere from a vacuum with a strong magnetic field. Motion of charged particles // *Astronomy Reports*. — 2010. — Vol. 54, No. 4. — P. 338—354.

Истомина Я. Н., Собьянин Д. Н. Возникновение магнитосферы радиопульсаров из вакуума с сильным магнитным полем. Движение заряженных частиц // *Астрономический журнал*. — 2010. — Т. 87, № 4. — С. 379—396.

190. Istomin Ya. N., Sob'yanin D. N. The appearance of a radio-pulsar magnetosphere from a vacuum with a strong magnetic field. Accumulation of particles // *Astronomy Reports*. — 2010. — Vol. 54, No. 4. — P. 355—366.

Истомина Я. Н., Собьянин Д. Н. Возникновение магнитосферы радиопульсаров из вакуума с сильным магнитным полем. Накопление частиц // *Астрономический журнал*. — 2010. — Т. 87, № 4. — С. 397—409.

191. Ivchenko E. L. Spin relaxation of free carriers in a noncentrosymmetric semiconductor in a longitudinal magnetic field // *Soviet Physics — Solid State*. — 1973. — Vol. 15, No. 5. — P. 1048—1050.

Ивченко Е. Л. Спиновая релаксация свободных носителей в полупроводниках без центра инверсии в продольном магнитном поле // *Физика твёрдого тела*. — 1973. — Т. 15, вып. 5. — С. 1566—1570.

192. Jackson J. D. *Classical Electrodynamics*. — 3rd ed. — John Wiley & Sons, 1999. — 808 p.

193. de Jager O. C., Djannati-Ataï A. Implications of HESS observations of pulsar wind nebulae // *Neutron Stars and Pulsars* / W. Becker (Ed.). — Berlin ; Heidelberg

: Springer, 2009. — Chap. 17. — P. 451—479.

194. Jian Z., Deng P., Thoraval M.-J. Air sheet contraction // Journal of Fluid Mechanics. — 2020. — Vol. 899. — Art. A7.

195. Jizba P., Kleinert H. Superpositions of probability distributions // Physical Review E. — 2008. — Vol. 78, Iss. 3. — Art. 031122.

196. Jizba P., Kleinert H. Superstatistics approach to path integral for a relativistic particle // Physical Review D. — 2010. — Vol. 82, Iss. 8. — Art. 085016.

197. Johnston S., Karastergiou A. Pulsar braking and the  $P-\dot{P}$  diagram // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2017. — Vol. 467, Iss. 3. — P. 3493—3499.

198. Jung S., Swinney H. L. Velocity difference statistics in turbulence // Physical Review E. — 2005. — Vol. 72, Iss. 2. — Art. 026304.

199. Junor W., Biretta J. A., Livio M. Formation of the radio jet in M87 at 100 Schwarzschild radii from the central black hole // Nature (London). — 1999. — Vol. 401, No. 6756. — P. 891—892.

200. Kadek M., Repisky M., Ruud K. All-electron fully relativistic Kohn-Sham theory for solids based on the Dirac-Coulomb Hamiltonian and Gaussian-type functions // Physical Review B. — 2019. — Vol. 99, Iss. 20. — Art. 205103.

201. Kaminker A. D., Kaurov A. A., Potekhin A. Y., Yakovlev D. G. Heating magnetar surface from the crust // ASP Conference Series. — 2012. — Vol. 466. — P. 237—240.

202. Katz J. I. Fast radio bursts as pulsar lightning // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. — 2017. — Vol. 469, Iss. 1. — P. L39—L42.

203. Katz J. I. Are fast radio bursts made by neutron stars? // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. — 2020. — Vol. 494, Iss. 1. — P. L64—L68.

204. Katz J. I. Testing models of periodically modulated FRB activity // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2021. — Vol. 502, Iss. 3. — P. 4664—4668.

205. Kavokin A. V., Vladimirova M., Jouault B., Liew T. C. H., Leonard J. R., Butov L. V. Ballistic spin transport in exciton gases // *Physical Review B*. — 2013. — Vol. 88, Iss. 19. — Art. 195309.
206. Khintchine A. Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse // *Mathematische Annalen*. — 1934. — Vol. 109. — P. 604—615.
207. Kikkawa J. M., Awschalom D. D. Resonant spin amplification in n-type GaAs // *Physical Review Letters*. — 1998. — Vol. 80, Iss. 19. — P. 4313—4316.
208. Kim J., Balsara D. S., Lyutikov M., Komissarov S. S. On the linear stability of magnetized jets without current sheets — relativistic case // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2017. — Vol. 467, Iss. 4. — P. 4647—4662.
209. Kim J.-Y., Lu R.-S., Krichbaum T. P., Bremer M., Zensus J. A., Walker R. C. Resolving the base of the relativistic jet in M87 at  $6R_{\text{sch}}$  resolution with global mm-VLBI // *Galaxies*. — 2016. — Vol. 4, Iss. 4. — Art. 39.
210. Kino M., Takahara F., Hada K., Akiyama K., Nagai H., Sohn B. W. Magnetization degree at the jet base of M87 derived from the Event Horizon Telescope data: Testing the magnetically driven jet paradigm // *Astrophysical Journal*. — 2015. — Vol. 803, No. 1. — Art. 30.
211. Koide S., Shibata K., Kudoh T. Relativistic jet formation from black hole magnetized accretion disks: Method, tests, and applications of a general relativistic magnetohydrodynamic numerical code // *Astrophysical Journal*. — 1999. — Vol. 522, No. 2. — P. 727—752.
212. Kovalev Y. Y., Lister M. L., Homan D. C., Kellermann K. I. The inner jet of the radio galaxy M87 // *Astrophysical Journal*. — 2007. — Vol. 668, No. 1. — P. L27—L30.
213. Kramer M., Lyne A. G., O'Brien J. T., Jordan C. A., Lorimer D. R. A periodically active pulsar giving insight into magnetospheric physics // *Science*. — 2006. — Vol. 312, Iss. 5773. — P. 549—551.
214. Krich J. J., Halperin B. I. Cubic Dresselhaus spin-orbit coupling in 2D electron

- quantum dots // *Physical Review Letters*. — 2007. — Vol. 98, Iss. 22. — Art. 226802.
215. Kruchkov A. J. One-dimensional Bose-Einstein condensation of photons in a microtube // *Physical Review A*. — 2016. — Vol. 93, Iss. 4. — Art. 043817.
216. Kuczek T. On the convergence of the empiric age distribution for one dimensional supercritical age dependent branching processes // *Annals of Probability*. — 1982. — Vol. 10, No. 1. — P. 252–258.
217. Kumar P., Shannon R. M., Osłowski S., Qiu H., Bhandari S., Farah W., Flynn C., Kerr M., Lorimer D. R., Macquart J.-P., Ng C., Phillips C. J., Price D. C., Spiewak R. Faint repetitions from a bright fast radio burst source // *Astrophysical Journal Letters*. — 2019. — Vol. 887, No. 2. — Art. L30.
218. Kuo C. Y., Asada K., Rao R., Nakamura M., Algaba J. C., Liu H. B., Inoue M., Koch P. M., Ho P. T. P., Matsushita S., Pu H.-Y., Akiyama K., Nishioka H., Pradel N. Measuring mass accretion rate onto the supermassive black hole in M87 using Faraday rotation measure with the Submillimeter Array // *Astrophysical Journal*. — 2014. — Vol. 783, No. 2. — Art. L33.
219. Laikhtman B. Anomalous classical diffusion of high-mobility 2D electron gas in magnetic field // *Physical Review Letters*. — 1994. — Vol. 72, Iss. 7. — P. 1060–1063.
220. Lander S. K. Magnetic fields in superconducting neutron stars // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 110, Iss. 7. — Art. 071101.
221. Lander S. K. The contrasting magnetic fields of superconducting pulsars and magnetars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2014. — Vol. 437, Iss. 1. — P. 424–436.
222. Lander S. K., Andersson N., Antonopoulou D., Watts A. L. Magnetically driven crustquakes in neutron stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2015. — Vol. 449, Iss. 2. — P. 2047–2058.
223. Lax M. Formal theory of quantum fluctuations from a driven state // *Physical Review*. — 1963. — Vol. 129, Iss. 5. — P. 2342–2348.



224. Lax M. Quantum noise. X. Density-matrix treatment of field and population-difference fluctuations // *Physical Review*. — 1967. — Vol. 157, Iss. 2. — P. 213–231.
225. Lense J., Thirring H. Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie // *Physikalische Zeitschrift*. — 1918. — Vol. 19. — P. 156–163.
226. Leon Chen L., Beck C. A superstatistical model of metastasis and cancer survival // *Physica A*. — 2008. — Vol. 387, Iss. 12. — P. 3162–3172.
227. Levin Y., Beloborodov A. M., Bransgrove A. Precessing flaring magnetar as a source of repeating FRB 180916.J0158+65 // *Astrophysical Journal Letters*. — 2020. — Vol. 895, No. 2. — P. L30.
228. Li Y.-R., Yuan Y.-F., Wang J.-M., Wang J.-C., Zhang S. Spins of supermassive black holes in M87. II. Fully general relativistic calculations // *Astrophysical Journal*. — 2009. — Vol. 699, No. 1. — P. 513–524.
229. Liebling S. L., Palenzuela C. Electromagnetic luminosity of the coalescence of charged black hole binaries // *Physical Review D*. — 2016. — Vol. 94, Iss. 6. — Art. 064046.
230. Link B. Precession as a probe of the neutron star interior // *Astrophysics and Space Science*. — 2007. — Vol. 308, Iss. 1–4. — P. 435–441.
231. Link B., Epstein R. I. Are we seeing magnetic axis reorientation in the Crab and VELA pulsars? // *Astrophysical Journal*. — 1997. — Vol. 478, No. 2. — P. L91–L94.
232. Liska M., Hesp C., Tchekhovskoy A., Ingram A., van der Klis M., Markoff S. Formation of precessing jets by tilted black hole discs in 3D general relativistic MHD simulations // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2018. — Vol. 474, Iss. 1. — P. L81–L85.
233. Liska M., Hesp C., Tchekhovskoy A., Ingram A., van der Klis M., Markoff S. B., Van Moer M. Disc tearing and Bardeen-Petterson alignment in GRMHD simulations of highly tilted thin accretion discs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical*

- Society. — 2019. — Vol. 507, Iss. 1. — P. 983—990.
234. Liu R.-Y., Ge C., Sun X.-N., Wang X.-Y. Constraining the magnetic field in the TeV halo of Geminga with X-ray observations // *Astrophysical Journal*. — 2019. — Vol. 875, No. 2. — Art. 149.
235. Loudon R. *The Quantum Theory of Light*. — 3rd ed. — New York : Oxford Univ. Press, 2000. — 438 p.
236. Lovelace R. V. E. Dynamo model of double radio sources // *Nature (London)*. — 1976. — Vol. 262, No. 5570. — P. 649—652.
237. Lubashevsky I., Friedrich R., Heuer A., Ushakov A. Generalized superstatistics of nonequilibrium Markovian systems // *Physica A*. — 2009. — Vol. 388, Iss. 21. — P. 4535—4550.
238. Lundstrom M. *Fundamentals of Carrier Transport*. — 2nd ed. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2000. — 418 p.
239. Ly C., Walker R. C., Wrobel J. M. An attempt to probe the radio jet collimation regions in NGC 4278, NGC 4374 (M84), and NGC 6166 // *Astronomical Journal*. — 2004. — Vol. 127, No. 1. — P. 119—124.
240. Lynden-Bell D. On why discs generate magnetic towers and collimate jets // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2003. — Vol. 341, Iss. 4. — P. 1360—1372.
241. Lyubarsky Yu. Asymptotic structure of Poynting-dominated jets // *Astrophysical Journal*. — 2009. — Vol. 698, No. 2. — P. 1570—1589.
242. Lyutikov M., Barkov M. V., Giannios D. FRB periodicity: Mild pulsars in tight O/B-star binaries // *Astrophysical Journal Letters*. — 2020. — Vol. 893, No. 2. — Art. L39.
243. Lyutikov M., Popov S. Fast Radio Bursts from reconnection events in magnetar magnetospheres // 2020. — arXiv:2005.05093.
244. Macchetto F., Marconi A., Axon D. J., Capetti A., Sparks W., Crane P. The supermassive black hole of M87 and the kinematics of its associated gaseous disk //

- Astrophysical Journal. — 1997. — Vol. 489, No. 2. — P. 579—600.
245. Madrid J. P., Sparks W. B., Harris D. E., Perlman E. S., Macchetto D., Biretta J. Deep Hubble space telescope ultraviolet imaging of the M87 jet // Astrophysics and Space Science. — 2007. — Vol. 311, Iss. 1—3. — P. 329—333.
246. Makishima K., Enoto T., Hiraga J. S., Nakano T., Nakazawa K., Sakurai S., Sasano M., Murakami H. Possible evidence for free precession of a strongly magnetized neutron star in the magnetar 4U 0142+61 // Physical Review Letters. — 2014. — Vol. 112, Iss. 17. — Art. 171102.
247. Malcher F., Lommer G., Rössler U. Electron states in GaAs/Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As heterostructures: Nonparabolicity and spin-splitting // Superlattices and Microstructures. — 1986. — Vol. 2, No. 3. — P. 267—272.
248. Marchetti M. C., Kirkpatrick T. R., Dorfman J. R. Anomalous diffusion of charged particles in a strong magnetic field // Physical Review A. — 1984. — Vol. 29, Iss. 5. — P. 2960—2962.
249. Marcote B., Nimmo K., Hessels J. W. T., et al. A repeating fast radio burst source localized to a nearby spiral galaxy // Nature (London). — 2020. — Vol. 577, No. 7789. — P. 190—194.
250. Marelic J., Nyman R. A. Experimental evidence for inhomogeneous pumping and energy-dependent effects in photon Bose-Einstein condensation // Physical Review A. — 2015. — Vol. 91, Iss. 3. — Art. 033813.
251. Mastrano A., Lasky P. D., Melatos A. Neutron star deformation due to multipolar magnetic fields // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2013. — Vol. 434, Iss. 2. — P. 1658—1667.
252. Mastrano A., Melatos A., Reisenegger A., Akgün T. Gravitational wave emission from a magnetically deformed non-barotropic neutron star // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2011. — Vol. 417, Iss. 3. — P. 2288—2299.
253. Mastrano A., Suvorov A. G., Melatos A. Neutron star deformation due

to poloidal-toroidal magnetic fields of arbitrary multipole order: a new analytic approach // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2015. — Vol. 447, Iss. 4. — P. 3475—3485.

254. Mastrano A., Suvorov A. G., Melatos A. Interpreting the AXP 1E 2259+586 antiglitch as a change in internal magnetization // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2015. — Vol. 453, Iss. 1. — P. 522—530.

255. Mathews W. G. The hydromagnetic free expansion of a relativistic gas // *Astrophysical Journal*. — 1971. — Vol. 165, No. 1. — P. 147—164.

256. McKinney J. C., Narayan R. Disc-jet coupling in black hole accretion systems — I. General relativistic magnetohydrodynamical models // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2007. — Vol. 375, Iss. 2. — P. 513—530.

257. McKinney J. C., Tchekhovskoy A., Blandford R. D. General relativistic magnetohydrodynamic simulations of magnetically choked accretion flows around black holes // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2012. — Vol. 423, Iss. 4. — P. 3083—3117.

258. McLaughlin M. A., Lyne A. G., Lorimer D. R., Kramer M., Faulkner A. J., Manchester R. N., Cordes J. M., Camilo F., Possenti A., Stairs I. H., Hobbs G., D'Amico N., Burgay M., O'Brien J. T. Transient radio bursts from rotating neutron stars // *Nature (London)*. — 2006. — Vol. 439, No. 7078. — P. 817—820.

259. Meier F., Zakharchenya B. P. (eds.). *Optical Orientation*. — Amsterdam : North-Holland, 1984. — 523 p. — (Modern Problems in Condensed Matter Sciences / Ser. eds. V. M. Agranovich, A. A. Maradudin ; Vol. 8).

260. Melatos A. Radiative precession of an isolated neutron star // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2000. — Vol. 313, Iss. 2. — P. 217—228.

261. Meliani Z., Sauty C., Tsinganos K., Vlahakis N. Relativistic Parker winds with variable effective polytropic index // *Astronomy and Astrophysics*. — 2004. — Vol. 425, No. 3. — P. 773—781.

262. Mereghetti S. The strongest cosmic magnets: soft gamma-ray repeaters and

- anomalous X-ray pulsars // *Astronomy and Astrophysics Review*. — 2008. — Vol. 15, Iss. 4. — P. 225—287.
263. Mertens F., Lobanov A. P., Walker R. C., Hardee P. E. Kinematics of the jet in M 87 on scales of 100-1000 Schwarzschild radii // *Astronomy and Astrophysics*. — 2016. — Vol. 595. — Art. A54.
264. Metzger B. D., Berger E., Margalit B. Millisecond magnetar birth connects FRB 121102 to superluminous supernovae and long-duration gamma-ray bursts // *Astrophysical Journal*. — 2017. — Vol. 841, No. 1. — Art. 14.
265. Michel F. C. Acceleration of relativistic particles in the Crab nebula // *Astrophysical Journal*. — 1969. — Vol. 157, No. 3. — P. 1183—1199.
266. Michel F. C. Rotating magnetosphere: Acceleration of plasma from the surface // *Astrophysical Journal*. — 1974. — Vol. 192, No. 3. — P. 713—718.
267. Miller J. J., McLaughlin M. A., Rea N., Lazaridis K., Keane E. F., Kramer M., Lyne A. Simultaneous X-ray and radio observations of rotating radio transient J1819-1458 // *Astrophysical Journal*. — 2013. — Vol. 776, No. 2. — Art. 104.
268. Morawetz K. Bose condensation of squeezed light // *Physical Review B*. — 2019. — Vol. 99, Iss. 20. — Art. 205124.
269. Mościbrodzka M., Dexter J., Davelaar J., Falcke H. Faraday rotation in GRMHD simulations of the jet launching zone of M87 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2017. — Vol. 468, Iss. 2. — P. 2214—2221.
270. Mościbrodzka M., Falcke H., Shiokawa H. General relativistic magnetohydrodynamical simulations of the jet in M 87 // *Astronomy and Astrophysics*. — 2016. — Vol. 586. — Art. A38.
271. Motta S. E., Franchini A., Lodato G., Mastroserio G. On the different flavours of Lense-Thirring precession around accreting stellar mass black holes // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2018. — Vol. 473, Iss. 1. — P. 431—439.
272. Murase K., Kashiyama K., Mészáros K. A burst in a wind bubble and the impact on baryonic ejecta: high-energy gamma-ray flashes and afterglows from fast

- radio bursts and pulsar-driven supernova remnants // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2016. — Vol. 461, Iss. 2. — P. 1498—1511.
273. Nakamura M., Asada K. The parabolic jet structure in M87 as a magnetohydrodynamic nozzle // *Astrophysical Journal*. — 2013. — Vol. 775, No. 2. — Art. 118.
274. Nakamura M., Asada K., Hada K., Pu H.-Y., Noble S., Tseng C., Toma K., Kino M., Nagai H., Takahashi K., Algaba J.-C., Orienti, M., Akiyama K., Doi A., Giovannini G., Giroletti M., Honma M., Koyama S., Lico R., Niinuma K., Tazaki F. Parabolic jets from the spinning black hole in M87 // *Astrophysical Journal*. — 2018. — Vol. 868, No. 2. — Art. 146.
275. Naudts J. Generalised thermostatics using hyperensembles // *AIP Conference Proceedings*. — 2007. — Vol. 965. — P. 84—89.
276. Nishikawa K. I., Mizuno, Y., Gómez J., Duşan I., Meli A., White C., Niemiec J., Kobzar O., Pohl M., Pe'er A., Frederiksen J., Nordlund Å., Sol H., Hardee P., Hartmann D. Microscopic processes in global relativistic jets containing helical magnetic fields: Dependence on jet radius // *Galaxies*. — 2017. — Vol. 5, Iss. 4. — Art. 58.
277. Narayan R., Igumenshchev I. V., Abramowicz M. A. Magnetically arrested disk: an energetically efficient accretion flow // *Publications of the Astronomical Society of Japan*. — 2003. — Vol. 55, No. 6. — P. L69—L72.
278. Nyman R. A., Walker B. T. Bose-Einstein condensation of photons from the thermodynamic limit to small photon numbers // *Journal of Modern Optics*. — 2018. — Vol. 65, No. 5—6. — P. 754—766.
279. Ofek E. O. Space and velocity distributions of Galactic isolated old neutron stars // *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*. — 2009. — Vol. 121, No. 882. — P. 814—826.
280. Ogihara T., Takahashi K., Toma K. A mechanism for the triple-ridge emission structure of AGN jets // *Astrophysical Journal*. — 2019. — Vol. 877, No. 1. —

Art. 19.

281. Okamoto I. Black hole electrodynamics: How does unipolar induction work in Kerr black holes? // Publications of the Astronomical Society of Japan. — 2015. — Vol. 67, No. 5. — Art. 89.

282. Okuda H., Dawson J. M. Theory and numerical simulation on plasma diffusion across a magnetic field // Physics of Fluids. — 1973. — Vol. 16, Iss. 3. — P. 408—426.

283. Ott T., Bonitz M. Diffusion in a strongly coupled magnetized plasma // Physical Review Letters. — 2011. — Vol. 107, Iss. 13. — Art. 135003.

284. Pen U.-L., Connor L. Local circumnuclear magnetar solution to extragalactic fast radio bursts // Astrophysical Journal. — 2015. — Vol. 807, No. 2. — Art. 179.

285. Penrose R. Gravitational collapse: the role of general relativity // Rivista del Nuovo Cimento. — 1969. — No. Spez. 1. — P. 252—276.

286. Perlman E. S., Adams S. C., Cara M., Bourque M., Harris D. E., Madrid J. P., Simons R. C., Clausen-Brown E., Cheung C. C., Stawarz L., Georganopoulos M., Sparks W. B., Biretta J. A. Optical polarization and spectral variability in the M87 jet // Astrophysical Journal. — 2011. — Vol. 743, No. 2. — Art. 119.

287. Perlman E. S., Wilson A. S. The X-ray emissions from the M87 jet: Diagnostics and physical interpretation // Astrophysical Journal. — 2005. — Vol. 627, No. 1. — P. 140—155.

288. Perna R., Narayan R., Rybicki G., Stella L., Treves A. Bondi accretion and the problem of the missing isolated neutron stars // Astrophysical Journal. — 2003. — Vol. 594, No. 2. — P. 936—942.

289. Petroff E., Hessels J. W. T., Lorimer D. R. Fast radio bursts // Astronomy and Astrophysics Review. — 2019. — Vol. 27, Iss. 1. — Art. 4.

290. Pilia M., Burgay M., Possenti A., et al. The lowest-frequency fast radio bursts: Sardinia Radio Telescope detection of the periodic FRB 180916 at 328 MHz // Astrophysical Journal. — 2020. — Vol. 896, No. 2. — Art. L40.

291. Poole C. P. Electron Spin Resonance : a Comprehensive Treatise on

- Experimental Techniques. — 2nd ed. — Mineola, New York : Dover, 1996. — 780 p.
292. Popov S. B., Postnov K. A. Millisecond extragalactic radio bursts as magnetar flares // 2013. — arXiv:1307.4924.
293. Porporato A., Vico G., Fay P. A. Superstatistics of hydro-climatic fluctuations and interannual ecosystem productivity // Geophysical Research Letters. — 2006. — Vol. 33, Iss. 15. — Art. L15402.
294. Porras D., Tejedor C. Linewidth of a polariton laser: Theoretical analysis of self-interaction effects // Physical Review B. — 2003. — Vol. 67, Iss. 16. — Art. 161310(R).
295. Porth O., Fendt C. Acceleration and collimation of relativistic magnetohydrodynamic disk winds // Astrophysical Journal. — 2010. — Vol. 709, No. 2. — P. 1100—1118.
296. Porth O., Fendt C., Meliani Z., Vaidya B. Synchrotron radiation of self-collimating relativistic magnetohydrodynamic jets // Astrophysical Journal. — 2011. — Vol. 737, No. 1. — Art. 42.
297. Porth O., Vorster M. J., Lyutikov M., Engelbrecht N. E. Diffusion in pulsar wind nebulae: an investigation using magnetohydrodynamic and particle transport models // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — Vol. 460, Iss. 4. — P. 4135—4149.
298. Prantzos N., Boehm C., Bykov A. M., Diehl R., Ferrière K., Guessoum N., Jean P., Knoedlseder J., Marcowith A., Moskalenko I. V., Strong A., Weidenspointner G. The 511 keV emission from positron annihilation in the Galaxy // Reviews of Modern Physics. — 2011. — Vol. 83, Iss. 3. — P. 1001—1056.
299. Prieto M. A., Fernández-Ontiveros J. A., Markoff S., Espada D., González-Martín O. The central parsecs of M87: jet emission and an elusive accretion disc // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — Vol. 457, Iss. 4. — P. 3801—3816.
300. Prochaska J. X., Macquart J.-P., McQuinn M., Simha S., Shannon R. M., Day



- C. K., Marnoch L., Ryder S., Deller A., Bannister K. W., Bhandari S., Bordoloi R., Bunton J., Cho H., Flynn C., Mahony E., Phillips C., Qiu H., Tejos N. The low density and magnetization of a massive galaxy halo exposed by a fast radio burst // *Science*. — 2019. — Vol. 366, Iss. 6462. — P. 231—234.
301. Raikh M. E., Shahbazyan T. V. High Landau levels in a smooth random potential for two-dimensional electrons // *Physical Review B*. — 1993. — Vol. 47, Iss. 3. — P. 1522—1531.
302. Rajwade K. M., Mickaliger M. B., Stappers B. W., Morello V., Agarwal D., Bassa C. G., Breton R. P., Caleb M., Karastergiou A., Keane E. F., Lorimer D. R. Possible periodic activity in the repeating FRB 121102 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2020. — Vol. 495, Iss. 4. — P. 3551—3558.
303. Ravi M., Catha M., D’Addario L., Djorgovski S. G., Hallinan G., Hobbs R., Kocz J., Kulkarni S. R., Shi J., Vedantham H. K., Weinreb S., Woody D. P. A fast radio burst localized to a massive galaxy // *Nature (London)*. — 2019. — Vol. 572, No. 7769. — P. 352—354.
304. Reynolds A. M. Superstatistical mechanics of tracer-particle motions in turbulence // *Physical Review Letters*. — 2003. — Vol. 91, Iss. 8. — Art. 084503.
305. Reynolds C. S. Measuring black hole spin using X-ray reflection spectroscopy // *Space Science Reviews*. — 2014. — Vol. 183, Iss. 1—4. — P. 277—294.
306. Rizzo S., Rapisarda A. Environmental atmospheric turbulence at Florence airport // *AIP Conference Proceedings*. — 2004. — Vol. 742. — P. 176—181.
307. Rodriguez R. F., Santamaria-Holek I. Superstatistics of Brownian motion: A comparative study // *Physica A*. — 2007. — Vol. 385, Iss. 2. — P. 456—464.
308. Russell H. R., Fabian A. C., McNamara B. R., Broderick A. E. Inside the Bondi radius of M87 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2015. — Vol. 451, Iss. 1. — P. 588—600.
309. Salazar D. S. P., Vasconcelos G. L. Multicanonical distribution: Statistical equilibrium of multiscale systems // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 86, Iss. 5.

— Art. 050103(R).

310. Sattin F. Bayesian approach to superstatistics // *European Physical Journal B*. — 2006. — Vol. 49, Iss. 2. — P. 219—224.

311. Schmitt J., Damm T., Dung D., Wahl C., Vewinger F., Klaers J., Weitz M. Spontaneous symmetry breaking and phase coherence of a photon Bose-Einstein condensate coupled to a reservoir // *Physical Review Letters*. — 2016. — Vol. 116, Iss. 3. — Art. 033604.

312. Sedrakian A., Wasserman I., Cordes J. M. Precession of isolated neutron stars. I. Effects of imperfect pinning // *Astrophysical Journal*. — 1999. — Vol. 524, No. 1. — P. 341—360.

313. Sevast'yanov B. A. Age-dependent branching processes // *Theory of Probability and its Applications*. — 1964. — Vol. 9, No. 4. — P. 521—537.

Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы с превращениями, зависящими от возраста частиц // *Теория вероятностей и её применения*. — 1964. — Т. 7, вып. 4. — С. 577—594.

314. Sevast'yanov B. A., Chistyakov V. P. Multidimensional renewal equations and moments of branching processes // *Theory of Probability and its Applications*. — 1971. — Vol. 16, No. 2. — P. 199—214.

Севастьянов Б. А., Чистяков В. П. Уравнения многомерного восстановления и моменты ветвящихся процессов // *Теория вероятностей и её применения*. — 1971. — Т. 16, вып. 2. — С. 201—216.

315. Shaham J. Free precession of neutron stars: role of possible vortex pinning // *Astrophysical Journal*. — 1977. — Vol. 214, No. 1. — P. 251—260.

316. Shatskii A. A. Unipolar induction of a magnetized accretion disk around a black hole // *Astronomy Letters*. — 2003. — Vol. 29, No. 3. — P. 153—157.

Шацкий А. А. Униполярная индукция замагниченного аккреционного диска вокруг чёрной дыры // *Письма в Астрономический журнал*. — 2003. — Т. 29, № 3. — С. 184—189.

317. Shoenberg D. *Magnetic Oscillations in Metals*. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1984. — 570 p. — (Cambridge Monographs on Physics / Gen. eds. M. Berry, P. C. W. Davies, C. J. Isham, M. J. Rycroft).
318. Siegert T., Diehl R., Khachatryan G., Krause M. G. H., Guglielmetti F., Greiner J., Strong A. W., Zhang X. Gamma-ray spectroscopy of positron annihilation in the Milky Way // *Astronomy and Astrophysics*. — 2016. — Vol. 586. — Art. A84.
319. Sizun P., Cassé M., Schanne S. Continuum  $\gamma$ -ray emission from light dark matter positrons and electrons // *Physical Review D*. — 2006. — Vol. 74, Iss. 6. — Art. 063514.
320. Sobacchi E., Lyubarsky Y. E., Sormani M. C. Kink instability of force-free jets: a parameter space study // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2017. — Vol. 468, Iss. 4. — P. 4635–4641.
321. Sob'yanin D. N. Theory of Bose-Einstein condensation of light in a microcavity // *Bulletin of the Lebedev Physics Institute*. — 2013. — Vol. 40, No. 4. — P. 91–96.  
Собьянин Д. Н. Теория бозе-эйнштейновской конденсации света в микрополости // *Краткие сообщения по физике ФИАН*. — 2013. — № 4. — С. 15–24.
322. Sob'yanin D. N. Bose-Einstein condensation of light: General theory // *Physical Review E*. — 2013. — Vol. 88, Iss. 2. — Art. 022132.
323. Sob'yanin D. N. Theory of the antibubble collapse // *Physical Review Letters*. — 2015. — Vol. 114, Iss. 10. — Art. 104501.
324. Spitkovsky A. Time-dependent force-free pulsar magnetospheres: Axisymmetric and oblique rotators // *Astrophysical Journal*. — 2006. — Vol. 648, No. 1. — P. L51–L54.
325. Spitler L. G., Scholz P., Hessels J. W. T., et al. A repeating fast radio burst // *Nature (London)*. — 2016. — Vol. 531, No. 7593. — P. 202–205.
326. Spitzer L. Particle diffusion across a magnetic field // *Physics of Fluids*. —

1960. — Vol. 3, Iss. 4. — P. 659—661.
327. Synge J. L. *The Relativistic Gas*. — Amsterdam : North-Holland, 1957. — 108 p.
328. Tammann G. A., Löffler W., Schröder A. The Galactic supernova rate // *Astrophysical Journal, Supplement Series*. — 1994. — Vol. 92, No. 2. — P. 487—493.
329. Tan C. M., Bassa C. G., Cooper S., Dijkema T. J., Esposito P., Hessels J. W. T., Kondratiev V. I., Kramer M., Michilli D., Sanidas S., Shimwell T. W., Stappers B. W., van Leeuwen J., Cognard I., Griebmeier J.-M., Karastergiou A., Keane E. F., Sobey C., Weltevrede P. LOFAR discovery of a 23.5 s radio pulsar // *Astrophysical Journal*. — 2018. — Vol. 866, No. 1. — Art. 54.
330. Taylor J. B. Diffusion of plasma across a magnetic field // *Physical Review Letters*. — 1961. — Vol. 6, Iss. 6. — P. 262—263.
331. Taylor J. B., McNamara B. Plasma diffusion in two dimensions // *Physics of Fluids*. — 1971. — Vol. 14, Iss. 7. — P. 1492—1499.
332. Tavani M., Verrecchia F., Casentini C., et al. Gamma-ray and X-ray observations of the periodic-repeater FRB 180916 during active phases // *Astrophysical Journal Letters*. — 2020. — Vol. 893, No. 2. — Art. L42.
333. Tchekhovskoy A., Bromberg O. Three-dimensional relativistic MHD simulations of active galactic nuclei jets: magnetic kink instability and Fanaroff-Riley dichotomy // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. — 2016. — Vol. 461, Iss. 1. — P. L46—L50.
334. Tchekhovskoy A., Narayan R., McKinney J. C. Efficient generation of jets from magnetically arrested accretion on a rapidly spinning black hole // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. — 2011. — Vol. 418, Iss. 1. — P. L79—L83.
335. Tendulkar S. P., Bassa C. G., Cordes J. M., et al. The host galaxy and redshift of the repeating fast radio burst FRB 121102 // *Astrophysical Journal Letters*. —

2017. — Vol. 834, No. 2. — Art. L7.
336. Thirring H. Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie // *Physikalische Zeitschrift*. — 1918. — Vol. 19. — P. 33—39.
337. Thirring H. Berichtigung zu meiner Arbeit: “Über die Wirkung rotierender Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie” // *Physikalische Zeitschrift*. — 1921. — Vol. 22. — P. 29—30.
338. Timokhin A. N., Bisnovatyi-Kogan G. S., Spruit H. C. The magnetosphere of an oscillating neutron star. Non-vacuum treatment // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2000. — Vol. 316, Iss. 4. — P. 734—748.
339. Timokhin A. N., Harding A. K. On the maximum pair multiplicity of pulsar cascades // *Astrophysical Journal*. — 2019. — Vol. 871, No. 1. — Art. 12.
340. Tsallis C., Souza A. M. C. Constructing a statistical mechanics for Beck-Cohen superstatistics // *Physical Review E*. — 2003. — Vol. 67, Iss. 2. — Art. 026106.
341. Tzeferacos P., Ferrari A., Mignone A., Zanni C., Bodo G., Massaglia S. On the magnetization of jet-launching discs // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2009. — Vol. 400, Iss. 2. — P. 820—834.
342. Vamoş C., Crăciun M. Intrinsic superstatistical components of financial time series // *European Physical Journal B*. — 2014. — Vol. 87, Iss. 12. — Art. 301.
343. Van der Straeten E., Beck C. Superstatistical distributions from a maximum entropy principle // *Physical Review E*. — 2008. — Vol. 78, Iss. 5. — Art. 051101.
344. Van der Straeten E., Beck C. Superstatistical fluctuations in time series: Applications to share-price dynamics and turbulence // *Physical Review E*. — 2009. — Vol. 80, Iss. 3. — Art. 036108.
345. Vasconcelos G. L., Salazar D. S. P., Macêdo A. M. S. Maximum entropy approach to  $H$ -theory: Statistical mechanics of hierarchical systems // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 97, Iss. 2. — Art. 022104.
346. Vas’ko F. T. Spin splitting in the spectrum of two-dimensional electrons due to the surface potential // *JETP Letters*. — 1979. — Vol. 30, No. 9. — P. 541—544.

Васько Ф. Т. Спиновое расщепление спектра двумерных электронов, обусловленное поверхностным потенциалом // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1979. — Т. 30, вып. 9. — С. 574—577.

347. Vatutin V. A., Zubkov A. M. Branching processes. I // Journal of Soviet Mathematics. — 1987. — Vol. 39, Iss. 1. — P. 2431—2475.

Ватутин В. А., Зубков А. М. Ветвящиеся процессы. I // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». — 1985. — Т. 23. — С. 3—67.

348. Vladimirov V. S. Methods of the Theory of Generalized Functions. — London ; New York : Taylor & Francis, 2002. — 311 p. — (Analytical Methods and Special Functions ; Vol. 6).

349. Walker R. C., Hardee P. E., Davies F. B., Ly C., Junor W. The structure and dynamics of the subparsec jet in M87 based on 50 VLBA observations over 17 years at 43 GHz // Astrophysical Journal. — 2018. — Vol. 855, No. 2. — Art. 128.

350. Walser M. P., Siegenthaler U., Lechner V., Schuh D., Ganichev S. D., Wegscheider W., Salis G. Dependence of the Dresselhaus spin-orbit interaction on the quantum well width // Physical Review B. — 2012. — Vol. 86, Iss. 19. — Art. 195309.

351. Walsh J. L., Barth A. J., Ho L. C., Sarzi M. The M87 black hole mass from gas-dynamical models of Space Telescope Imaging Spectrograph observations // Astrophysical Journal. — 2013. — Vol. 770, No. 2. — Art. 86.

352. Wang J.-M., Li Y.-R., Wang J.-C., Zhang S. Spins of the supermassive black hole in M87: New constraints from TeV observations // Astrophysical Journal Letters. — 2008. — Vol. 676, No. 2. — P. L109—L112.

353. Wang N., Manchester R. N., Johnston S. Pulsar nulling and mode changing // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2007. — Vol. 377, Iss. 3. — P. 1383—1392.

354. Wang W., Pun C. S. J., Cheng K. S. Could electron-positron annihilation lines in the Galactic center result from pulsar winds? // *Astronomy and Astrophysics*. — 2006. — Vol. 446, No. 3. — P. 943–948.
355. Whittaker C. E., Dzurnak B., Egorov O. A., Buonaiuto G., Walker P. M., Cancellieri E., Whittaker D. M., Clarke E., Gavrilov S. S., Skolnick M. S., Krizhanovskii D. N. Polariton pattern formation and photon statistics of the associated emission // *Physical Review X*. — 2017. — Vol. 7, Iss. 3. — Art. 031033.
356. Wiener N. Generalized harmonic analysis // *Acta Mathematica*. — 1930. — Vol. 55. — P. 117–258.
357. Wilk G., Włodarczyk Z. Interpretation of the nonextensivity parameter  $q$  in some applications of Tsallis statistics and Lévy distributions // *Physical Review Letters*. — 2000. — Vol. 84, Iss. 13. — P. 2770–2773.
358. Wilkins D. C. Bound geodesics in the Kerr metric // *Physical Review D*. — 1972. — Vol. 5, Iss. 4. — P. 814–822.
359. Wilson A. S., Yang Y. Chandra X-ray imaging and spectroscopy of the M87 jet and nucleus // *Astrophysical Journal*. — 2002. — Vol. 568, No. 1. — P. 133–140.
360. Wilson J. R. Numerical study of fluid flow in a Kerr space // *Astrophysical Journal*. — 1972. — Vol. 173, No. 2. — P. 431–438.
361. Winkler R. Spin-Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems. — Berlin : Springer, 2003. — 228 p. — (Springer Tracts in Modern Physics ; Vol. 191).
362. Wittenburg J. Kinematics : Theory and Applications. — Berlin : Springer, 2016. — 685 p.
363. Wong K.-W., Nemmen R. S., Irwin J. A., Lin D. Hard X-ray emission from the M87 AGN detected with NuSTAR // *Astrophysical Journal Letters*. — 2017. — Vol. 849, No. 1. — Art. L17.
364. Wu C. S., Lee L. C. A theory of the terrestrial kilometric radiation // *Astrophysical Journal*. — 1979. — Vol. 230, No. 2. — P. 621–626.

365. Wu M. W., Ning C. Z. A novel mechanism for spin dephasing due to spin-conserving scatterings // *European Physical Journal B*. — 2000. — Vol. 18, Iss. 3. — P. 373—376.
366. Yafet Y.  $g$  factors and spin-lattice relaxation of conduction electrons // *Solid State Physics*. — 1963. — Vol. 14. — P. 1—98.
367. Yaglom A. M. Einstein's 1914 paper on the theory of irregularly fluctuating series of observations // *IEEE ASSP Magazine*. — 1987. — Vol. 4, Iss. 4. — P. 7—11.
368. Yakovlev A., Yanev N. Age and residual lifetime distributions for branching processes // *Statistics & Probability Letters*. — 2007. — Vol. 77, Iss. 5. — P. 503—513.
369. Yang H., Zou Y.-C. Orbit-induced spin precession as a possible origin for periodicity in periodically repeating fast radio bursts // *Astrophysical Journal Letters*. — 2020. — Vol. 893, No. 2. — Art. L31.
370. Yang H.-Y. K., Reynolds C. S. How AGN jets heat the intracluster medium—Insights from hydrodynamic simulations // *Astrophysical Journal*. — 2016. — Vol. 829, No. 2. — Art. 90.
371. Yang Y.-H., Dai Z.-G. Emission from a pulsar wind nebula: Application to the persistent radio counterpart of FRB 121102 // *Astrophysical Journal*. — 2019. — Vol. 885, No. 2. — Art. 149.
372. Zanzizzi J. J., Lai D. Electromagnetic torques, precession and evolution of magnetic inclination of pulsars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2015. — Vol. 451, Iss. 1. — P. 695—704.
373. Zanzizzi J. J., Lai D. Periodic fast radio bursts with neutron star free precession // *Astrophysical Journal*. — 2020. — Vol. 892, No. 1. — Art. L15.
374. Zanutti O., Morozova V., Ahmedov B. Particle acceleration in the polar cap region of an oscillating neutron star // *Astronomy and Astrophysics*. — 2012. — Vol. 540. — Art. A126.
375. Zasedatelev A. V., Baranikov A. V., Urbonas D., Scafrimuto F., Scherf U.,



Stöferle T., Mahrt R. F., Lagoudakis P. G. A room-temperature organic polariton transistor // *Nature Photonics*. — 2019. — Vol. 13. — P. 378—383.

376. Zhou Y., Yu T., Wu M. W. Anomalous D'yakonov-Perel' spin relaxation in semiconductor quantum wells under a strong magnetic field in the Voigt configuration // *Physical Review B*. — 2013. — Vol. 87, Iss. 24. — Art. 245304.

## Список иллюстративного материала

1	Магнитное поле на поверхности звезды $B_0$ как функция периода вращения $P$ для наблюдаемых пульсаров (диаграмма $P$ — $B$ в двойном логарифмическом масштабе). Стрелками схематично показаны траектории движения старых нейтронных звёзд, потухших радиопульсаров [A15]. . . . .	44
2	Рождение электронов и позитронов в открытой магнитосфере нейтронной звезды фотонами высоких энергий космического гамма-фона [A15]. . . . .	48
3	Витой тор [A7]. . . . .	72
4	Иллюстративное гладкое распределение магнитного поля во вращающемся проводящем шаре [A14]. . . . .	87
5	Иллюстративное распределение тока намагничивания (а) и тока вращения (b) во вращающемся проводящем шаре [A14]. . . . .	90
6	Джет в джете [A29]. . . . .	102
7	Динамика температуры резервуара при различной решёточной температуре $T_{\text{latt}}$ [A6]. . . . .	157
8	Зависимость времени спиновой релаксации $T_1$ от магнитного поля при $T = 2$ К — экспериментальные данные (шары) и теоретическая кривая (сплошная линия) [A12]. . . . .	166
9	Зависимость времени спиновой релаксации $T_1$ от магнитного поля при различных температурах [A12]. . . . .	168

- 10 Спектры ЭСР для различных амплитуд радиочастотного поля, параметризованного амплитудой  $U_{\text{rf}}$  переменного напряжения на катушке, при  $f_{\text{L}} = 10f_{\text{o}} = 47.8$  МГц и  $T = 6$  К — экспериментальные данные (сплошные линии) и теоретические кривые (штриховые линии) [A13]. . . . . 180
- 11 Сигнал фарадеевского вращения как функция напряжения  $U_{\text{rf}}$  (нижняя ось) или амплитуды радиочастотного поля  $b$  (верхняя ось) в случае полного резонанса  $f_{\text{rf}} = f_{\text{L}} = 10f_{\text{o}} = 47.8$  МГц — экспериментальные данные (шары) и теоретическая кривая (сплошная линия) [A13]. . . . . 181
- 12 Спектры ЭСР для различных значений ларморовской частоты при  $U_{\text{rf}} = 4$  В и  $T = 6$  К — экспериментальные данные (сплошные линии) и теоретические кривые (штриховые линии) [A13]. . . . . 182
- 13 Сигнал фарадеевского вращения как функция ларморовской частоты для различных частот радиочастотного поля — экспериментальные данные (сплошные линии) и теоретические кривые (штриховые линии). Используемые параметры те же, что и на рис. 12 [A13]. . . . . 183
- 14 Двумерная карта сигнала фарадеевского вращения как функция частоты радиочастотного поля  $f_{\text{rf}}$  и ларморовской частоты  $f_{\text{L}}$ . Рис. (а) — эксперимент, рис. (b) — теория. Используемые параметры те же, что и на рис. 12 [A13]. . . . . 184

**Список работ, опубликованных по теме диссертации****Статьи в научных журналах, индексируемых в международной  
базе данных Web of Science**

A1. Istomin Ya. N., Sob'yanin D. N. Absorption of gamma-ray photons in a vacuum neutron star magnetosphere: I. Electron-positron pair production // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2011. — Vol. 113, No. 4. — P. 592—604.

Истомин Я. Н., Собьянин Д. Н. Поглощение гамма-квантов в вакуумной магнитосфере нейтронной звезды. I. Рождение электрон-позитронных пар // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2011. — Т. 140, вып. 4 (10). — С. 681—695.

A2. Istomin Ya. N., Sob'yanin D. N. Absorption of gamma-ray photons in a vacuum neutron star magnetosphere: II. The formation of “lightnings” // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2011. — Vol. 113, No. 4. — P. 605—618.

Истомин Я. Н., Собьянин Д. Н. Поглощение гамма-квантов в вакуумной магнитосфере нейтронной звезды. II. Формирование «молний» // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2011. — Т. 140, вып. 4 (10). — С. 696—711.

A3. Istomin Ya. N., Sobyayanin D. N. Formation of “lightnings” in a neutron star magnetosphere and the nature of RRATs // Astronomy Letters. — 2011. — Vol. 37, No. 7. — P. 468—479.

Истомин Я. Н., Собьянин Д. Н. Образование «молний» в магнитосфере нейтронной звезды и природа RRAT // Письма в Астрономический

- журнал. — 2011. — Т. 37, № 7. — С. 512—524.
- A4. Sob'yanin D. N. Generalization of the Beck-Cohen superstatistics // *Physical Review E*. — 2011. — Vol. 84, Iss. 5. — Art. 051128.
- A5. Sob'yanin D. N. Hierarchical maximum entropy principle for generalized superstatistical systems and Bose-Einstein condensation of light // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 85, Iss. 6. — Art. 061120.
- A6. Belykh V. V., Sob'yanin D. N. Polariton linewidth and the reservoir temperature dynamics in a semiconductor microcavity // *Physical Review B*. — 2014. — Vol. 89, Iss. 24. — Art. 245312.
- A7. Sob'yanin D. N. Breakdown of the Goldreich-Julian relation in a neutron star // *Astronomy Letters*. — 2016. — Vol. 42, No. 11. — P. 745—751.
- Собьянин Д. Н. Нарушение соотношения Гольдрайха-Джулиана в нейтронной звезде // *Письма в Астрономический журнал*. — 2016. — Т. 42, № 11. — С. 818—825.
- A8. Beskin V. S., Istomin Ya. N., Kiselev A. M., Krauz V. I., Mitrofanov K. N., Myalton V. V., Nokhrina E. E., Sob'yanin D. N., Kharrasov A. M. Simulation of nonrelativistic jet ejections during the laboratory studies // *Radiophysics and Quantum Electronics*. — 2017. — Vol. 59, No. 11. — P. 900—910.
- Бескин В. С., Истомин Я. Н., Киселёв А. М., Крауз В. И., Митрофанов К. Н., Мялтон В. В., Нохрина Е. Е., Собьянин Д. Н., Харрасов А. М. Моделирование нерелятивистских струйных выбросов в лабораторных исследованиях // *Известия вузов. Радиофизика*. — 2016. — Т. 59, № 11. — С. 1004—1016.
- A9. Sob'yanin D. N. Jet in jet in M87 // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2017. — Vol. 471, Iss. 4. — P. 4121—4127.
- A10. Sob'yanin D. N. Black hole spin from wobbling and rotation of the M87 jet and a sign of a magnetically arrested disc // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*. — 2018. — Vol. 479, Iss. 1. — P. L65—L69.

- A11. Sob'yanin D. N. Relativistic polytrope from the collimation and acceleration profiles of the M87 jet at subparsec scales and thermodynamic evidence for the Blandford-Znajek mechanism // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. — 2019. — Vol. 489, Iss. 1. — P. L7—L11.
- A12. Belykh V. V., Kochiev M. V., Sob'yanin D. N., Yakovlev D. R., Bayer M. Anomalous magnetic suppression of spin relaxation in a two-dimensional electron gas in a GaAs/AlGaAs quantum well // Physical Review B. — 2020. — Vol. 101, Iss. 23. — Art. 235307.
- A13. Belykh V. V., Sob'yanin D. N., Korotneva A. R. Resonant spin amplification meets electron spin resonance in *n*-GaAs // Physical Review B. — 2020. — Vol. 102, Iss. 7. — Art. 075201.
- A14. Sob'yanin D. N. Periodic fast radio bursts from forcedly precessing neutron stars, anomalous torque, and internal magnetic field for FRB 180916.J0158+65 and FRB 121102 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2020. — Vol. 497, Iss. 1. — P. 1001—1007.
- A15. Istomin Ya. N., Chernyshov D. O., Sob'yanin D. N. Extinct radio pulsars as a source of subrelativistic positrons // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2020. — Vol. 498, Iss. 2. — P. 2089—2094.

### Другие работы

- A16. Собьянин Д. Н. О радиовспышках RRAT // Фундаментальные и прикладные космические исследования : VIII конференция молодых учёных, посвящённая Дню космонавтики и 50-летию полёта Юрия Гагарина, Москва, ИКИ РАН, 14—15 апреля 2011 : программа, тезисы докладов / Российская академия наук, Учреждение Российской академии

- наук Институт космических исследований РАН, Научно-образовательный центр ИКИ РАН. — Москва : ИКИ РАН, 2011. — С. 74—75.
- A17. Sobyenin D. N. Formation of “lightnings” in an RRAT magnetosphere // International Conference on the Physics of Neutron Stars, Saint-Petersburg, Russia, July 11—15, 2011 : Book of Abstracts / Editors: D. A. Baiko, Yu. A. Uvarov and D. G. Yakovlev. — Saint-Petersburg, 2011. — P. 117.
- A18. Истомина Я., Собынин Д. Формирование «молний» в магнитосфере нейтронной звезды // Агентство научной информации «ФИАН-информ» : сайт. — 2011. — URL: <https://fian-inform.ru/astrofizika/item/404-formirovanie-molnij-v-magnitosfere-nejtronnoj-zvezdy> (дата обращения: 19.04.2022).
- A19. Истомина Я. Н., Собынин Д. Н. Формирование «молний» в магнитосфере нейтронной звезды // Информационный бюллетень / Российская академия наук, Физический институт имени П.Н.Лебедева, Агентство научной информации ФИАН-Информ. — Москва : ФИАН, 2011. — Вып. №8 (июль — сентябрь 2011 года). — С. 57—58.  
Istomin Ya. N., Sob'yenin D. N. Formation of “lightnings” in the neutron-star magnetosphere // Там же. — С. 59—60.
- A20. Sob'yenin D. Generalized superstatistics, branching processes, and pair production in a neutron star magnetosphere // Ginzburg Conference on Physics, Lebedev Institute, Moscow, May 28 — June 2, 2012 : Abstracts. — Moscow : Lebedev Physical Institute, 2012. — P. 67—68.
- A21. Собынин Д. Н. Теоретическое исследование нестационарных процессов в магнитосферах нейтронных звёзд // Сборник трудов V Всероссийской молодёжной конференции по фундаментальным и инновационным вопросам современной физики, 10—15 ноября 2013 года, Москва, ФИАН : программа и тезисы докладов. — Москва : ФИАН, 2013. — С. 202.
- A22. Собынин Д. Н. Генерация плазмы в магнитосфере RRAT и обобщённая

- суперстатистика // Фундаментальные и прикладные космические исследования : XI конференция молодых учёных, посвящённая Дню космонавтики, Москва, ИКИ РАН, 9—11 апреля 2014 / Российская академия наук, Научно-образовательный центр ИКИ РАН. — Москва : ИКИ РАН, 2014. — С. [92].
- A23. Собьянин Д. Н. Генерация плазмы в магнитосфере вращающихся радиотранзиентов (RRAT) и обобщённая суперстатистика // Фундаментальные и прикладные космические исследования : XI конференция молодых учёных, 9—11 апреля 2014 года, ИКИ РАН, Москва : сборник трудов / Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт космических исследований Российской академии наук ; под. ред. А. М. Садовского. — Москва : ИКИ РАН, 2014. — (Серия «Механика, управление и информатика», ISSN 2075-6836). — С. 114—119.
- A24. Собьянин Д. Н. Нарушение соотношения Гольдрайха-Джулиана в нейтронной звезде // Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук : Основные результаты научной деятельности, 2016. — Москва : ФИАН, 2016. — С. 64—65.
- A25. Sob'yanin D. Violation of the Goldreich-Julian relation in a neutron star // Ginzburg Centennial Conference on Physics : GC100, Lebedev Institute / Moscow, May 29 — June 3, 2017 : Abstracts. — Moscow : Lebedev Physical Institute, 2017. — P. 53.
- A26. Собьянин Д. Н. Джет в джете в M87 // ФИАН : Основные результаты научной деятельности, 2017. — Москва : ФИАН, 2017. — С. 80—81.
- A27. Собьянин Д. Н. Теоретическое моделирование космических струйных выбросов // Материалы Международного молодёжного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2018» : XXV Международная научная конференция,



- МГУ имени М.В.Ломоносова, 9 — 13 апреля 2018 года, г. Москва / Отв. ред. И. А. Алешковский, А. В. Андриянов, Е. А. Антипов. — Москва : МАКС Пресс, 2018. — 1 DVD-ROM. — ISBN 978-5-317-05800-5.
- А28. Собьянин Д. Н. Джет в джете в галактике М87 // Фундаментальные и прикладные космические исследования : XV конференция молодых учёных, посвящённая Дню космонавтики, Москва, 11—13 апреля 2018 : тезисы / Научно-образовательный центр ИКИ РАН. — Москва : Институт космических исследований РАН, 2018. — С. 109.
- А29. Собьянин Д. Н. Джет в джете в галактике М87 // Фундаментальные и прикладные космические исследования : XV конференция молодых учёных, 11—13 апреля 2018 года, ИКИ РАН, Москва : сборник трудов / Институт космических исследований РАН ; под. ред. А. М. Садовского. — Москва : ИКИ РАН, 2018. — (Серия «Механика, управление и информатика», ISSN 2075-6836). — ISBN 978-5-00015-051-1. — С. 128—132.
- А30. Собьянин Д. Н. Определение скорости вращения чёрной дыры по качанию и вращению джета в галактике М87 // ФИАН : Основные результаты научной деятельности, 2018. — Москва : ФИАН, 2018. — С. 64—65.
- А31. Собьянин Д. Н. Определение скорости вращения чёрной дыры по качанию и вращению джета в галактике М87 // Фундаментальные и прикладные космические исследования : XVI конференция молодых учёных, посвящённая Дню космонавтики, Москва, 15—17 апреля 2019 г. : сборник тезисов докладов / Научно-образовательный центр ИКИ РАН ; под. ред. А. М. Садовского. — Москва : Институт космических исследований РАН, 2019. — (Серия «Механика, управление и информатика», ISSN 2075-6836). — ISBN 978-5-00015-047-4. — С. 165.
- А32. Собьянин Д. Н. Определение скорости вращения чёрной дыры по качанию и вращению джета в галактике М87 // Фундаментальные и прикладные космические исследования : XVI конференция молодых учёных, 15—

- 17 апреля 2019 года, ИКИ РАН, Москва : сборник трудов / Институт космических исследований РАН ; под. ред. А. М. Садовского. — Москва : ИКИ РАН, 2019. — (Серия «Механика, управление и информатика», ISSN 2075-6836). — ISBN 978-5-00015-032-0. — С. 158—162.
- А33. Собьянин Д. Н. Уравнение состояния, состав и механизм запуска релятивистского джета в галактике М87 // ФИАН : Основные результаты научной деятельности, 2019. — Москва : ФИАН, 2019. — С. 78—79.
- А34. Собьянин Д. Н. Периодические быстрые радиовсплески как проявление вынужденной прецессии нейтронных звёзд // ФИАН : Основные результаты научной деятельности, 2020. — Москва : ФИАН, 2020. — С. 98—99.
- А35. Белых В. В., Собьянин Д. Н., Коротнёва А. Р. Гигантское оптическое усиление электронного парамагнитного резонанса // ФИАН : Основные результаты научной деятельности, 2020. — Москва : ФИАН, 2020. — С. 121—122.
- А36. Belykh V. V., Kochiev M. V., Sob'yanin D. N., Yakovlev D. R., Bayer M. Longitudinal spin dynamics of high-mobility two-dimensional electron gas // Nanostructures: Physics and Technology : 28th International Symposium, Minsk, Republic of Belarus, September, 2020 : Proceedings. — St Petersburg : Ioffe Institute, RAS, 2020 (Printed in the Republic of Belarus). — ISBN 978-5-93634-066-6. — P. 174—175.