

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П. Н. ЛЕБЕДЕВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Павлов Михаил Михайлович

**Классические конформные блоки и AdS_3/CFT_2
соответствие**

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н.
Алкалаев Константин Борисович

Москва — 2022

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Классические конформные блоки	13
1.1 Двумерная конформная теория поля	13
1.2 Классические конформные блоки и монодромный метод	16
1.3 Голографические переменные и униформизация	22
1.4 Классические конформные блоки с двумя тяжелыми операторами	26
1.4.1 3-точечный блок	28
1.4.2 4-точечный блок	29
1.4.3 5-точечные единичные блоки	30
1.4.4 6-точечные единичные блоки	32
1.5 Классические конформные блоки с тремя тяжелыми операторами	34
1.5.1 4-точечный блок	35
1.5.2 5-точечный блок	35
1.6 Факторизация единичных блоков с двумя тяжелыми операторами	37
1.6.1 Факторизационное соотношение	37
1.6.2 Блоки с несколькими единичными операторами	41
1.7 Сверхлегкое приближение для классических конформных блоков	43
1.7.1 5-точечные блоки с сверхлегкими операторами.	44
1.7.2 6-точечный блок с двумя сверхлегкими операторами	45
1.7.3 $(2M + 2)$ -точечный блок с сверхлегкими операторами	45
1.8 Выводы	47
Глава 2. Голографическое описание тяжелого сектора	48
2.1 Дуальное описание двух и трех тяжелых операторов	50
2.1.1 Метрика Баньядоса и конформные отображения	50
2.1.2 Два тяжелых оператора	52
2.1.3 Три тяжелых оператора	56
2.2 Произвольное число тяжелых операторов и классические блоки типа LH^{n-k}	58

2.3	Выводы	61
Глава 3. Голографическое описание легкого сектора		62
3.1	Деревья Штейнера	64
3.1.1	Построение деревьев Штейнера	64
3.1.2	Голографические деревья Штейнера на диске Пуанкаре	65
3.1.3	Разрезы и объединения деревьев Штейнера	67
3.2	$N = 2, 3, 4$ голографические деревья Штейнера	68
3.2.1	$N = 2$ голографические деревья	68
3.2.2	$N = 3$ и $N = 4$ голографические деревья Штейнера	70
3.3	Деревья Штейнера в сверхлегком приближении	75
3.3.1	$N = 4, 5$ неидеальные деревья Штейнера в сверхлегком приближении	76
3.3.2	$(2M + 1)$ -точечное дерево со сверхлегкими весами	79
3.4	Выводы	81
Заключение		82
Список литературы		84
Список рисунков		95
Список таблиц		98
Приложение А. Пертурбативное разложение 4-точечного блока в z -параметризации		98
Приложение Б. Доказательство соотношения (1.6.2) для произвольного s		100
Приложение В. Регуляризация длин голографических деревьев Штейнера		103
Приложение Г. Точка Ферма-Торричелли и конформные преобразования		105

Введение

Актуальность темы. Одной из задач современной физики является создание фундаментальной теории, которая могла бы согласованно описывать физику на любых энергетических масштабах. Предполагается, что это может быть достигнуто путем построения единой квантовой теории поля, объединяющей четыре известные на данный момент фундаментальные взаимодействия. Подобного рода описание сильного, слабого и электромагнитного взаимодействий было найдено в рамках Стандартной Модели, разработанной в 60-70-х годах прошлого века. Стандартная Модель формулируется на фоне плоского пространства-времени и по построению не включает гравитацию.

На классическом уровне гравитационные взаимодействия описываются общей теорией относительности, инвариантной относительно пространственно-временных диффеоморфизмов. Однако, попытки построения квантовой гравитации наталкиваются на серьезные трудности, так как квантовополевые обобщения общей теории относительности являются неперенормируемыми теориями поля. Введение суперсимметрии [1–3], подразумевающей расширение алгебры симметрий антикоммутирующими генераторами, не привело к решению данной проблемы. В частности, было обнаружено, что $\mathcal{N} = 1$ супергравитация неперенормируема [4; 5].¹

Теория (супер)струн [7; 8] рассматривалась как основной кандидат на роль квантовой гравитации. В рамках данной теории частицы могут быть описаны как возбуждения струн, в частности, было показано, что теория (супер)струн содержит гравитон [9–11] и частицы с полуцелым спином [12]. Помимо этого, теория (супер)струн представляет концептуальный теоретический интерес благодаря наличию дуальностей [13; 14], которые изначально понимались как преобразования, связывающее различные десятимерные формулировки теории суперструн. Открытие данных дуальностей позволило сформулировать единую M-теорию суперструн в $D = 11$ и показать, что все десятимерные суперструнные теории могут быть получены редукцией M-теории.

Сасскиндом и т'Хоофтом было предложено понятие *голографической дуальности* [15; 16], в рамках которого постулировалось, что квантовая теория

¹Несмотря на это, есть основания полагать, что максимальная $\mathcal{N} = 8$ суперсимметричная гравитация является конечной перенормируемой теорией в ультрафиолетовом пределе [6].

гравитации в объеме определяется динамикой конформной теории без гравитационных степеней свободы на границе этого объема. В контексте теории струн важным примером такой дуальности является соответствие между струнами на фоне пространства анти-де Ситтера (AdS) и конформной теорией поля, заданной на границе (CFT) [17]. Технически AdS/CFT соответствие можно понимать в рамках прескрипции Губсера, Клебанова, Полякова и Виттена (GKPW), которая содержит словарь терминов, связывающий гравитационные объекты с объектами конформной теории поля. Согласно этой прескрипции, производящий функционал теории гравитации на фоне AdS_{d+1} равен производящему функционалу конформной теории в размерности d , если граничные значения полей в объеме отождествить с операторами на границе [18–20].² Дальнейшие исследования AdS/CFT соответствия затрагивали, в том числе, анализ струнных поправок к классической гравитации для изучения теории на границе [17]. Помимо этого, AdS/CFT соответствие порождает вычислительную концепцию, когда корреляционные функции в граничной теории определяются геометрическими объектами в объеме, и наоборот: результаты, полученные в граничной теории, могут быть использованы для реконструкции квантовой гравитации в объеме.

Несмотря на значительный прогресс, AdS/CFT соответствие имеет статус хорошо проверенной гипотезы. На данный момент не найдено ни одного точно доказанного примера такой дуальности, что связано с тем, что производящие функционалы в объеме/на границе по большей части неизвестны. Однако для теорий, обладающих высокими симметриями, производящие функционалы (или корреляционные функции), могут быть найдены точно, что даст возможность явно вывести AdS/CFT соответствие и глубже, чем на уровне равенства производящих функционалов, понять его структуру.

В этом контексте перспективным направлением исследования представляется $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствие [23; 24]. В этом случае³ симметрией двумерной конформной теории на границе является бесконечномерная (в отличие от теорий в старших измерениях) алгебра Вирасоро. Трехмерная гравитация, в свою очередь, не содержит распространяющихся степеней свободы, поэтому динамика определяется границей и топологическими дефектами в объеме [27–30].

²Аналогичная связь между теорией высших спинов в AdS_4 и свободной/критической $O(N)$ векторной моделью рассматривалась в [21; 22].

³Исследования этого вопроса в контексте теории струн также проводились в [25; 26].

При изучении $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия были получены такие результаты как соответствие между теориями Черна-Саймонса и Весса-Зумино-Виттена [31], предписание для вычисления энтропии запутывания [32; 33] и доказательство свойства ее универсальности [34] в случае сферической топологии, формулировка p -адического $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия [35].

Недавно было показано, что AdS/CFT соответствие можно понимать на более глубоком, чем равенство производящих функционалов/корреляционных функций, уровне. Более точно, имеет место соответствие между базисными элементами (*конформными блоками*) в пространстве корреляторов граничной теории и геодезическими диаграммами Виттена в объеме [36; 37]. В настоящей диссертационной работе исследуется $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствие между конформными блоками на сфере и геодезическими сетями, которые представляют частный случай геодезических диаграмм Виттена. Актуальной задачей диссертации является проверка $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ в различных пределах путем получения и сравнения явных выражений как на границе, так и в теории гравитации в объеме.

Степень разработанности темы. Изучение $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия представляется интересным ещё и потому, что конформная теория поля, как и гравитация в трёхмерном пространстве-времени, рассматривались задолго до открытия голографической дуальности. Описание конформной симметрии берет свое начало с работы Ли [38], двумерные теории поля были впервые введены в [39; 40]. В рамках бутстрапного подхода [41], конформная теория задается спектром примарных операторов, которые характеризуются конформными размерностями (Δ) и структурными константами, определяемыми трёхточечными корреляционными функциями. Корреляционные функции примарных операторов в двумерной конформной теории поля могут быть разложены в *конформные блоки* [42; 43], которые определяются только алгеброй симметрий. В этом смысле анализ корреляционных функций сводится к изучению данных блоков. Важным примером двумерной конформной теории с непрерывным спектром и симметрией Вирасоро является теория Лиувилля,⁴ так как вертексные операторы в данной модели являются примарными, а непрерывный спектр модели допускает рассмотрение различных приближений.

⁴Эта теория возникает при рассмотрении гравитации в двух измерениях, а также в рамках формулировки теории струн в терминах континуального интеграла [44].

Конформные блоки, соответствующие корреляционной функции примарных операторов, являются голоморфными функциями координат примарных операторов и параметрически зависят от их конформных размерностей операторов теории и от центрального заряда алгебры Вирасоро c . На данный момент, $n \geq 4$ -точечные конформные блоки на сфере найдены только в виде рядов (см. также [37; 45–48]), поэтому для получения явных функций блоков рассматриваются различные приближения. В классическом пределе $c \rightarrow \infty$, одновременно полагая конформные размерности пропорциональными c , конформный блок упрощается и может быть представлен в виде экспоненты от произведения центрального заряда на т.н. *классический конформный блок* [49], который не зависит от центрального заряда. Помимо этого, в вычислениях прибегают к дополнительному приближению *легких и тяжелых операторов* (НЛ), где конформные размерности части операторов считаются много меньшими, чем конформные размерности оставшихся операторов. В рамках упомянутых выше приближений удастся получить явные функции классических блоков.

Наиболее простым и разработанным является приближение двух тяжелых операторов [34; 50–56], в рамках которого в первом порядке НЛ приближения были явно найдены 4-точечные блоки с двумя тяжелыми операторами. Для n -точечного классического блока с двумя тяжелыми операторами с использованием *монодромного метода* получена система уравнений, определяющая данный блок [57]. Однако функция n -точечного классического блока с двумя тяжелыми операторами пока неизвестна в замкнутом виде и получение данной функции является одной из целей настоящей диссертации. Для многоточечных классических блоков также можно рассматривать другие конфигурации легких/тяжелых операторов, в частности, включающие три и более тяжелых оператора. Для анализа классических блоков с произвольным числом тяжелых операторов нужно обобщить монодромный метод вычисления n -точечных блоков с двумя тяжелыми операторами, что является одной из целей данной диссертационной работы.

Другим направлением исследований в контексте получения явных результатов является рассмотрение единичных (вакуумных) классических блоков, получающихся при обнулении одной или нескольких конформных размерностей. Было показано [34], что данные блоки связаны с энтропией запутывания, однако, обобщение этого утверждения на произвольные классические блоки по-

ка неизвестно. В свете этого, одними из целей данной диссертации являются вычисление многоточечных единичных блоков и построение теории возмущения над этими блоками. Пример подобной теории возмущений изучался в [54], где рассматривалось приближение сверхлегких операторов (SL), конформные размерности которых полагаются много меньшими конформных размерностей легких операторов.

Как было упомянуто ранее, в контексте $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия конформной теории поля на границе соответствует топологическая теория гравитации в трёхмерном пространстве времени. Классический предел отвечает малой гравитационной константе для теории в объеме согласно соотношению Брауна-Анно $c = 3R/2G_N$, где R - радиус AdS_3 [23]. В данном пределе примарным операторам граничной теории соответствуют частицы в AdS_3 с массами Δ/c , которые являются конечными в данном пределе. Дуальная реализация НЛ приближения, в свою очередь, разделяет эти частицы на тяжелые и легкие, причем тяжелые интерпретируются как топологические дефекты геометрии, а легкие - как пробные частицы, распространяющиеся на фоне геометрии, порожденной тяжелыми.

Ранее данные дуальные геометрии были изучены для случая двух тяжелых операторов [50] и было показано, что в зависимости от размерностей тяжелых операторов они определяются метрикой конической сингулярности или БТЗ черной дыры [58]. В общем случае⁵ дуальная трехмерная геометрия может быть описана метрикой Баньядоса [61], которая задает решение уравнений Эйнштейна с конформной симметрией на границе. Данная метрика параметризуется (анти)голоморфной функцией, которая в дуальной реализации НЛ приближения полагается равной вкладу тяжелых операторов в тензор энергии-импульса граничной теории. Описание дуальных геометрий для случая более чем двух тяжелых операторов в контексте $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия для классических конформных блоков с произвольным количеством тяжелых операторов неизвестно. Простейшим случаем является конфигурация трёх тяжелых операторов, которая исследуется в данной диссертационной работе. Также рассматривается метрика, генерируемая $(n - k)$ тяжелыми операторами.

Легкие операторы с точки зрения $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия дуальны пробным частицам, живущим на фоне AdS_3 с дефектами. Согласно голографической

⁵Заметим, что рассматривается и обратная задача, а именно построение дуальной геометрии исходя из конформных блоков [59; 60].

прескрипции, действие таких частиц как функции граничных условий равно вкладу легких операторов в классический конформный блок (с точностью до конформного преобразования специального вида). Для n -точечных классических конформных блоков с двумя тяжелыми операторами доказана теорема, утверждающая, что они голографически дуальны специальным геодезическим сетям, растянутым на двумерной гиперболической геометрии [57] с весами, равными массами пробных частиц. Данные геодезические сети состоят из $2n - 5$ сегментов мировых линий частиц, которые пересекаются в трехвалентных вершинах, координаты которых определяются условиями, следующими из минимальности длины сети. Однако, пока не найдены способы вычисления длин геодезических сетей, соответствующих классическим конформным блокам.

Перспективным направлением исследований является чисто геометрическая формулировка проблемы вычисления взвешенной длины геодезической сети. Оказывается, что задача о вычислении длины данной сети является задачей о *дереве Штейнера* на модели диска Пуанкаре, что позволяет использовать известные геометрические и тригонометрические подходы к этой задаче. Существенной проблемой является то, что вычисление длины сети, дуальной n -точечному классическому блоку, представляет собой проблему, которая, по видимому, может быть решена только в определенных приближениях. Одним из таких приближений оказывается приближение малых промежуточных весов [54], которое со стороны дуальной теории отвечает сверхлегкому приближению. Для полученных классических конформных блоков/длин геодезических сетей представляется возможным явно проверить $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствие.

Таким образом, целями данной диссертационной работы являются:

1. Развитие методов вычисления и получение явных функций классических конформных блоков, ассоциированных с алгеброй Вирасоро.
2. Построение дуальных трехмерных геометрий, голографически описывающих тяжелые операторы в классическом конформном блоке.
3. Анализ деревьев Штейнера на двумерных геометриях, вычисление их длин. Явная проверка дуальности между классическими конформными блоками и длинами данных деревьев.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать методы вычисления многоточечных классических конформных блоков с тремя и более тяжелыми операторами.
2. Получить явный вид функций единичных многоточечных классических блоков с двумя тяжелыми операторами.
3. Разработать процедуру вычисления поправок к n -точечным единичным классическим блокам в сверхлегком приближении.
4. Описать трёхмерную дуальную геометрию, продуцируемую тяжелыми операторами в граничной теории.
5. Сформулировать дуальное описание легких операторов в граничной теории.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Формулировка монодромного метода вычисления n -точечных классических конформных блоков с произвольным числом тяжелых операторов.
2. Явные выражения для функций n -точечных единичных классических блоков с двумя тяжелыми операторами, процедура факторизации n -точечных единичных классических блоков.
3. Поправки к многоточечным единичным классическим блокам в сверхлегком приближении.
4. Конструкция трёхмерной геометрии, порождаемой тремя и более тяжелыми операторами на границе.
5. Описание легких операторов классического блока в терминах деревьев Штейнера, явные выражения для длин данных деревьев.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к продвижению в понимании $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия в классическом пределе. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Приведенные в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

Научная и практическая значимость. Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Полученные в работе выражения для классических конформных блоков могут быть использованы для вычисления энтропии запутывания, кор-

реляторов ОТОС, анализа феномена скрамблинга [62; 63], а также для вычислений в теории Лиувилля. Конструкции, связанные с монодромным методом, могут быть перенесены на случаи конформных блоков, которые ассоциированы с W_N [64] и $VM\mathcal{S}_3$ алгебрами [65; 66]. Методы построения трехмерных геометрий, продуцируемых тяжелыми операторами, могут быть использованы для анализа дуальной реализации НЛ приближения в следующих порядках. Разработанные методы вычисления длин геодезических сетей могут быть использованы для дальнейшей проверки AdS_3/CFT_2 соответствия в различных приближениях.

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в 4 статьях [67–70] в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Помимо этого, основные результаты диссертации докладывались на семинарах ОТФ ФИАН, а также на следующих конференциях:

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017» (МГУ, 10 - 14 апреля 2017, Москва, Россия)
2. Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике (Институт теоретической и экспериментальной физики имени А.И. Алиханова (ИТЭФ), 25 - 28 ноября 2019, Москва, Россия)
3. Международная конференция «Hamilton School on Mathematical Physics» (Trinity College Dublin, 24 - 28 августа 2020, Дублин, Ирландия)
4. Международная конференция «Strings and Fields 2020» (Институт теоретической физики им. Х. Юкавы (YITP), 16 - 20 ноября 2020, Киото, Япония)

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и четырех приложений. Полный объём диссертации составляет 106 страниц с 21 рисунком и одной таблицей. Список литературы содержит 110 наименований.

В **Главе 1** рассматриваются многоточечные классические конформные блоки с произвольным числом тяжелых операторов. Для вычисления данных блоков в рамках НЛ приближения формулируется монодромный метод. Оказывается, что монодромные уравнения, определяющие классический конформный

блок, упрощаются, если ввести *голографические переменные*, рассмотренные в Разделе 1.3.

Для случая двух и трёх тяжелых операторов система монодромных уравнений рассматривается в Разделах 1.4. и 1.5. В Разделе 1.6. доказано факторизационное соотношение для единичных многоточечных блоков. Дальнейшим развитием методов вычисления данных блоков является рассмотрение дополнительного сверхлегкого приближения в Разделе 1.7. В этом приближении был вычислен ряд классических блоков общего положения, в частности, $(2M + 2)$ -точечные блоки с сверхлегкими операторами, где $M = 3, 4, \dots$

В **Главе 2** описана дуальная интерпретация тяжелых операторов классических конформных блоков, рассмотренных в **Главе 1**. Проанализирован случай двух и трёх тяжелых операторов и построены соответствующие трёхмерные геометрии. Для метрики, генерируемой $(n - k)$ тяжелыми операторами, было найдено описание в терминах конических дефектов. Также вычислены длины простейших геодезических на данной геометрии и показано их соответствие $(n - k + 1)$ -точечным классическим конформным блокам LH^{n-k} .

В **Главе 3** рассматривается дуальное описание легких операторов классических конформных блоков. Базируясь на доказанной в [57] теореме о дуальности классических конформных блоков и геодезических сетей, формулируется геометрический подход к вычислению таких сетей. Строятся основные объекты, аналогичные геодезическим сетям - голографические деревья Штейнера. Длины таких деревьев вычисляются методами гиперболической тригонометрии и явной проверкой показывается дуальность длин данных деревьев соответствующим классическим конформным блокам. Также строится теория возмущения, отвечающая SL приближению в граничной теории и вычисляются длины полученных деформированных деревьев Штейнера.

В **приложениях А - Г** собраны вспомогательные результаты по каждой из глав, включающие доказательства и технические детали.

Благодарности. Я хотел бы выразить признательность и поблагодарить моего научного руководителя Алкалаева Константина Борисовича, без консультаций и советов которого данная работа была бы невозможна.

Глава 1. Классические конформные блоки

1.1 Двумерная коформная теория поля

Конформная группа в $D = 2$ дается $SL(2, \mathbb{C})$ и соответствующая ей алгебра $sl(2, \mathbb{C})$ допускает бесконечномерное центральное расширение. Данная расширенная алгебра представляет собой прямую сумму двух копий алгебры Вирасоро и обозначается $Vir \oplus \overline{Vir}$. Коммутационные соотношения генераторов алгебры Вирасоро имеют вид (аналогичные соотношения имеют место и для генераторов \overline{Vir} , которые обозначаются \bar{L}_n)

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n,0}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (1.1.1)$$

где c в самом общем случае является комплексным числом и называется центральным зарядом. В этой алгебре существует замкнутая подалгебра, обозначаемая $sl(2, \mathcal{R})$ включающая генераторы $L_{\pm 1,0}$. Эта алгебра часто называется глобальной.

Рассмотрим вектора старшего веса (или примарные состояния) $|\Delta, \bar{\Delta}\rangle$, которые определяются следующим образом

$$L_n|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = 0, \quad n > 0, \quad L_0|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \Delta|\Delta, \bar{\Delta}\rangle, \quad (1.1.2)$$

где число Δ называется (голоморфной) *конформной размерностью*. Аналогичные соотношения имеют место и для алгебры \overline{Vir} . С точки зрения теории поля вектора $|\Delta, \bar{\Delta}\rangle$ соответствуют состояниям с энергией основного состояния $\Delta + \bar{\Delta}$. Действуя генераторами Вирасоро с отрицательными индексами на такой вектор, мы получим модуль Верма $\mathcal{V}_{\Delta, \bar{\Delta}}$, образованный базисными векторами

$$L_{-k_1}^{i_1} \cdots L_{-k_n}^{i_n} |\Delta, \bar{\Delta}\rangle, \quad (1.1.3)$$

, где полагается $1 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_n$. Состояния этого вида называются потомками примарного состояния. Для них можно определить уровень $N = i_1 k_1 + \cdots + i_n k_n$, а также можно показать, что вес такого состояния на N -ом уровне равен $\Delta + N$.

Описанные выше состояния реализуются *примарными операторами*. Иными словами, каждому состоянию старшего веса мы можем поставить в соответ-

стве примарный оператор $\mathcal{O}_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z})$

$$|\Delta, \bar{\Delta}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \mathcal{O}_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z})|0\rangle. \quad (1.1.4)$$

Состояние $|0\rangle$ в формуле выше обозначает вакуум, соответствует $\Delta = 0$ и является инвариантным относительно действия глобальной алгебры. Относительно локальных конформных преобразований $z \rightarrow w(z)$ примарные операторы преобразуются следующим образом

$$\mathcal{O}'_{\Delta, \bar{\Delta}}(w, \bar{w}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-\Delta} \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{\Delta}} \mathcal{O}_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}). \quad (1.1.5)$$

Основным объектом изучения в конформной теории поля являются корреляционные функции примарных операторов [41]. Вид 2, 3-точечных корреляционных функций полностью фиксируется конформной симметрией, а для корреляторов с $n \geq 4$ - с точностью до функции ангармонических отношений. Тем не менее, можно анализировать такие корреляторы с помощью разложения операторного произведения (ОРЕ), в рамках которого произведение $\mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1)\mathcal{O}_2(z_2, \bar{z}_2)$ раскладывается по базису конформной теории поля следующим образом

$$\mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1)\mathcal{O}_2(z_2, \bar{z}_2) = \sum_{p \in S} C_{12p}(z_1 - z_2)^{\Delta_p - \Delta_1 - \Delta_2} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\bar{\Delta}_p - \bar{\Delta}_1 - \bar{\Delta}_2} [\mathcal{O}_p](z_1) [\bar{\mathcal{O}}_p](\bar{z}_1), \quad (1.1.6)$$

где $[\mathcal{O}_p](z_1) = \mathcal{O}_p(z_1) + (z_1 - z_2)\beta_{12}^{p(1)}\partial_{z_1}\mathcal{O}_p(z_1) + \dots$ обозначает вклад конформного семейства примарного оператора \mathcal{O}_p с размерностью $\tilde{\Delta}_p$. $[\bar{\mathcal{O}}_p](\bar{z}_1)$ задается аналогично, константы $\beta_{12}^{p(1)}$ определяются конформной симметрией [71]. Заметим, что правая часть соотношения (1.1.6) правильно преобразуется при конформных преобразованиях (1.1.5) и, кроме константы C_{12p} (называемой структурной константой), полностью определяется конформной симметрией. Таким образом, любая n -точечная корреляционная функция может быть сведена к $(n - 1)$ -точечной и так далее, до тех пор, пока она сведется к 3-точечной.

Для многоточечных корреляторов существуют различные возможности для разложения (1.1.6), получающиеся последовательным взятием ОРЕ двух примарных операторов. Здесь будут рассматриваться разложение в s -канале, когда в n -точечном корреляторе берется ОРЕ двух первых операторов, после чего получившийся оператор сливается с третьим оператором в корреляторе и

так далее. Тогда n -точечная корреляционная функция может быть представлена в виде разложения по *конформным блокам*

$$\langle \mathcal{O}_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \mathcal{O}_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \sum_{p_1, \dots, p_{n-3}} \Pi(\tilde{\Delta}, \Delta, c) \mathcal{F}_n(z | \Delta_i, \tilde{\Delta}_p, c) \bar{\mathcal{F}}_n(\bar{z} | \bar{\Delta}_i, \tilde{\Delta}_p, c), \quad (1.1.7)$$

где голоморфная функция $\mathcal{F}_n(z | \Delta_i, \tilde{\Delta}_p, c)$ называется *n -точечным конформным блоком*. Она является аналитической функцией точек вставок примарных операторов $z = \{z_1, \dots, z_n\}$ и также зависит от *внешних* конформных размерностей операторов Δ_i , $i = 1, \dots, n$, от *промежуточных* конформных размерностей $\tilde{\Delta}_p$, $p = 1, \dots, n - 3$ и центрального заряда c [49; 71]. Сумма в выражении (1.1.7) осуществляется по $n - 3$ промежуточным каналам и $\Pi(\Delta, \tilde{\Delta}, c)$ обозначает следующее произведение структурных констант

$$\Pi(\tilde{\Delta}, \Delta, c) = C_{\Delta_1, \Delta_2, \tilde{\Delta}_1} \left(\prod_{i=1}^{n-4} C_{\tilde{\Delta}_i, \Delta_{i+2}, \tilde{\Delta}_{i+1}} \right) C_{\tilde{\Delta}_{n-3}, \Delta_{n-1}, \Delta_n}. \quad (1.1.8)$$

Конформный блок, соответствующий n -точечной корреляционной функции примарных операторов с конформными размерностями Δ_i , $i = 1, \dots, n$, представляет собой вклад в корреляционную функцию набора $n - 3$ примарных операторов из спектра теории с промежуточными размерностями $\tilde{\Delta}_p$, $p = 1, \dots, n - 3$. Он полностью фиксируется конформной симметрией, поэтому конформные блоки могут пониматься как базисные элементы в пространстве корреляторов. Несмотря на то, что данный конформный блок можно представить в виде ряда по z_i , вычисления для каждого члена довольно быстро усложняются и явный вид конформных блоков как функций точек вставок операторов пока неизвестен. В свете этого необходимо прибегать к приближениям, в которых выражения для конформных блоков могут быть найдены.

Важным частным случаем является равенство промежуточной размерности нулю $\tilde{\Delta}_p = 0$. Тогда примарный оператор \mathcal{O}_p представляет собой единичный оператор и в силу его вырожденности на операторы в корреляционной функции накладываются дополнительные условия, называемые *правилами слияния*

$$\tilde{\Delta}_s = 0 : \quad \tilde{\Delta}_{s-1} = \Delta_{s+1}, \quad \tilde{\Delta}_{s+1} = \Delta_{s+2}. \quad (1.1.9)$$

1.2 Классические конформные блоки и монодромный метод

В данной диссертации будут рассмотрены голоморфные n -точечные конформные блоки в режиме большого центрального заряда $c \rightarrow \infty$ (также называемым классическим пределом). Кроме того предполагается, что конформные размерности, от которых зависит конформный блок (как внешние, так и промежуточные) линейны по центральному заряду при $c \rightarrow \infty$. С точностью до высокого порядка по $1/c$ проверено,¹ что при этих двух предположениях конформный блок представлен в следующем экспоненциальном виде [42]

$$\mathcal{F}_n(x|\Delta, \tilde{\Delta}, c) \Big|_{c \rightarrow \infty} \rightarrow \exp \left[\frac{c}{6} f_n(x|\epsilon, \tilde{\epsilon}) \right], \quad \epsilon_i = \frac{6\Delta_i}{c}, \quad \tilde{\epsilon}_p = \frac{6\tilde{\Delta}_p}{c}, \quad (1.2.1)$$

где функция $f_n(x|\epsilon, \tilde{\epsilon})$ называется *классическим конформным блоком*, который зависит от центрального заряда только через отношения $\epsilon, \tilde{\epsilon}$, называемые *классическими размерностями*. Несмотря на значительный прогресс в их изучении, классические конформные блоки неизвестны в замкнутой форме.

Монодромный метод. Для вычисления классических конформных блоков используется монодромный метод [34; 50; 54; 57; 74–79], здесь изложение следует работе [69]. В рамках данного метода рассматривается вспомогательный $(n+1)$ -точечный конформный блок $\Psi_n(y|x)$, который получается вставкой в корреляционную функцию дополнительного вырожденного оператора $V_{(2,1)}(y)$ с размерностью $\Delta_{(2,1)} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2c}$. При $c \rightarrow \infty$, $\Delta_{(2,1)} \rightarrow -\frac{1}{2}$ в отличие от внешних/промежуточных размерностей операторов n -точечной функции, линейных по центральному заряду. Поэтому в классическом пределе, вспомогательный $(n+1)$ -точечный конформный блок факторизуется в произведение следующего вида

$$\Psi_n(y|x) \Big|_{c \rightarrow \infty} \rightarrow \psi(y|x) \exp \left[\frac{c}{6} f_n(x|\epsilon, \tilde{\epsilon}) \right], \quad (1.2.2)$$

где $f_n(x|\epsilon, \tilde{\epsilon})$ есть n -точечный классический блок (1.2.1), а функция $\psi(y|x)$ обозначает вклад оператора $V_{(2,1)}(y)$ в пределе $c \rightarrow \infty$.

В силу того, что оператор $V_{(2,1)}(y)$ соответствует вырожденному представлению алгебры Вирасоро, вспомогательный конформный блок удовлетворяет

¹Этот вопрос также был рассмотрен в работе [72] и помимо этого, существуют аналитические доказательства экспоненцирования конформного блока Вирасоро, см. [73].

уравнению Белавина-Полякова-Замолодчикова (БПЗ) [49], которое может быть переписано в виде уравнения на функцию $\psi(y|x)$

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + T(y|x) \right] \psi(y|x) = 0, \quad T(y|x) = \sum_{m=1}^n \frac{\epsilon_m}{(y - x_m)^2} + \frac{c_m}{y - x_m}, \quad (1.2.3)$$

$$c_m = \frac{\partial f_n(x|\epsilon, \tilde{\epsilon})}{\partial x_m}.$$

Здесь $T(y|x)$ представляет собой тензор энергии-импульса, который имеет n сингулярностей в точках с координатами x_m , а уравнение (1.2.3) параметризуется *аксессуарными параметрами* c_m , построенными по n -точечному блоку. В силу того, что асимптотика $T(y|x)$ при $y \rightarrow \infty$ фиксируется конформной инвариантностью и дается $T(y|x) \sim y^{-4}$, имеют место три линейных уравнения на аксессуарные параметры

$$\sum_{m=1}^n c_m = 0, \quad \sum_{m=1}^n (c_m x_m + \epsilon_m) = 0, \quad \sum_{m=1}^n (c_m x_m^2 + 2\epsilon_m x_m) = 0. \quad (1.2.4)$$

Будучи разрешенными, эти три условия фиксируют 3 аксессуарных параметра как функции $n - 3$ независимых аксессуарных параметров, что, после нахождения выражений для c_m , дает нам систему из $n - 3$ линейных уравнений в частных производных. После интегрирования данных уравнений, классический конформный блок является функцией $n - 3$ переменных, что находится в полном согласии с тем фактом, что $SL(2, \mathcal{C})$ инвариантность позволяет фиксировать значения трех из n точек вставки операторов и тем самым исключить зависимость от них в функции классического конформного блока.

Уравнение (1.2.3) представляет собой уравнение типа Фукса с n регулярными сингулярными точками [80]. Решения таких уравнений известны только для случаев $n = 1, 2, 3$, поэтому далее рассматривается так называемое *приближение легких и тяжелых операторов* (НЛ) [50].

Приближение легких и тяжелых операторов. В НЛ приближении внешние классические размерности k операторов много меньше, чем размерности

остальных $(n - k)$ операторов

$$\epsilon_i \ll \epsilon_j, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = k + 1, \dots, n. \quad (1.2.5)$$

Иными словами, операторы разделяются на *легкий* и *тяжелый* секторы. В дальнейшем классические блоки с $(n - k)$ тяжелыми и k легкими операторами будут обозначаться $L^k H^{n-k}$. Координаты операторов также разделяются на два набора

$$x = \{z, \mathbf{z}\} \equiv \{z_1, \dots, z_k, \mathbf{z}_{k+1}, \dots, \mathbf{z}_n\}. \quad (1.2.6)$$

где жирные буквы соответствуют координатам тяжелых операторов. Далее, разложим все величины, фигурирующие в уравнении (1.2.3) по теории возмущений

$$\begin{aligned} \psi(y|x) &= \psi^{(0)}(y|\mathbf{z}) + \psi^{(1)}(y|x) + \dots, \quad T(y|x) = T^{(0)}(y|\mathbf{z}) + T^{(1)}(y|x) + \dots, \\ f_n(x|\epsilon, \tilde{\epsilon}) &= f_n^{(0)}(\mathbf{z}|\epsilon, \tilde{\epsilon}) + f_n^{(1)}(x|\epsilon, \tilde{\epsilon}) + \dots, \quad c_m(x) = c_m^{(0)}(\mathbf{z}) + c_m^{(1)}(x) + \dots, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

причем по построению $c_i^{(0)} = 0$, $i = 1, \dots, k$. Аналогично можно поступить с уравнениями (1.2.4)

$$\sum_{j=k+1}^n c_j^{(0)} = 0, \quad \sum_{j=k+1}^n (c_j^{(0)} \mathbf{z}_j + \epsilon_j) = 0, \quad \sum_{j=k+1}^n (c_j^{(0)} \mathbf{z}_j^2 + 2\epsilon_j \mathbf{z}_j) = 0, \quad (1.2.8)$$

$$\sum_{m=1}^n c_m^{(1)} = 0, \quad \sum_{m=1}^n c_m^{(1)} z_m + \sum_{i=1}^k \epsilon_i = 0, \quad \sum_{m=1}^n c_m^{(1)} z_m^2 + \sum_{i=1}^k 2\epsilon_i z_i = 0. \quad (1.2.9)$$

Решения уравнения (1.2.3) в нулевом и первом порядках. В нулевом порядке теории возмущений уравнение (1.2.3) имеет следующий вид

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + T^{(0)}(y|\mathbf{z}) \right] \psi(y|\mathbf{z}) = 0, \quad T^{(0)}(y|\mathbf{z}) = \sum_{j=k+1}^n \frac{\epsilon_j}{(y - \mathbf{z}_j)^2} + \frac{c_j^{(0)}}{y - \mathbf{z}_j}. \quad (1.2.10)$$

Здесь стоит подчеркнуть, что классический конформный блок, соответствующий тяжелому сектору полей, полагается известным. Тогда аксессуарные пара-

метры могут быть явно найдены

$$c_j^{(0)} = \frac{\partial f_n^{(0)}(\mathbf{z}|\epsilon, \tilde{\epsilon})}{\partial \mathbf{z}_j}, \quad j = k+1, \dots, n, \quad (1.2.11)$$

и в итоге получаются два линейно независимых решения уравнения (1.2.10)

$$\psi_{\pm}^{(0)} = \psi_{\pm}^{(0)}(y|\mathbf{z}, \epsilon, \tilde{\epsilon}). \quad (1.2.12)$$

Как было замечено ранее, явный вид данных решений найден только для случая двух [50] и трех тяжелых операторов [68]. Для четырех и более тяжелых операторов решения (1.2.12) известны в виде рядов по \mathbf{z}_j . Вблизи особых точек \mathbf{z}_j поведение данных решений определяется наиболее сингулярными членами (при $y \rightarrow \mathbf{z}_j$) в уравнении (1.2.10) и имеет вид

$$\psi_{\pm}^{(0)} \sim (y - \mathbf{z}_j)^{\frac{1 \pm \alpha_j}{2}}, \quad \alpha_j = \sqrt{1 - 4\epsilon_j}, \quad j = k+1, \dots, n, \quad (1.2.13)$$

где предполагается, что²

$$0 < \epsilon_j < \frac{1}{4}, \quad 0 < \alpha_j < 1. \quad (1.2.14)$$

В первом порядке уравнение (1.2.3) сводится к

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + T^{(0)}(y|\mathbf{z}) \right] \psi^{(1)}(y|z, \mathbf{z}) = -T^{(1)}(y|z, \mathbf{z}) \psi^{(0)}(y|\mathbf{z}), \quad (1.2.15)$$

$$T^{(1)}(y|z, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\epsilon_i}{(y - z_i)^2} + \frac{c_i^{(1)}}{y - z_i} \right) + \sum_{j=k+1}^n \frac{c_j^{(1)}}{y - \mathbf{z}_j}.$$

Данное уравнение представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение с тем же оператором, что и в (1.2.10), в левой части и его решение может быть найдено методом вариации произвольных постоянных. Две ветви решений

²Это условие соответствует коническим сингулярностям в AdS_3 . Для двух тяжелых операторов с размерностью $\epsilon_{n-1} = \epsilon_n \equiv \epsilon_h$ было показано, что результаты можно продолжить в область $\epsilon_h > \frac{1}{4}$ [50; 81]. Для трех и более фоновых операторов можно было бы ожидать, что диапазон $\epsilon_j \geq \frac{1}{4}$ будет соответствовать множественным БТЗ-подобным решениям, хотя их явный вид и общие свойства пока неизвестны (см. также обсуждения в [82; 83]). Также для нескольких фоновых операторов можно рассматривать комбинацию конических особенностей и БТЗ черных дыр.

могут быть переписаны через (1.2.12) в виде

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}^{(1)}(y|z, \mathbf{z}) = \frac{1}{W(\mathbf{z})} \left(\psi_{+}^{(0)}(y|\mathbf{z}) \int dy \psi_{-}^{(0)}(y|\mathbf{z}) T^{(1)}(y|z, \mathbf{z}) \psi_{\pm}^{(0)}(y|\mathbf{z}) \right. \\ \left. - \psi_{-}^{(0)}(y|\mathbf{z}) \int dy \psi_{+}^{(0)}(y|\mathbf{z}) T^{(1)}(y|z, \mathbf{z}) \psi_{\pm}^{(0)}(y|\mathbf{z}) \right), \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

где детерминант Вронского не зависит от y и дается выражением

$$W(\mathbf{z}) \equiv -\psi_{+}^{(0)}(y|\mathbf{z}) \frac{d\psi_{-}^{(0)}(y|\mathbf{z})}{dy} + \psi_{-}^{(0)}(y|\mathbf{z}) \frac{d\psi_{+}^{(0)}(y|\mathbf{z})}{dy}. \quad (1.2.17)$$

Монодромия решений. В рамках монодромного метода сравниваются матрицы монодромии решений уравнения типа Фукса (1.2.3) и матрицы монодромии вспомогательного $(n+1)$ -точечного блока. Условия равенства собственных значений этих матриц приводят к ограничениям на аксессуарные параметры, которые после интегрирования дают классический конформный блок.

Рассмотрим контуры Γ_p , охватывающие точки $\{z_1, \dots, z_k, \mathbf{z}_{k+1}, \dots, \mathbf{z}_{p+1}\}$, где $p = 1, \dots, n-3$. Матрица монодромии $M_{ab}(\Gamma_p|z, \mathbf{z})$ решений уравнения (1.2.3) вдоль этих контуров определяется как

$$\psi_a(\Gamma_p \circ y|z, \mathbf{z}) = M_{ab}(\Gamma_p|z, \mathbf{z}) \psi_b(y|z, \mathbf{z}), \quad a, b = \pm, \quad (1.2.18)$$

где $\Gamma_p \circ y$ обозначает обход по контуру Γ_p . В рамках приближения легких и тяжелых операторов (1.2.7) эта матрица монодромии тоже должна быть разложена вплоть до первого порядка по теории возмущений

$$M_{ab}(\Gamma_p|z, \mathbf{z}) = M_{ab}^{(0)}(\Gamma_p|\mathbf{z}) + M_{ab}^{(1)}(\Gamma_p|z, \mathbf{z}) + \dots, \quad (1.2.19)$$

где $M_{ab}^{(0)}(\Gamma_p|\mathbf{z})$ соответствует монодромии решений в нулевом порядке (1.2.12), $M_{ab}^{(1)}(\Gamma_p|z, \mathbf{z})$ определяется решениями в первом порядке (1.2.16). В силу (1.2.16) матрица $M_{ab}^{(1)}(\Gamma_p|z, \mathbf{z})$ может быть представлена в виде следующего произведения

$$M_{ab}^{(1)}(\Gamma_p|z, \mathbf{z}) = -M_{ac}^{(0)}(\Gamma_p|\mathbf{z}) I_{cb}(\Gamma_p|z, \mathbf{z}), \quad I_{cb} = \begin{pmatrix} I_{++}^{(p)} & I_{+-}^{(p)} \\ I_{-+}^{(p)} & I_{--}^{(p)} \end{pmatrix}, \quad (1.2.20)$$

где

$$I_{+\pm}^{(p)}(z, \mathbf{z}) = \frac{1}{W(\mathbf{z})} \int_{\Gamma_p} dy \psi_{\pm}^{(0)}(y|\mathbf{z}) T^{(1)}(y|z, \mathbf{z}) \psi_{\mp}^{(0)}(y|\mathbf{z}) , \quad (1.2.21)$$

$$I_{-\mp}^{(p)}(z, \mathbf{z}) = -\frac{1}{W(\mathbf{z})} \int_{\Gamma_p} dy \psi_{\pm}^{(0)}(y|\mathbf{z}) T^{(1)}(y|z, \mathbf{z}) \psi_{-}^{(0)}(y|\mathbf{z}) .$$

Данные интегралы могут быть явно вычислены по вычетам, так как полюсы $T^{(1)}$ задаются (1.2.15) и кроме того, из (1.2.13) следует, что

$$\psi_{-}^{(0)} \psi_{-}^{(0)} \sim (y - \mathbf{z}_j)^{1-\alpha_j} , \quad \psi_{+}^{(0)} \psi_{+}^{(0)} \sim (y - \mathbf{z}_j)^{1+\alpha_j} , \quad \psi_{-}^{(0)} \psi_{+}^{(0)} \sim (y - \mathbf{z}_j) , \quad (1.2.22)$$

в предположении, что выполнены условия (1.2.14).

Собственная матрица монодромии. С другой стороны, монодромия вспомогательного $(n+1)$ -точечного конформного блока по контурам Γ_p , введенным ранее, может быть найдена непосредственно из правил слияния. Заметим сначала, что в пределе $c \rightarrow \infty$ оператор $V_{(2,1)}(y)$ перестановочен с примарными операторами изначальной n -точечной корреляционной функции. Далее, рассмотрим вставку этого оператора $V_{(2,1)}(y)$ между примарными операторами с координатами x_k и x_{k+1} . Так как в силу правил слияния размерности промежуточных операторов $\tilde{\Delta}_k$ и $\tilde{\Delta}_{k+1}$, соединенных с вырожденным оператором, связаны соотношением

$$\Delta_p - \tilde{\Delta}_{p+1} - \Delta_{(2,1)} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\tilde{\epsilon}_p} \right) , \quad (1.2.23)$$

в пределе $c \rightarrow \infty$. После рассмотрения ОРЕ в конформном блоке вклад $(x_k - y)^{\tilde{\Delta}_{k+1} - \Delta_{(2,1)} - \tilde{\Delta}_k}$ будет доминирующим. В силу условия (1.2.23), обходя по замкнутому контуру вокруг точки x_k , мы получаем матрицу монодромии вида

$$\tilde{M}_p = - \begin{pmatrix} e^{i\pi\gamma_p} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi\gamma_p} \end{pmatrix} , \quad \gamma_p = \sqrt{1 - 4\tilde{\epsilon}_p} , \quad p = 1, \dots, n-3 , \quad (1.2.24)$$

где различным p соответствуют различные варианты вставки вспомогательного оператора $V_{(2,1)}(y)$ в конформный блок.

Собственные значения этой матрицы должны совпадать с собственными значениями матрицы (1.2.19). В данной работе будет рассматриваться только нулевой и первый порядок теории возмущений в рамках приближения легких и тяжелых операторов. Это условие дает $n-3$ алгебраических уравнений на ак-

сессорные параметры, называемые *монодромными уравнениями*. Заметим, если рассматривать монодромные уравнения вместе с условиями (1.2.9), что соответствует случаю ненарушенной $sl(2, \mathcal{C})$ симметрии, мы приходим к n уравнениям на n аксессуарных параметров.

1.3 Голографические переменные и униформизация

В этом Разделе будет рассмотрена новая параметризация, удобная для анализа монодромных уравнений в случае произвольного количества тяжелых операторов. Определим *голографическую функцию* $w(y|\mathbf{z})$ следующим образом [69]

$$w(y|\mathbf{z}) \equiv \frac{\psi_+^{(0)}(y|\mathbf{z})}{\psi_-^{(0)}(y|\mathbf{z})}, \quad w'(y|\mathbf{z}) = \frac{W(\mathbf{z})}{\left(\psi_-^{(0)}(y|\mathbf{z})\right)^2}, \quad (1.3.1)$$

где $\psi_{\pm}^{(0)}(y|\mathbf{z})$ - решения в нулевом порядке (1.2.12) и штрих обозначает производную по y . Второе соотношение получено с использованием (1.2.17). Остановимся подробнее на свойствах голографической функции. Так как любая линейная комбинация решений уравнения (1.2.10) тоже является решением, голографическая функция определена с точностью до произвольного дробно-линейного преобразования. Вблизи точек \mathbf{z}_j она ведет себя как

$$w(y|\mathbf{z}) \sim (y - \mathbf{z}_j)^{\alpha_j}, \quad w'(y|\mathbf{z}) \sim (y - \mathbf{z}_j)^{\alpha_j - 1}, \quad (1.3.2)$$

где предполагается, что выполнено условие (1.2.14).

Введя голографическую функцию $w(y|\mathbf{z})$, определим *голографические переменные* как значения данной функции в точках вставок операторов легкого сектора $z = \{z_1, \dots, z_k\}$ и рассмотрим следующее отображение

$$\{z_1, \dots, z_k, \mathbf{z}_{k+1}, \dots, \mathbf{z}_n\} \rightarrow \{w(z_1|\mathbf{z}), \dots, w(z_k|\mathbf{z}), \mathbf{z}_{k+1}, \dots, \mathbf{z}_n\}, \quad (1.3.3)$$

которое не затрагивает координаты операторов тяжелого сектора в силу $w(\mathbf{z}_j|\mathbf{z}) = 0$, $j = k + 1, \dots, n$, что следует из (1.3.2). Введем обозначение

$$w_i \equiv w(z_i|\mathbf{z}), \quad i = 1, \dots, k, \quad (1.3.4)$$

и будем также называть w_i голографическими переменными. Данные переменные играют важную роль в дуальном описании классических конформных блоков, что будет объяснено в Главе 2. Заметим также, что отображение, связывающее голографические переменные и координаты x , является обратимым с невырожденной матрицей Якоби, которая равна $J_{ij} = w'_i \delta_{ij}$.

Монодромные интегралы. В терминах голографических переменных монодромные интегралы (1.2.21) имеют вид

$$\begin{aligned} I_{+-}^{(p)}(x) &= \int_{\Gamma_p} dy \frac{w^2(y|\mathbf{z})}{w'(y|\mathbf{z})} T^{(1)}(y|x), & I_{-+}^{(p)}(x) &= - \int_{\Gamma_p} dy \frac{1}{w'(y|\mathbf{z})} T^{(1)}(y|x), \\ I_{++}^{(p)}(x) &= -I_{--}^{(p)}(x) = \int_{\Gamma_p} dy \frac{w(y|\mathbf{z})}{w'(y|\mathbf{z})} T^{(1)}(y|x), \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

и вычисляются с помощью вычетов

$$\begin{aligned} \frac{I_{++}^{(p)}}{2\pi i} &= \sum_{i=1}^{\min\{p+1,k\}} (X_i w_i + \epsilon_i), \\ \frac{I_{-+}^{(p)}}{2\pi i} &= - \sum_{i=1}^{\min\{p+1,k\}} X_i, \\ \frac{I_{+-}^{(p)}}{2\pi i} &= \sum_{i=1}^{\min\{p+1,k\}} (X_i w_i^2 + 2\epsilon_i w_i), \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

где вместо аксессуарных параметров c_m были введены новые переменные, определяющие конформный блок

$$X_i = \frac{1}{w'_i} \left(c_i^{(1)} - \epsilon_i \frac{w''_i}{w'_i} \right), \quad i = 1, \dots, k, \quad Y_j = c_j^{(1)}, \quad j = k+1, \dots, n. \quad (1.3.7)$$

Здесь важно сделать несколько комментариев. Во-первых, существенно, что при рассмотрении контуров, охватывающих точки \mathbf{z}_j , первые два интеграла в (1.3.5) не определены для произвольных значений α_j в силу того, что подынтегральные выражения могут содержать точки ветвления. Однако, можно показать,

что интегралы $I_{+-}^{(p)}$ и $I_{-+}^{(p)}$ при $p > k - 1$ не входят в монодромные уравнения, в отличие от $I_{++}^{(p)}$, определенного для всех контуров и значений α_j . Во-вторых, значения монодромного интеграла $I_{++}^{(p)}$ для всех контуров, охватывающих точки вставок тяжелых операторов, равны $I_{++}^{(k-1)}$. В-третьих, эти интегралы переписаны в только в терминах голографических переменных (1.3.4) и величин X_i , ассоциированных с аксессуарными параметрами $c_i^{(1)}$ легкого сектора конформного блока. Все интегралы зависят от \mathbf{z}_j только неявно через голографические переменные. Кроме того, интересно, что структура монодромных интегралов напоминает условия на аксессуарные параметры (1.2.4).

Монодромные уравнения. Сопоставление собственных значений матриц монодромии (1.2.20) и (1.2.24) в нулевом порядке дает условие³

$$\epsilon_{j+1} = \tilde{\epsilon}_j, \quad j = k + 1, \dots, n - 3. \quad (1.3.8)$$

Это означает, что на тяжелый сектор накладываются ограничения, а именно, все пары смежных внешних и промежуточных размерностей тяжелых операторов n -точечного классического блока $f(z, \mathbf{z}|\epsilon, \tilde{\epsilon})$ приравниваются, так что тяжелый классический блок $f^{(0)}(\mathbf{z}|\epsilon, \tilde{\epsilon})$ не является общим. Другими словами, некоторые из коэффициентов разложения в координатах $f(z, \mathbf{z}|\epsilon, \tilde{\epsilon})$ содержат полюса в легких размерностях ϵ_i с префакторами $(\epsilon_{j+1} - \tilde{\epsilon}_j)$. Предполагается, что это вырождение снимается при рассмотрении следующих порядков теории возмущения.

В первом порядке монодромные уравнения имеют вид

$$I_{++}^{(p)} I_{++}^{(p)} + I_{+-}^{(p)} I_{-+}^{(p)} = -4\pi^2 \tilde{\epsilon}_p^2, \quad p = 1, \dots, k - 1, \quad (1.3.9)$$

$$I_{++}^{(p)} = I_{++}^{(k-1)} = 0, \quad p = k, \dots, n - 3. \quad (1.3.10)$$

Как упоминалось ранее, только k уравнений в (1.3.9) и (1.3.10) являются независимыми, так что после решения этих уравнений остаются k дифференциальных уравнений первого порядка вида $X_i = X_i(w_i|\epsilon, \tilde{\epsilon})$ для k голографических переменных, что позволяет вычислить классический конформный блок только в терминах голографических переменных w_i . Однако данные уравнения представ-

³Впервые условие похожего типа возникает в случае трех тяжелых операторов, для более подробного анализа см. [68].

ляют собой систему k квадратных уравнений, дополненных линейными уравнениями (1.3.10) и их решение удается найти только в частных случаях. Тем не менее, для произвольного классического конформного блока можно сформулировать ряд важных свойств, которые обсуждаются в следующем параграфе.

Легкий сектор классического конформного блока и свойство униформизации. Рассмотрим подробнее легкий сектор классического конформного блока. Как было показано ранее, монодромные интегралы определяются только голографическими переменными w_i . Несмотря на это, аксессуарные параметры $c_i^{(1)}$ содержат зависимость и от вторых производных этих переменных, поэтому нужно проанализировать, как классический конформный блок меняется при преобразовании (1.3.3). Так как данное отображение является конформным, мы имеем

$$f_n^{(1)}(w(x), w'(x)|\epsilon, \tilde{\epsilon}) = f_n^{(1)}(w|\epsilon, \tilde{\epsilon}) + \sum_{i=1}^k \epsilon_i \log w'_i, \quad (1.3.11)$$

где в левой части классический конформный блок зависит от координат вставок операторов, а в правой - от голографических переменных. Таким образом, рассматривая замену

$$c_i^{(1)} \rightarrow \frac{1}{w'_i} \left(c_i^{(1)} - \epsilon_i \frac{w''_i}{w'_i} \right), \quad i = 1, \dots, k, \quad (1.3.12)$$

$$c_j^{(1)} \rightarrow c_j^{(1)}, \quad j = k + 1, \dots, n,$$

для блока в терминах голографических переменных $f^{(1)}(w|\epsilon, \tilde{\epsilon})$ можно получить следующую систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f^{(1)}(w|\epsilon, \tilde{\epsilon})}{\partial w_i} = X_i(w|\epsilon, \tilde{\epsilon}), \quad i = 1, \dots, k, \quad (1.3.13)$$

что явно показывает, что легкий сектор классического конформного блока зависит только от голографических переменных (1.3.4).

При рассмотрении различных конфигураций тяжелого сектора случай двух тяжелых операторов существенно отличается от случая трех и более тяжелых операторов. Для случая двух тяжелых операторов имеется $n - 3$ уравнений (1.3.9) для $n - 2$ переменных X_i . Однако, можно дополнить эти уравнения одним из условий (1.2.4) и фиксировать координаты двух тяжелых операторов, чтобы

получить согласованную систему уравнений. Далее этот случай будет рассмотрен более детально. Для случая трех и более тяжелых операторов существует k независимых уравнений для k переменных, а так как тяжелый блок полагается известным, это дает явные выражения для аксессуарных параметров, связанных с этим сектором

$$Y_j(w, w', \mathbf{z} | \epsilon, \tilde{\epsilon}) = \frac{\partial f_n^{(1)}(w | \epsilon, \tilde{\epsilon})}{\partial \mathbf{z}_j}, \quad j = k + 1, \dots, n - 3. \quad (1.3.14)$$

Исходя из этого, можно сформулировать свойство *униформизации* классических конформных блоков: в терминах голографических переменных, вид легкого сектора определяется только конфигурацией легких операторов. Например, n -точечный классический конформный блок с $n-2$ тяжелыми операторами и 4-точечный классический блок с двумя тяжелыми операторами имеют одинаковый вид и отличаются только голографическими функциями (1.3.1). После перехода к x координатам выражения для блоков, конечно, являются различными. Отсюда следует, что выражения для произвольных блоков $L^k H^{n-k}$ могут быть найдены, если известны выражения для блоков вида $L^k H^2$ и явный вид голографических переменных, ассоциированных с первым блоком. Здесь стоит упомянуть, что явный вид голографических переменных известен для случая двух и трех тяжелых операторов, на примерах которых свойство униформизации будет проиллюстрировано. В остальных случаях голографические переменные могут быть найдены только в виде рядов.

1.4 Классические конформные блоки с двумя тяжелыми операторами

В данном случае тяжелый сектор состоит из двух примарных операторов с равными тяжелыми размерностями $\epsilon_{n-1} = \epsilon_n \equiv \epsilon_H$, что диктуется правилами слияния в этом секторе. В соответствии с второй формулой в (1.2.13), классический блок неявно зависит от одного параметра $\alpha = \sqrt{1 - 4\epsilon_H}$. Далее мы везде опускаем верхний индекс у классического блока $f_n^{(1)}(w | \epsilon, \tilde{\epsilon})$, предполагая, что всегда имеется ввиду вклад легкого сектора.

В предыдущем Разделе координаты примарных операторов, входящих в конформный блок, были произвольными. $sl(2, \mathcal{C})$ инвариантность позволяет фиксировать три координаты, причем стандартным выбором является

$z_1 = 0$, $z_{n-1} = 1$, $z_n = \infty$. В данном Разделе рассматривается случай $z = \{z_1, \dots, z_{n-2}, 1, \infty\}$ (см. рисунок 1.1), что удобно для дальнейшего обсуждения многоточечных единичных блоков в Разделе 1.6.

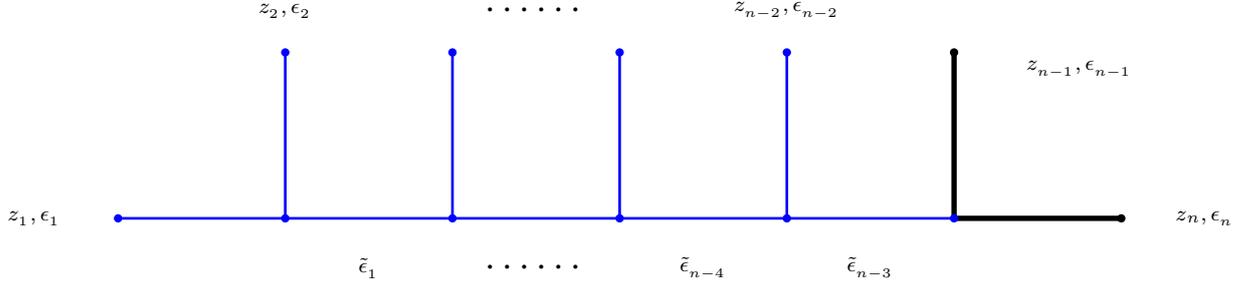


Рисунок 1.1 — n -точечный классический блок с двумя тяжелыми операторами. Координаты тяжелых операторов фиксированы соотношениями

$$z_{n-1} = 1 \text{ и } z_n = \infty.$$

В качестве аксессуарных параметров, определяющих классический конформный блок, выберем c_k , $k = 2, \dots, n-2$, а оставшиеся три (c_1, c_{n-1}, c_n) будут фиксироваться уравнениями (1.2.9). Тем не менее, для вычисления классического конформного блока будет рассматриваться также и аксессуарный параметр c_1 для определения зависимости блока от z_1 . Разрешая условия (1.2.9), можно получить

$$c_1 = -\frac{1}{1-z_1} \left[\sum_{i=2}^{n-2} [c_i(1-z_i) - \epsilon_i] - \epsilon_1 \right], \quad (1.4.1)$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{1-z_1} \left[\sum_{i=2}^{n-2} c_i(z_i - z_1) + \sum_{i=1}^{n-2} \epsilon_i \right], \quad c_n = 0. \quad (1.4.2)$$

Для двух тяжелых операторов решения уравнения (1.2.10) имеют вид

$$\psi_{\pm}^{(0)}(y) = (1-y)^{\frac{1\pm\alpha}{2}}. \quad (1.4.3)$$

Исходя из (1.3.1), голографические переменные имеют вид

$$P_i = (1-z_i)^\alpha, \quad i = 1, \dots, n-3. \quad (1.4.4)$$

Монодромные уравнения (1.3.9) после подстановки (1.4.2) записываются в следующей форме

$$I_{+-}^{(n|p)} I_{-+}^{(n|p)} + \left(I_{++}^{(n|p)} \right)^2 + 4\pi^2 \tilde{\epsilon}_p^2 = 0, \quad p = 1, \dots, n-3, \quad (1.4.5)$$

где

$$I_{+-}^{(n|p)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \left[P_1 \left(\alpha \epsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-2} (c_i(1-z_i) - \epsilon_i) \right) - \sum_{i=2}^{p+1} P_i(c_i(1-z_i) - \epsilon_i(1+\alpha)) \right],$$

$$I_{-+}^{(n|p)} = I_{+-}^{(n|p)} \Big|_{\alpha \rightarrow -\alpha}, \quad I_{++}^{(n|p)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \sum_{i=k+2}^{n-2} [c_i(1-z_i) - \epsilon_i]. \quad (1.4.6)$$

Аксессуарные параметры, являющиеся корнями этих уравнений, могут быть представлены в виде $c_i = c_i(z|\alpha, \epsilon, \tilde{\epsilon})$, где $z = (z_1, \dots, z_{n-2})$. Легкий сектор классического конформного блока определяется соотношениями

$$c_i = \frac{\partial}{\partial z_i} f_n(z|\alpha, \epsilon, \tilde{\epsilon}), \quad i = 1, \dots, n-2, \quad (1.4.7)$$

которые могут быть проинтегрированы по переменным z_1, \dots, z_{n-2} и классический конформный блок может быть формально записан как

$$f_n(z|\alpha, \epsilon, \tilde{\epsilon}) = \int_0^1 dt z^i c_i(tz|\alpha, \epsilon, \tilde{\epsilon}). \quad (1.4.8)$$

Далее данные блоки будут вычислены для случаев $n = 3, 4, 5, 6$.

1.4.1 3-точечный блок

Начнем с рассмотрения 3-точечного блока с двумя тяжелыми и одним легким оператором в точке z_1 . Несмотря на то, что соответствующая ему корреляционная функция полностью определяется конформной симметрией, можно рассмотреть его в рамках общего подхода. Данный блок характеризуется тремя аксессуарными параметрами c_1, c_2, c_3 , которые связаны соотношениями (1.2.9). Разрешая эти условия, получаем

$$c_1 = \epsilon_1 P_1^{1/\alpha}, \quad c_2 = -c_1, \quad c_3 = 0, \quad (1.4.9)$$

см. (1.4.1), (1.4.2). Согласно (1.4.7) блок имеет вид

$$f_3(z_1|\epsilon_1) = \epsilon_1 \log P_1^{-1/\alpha} . \quad (1.4.10)$$

Заметим, что данный блок не зависит явно от размерности тяжелых операторов ϵ_H и может быть найден точно. Кроме того, в Главе 3 будет дана дуальная интерпретация этого блока.

1.4.2 4-точечный блок

Для данного блока из системы (1.4.5) существует одно независимое монодромное уравнение

$$I_{+-}^{(4|1)} I_{-+}^{(4|1)} + 4\pi^2 \tilde{\epsilon}_1^2 = 0 . \quad (1.4.11)$$

Данное квадратное уравнение может быть решено относительно аксессуарного параметра c_2 ⁴

$$c_2 = \epsilon_2 P_2^{-1/\alpha} + \alpha \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)(P_1 + P_2) + \tilde{\epsilon}_1 \sqrt{\beta^2(P_1 - P_2)^2 + 4P_1 P_2}}{2(P_1 - P_2)} , \quad (1.4.12)$$

где выбран один из двух корней этого уравнения так, чтобы 4-точечный конформный блок имел правильную асимптотику при $P_1 = 0$ и $P_2 \rightarrow 1$. Также было введено удобное обозначение $\beta = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/\tilde{\epsilon}_1$. Аксессуарный параметр c_1 находится из (1.4.1). Интегрируя уравнения (1.4.7), можно получить, что конформный блок задается

$$\begin{aligned} f_4(z_{1,2}|\alpha, \epsilon_{1,2}, \tilde{\epsilon}_1) &= (-1 + \alpha)(\epsilon_1 \log P_1^{1/\alpha} + \epsilon_2 \log P_2^{1/\alpha}) - (\epsilon_1 + \epsilon_2) \log[P_1 - P_2] \\ &+ (\epsilon_1 - \epsilon_2) \log \left[\beta(P_1 + P_2) + \sqrt{4P_1 P_2 + \beta^2(P_1 - P_2)^2} \right] - \\ &- \frac{\tilde{\epsilon}_1}{2} \log \left[\frac{P_1 + P_2 + \sqrt{4P_1 P_2 + \beta^2(P_1 - P_2)^2}}{P_1 + P_2 - \sqrt{4P_1 P_2 + \beta^2(P_1 - P_2)^2}} \right] . \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Рассмотрим важный частный случай, соответствующий условию $\tilde{\epsilon}_1 = 0$. Такой блок называется *единичным*, потому что нулевая промежуточная конформная

⁴Этот конформный блок был найден в [50] при условии $\epsilon_1 = \epsilon_2$, а случай $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \tilde{\epsilon}_1$ рассматривался в [76].

размерность соответствует обмену единичным оператором (и его семейством). Далее, в Разделе 1.6 этот блок будет использоваться при построении частных случаев многоточечных блоков. Из условия $\tilde{\epsilon}_1 = 0$ в силу правил слияния получаем $\epsilon_1 = \epsilon_2$ и единичный 4-точечный блок имеет вид

$$f_4^{[1]}(z_{1,2}|\alpha, \epsilon_1) = \epsilon_1(\alpha - 1) \left(\log P_1^{1/\alpha} + \log P_2^{1/\alpha} \right) - 2\epsilon_1 \log[P_1 - P_2]. \quad (1.4.14)$$

1.4.3 5-точечные единичные блоки

Монодромные уравнения (1.4.5) для 5-точечного блока имеют вид [54]

$$\left(I_{++}^{(5|1)} \right)^2 + I_{+-}^{(5|1)} I_{-+}^{(5|1)} + 4\pi^2 \tilde{\epsilon}_1^2 = 0, \quad I_{+-}^{(5|2)} I_{-+}^{(5|2)} + 4\pi^2 \tilde{\epsilon}_2^2 = 0. \quad (1.4.15)$$

Это два квадратных уравнения относительно аксессуарных параметров c_2, c_3 , которые могут быть сведены к уравнению четвертого порядка на c_2 или c_3 . Несмотря на то, что такое уравнение может быть решено, корни представляют собой очень сложные и массивные функции при произвольных классических размерностях $\epsilon_{1,2,3}, \tilde{\epsilon}_{1,2}$, что делает невозможным их аналитическое интегрирование. Поэтому зачастую рассматриваются различные частные случаи, связанные с конкретным выбором внешних/промежуточных классических размерностей или дополнительные приближения (см. Раздел 1.7).

Рассмотрим здесь единичные блоки. Для 5-точечного существует два таких блока - первый соответствует условию $\tilde{\epsilon}_1 = 0$, второй - $\tilde{\epsilon}_2 = 0$. Заметим, что невозможно одновременно положить две эти промежуточные размерности нулю, так как из этого следует условие $\epsilon_3 = 0$.

Первый единичный блок с $\tilde{\epsilon}_1 = 0$. Из правил слияния (1.1.9) следует что

$$\tilde{\epsilon}_1 = 0 : \quad \tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_3, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2, \quad (1.4.16)$$

и при данных условиях монодромные уравнения (1.4.15) записываются в виде

$$\left(I_{++}^{(5|1)} \right)^2 + I_{+-}^{(5|1)} I_{-+}^{(5|1)} = 0, \quad I_{+-}^{(5|2)} I_{-+}^{(5|2)} + 4\pi^2 \epsilon_3^2 = 0. \quad (1.4.17)$$

В силу $\tilde{\epsilon}_1 = 0$ эти уравнения сводятся к квадратным уравнениям на аксессуарные параметры и корни уравнений (1.4.17) имеют вид

$$c_1 = \frac{\epsilon_1((1 + \alpha)P_1 + (\alpha - 1)P_2)}{P_1^{1/\alpha}(P_1 - P_2)}, \quad c_2 = \frac{\epsilon_1((\alpha - 1)P_2 + (1 - 3\alpha)P_1)}{P_2^{1/\alpha}(P_1 - P_2)}, \quad c_3 = \epsilon_3 P_3^{-1/\alpha}, \quad (1.4.18)$$

где выражение для c_1 , как и ранее, получено из (1.4.1). Интегрируя (1.4.7), можно показать, что первый единичный блок имеет вид [67]

$$f_5^{[1]}(z_{1,2,3}|\epsilon_{1,3}) = \epsilon_1(\alpha - 1) \log P_1^{1/\alpha} + \epsilon_1(\alpha - 1) \log P_2^{1/\alpha} - \epsilon_3 \log P_3^{1/\alpha} - 2\epsilon_1 \log[P_1 - P_2], \quad (1.4.19)$$

где [1] обозначает $\tilde{\epsilon}_1 = 0$. Заметим, что блок (1.4.19) распадается на сумму двух слагаемых

$$f_5^{[1]}(z_{1,2,3}|\epsilon_{1,3}) = f_4^{[1]}(z_{1,2}|\epsilon_1) + f_3(z_3|\epsilon_3), \quad (1.4.20)$$

где 4-точечный и 3-точечный конформные блоки даются (1.4.14) и (1.4.10). Это свойство единичных блоков будет далее подробно обсуждаться в Разделе 1.6. Далее будут рассматриваться только такие единичные классические блоки, которые не могут быть представимы в виде суммы полученных ранее.

Второй единичный блок с $\tilde{\epsilon}_2 = 0$. В данном случае правила слияния (1.1.9) накладывают следующее ограничение на классические размерности

$$\tilde{\epsilon}_2 = 0 : \quad \tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_3. \quad (1.4.21)$$

Монодромные уравнения (1.4.15) переписываются в виде

$$\left(I_{++}^{(5|1)}\right)^2 + I_{+-}^{(5|1)} I_{-+}^{(5|1)} + 4\pi^2 \epsilon_3^2 = 0, \quad I_{+-}^{(5|2)} I_{-+}^{(5|2)} = 0. \quad (1.4.22)$$

Система (1.4.22) распадается на две системы из квадратного и линейного уравнений, каждая из которых сводится к квадратному уравнению относительно аксессуарных параметров c_2, c_3 . Можно показать, что решение имеет вид (c_1

определяется из равенств (1.4.1))

$$\begin{aligned}
c_1 &= P_1^{-1/\alpha} \left(\epsilon_1(1 - \alpha) + \frac{\alpha P_1(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3)}{P_1 - P_2} + \frac{\alpha P_1(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3)}{P_1 - P_3} \right), \\
c_2 &= P_2^{-1/\alpha} \left(\epsilon_2(1 - \alpha) - \frac{\alpha P_2(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3)}{P_1 - P_2} - \frac{\alpha P_2(\epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_1)}{P_3 - P_2} \right), \\
c_3 &= P_3^{-1/\alpha} \left(\epsilon_3(1 - \alpha) - \frac{\alpha P_3(\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3)}{P_1 - P_3} - \frac{\alpha P_3(\epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_1)}{P_2 - P_3} \right).
\end{aligned} \tag{1.4.23}$$

Интегрируя выражения (1.4.23), можно получить второй единичный блок [67]

$$\begin{aligned}
f_5^{[2]}(z|\epsilon) &= \frac{(\alpha - 1)}{\alpha} (\epsilon_1 \log P_1 + \epsilon_2 \log P_2 + \epsilon_3 \log P_3) - (\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3) \log(P_1 - P_2) \\
&\quad - (\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3) \log(P_1 - P_3) - (\epsilon_3 + \epsilon_2 - \epsilon_1) \log(P_2 - P_3).
\end{aligned} \tag{1.4.24}$$

Единичные блоки (1.4.19), (1.4.24) являются важными частными случаями 5-точечного блока, которые могут быть вычислены точно. В Разделе 1.7 они будут использоваться для анализа 5-точечного блока с ненулевыми промежуточными размерностями в различных приближениях. Также для данного блока в литературе рассматривалась теория возмущений по внешним классическим размерностям [54; 55; 84].

1.4.4 6-точечные единичные блоки

Рассмотрим 6-точечный единичный блок, соответствующий условию $\tilde{\epsilon}_3 = 0$. Единичные блоки, получающиеся при $\tilde{\epsilon}_2 = 0$ или $\tilde{\epsilon}_1 = 0$, будут рассмотрены в Разделе 1.6.2. Также как для 5-точечных единичных блоков, одновременное равенство нулю любых двух из этих трех размерностей (кроме случая $\tilde{\epsilon}_1 = \tilde{\epsilon}_3 = 0$, который обсуждается в Разделе 1.6.2) дает условия $\epsilon_4 = 0$ или $\epsilon_3 = 0$.

Правила слияния (1.1.9) имеют вид

$$\tilde{\epsilon}_3 = 0 : \quad \tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_4. \tag{1.4.25}$$

В данном случае существует три монодромных уравнения (1.4.5)

$$\begin{aligned} \left(I_{++}^{(6|2)}\right)^2 + I_{+-}^{(6|1)} I_{-+}^{(6|1)} + 4\pi^2 \tilde{\epsilon}_1^2 &= 0, & \left(I_{++}^{(6|1)}\right)^2 + I_{+-}^{(6|2)} I_{-+}^{(6|2)} + 4\pi^2 \epsilon_4^2 &= 0, \\ I_{+-}^{(6|3)} I_{-+}^{(6|3)} &= 0, \end{aligned} \tag{1.4.26}$$

не все из которых являются независимыми. Более точно, второе уравнение системы может быть получено из третьего. Можно показать, что эта система сводится к одному линейному и одному квадратному уравнению и может быть точно решена. Для простоты вычислений положим $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $\epsilon_3 = \epsilon_4$ и тогда, с учетом (1.4.1), решение системы (1.4.26) записывается в виде

$$\begin{aligned} c_1 &= P_1^{-1/\alpha} \left[\epsilon_1 + \alpha \left(\frac{\epsilon_1(P_1 + P_2)}{P_1 - P_2} - \frac{\tilde{\epsilon}_1 P_1 \sqrt{(P_1 - P_4)(P_2 - P_4)(P_1 - P_3)(P_2 - P_3)}}{(P_1 - P_2)(P_1 - P_3)(P_1 - P_4)} \right) \right], \\ c_2 &= P_2^{-1/\alpha} \left[\epsilon_1 - \alpha \left(\frac{\epsilon_1(P_1 + P_2)}{P_1 - P_2} - \frac{\tilde{\epsilon}_1 P_2 \sqrt{(P_1 - P_4)(P_2 - P_4)(P_1 - P_3)(P_2 - P_3)}}{(P_1 - P_2)(P_2 - P_3)(P_2 - P_4)} \right) \right], \\ c_3 &= P_3^{-1/\alpha} \left[\epsilon_3 + \alpha \left(\frac{\epsilon_3(P_3 + P_4)}{P_3 - P_4} - \frac{\tilde{\epsilon}_1 P_3 \sqrt{(P_1 - P_4)(P_2 - P_4)(P_1 - P_3)(P_2 - P_3)}}{(P_3 - P_4)(P_2 - P_3)(P_1 - P_3)} \right) \right], \\ c_4 &= P_4^{-1/\alpha} \left[\epsilon_3 - \alpha \left(\frac{\epsilon_3(P_3 + P_4)}{P_3 - P_4} - \frac{\tilde{\epsilon}_1 P_4 \sqrt{(P_1 - P_4)(P_2 - P_4)(P_1 - P_3)(P_2 - P_3)}}{(P_3 - P_4)(P_2 - P_4)(P_1 - P_4)} \right) \right]. \end{aligned} \tag{1.4.27}$$

После интегрирования можно получить 6-точечный единичный блок

$$\begin{aligned} f_6^{[3]}(z_{1,2,3,4} | \epsilon_{1,3}, \tilde{\epsilon}_1) &= (\alpha - 1) \left(\epsilon_1 (\log P_1^{1/\alpha} + \log P_2^{1/\alpha}) + \epsilon_3 (\log P_3^{1/\alpha} + \log P_4^{1/\alpha}) \right) \\ &\quad - 2\epsilon_1 \log(P_1 - P_2) - 2\epsilon_3 \log(P_3 - P_4) + \\ &\quad + \tilde{\epsilon}_1 \log \left[\frac{2(P_1 - P_4)(P_2 - P_3)}{(P_1 - P_2)(P_3 - P_4)} - \frac{2\sqrt{(P_1 - P_3)(P_2 - P_3)(P_1 - P_4)(P_2 - P_4)}}{(P_1 - P_2)(P_3 - P_4)} + 1 \right]. \end{aligned} \tag{1.4.28}$$

Заметим, что данный классический блок зависит от классических размерностей легких операторов линейно, в отличие от, например, классического бло-

ка (1.4.13). Явное выражение для этого единичного блока также полезно при анализе многоточечных единичных блоков в Разделе 1.6 и поправок к ним в Разделе 1.7.

Также можно обобщить процедуру вычисления функции данного блока на случай четырех различных классических размерностей ϵ_i , $i = \overline{1,4}$. Ответ⁵ имеет вид [70]

$$\begin{aligned}
f_6^{[3]}(z|\epsilon_i, \tilde{\epsilon}_1) &= \epsilon_2(\alpha - 1) \log P_2^{1/\alpha} + \epsilon_3(\alpha - 1) \log P_3^{1/\alpha} + \epsilon_4(\alpha - 1) \log P_4^{1/\alpha} \\
&- \frac{\tilde{\epsilon}_1}{2} \left(\beta_1 \log P_2 - \beta_2 \log P_3 + \beta_2 \log P_4 - \beta_+ \log \frac{P_2 - P_4}{1 - P_3} - \beta_- \log \frac{P_2 - P_3}{1 - P_4} \right) \\
&\quad - \tilde{\epsilon}_1 (\gamma_2 \log[P_3 - P_4] + \gamma_1 \log[1 - P_2]) \\
&\quad - \tilde{\epsilon}_1 \log \left[1 + 2U - \beta_2 \beta_1 + \sqrt{\beta_-^2 + 4U^2 + 4(1 - \beta_1 \beta_2)U} \right] \\
&+ \frac{\tilde{\epsilon}_1 \beta_+}{2} \log \frac{\left(2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + 2U(1 + \beta_1 \beta_2) - \beta_+ \sqrt{\beta_-^2 + 4U(U + 1 - \beta_2 \beta_1)} \right)}{1 + U} \\
&+ \frac{\tilde{\epsilon}_1 \beta_-}{2} \log \left(U \left(2U(\beta_1 \beta_2 - 1) - \beta_-^2 + \beta_- \sqrt{\beta_-^2 + 4U(U + 1 - \beta_2 \beta_1)} \right) \right), \\
U &= \frac{(1 - P_4)(P_2 - P_3)}{(1 - P_2)(P_3 - P_4)}, \quad \beta_{\pm} = \beta_1 \pm \beta_2,
\end{aligned} \tag{1.4.29}$$

где $\beta_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/\tilde{\epsilon}_1$, $\beta_2 = (\epsilon_3 - \epsilon_4)/\tilde{\epsilon}_1$.

1.5 Классические конформные блоки с тремя тяжелыми операторами

Рассмотрим 4-точечный и 5-точечный блоки с тремя тяжелыми операторами. Позиции тяжелых операторов фиксированы условиями $(\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4) = (0, 1, \infty)$ для 4-точечного блока и $(\mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_5) = (0, 1, \infty)$ для 5-точечного блока. Далее в этом Разделе полагается $\epsilon_3 \neq \epsilon_4 = \epsilon_5$ выполненным для конформного блока с

⁵Здесь для упрощения интегрирования фиксировано условие $P_1 = 1$.

тремя тяжелыми операторами. Тогда два линейно независимых решения уравнения (1.2.10) имеют вид [68]

$$\psi_{\pm}^{(0)}(y|\mathbf{z}) = (1-y)^{\frac{1+\alpha}{2}} y^{\frac{1\pm\beta}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1\pm\beta}{2}, \frac{1\pm\beta}{2} + \alpha, 1\pm\beta, y\right), \quad (1.5.1)$$

где $\alpha = \sqrt{1-4\epsilon_4}$ и $\beta = \sqrt{1-4\epsilon_3}$. Голографическая функция дается выражением

$$w(y|\mathbf{z}) = y^{\beta} \frac{{}_2F_1\left(\frac{1+\beta}{2}, \frac{1+\beta}{2} + \alpha, 1+\beta, y\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1-\beta}{2}, \frac{1-\beta}{2} + \alpha, 1-\beta, y\right)}. \quad (1.5.2)$$

1.5.1 4-точечный блок

В данном случае существует одна голографическая переменная w_1 , где $w_1 = w_1(z_1)$ (1.3.4) и $w(y)$ дается выражением (1.5.2). Этот блок характеризуется одним уравнением (1.3.10) на аксессуарный параметр X_1 , решение которого имеет вид

$$I_{++}^{(1)} \equiv X_1 w_1 + \epsilon_1 = 0, \quad X_1 = -\frac{\epsilon_1}{w_1}. \quad (1.5.3)$$

Кроме того, промежуточная размерность в тяжелом блоке подчиняется условию $\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_2$ в силу (1.3.8). Соответствующий блок дается выражением

$$f_4(w_1|\epsilon, \tilde{\epsilon}) = -\epsilon_1 \log w_1. \quad (1.5.4)$$

После перехода обратно к переменной z с помощью (1.5.2) получается 4-точечный блок с тремя тяжелыми операторами, изначально найденный в [68]. Это выражение будет проверено разложением в ряд в Приложении А.

1.5.2 5-точечный блок

Здесь полагается $x = (z_1, z_2, 0, 1, \infty)$. Блок определяется двумя голографическими переменными $w_1 = w(z_1)$, $w_2 = w(z_2)$ (1.3.4), где $w(y)$ определяется (1.5.2), и двумя параметрами X_1, X_2 . Интегралы (1.3.6) записываются в следу-

ющей форме

$$\frac{I_{++}^{(1)}}{2\pi i} = X_1 + X_2 + \epsilon_1 w_1 + \epsilon_2 w_2, \quad \frac{I_{-+}^{(1)}}{2\pi i} = -(X_1 + X_2), \quad (1.5.5)$$

$$\frac{I_{+-}^{(1)}}{2\pi i} = X_1 w_1^2 + X_2 w_2^2 + 2\epsilon_1 w_1 + 2\epsilon_2 w_2.$$

В данном случае есть одно уравнение типа (1.3.9) и одно типа (1.3.10)

$$I_{++}^{(1)} I_{++}^{(1)} + I_{+-}^{(1)} I_{-+}^{(1)} = -4\pi^2 \tilde{\epsilon}_1^2, \quad I_{++}^{(1)} = 0. \quad (1.5.6)$$

Ограничения (1.3.8) записываются в виде $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_3$. Решение уравнений (1.5.6) имеет вид

$$X_1 = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{w_2 - w_1} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2w_1} + \frac{\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 (w_2 - w_1)^2 + 4\tilde{\epsilon}_1^2 w_1 w_2}}{2w_1 (w_1 - w_2)}, \quad (1.5.7)$$

$$X_2 = \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{w_1 - w_2} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2w_2} - \frac{\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 (w_2 - w_1)^2 + 4\tilde{\epsilon}_1^2 w_1 w_2}}{2w_2 (w_2 - w_1)}.$$

Интегрируя уравнения (1.3.13), можно найти 5-точечный конформный блок с тремя тяжелыми операторами

$$\begin{aligned} f_5(w|\epsilon, \tilde{\epsilon}) &= -(\epsilon_1 + \epsilon_2) \log(w_1 - w_2) \\ &+ (\epsilon_1 - \epsilon_2) \log \left((\epsilon_1 - \epsilon_2)(w_1 - w_2) + \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 (w_2 - w_1)^2 + 4\tilde{\epsilon}_1^2 w_2 w_1} \right) \\ &- \frac{\tilde{\epsilon}_1}{2} \log \left[\frac{\tilde{\epsilon}_1 (w_1 + w_2) + \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 (w_1 - w_2)^2 + 4\tilde{\epsilon}_1^2 w_1 w_2}}{\tilde{\epsilon}_1 (w_1 + w_2) - \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 (w_1 - w_2)^2 + 4\tilde{\epsilon}_1^2 w_1 w_2}} \right]. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Также полезно рассмотреть единичный блок, соответствующий $\tilde{\epsilon}_1 = 0$, и следовательно, $\epsilon_1 = \epsilon_2$, который имеет вид

$$f(w|\epsilon, 0) = -2\epsilon_1 \log(w_1 - w_2). \quad (1.5.9)$$

Заметим, что выражения для 5-точечного блока с тремя тяжелыми операторами (1.5.8) и 4-точечного блока (1.4.13) с двумя тяжелыми операторами от-

личаются только видом переменных (с учетом конформного преобразования (1.3.11)). Это является явной проверкой свойства униформизации классических конформных блоков, сформулированного в Разделе 1.3. Как было упомянуто ранее, после перехода к координатам z выражения для этих блоков различаются.

1.6 Факторизация единичных блоков с двумя тяжелыми операторами

Как упоминалось ранее, *единичные* блоки определяются условиями $\tilde{\epsilon}_k = 0$ для выделенного k . Это соответствует тому, что k -й промежуточный оператор становится единичным. В этой Главе рассматриваются многоточечные конформные блоки, у которых один или несколько промежуточных операторов являются единичными. Будет показано, что такие блоки факторизуются в сумму классических конформных блоков, изученных ранее.

1.6.1 Факторизационное соотношение

Будем называть i -м единичным классическим конформным блоком функцию, полученную из n -точечного блока при следующем условии

$$f_n^{[i]}(z|\alpha, \epsilon, \tilde{\epsilon}) \equiv f_n(z|\alpha, \epsilon, \tilde{\epsilon})|_{\tilde{\epsilon}_i=0} \quad (1.6.1)$$

где эта функция обозначена $f_n^{[i]}(z|\alpha, \epsilon, \tilde{\epsilon})$, см. также рисунок 1.2. Значительный интерес представляет i -й единичный классический конформный блок при $i = n - 3$, который называется максимальным.

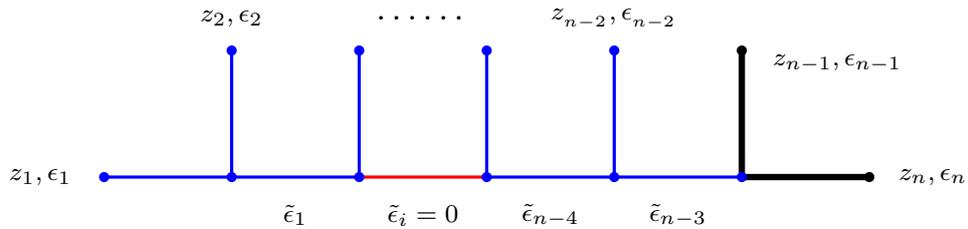


Рисунок 1.2 — i -й единичный классический блок: $\tilde{\epsilon}_i = 0$, промежуточный канал, соответствующий единичному оператору, показан красным.

Докажем факторизационное соотношение для классических конформных блоков

$$f_n^{[s]}(z|\alpha, \epsilon, \tilde{\epsilon}) = f_{s+3}^{[s]}(z'|\alpha, \epsilon', \tilde{\epsilon}') + f_{n-s-1}^{[0]}(z''|\alpha, \epsilon'', \tilde{\epsilon}'') , \quad (1.6.2)$$

где s принимает значения $1, 2, \dots, n-3$ и первый член в левой части есть $(s+3)$ -точечный максимальный блок, а второй член - $(n-s-1)$ -точечный блок. Координаты операторов разбиваются на два набора $z = (z', z'')$, где $z' = \{z_1, \dots, z_{s+1}\}$ и $z'' = \{z_{s+2}, \dots, z_{n-2}\}$. Именно по причине того, что первая точка второго набора не равна 0, в Разделе 1.4 рассматривались классические конформные блоки с произвольной точкой вставки z_1 . Правила слияния (1.1.9) имеют вид

$$\tilde{\epsilon}_s = 0 : \quad \tilde{\epsilon}_{s-1} = \epsilon_{s+1} , \quad \tilde{\epsilon}_{s+1} = \epsilon_{s+2} . \quad (1.6.3)$$

Также в формуле (1.6.2) получаем

$$\begin{aligned} \epsilon' &= (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{s+1}) , & \epsilon'' &= (\epsilon_{s+2}, \dots, \epsilon_{n-2}) , \\ \tilde{\epsilon}' &= (\tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_{s-2}) , & \tilde{\epsilon}'' &= (\tilde{\epsilon}_{s+2}, \dots, \tilde{\epsilon}_{n-3}) , \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

при этом $\epsilon' = (\epsilon_1, \epsilon_1)$ для $s=1$ единичного блока. Заметим, что факторизационное соотношение (1.6.2) имеет место только при условии $s \leq n-4$, потому что из $s = n-3$ следует $f_2^{[0]}(z|\alpha, \epsilon, \tilde{\epsilon}) = 0$.

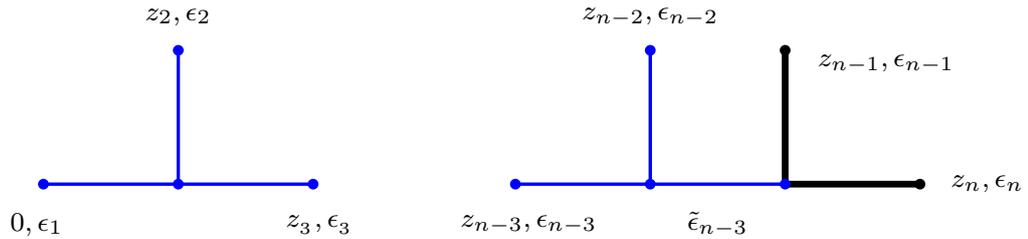


Рисунок 1.3 — Графическая иллюстрация факторизационного соотношения.

Заданный n -точечный единичный блок (1.6.1) удовлетворяет n -точечной монодромной системе (1.4.5). Априори не очевидно, может ли данный блок быть представлен как сумма двух других блоков. Для этого необходимо, чтобы аксессуарные параметры, соответствующие этим двум блокам, удовлетворяли их собственным системам монодромии с меньшим количеством уравнений. Между тем, подсчет аксессуарных параметров обоих блоков в правой части отношения (1.6.2) дает то, что их число не равно n . Таким образом, задача состоит в

том, чтобы показать, при условии равенства нулю одной промежуточной размерности, что исходная монодромная система имеет решение, соответствующее двум независимым подсистемам, указанным в факторизационном соотношении (1.6.2).

Докажем факторизационное соотношение для случая $s = 1$. Оно может быть обобщено на случай произвольного s (см. Приложение Б), $s = 1$ является простейшим случаем, демонстрирующим все ключевые особенности доказательства. Соотношение (1.6.2) в данном случае имеет вид

$$f_n^{[1]}(z|\epsilon, \tilde{\epsilon}) = f_4^{[1]}(z'|\alpha, \epsilon', \tilde{\epsilon}') + f_{n-2}^{[0]}(z''|\alpha, \epsilon'', \tilde{\epsilon}'') , \quad (1.6.5)$$

где $f_4^{[1]}(z'|\alpha, \epsilon', \tilde{\epsilon}')$ - единичный 4-точечный блок (1.4.14). Правила слияния в данном случае даются

$$\tilde{\epsilon}_1 = 0 : \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 , \quad \tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_3 . \quad (1.6.6)$$

Так как выделяется единичный 4-точечный блок $f_4(0, z_2|\alpha, \epsilon_2, \epsilon_2, 0)$, рассмотрим более подробно определяющее его монодромное уравнение. Оно имеет вид

$$I_{+-}^{(4|1)} I_{-+}^{(4|1)} + \left(I_{++}^{(4|1)} \right)^2 = 0 , \quad (1.6.7)$$

где из (1.4.6) следует, что $I_{++}^{(4|1)} = 0$ и

$$I_{+-}^{(4|1)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \left[\alpha \epsilon_2 + c_2(1 - z_2) - \epsilon_2 - (1 - z_2)^\alpha (c_2(1 - z_2) - \epsilon_2(1 + \alpha)) \right] ,$$

$$I_{-+}^{(4|1)} = -\frac{2\pi i}{\alpha} \left[-\alpha \epsilon_2 + c_2(1 - z_2) - \epsilon_2 - (1 - z_2)^{-\alpha} (c_2(1 - z_2) - \epsilon_2(1 - \alpha)) \right] . \quad (1.6.8)$$

Заметим, что $I_{-+}^{(4|1)} = (1 - z_2)^{-\alpha} I_{+-}^{(4|1)}$ из чего следует, что уравнение (1.6.7) факторизуется и эквивалентно может быть переписано следующим образом

$$I_{+-}^{(4|1)} = 0 , \quad (1.6.9)$$

что будет использовано в дальнейшем.

Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, как меняются уравнения изначальной монодромной системы, состоящей из $n - 3$ уравнений, при

подстановке в них соотношения (1.6.5). Будет показано, что первые два уравнения в (1.4.5) выполняются тривиально при подстановке аксессуарного параметра c_2 , соответствующего 4-точечному блоку, а остальные $n - 5$ уравнений определяют $n - 2$ -точечный блок.

1-е уравнение. Рассмотрим сначала первое уравнение в системе (1.4.5). Используя (1.6.6), получаем

$$I_{+-}^{(n|1)} I_{-+}^{(n|1)} + \left(I_{++}^{(n|1)} \right)^2 = 0, \quad (1.6.10)$$

где

$$I_{+-}^{(n|1)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \left[\alpha \epsilon_2 + \sum_{i=2}^{n-2} (c_i(1 - z_i) - \epsilon_i) - (1 - z_2)^\alpha (c_2(1 - z_2) - \epsilon_2(1 + \alpha)) \right],$$

$$I_{-+}^{(n|1)} = I_{+-}^{(n|1)} \Big|_{\alpha \rightarrow -\alpha}, \quad I_{++}^{(n|1)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \sum_{i=3}^{n-2} [c_i(1 - z_i) - \epsilon_i]. \quad (1.6.11)$$

После подстановки в (1.6.11) аксессуарного параметра c_2 , удовлетворяющего (1.6.9), имеет место соотношение

$$I_{+-}^{(n|1)} \approx I_{++}^{(n|1)}, \quad I_{-+}^{(n|1)} \approx -I_{++}^{(n|1)}, \quad (1.6.12)$$

где слабое равенство \approx подразумевает, что (1.6.9) выполнено. Отсюда следует, что уравнение (1.6.10) выполняется тождественно.

2-е уравнение. Второе уравнение системы (1.4.5) дается

$$I_{+-}^{(n|2)} I_{-+}^{(n|2)} + \left(I_{++}^{(n|2)} \right)^2 + 4\pi^2 \epsilon_3^2 = 0, \quad (1.6.13)$$

Отсюда при учете (1.6.9) следует, что

$$I_{+-}^{(n|2)} \approx \frac{2\pi i}{\alpha} \left[\sum_{i=3}^{n-2} (c_i(1 - z_i) - \epsilon_i) - (1 - z_3)^\alpha (c_3(1 - z_3) - \epsilon_3(1 + \alpha)) \right],$$

$$I_{-+}^{(n|2)} = I_{+-}^{(n|2)} \Big|_{\alpha \rightarrow -\alpha}, \quad I_{++}^{(n|2)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \sum_{i=4}^{n-2} [c_i(1 - z_i) - \epsilon_i]. \quad (1.6.14)$$

Используя условия на аксессуарные параметры (1.2.4), можно получить, что

$$\sum_{i=3}^{n-2} [c_i(1 - z_i) - \epsilon_i] = 0. \quad (1.6.15)$$

Это условие позволяет выразить (1.6.14) в терминах $x_3 = c_3(1 - z_3) - \epsilon_3$ и тогда монодромное уравнение (1.6.13) может быть переписано в виде

$$\frac{4\pi^2}{\alpha^2}(x_3 - \alpha\epsilon_3)(x_3 + \alpha\epsilon_3) - \frac{4\pi^2}{\alpha^2}x_3^2 + 4\pi^2\epsilon_3^2 = 0, \quad (1.6.16)$$

и выполняется тождественно.

Остальные уравнения. Оставшиеся $n - 5$ уравнений системы (1.4.5) записываются в следующем виде

$$I_{+-}^{(n|k)} I_{-+}^{(n|k)} + \left(I_{++}^{(n|k)}\right)^2 + 4\pi^2\tilde{\epsilon}_k^2 = 0, \quad k = 3, \dots, n - 3. \quad (1.6.17)$$

После подстановки условия (1.6.9) и соотношения (1.6.15) они сводятся к

$$I_{+-}^{(n|k)} \approx \frac{2\pi i}{\alpha} \left[- \sum_{i=3}^{k+1} (1 - z_i)^\alpha (c_i(1 - z_i) - \epsilon_i(1 + \alpha)) \right], \quad (1.6.18)$$

$$I_{-+}^{(n|k)} = I_{+-}^{(n|k)} \Big|_{\alpha \rightarrow -\alpha}, \quad I_{++}^{(n|k)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \sum_{i=k+2}^{n-2} [c_i(1 - z_i) - \epsilon_i].$$

Заметим, что интегралы $I_{++}^{(n|k)}$ совпадают с (1.4.6) после сдвига индекса $k \rightarrow k - 2$. Остальные уравнения могут быть переписаны в форме (1.4.6) с использованием (1.6.15). Таким образом, после выделения 4-точечного блока, монодромные уравнения для единичного n -точечного блока с $\tilde{\epsilon}_1 = 0$ сводятся общей системе, описывающей аксессуарные параметры $n - 2$ -точечного классического конформного блока. В Приложении **Б** приводится доказательство факторизационного соотношения (1.6.2) для произвольного s .

1.6.2 Блоки с несколькими единичными операторами

В предыдущем Разделе было доказано факторизационное соотношение для k -го единичного классического конформного блока, который распадался

на сумму максимального блока и единичного блока. Интересным представляется изучение классических конформных блоков с несколькими единичными операторами, которые последовательным использованием факторизационного соотношения могут быть сведены к сумме известных классических блоков, рассмотренных в Разделе 1.4.

Рассмотрим случаи, когда можно положить максимальное количество промежуточных размерностей равными 0: (а) $\tilde{\epsilon}_{2i+1} = 0$ для $i = 0, 1, 2, \dots$, (б) $\tilde{\epsilon}_{2i} = 0$ для $i = 1, 2, \dots$. Тогда такой конформный блок (мы будем называть его *факторизованным*) сводится к сумме 4-точечных блоков, наряду с единичным 5-точечным и 3-точечным блоком для конкретных конфигураций блока.⁶

Рассмотрим случай четного n . Используя правила слияния (1.6.3) и факторизационное соотношение, можно получить, что

$$f_n^{[1,3,\dots,n-3]}(z|\alpha,\epsilon,\tilde{\epsilon}) = \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} f_4^{[1]}(z_{2i-1}, z_{2i}|\alpha,\epsilon_{2i-1}), \quad (1.6.19)$$

$$f_n^{[2,4,\dots,n-4]}(z|\alpha,\epsilon,\tilde{\epsilon}) = f_5^{[2]}(z_{1,2,3}|\alpha,\epsilon_{1,2,3}) + f_3(z_{n-2}|\alpha,\epsilon_{n-2}) + \sum_{i=2}^{\frac{n-4}{2}} f_4^{(1)}(z_{2i}, z_{2i+1}|\alpha,\epsilon_{2i}), \quad (1.6.20)$$

где 4-точечный блок дается (1.4.14), 3-точечный блок (1.4.10), и единичный 5-точечный блок определяется (1.4.24), см. рисунок 1.4.

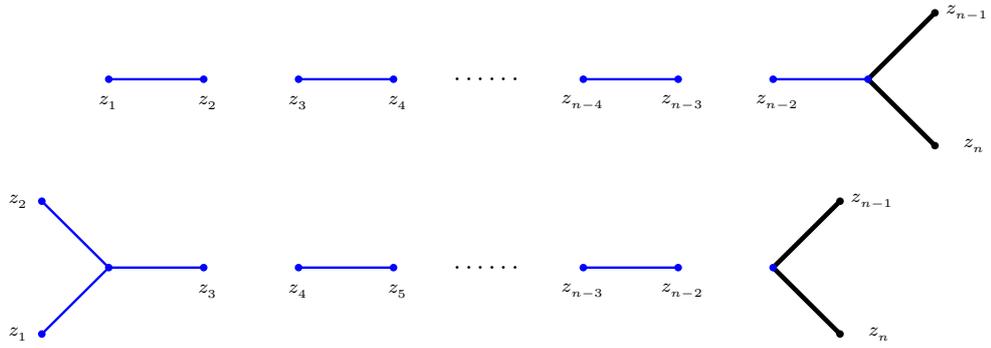
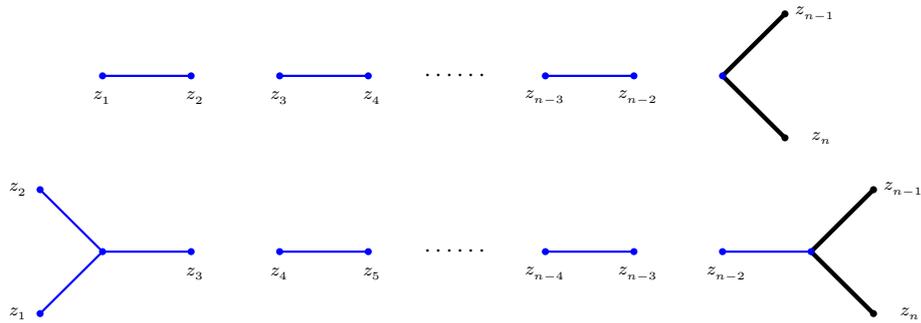
Для нечетных n факторизованный блок имеет вид

$$f_n^{[1,3,\dots,n-4]}(z|\alpha,\epsilon,\tilde{\epsilon}) = f_3(z_{n-2}|\alpha,\epsilon_{n-2}) + \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} f_4^{[1]}(z_{2i-1}, z_{2i}|\alpha,\epsilon_{2i-1}), \quad (1.6.21)$$

$$f_n^{[2,4,\dots,n-3]}(z|\alpha,\epsilon,\tilde{\epsilon}) = f_5^{[2]}(z_{1,2,3}|\alpha,\epsilon_{1,2,3}) + \sum_{i=2}^{\frac{n-3}{2}} f_4^{[1]}(z_{2i}, z_{2i+1}|\alpha,\epsilon_{2i}), \quad (1.6.22)$$

см. рисунок 1.5. Отметим, что факторизованная форма 5-точечного блока (1.4.20) является частным случаем (1.6.21). Кроме того, возможны более сложные конфигурации факторизованных блоков, построенные из комбинаций рассмотренных выше 4, 5, 6-точечных блоков, которые рассматриваются аналогично.

⁶Похожие факторизованные блоки обсуждались в [56; 85].

Рисунок 1.4 — Факторизованные блоки с четным n .Рисунок 1.5 — Факторизованные блоки с нечетным n .

В Главе **3** будет рассмотрена дуальная интерпретация таких факторизованных блоков. Также данные блоки могут рассматриваться как затравочные выражения для теории возмущения по промежуточным размерностям, см. Раздел **1.7**.

1.7 Сверхлегкое приближение для классических конформных блоков

В этом Разделе рассматриваются поправки к единичным блокам, которые изучались в Разделах **1.4** и **1.6** в дополнительном *сверхлегком* приближении (SL). В SL приближении полагается, что промежуточные размерности, положенные ранее равными нулю в силу определения единичных блоков, много меньше чем остальные внешние/промежуточные размерности легких операторов. Похожие приближения (но по внешним размерностям), рассматривались ранее в работах [52; 84]. В качестве переменных используются (1.4.4), для простоты предполагая $P_1 = 1$.

1.7.1 5-точечные блоки с сверхлегкими операторами.

В рамках сверхлегкого приближения для 5-точечных блоков постулируется, что размерности $\tilde{\epsilon}_1$ или $\tilde{\epsilon}_2$ одного из внутренних операторов много меньше всех остальных размерностей, $\tilde{\epsilon}_{1,2} \ll \epsilon_{1,2,3}$. Заметим при этом, что правила слияния не меняются в первом порядке SL приближения, поэтому при вычислении блоков мы используем правила слияния (1.4.16) и (1.4.21).

Сверхлегкое приближение для единичного блока (1.4.19). Здесь предполагается, что $\tilde{\epsilon}_1 \ll \epsilon_{1,2,3}$. Правила слияния (1.4.16) диктуют условия $\epsilon_1 = \epsilon_2$ и $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_3$. В данном случае два монодромных уравнения имеют вид

$$\left(I_{++}^{(5|1)}\right)^2 + I_{+-}^{(5|1)} I_{-+}^{(5|1)} = -4\pi^2 \tilde{\epsilon}_1^2, \quad I_{+-}^{(5|2)} I_{-+}^{(5|2)} = -4\pi^2 \epsilon_3^2. \quad (1.7.1)$$

Важно подчеркнуть, что уравнения (1.7.1) должны выполняться в первом порядке SL приближения. Однако, оказывается, можно найти решения данных уравнений, при которых первое уравнение выполняется точно, а второе с точностью до членов, квадратичных по сверхлегкой размерности $\tilde{\epsilon}_1$.⁷ Классический конформный блок, полученный интегрированием таких решений, имеет вид

$$f_5(z|\epsilon_1, \epsilon_3, \tilde{\epsilon}_1) = \epsilon_1(-1 + \alpha) \log P_2^{1/\alpha} - (\epsilon_3 + \alpha \tilde{\epsilon}_1) \log P_3^{1/\alpha} \\ - (2\epsilon_1 + \tilde{\epsilon}_1) \log[1 - P_2] + \tilde{\epsilon}_1 \log[P_2 - P_3^2 - \sqrt{(1 - P_3^2)(P_2^2 - P_3^2)}]. \quad (1.7.2)$$

Сверхлегкое приближение для единичного блока (1.4.24). Перейдем к случаю $\tilde{\epsilon}_2 \ll \epsilon_{1,2,3}$. Правила слияния (1.4.21) дают $\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_3$ и помимо этого, предполагается $\epsilon_1 = \epsilon_2$. Монодромные уравнения (1.4.5) имеют вид

$$\left(I_{++}^{(5|1)}\right)^2 + I_{+-}^{(5|1)} I_{-+}^{(5|1)} = -4\pi^2 \epsilon_3^2, \quad I_{+-}^{(5|2)} I_{-+}^{(5|2)} = -4\pi^2 \tilde{\epsilon}_2^2. \quad (1.7.3)$$

Как и в предыдущем случае, можно найти решения, которые точно удовлетворяют второму монодромному уравнению, а первое выполняется с точностью $\mathcal{O}(\tilde{\epsilon}_2^2)$. Классический конформный блок со сверхлегким оператором размерно-

⁷Предполагается, что в SL приближении квадратичные по $\tilde{\epsilon}_1$ члены сокращаются старшими поправками в конформный блок (1.7.2).

сти $\tilde{\epsilon}_2$ имеет вид

$$f_5(z|\epsilon_1, \epsilon_3, \tilde{\epsilon}_2) = \epsilon_1(-1 + \alpha) \left(\log P_2^{1/\alpha} + \log P_3^{1/\alpha} \right) - \epsilon_3 (\log[1 - P_3] + \log[P_2 - P_3]) \\ - (2\epsilon_1 - \epsilon_3) \log[1 - P_2] + \tilde{\epsilon}_2 \operatorname{Arcsinh} \left[\frac{-i(P_2 - P_3^2)}{(1 - P_3)(P_2 - P_3)} \right]. \quad (1.7.4)$$

1.7.2 6-точечный блок с двумя сверхлегкими операторами

Рассмотрим 6-точечный блок с двумя сверхлегкими операторами $\tilde{\epsilon}_{1,3} \ll \epsilon_{1,3}$, наложив условия $\epsilon_1 = \epsilon_2$ и $\epsilon_3 = \epsilon_4$. Правила слияния (1.4.25) дают $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_3$. Блок может быть найден из монодромных уравнений (1.4.15)

$$\left(I_{++}^{(6|1)} \right)^2 + I_{+-}^{(6|1)} I_{-+}^{(5|1)} = -4\pi^2 \tilde{\epsilon}_1^2, \quad \left(I_{++}^{(6|2)} \right)^2 + I_{+-}^{(6|2)} I_{-+}^{(6|2)} = -4\pi^2 \epsilon_3^2, \quad (1.7.5) \\ I_{+-}^{(6|3)} I_{-+}^{(6|3)} = -4\pi^2 \tilde{\epsilon}_3^2,$$

и в первом порядке по $\tilde{\epsilon}_{1,3}$ имеет вид

$$f_6(z|\epsilon_1, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_3) = (-1 + \alpha) \left(\epsilon_1 \log P_2^{1/\alpha} + \epsilon_3 \log P_3^{1/\alpha} + \epsilon_3 \log P_4^{1/\alpha} \right) \\ - 2\epsilon_1 \log[1 - P_2] - 2\epsilon_3 \log[P_3 - P_4] + \tilde{\epsilon}_3 \log \frac{\sqrt{P_3} - \sqrt{P_4}}{\sqrt{P_3} + \sqrt{P_4}} \quad (1.7.6) \\ - 2\tilde{\epsilon}_1 \log \left(\sqrt{\frac{(1 - P_3)(P_2 - P_4)}{(1 - P_2)(P_3 - P_4)}} + \sqrt{\frac{(1 - P_4)(P_2 - P_3)}{(1 - P_2)(P_3 - P_4)}} \right).$$

1.7.3 $(2M + 2)$ -точечный блок с сверхлегкими операторами

Вычисленный в предыдущем Разделе 6-точечный блок может быть использован при построении выражения для $(2M + 2)$ -точечного блока специального вида. Рассмотрим факторизованный единичный блок (1.6.19) и заменим все единичные операторы сверхлегкими с размерностями $\tilde{\epsilon}_j$, $j = 1, \dots, M$ (см.

рисунок 1.6). Правила слияния для такого блока имеют вид

$$\epsilon_{2i-1} = \epsilon_{2i} = \tilde{\epsilon}_{2i-1}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.7.7)$$

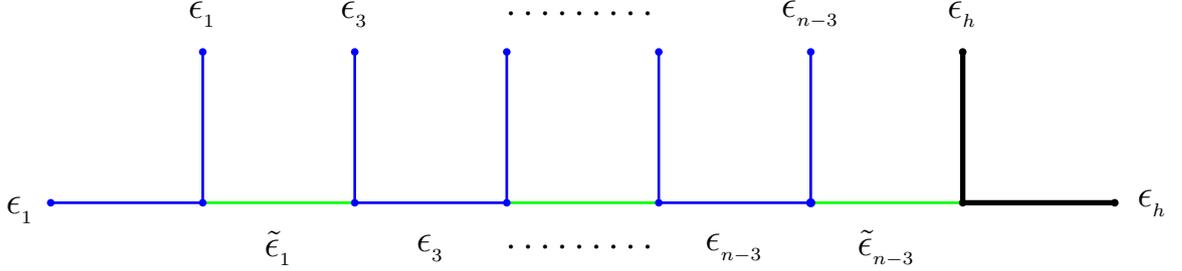


Рисунок 1.6 — $(2M + 2)$ -точечный блок с M сверхлегкими операторами, показанными зелеными линиями.

Комбинируя ранее вычисленные конформные блоки с сверхлегкими операторами, можно показать, что искомый $(2M + 2)$ -точечный блок имеет вид

$$f_{2M+2}(z|\epsilon_i, \tilde{\epsilon}_j) = \sum_{i=1}^{2M} f_g(z|\epsilon_i) + \sum_{j=1}^{M-1} \tilde{f}_b(z|\tilde{\epsilon}_j) + \tilde{\epsilon}_{n-3} \log \frac{\sqrt{P_{n-3}} - \sqrt{P_{n-2}}}{\sqrt{P_{n-3}} + \sqrt{P_{n-2}}}, \quad (1.7.8)$$

где

$$f_g(z|\epsilon_i) = (-1 + \alpha)\epsilon_{2i-1} \left(\log P_{2i-1}^{1/\alpha} + \log P_{2i}^{1/\alpha} \right) - 2\epsilon_{2i-1} \log[P_{2i-1} - P_{2i}],$$

$$\tilde{f}_b(z|\tilde{\epsilon}_j) = -2\tilde{\epsilon}_j \log \left(\sqrt{U_j} + \sqrt{1 + U_j} \right), \quad U_j = \frac{(P_{2j-1} - P_{2j+1})(P_{2j} - P_{2j+2})}{(P_{2j-1} - P_{2j})(P_{2j+1} - P_{2j+2})}. \quad (1.7.9)$$

Можно также показать, что блок (1.7.8) удовлетворяет соответствующим монодромным уравнениям (1.4.5) с сверхлегкими операторами размерностей $\tilde{\epsilon}_j$ в правых частях.

Вычисленные в данном Разделе классические конформные блоки с сверхлегкими операторами являются примером построения теории возмущений над факторизованными/единичными блоками. Полученные выражения (в частности, для многоточечных блоков) могут быть использованы для получения классических блоков с произвольными классическими размерностями. Рассматривая классические блоки с сверхлегкими операторами в первом и последующих

порядках SL приближения, можно (в рамках теории возмущения) найти выражения для многоточечных классических блоков общего вида.

1.8 Выводы

В этой Главе были рассмотрены классические конформные блоки в рамках HL и SL приближений. В Разделе 1.2 в рамках монодромного подхода с использованием голографических переменных были описаны классические конформные блоки с произвольным числом легких и тяжелых операторов. С помощью свойства униформизации показано, что вычисление $L^k H^{n-k}$ блоков может быть сведено к вычислению блоков с двумя тяжелыми и $n - 2$ легкими операторами, если известна форма голографических переменных. Указан способ построения голографических переменных и выписаны явные выражения для случая двух и трёх тяжелых операторов.

В Разделе 1.4 были получены функции 4, 5-точечных классических конформных блоков с двумя и тремя тяжелыми операторами. Результат для 4-точечного блока с тремя тяжелыми операторами был явно проверен с помощью разложения в ряд в Приложении А.

В Разделе 1.6 было доказано факторизационное соотношение для i -го единичного блока, которое было использовано для построения специальных факторизованных блоков в Разделе 1.6.2. Все такие факторизованные блоки строятся из 4, 5-точечных единичных блоков, вычисленных в Разделе 1.4. Проведенный анализ может быть распространен и на более сложные конфигурации. Также сформулировано дополнительное приближение сверхлегких операторов, которое позволило найти поправки по промежуточным размерностям к рассмотренным в Разделе 1.6 единичным и факторизованным блокам.

Глава 2. Голографическое описание тяжелого сектора

Гравитация в трехмерном пространстве-времени, выступающая в роли дуальной теории в контексте $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия, является теорией без локальных степеней свободы. Соответственно, вместо локальной динамики рассматриваются глобальные/топологические эффекты, а также граничное поведение теории. В этом ключе гравитация в трехмерном пространстве-времени исследовалась в работах [27; 28].¹ В работе [61] было показано, что решение уравнений Эйнштейна с космологической постоянной параметризуется двумя произвольными функциями $H(z)$ и $\bar{H}(\bar{z})$, заданными на конформной границе AdS_3 (см. Раздел 2.1.1). В контексте $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия функция $H(z)$ отвечает голоморфному тензору энергии-импульса граничной теории. Остаточная симметрия данного решения, действующая на конформной границе AdS_3 , описывается алгеброй Вирасоро [23].

В этой и следующей Главах будет построена дуальная интерпретация классических конформных блоков, рассмотренных в Главе 1. В рамках $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия, режим большого центрального заряда в граничной теории отвечает малой гравитационной константе G_N согласно соотношению $c = 3R/2G_N$, где R - радиус AdS_3 [23]. Примарным операторам граничной теории в данном пределе (с учетом условия $\Delta \sim c$, $c \rightarrow \infty$) соответствуют частицы с массами $\epsilon, \tilde{\epsilon}$ в теории гравитации [50; 57; 76].

Приближение легких и тяжелых операторов (HL), сформулированное в Главе 1, разделяет массивные частицы, соответствующие примарным операторам, на два сектора - легкий и тяжелый. В рамках данного приближения полагается, что частицы, дуальные тяжелым операторам, порождают дефекты трёхмерной геометрии, в то время как отвечающие легкому сектору рассматриваются как пробные частицы, распространяющиеся на фоне геометрии с данными дефектами (коническими сингулярностями/БТЗ черными дырами) [61].

Наиболее изученным примером такой геометрии является метрика конической сингулярности, продуцируемая двумя тяжелыми операторами. Эта метрика рассматривалась в [50; 51; 54] в контексте $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия для 4-точечных блоков. Данный анализ был обобщен на блоки с произвольным числом легких и двумя тяжелыми операторами [57]. Естественным обобщением

¹См. также работы [86; 87], где приведен подробный анализ решений уравнений Эйнштейна в присутствии тяжелых частиц.

является рассмотрение конфигураций с тремя и более тяжелыми операторами и описание генерируемых ими дуальных пространств. В данной Главе будет рассмотрена дуальная геометрия для случая трех и более тяжелых операторов. Дуальное описание легкого сектора приведено в Главе **3**.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В Главе **2.1** будет описана дуальная геометрия для случая двух (Раздел **2.1.2**) и трех (Раздел **2.1.3**) тяжелых операторов. Глава **2.2** посвящена построению дуальной геометрии с произвольным числом тяжелых операторов и формулировке AdS₃/CFT₂ соответствия для простейшей конфигурации, отвечающей одной геодезической линии на данном пространстве.

2.1 Дуальное описание двух и трех тяжелых операторов

2.1.1 Метрика Баньядоса и конформные отображения

Рассмотрим метрику Баньядоса, которая описывает дуальную трёхмерную гравитацию [61]

$$ds^2 = R^2 \left(-H dz^2 - \bar{H} d\bar{z}^2 + \frac{u^2}{4} H \bar{H} dz d\bar{z} + \frac{du^2 + dz d\bar{z}}{u^2} \right), \quad (2.1.1)$$

где $u \in [0, \infty)$ и $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$, радиус AdS_3 обозначен R . Функции $H = H(z|\Delta)$ и $\bar{H} = \bar{H}(\bar{z}|\bar{\Delta})$, описывающие граничные степени свободы, параметризуют решения уравнений Эйнштейна. В рамках $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия функция $H(z|\Delta)$ отвечает голоморфному тензору энергии-импульса двумерной конформной теории на границе, определенному в (1.2.10)

$$T(z|\Delta) = \frac{c}{6} H(z|\Delta), \quad (2.1.2)$$

где $c = 3R/2G_N$ [23; 88]. При построении дуальной геометрии, порождаемой вкладом тяжелых операторов, соотношение (2.1.2) принимает вид

$$H(z|\epsilon) \equiv T^{(0)}(z|\epsilon), \quad (2.1.3)$$

где $T^{(0)}(z|\epsilon)$ отвечает классическому тензору энергии-импульса.

Рассмотрим теперь отображение $z \rightarrow w(z)$, соответствующее условию $H(w(z)) = 0$. При данном отображении $T^{(0)}(z|\epsilon)$ преобразуется следующим образом

$$T^{(0)}(z, |\epsilon) = (w')^2 T^{(0)}(w|\epsilon) + \frac{c}{12} \{w, z\}, \quad \{w, z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''}{w'} \right)^2, \quad (2.1.4)$$

и штрих обозначает производную по z . Последний член представляет собой производную Шварца (шварциан) [80; 89]. Закон преобразования антиголоморфной компоненты $\bar{T}^{(0)}(\bar{z}|\bar{\epsilon})$ в терминах переменной \bar{z} имеет тот же вид. Из (2.1.4) видно, что искомое отображение $w(z)$ удовлетворяет уравнению

$$H(z) = \frac{1}{2} \{w, z\}. \quad (2.1.5)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде отношения двух линейно независимых решений вспомогательного уравнения типа Фукса $\psi'' + H\psi = 0$ [89]. Решение уравнения (2.1.5) имеет вид

$$w(z) = \frac{A\psi_1(z) + B\psi_2(z)}{C\psi_1(z) + D\psi_2(z)} \equiv \frac{A\frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} + B}{C\frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)} + D}, \quad AD - BC \neq 0, \quad (2.1.6)$$

где $\psi_{1,2}$ обозначают линейно независимые решения фуксова уравнения, и параметры $A, B, C, D \in \mathbb{C}$. Заметим, что решение (2.1.6) обладает инвариантностью относительно дробно-линейных преобразований, что вытекает из свойств производной Шварца. Существенно, что вспомогательное фуксово уравнение совпадает с уравнением (1.2.10) из Раздела 1.2, а простейшее решение (2.1.6), отвечающее $B = C = 0, A/D = 1$, идентично голографической функции (1.3.1). Таким образом, голографические переменные (1.3.4), введенные в Главе 1, естественным образом возникают при анализе трёхмерной геометрии (2.1.1).

Так как любая метрика типа (2.1.1) локально представляет собой пространство-время AdS_3 , то с помощью найденного отображения (2.1.6), можно перейти к координатам Пуанкаре

$$d\tilde{s}^2 = \frac{dv^2 + dvd\bar{w}}{v^2}, \quad (2.1.7)$$

где конформная граница отвечает $v = 0$. Искомое преобразование координат $w = w(z, \bar{z}, u)$, $\bar{w} = \bar{w}(z, \bar{z}, u)$, $v = v(z, \bar{z}, u)$ имеет вид [90]

$$\begin{aligned} w(z, \bar{z}, u) &= w(z) - \frac{2u^2 w'(z)^2 \bar{w}''(\bar{z})}{4w'(z)\bar{w}'(\bar{z}) + u^2 w''(z)\bar{w}''(\bar{z})}, \\ \bar{w}(z, \bar{z}, u) &= \bar{w}(\bar{z}) - \frac{2u^2 \bar{w}'(\bar{z})^2 w''(z)}{4w'(z)\bar{w}'(\bar{z}) + u^2 w''(z)\bar{w}''(\bar{z})}, \\ v(z, \bar{z}, u) &= u \frac{4(w'(z)\bar{w}'(\bar{z}))^{3/2}}{4w'(z)\bar{w}'(\bar{z}) + u^2 w''(z)\bar{w}''(\bar{z})}. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Здесь важно отметить, что свойства метрики, порожденной тензором (2.1.2), задаются только функцией (2.1.6). Вблизи границы $u \rightarrow 0$ преобразование (2.1.8)

СВОДИТСЯ К

$$w = w(z) + \mathcal{O}(u^2), \quad \bar{w} = \bar{w}(\bar{z}) + \mathcal{O}(u^2), \quad v = u [w'(z)\bar{w}'(\bar{z})]^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(u^3). \quad (2.1.9)$$

Длина сегмента геодезической, соединяющей точки с координатами (w_1, \bar{w}_1, v_1) и (w_2, \bar{w}_2, v_2) , в метрике (2.1.7) дается

$$\mathcal{L} = \operatorname{arccosh} \frac{(w_1 - w_2)(\bar{w}_1 - \bar{w}_2) + v_1^2 + v_2^2}{2v_1v_2}, \quad (2.1.10)$$

где радиус пространства AdS_3 положен равным единице, $R = 1$. Также, помимо координат Пуанкаре, зачастую удобно рассматривать глобальные координаты (τ, ρ, ϕ) , в которых метрика имеет вид

$$d\hat{s}^2 = \frac{d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho d\phi^2}{\cos^2 \rho}. \quad (2.1.11)$$

Связь с координатами Пуанкаре дается $w = e^\theta \sin \rho$, $\bar{w} = e^{\bar{\theta}} \sin \rho$, $v = e^{\frac{\theta + \bar{\theta}}{2}} \cos \rho$, где $\theta = \tau + i\phi$ и ρ задают глобальные координаты AdS_3 . Конформная граница соответствует $\rho = \pi/2$. Конформное отображение между границами имеет вид $\theta = \log w$ с границы (w, \bar{w}) в координатах Пуанкаре на границу $(\theta, \bar{\theta})$ в глобальных координатах.

2.1.2 Два тяжелых оператора

Для иллюстрации свойств геометрии, дуальной тяжелому сектору, рассмотрим два тяжелых оператора в точках 1 и ∞ . Классический тензор энергии-импульса (2.1.3) имеет вид

$$T^{(0)}(z) = \frac{\epsilon_H}{(1-z)^2}, \quad (2.1.12)$$

где $\epsilon_2 = \epsilon_3 \equiv \epsilon_H$ обозначают классические размерности тяжелых операторов в граничной теории. Таким образом, в трёхмерном пространстве-времени существуют две линии сингулярностей $(z, \bar{z}, u) = (1, 1, u)$ и $(z, \bar{z}, u) = (\infty, \infty, u)$ при $\forall u \in \mathbb{R}_+$. Далее, пространство AdS_3 с $(n-k)$ тяжелыми операторами на границе будет обозначаться $\operatorname{AdS}_3[n-k]$, в данном Разделе рассматривается $\operatorname{AdS}_3[2]$.

Выберем голографическую функцию (2.1.6) в следующем виде

$$w(z) = (1 - z)^\alpha, \quad (2.1.13)$$

где $\alpha = \sqrt{1 - 4\epsilon_H}$. Функция $w(z)$ имеет две точки ветвления, 1 и ∞ , отвечающие координатам тяжелых операторов. Отображение $z \rightarrow w(z)$ переводит плоскость (z, \bar{z}) в плоскость (w, \bar{w}) с угловым дефицитом в точке 1, равным $2\pi(1 - \alpha)$. На бесконечности же $w(z) \approx z^{-\alpha}$, что может быть интерпретировано как отрицательный дефицит угла $2\pi(1 + \alpha)$.

Координаты Пуанкаре для пространства $\text{AdS}_3[2]$ явно задаются (2.1.13) и (2.1.8), см. также [91]

$$w(z, u) = (1 - z)^\alpha \frac{(1 - \alpha^2)u^2 + 4(1 - z)(1 - \bar{z})}{(1 - \alpha)^2 u^2 + 4(1 - z)(1 - \bar{z})}, \quad (2.1.14)$$

$$\bar{w}(\bar{z}, u) = (1 - \bar{z})^\alpha \frac{(1 - \alpha^2)u^2 + 4(1 - z)(1 - \bar{z})}{(1 - \alpha)^2 u^2 + 4(1 - z)(1 - \bar{z})}, \quad (2.1.15)$$

$$v(z, \bar{z}, u) = 4\alpha \frac{u(1 - z)^{\frac{1+\alpha}{2}}(1 - \bar{z})^{\frac{1+\alpha}{2}}}{(1 - \alpha)^2 u^2 + 4(1 - z)(1 - \bar{z})}. \quad (2.1.16)$$

Вблизи сингулярных точек имеет место $w = (1 - z)^\alpha(1 + \mathcal{O}(1 - z))$, что дает

$$z \rightarrow 1 : \quad v(z, \bar{z}, u) = \frac{4\alpha u^{-1}}{(1 - \alpha)^2} \left([(1 - z)(1 - \bar{z})]^{\frac{\alpha+1}{2}} (1 + \mathcal{O}((1 - z)(1 - \bar{z}))) \right), \quad (2.1.17)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad v(z, \bar{z}, u) = \alpha u (z\bar{z})^{\frac{\alpha-1}{2}} (1 + \mathcal{O}(1/(z\bar{z}))). \quad (2.1.18)$$

Так как $\alpha \in (0, 1)$, ведущий показатель в первой строке является положительным, а во второй - отрицательным. Отсюда видно, что две линии дефектов в метрике Баньядоса отображаются в две сингулярные точки $(w, \bar{w}, v) = (0, 0, 0)$ и $(w, \bar{w}, v) = (\infty, \infty, 0)$. При переходе к глобальным координатам (2.1.11) данные сингулярности отображаются в точки $\tau = \pm\infty$, а координата ϕ умножается на α . Таким образом, в глобальных координатах, получается цилиндр с вырезом, граница которого дается $\phi \in [0, 2\pi\alpha)$, $\tau \in \mathbb{R}$ (см. рисунок 2.1). После замены $\tau \rightarrow \alpha\tau$, $\phi \rightarrow \alpha\phi$ получаем

$$d\hat{s}^2 = \frac{\alpha^2 d\tau^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \sin^2 \rho d\phi^2}{\cos^2 \rho}, \quad (2.1.19)$$

которая является метрикой конической сингулярности, рассмотренной в [50; 55; 76]. Так как это пространство характеризуется только одним параметром конического дефекта α , далее оно будет обозначаться $\text{AdS}_3^{(\alpha)}$. Конический дефект, продуцируемый тяжелыми операторами, локализуется на линии $\rho = 0$, $\tau \in (-\infty, +\infty)$.

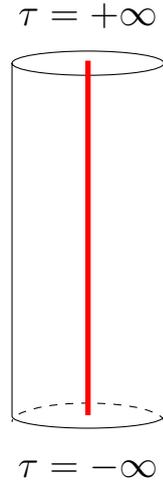


Рисунок 2.1 — Реализация дуального пространства $\text{AdS}_3^{(\alpha)}$ (в глобальных координатах). Красная линия отвечает двум тяжелым операторам, которые продуцируют конический дефект.

Также важно упомянуть, что динамика на такой геометрии может быть сведена к динамике на одном из срезов $\tau = \text{const}$ или $\phi = \text{const}$ в силу того, что $\partial_{\tau, \phi}$ являются векторами Киллинга [50; 55]. В данной работе рассматривается срез постоянного времени $\tau = \text{const}$. В этом случае метрика имеет вид

$$d\tilde{s}^2 = \frac{d\rho^2 + \alpha^2 \sin^2 \rho d\phi^2}{\cos^2 \rho}. \quad (2.1.20)$$

Данная двумерная метрика² сводится к модели диска Пуанкаре [92]

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - z\bar{z})^2}, \quad (2.1.21)$$

²Двумерная кривизна такой метрики имеет дельта-функциональную особенность в точке $z = \bar{z} = 0$, которая отвечает координате конического дефекта.

где координаты $z = r \exp[iw]$, $r \in [0,1)$ и $w \in [0,2\pi\alpha)$ покрывают диск Пуанкаре \mathbb{D} с угловым дефицитом $2\pi(1 - \alpha)$, $\alpha \in (0,1)$. Граница диска $\partial\mathbb{D}$ представляет собой часть окружности $z\bar{z} = 1$. В Главе **3** данный диск Пуанкаре с угловым дефицитом и его граница будет обозначаться \mathbb{D}_α^3 и $\partial\mathbb{D}_\alpha$, соответственно. Координатные преобразования, связывающие (2.1.20) и (2.1.21), имеют вид

$$\rho = \arctan \left(\frac{2\sqrt{z\bar{z}}}{1 - \bar{z}z} \right), \quad \phi = \frac{1}{\alpha} \arctan \left(\frac{-i(z - \bar{z})}{z + \bar{z}} \right). \quad (2.1.22)$$

Изометрии диска Пуанкаре \mathbb{D} даются

$$z \rightarrow \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \quad (2.1.23)$$

Соответствующая трёхмерная группа обозначается $\text{Möb}(\mathbb{D})$. Заметим, что конформная граница $\partial\mathbb{D}$ инвариантна относительно преобразований из $\text{Möb}(\mathbb{D})$. Геодезические на диске Пуанкаре представляют собой радиусы и сегменты окружностей, которые ортогональны границе. Уравнение геодезических имеет вид

$$\gamma \bar{z}z + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad (2.1.24)$$

где случай $\gamma = 0$ соответствует радиусам. Геодезическая, проходящая через точки с координатами $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, с помощью конформного отображения $\text{Möb}(\mathbb{D})$ может быть переведена в интервал $(0, u)$ для некоторого u , лежащий на диаметре. Тогда длина данного интервала на \mathbb{D} имеет вид

$$L_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \log \frac{1 + u}{1 - u}, \quad \text{где} \quad u = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|. \quad (2.1.25)$$

Таким образом, всегда существует преобразование, которое переводит геодезическую в сегмент, лежащий на радиусе, причем одна из точек переходит в центр диска Пуанкаре, а вторая лежит на расстоянии u от центра. В данном случае, это соответствует $a = 1$ и $b = -z_1$ и выбранной точкой является z_1 .

Координаты на \mathbb{D}_α и \mathbb{D} связаны преобразованием $r \rightarrow r$, $w \rightarrow \alpha w$. Таким образом, длина геодезической $L_{\mathbb{D}_\alpha}$ на \mathbb{D}_α дается следующим соотношением

$$L_{\mathbb{D}_\alpha}(w) := L_{\mathbb{D}}(\alpha w). \quad (2.1.26)$$

³Координаты на \mathbb{D}_α и \mathbb{D} связаны преобразованием $z' = z^\alpha$.

В заключение этого Раздела заметим, что конический дефект в пространстве $\text{AdS}_3[2]$ является глобальным, иными словами, перемасштабированием координат τ и ϕ метрика конической сингулярности (2.1.19) сводится к метрике пространства AdS_3 (2.1.11).

2.1.3 Три тяжелых оператора

Построим теперь метрику пространства, порождаемого тремя тяжелыми операторами. В соответствии с введенными ранее обозначениями, мы рассматриваем пространство $\text{AdS}_3[3]$. Изложение в этом Разделе следует [68]. Классический тензор энергии-импульса (2.1.3) имеет вид

$$T^{(0)}(z) = \frac{\epsilon_2}{z^2} + \frac{\epsilon_3}{(1-z)^2} + \frac{\epsilon_2}{z(1-z)}, \quad (2.1.27)$$

где ϵ_2 и $\epsilon_3 = \epsilon_4$ обозначают классические размерности тяжелых операторов с координатами $0, 1, \infty$. Аналогично случаю двух тяжелых операторов, существует три линии сингулярностей: $(z, \bar{z}, u) = (0, 0, u)$, $(z, \bar{z}, u) = (1, 1, u)$, и $(z, \bar{z}, u) = (\infty, \infty, u)$ при $u \in \mathbb{R}_+$.

Отображение (2.1.6) для такой конфигурации тяжелых операторов дается

$$w(z) = z^\beta \frac{{}_2F_1\left(\frac{1+\beta}{2}, \frac{1+\beta}{2} + \alpha, 1 + \beta, z\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1-\beta}{2}, \frac{1-\beta}{2} + \alpha, 1 - \beta, z\right)}, \quad (2.1.28)$$

где $\alpha = \sqrt{1 - 4\epsilon_4}$, $\beta = \sqrt{1 - 4\epsilon_2}$. Такая функция задает отображение плоскости (z, \bar{z}) в некий криволинейный треугольник на плоскости с координатами (w, \bar{w}) [80]. Выбором параметров преобразования в (2.1.6) можно добиться того, чтобы вершины этого треугольника лежали в трех наперёд заданных точках. Углы в вершинах треугольника задаются классическими размерностями тяжелых операторов. Можно показать, что угол в вершине $w(0)$ равен $\pi\beta$, угол в $w(1)$ равен $-\pi\alpha$, и третий угол $w(\infty)$ равен $\pi\alpha$.⁴ Сумма углов данного треугольника равна $\pi\beta < \pi$, что соответствует гиперболическому треугольнику на плоскости

⁴Этот случай является обобщением случая двух тяжелых операторов, где были рассмотрены две вершины с углами $\pm\alpha$ соответственно, см. Раздел 2.1.2.

(w, \bar{w}) . Также отметим, что отображение (2.1.28) имеет три точки ветвления, $z = 0, 1, \infty$, отвечающие координатам тяжелых операторов.

Функция (2.1.28) может быть разложена вблизи своих особых точек

$$\begin{aligned} z \rightarrow 0 : \quad w(z) &\sim z^\beta (1 + \mathcal{O}(z)) , \\ z \rightarrow 1 : \quad w(z) &\sim (1 - z)^{-\alpha} (1 + \mathcal{O}(1 - z)) , \\ z \rightarrow \infty : \quad w(z) &\sim z^{-\alpha} (1 + \mathcal{O}(1/z)) , \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

где главная асимптотика определяет угловой дефицит/профицит. Заметим также, что эти асимптотики могут быть получены с помощью метода Фробениуса непосредственно из уравнения типа Фукса с тензором (2.1.27). Вершины криволинейного треугольника лежат в точках

$$w(0) = 0 , \quad w(1) = \infty , \quad w(\infty) = e^{i\pi\beta} \frac{\Gamma(1 + \beta) \Gamma(\frac{1-\beta}{2} + \alpha) \Gamma(\frac{1-\beta}{2})}{\Gamma(1 - \beta) \Gamma(\frac{1+\beta}{2} + \alpha) \Gamma(\frac{1+\beta}{2})} . \quad (2.1.30)$$

Имея асимптотики выше, можно найти поведение координаты v вблизи особых точек. Используя (2.1.29), легко показать, что

$$z \rightarrow 0 : \quad v(z, \bar{z}, u) = \frac{4\beta u^{-1}}{(1 - \beta)^2} (z\bar{z})^{\frac{1+\beta}{2}} (1 + \mathcal{O}(z\bar{z})) , \quad (2.1.31)$$

$$z \rightarrow 1 : \quad v(z, \bar{z}, u) = \frac{4\alpha u^{-1}}{(1 + \alpha)^2} ([(1 - z)(1 - \bar{z})]^{\frac{1-\alpha}{2}} (1 + \mathcal{O}((1 - z)(1 - \bar{z}))) , \quad (2.1.32)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad v(z, \bar{z}, u) = \alpha u (z\bar{z})^{-\frac{1+\alpha}{2}} (1 + \mathcal{O}(1/(z\bar{z}))) . \quad (2.1.33)$$

Так как $\alpha, \beta \in (0, 1)$, показатели в первых двух строках положительны, а в третьей - отрицательны. Отсюда следует, что три линии координатных сингулярностей в метрике Баньядоса (2.1.1) отображаются в три граничные точки в координатах Пуанкаре.⁵ В глобальных координатах, они лежат на границе цилиндра $\rho = \pi/2$ в точках $\theta_{0,1} = \pm\infty$ и $\theta_\infty = \log w_\infty$, где w_∞ дается (2.1.30), см. рисунок 2.2.

⁵Заметим, что приведенное описание не является глобальным описанием пространства $\text{AdS}_3[3]$, в отличие от случая двух тяжелых операторов, где конический дефект является глобальным дефектом. Изучение трехмерных геометрий с коническими сингулярностями тесно связано с теорией Лиувилля на конформной границе [93; 94]. Например, решение с тремя коническими дефектами рассматривалось в [95].

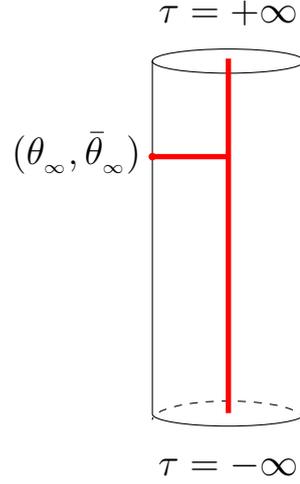


Рисунок 2.2 — Реализация дуального пространства $\text{AdS}_3[3]$. Три тяжелых оператора, продуцирующие метрику, показаны красным.

В заключение рассмотрим предел $\epsilon_2 \rightarrow 0$, который соответствует редукции к двум тяжёлым операторам. Этот предел отвечает $\beta \rightarrow 1$ и при этом условии функция (2.1.28) сводится к

$$w(z) \rightarrow \frac{(1-z)^{-\alpha} - 1}{\alpha}. \quad (2.1.34)$$

Несмотря на то, что данный ответ не совпадает с (2.1.13), он сводится к данной голографической функции преобразованием (2.1.6), если взять $A = -B = 1$, $C = \alpha$, $D = 0$. С точки зрения решений уравнений типа Фукса, из которых построена голографическая функция $w(z)$, это отвечает замене базиса функций $\psi_{1,2}(z)$.

2.2 Произвольное число тяжелых операторов и классические блоки типа LH^{n-k}

Анализ, проведенный в Разделах 2.1.2 и 2.1.3, может быть обобщен на $(n-k)$ тяжелых операторов, порождающих пространство $\text{AdS}_3[n-k]$. Рассмотрим классический тензор энергии-импульса вида

$$T(z|\mathbf{z}) = \sum_{i=k+1}^n \frac{\epsilon_i}{(z - \mathbf{z}_i)^2} + \frac{c_i}{z - \mathbf{z}_i}, \quad (2.2.1)$$

где $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_{k+1}, \dots, \mathbf{z}_n)$ - координаты тяжелых операторов с классическими размерностями ϵ_i . Голографическая функция $w(z)$ для такой конфигурации строится из решений уравнения $\psi'' + T(z|\mathbf{z})\psi = 0$ согласно (2.1.6). Данное уравнение представляет собой уравнение типа Фукса с $(n - k)$ регулярными сингулярными точками, для которых явный вид решений известен только для описанных выше случаев двух и трех тяжелых операторов.

Тем не менее, можно построить описание пространства $\text{AdS}_3[n - k]$ в терминах угловых дефицитов/профицитов. Каждому тяжелому оператору соответствует конический дефект (здесь предполагается, что выполнено условие (1.2.14)), который определяется ведущей асимптотикой решений фуксова уравнения в точках $z \rightarrow \mathbf{z}_j$. Используя (2.2.1), легко найти, что угловые дефициты определяются только классическими размерностями тяжелых операторов и равны $\alpha_j = \sqrt{1 - 4\epsilon_j}$, $j = k + 1, \dots, n$. С помощью (2.1.6) находятся прообразы координат конических дефектов

$$\mathbf{w}_j = \mathbf{w}(\mathbf{z}_j), \quad (2.2.2)$$

которые (после отображения (2.1.8)) образуют $(n - k)$ -угольник на плоскости (w, \bar{w}) в координатах Пуанкаре. Как и для случаев двух и трёх тяжелых операторов, пространство $\text{AdS}_3[n - k]$ можно визуализировать в виде цилиндра с коническими дефектами после перехода к глобальным координатам.

В качестве примера, иллюстрирующего свойства пространства $\text{AdS}_3[n - k]$ в контексте $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия, рассмотрим линию, соединяющую точку на поверхности цилиндра с координатой θ и ось цилиндра, см. рисунок 2.3 (а). Отметим, что данная длина является бесконечной, т.к. метрика расходится на границе. В координатах Пуанкаре длина данной линии может быть найдена с помощью (2.1.10). Координаты граничной точки даются (w, \bar{w}, ϵ) , где $\epsilon \rightarrow 0$, а точка на оси имеет координаты $(0, 0, 1)$. Раскладывая (2.1.10) по $\epsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\mathcal{L}(w, \bar{w}) = \log w + \log \bar{w}, \quad (2.2.3)$$

где мы отбросили всё w -независимые константы, в том числе и бесконечные. Используя (2.1.8), можно показать, что при переходе к координатам z длина дается

$$\mathcal{L}(z, \bar{z}) = \log \frac{w(z)}{w'(z)} + \log \frac{\bar{w}(\bar{z})}{\bar{w}'(\bar{z})}. \quad (2.2.4)$$

Со стороны граничной теории, рассматриваемые длины (далее обозначаемые $\mathcal{L}_{AdS_3[n-k]}(w)$) соответствуют $(n - k + 1)$ -точечным классическим конформным блокам с $(n - k)$ тяжелыми операторами и одним легким оператором (LH^{n-k}) размерности ϵ_L . Для случая двух тяжелых операторов 3-точечный блок LH^2 полностью фиксируется конформной симметрией, поэтому первым нетривиальным примером является 4-точечный блок с тремя тяжелыми операторами LH^3 .

Связь между длинами $\mathcal{L}_{AdS_3[n-k]}(w)$ и классическими блоками LH^{n-k} дается

$$f_{(1,n-k)}(w(z)|\epsilon) \sim -\epsilon_L \mathcal{L}_{AdS_3[n-k]}(w(z)) , \quad (2.2.5)$$

где $f_{(1,n-k)}(w(z)|\epsilon)$ обозначает легкий сектор блока LH^{n-k} , а ϵ_L - конформную размерность легкого оператора.

Для LH^2 и LH^3 классических блоков, для которых известны явные выражения, легко проверить соотношение (2.2.5), используя (1.4.10) и (1.5.4). Голографически дуальная реализация классического блока показана на рисунке 2.3. Для случая $(n - k) \geq 4$ формула (2.2.5) иллюстрирует свойство униформизации на примере LH^{n-k} блоков, так как функция длины в правой части этого соотношения для разных пространств $AdS_3[n - k]$ отличается только видом $w(z)$.

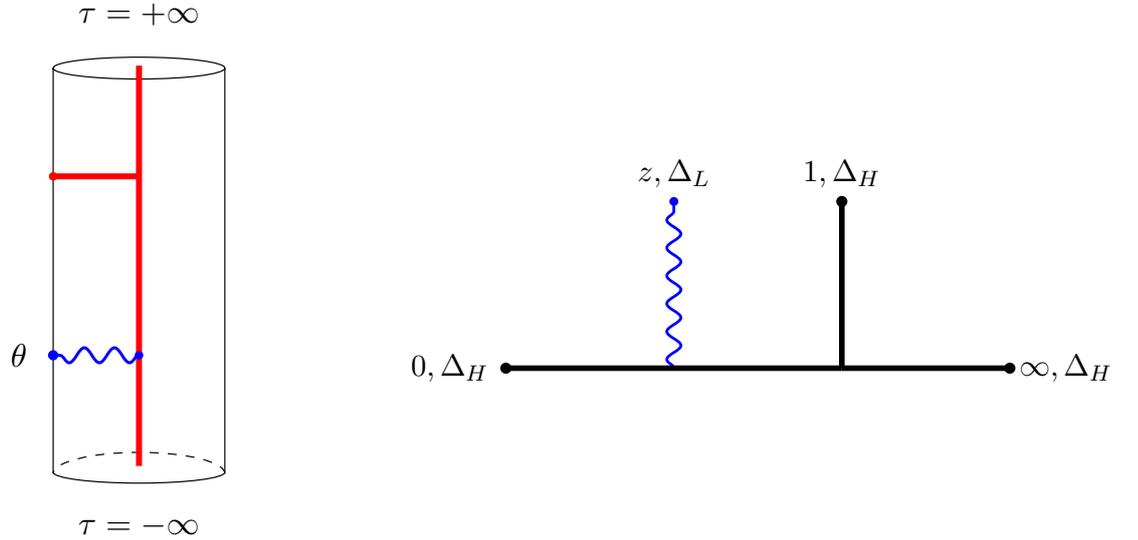


Рисунок 2.3 — Иллюстрация AdS_3/CFT_2 соответствия на примере длины в пространстве $AdS_3[3]$ (а) и 4-точечного классического блока с одним легким (показан волнистой линией) и тремя тяжелыми (выделены черным) операторами (б). Волнистая линия на рисунке (а) отвечает геодезической, соединяющей граничную точку с координатой θ и ось цилиндра.

2.3 Выводы

В данной Главе рассматривались метрики Баньядоса, которые дуальны тяжелому сектору классических конформных блоков. Для данных метрик были описаны преобразования, связывающие их с метрикой пространства AdS_3 в координатах Пуанкаре, а также в глобальных координатах. Данные преобразования определяются голоморфной функцией $w(z)$, которая совпадает с голографической функцией, введенной в Главе 1. Найден способ построения данной функции по решениям уравнений типа Фукса, возникающих в граничной теории. Прояснена связь голографических переменных, введенных в граничной теории, с дуальным описанием в объеме.

Для случаев двух и трех тяжелых операторов дуальные метрики явно построены с помощью найденных голографических переменных. Описано поведение таких многообразий вблизи сингулярных точек, координаты которых определяются координатами тяжелых операторов в граничной теории. Показано, что для случая двух тяжелых операторов дуальная метрика представляет собой метрику конической сингулярности, а для случая трех операторов описана метрика с тремя коническими дефектами.

Для метрики конической сингулярности рассмотрены свойства среза постоянного времени. Найден явный вид преобразований, связывающих двумерную метрику данного среза с метрикой модели диска Пуанкаре с угловым дефицитом. Показана связь длины на срезе постоянного времени с длиной на диске Пуанкаре.

В Главе 2.2 описана дуальная метрика для произвольного числа $(n - k)$ тяжелых операторов. Показано, что каждому тяжелому оператору соответствует конический дефект, величина которого задается классической размерностью соответствующего ему тяжелого оператора. Координаты данных конических дефектов определяются исходя из вида голографических переменных, что дает описание пространства $\text{AdS}_3[n - k]$.

Рассмотрен пример реализации $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия на примере классических конформных блоков типа LH^{n-k} и геодезических на пространстве $\text{AdS}_3[n - k]$, соединяющих граничную точку на поверхности цилиндра и его ось. Вычислены длины данных геодезических и показано, что они отвечают $(n - k + 1)$ -точечным классическим конформным блокам типа LH^{n-k} .

Глава 3. Голографическое описание легкого сектора

В этой Главе рассматривается дуальное описание легкого сектора классических конформных блоков, введенных в Главе 1. Изложение сконцентрировано на случае двух тяжелых полей, так как в силу свойства униформизации, сформулированного в Разделе 1.2, его можно обобщить на произвольное количество тяжелых полей.

В рамках общей концепции голографической дуальности, классическим блокам соответствует действие трехмерной гравитации на пространстве AdS_3 . В НЛ приближении n -точечному классическому блоку с двумя тяжелыми операторами соответствует действие Гамильтона-Якоби для $2n - 5$ пробных частиц, которые распространяются на фоне метрики конической сингулярности. Массы данных частиц равны внешним и промежуточным классическим размерностям $\epsilon, \tilde{\epsilon}$ примарных операторов граничной теории. Как обсуждалось в Главе 2, рассмотрение данной метрики может быть сведено к диску Пуанкаре \mathbb{D} . Геодезические линии частиц, соответствующие внешним операторам, прикреплены к границе $\partial\mathbb{D}$ в точках с координатами $w_i, i = 1, \dots, n - 2$, а $n - 3$ геодезических, отвечающие промежуточным операторам, лежат внутри \mathbb{D} . Вершины, в которых соединяются геодезические, определяются условиями равенства нулю суммарного импульса частиц в них. Совокупность всех $2n - 5$ геодезических сегментов называется геодезической сетью [57].

Голографическое описание легкого сектора классических блоков в терминах действия частиц (на примере четырехточечного блока) было впервые предложено в [34] и развито в [50; 54; 55; 76]. В этих работах были явно вычислены соответствующие действия как функции начальных координат и показано их равенство классическим конформным блокам. В работе [57] была доказана теорема о соответствии n -точечных классических конформных блоков с двумя тяжелыми операторами длинам специальных геодезических сетей, растянутых на гиперболической плоскости. Классический конформный блок с двумя тяжелыми операторами и действие частиц, мировые линии которых образуют геодезическую сеть, оказываются связаны простой формулой типа $f = -S +$ граничные члены. Однако, явные выражения для длин геодезических сетей не были получены.

В попытке придать вычислению соответствующего действия частиц явный геометрический смысл, можно переформулировать задачу о вычислении

данного действия в терминах взвешенных длин деревьев Штейнера, которые будут рассмотрены далее. Тогда для n -точечного классического конформного блока дуальное предписание может быть выражено следующим *голографическим соотношением* [67]

$$f_n(z(w)|\alpha, \epsilon, \tilde{\epsilon}) = -L_{\mathbb{D}_\alpha}^{(n-1)}(w|\epsilon, \tilde{\epsilon}) + i \sum_{k=1}^{n-2} \epsilon_k w_k, \quad w(z) = i \ln(1 - z). \quad (3.0.1)$$

где $L_{\mathbb{D}_\alpha}^{(n-1)}(w|\epsilon, \tilde{\epsilon})$ обозначает взвешенную длину дерева Штейнера на диске Пуанкаре с вырезом (см. Главу 2), который обозначается \mathbb{D}_α . Далее будут вычислены длины деревьев Штейнера, соответствующих классическим конформным блокам и явно проверено голографическое соотношение (3.0.1).

Структура данной Главы следующая: в Разделе 3.1 будут описано построение голографических деревьев Штейнера, дуальных классическим конформным блокам. В Разделе 3.2 будут вычислены длины данных деревьев, соответствующих 4, 5, 6-точечным блокам. Далее, в Разделе 3.3 будут рассмотрены поправки к вычисленным в Разделе 3.2 длинам деревьев в сверхлегком приближении.

3.1 Деревья Штейнера

3.1.1 Построение деревьев Штейнера

Пусть даны N точек на диске Пуанкаре \mathbb{D} , которые назовем внешними вершинами. Рассмотрим взвешенное (т.е. каждому ребру поставим в соответствие вес ϵ_a) связное дерево, соединяющее все эти точки и содержащее некоторое количество внутренних вершин, которые соединяются с исходными N точками, координаты которых полагаются известными. *Задача Штейнера* состоит в нахождении дерева наименьшей длины, соединяющего все эти точки (см. [96—98]). Другими словами, необходимо найти количество и координаты внутренних вершин, которые отвечают (глобальному) минимуму следующей взвешенной длины

$$L_N = \sum_{a \in \{\text{ребра}\}} \epsilon_a L_a, \quad (3.1.1)$$

где L_a обозначают длины ребер дерева.

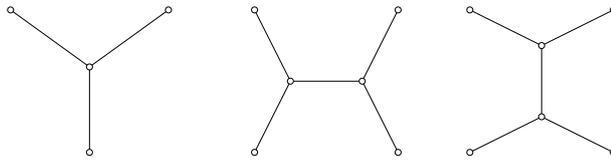


Рисунок 3.1 — Примеры простейших деревьев Штейнера на евклидовой плоскости и $\epsilon_a = 1$: (а) $N = 3$ с одной внутренней вершиной, (б) $N = 4$ с двумя внутренними вершинами [99].

Утверждается, что дерево Штейнера строится следующим образом (см. примеры на рисунке 3.1, а также рисунок 3.3): существует $N - 2$ внутренних трехвалентных вершин (называемые точками Ферма-Торричелли), причем углы в этой вершине определяются

$$\cos \gamma_{ca} = \frac{\epsilon_a^2 - \epsilon_c^2 - \epsilon_b^2}{2\epsilon_a\epsilon_c}, \quad \cos \gamma_{bc} = \frac{\epsilon_b^2 - \epsilon_c^2 - \epsilon_a^2}{2\epsilon_b\epsilon_c}, \quad \cos \gamma_{ab} = \frac{\epsilon_c^2 - \epsilon_b^2 - \epsilon_a^2}{2\epsilon_a\epsilon_b}, \quad (3.1.2)$$

где a, b, c обозначают индексы внешних или внутренних ребер дерева, входящих в эту вершину, а $\epsilon_{a,b,c}$ - соответствующие веса. Легко проверяется, что $\gamma_{ab} + \gamma_{bc} +$

$\gamma_{ca} = 2\pi$. Также из (3.1.2) следуют следующие необходимые условия

$$\epsilon_a + \epsilon_b \geq \epsilon_c, \quad \epsilon_a + \epsilon_c \geq \epsilon_b, \quad \epsilon_b + \epsilon_c \geq \epsilon_a. \quad (3.1.3)$$

Неравенства (3.1.2) и (3.1.3) следуют из минимальности длины и рассматривались ранее в математической литературе [100–102]. Евклидовы деревья Штейнера также рассматривались в работе [103]. В контексте голографической дуальности формулы (3.1.3) были получены в [57].

3.1.2 Голографические деревья Штейнера на диске Пуанкаре

В контексте $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия рассматриваются деревья Штейнера определенного вида, см. рисунок 3.2, которые мы называем *голографическими* [67]. n -точечному классическому блоку ставится в соответствие голографическое дерево с $N = n - 1$ вершинами, одна из которых лежит в центре диска Пуанкаре, остальные принадлежат границе $\partial\mathbb{D}$. Как было упомянуто ранее, такое дерево характеризуется $N_F = N - 2$ точками Ферма-Торричелли, которые соединены друг с другом $N - 3$ внутренними ребрами (в теории графов их называют мостами) и N ребрами с внешними вершинами. Также для каждого дерева Штейнера можно ввести *внешний многоугольник*, соединяющий все внешние вершины данного дерева.

Голографические деревья Штейнера делятся на *идеальные*,¹ у которых вес ребра, соединенного с центром диска, равен 0 и *неидеальные*, для которых это не выполняется, см. рисунок 3.2. Заметим, что при действии произвольного преобразования Мёбиуса идеальное дерево переходит в идеальное дерево, причем количество вершин является инвариантным относительно этого преобразования. Для неидеального дерева общее конформное преобразование сдвигает центр диска, поэтому неидеальное голографическое дерево переходит в некое неголографическое дерево. Кроме того, для данного N можно построить два голографических дерева - идеальное и неидеальное. После того, как описана структура голографических деревьев, можно явно переписать формулу (3.1.1)

¹В гиперболической геометрии вершины, принадлежащие границе $\partial\mathbb{D}$, называются идеальными.

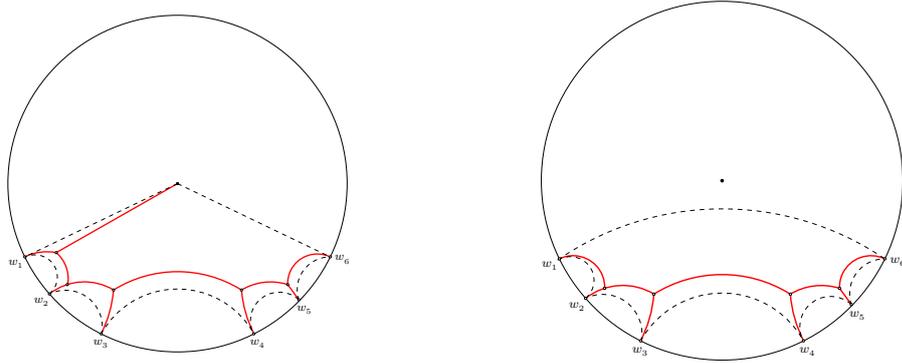


Рисунок 3.2 — Примеры голографических деревьев Штейнера: (а) неидеальное $N = 7$ дерево, (б) идеальное $N = 6$ дерево. Внешний многоугольник показан пунктирными линиями.

в виде суммы по внешним и внутренним ребрам

$$L_{\mathbb{D}}^{(N)}(w) = \sum_{i \in \text{outer}} \epsilon_i L_{\mathbb{D}}(z_i, x_{i+1}) + \sum_{j \in \text{inner}} \tilde{\epsilon}_j L_{\mathbb{D}}(x_j, x_{j+1}), \quad (3.1.4)$$

где все веса распадаются на внешние ϵ_i , $i = 0, \dots, n - 2$ и внутренние $\tilde{\epsilon}_j$, $j = 1, \dots, n - 4$. Пусть координаты внешних вершин имеют вид $z_j = \exp[iw_j]$, $j = 1, \dots, n - 2$, а координаты точек Ферма-Торричелли обозначим x_i , $i = 1, \dots, n - 3$. Если известны все x_i , то можно найти длину (3.1.4). Координаты x_i выражаются через величины w_j и веса ϵ , $\tilde{\epsilon}$.

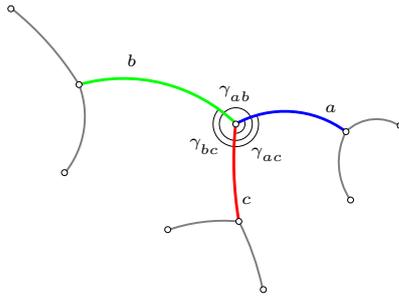


Рисунок 3.3 — Дерево Штейнера на неевклидовой плоскости. Три ребра, сходящиеся в точке Ферма-Торричелли, выделены разными цветами, соответствующим разным весам. Углы в вершине определяются формулой (3.1.2).

Координаты точек Ферма-Торричелли могут быть вычислены следующим образом. Для каждой точки Ферма-Торричелли можно написать уравнение геодезической, соединяющей ее с соседней точкой Ферма-Торричелли или внешней вершиной. Данные уравнения параметризуются величинами w_j , координатами

x_i и весами $\epsilon, \tilde{\epsilon}$. Имея уравнения геодезических, можно найти углы в каждой внутренней вершине как функции x_i . С другой стороны, данные углы определяются формулой (3.1.2), что дает нам систему уравнений для координат x_i , зная которые, можно найти длину (3.1.4). Однако такой метод вычисления является очень трудоемким и система уравнений на координаты точек Ферма быстро усложняется с ростом N , например, уже в случае $N = 3$ получается уравнение четвертого порядка. В свете этого, в Разделе 3.2 нами будет сформулирован другой способ вычисления длин взвешенных деревьев Штейнера, где переменными являются не координаты точек Ферма-Торричелли, а длины ребер дерева.

3.1.3 Разрезы и объединения деревьев Штейнера

Рассмотрим голографическое дерево Штейнера G_N с N внешними вершинами. Ранее упоминалось, что такое дерево является связным, поэтому удаление одного из ребер может сделать дерево несвязным. Существуют две принципиально разные возможности - удаление внешнего ребра и одного из внутренних ребер.

При удалении внешнего ребра вершина, в которую входит это ребро, исчезает, оставшиеся два ребра образуют одну геодезическую. Таким образом, возникает голографическое дерево Штейнера того же типа, но с меньшим на единицу числом внешних вершин

$$G_N \hookrightarrow G_{N-1}, \quad (3.1.5)$$

где \hookrightarrow обозначает операцию разреза по внешнему ребру. Если разрез проходит по внутреннему ребру, вершины, получаются два голографических дерева Штейнера с меньшим количеством внешних вершин

$$G_N \rightsquigarrow G_{N_1} \cup G_{N_2}, \quad N_1 + N_2 = N, \quad (3.1.6)$$

где \rightsquigarrow обозначает разрез по внутреннему ребру. С помощью таких разрезов можно построить несвязное дерево, представляющее собой объединение простейших деревьев Штейнера (см. Раздел 3.2). Данное дерево Штейнера называется *несвязным* деревом Штейнера, см. рисунок 3.4. Заметим, что хотя бы

одна из компонент связности несвязного дерева представляет собой идеальное дерево Штейнера.

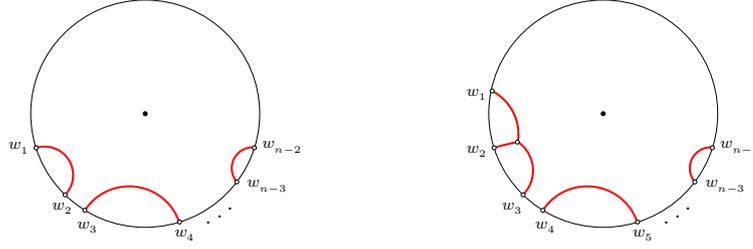


Рисунок 3.4 — Примеры несвязных деревьев Штейнера, полученных разрезами (3.1.6) из дерева G_N .

С точки зрения $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия, идеальные деревья Штейнера отвечают единичным блокам. Разрезы данных деревьев позволяют получать несвязные деревья Штейнера, соответствующие факторизованным блокам, рассмотренным ранее в Разделе 1.6. С этой точки зрения, процедура (3.1.6) кодирует факторизационное соотношение (1.6.2), так как длина несвязного дерева равна сумме длин его компонент. Таким образом, факторизационное соотношение имеет очевидное объяснение на языке разрезов деревьев и для доказательства дуальности несвязных деревьев Штейнера факторизованным блокам необходимо продемонстрировать голографическую дуальность между простейшими деревьями Штейнера и соответствующими им классическим конформным блокам.

3.2 $N = 2, 3, 4$ голографические деревья Штейнера

3.2.1 $N = 2$ голографические деревья

$N = 2$ голографические деревья, показанные на рисунке 3.5 (а), являются простейшими примерами деревьев Штейнера. Первое дерево дается геодезической, соединяющей две граничные точки.² Второе дерево представляет собой радиус, проведенный из центра диска Пуанкаре в точку с координатой $z_3 = \exp[iw_3]$. Так как рассматриваемые деревья не содержат точек Ферма-Торричелли, их длины могут быть найдены с помощью (2.1.25). Отметим, что длины данных деревьев являются бесконечными и должны быть регуляризованы, см. далее.

²В контексте $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия длина данной геодезической впервые рассматривалась в [34; 50].

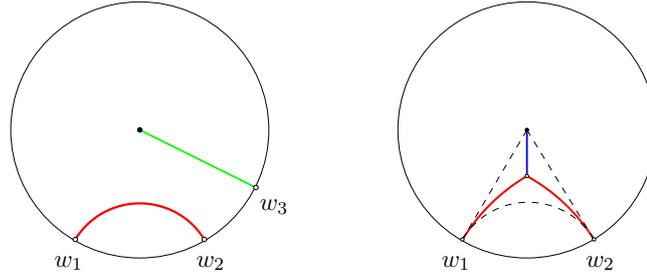


Рисунок 3.5 — (а) Два типа $N = 2$ голографических деревьев Штейнера, выделенные разными цветами. (б) Гиперболический треугольник, показанный пунктирными линиями и вписанное в него $N = 3$ дерево Штейнера, где различные цвета отвечают разным весам.

Рассмотрим первое $N = 2$ голографическое дерево (показано красным на рисунке 3.5 (а)). Координаты внешних вершин задаются $z_1 = \exp[iw_1]$ и $z_2 = \exp[iw_2]$, вес полагается равным ϵ_1 . Чтобы регуляризовать длину данного дерева, сдвинем внешние вершины внутрь \mathbb{D} : $z_1 = \exp[-\epsilon + iw_1]$ и $z_2 = \exp[-\epsilon + iw_2]$, где $\epsilon \rightarrow 0+$. В Приложении В показано, что такая длина может быть представлена в следующем виде

$$L_{\mathbb{D}}^{(2)}(w_2, w_1) = 2 \log \left[2 \sin \frac{w_2 - w_1}{2} \right] - 2 \log \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.2.1)$$

В силу того, что классические конформные блоки определены с точностью до констант интегрирования, в контексте соответствия блок/длина нас интересуют только члены, зависящие от w_i . В дальнейшем при вычислениях длин, константы и логарифмические расходимости отбрасываются. Таким образом, взвешенная длина первого $N = 2$ голографического дерева равна

$$L_{\mathbb{D}_\alpha}^{(2)}(w_1, w_2) = 2\epsilon_1 \log \sin \frac{(w_2 - w_1)}{2}. \quad (3.2.2)$$

Данное голографическое дерево соответствует единичному 4-точечному блоку (1.4.14). Используя (3.2.2) и (2.1.26), легко видеть, что голографическое соотношение (3.0.1) при учете (1.4.4) выполняется.

Аналогичным способом рассматривается второе $N = 2$ голографическое дерево. Используя соотношения (B.0.5), можно показать, что регуляризованная длина в данном случае равна константе. Соответственно, в голографическом соотношении (3.0.1) присутствует только второй член. Рассматриваемое гологра-

фическое дерево отвечает 3-точечному блоку (1.4.10), что легко показывается с помощью голографического соотношения (3.0.1).

3.2.2 $N = 3$ и $N = 4$ голографические деревья Штейнера

Гиперболическая тригонометрия. Как упоминалось ранее, вычисление длин деревьев Штейнера требует знания координат точек Ферма-Торричелли, нахождение которых для произвольного дерева является сложной вычислительной задачей.³ Исходя из вида (3.1.4), имеет смысл рассматривать длины ребер дерева как переменные (вместо координат точек Ферма-Торричелли).

В свете этого, рассмотрим гиперболический треугольник в \mathbb{D} со сторонами A, B, C и углами α, β, γ , которые противолежат этим сторонам. Для рассматриваемого треугольника справедливы первая и вторая теорема косинусов, а также теорема синусов [104]

$$\begin{aligned} \cosh A &= \cosh B \cosh C - \sinh B \sinh C \cos \alpha , \\ \cosh C \sin \alpha \sin \beta &= \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta , \\ \frac{\sinh A}{\sin \alpha} &= \frac{\sinh B}{\sin \beta} = \frac{\sinh C}{\sin \gamma} . \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

В силу того, что внешние вершины голографических деревьев Штейнера лежат на границе, необходимо рассмотреть треугольники с идеальными вершинами. Для треугольника с одной вершиной на границе ($\beta = 0$), первая теорема косинусов имеет вид

$$\exp[A'] = \exp[C'](\cosh B - \sinh B \cos \alpha) + \mathcal{O}(\varepsilon) , \tag{3.2.4}$$

где A' и C' обозначают регуляризованные длины сторон треугольника, соединенные с вершиной на границе, $\varepsilon \rightarrow 0+$. Для двух вершин, принадлежащих $\partial\mathbb{D}$, имеет место ($\beta = \gamma = 0$) и первая теорема косинусов дается

$$A' = B' + C' + 2 \log \sin \frac{\alpha}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon) , \tag{3.2.5}$$

³В Приложении Г приведен пример вычисления координат точки Ферма-Торричелли $N = 3$ идеального дерева Штейнера .

предполагая $\varepsilon \rightarrow 0+$. Случай треугольника, все вершины которого принадлежат $\partial\mathbb{D}$, рассматривается в следующем параграфе.

$N = 3$ голографические деревья Штейнера. Рассмотрим $N = 3$ идеальное дерево Штейнера⁴ с тремя граничными точками w_i и обозначим длины ребер данного дерева X_i , $i = 1, 2, 3$ (см. рисунок 3.6 (а)).

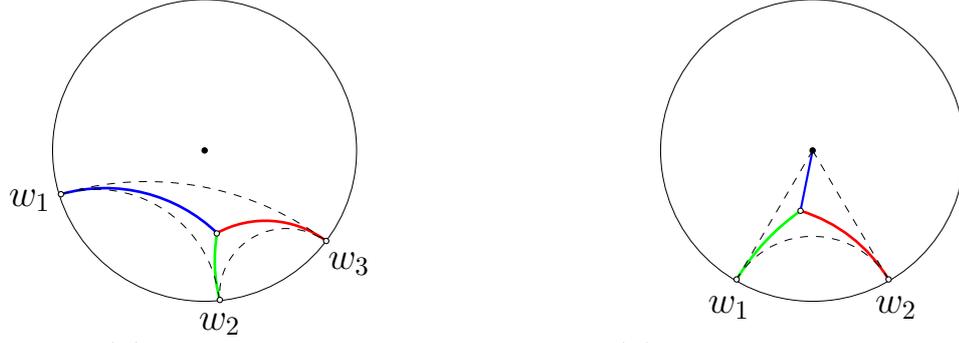


Рисунок 3.6 — (а) $N = 3$ идеальное дерево, (б) $N = 3$ неидеальное дерево.

Внешние треугольники показаны пунктирными линиями, разные цвета соответствуют разным весам ребер.

Рассмотрим три треугольника, на которые дерево Штейнера пересекает внешний треугольник и применим (3.2.5) к каждому из них

$$\begin{aligned} a_{12} &= X_1 + X_2 + 2 \log \sin \frac{\gamma_{12}}{2}, \\ a_{23} &= X_3 + X_2 + 2 \log \sin \frac{\gamma_{23}}{2}, \\ a_{13} &= X_3 + X_1 + 2 \log \sin \frac{\gamma_{13}}{2}, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

где

$$a_{ij} \equiv \log [4 \sin^2 w_{ij}] , \quad w_{ij} \equiv \frac{w_i - w_j}{2}, \quad (3.2.7)$$

а углы γ_{ij} задаются (3.1.2). Решая данную систему уравнений, легко найти, что взвешенная длина $N = 3$ идеального дерева имеет вид

$$L_{\mathbb{D}}^{(3)}(w_i | \epsilon_i) = (\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3) \log \sin w_{21} + (\epsilon_1 + \epsilon_3 - \epsilon_2) \log \sin w_{31} + (\epsilon_3 + \epsilon_2 - \epsilon_1) \log \sin w_{32}. \quad (3.2.8)$$

С точки зрения граничной теории данное голографическое дерево соответствует 5-точечному единичному блоку (1.4.24) в переменных (1.4.4), что проверяется с

⁴Длины $N = 3, 4$ голографических деревьев были изначально вычислены в работе [67] другим способом, однако излагаемый здесь подход является более простым и наглядным.

помощью (3.0.1). Единичный 5-точечный блок (1.4.19), в свою очередь, соответствует несвязному дереву Штейнера, полученному объединением двух $N = 2$ деревьев, идеального и неидеального.

Аналогично рассматривается случай $N = 3$ неидеального дерева (см. (б) на рисунке 3.6). Пусть X - длина радиальной линии с весом ϵ_3 , а Y и Z - длины ребер с весами $\epsilon_{1,2}$, соединенных с границей. В данном случае получаются два треугольника с одной вершиной на границе и один треугольник с двумя вершинами на границе. Применяя к данным треугольникам (3.2.4) и (3.2.5), можно получить

$$\begin{aligned} \exp[Y](\cosh X - \sinh X \cos \gamma_{13}) &= \exp[b] , \\ \exp[Z](\cosh X - \sinh X \cos \gamma_{23}) &= \exp[b] , \\ Y + Z + 2 \log \sin \frac{\gamma_{12}}{2} &= a_{12} , \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

где a_{ij} определяются (3.2.7), $b = \log 2$ обозначает длину радиуса диска Пуанкаре. Данная система сводится к квадратным уравнениям на длину каждого ребра. Решая уравнения (3.2.9), находим взвешенную длину неидеального $N = 3$ дерева Штейнера⁵

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{D}}^{(3)}(w_{21}|\epsilon_i) &= \epsilon_3 \left[\operatorname{Arcth} \left[\frac{\cos w_{21}}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 w_{12}}} \right] + \gamma \log \sin w_{21} \right] \\ &\quad - \epsilon_3 \beta \log \left(\beta \cos w_{21} + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 w_{21}} \right) , \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

где

$$\gamma = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\epsilon_3} , \quad \beta = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_3} . \quad (3.2.11)$$

Используя соотношения (3.0.1) и (2.1.26), легко показать, что рассматриваемое голографическое дерево Штейнера дуально 4-точечному классическому конформному блоку (1.4.13).

Заметим, что аналогичные рассуждения применимы к вычислению длин деревьев Штейнера с двумя внешними вершинами, принадлежащими границе $\partial\mathbb{D}$ и одной вершиной в \mathbb{D} с произвольной координатой $z_0 \neq 0$. Ответ для длины данного дерева воспроизводит результат, полученный другим способом в [67].

⁵Эта длина изначально получена в работе [76] в рамках подхода мировых линий. Для обсуждения в контексте деревьев Штейнера см. [67].

Если рассмотреть дерево Штейнера с двумя внешними вершинами в \mathbb{D} и одной вершиной на границе диска, мы получим уравнения четвертого порядка на длину каждого ребра, что затрудняет получение явных выражений. Длина каждого из ребер $N = 3$ дерева Штейнера с тремя внешними вершинами в \mathbb{D} , в свою очередь, определяется уравнением шестого порядка. Поэтому длины голографических деревьев с $N \geq 5$ внешними вершинами известны только в определенных приближениях.

$N = 4$ **идеальное дерево.** Рассмотрим $N = 4$ идеальное голографическое дерево, см. рисунок 3.7 (а). Идеальное дерево имеет четыре внешние вершины с координатами w_i , $i = 1, \dots, 4$ и две точки Ферма-Торричелли. Веса четырех внешних ребер равны ϵ_i , $i = 1, \dots, 4$, а вес внутреннего ребра, соединяющего точки Ферма-Торричелли, полагается равным $\tilde{\epsilon}$.⁶ Условие минимальности взвешенной длины такого дерева кодируется шестью (по три в каждой точке Ферма-Торричелли) углами α_k , которые задаются (3.1.2).

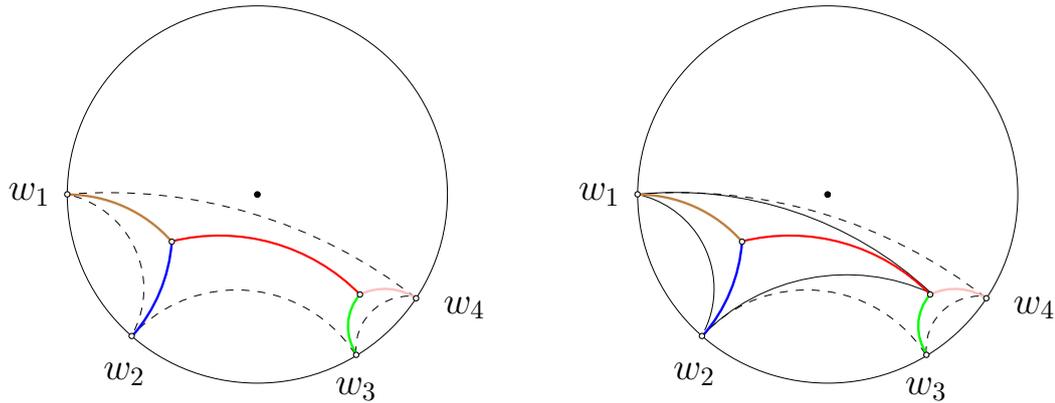


Рисунок 3.7 — (а) $N = 4$ идеальное дерево с пятью разными весами, выделенными разными цветами. Внешний четырехугольник показан пунктирными линиями. (б) Вспомогательный треугольник, выделенный черным линиями, пересекающий внешний четырехугольник на три треугольника.

Пусть A, B, C, D регуляризованные длины внешних ребер, а R — длина внутреннего ребра. Рассмотрим вспомогательный треугольник, вершинами которого являются граничные точки с координатами w_1, w_2 и вторая точка Ферма-Торричелли (см. рисунок 3.7 (б)). Данный треугольник вводится пото-

⁶Простейший случай $N = 4$ идеального дерева с весами $\epsilon_1 = \epsilon_2$ и $\epsilon_3 = \epsilon_4$ был рассмотрен в [69].

му, что его дерево Штейнера включает в себя два внешних и внутреннее ребро рассматриваемого $N = 4$ идеального дерева. Обозначим регуляризованные длины сторон вспомогательного треугольника K_1 и K_2 , а углы между этими сторонами и внутренним ребром $N = 4$ идеального дерева - λ и λ' . Тогда из соотношений (3.2.4) и (3.2.5) следует, что

$$\begin{aligned}\exp[K_1] &= (\cosh R - \sinh R \cos \alpha_1) \exp[A] , \\ \exp[K_2] &= (\cosh R - \sinh R \cos \alpha_2) \exp[B] , \\ A + B + 2 \log \sin \frac{\alpha_3}{2} &= a_{12} .\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

Кроме того, применяя (3.2.4) и (3.2.5) к треугольникам, на которые рассекается $N = 4$ идеальное дерево, находим

$$\begin{aligned}\exp[K_1 D](1 - \cos(\alpha_4 - \lambda)) &= a_{23} , \quad \exp[K_2 C](1 - \cos(\alpha_5 - \lambda')) = a_{14} , \\ \exp[A - K_1] &= (\cosh R - \sinh R \cos \lambda) , \quad \exp[B - K_2] = (\cosh R - \sinh R \cos \lambda') , \\ C + D + 2 \log \sin \frac{\alpha_3}{2} &= a_{34} .\end{aligned}\tag{3.2.13}$$

После исключения $K_{1,2}$ и λ, λ' из уравнений (3.2.12) и (3.2.13), мы находим, что

$$R = \log \left[\sqrt{\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}} \sqrt{\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2 + 1}} \frac{(1 + 2U - \beta_1 \beta_2 + V)}{\sqrt{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}} \right] ,\tag{3.2.14}$$

где

$$\begin{aligned}U &\equiv \exp\left[\frac{1}{2}(a_{23} + a_{14} - a_{34} - a_{12})\right] = \frac{\sin w_{41} \sin w_{32}}{\sin w_{43} \sin w_{21}} , \\ V &= \sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 + 4U(U + 1 - \beta_1 \beta_2)} ,\end{aligned}\tag{3.2.15}$$

$$\gamma_1 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\tilde{\epsilon}} , \quad \gamma_2 = \frac{\epsilon_3 + \epsilon_4}{\tilde{\epsilon}} , \quad \beta_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\tilde{\epsilon}} , \quad \beta_2 = \frac{\epsilon_3 - \epsilon_4}{\tilde{\epsilon}} .$$

Для определения длин внешних ребер $N = 4$ идеального дерева рассмотрим треугольники, смежные с вспомогательным треугольником, показанным чер-

ным на рисунке **3.7** (б). Применяя к ним (3.2.4), получаем

$$\exp[K_2 D](1 - \cos(\alpha_4 + \lambda')) = a_{24} , \quad \exp[K_1 C](1 - \cos(\alpha_5 + \lambda)) = a_{13} . \quad (3.2.16)$$

Разрешая уравнения (3.2.12), (3.2.13) и (3.2.16) относительно A, B, C, D , легко показать, что длина $N = 4$ идеального дерева имеет вид

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{D}}^{(4)}(w_i | \epsilon_i, \tilde{\epsilon}) &= \tilde{\epsilon} (\gamma_2 \log \sin w_{43} + \gamma_1 \log \sin w_{21} + R) - \\ &\frac{\tilde{\epsilon}(\beta_1 + \beta_2)}{2} \log \left(\frac{2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 + 2U(1 + \beta_1\beta_2) - (\beta_1 + \beta_2)V}{\sin w_{42}(\sin w_{31})^{-1}(1 + U)} \right) + \\ &\frac{\tilde{\epsilon}(\beta_2 - \beta_1)}{2} \log \left(\frac{2U(\beta_1\beta_2 - 1) - (\beta_1 - \beta_2)^2 + (\beta_2 - \beta_1)V}{(\sin w_{41})^{-1} \sin w_{32} U} \right) . \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Для случая $\beta_1 = \beta_2 = 0$, соответствующего условиям $\epsilon_1 = \epsilon_2$ и $\epsilon_3 = \epsilon_4$, длина (3.2.17) принимает более простой вид

$$L_{\mathbb{D}}^{(4)}(w_i | \epsilon_1, \epsilon_3, \tilde{\epsilon}) = 2\epsilon_1 \log \sin w_{43} + 2\epsilon_3 \log \sin w_{21} + 2\tilde{\epsilon} \log(\sqrt{1 + U} + \sqrt{U}) . \quad (3.2.18)$$

С точки зрения голографической дуальности данное дерево соответствует 6-точечному классическому конформному блоку (1.4.29). Используя (1.4.4), можно явно проверить голографическое соотношение (3.0.1).

3.3 Деревья Штейнера в сверхлегком приближении

Методы гиперболической тригонометрии, используемые в предыдущем Разделе, приводят к уравнениям 5-й и старших степеней для $N \geq 4$ неидеальных и $N \geq 5$ идеальных деревьев Штейнера с произвольными весами. Однако, длины данных деревьев могут быть найдены, если предположить, что часть весов ребер (мы будем называть их сверхлегкими) много меньше остальных весов. В контексте AdS₃/CFT₂ соответствия, данная теория возмущений отвечает SL приближению из Раздела 1.7.

3.3.1 $N = 4, 5$ неидеальные деревья Штейнера в сверхлегком приближении

Первое неидеальное $N = 4$ дерево Штейнера. Рассмотрим несвязное $N = 4$ дерево, показанное на рисунке 3.8 (а). Данное дерево представляет собой объединение двух типов $N = 2$ голографических деревьев, с весами ϵ_1 и ϵ_3 соответственно. Добавляя одно внутреннее ребро с весом $\tilde{\epsilon}_1 \ll \epsilon_{1,3}$ к несвязному $N = 4$ дереву, получаем $N = 4$ неидеальное дерево с попарно равными весами внешних ребер, см. рисунок 3.8 (б).

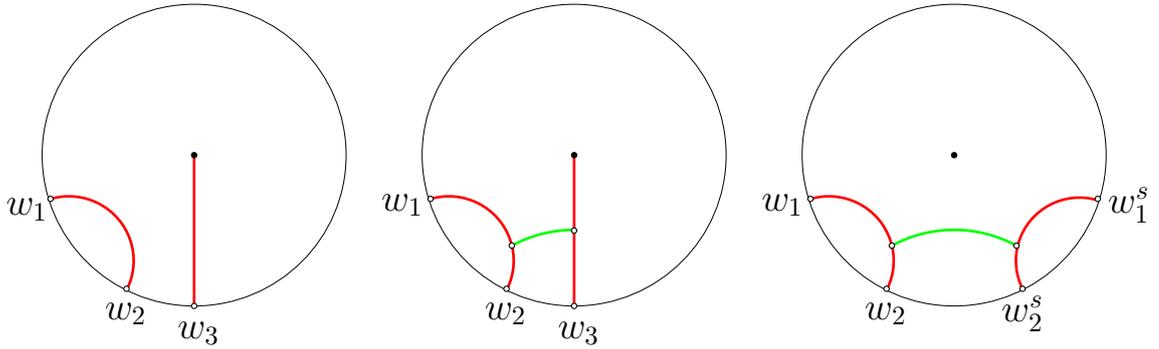


Рисунок 3.8 — Несвязное $N = 4$ дерево (а) и $N = 4$ неидеальное дерево (б).

Зеленая линия на рисунке (б) соответствует сверхлегкому весу $\tilde{\epsilon}_1$, недеформированное дерево показано красным. (с) Вспомогательное дерево Штейнера для $N = 4$ неидеального дерева.

Рассмотрим вспомогательное $N = 4$ идеальное дерево, показанное на рисунке 3.8 (с). Внешние вершины дерева имеют координаты (w_1, w_2, w_2^s, w_1^s) , где $w_1^s = 2w_3 + w_1$ и $w_2^s = w_1 + 2w_3 - w_2$ и данное дерево симметрично относительно оси $w = w_3$. Поэтому первое $N = 4$ неидеальное дерево получается из вспомогательного $N = 4$ идеального дерева разрезом по середине внутреннего ребра и добавлением радиальной линии, соединенной с точкой $z_3 = \exp[iw_3]$. Длина вспомогательного $N = 4$ идеального дерева дается (3.2.18). Отсюда находим длину первого $N = 4$ неидеального дерева

$$L_{\mathbb{D}}^{(4)}(w_i|\epsilon_1, \tilde{\epsilon}_1) = 2\epsilon_1 \log \sin w_2 + \tilde{\epsilon}_1 \log(\sqrt{1 + \tilde{U}} + \sqrt{\tilde{U}}), \quad \tilde{U} = \frac{\sin(w_3 - w_2) \sin w_3}{\sin^2 \frac{w_2 - w_1}{2}}. \quad (3.3.1)$$

Она соответствует 5-точечному блоку (1.7.2), что явно проверяется с помощью голографического соотношения (3.0.1).

Второе неидеальное $N = 4$ дерево Штейнера. Рассматриваемое дерево может быть получено добавлением внешнего ребра со сверхлегким весом к $N = 3$ идеальному дереву, см. рисунок 3.9 (б). Данное внешнее ребро перпендикулярно третьему ребру $N = 3$ идеального дерева.

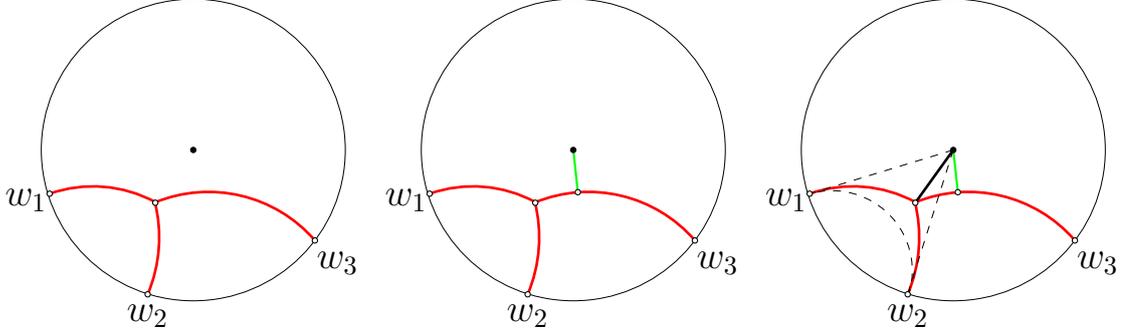


Рисунок 3.9 — (а) $N = 3$ идеальное дерево, (б) $N = 4$ неидеальное дерево со сверхлегким весом $\tilde{\epsilon}_2$. Внешнее ребро с этим весом, связанное с центром, выделено зеленым. (с) Вспомогательный треугольник, показанный пунктирными линиями.

Для упрощения вычислений положим, что два из трех весов $N = 3$ идеального дерева равны: $\epsilon_1 = \epsilon_2 \neq \epsilon_3$. Внешнее ребро (длина которого обозначена K) неидеального $N = 4$ дерева характеризуется сверхлегким весом $\tilde{\epsilon}_2 \ll \epsilon_{1,2,3}$ и по построению $\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_3$. Рассмотрим вспомогательный треугольник с вершинами в точках w_1, w_2 и третьей вершиной в центре \mathbb{D} (см. рисунок 3.9 (с)). Обозначим A длину радиальной линии (показана чёрным на рисунке 3.9 (с)), соединяющей точку Ферма-Торричелли с центром \mathbb{D} . Применяя соотношения (3.2.3) и (3.2.4) к вспомогательному треугольнику, получаем

$$\begin{aligned} \exp[X_1](\cosh A - \sinh A \cos(\gamma_{13} + \alpha)) &= \exp[X_2](\cosh A - \sinh A \cos(\gamma_{13} - \alpha)), \\ \sinh K \sin \alpha &= \sinh A, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

где α - угол между ребрами длины X_3 и A . Решение уравнений (3.3.2) относительно K имеет вид

$$\sinh K = \frac{\sin \frac{2w_3 - w_2 - w_1}{2}}{\sin \frac{w_3 - w_1}{2} \sin \frac{w_3 - w_2}{2}}. \tag{3.3.3}$$

Так как длина рассматриваемого $N = 4$ неидеального дерева отличается от длины $N = 3$ идеального дерева на $\tilde{\epsilon}_2 K$, получаем

$$L_{\mathbb{D}}^{(4)}(w_i|\epsilon_1, \epsilon_3, \tilde{\epsilon}_2) = L_{\mathbb{D}}^{(3)}(w_i|\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_3) + \tilde{\epsilon}_2 \operatorname{Arcsinh} \frac{\sin \frac{2w_3 - w_2 - w_1}{2}}{\sin \frac{w_3 - w_1}{2} \sin \frac{w_3 - w_2}{2}}, \quad (3.3.4)$$

где $L_{\mathbb{D}}^{(3)}(w_i|\epsilon_1, \epsilon_1, \epsilon_3)$ определяется (3.2.8). С помощью формулы (3.0.1) легко показать, что это голографическое дерево дуально 5-точечному классическому блоку (1.7.4).

Неидеальное $N = 5$ дерево. Данное дерево с двумя сверхлегкими весами $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_3$ показано на рисунке 3.10. Оно строится добавлением внутреннего и внешнего ребра к несвязному $N = 4$ дереву Штейнера, которое состоит из двух геодезических с весами ϵ_1 и ϵ_2 , соединяющих точки с координатами w_1, w_2 и w_3, w_4 , принадлежащие $\partial\mathbb{D}$.

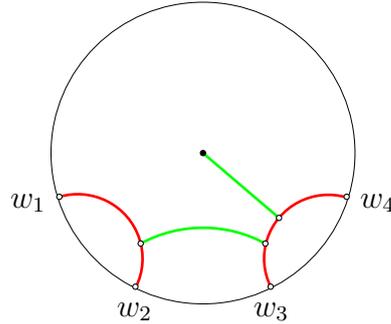


Рисунок 3.10 — $N = 5$ неидеальное дерево. Несвязное $N = 4$ дерево показано красным; ребра, соответствующие сверхлегким весам $\tilde{\epsilon}_1$ и $\tilde{\epsilon}_3$, показаны зеленым.

При условии $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_3 \ll \epsilon_1, \epsilon_3$, длина $N = 5$ неидеального дерева представляет собой сумму длин $N = 4$ идеального дерева и радиальной линии. Длина радиальной линии определяется из уравнений (3.2.9) и при условии $\tilde{\epsilon}_3 \ll \epsilon_3$ имеет вид

$$L_{\mathbb{D}}^{(r)}(w_{43}) = \tilde{\epsilon}_3 \log \cot \frac{w_{43}}{2}. \quad (3.3.5)$$

Длина внутреннего ребра (моста) определяется (3.2.14) и для данного выбора весов дается

$$L_{\mathbb{D}}^{(b)}(w_i) = \tilde{\epsilon}_1 \log(\sqrt{1+U} + \sqrt{U}), \quad U = \frac{\sin w_{41} \sin w_{32}}{\sin w_{43} \sin w_{21}}. \quad (3.3.6)$$

Заметим, что длины (3.3.5) и (3.3.6) зависят только от координат w_i и не зависят от весов $\epsilon_{1,3}$. В итоге, длина $N = 5$ неидеального дерева записывается в виде

$$L_{\mathbb{D}}^{(5)}(w_i | \epsilon_1, \epsilon_3, \tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_3) = 2\epsilon_1 \log \sin w_{21} + 2\epsilon_3 \log \sin w_{43} + \tilde{\epsilon}_1 \log(\sqrt{1+U} + \sqrt{U}) + \tilde{\epsilon}_3 \log \cot \frac{w_{43}}{2}. \quad (3.3.7)$$

Используя голографическое соотношение (3.0.1), можно явно продемонстрировать дуальность данного голографического дерева 6-точечному классическому конформному блоку со сверхлегкими операторами (1.7.6).

На данном примере видно, что в некоторых случаях длина голографического дерева со сверхлегкими весами отличается от длины недеформированного несвязного дерева несколькими фиксированными элементами, такими как радиальная линия и внутреннее ребро (мост). В простейшем случае, рассмотренном в этом параграфе, длины данных элементов определяются только координатами внешних вершин. Отсюда следует, что голографические деревья Штейнера с большим количеством внешних вершин могут быть построены путем добавления мостов со сверхлегкими весами к многоточечным факторизованным деревьям. Это наблюдение упрощает вычисление длины неидеального $(2M + 1)$ -точечного дерева в Разделе 3.3.2.

3.3.2 $(2M + 1)$ -точечное дерево со сверхлегкими весами

Рассмотрим голографическое дерево Штейнера с $N = 2M + 1$ внешними вершинами, где $M = 3, 4, 5, \dots$. Данное дерево построено из несвязного дерева с $2M$ внешними вершинами, которое состоит из M геодезических с весами ϵ_i , $i = 1, \dots, M$. Рассматриваемые M геодезических, проходящих через точки с координатами w_{2i-1}, w_{2i} , соединяются мостами, веса которых равны $\tilde{\epsilon}_j$, $j = 1, \dots, N - 1$. Радиальная линия с весом ϵ_r соединяется с центром \mathbb{D} (см. рисунок 3.11).

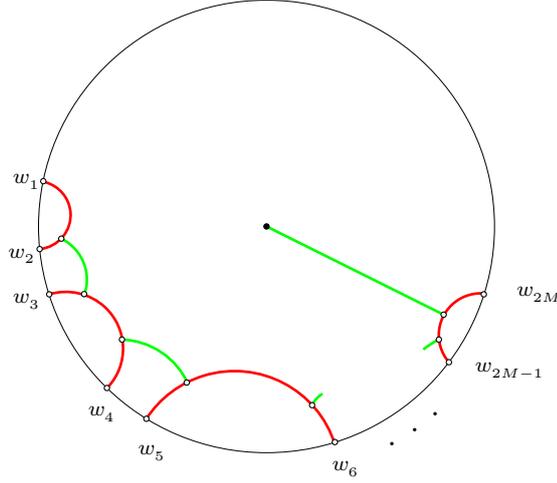


Рисунок 3.11 — $N = 2M + 1$ неидеальное дерево, построенное из несвязного дерева с $2M$ вершинами, показанного красным. Ребра со сверхлегкими весами, показанными зеленым.

Так как длины радиальной и мостовой линий определяются (3.3.5) и (3.3.6) соответственно, взвешенная длина рассматриваемого неидеального $(2M + 1)$ -точечного дерева равна

$$L_{\mathbb{D}}^{(2M+1)}(w_i | \epsilon, \tilde{\epsilon}) = 2 \sum_{i=1}^M \epsilon_i \log \sin w_{2i-1, 2i} + 2 \sum_{i=1}^{M-1} \tilde{\epsilon}_j \log \left(\sqrt{U_{2i+1} + 1} + \sqrt{U_{2i+1}} \right) + \epsilon_r \log \cot \frac{w_{2M-1, 2M}}{2}, \quad (3.3.8)$$

где

$$U_{2i-1} = \frac{\sin w_{2i+1, 2i} \sin w_{2i+2, 2i-1}}{\sin w_{2i, 2i-1} \sin w_{2i+2, 2i+1}}. \quad (3.3.9)$$

Заметим, что рассуждения выше обобщаются на случай других конфигураций несвязных деревьев Штейнера. Например, можно рассмотреть $M = 3K$ несвязное дерево, представляющее собой объединение K идеальных $N = 3$ деревьев Штейнера. Однако, рассмотренный в данном Разделе пример является наиболее простым с технической точки зрения и иллюстрирует все основные особенности вычисления длин голографических деревьев в SL приближении. Со стороны граничной теории, данному $(2M + 1)$ -точечному дереву отвечает $(2M + 2)$ -точечный классический конформный блок (1.7.8). Учитывая (2.1.26), легко проверить, что голографическое соотношение (3.0.1) выполняется.

3.4 Выводы

В этой Главе были описаны голографические деревья Штейнера на диске Пуанкаре, дуальные классическим конформным блокам, рассмотренным в Главе 1. Предложена процедура регуляризации длин голографических деревьев Штейнера. Факторизационное соотношение (1.6.2), доказанное в Разделе 1.6, сформулировано на языке разрезов голографических деревьев, что является концептуально более простым доказательством, явно использующим $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствие.

Был предложен новый подход к вычислению длин голографических деревьев Штейнера, опирающийся на гиперболическую тригонометрию. Для деревьев с $N = 2, 3, 4$ внешними вершинами явно вычислены взвешенные длины и показано их равенство классическим конформным блокам. Развита теория возмущений над рассмотренными ранее деревьями Штейнера, в рамках которой голографические деревья Штейнера со сверхлегкими промежуточными весами анализировались как деформации несвязных/идеальных деревьев. Явным сравнением взвешенных длин $N = 4, 5$ деревьев и классических конформных блоков из Раздела 3.3 проверено голографическое соотношение (3.0.1).

Данный анализ обобщен на неидеальные голографические деревья со сверхлегкими промежуточными весами, длины которых вычислены в Разделе 3.3.2. Таким образом, найдены длины голографических деревьев с наиболее общим набором промежуточных весов и показано, что с точки зрения граничной теории они отвечают классическим конформным блокам (1.7.8).

Заключение

Перечислим основные результаты диссертационной работы:

1. Развита монодромный метод вычисления n -точечных классических конформных блоков с произвольным числом тяжелых операторов. Введены голографические переменные, существенно упрощающие монодромные уравнения, определяющие n -точечный классический конформный блок. Установлено и доказано свойство униформизации легкого сектора классических конформных блоков с использованием голографических переменных.
2. Найдены 5, 6-точечные единичные блоки с двумя тяжелыми операторами и 4, 5-точечные блоки с тремя тяжелыми операторами. Доказана теорема о факторизации и явно найдены единичные n -точечные блоки с двумя тяжелыми операторами.
3. Построены классические конформные блоки с сверхлегкими промежуточными операторами в рамках теории возмущения над единичными блоками. В сверхлегком приближении вычислены поправки к n -точечным единичным блокам.
4. Описана дуальная геометрия, соответствующая тяжелому сектору классических конформных блоков. Явно построены дуальные геометрии, генерируемые тремя тяжелыми операторами и предложено обобщение данной конструкции на произвольное число тяжелых операторов.
5. Построены голографические деревья Штейнера на диске Пуанкаре, дуальные классическим конформным блокам. Найдены длины деревьев с $n \leq 5$ внешними вершинами. Вычислены длины деревьев с $(2M + 1)$ внешними вершинами в дополнительном приближении сверхлегких весов. Явно показано равенство длин деревьев соответствующим классическим конформным блокам.

Найденные ранее в литературе и в этой диссертационной работе выражения для классических конформных блоков/длин голографических деревьев Штейнера могут быть сведены в следующую таблицу:

N	G_N	$N + 1$ -точечный классический блок	приближение
2	Идеальное дерево, с. [34; 50]	с. [34; 50]	HL
3	Идеальное дерево, с. [67]	с. [67]	HL
3	Неидеальное дерево, с. [55; 67; 76]	с. [55; 67; 76]	HL
4	Простейшее идеальное дерево, с. [67]	с. [67]	HL
4	Общее идеальное дерево, ур. (3.2.17)	ур. (1.4.29)	HL
4	Неидеальное дерево, с. [54; 55; 84]	с. [54; 55; 84]	HL+SL
4	Неидеальное дерево, ур. (3.3.1)	ур. (1.7.2)	HL+SL
4	Неидеальное дерево, ур. (3.3.4)	ур. (1.7.4)	HL+SL
5	Неидеальное дерево, ур. (3.3.7)	ур. (1.7.6)	HL+SL
N	Неидеальное дерево, с. [56]	с. [56]	HL+SL
N	Несвязные деревья, с. [67]	с. [67]	HL
$N = 2M+1$	Неидеальное дерево, ур. (3.3.8)	ур. (1.7.8)	HL+SL

Список литературы

1. *Golfand Y. A., Likhtman E. P.* Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance // JETP Lett. — 1971. — т. 13. — с. 323—326.
2. *Wess J., Zumino B.* A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations // Phys. Lett. B. — 1974. — т. 49. — с. 52. — DOI: [10.1016/0370-2693\(74\)90578-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(74)90578-4).
3. *Wess J., Zumino B.* Supergauge Transformations in Four-Dimensions // Nucl. Phys. B / под ред. A. Salam, E. Sezgin. — 1974. — т. 70. — с. 39—50. — DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90355-1](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90355-1).
4. *Freedman D. Z., Nieuwenhuizen P. van, Ferrara S.* Progress Toward a Theory of Supergravity // Phys. Rev. D. — 1976. — т. 13. — с. 3214—3218. — DOI: [10.1103/PhysRevD.13.3214](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.13.3214).
5. *Van Nieuwenhuizen P.* Supergravity // Phys. Rept. — 1981. — т. 68. — с. 189—398. — DOI: [10.1016/0370-1573\(81\)90157-5](https://doi.org/10.1016/0370-1573(81)90157-5).
6. *Bern Z., Dixon L. J., Roiban R.* Is $N = 8$ supergravity ultraviolet finite? // Phys. Lett. B. — 2007. — т. 644. — с. 265—271. — DOI: [10.1016/j.physletb.2006.11.030](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.11.030). — arXiv: [hep-th/0611086](https://arxiv.org/abs/hep-th/0611086).
7. *Green M. B., Schwarz J. H., Witten E.* SUPERSTRING THEORY. VOL. 2: LOOP AMPLITUDES, ANOMALIES AND PHENOMENOLOGY. — 07.1988. — ISBN 978-0-521-35753-1.
8. *Green M. B., Schwarz J. H., Witten E.* SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION. — 07.1988. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). — ISBN 978-0-521-35752-4.
9. *Yoneya T.* Connection of Dual Models to Electrodynamics and Gravidynamics // Prog. Theor. Phys. — 1974. — т. 51. — с. 1907—1920. — DOI: [10.1143/PTP.51.1907](https://doi.org/10.1143/PTP.51.1907).
10. *Scherk J., Schwarz J. H.* Dual Models for Nonhadrons // Nucl. Phys. B. — 1974. — т. 81. — с. 118—144. — DOI: [10.1016/0550-3213\(74\)90010-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90010-8).

11. *Scherk J., Schwarz J. H.* Dual Models and the Geometry of Space-Time // Phys. Lett. B. — 1974. — т. 52. — с. 347—350. — DOI: [10.1016/0370-2693\(74\)90059-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(74)90059-8).
12. *Preitschopf C. R., Thorn C. B., Yost S. A.* SUPERSTRING FIELD THEORY // Nucl. Phys. B. — 1990. — т. 337. — с. 363—433. — DOI: [10.1016/0550-3213\(90\)90276-J](https://doi.org/10.1016/0550-3213(90)90276-J).
13. *Witten E.* String theory dynamics in various dimensions // Nucl. Phys. B. — 1995. — т. 443. — с. 85—126. — DOI: [10.1016/0550-3213\(95\)00158-O](https://doi.org/10.1016/0550-3213(95)00158-O). — arXiv: [hep-th/9503124](https://arxiv.org/abs/hep-th/9503124).
14. *Horava P., Witten E.* Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary // Nucl. Phys. B. — 1996. — т. 475. — с. 94—114. — DOI: [10.1016/0550-3213\(96\)00308-2](https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00308-2). — arXiv: [hep-th/9603142](https://arxiv.org/abs/hep-th/9603142).
15. *'t Hooft G.* Dimensional reduction in quantum gravity // Conf. Proc. C. — 1993. — т. 930308. — с. 284—296. — arXiv: [gr-qc/9310026](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9310026).
16. *Susskind L.* The World as a hologram // J. Math. Phys. — 1995. — т. 36. — с. 6377—6396. — DOI: [10.1063/1.531249](https://doi.org/10.1063/1.531249). — arXiv: [hep-th/9409089](https://arxiv.org/abs/hep-th/9409089).
17. *Maldacena J. M.* The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // Adv.Theor.Math.Phys. — 1998. — т. 2. — с. 231—252. — DOI: [10.1023/A:1026654312961](https://doi.org/10.1023/A:1026654312961), [10.1023/A:1026654312961](https://doi.org/10.1023/A:1026654312961). — arXiv: [hep-th/9711200](https://arxiv.org/abs/hep-th/9711200) [[hep-th](https://arxiv.org/abs/hep-th)].
18. *Gubser S. S., Klebanov I. R., Polyakov A. M.* Gauge theory correlators from noncritical string theory // Phys. Lett. B. — 1998. — т. 428. — с. 105—114. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(98\)00377-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00377-3). — arXiv: [hep-th/9802109](https://arxiv.org/abs/hep-th/9802109).
19. *Witten E.* Anti-de Sitter space and holography // Adv. Theor. Math. Phys. — 1998. — т. 2. — с. 253—291. — DOI: [10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2](https://doi.org/10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2). — arXiv: [hep-th/9802150](https://arxiv.org/abs/hep-th/9802150).
20. *Klebanov I. R., Witten E.* AdS / CFT correspondence and symmetry breaking // Nucl. Phys. B. — 1999. — т. 556. — с. 89—114. — DOI: [10.1016/S0550-3213\(99\)00387-9](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(99)00387-9). — arXiv: [hep-th/9905104](https://arxiv.org/abs/hep-th/9905104).
21. *Klebanov I. R., Polyakov A. M.* AdS dual of the critical O(N) vector model // Phys. Lett. B. — 2002. — т. 550. — с. 213—219. — DOI: [10.1016/S0370-2693\(02\)02980-5](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(02)02980-5). — arXiv: [hep-th/0210114](https://arxiv.org/abs/hep-th/0210114).

22. *Petkou A. C.* Evaluating the AdS dual of the critical $O(N)$ vector model // JHEP. — 2003. — т. 03. — с. 049. — DOI: [10.1088/1126-6708/2003/03/049](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2003/03/049). — arXiv: [hep-th/0302063](https://arxiv.org/abs/hep-th/0302063).
23. *Brown J. D., Henneaux M.* Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity // Commun.Math.Phys. — 1986. — т. 104. — с. 207–226. — DOI: [10.1007/BF01211590](https://doi.org/10.1007/BF01211590).
24. *Coussaert O., Henneaux M., Driest P. van.* The Asymptotic dynamics of three-dimensional Einstein gravity with a negative cosmological constant // Class. Quant. Grav. — 1995. — т. 12. — с. 2961–2966. — DOI: [10.1088/0264-9381/12/12/012](https://doi.org/10.1088/0264-9381/12/12/012). — arXiv: [gr-qc/9506019](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9506019).
25. *Eberhardt L., Gaberdiel M. R., Gopakumar R.* Deriving the AdS_3/CFT_2 correspondence // JHEP. — 2020. — т. 02. — с. 136. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2020\)136](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2020)136). — arXiv: [1911.00378](https://arxiv.org/abs/1911.00378) [[hep-th](#)].
26. *Eberhardt L.* AdS_3/CFT_2 at higher genus // JHEP. — 2020. — т. 05. — с. 150. — DOI: [10.1007/JHEP05\(2020\)150](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2020)150). — arXiv: [2002.11729](https://arxiv.org/abs/2002.11729) [[hep-th](#)].
27. *Deser S., Jackiw R.* Three-Dimensional Cosmological Gravity: Dynamics of Constant Curvature // Annals Phys. — 1984. — т. 153. — с. 405–416. — DOI: [10.1016/0003-4916\(84\)90025-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90025-3).
28. *Deser S., Jackiw R., 't Hooft G.* Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space // Annals Phys. — 1984. — т. 152. — с. 220. — DOI: [10.1016/0003-4916\(84\)90085-X](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90085-X).
29. *Witten E.* (2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System // Nucl. Phys. B. — 1988. — т. 311. — с. 46. — DOI: [10.1016/0550-3213\(88\)90143-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90143-5).
30. *Witten E.* Three-Dimensional Gravity Revisited. — 2007. — июнь. — arXiv: [0706.3359](https://arxiv.org/abs/0706.3359) [[hep-th](#)].
31. *Witten E.* Quantum Field Theory and the Jones Polynomial // Commun. Math. Phys. / под ред. A. N. Mitra. — 1989. — т. 121. — с. 351–399. — DOI: [10.1007/BF01217730](https://doi.org/10.1007/BF01217730).
32. *Ryu S., Takayanagi T.* Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT // Phys. Rev. Lett. — 2006. — т. 96. — с. 181602. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.96.181602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.181602). — arXiv: [hep-th/0603001](https://arxiv.org/abs/hep-th/0603001).

33. *Hubeny V. E., Rangamani M., Takayanagi T.* A Covariant holographic entanglement entropy proposal // JHEP. — 2007. — т. 07. — с. 062. — DOI: [10.1088/1126-6708/2007/07/062](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/07/062). — arXiv: [0705.0016](https://arxiv.org/abs/0705.0016) [hep-th].
34. *Hartman T.* Entanglement Entropy at Large Central Charge. — 2013. — arXiv: [1303.6955](https://arxiv.org/abs/1303.6955) [hep-th].
35. *Gubser S. S.* A p -adic version of AdS/CFT // Adv. Theor. Math. Phys. — 2017. — т. 21. — с. 1655—1678. — DOI: [10.4310/ATMP.2017.v21.n7.a3](https://doi.org/10.4310/ATMP.2017.v21.n7.a3). — arXiv: [1705.00373](https://arxiv.org/abs/1705.00373) [hep-th].
36. *Penedones J.* Writing CFT correlation functions as AdS scattering amplitudes // JHEP. — 2011. — т. 03. — с. 025. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2011\)025](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2011)025). — arXiv: [1011.1485](https://arxiv.org/abs/1011.1485) [hep-th].
37. Witten Diagrams Revisited: The AdS Geometry of Conformal Blocks / E. Hijano [и др.] // JHEP. — 2016. — т. 01. — с. 146. — DOI: [10.1007/JHEP01\(2016\)146](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2016)146). — arXiv: [1508.00501](https://arxiv.org/abs/1508.00501) [hep-th].
38. *Lie S.* Theorie der Transformationsgruppen Abschn. 3. — Leipzig : Teubner, 1893. — URL: <http://eudml.org/doc/202686>.
39. *Polyakov A. M.* Conformal symmetry of critical fluctuations // JETP Lett. — 1970. — т. 12. — с. 381—383.
40. *Luscher M., Mack G.* Global Conformal Invariance in Quantum Field Theory // Commun. Math. Phys. — 1975. — т. 41. — с. 203—234. — DOI: [10.1007/BF01608988](https://doi.org/10.1007/BF01608988).
41. *Polyakov A. M.* Nonhamiltonian approach to conformal quantum field theory // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1974. — т. 66. — с. 23—42.
42. *Zamolodchikov A.* Two-dimensional conformal symmetry and critical four-spin correlation functions in the Ashkin-Teller model // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1986. — т. 90. — с. 1808—1818.
43. *Dolan F. A., Osborn H.* Conformal partial waves and the operator product expansion // Nucl. Phys. B. — 2004. — т. 678. — с. 491—507. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2003.11.016](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2003.11.016). — arXiv: [hep-th/0309180](https://arxiv.org/abs/hep-th/0309180).
44. *Polyakov A. M.* Quantum Geometry of Bosonic Strings // Phys. Lett. B / под ред. I. M. Khalatnikov, V. P. Mineev. — 1981. — т. 103. — с. 207—210. — DOI: [10.1016/0370-2693\(81\)90743-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90743-7).

45. *Zamolodchikov A. B.* Conformal symmetry in two-dimensional space: recursion representation of conformal block // *Theor.Math.Phys.* — 1987. — т. 73. — с. 1088. — DOI: [10.1007/BF01022967](https://doi.org/10.1007/BF01022967).
46. *Fateev V., Ribault S.* The Large central charge limit of conformal blocks // *JHEP.* — 2012. — т. 02. — с. 001. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2012\)001](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2012)001). — arXiv: [1109.6764](https://arxiv.org/abs/1109.6764) [[hep-th](#)].
47. *Perlmutter E.* Virasoro conformal blocks in closed form // *JHEP.* — 2015. — т. 08. — с. 088. — DOI: [10.1007/JHEP08\(2015\)088](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2015)088). — arXiv: [1502.07742](https://arxiv.org/abs/1502.07742) [[hep-th](#)].
48. Exact Virasoro Blocks from Wilson Lines and Background-Independent Operators / A. L. Fitzpatrick [и др.] // *JHEP.* — 2017. — т. 07. — с. 092. — DOI: [10.1007/JHEP07\(2017\)092](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2017)092). — arXiv: [1612.06385](https://arxiv.org/abs/1612.06385) [[hep-th](#)].
49. *Belavin A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A.* Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // *Nucl.Phys.* — 1984. — т. B241. — с. 333—380. — DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90052-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90052-X).
50. *Fitzpatrick A. L., Kaplan J., Walters M. T.* Universality of Long-Distance AdS Physics from the CFT Bootstrap // *JHEP.* — 2014. — т. 1408. — с. 145. — DOI: [10.1007/JHEP08\(2014\)145](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2014)145). — arXiv: [1403.6829](https://arxiv.org/abs/1403.6829) [[hep-th](#)].
51. *Fitzpatrick A. L., Kaplan J., Walters M. T.* Virasoro Conformal Blocks and Thermality from Classical Background Fields // *JHEP.* — 2015. — т. 11. — с. 200. — DOI: [10.1007/JHEP11\(2015\)200](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2015)200). — arXiv: [1501.05315](https://arxiv.org/abs/1501.05315) [[hep-th](#)].
52. *Alkalaev K. B., Belavin V. A.* From global to heavy-light: 5-point conformal blocks // *JHEP.* — 2016. — т. 03. — с. 184. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2016\)184](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2016)184). — arXiv: [1512.07627](https://arxiv.org/abs/1512.07627) [[hep-th](#)].
53. Hawking from Catalan / A. L. Fitzpatrick [и др.] // *JHEP.* — 2016. — т. 05. — с. 069. — DOI: [10.1007/JHEP05\(2016\)069](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2016)069). — arXiv: [1510.00014](https://arxiv.org/abs/1510.00014) [[hep-th](#)].
54. *Alkalaev K. B., Belavin V. A.* Monodromic vs geodesic computation of Virasoro classical conformal blocks // *Nucl. Phys.* — 2016. — т. B904. — с. 367—385. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2016.01.019](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2016.01.019). — arXiv: [1510.06685](https://arxiv.org/abs/1510.06685) [[hep-th](#)].

55. *Alkalaev K. B., Belavin V. A.* Classical conformal blocks via AdS/CFT correspondence // JHEP. — 2015. — т. 08. — с. 049. — DOI: [10.1007/JHEP08\(2015\)049](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2015)049). — arXiv: [1504.05943](https://arxiv.org/abs/1504.05943) [hep-th].
56. *Banerjee P., Datta S., Sinha R.* Higher-point conformal blocks and entanglement entropy in heavy states // JHEP. — 2016. — т. 05. — с. 127. — DOI: [10.1007/JHEP05\(2016\)127](https://doi.org/10.1007/JHEP05(2016)127). — arXiv: [1601.06794](https://arxiv.org/abs/1601.06794) [hep-th].
57. *Alkalaev K. B.* Many-point classical conformal blocks and geodesic networks on the hyperbolic plane // JHEP. — 2016. — т. 12. — с. 070. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2016\)070](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2016)070). — arXiv: [1610.06717](https://arxiv.org/abs/1610.06717) [hep-th].
58. *Banados M., Teitelboim C., Zanelli J.* The Black hole in three-dimensional space-time // Phys. Rev. Lett. — 1992. — т. 69. — с. 1849—1851. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.69.1849](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.69.1849). — arXiv: [hep-th/9204099](https://arxiv.org/abs/hep-th/9204099).
59. *Hulik O., Procházka T., Raeymaekers J.* Multi-centered AdS₃ solutions from Virasoro conformal blocks // JHEP. — 2017. — т. 03. — с. 129. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2017\)129](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2017)129). — arXiv: [1612.03879](https://arxiv.org/abs/1612.03879) [hep-th].
60. *Hulik O., Raeymaekers J., Vasilakis O.* Multi-centered higher spin solutions from \mathcal{W}_N conformal blocks // JHEP. — 2018. — т. 11. — с. 101. — DOI: [10.1007/JHEP11\(2018\)101](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2018)101). — arXiv: [1809.01387](https://arxiv.org/abs/1809.01387) [hep-th].
61. *Banados M.* Three-dimensional quantum geometry and black holes. — 1998. — DOI: [10.1063/1.596661](https://doi.org/10.1063/1.596661). — arXiv: [hep-th/9901148](https://arxiv.org/abs/hep-th/9901148) [hep-th]. — [AIP Conf. Proc.484,147(1999)].
62. *Shenker S. H., Stanford D.* Black holes and the butterfly effect // JHEP. — 2014. — т. 03. — с. 067. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2014\)067](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2014)067). — arXiv: [1306.0622](https://arxiv.org/abs/1306.0622) [hep-th].
63. *Roberts D. A., Stanford D., Susskind L.* Localized shocks // JHEP. — 2015. — т. 03. — с. 051. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2015\)051](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2015)051). — arXiv: [1409.8180](https://arxiv.org/abs/1409.8180) [hep-th].
64. Higher spin entanglement and \mathcal{W}_N conformal blocks / J. de Boer [и др.] // JHEP. — 2015. — т. 07. — с. 168. — DOI: [10.1007/JHEP07\(2015\)168](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2015)168). — arXiv: [1412.7520](https://arxiv.org/abs/1412.7520) [hep-th].

65. *Arcioni G., Dappiaggi C.* Exploring the holographic principle in asymptotically flat space-times via the BMS group // Nucl. Phys. B. — 2003. — т. 674. — с. 553—592. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2003.09.051](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2003.09.051). — arXiv: [hep-th/0306142](https://arxiv.org/abs/hep-th/0306142).
66. *Hijano E.* Flat space physics from AdS/CFT // JHEP. — 2019. — т. 07. — с. 132. — DOI: [10.1007/JHEP07\(2019\)132](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2019)132). — arXiv: [1905.02729](https://arxiv.org/abs/1905.02729) [[hep-th](#)].
67. *Alkalaev K., Pavlov M.* Perturbative classical conformal blocks as Steiner trees on the hyperbolic disk // JHEP. — 2019. — т. 02. — с. 023. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2019\)023](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2019)023). — arXiv: [1810.07741](https://arxiv.org/abs/1810.07741) [[hep-th](#)].
68. *Alkalaev K. B., Pavlov M.* Four-point conformal blocks with three heavy background operators // JHEP. — 2019. — т. 08. — с. 038. — DOI: [10.1007/JHEP08\(2019\)038](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2019)038). — arXiv: [1905.03195](https://arxiv.org/abs/1905.03195) [[hep-th](#)].
69. *Alkalaev K., Pavlov M.* Holographic variables for CFT₂ conformal blocks with heavy operators // Nucl. Phys. B. — 2020. — т. 956. — с. 115018. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2020.115018](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2020.115018). — arXiv: [2001.02604](https://arxiv.org/abs/2001.02604) [[hep-th](#)].
70. *Pavlov M.* Large- c conformal ($n \leq 6$)-point blocks with superlight weights and holographic Steiner trees // Phys. Lett. B. — 2021. — т. 816. — с. 136273. — DOI: [10.1016/j.physletb.2021.136273](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136273). — arXiv: [2101.04513](https://arxiv.org/abs/2101.04513) [[hep-th](#)].
71. *Di Francesco P., Mathieu P., Senechal D.* Conformal Field Theory. — New York : Springer-Verlag, 1997. — (Graduate Texts in Contemporary Physics). — ISBN 9780387947853, 9781461274759. — DOI: [10.1007/978-1-4612-2256-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2256-9). — URL: <http://www-spines.fnal.gov/spines/find/books/www?cl=QC174.52.C66D5::1997>.
72. *Hadasz L., Jaskolski Z., Piatek M.* Classical geometry from the quantum Liouville theory // Nucl. Phys. B. — 2005. — т. 724. — с. 529—554. — DOI: [10.1016/j.nuclphysb.2005.07.003](https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2005.07.003). — arXiv: [hep-th/0504204](https://arxiv.org/abs/hep-th/0504204).
73. *Beşken M., Datta S., Kraus P.* Semi-classical Virasoro blocks: proof of exponentiation // JHEP. — 2020. — т. 01. — с. 109. — DOI: [10.1007/JHEP01\(2020\)109](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2020)109). — arXiv: [1910.04169](https://arxiv.org/abs/1910.04169) [[hep-th](#)].

74. *Harlow D., Maltz J., Witten E.* Analytic Continuation of Liouville Theory // JHEP. — 2011. — т. 1112. — с. 071. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2011\)071](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2011)071). — arXiv: [1108.4417 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1108.4417).
75. Classical Conformal Blocks and Painleve VI / A. Litvinov [и др.] // JHEP. — 2014. — т. 07. — с. 144. — DOI: [10.1007/JHEP07\(2014\)144](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2014)144). — arXiv: [1309.4700 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1309.4700).
76. *Hijano E., Kraus P., Snively R.* Worldline approach to semi-classical conformal blocks // JHEP. — 2015. — т. 07. — с. 131. — DOI: [10.1007/JHEP07\(2015\)131](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2015)131). — arXiv: [1501.02260 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1501.02260).
77. Black Hole Collapse in the $1/c$ Expansion / T. Anous [и др.] // JHEP. — 2016. — т. 07. — с. 123. — DOI: [10.1007/JHEP07\(2016\)123](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2016)123). — arXiv: [1603.04856 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1603.04856).
78. From Conformal Blocks to Path Integrals in the Vaidya Geometry / T. Anous [и др.] // JHEP. — 2017. — т. 09. — с. 009. — DOI: [10.1007/JHEP09\(2017\)009](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2017)009). — arXiv: [1706.02668 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1706.02668).
79. *Kusuki Y.* Large c Virasoro Blocks from Monodromy Method beyond Known Limits // JHEP. — 2018. — т. 08. — с. 161. — DOI: [10.1007/JHEP08\(2018\)161](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2018)161). — arXiv: [1806.04352 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1806.04352).
80. *Nehari Z.* Conformal Mapping. — Dover Publications, 2012. — (Dover Books on Mathematics). — ISBN 9780486145037. — URL: <https://books.google.ru/books?id=ZEVosWb9CnAC>.
81. Holographic Entanglement Entropy from 2d CFT: Heavy States and Local Quenches / C. T. Asplund [и др.] // JHEP. — 2015. — т. 1502. — с. 171. — DOI: [10.1007/JHEP02\(2015\)171](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2015)171). — arXiv: [1410.1392 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1410.1392).
82. *Brill D. R.* Geometry of black holes and multi - black holes in (2+1)-dimensions // Gravitation and cosmology. Proceedings, Conference, ICGC'95, Pune, India, December 13-19, 1995. — 12.1995. — arXiv: [gr-qc/9607026](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9607026).
83. *Coussaert O., Henneaux M.* Nonexistence of static multi black hole solutions in (2+1)-dimensions // Geometry of constrained dynamical systems. Proceedings, Conference, Cambridge, UK, June 15-18, 1994. — 1994. — с. 150—157.

84. *Belavin V. A., Geiko R. V.* Geodesic description of Heavy-Light Virasoro blocks // JHEP. — 2017. — т. 08. — с. 125. — DOI: [10.1007/JHEP08\(2017\)125](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2017)125). — arXiv: [1705.10950](https://arxiv.org/abs/1705.10950) [[hep-th](#)].
85. *Hirai H., Tamaoka K., Yokoya T.* Towards Entanglement of Purification for Conformal Field Theories // PTEP. — 2018. — т. 2018, № 6. — 063B03. — DOI: [10.1093/ptep/pty063](https://doi.org/10.1093/ptep/pty063). — arXiv: [1803.10539](https://arxiv.org/abs/1803.10539) [[hep-th](#)].
86. *Welling M.* Explicit solutions for point particles and black holes in spaces of constant curvature in (2+1)-Dimensional gravity // Nucl.Phys. — 1998. — т. B515. — с. 436—452. — DOI: [10.1016/S0550-3213\(98\)00008-X](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(98)00008-X). — arXiv: [hep-th/9706021](https://arxiv.org/abs/hep-th/9706021) [[hep-th](#)].
87. *Welling M.* Two particle quantum mechanics in (2+1) gravity using noncommuting coordinates // Class. Quant. Grav. — 1997. — т. 14. — с. 3313—3326. — DOI: [10.1088/0264-9381/14/12/015](https://doi.org/10.1088/0264-9381/14/12/015). — arXiv: [gr-qc/9703058](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9703058).
88. *Balasubramanian V., Kraus P.* A Stress tensor for Anti-de Sitter gravity // Commun. Math. Phys. — 1999. — т. 208. — с. 413—428. — DOI: [10.1007/s002200050764](https://doi.org/10.1007/s002200050764). — arXiv: [hep-th/9902121](https://arxiv.org/abs/hep-th/9902121) [[hep-th](#)].
89. *Hille E.* Ordinary Differential Equations in the Complex Domain. — Dover Publications, 1997. — (Dover books on mathematics). — ISBN 9780486696201. — URL: <https://books.google.ru/books?id=I1OR4t8UZCgC>.
90. *Roberts M. M.* Time evolution of entanglement entropy from a pulse // JHEP. — 2012. — т. 1212. — с. 027. — DOI: [10.1007/JHEP12\(2012\)027](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2012)027). — arXiv: [1204.1982](https://arxiv.org/abs/1204.1982) [[hep-th](#)].
91. *Cresswell J. C., Jardine I. T., Peet A. W.* Holographic relations for OPE blocks in excited states // JHEP. — 2019. — т. 03. — с. 058. — DOI: [10.1007/JHEP03\(2019\)058](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2019)058). — arXiv: [1809.09107](https://arxiv.org/abs/1809.09107) [[hep-th](#)].
92. *Фукс Б. А.* Неевклидова геометрия в теории конформных и псевдоконформных отображений. — Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. — 148 с.
93. *Krasnov K.* Holography and Riemann surfaces // Adv. Theor. Math. Phys. — 2000. — т. 4. — с. 929—979. — arXiv: [hep-th/0005106](https://arxiv.org/abs/hep-th/0005106) [[hep-th](#)].

94. *Krasnov K.* 3-D gravity, point particles and Liouville theory // *Class. Quant. Grav.* — 2001. — т. 18. — с. 1291—1304. — DOI: [10.1088/0264-9381/18/7/311](https://doi.org/10.1088/0264-9381/18/7/311). — arXiv: [hep-th/0008253](https://arxiv.org/abs/hep-th/0008253) [[hep-th](#)].
95. *Chang C.-M., Lin Y.-H.* Bootstrap, universality and horizons // *JHEP*. — 2016. — т. 10. — с. 068. — DOI: [10.1007/JHEP10\(2016\)068](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2016)068). — arXiv: [1604.01774](https://arxiv.org/abs/1604.01774) [[hep-th](#)].
96. *Jarník V., Kössler M.* O minimálních grafech, obsahujících n daných bodů // *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*. — 1934. — т. 063, № 8. — с. 223—235. — URL: <http://eudml.org/doc/25703>.
97. *Протасов В. Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии. — Москва : МЦ-НМО, 2012. — 56 с.
98. *Ivanov A., Tuzhilin A.* Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations. — CRC Press, 1994.
99. *Courant R., Robbins H.* What is mathematics? An elementary introduction to ideas and methods. — Oxford University Press, 1941.
100. *Gueron S., Tessler R.* The Fermat-Steiner Problem // *The American Mathematical Monthly*. — 2002. — т. 109, № 5. — с. 443—451. — URL: <http://www.jstor.org/stable/2695644>.
101. *Link M.* The Fermat problem of a hyperbolic triangle // *B.A., Bellarmine University*. — 2006.
102. *Zachos A. N.* Location of the weighted Fermat-Torricelli point on the K-plane (Part II) // *Analysis*. — 2014. — т. 34. — с. 111—120. — URL: <https://doi.org/10.1515/anly-2013-1231>.
103. Rate of cluster decomposition via Fermat-Steiner point / A. Avdoshkin [и др.] // *JHEP*. — 2019. — т. 04. — с. 128. — DOI: [10.1007/JHEP04\(2019\)128](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2019)128). — arXiv: [1811.03633](https://arxiv.org/abs/1811.03633) [[hep-th](#)].
104. *Anderson J. A.* Hyperbolic Geometry. — Springer, 1999. — ISBN 978-1-84628-220-1.
105. *Alkalaev K. B., Belavin V. A.* Holographic interpretation of 1-point toroidal block in the semiclassical limit // *JHEP*. — 2016. — т. 06. — с. 183. — DOI: [10.1007/JHEP06\(2016\)183](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2016)183). — arXiv: [1603.08440](https://arxiv.org/abs/1603.08440) [[hep-th](#)].

106. *Alkalaev K. B., Geiko R. V., Rappoport V. A.* Various semiclassical limits of torus conformal blocks // JHEP. — 2017. — т. 04. — с. 070. — DOI: [10.1007/JHEP04\(2017\)070](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2017)070). — arXiv: [1612.05891](https://arxiv.org/abs/1612.05891) [[hep-th](#)].
107. *Alkalaev K. B., Belavin V. A.* Holographic duals of large- c torus conformal blocks // JHEP. — 2017. — т. 10. — с. 140. — DOI: [10.1007/JHEP10\(2017\)140](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2017)140). — arXiv: [1707.09311](https://arxiv.org/abs/1707.09311) [[hep-th](#)].
108. *Alkalaev K., Belavin V.* Large- c superconformal torus blocks // JHEP. — 2018. — т. 08. — с. 042. — DOI: [10.1007/JHEP08\(2018\)042](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2018)042). — arXiv: [1805.12585](https://arxiv.org/abs/1805.12585) [[hep-th](#)].
109. *Ramos Cabezas J.* Semiclassical torus blocks in the t-channel // JHEP. — 2020. — т. 08. — с. 151. — DOI: [10.1007/JHEP08\(2020\)151](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2020)151). — arXiv: [2005.04128](https://arxiv.org/abs/2005.04128) [[hep-th](#)].
110. *Gerbershagen M.* Monodromy methods for torus conformal blocks and entanglement entropy at large central charge // JHEP. — 2021. — т. 08. — с. 143. — DOI: [10.1007/JHEP08\(2021\)143](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2021)143). — arXiv: [2101.11642](https://arxiv.org/abs/2101.11642) [[hep-th](#)].

Список рисунков

- 1.1 n -точечный классический блок с двумя тяжелыми операторами. Координаты тяжелых операторов фиксированы соотношениями $\mathbf{z}_{n-1} = \mathbf{1}$ и $\mathbf{z}_n = \infty$ 27
- 1.2 i -й единичный классический блок: $\tilde{\epsilon}_i = 0$, промежуточный канал, соответствующий единичному оператору, показан красным. 37
- 1.3 Графическая иллюстрация факторизационного соотношения. 38
- 1.4 Факторизованные блоки с четным n 43
- 1.5 Факторизованные блоки с нечетным n 43
- 1.6 $(2M + 2)$ -точечный блок с M сверхлегкими операторами, показанными зелеными линиями. 46
- 2.1 Реализация дуального пространства $\text{AdS}_3^{(\alpha)}$ (в глобальных координатах). Красная линия отвечает двум тяжелым операторам, которые продуцируют конический дефект. 54
- 2.2 Реализация дуального пространства $\text{AdS}_3[3]$. Три тяжелых оператора, продуцирующие метрику, показаны красным. 58
- 2.3 Иллюстрация $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$ соответствия на примере длины в пространстве $\text{AdS}_3[3]$ (а) и 4-точечного классического блока с одним легким (показан волнистой линией) и тремя тяжелыми (выделены черным) операторами (б). Волнистая линия на рисунке (а) отвечает геодезической, соединяющей граничную точку с координатой θ и ось цилиндра. 60
- 3.1 Примеры простейших деревьев Штейнера на евклидовой плоскости и $\epsilon_a = 1$: (а) $N = 3$ с одной внутренней вершиной, (б) $N = 4$ с двумя внутренними вершинами [99]. 64
- 3.2 Примеры голографических деревьев Штейнера: (а) неидеальное $N = 7$ дерево, (б) идеальное $N = 6$ дерево. Внешний многоугольник показан пунктирными линиями. 66

- 3.3 Дерево Штейнера на неевклидовой плоскости. Три ребра, сходящиеся в точке Ферма-Торричелли, выделены разными цветами, соответствующим разным весам. Углы в вершине определяются формулой (3.1.2). 66
- 3.4 Примеры несвязных деревьев Штейнера, полученных разрезами (3.1.6) из дерева G_N 68
- 3.5 (а) Два типа $N = 2$ голографических деревьев Штейнера, выделенные разными цветами. (б) Гиперболический треугольник, показанный пунктирными линиями и вписанное в него $N = 3$ дерево Штейнера, где различные цвета отвечают разным весам. 69
- 3.6 (а) $N = 3$ идеальное дерево, (б) $N = 3$ неидеальное дерево. Внешние треугольники показаны пунктирными линиями, разные цвета соответствуют разным весам ребер. 71
- 3.7 (а) $N = 4$ идеальное дерево с пятью разными весами, выделенными разными цветами. Внешний четырехугольник показан пунктирными линиями. (б) Вспомогательный треугольник, выделенный черным линиями, пересекающий внешний четырехугольник на три треугольника. 73
- 3.8 Несвязное $N = 4$ дерево (а) и $N = 4$ неидеальное дерево (б). Зеленая линия на рисунке (б) соответствует сверхлегкому весу $\tilde{\epsilon}_1$, недеформированное дерево показано красным. (с) Вспомогательное дерево Штейнера для $N = 4$ неидеального дерева. 76
- 3.9 (а) $N = 3$ идеальное дерево, (б) $N = 4$ неидеальное дерево со сверхлегким весом $\tilde{\epsilon}_2$. Внешнее ребро с этим весом, связанное с центром, выделено зеленым. (с) Вспомогательный треугольник, показанный пунктирными линиями. 77
- 3.10 $N = 5$ неидеальное дерево. Несвязное $N = 4$ дерево показано красным; ребра, соответствующие сверхлегким весам $\tilde{\epsilon}_1$ и $\tilde{\epsilon}_3$, показаны зеленым. 78
- 3.11 $N = 2M + 1$ неидеальное дерево, построенное из несвязного дерева с $2M$ вершинами, показанного красным. Ребра со сверхлегкими весами, показанными зеленым. 80

- Г.1 Идеальное $N = 3$ дерево (справа), полученное из простейшего дерева с точкой Ферма-Торричелли в центре диска (слева) путем преобразования Мёбиуса. 105

Приложение А

Пертурбативное разложение 4-точечного блока в z -параметризации

Рассмотрим 4-точечный классический конформный блок (1.5.4), вычисленный монодромным методом. Голографическая переменная $w_1 = w(z_1)$ определяется (1.5.2), таким образом, в z -параметризации блок задается

$$f_4(z|\epsilon, \tilde{\epsilon}) = -\epsilon_1 \log \left[z^\beta \frac{{}_2F_1\left(\frac{1+\beta}{2}, \frac{1+\beta}{2} + \alpha, 1 + \beta, z\right)}{{}_2F_1\left(\frac{1-\beta}{2}, \frac{1-\beta}{2} + \alpha, 1 - \beta, z\right)} \right], \quad (\text{A.0.1})$$

где введено обозначение $z_1 = z$.

С другой стороны, рассмотрим s -канальный 4-точечный блок, ассоциированный с алгеброй Вирасоро. Можно воспроизвести вклад легких операторов (A.0.1) в первых порядках по z , применяя последовательно классическое и НЛ приближения. Разложение вблизи $z = 0$ для s -канального блока имеет вид [49]

$$\mathcal{F}(z|\Delta_i, \Delta_p, c) = z^{\Delta_p - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_{N=0}^{\infty} F_N z^N, \quad (\text{A.0.2})$$

где первые три коэффициента $F_N = F_N(\Delta_i, \Delta_p, c)$ даются

$$F_0 = 1, \quad F_1 = \frac{(\Delta_p - \Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_p - \Delta_4 + \Delta_3)}{2\Delta_p}, \quad (\text{A.0.3})$$

$$\begin{aligned} F_2 = & \frac{(\Delta_p + \Delta_2 - \Delta_1)(\Delta_p + \Delta_2 - \Delta_1 + 1)(\Delta_p + \Delta_3 - \Delta_4)(\Delta_p + \Delta_3 - \Delta_4 + 1)}{4\Delta_p(2\Delta_p + 1)} + \\ & + 2 \left(\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{3(\Delta_1 - \Delta_2)^2}{2(1 + 2\Delta_p)} + \frac{(\Delta_p - 1)\Delta_p}{2(1 + 2\Delta_p)} \right) \left(c + \frac{2\Delta_p(8\Delta_p - 5)}{(1 + 2\Delta_p)} \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\frac{\Delta_3 + \Delta_4}{2} + \frac{3(\Delta_4 - \Delta_3)^2}{2(1 + 2\Delta_p)} + \frac{(\Delta_p - 1)\Delta_p}{2(1 + 2\Delta_p)} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.0.4})$$

Одновременное применение классического и НЛ приближений реализуется следующим образом:¹

¹Данный метод использовался для анализа классических блоков на сфере в работах [52; 54; 55; 76; 84], а также на торе в статьях [105–110].

– Вычислим классический конформный блок

$$f_4(z|\epsilon_i, \epsilon_p) \approx \frac{6}{c} \log \mathcal{F}_4(z|\Delta_i, \Delta_p, c) + \mathcal{O}(1/c), \quad (\text{A.0.5})$$

определяя классические размерности

$$\epsilon_{i,p} = 6\Delta_{i,p}/c, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (\text{A.0.6})$$

– Введем параметр $\delta \ll 1$, масштабирующий размерность $\epsilon_1 \rightarrow \delta\epsilon_1$ и разложим $f = f_n(z|\epsilon_i, \epsilon_p)$ по степеням δ :

$$f = \frac{1}{\delta^s} f_{-s} + \frac{1}{\delta^{s-1}} f_{-s+1} + \dots + \delta^0 f_0 + \delta f_1 + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (\text{A.0.7})$$

для некого $s \in \mathbb{N}$. Так как рассматривается предел $\delta \rightarrow 0$, соответствующий НЛ приближению, необходимо наложить условие равенства 0 для всех f_{-s} . Для данного блока этого можно добиться, полагая $\epsilon_2 = \epsilon_p$ (для блока с двумя тяжелыми операторами возникло бы условие $\epsilon_3 = \epsilon_4$). Здесь f_0 обозначает тяжелый сектор классического конформного блока, а легкий сектор дается f_1 .

Используя алгоритм, описанный выше и (A.0.3), (A.0.4), можно вычислить первые два коэффициента легкого сектора 4-точечного блока f_1

$$f_1 = -\epsilon_1 \log z + \epsilon_1 \sum_{N=1}^{\infty} \tilde{f}_N z^N, \quad (\text{A.0.8})$$

где

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{f}_2 = \frac{3 + 8\epsilon_2 + 16\epsilon_4}{8(3 + 4\epsilon_2)}. \quad (\text{A.0.9})$$

В свою очередь, разлагая выражение (A.0.1) по z , получаем

$$\tilde{f}_1 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{f}_2 = \frac{2\beta^2 + 4\alpha^2 - 9}{8(\beta^2 - 4)}. \quad (\text{A.0.10})$$

Используя определения $\alpha = \sqrt{1 - 4\epsilon_3}$, $\beta = \sqrt{1 - 4\epsilon_2}$, легко продемонстрировать, что эти коэффициенты совпадают с (A.0.9).

Приложение Б

Доказательство соотношения (1.6.2) для произвольного s

В этом приложении доказательство факторизационного соотношения (1.6.2), представленное в Главе 1.6 для случая $s = 1$, обобщается на случай произвольного s . Данный случай необходим для рассмотрения факторизованных блоков более общего вида, чем анализировавшиеся в Разделе 1.6.2.

Для простоты введем обозначение $x_i = c_i(1 - z_i) - \epsilon_i$. Тогда тождества (1.4.1) могут быть переписаны в следующем виде

$$\sum_{i=1}^{n-2} x_i = 0. \quad (\text{Б.0.1})$$

Правила слияния даются выражениями (1.6.3). Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что исходная система монодромных уравнений для n -точечного единичного блока разбивается на две подсистемы: монодромную систему для максимального $(s+3)$ -точечного блока и единичного блока $f_{n-s-1}^{[0]}$.

Максимальный блок. Рассмотрим максимальный блок $f_{s+3}^{[s]}(z'|\epsilon', \tilde{\epsilon}')$, где $z' = \{0, z_2, \dots, z_{s+1}\}$. Первые s монодромных уравнений для данного блока (при учете условий (1.6.3)) имеют вид

$$I_{+-}^{(s+3|k)} I_{-+}^{(s+3|k)} + \left(I_{++}^{(s+3|k)} \right)^2 + 4\pi^2 \tilde{\epsilon}_k^2 = 0, \quad k = 1, \dots, s, \quad (\text{Б.0.2})$$

где

$$I_{+-}^{(s+3|k)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \left[\alpha \epsilon_1 + \sum_{i=2}^{s+1} x_i - \sum_{i=2}^{k+1} (1 - z_i)^\alpha (x_i - \alpha \epsilon_i) \right], \quad (\text{Б.0.3})$$

$$I_{-+}^{(s+3|k)} = I_{+-}^{(s+3|k)} \Big|_{\alpha \rightarrow -\alpha}, \quad I_{++}^{(s+3|k)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \sum_{i=k+2}^{s+1} x_i.$$

Аксессуарные параметры c_i n -точечного единичного блока удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{s+1} x_i = 0. \quad (\text{Б.0.4})$$

Как и ранее, в силу $\tilde{\epsilon}_s = 0$ и $I_{++}^{(s+3|s)} = 0$, последнее уравнение ($k = s$) системы (Б.0.2) представляет собой произведение $I_{+-}^{(s+3|s)} I_{-+}^{(s+3|s)} = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha\epsilon_1 + \sum_{i=2}^{s+1} x_i - \sum_{i=2}^{s+1} (1 - z_i)^\alpha (x_i - \alpha\epsilon_i) &= 0, \\ -\alpha\epsilon_1 + \sum_{i=2}^{s+1} x_i - \sum_{i=2}^{s+1} (1 - z_i)^{-\alpha} (x_i + \alpha\epsilon_i) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.0.5})$$

Прямой подстановкой показывается, что полученные соотношения (Б.0.5) обращают $(s - 1)$ -е уравнение системы в тождество.

$(n - s - 1)$ -точечный блок. Рассмотрим второе слагаемое в (1.6.2), которое представляет собой $(n - s - 1)$ -точечный блок $f_{n-s-1}^{[0]}(z''|\epsilon'', \tilde{\epsilon}'')$, где $z'' = \{z_{s+2}, \dots, z_{n-2}\}$. В силу $z_{s+2} \neq 0$, монодромная система имеет вид

$$I_{+-}^{(n-s-1|k)} I_{-+}^{(n-s-1|k)} + \left(I_{++}^{(n-s-1|k)} \right)^2 + 4\pi^2 \tilde{\epsilon}_k^2 = 0, \quad k = s + 2, \dots, n - 3, \quad (\text{Б.0.6})$$

где

$$\begin{aligned} I_{+-}^{(n-s-1|k)} &= \frac{2\pi i}{\alpha} \left[(1 - z_{s+2})^\alpha \left(\alpha\epsilon_{s+2} + \sum_{i=s+3}^{n-s-3} x_i \right) - \sum_{i=s+3}^{k+1} (1 - z_i)^\alpha (x_i - \alpha\epsilon_i) \right], \\ I_{-+}^{(n-s-1|k)} &= I_{+-}^{(n-s-1|k)} \Big|_{\alpha \rightarrow -\alpha}, \quad I_{++}^{(n-s-1|k)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \sum_{i=k+2}^{n-2} x_i. \end{aligned} \quad (\text{Б.0.7})$$

s -й единичный блок. Рассмотрим теперь левую сторону соотношения (1.6.2). Единичный блок $f_n^{[s]}(z|\epsilon, \tilde{\epsilon})$ описывается уравнениями (1.4.5), (1.4.6) с $z_1 = 0$, где также наложены правила слияния (1.6.3).

Очевидно, что первые s уравнений этой системы совпадают с уравнениями (Б.0.2) для максимального блока. Эти уравнения определяют аксессуарные параметры c_2, \dots, c_{s+1} . Оставшиеся аксессуарные параметры c_{s+2}, \dots, c_{n-2} s -го еди-

ничного блока удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=s+2}^{n-2} x_i = 0, \quad (\text{Б.0.8})$$

следующему из (Б.0.1) и (Б.0.4). Рассматривая $(k = s + 1)$ -е уравнение системы (1.4.5) и учитывая (1.6.3) получаем

$$I_{+-}^{(n|s+1)} I_{-+}^{(n|s+1)} + \left(I_{++}^{(n|s+1)} \right)^2 + 4\pi^2 \epsilon_{s+2}^2 = 0. \quad (\text{Б.0.9})$$

Подставляя (Б.0.5) в $I_{\pm\mp}^{(n|s+1)}$, можно показать, что уравнение (Б.0.9) тождественно выполняется.

Оставшиеся уравнения системы (1.4.5) с $k = s + 2, \dots$ имеют вид

$$I_{+-}^{(n|k)} I_{-+}^{(n|k)} + \left(I_{++}^{(n|k)} \right)^2 + 4\pi^2 \tilde{\epsilon}_k^2 = 0, \quad k = s + 2, \dots, n - 3. \quad (\text{Б.0.10})$$

Докажем, что эти уравнения эквивалентны (Б.0.6), (Б.0.7). Для этого рассмотрим (Б.0.8) вместе с (Б.0.5) и тогда

$$\begin{aligned} I_{+-}^{(n|k)} &= \frac{2\pi i}{\alpha} \left[\alpha \epsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-2} x_i - \sum_{i=2}^{k+1} (1 - z_i)^\alpha (x_i - \alpha \epsilon_i) \right] \\ &\approx \frac{2\pi i}{\alpha} \left[\alpha \epsilon_1 + \sum_{i=2}^{s+1} x_i - \sum_{i=2}^{k+1} (1 - z_i)^\alpha (x_i - \alpha \epsilon_i) \right] \\ &\approx \frac{2\pi i}{\alpha} \left[-(1 - z_{s+2})^\alpha (x_{s+2} - \alpha \epsilon_{s+2}) - \sum_{i=s+3}^{k+1} (1 - z_i)^\alpha (x_i - \alpha \epsilon_i) \right] \\ &\approx \frac{2\pi i}{\alpha} \left[(1 - z_{s+2})^\alpha (\alpha \epsilon_{s+2} + \sum_{i=s+2}^{n-2} x_i) - \sum_{i=s+3}^{k+1} (1 - z_i)^\alpha (x_i - \alpha \epsilon_i) \right]. \end{aligned} \quad (\text{Б.0.11})$$

Последнее выражение представляет собой $I_{+-}^{(n-s-1|k)}$ из (Б.0.7). $I_{++}^{(n|k)}$, в свою очередь, уже представлены в правильном виде. Таким образом, доказано, что уравнения (Б.0.10) определяют $(n - s - 1)$ -точечный блок, откуда следует, что факторизационное соотношение (1.6.2) выполнено.

Приложение В

Регуляризация длин голографических деревьев Штейнера

Голографические деревья Штейнера, описанные в Главе **3.1**, содержат ребра, соединенные с границей. Длины данных ребер являются бесконечными в смысле формулы (2.1.25), т.к. если хотя бы одна точка принадлежит границе, то $u = 1$. Рассмотрим следующий метод регуляризации: сдвинем вершины с границы внутрь диска \mathbb{D} , полагая, что их радиальная координата равна $e^{-\varepsilon}$, где введен регулятор $\varepsilon \rightarrow 0+$. Важно упомянуть, что угловая координата вершины при этом остается неизменной. Далее будет показано, что такая регуляризация позволяет выделить расходимости из длин голографических деревьев Штейнера.

Рассмотрим сегмент геодезической, соединяющий две точки на границе \mathbb{D} с координатами $z_1 = \exp[iw_1]$ и $z_2 = \exp[iw_2]$. В соответствии с описанной выше процедурой, координаты этих точек должны быть заменены на $z_1 = \exp[-\varepsilon + iw_1]$ и $z_2 = \exp[-\varepsilon + iw_2]$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Предполагая $w_2 - w_1 \geq 0$ и определяя $u = A/B$, где

$$A = 2 \exp[-\varepsilon] \sin \frac{w_2 - w_1}{2}, \quad (\text{B.0.1})$$

$$B = \sqrt{(1 - \exp[-2\varepsilon] \cos(w_2 - w_1))^2 + \exp[-4\varepsilon] \sin^2(w_2 - w_1)},$$

легко видеть, что регуляризованная длина (2.1.25) имеет вид

$$L_{\mathbb{D}}(w_1, w_2) = \log \frac{B + A}{B - A}. \quad (\text{B.0.2})$$

Удерживая самые сингулярные члены по ε , из (B.0.2) при учете (B.0.1) получаем, что

$$L_{\mathbb{D}}(w_1, w_2) = \log \left[4 \sin^2 \frac{w_2 - w_1}{2} \right] - 2 \log \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (\text{B.0.3})$$

Регуляризованная длина определяется как первый член в разложении (B.0.3), что эквивалентно отбрасыванию логарифмической расходимости.

Аналогичное рассуждение применимо к ребру с одной граничной вершиной. Рассмотрим длину геодезического сегмента между точками $z_1 = \exp[-\varepsilon +$

$iw]$ и $z_2 = r \exp[i\varphi]$. Аналогично предыдущему случаю введем A и B , такие что $u = A/B$ и

$$A = \sqrt{r^2 + \exp[-2\varepsilon] - 2r \exp[-\varepsilon] \cos(w - \varphi)}, \quad (\text{B.0.4})$$

$$B = \sqrt{1 + r^2 \exp[-2\varepsilon] - 2r \exp[-\varepsilon] \cos(w - \varphi)}.$$

Представляя длину как в (B.0.2) можно получить, что длина имеет вид

$$L_{\mathbb{D}}(w, r, \varphi) = \log \frac{(r^2 - 2r \cos(\varphi - w) + 1)}{1 - r^2} + \log 2 - \log \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (\text{B.0.5})$$

Регуляризованная длина дается первыми двумя членами в данном соотношении. Так как голографические деревья Штейнера содержат внешние ребра одного из этих двух типов, длины всех ребер, соединенных с границей, могут быть регуляризованы данным образом.

Приложение Г

Точка Ферма-Торричелли и конформные преобразования

В Главе 3.1 длины графов Штейнера вычислялись без явных выражений для координат точек Ферма-Торричелли, которые определяются полиномиальными уравнениями. Здесь рассматривается пример вычисления координат точки Ферма-Торричелли с использованием преобразования Мёбиуса $\text{Möb}(\mathbb{D})$, которое характеризуется двумя свойствами: оно сохраняет углы и оставляет инвариантной границу $\partial\mathbb{D}$.

Рассмотрим $N = 3$ идеальное дерево Штейнера, показанное на рисунке Г.1 слева. У такого дерева одна точка Ферма-Торричелли, координата которой зависит от координат внешних вершин w_i и весов, которые для простоты вычислений положены равными друг другу.

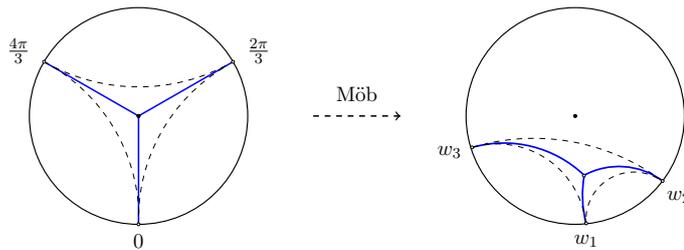


Рисунок Г.1 — Идеальное $N = 3$ дерево (справа), полученное из простейшего дерева с точкой Ферма-Торричелли в центре диска (слева) путем преобразования Мёбиуса.

Рассмотрим простейшее дерево такого типа, точка Ферма-Торричелли которого принадлежит центру диска. Если положить $w_1 = 0$, то координаты двух оставшихся внешних вершин фиксируются формулами (3.1.2). Для рассматриваемого нами случая равных весов это соответствует $w'_1 = 0$, $w'_2 = 2\pi/3$, $w'_3 = 4\pi/3$. С другой стороны, трехпараметрическим преобразованием (2.1.23) можно перевести точки $(0, 2\pi/3, 4\pi/3)$ в три произвольные точки на границе, например, $(0, w_2, w_3)$. Таким образом, общее $N = 3$ идеальное дерево получается из простейшего посредством такого преобразования и обратно, см. рисунок

Г.1. Обсуждаемое конформное преобразование имеет вид

$$z \rightarrow z' = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}},$$

$$a = \frac{\exp\left[\frac{iw_2 - iw_0 + iw_3}{2}\right] - \exp\left[\frac{iw_2 + iw_0 - iw_3}{2}\right] + \exp\left[\frac{iw_2 + iw_0 + iw_3}{2}\right] - \exp\left[\frac{iw_3 - iw_0 - iw_2}{2}\right]}{2\sqrt{(\sin w_2 + \sin(w_3 - w_2) - \sin w_3) \sin w_0}},$$

$$b = \frac{\exp\left[\frac{iw_2 - iw_3 - iw_0}{2}\right] + \exp\left[\frac{iw_0 + iw_3 - iw_2}{2}\right] - \exp\left[\frac{iw_2 + iw_3 + iw_0}{2}\right] - \exp\left[\frac{iw_2 + iw_3 - iw_0}{2}\right]}{2\sqrt{(\sin w_2 + \sin(w_3 - w_2) - \sin w_3) \sin w_0}},$$
(Г.0.1)

где введено обозначение $w_0 = 2\pi/3$. При таком преобразовании точка Ферма-Торричелли переходит в точку с координатами

$$z_{FT} = \frac{\exp[iw_2 + iw_3] - \exp[iw_2] + \exp[iw_2 + iw_3 + iw_0] - \exp[iw_3 + iw_0]}{\exp[iw_2 + iw_0] + \exp[iw_3] - \exp[iw_0] - 1}.$$
(Г.0.2)

Знание координат точки Ферма-Торричелли общего $N = 3$ идеального дерева (Г.0.2) позволяет легко вычислить взвешенную длину дерева (3.1.4). Полученный таким образом ответ совпадает с (3.2.8) при равных весах ϵ . Заметим также, что данное рассмотрение может быть обобщено на случай идеального дерева с произвольными весами $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$.