

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт им.П.Н. Лебедева Российской академии наук

На правах рукописи

Кесаев Владимир Валерьевич

**Фазовая модуляция частично поляризованного света в
средах с индуцируемым двулучепреломлением**

Специальность 1.3.6 — Оптика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физического институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Научный руководитель: **Киселев Алексей Дониславович**,
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Пасечник Сергей Вениаминович**,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий Проблемной лабораторией молекулярной акустики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «МИРЭА - Российский технологический университет» (РТУ МИРЭА),

Ульянов Сергей Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник кафедры статистической физики Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ)

Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение «Федеральный научно-исследовательский центр «Кристаллография и фотоника» РАН

Защита состоится 20 июня 2022 года в 10 часов на заседании диссертационного совета 24.1.262.01 на базе Физического института им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский пр-т, 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте института www.lebedev.ru.

Автореферат разослан «___» _____ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.262.01,
доктор физико-математических наук

А. С. Золотько

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Управление пространственно-временными характеристиками световых полей является одной из важных задач современной оптики, которая актуальна как для традиционных направлений, таких как оптические дефлекторы, системы адаптивной оптики, оптической связи и отображения информации, так и для современных интенсивно развивающихся технологий, к которым относятся голографические 3D дисплеи, квантовая криптография, квантовые вычисления и др. В рамках этой задачи требуются устройства, способные осуществлять модуляцию света — пространственно временные фазовые модуляторы света (ПВФМС). Такие устройства используются для формирования как изображений, так и пространственных волновых фронтов в виде двумерного распределения фазовой задержки.

Область применения и круг решаемых задач зависит от таких характеристик ПВФМС, как глубина фазовой модуляции, плотность пикселей и скорость перестройки фазовой задержки. Например, для создания очков дополненной реальности требуется активная перестраиваемая линза с апертурой не менее 20 мм. Ее оптическая сила D должна варьироваться в пределах ± 3 диоптрий с миллисекундными временем перестройки! Если учесть естественные ограничения, накладываемые на массу и габариты очков, такие требования являются очень жесткими. На момент написания диссертации автору не известен ПВФМС, способный решить эту задачу. Более того, физические принципы, используемые в настоящее время для создания фазовой задержки, накладывают серьезные ограничения на все три указанные характеристики и, в особенности, на их сочетание. Этот небольшой пример иллюстрирует, как важная прикладная задача стимулирует поиск новых эффектов и подходов к фазовой модуляции света.

Одним из традиционных способов осуществления фазовой модуляции является использование прозрачных сред с изменяемой оптической анизотропией. Среди таких сред наибольшее распространение получили нематические жидкие кристаллы (НЖК). Электрооптические ориентационные эффекты в НЖК позволяют изготавливать ПВФМС, которые характеризуются достаточно большой глубиной фазовой задержки, достигающей нескольких π , и малым размером (порядка нескольких микрометров) пикселя. Вместе с тем характерные частоты модуляции для ПВФМС на основе НЖК составляют всего несколько десятков герц. Данные модуляторы позволяют формировать низкочастотные динамические голограммы с ограниченной областью применения, например, для проекции 3D изображений в очках дополненной или виртуальной реальности. Заметим, что ни плотность пикселей, ни глубина фазовой задержки не позволяют реализовать вышеупомянутую активную линзу.

Другая известная среда с изменяемой рефракцией — планарно ориентированные сегнетоэлектрические жидкие кристаллы (СЖК), геликоидальная (спиральная) наноструктура которых характеризуется субволновым (меньше длины волны) шагом спирали. Именно эта среда используется в данной диссертации в качестве модельной среды с индуцируемым двулучепреломлением.

В таких материалах деформации спиральной наноструктуры во внешнем электрическом поле изменяют оптические характеристики СЖК ячейки и, как следствие, свойства проходящей через нее световой волны. С симметричной точки зрения, индуцированное полем искажение спиральной структуры приводит к понижению симметрии от центрального класса предельной группы Кюри до аксиального класса моноклинной системы низшей категории. При таком понижении симметрии одноосный кристалл с осью, параллельной оси бесконечного порядка (оси геликоида), становится оптически двусосным.

Описываемый эффект был обнаружен в 1989 году [1] и получил название эффекта деформированной электрическим полем спирали в жидкокристаллических сегнетоэлектриках (*анг. deformed helix ferroelectric (DHF-effect)*). С макроскопической точки зрения, этот эффект можно интерпретировать как *ориентационный эффект Керра*. Последовательная теория этого эффекта, развитая в работах [2; 3], демонстрирует хорошее согласие с экспериментальными данными. Согласно теории, рассматриваемый эффект характеризуется изменением показателей преломления с одновременным поворотом оптической оси в плоскости волнового фронта. Последнее обстоятельство является причиной модуляции состояния поляризации света и препятствует практической реализации чисто фазового модулятора.

Действительно, чисто фазовая модуляция подразумевает отсутствие каких-либо изменений амплитуды и состояния поляризации модулируемой волны. Такое требование является ключевым для большого количества оптических приложений и устройств. С этой точки зрения, использование планарно ориентированных СЖК считается малоперспективным для чисто фазовой модуляции света.

С другой стороны, как отмечалось выше, эффект деформированной субволновой спирали в СЖК можно охарактеризовать как наиболее общее поведение негиротропных и прозрачных сред в электрическом поле, при котором, помимо изменения полуосей оптической индикатрисы, происходит ее пространственный поворот. С этой точки зрения, решение проблемы нежелательной модуляции состояния поляризации света для случая СЖК автоматически распространяется на все оптические среды.

Проблема поляризационной чувствительности сред с изменяемой рефракцией, или, другими словами, проблема получения поляризационно нечувствительной фазовой модуляции света имеет долгую историю. Так, в

1993 году был предложен оригинальный фазовый модулятор для неполяризованного света [4], основанный на так называемом S-эффекте в НЖК, но используемый в нем принцип получения фазовой задержки не подходит для сред с поворотом оптической оси. Попытка решить проблему поворота была предпринята в работе [5], где предложена так называемая "QHQ-схема", в которой СЖК ячейка с полуволновой разностью фаз помещается между двумя четвертьволновыми пластинами. Однако для реализации метода требуются СЖК материалы с субволновым шагом спирали и со смектическим углом наклона 45° , получение которых является технологически сложной и не до конца решенной задачей. Метод фазовой модуляции [6] развивает идею обмена оптических путей ортогональных состояний поляризации, но также оказывается непригодным для сред с поворотом оптической оси.

На момент написания диссертации традиционным для достижения чисто фазовой модуляции способом является использование 100% линейно поляризованного света и S-эффекта, при котором происходит поворот оптической индикатрисы в плоскости, совпадающей с плоскостью линейной поляризации. Этот способ был распространен с нематических жидких кристаллов на сегнетоэлектрические и назван *"эффектом деформированной вертикально-ориентированной спирали в СЖК"* (англ. VADHFLC). Отметим, что для него, помимо строгого требования использовать поляризованный свет, необходимо планарное управляющее (возбуждающее) электрическое поле. Как следствие, в таком случае возникает проблема дифракции на штыревой структуре электродов. Кроме того, к недостаткам вертикальной ориентации следует отнести меньшую, по сравнению с планарной ориентацией, глубину фазовой модуляции. Увеличение глубины сопряжено с увеличением толщины СЖК слоя, что находится в явном противоречии с пространственным разрешением (увеличивается размер пикселя). Другой способ, где используется 100% линейно поляризованный свет и планарно ориентированный СЖК, предложен в работах [7] и [А.1.]. Этот способ является компромиссом между глубиной фазовой модуляции и допустимым уровнем искажений состояния поляризации волны.

Отметим, что метод получения поляризационно нечувствительной и инвариантной относительно поворота оптических осей чисто фазовой модуляции света в средах с индуцируемым двулучепреломлением позволит значительно увеличить количество прозрачных сред, пригодных для фазовой модуляции. В частности, метод решает задачу скоростной недискретной чисто фазовой модуляции для субволновых геликоидальных структур в планарно ориентированных СЖК.

Выбор модельной среды будет еще более обоснован, если учесть, что индуцируемые электрическим полем изменения двулучепреломления в СЖК оказываются такого же порядка, что и начальное двулучепреломление ($\approx 0,12$), а угол поворота оптической оси достигает десятков градусов

($\approx \pm 40^\circ$), т. е. изменения характеризуются рекордными значениями. Дополнительно к практическим достоинствам среды можно отнести простоту управления рефракцией (она оказывается пропорциональна квадрату приложенного электрического поля), недискретность и относительно высокую скорость перестройки фазовой задержки. Так, недавно в СЖК была продемонстрирована непрерывная фазовая модуляция света [7]. При этом, в отличие от НЖК, для СЖК скорость модуляции находится в килогерцовом диапазоне частот. Отметим также появление современного поколения СЖК, которые характеризуются малым шагом спиральной структуры (менее < 100 нм), высоким оптическим качеством и еще большими скоростями модуляции.

Учитывая эти достижения, тезис о малой перспективности СЖК материала для чисто фазовой модуляции света должен быть, как минимум, пересмотрен. В главе 3 диссертации делается попытка решить проблему поляризационной чувствительности сред с изменяемой рефракцией, и приводится оригинальное решение для чисто фазового модулятора света, нечувствительного как к степени поляризации, так и к состоянию поляризации. Таким образом, в контраст устоявшемуся тезису, демонстрируется перспективность планарных СЖК для создания нового поколения быстрых ПВФМС.

Отдельный научный интерес представляет так называемая *геометрическая фаза* (ГФ), связанная с преобразованиями состояния поляризации. Такая фаза естественным образом возникает при прохождении света через оптически анизотропные структуры, такие как ячейки СЖК. В отличие от динамической фазы, зависящей от длины оптического пути и частоты света, геометрическая фаза определяется геометрией преобразований в пространстве поляризационных состояний, которым соответствуют траектории на сфере Пуанкаре в пространстве параметров Стокса.

Понятие ГФ оказалось плодотворным для практики. В настоящее время активно разрабатываются и изготавливаются устройства, известные как оптические ГФ элементы. В этих устройствах оптическая анизотропия используется для пространственно неоднородной модуляции состояния поляризации волны и связанной с ней геометрической фазы. ГФ элементы разработаны на основе различных архитектур, таких как субволновые дифракционные решетки, жидкие кристаллы и метаповерхности.

Однако, в своем большинстве эти элементы являются пассивными. Распределение фазы в них зафиксировано в процессе изготовления и никак не изменяется впоследствии. Только относительно недавно появились сообщения об элементах с перестраиваемой ГФ [8], в которых используются так называемые *поверхностно стабилизированные* сегнетоэлектрические жидкие кристаллы (ПССЖК), возможность использования которых в качестве модуляторов ГФ была впервые продемонстрирована еще в 1995

году [9]. Однако ГФ, полученная с помощью ПССЖК, оказывается дискретной (можно получить только два значения фазы).

Используемые в диссертации планарно ориентированные СЖК с субволновым шагом геликоида лишены этого недостатка. Однако ввиду того, что одновременно с поворотом оптической оси изменяется и величина двулучепреломления, традиционные циклические схемы оказываются непригодны. Отметим здесь то немаловажное обстоятельство, что требование цикличности поляризационных изменений для ГФ не является обязательным. Теоретически это требование было снято еще в 1988 году в работе Самуеля и Бхандари [10]. С учетом данного обстоятельства поляризационные изменения, возникающие при модуляции света планарными СЖК, будучи нециклическими, могут приводить к ГФ.

Однако здесь возникает аналогичная упомянутой выше проблема: изменение состояния поляризации волны, проходящей сквозь СЖК, теперь уже при модуляции ГФ. В обобщенном виде эта проблема приводит к необходимости исследования нециклических, поляризационно инвариантных преобразований с нетривиальной ГФ, которое далеко выходит за рамки данной научной работы. В диссертации рассматривается частный случай такой модуляции неполяризованного и частично линейно поляризованного света планарными СЖК. Так, для неполяризованного света вектор Стокса при прохождении слоя СЖК не изменятся и останется нулевым, однако, как оказалось, получаемая фазовая задержка может интерпретироваться как частный случай фазы Панчаратнама, для которой геометрический вклад равен нулю. В случае же частично поляризованного света результирующая фаза является суммой динамической и геометрической фаз.

К практическим достоинствам элементов с ГФ, главным образом, относят их ахроматичность, которая зависит только от идентичности поляризационных преобразований для разных длин волн. Таким образом, ГФ элементы можно считать ахроматичными в той степени, насколько ахроматичны поляризационные преобразования. Как правило, вместо ахроматизации в классическом смысле, когда волновую пластинку, представляющую ГФ элемент, делают из нескольких ориентированных двулучепреломляющих слоев, ГФ элементы используют материалы со слабой зависимостью двулучепреломления от длины волны. При этом разность самих показателей преломления на концах спектрального диапазона может быть значительной. В этом свете недавнее появление СЖК материалов со слабой зависимостью двулучепреломления от длины волны дополнительно стимулирует исследования ГФ, возникающей при модуляции света планарными СЖК.

Еще одной перспективной ГФ в средах, подобно планарным СЖК, изменяющим состояние поляризации проходящего через них света, является так называемая *интерферометрическая фаза* (ИФ) [11; 12]. Ее отличительной особенностью является локализация в объеме интерференции, т.е.

удаленность от самого модулятора (среды). Само свойство света изменять состояние поляризации при интерференции пучков с различающейся поляризацией было известно давно, – см. например, очерк С.И. Вавилова "Микроструктура света," куда вошли его работы, выполненные в ФИАН в 1930-е годы. На возникающий при этом набег фазы, по всей видимости, впервые обратил внимание Панчаратнам в 1956 году [11]. Несмотря на упомянутую отличительную особенность, которая кажется весьма перспективной, ИФ остается относительно малоизученной. В 2000 г. Эрик Шогвист теоретически исследовал случай ИФ возникающий в результате интерференции смешанных поляризационных состояний света [12]. В развитие этой работы, в разделе 2.5 диссертации, описана зависимость ИФ от степени поляризации для случая интерференции двух пучков частично линейно поляризованного света с различными азимутами поляризации, а также показана зависимость глубины ИФ от азимута при повороте плоскости поляризации.

Поскольку при использовании планарно ориентированных СЖК с субволновым шагом геликоидальной структуры в качестве электрооптических сред для фазовых модуляторов обе упомянутые фазы, и динамическая, и геометрическая (интерферометрическая), в общем случае получаются одновременно, возникает вопрос об их взаимном влиянии и самой возможности практической реализации фазовой модуляции в таких средах. В главе 4 приводится наглядный пример изготовленного с участием автора действующего пространственно-временного модулятора света на планарных СЖК, успешно формирующего оптические вихри. В главе также приводятся результаты численных расчетов фазовых полей, распределений параметров поляризации и интенсивности как для реализованного случая пространственно временного фазового СЖК модулятора, так и для чисто фазового модулятора, когда вклад ГФ отсутствует.

Целью данной работы является получение чисто фазовой модуляции света модуляторами на основе планарно ориентированных сегнетоэлектрических жидких кристаллов с субволновым шагом геликоидальных (спиральных) структур.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Исследовать экспериментально и теоретически фазовую модуляцию неполяризованного света электрооптическими модуляторами на основе планарно ориентированных СЖК с эффектом деформированной субволновой спирали.
2. Исследовать экспериментально и теоретически природу дополнительного фазового сдвига, возникающего в случае частично поляризованного света. Интерпретировать полученные результаты в рамках представлений о геометрической фазе.

3. Разработать экспериментальные методы и средства, позволяющие решить вышеперечисленные задачи: построить поляризационно нечувствительные установки на базе двухлучевых интерферометров (Маха-Цендера и др.), разработать методику, позволяющую выделить геометрическую фазу и измерить ее зависимость от степени поляризации.
4. Получить недискретную чисто фазовую модуляцию света от 0 до 2π в килогерцовом диапазоне управляющих частот для электрооптических модуляторов на основе планарно ориентированных СЖК с эффектом деформированной спирали.

Научная новизна:

1. Впервые экспериментально и теоретически исследована модуляция неполяризованного света спиральными наноструктурами СЖК и установлено, что для сред с индуцируемым двулучепреломлением фазовая задержка обусловлена как суммой собственных показателей преломления, так и их разностью.
2. При модуляции частично поляризованного света спиральными наноструктурами СЖК впервые установлено, что возникающий дополнительный фазовый сдвиг обусловлен эволюцией поляризационных состояний по причине отклонения оптической оси.
3. Для случая интерференции классического частично поляризованного света впервые исследована зависимость геометрического фазового сдвига от степени поляризации света и установлена зависимость интерферометрической фазы от степени поляризации.
4. Впервые предложен подход к фазовой модуляции света, при котором изменяемым параметром является средний показатель преломления, равный полусумме собственных показателей преломления двулучепреломляющей среды.
5. Впервые продемонстрирована поляризационно нечувствительная и инвариантная относительно поворота оптической оси чисто фазовая модуляция света.
6. Для планарно ориентированных СЖК с эффектом деформированной субволновой спирали впервые получена чисто фазовая модуляция света глубиной 2π и частотой 4 кГц.

Практическая значимость:

1. Предложенный метод получения поляризационно нечувствительной чисто фазовой задержки света в двулучепреломляющих средах позволил:
 - а) обосновать расширенный перечень прозрачных сред, пригодных для фазовой модуляции света.
 - б) снять ограничения на ориентацию электрооптической среды относительно направления распространения и поляризации модулируемой волны.

2. Степень поляризации света использована в качестве параметра, определяющего значение интерферометрической фазы.
3. Представлены рекомендации по созданию ПВФМС на основе планарно ориентированного СЖК.

Методология и методы исследования. Методы, использованные в работе, относятся к хорошо известным интерферометрическим способам исследования фазы света. Отличительной особенностью является использование оптически анизотропных элементов и сред, а также работа с частично поляризованным светом со степенями поляризации от $P_0 = 0$ до $P_0 = 1$. Эта особенность потребовала разработать экспериментальные установки с оптическими схемами, позволяющими сохранять заданное состояние поляризации (не оказывать косвенного поляризующего действия и не проявлять анизотропии пропускания).

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Интенсивность и фаза неполяризованного света при модуляции в средах с индуцируемым двулучепреломлением инвариантна относительно поворота оптической оси, а фазовая задержка определяется полусуммой показателей преломления.
2. Геометрическая фаза, возникающая при интерференции частично поляризованных пучков света с различной эволюцией поляризационных состояний, зависит от степени поляризации.
3. Существует чисто фазовая модуляция света, обусловленная изменением среднего показателя преломления, равного полусумме показателей преломления.

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием современных экспериментальных методик, экспериментальной проверкой и воспроизводимостью экспериментальных результатов, сравнением результатов с ранее опубликованными данными, полученными независимыми авторами. Анализ выполнялся на основе разработанного в 2011-2015 гг. теоретического подхода, описывающего эффективный тензор диэлектрической проницаемости СЖК с эффектом деформированной спирали [2; 3; 7]. В работе (как в теоретических расчетах, так и в эксперименте) использовались СЖК материалы, физические характеристики которых независимо публиковались ранее. Полученные теоретические результаты хорошо согласуются с результатами эксперимента.

Апробация работы. Основные результаты работы доложены на семинарах и конференциях:

1. На семинаре ОКРФ им Н.Г. Басова, 16 апреля 2021г. Доклад "Фазовая модуляция частично поляризованного света средами с индуцируемым двулучепреломлением," автор В.В. Кесаев.
2. На конференции "Енисейская Фотоника – 2020". Доклад "Генерация вихревых световых полей с помощью секторной спиральной пластины на основе жидкокристаллического сегнетоэлектрика с

- субволновым шагом спирали,” авторы: С.П. Котова , Е.П. Пожидаев, С.А. Самагин, В.В. Кесаев, А.М. Майорова.
3. На семинаре ОКРФ им.Н.Г. Басова, 26 октября 2018г. Доклад "Интерферометрическая фаза и фаза Ульмана смешанных поляризационных состояний,” авторы Е.П. Пожидаев, А.Д. Киселев, В.В. Кесаев.
 4. На 14-й европейской конференции по жидким кристаллам ("14th European Conference on Liquid Crystals (ECLC) June 25 - 30, 2017, Moscow, Russia”). Доклад "Modulation of unpolarized light in planar aligned deformed-helix ferroelectric liquid crystals with sub-wavelength helix pitch,” авторы: Vladimir V. Kesaev, Alexei D. Kiselev, Evgeny P. Pozhidaev.
 5. На 14-й европейской конференции по жидким кристаллам ("14th European Conference on Liquid Crystals (ECLC) June 25 - 30, 2017, Moscow, Russia”). Доклад "Light modulation in deformed helix ferroelectric liquid crystals and phases of mixed polarization states,” авторы: Alexei D. Kiselev, Vladimir V. Kesaev, Evgeny P. Pozhidaev.
 6. На XI Международном симпозиуме по фотонному эхо и когерентной спектроскопии (ФЭКС) в Светлогорске, 16–21 сентября 2017 года. Доклад "Электроуправляемые фазы частично поляризованного света и ориентационный эффект Керра в жидкокристаллических сегнетоэлектриках,” авторы А. Д. Киселев, В. В. Кесаев, Е. П. Пожидаев

Кроме того результаты полученные автором использованы в отчетах по проектам РФФИ: 16-02-00441-А, 16-29-14012-офи-м и 16-42-630773-р-а.

Личный вклад. Все результаты, изложенные во второй и третьей главах диссертации, получены автором лично либо при его непосредственном активном участии. Принадлежащий автору основной результат четвертой главы приводится в разделе 4.4. Результаты, не полученные автором лично, но упоминаемые в главе 4, выделены из общих результатов и принадлежат Московскому и Самарскому научным коллективам ФИАН. Электрооптические ячейки с ЖК-материалами, использованные в экспериментах, были разработаны и изготовлены в лаборатории ОЭП ФИАН (Москва).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 9-ти печатных изданиях, из которых 7 изданы в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и 2 изданы в сборниках трудов конференций. Список публикаций приведен на странице 23 автореферата.

Основное содержание работы

Во **введении** приводятся мотивация и актуальность выбранного направления исследований, выделяется объем работ, проводимых в рамках данной

диссертации, формулируется цель, ставятся задачи, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы, приводятся основные результаты и защищаемые положения.

Первая глава посвящена обзору литературы по теме диссертации, кратко изложены основные сведения о фазовой модуляции света, геометрических фазах, параметрах поляризации света и средах с электроиндуцируемым двулучепреломлением.

Так, в *разделе 1.1* обсуждаются основные физические принципы и требования, предъявляемые к существующим (или разрабатываемым) распространенным фазовым модуляторам. Приводится краткое сравнение известных способов получения фазовой задержки, предъявляются требования к ПВФМС.

В *разделе 1.2* рассматривается индуцируемое двулучепреломление, сопровождающееся поворотом оптической оси, как общий случай поведения прозрачной немагнитной среды в электрическом поле. Приводится краткая характеристика используемых СЖК с позиции перспективной электрооптической среды для фазовой модуляции света. В частности, для них электрорзависимые показатели преломления $n_{\pm}(E)$ квадратичны по управляющему электрическому полю E :

$$n_{+}(E) = n_h + \beta_{+} E^2; \quad n_{-}(E) = n_p + \beta_{-} E^2,$$

где n_h , n_p – начальные показатели преломления ("необыкновенный" и "обыкновенный"). Угол поворота оптической оси $\Psi_d(E) = \Psi_0 \pm \gamma E$ пропорционален полю (здесь Ψ_0 – начальный азимут оптической оси, а знак γ зависит от правления поля E относительно выбранной системы координат). Коэффициенты β_{\pm} и γ являются константами материала, характеризующими электроиндуцируемое двулучепреломление среды.

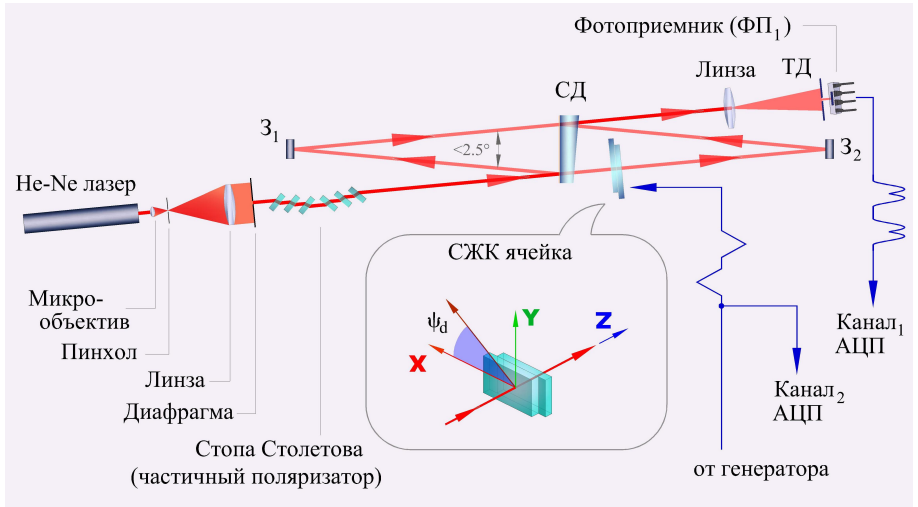
В последнем *разделе 1.3* главы приводятся краткие обзорные сведения о поляризации света и геометрических фазах с необходимыми связанными понятиями и определениями, используемыми в диссертации.

Вторая глава посвящена экспериментальному и теоретическому исследованию случая модуляции частично поляризованного света средами с индуцируемым двулучепреломлением в присутствии поворота оптической оси.

В *разделе 2.1* теоретически рассмотрен общий подход к фазовой модуляции частично поляризованного света, реализуемой в двухлучевом интерферометре типа Маха-Цендера.

В *разделе 2.2* описывается техника эксперимента, учитываются факторы и ошибки эксперимента.

В *разделе 2.3* описан эксперимент, в котором электрооптическая СЖК ячейка, в качестве фазового модулятора неполяризованного света, помещалась в одно из плеч двухлучевого интерферометра Маха-Цендера (рис. 1). Неполяризованный луч гелий-неонового лазера ($\lambda = 632,8$



$Z_{1,2}$ -глухие зеркала, СД - светоделитель, ТД - экран с точечной диафрагмой.

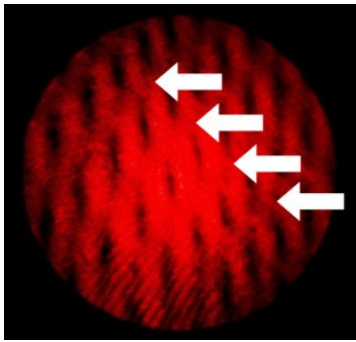
Рис. 1 — Схема экспериментальной установки на основе двухлучевого интерферометра Маха-Цендера с частично линейно поляризованным светом на входе и СЖК ячейкой в тестовом плече [А.З.].

нм) падал на светоделитель СД интерферометра, где разделялся на две волны: опорную, содержащую зеркало Z_1 , и референтную, содержащую электрооптическую СЖК ячейку и Z_2 . После интерференции на том же самом светоделителе СД выходное световое поле (рис. 2) проецировалось на экран с точечной диафрагмой, за которой измерялась интенсивность. В случае полностью неполяризованного света ($P_0 = 0$) выходную интенсивность I_0 можно выразить как:

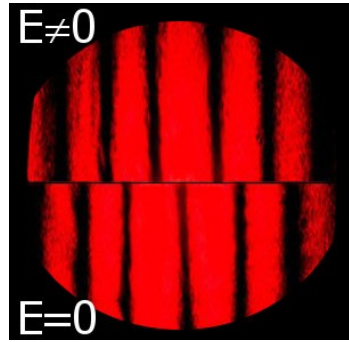
$$I = 2 I_0 [1 + \cos \Delta \Phi \cos (\Phi_P - \Phi_0)].$$

Здесь в выражении отсутствует угол поворота оптической оси Ψ_d , а $\Delta \Phi = (\Phi_+ - \Phi_-)/2$ и $\Phi = (\Phi_+ + \Phi_-)/2$. Отметим что $\Delta \Phi$ — это хорошо известная *относительная разность фаз*, а Φ — имеет смысл *средней фазы*, так $\Phi_{\pm} = n_{\pm} k_{vac}$ — это фазы вдоль собственных поляризационных направлений среды, k_{vac} — волновое число в вакууме. Φ_0 — начальная фаза (фаза референтной волны). Полученные теоретические и экспериментальные зависимости приведены на рис. 3, отметим их хорошее согласие.

Приведенное выражение для выходной интенсивности оказывается аналогичным приводимому в работе [11]. Действительно Φ_P определяет *фазу Панчаратнама*, а $\cos \Delta \Phi$ — *видность* интерференционной картины. Таким образом, получаемый фазовый набег можно интерпретировать в терминах фазы Панчаратнама.

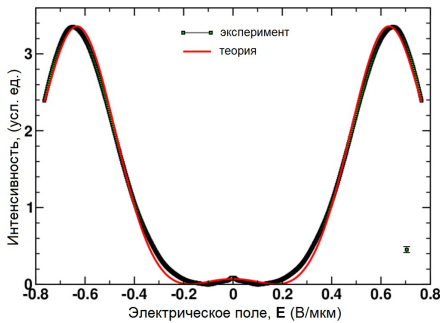


а)

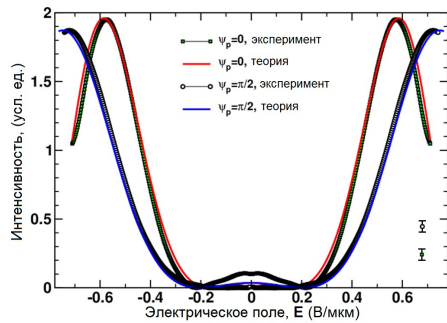


б)

Рис. 2 — Картина интерференционных полос на выходе из интерферометра, наблюдаемая на экране с точечной диафрагмой. а) интерферограмма, полученная при отсутствующем поляризаторе. Стрелками обозначены полосы нулевого контраста, соответствующие полуволновому фазовому скачку ($\Delta\Phi_P = \pi$); б) сверху: полосы в присутствии поля ($E \neq 0$)—происходит сдвиг интерференционной картины, снизу: исходная настройка интерферометра в полосах конечной ширины ($E = 0$) [A.4.]



а)



б)

Рис. 3 — а) Экспериментальная и теоретическая (сплошная кривая) интенсивность света на выходе интерферометра в зависимости от величины управляющего электрического поля для случая неполяризованного света для ячейки, заполненной смесью СЖК₆₂₄ (а). б) То же, но для двух положений поляризатора: $\psi_p \parallel \mathbf{x} = 0$ и перпендикулярного ему $\psi_p = \pi/2$, установленного на выходе. [A.4.]

В разделе 2.4 описана модуляция ячейкой СЖК частично поляризованного света. Как оказалось, (см. рис. 4а) свет испытывает дополнительную фазовую задержку, величина которой зависит от P_0 . Выходное поле можно связать как с входной степенью поляризации P_0 , так и с входным

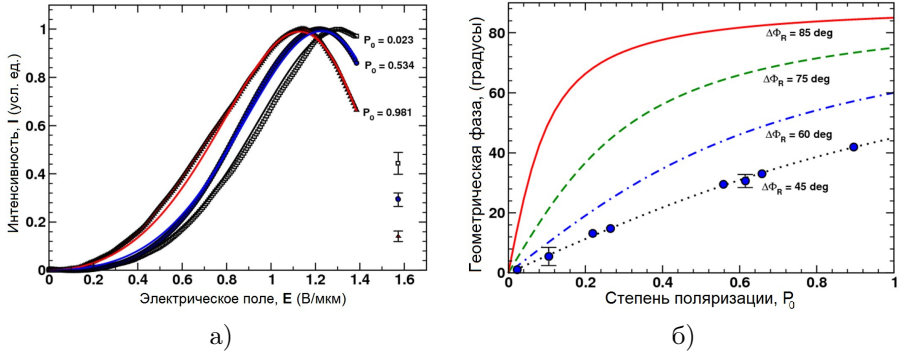


Рис. 4 — а) Экспериментальная и теоретическая (сплошная кривая) интенсивность света на выходе из интерферометра Маха-Цендера в зависимости от величины управляющего электрического поля для различных значений степени поляризации P_0 в эксперименте с СЖК ячейкой. б) Зависимость геометрической фазы от степени поляризации P_0 в эксперименте с вращающейся четвертьволновой пластинкой [А.3].

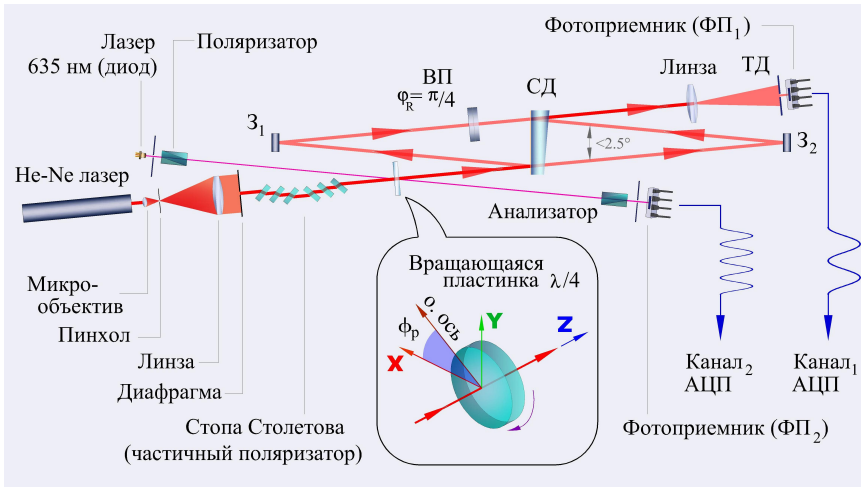
вектором Стокса \hat{s}_0 через так называемую *функцию Панчаратнама*:

$$F_P = e^{\Phi} [\cos(\Delta\Phi) + i P_0 \sin(\Delta\Phi)(\hat{s}_d \cdot \hat{s}_0)],$$

здесь \hat{s}_d — это вектор Стокса непосредственно на выходе из среды. Интенсивность интерференционного члена I_i и фаза выразятся как $I_i/I_0 = 2\text{Re}[e^{-i\Phi_0} F_P]$ и $\Phi_P = \text{arg} F_P$ соответственно. Этот дополнительный фазовый набег относится к *геометрической фазе* и при фиксированной степени поляризации P_0 зависит от косинуса угла между выходным и входным вектором Стокса $\hat{s}_d \cdot \hat{s}_0$.

Для того, чтобы выяснить характер зависимости степени поляризации на величину геометрического фазового сдвига, в *разделе 2.5* экспериментально и теоретически рассматривается *пассивный* интерферометр Маха-Цендера (рис. 5), на вход которого подается частично поляризованный свет с управляемым вектором Стокса. Для этого излучение неполяризованного He-Ne лазера преобразуется в частично и эллиптически поляризованное. Эллиптичность и азимут непрерывно изменяются с помощью вращающейся четвертьволновой пластинки с азимутом быстрой оси ϕ_p . В тестовом плече интерферометра находится оптически активный вращатель поляризации **ВП**, поворачивающий собственные оси поляризации (эллипс поляризации) на угол $\Phi_R = \pi/4$.

При вращении четвертьволновой пластинки выходная картина полос циклически смещалась на экране благодаря модуляции геометрической фазы. Амплитуда сдвига зависела от вектора Стокса входной волны \hat{s}_0 и степени поляризации P_0 . Зависимость геометрической фазы от степени поляризации приведена на рисунке 4б. Функцию Панчаратнама для этого



$Z_{1,2}$ -глухие зеркала, $СД$ - светоделитель, $ВП$ - вращатель поляризации на угол $\phi_R = \pi/4$, $ТД$ - экран с точечной диафрагмой.

Рис. 5 — Схема экспериментальной установки по типу двухлучевого интерферометра Маха-Цендера с модулируемым состоянием поляризации частично поляризованного света на входе [А.3].

случая можно выразить как:

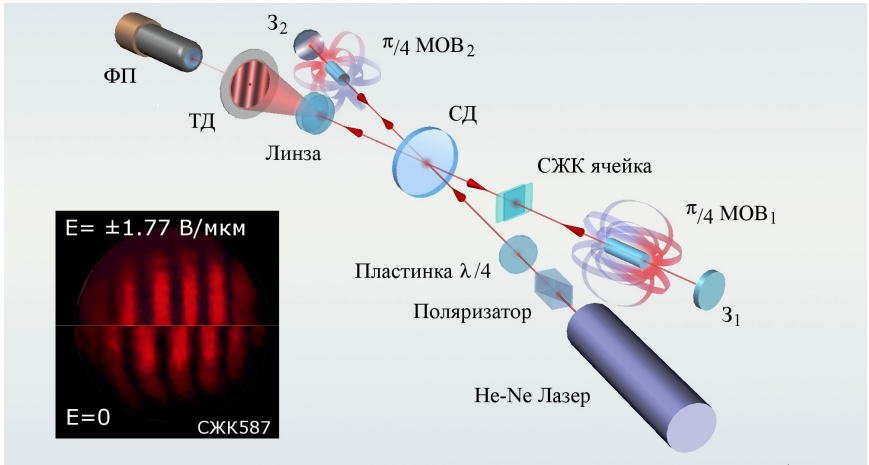
$$e^{-i\Phi_R} F_P = \cos \Delta\Phi_R + i P_0 \sin \Delta\Phi_R \cos(\theta_p).$$

Формула содержит азимут поворота эллипса поляризации $\Delta\Phi_R$ и угол $\theta = \pi/4 - \phi_p$, задающий значение входного вектора Стокса $\hat{s}_0 \equiv \hat{s}_p = [\sin(2\theta_p) \cos(2\phi_p), \sin(2\theta_p) \sin(2\phi_p), \cos(2\theta_p)]$ в зависимости от азимута ϕ_p четвертьволновой пластинки.

Главу завершает *раздел 2.6*, в котором кратко приводятся выводы, основные результаты и положения выносимые на защиту.

Третья глава посвящена предлагаемым методам получения поляризационно нечувствительной фазовой модуляции света средами с индуцируемым двулучепреломлением, сопровождающимся поворотом оптической оси.

В *разделе 3.1* предложен оригинальный метод получения поляризационно нечувствительной чисто фазовой модуляции света. Теоретически и экспериментально показано, что фазовая модуляция с помощью сред с индуцируемым двулучепреломлением может быть не чувствительна к состоянию поляризации. Показано, что фазовая задержка анизотропной среды может характеризоваться эффективным средним показателем преломления, равным полусумме собственных показателей. Метод универсален и может применяться к широкому спектру существующих модуляторов, включая ячейки Керра, Поккейса, а также сегнетокерамические, жидкокристаллические и фотоупругие модуляторы. Применяя метод к планарно



СД - светоделитель, $\pi/4$ $\text{MOB}_{1,2}$ - магнитооптические вращатели поляризации на угол 45° , $\text{З}_{1,2}$ - глухие зеркала, ТД - экран с точечной диафрагмой, ФП - фотоприемник

Рис. 6 — Экспериментальная установка на основе интерферометра Майкельсона для исследования фазовой модуляции на основе среднего показателя преломления [А.2].

ориентированным СЖК с субволновым шагом спирали, впервые экспериментально продемонстрирована высокоскоростная (4 кГц) поляризационно нечувствительная чисто фазовая модуляция света глубиной 2π .

В разделе рассматривается интерферометр Майкельсона (рис. 6), предметное плечо которого является поляризационно нечувствительным чисто фазовым модулятором света с пропусканием

$$\mathbf{T}_s = e^{i\Phi} \mathbf{T}_F,$$

где \mathbf{T}_F – матрица, описывающая действие зеркала Фарадея; Φ – средняя фазовая задержка, которая обуславливает сдвиг полос в интерферометре. Выходная интенсивность $I(\Phi)/I_0 \propto 1 + \cos \Phi$ показана на рисунке 7а. Полученный фазовый сдвиг обусловлен изменением среднего показателя преломления СЖК на величину $\approx 0,004$. Данное изменение возникает благодаря малой асимметрии констант материала β_{\pm} и, соответственно, n_{\pm} (рис. 7б). Отметим, что для СЖК₅₈₇Ф₇ в зеленом свете получена чисто фазовая модуляция света глубиной 2π и частотой модуляции 4 кГц.

В *разделе 3.2* описан оригинальный метод получения поляризационно нечувствительной модуляции интенсивности света с помощью относительной фазовой задержки, возникающей в средах с индуцируемым двулучепреломлением. Теоретически и экспериментально показана нечувствительность метода к повороту оптической оси. Экспериментально, применяя метод для исследования оптических свойств планарно

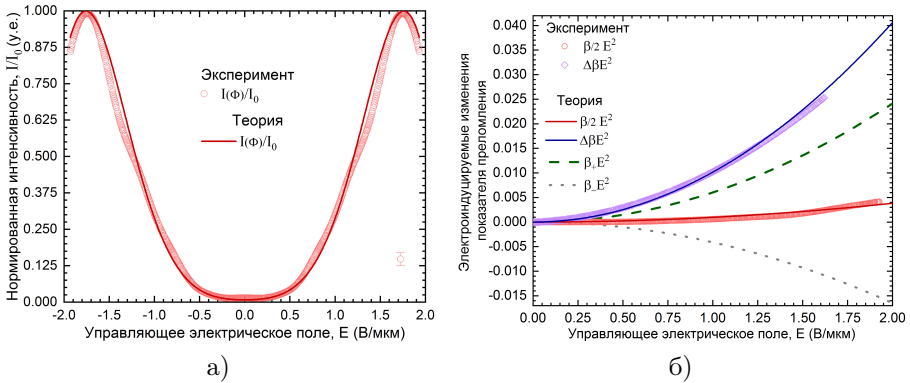


Рис. 7 — Интенсивность света на выходе из интерферометра (а) и электроиндуцируемые изменения эффективных показателей преломления СЖК₅₈₇ (б) [А.2.].

ориентированных сегнетоэлектрических жидкокристаллических ячеек с эффектом деформированной спирали, продемонстрирована модуляция интенсивности частично поляризованного света, обусловленная исключительно изменением разности показателей преломления под действием управляющего электрического поля.

Раздел 3.3 посвящен оригинальному методу получения суммы нормальных напряжений, что, в комбинации с поляризационно-оптическим методом исследования напряженно-деформированного состояния упругого тела, позволяет полностью решить задачу определения значений главных напряжений. Приводятся краткое теоретическое обоснование метода и алгоритм решения.

Главу завершает *раздел 3.4*, включающий в себя выводы, основные результаты и защищаемые положения.

Четвертая глава посвящена описанию ПВФМС, характерной особенностью которого является наличие сопутствующей модуляции состояния поляризации света. Реализован пространственно-временной фазовый модулятор света, формирующий вихревые световые поля с изменяемым топологическим зарядом до $l = 4$. В качестве электрооптической среды использован планарно ориентированный СЖК с эффектом деформированной субволновой спирали. Продемонстрирована генерация вихревых полей в присутствии модуляции поляризации световой волны.

В *разделе 4.1* кратко приводятся основные и обзорные сведения о вихревых полях.

В *разделе 4.2* описывается разработанный фазовый пространственно-временной модулятор света (ПВМС). Выполнен численный расчет параметров оптических вихрей. Анализ свидетельствует, что комплексный характер электромагнитного поля после прохождения двулучепреломляющей среды с поворотом оптической оси существенно ограничивает область

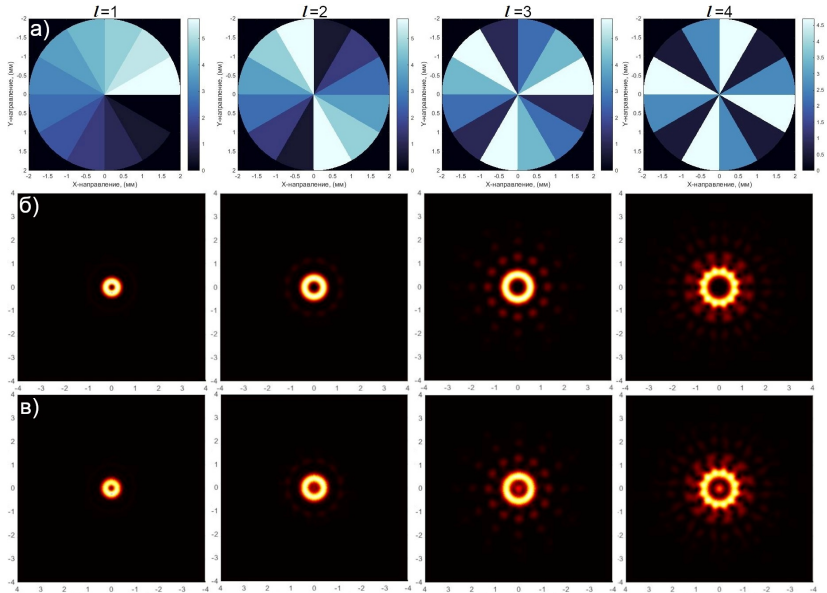
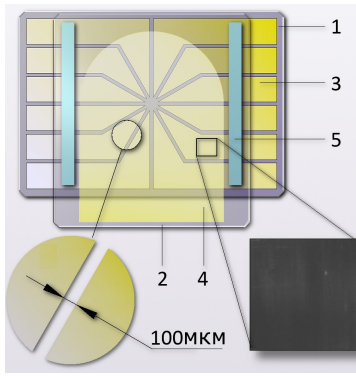


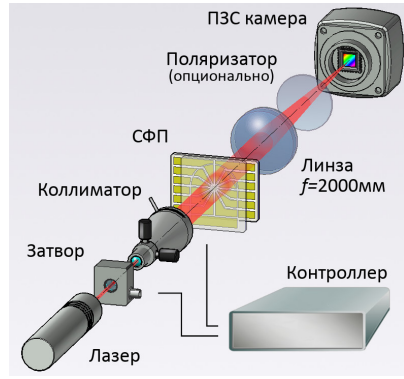
Рис. 8 — Рассчитанные распределения фазовой задержки на секторах СФП и распределения интенсивности света I в фокальной плоскости линзы в зависимости от топологического заряда l . а) фазовые задержки для 12-ти сегментов СФП в зависимости от топологического заряда l ; б) распределение интенсивности (оптических вихрь), полученное теоретически в рамках скалярного приближения Рэля-Зоммерфельда; в) распределение интенсивности, полученное теоретически в рамках векторного приближения Дебая.

ее применения в качестве рабочей среды для фазовой модуляции света, однако не исключает эту возможность полностью. Так, одной из областей применения оказывается задача генерации оптических вихрей (рис. 8). Как оказалось, для этого случая конечный поворот азимута поляризации и изменение эллиптичности волны не оказывает сильного влияния на получаемый топологический заряд. Конструкция 12-сегментной спиральной фазовой пластинки приведена на рисунке 9а. В качестве электрооптической среды использовался планарно-ориентированный 50-мкм слой СЖК_{587Ф7}.

Раздел 4.3 содержит описание эксперимента по генерации оптических вихрей. Экспериментальная установка приведена на рисунке 9б. Изготовленная СФП помещалась в коллимированный лазерный луч. Оптический вихрь формировался в фокусе линзы на фоточувствительной матрице ПЗС камеры. Была выполнена серия экспериментов по генерации оптических вихрей с топологическими зарядами до $l = 4$.



а)



б)

1,2 – стеклянные подложки; 3,4 – прозрачные электроды, выполненные из ИТО, спейсеры; на вставке – фотография фрагмента СПП в поляризационном микроскопе

Рис. 9 — а) Конструкция спиральной фазовой пластинки (СПП); б) экспериментальная установка для формирования световых полей с ненулевым орбитальным моментом l [А.1.].

Для создания фазовой задержки выгоднее использовать собственные значения фазы $\delta\Phi_+$, так как эта ось обладает большим значением константы ($\beta_+^{(\Phi)} \approx 2,1084$).

Для формирования вихря на каждом j -том сегменте СПП создавалась фазовая задержка $\Phi_j(l, j)$ с помощью управляющего поля $|E_j(l, j)|$

$$\Phi_j(l, j) = j \frac{2\pi l}{12}, \quad E_j^2(l, j) = \frac{\Phi_j(l, j) - \Phi_h}{\beta_+^{(\Phi)}}.$$

где $1 \leq j \in \mathcal{N} \leq 12$, а Φ_h – начальная фаза. Электрическое поле амплитудой $|E_j(l, j)|$ подавалось на электроды СПП в виде меандра. Частота поля изменялась от единиц герц до 3 кГц. Пространственное распределение и значения фаз $\Phi_j(l, j)$ для топологических зарядов $l \in \{1, 2, 3, 4\}$ приведены на рисунке 8а. Параметры поляризации света непосредственно на выходе из СПП и в фокальной плоскости показаны на рисунке 10. Видно, что состояние поляризации сильно трансформировано.

Экспериментально сформированные вихревые поля приводятся на рисунке 11 для случая присутствующего (а) и отсутствующего (б) поляризатора. Различие в интенсивности не превышает 13%.

В разделе 4.4 приводятся выводы и основные результаты по главе, принадлежащие автору. Глава не содержит защищаемых положений.

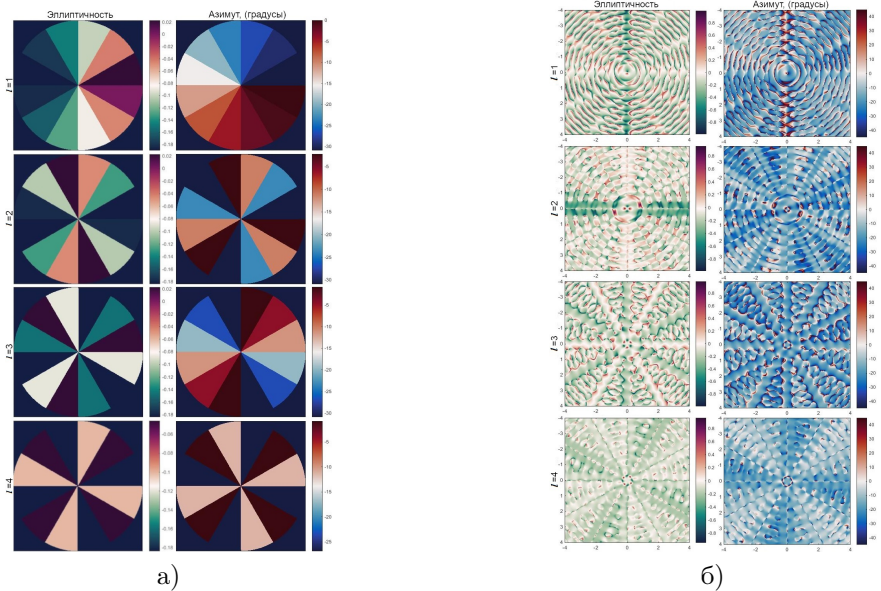


Рис. 10 — Эллиптичность ε_{ell} и азимут поляризации θ_{ell} в зависимости от топологического заряда l : а) непосредственно за СФП; б) в фокальной плоскости линзы.

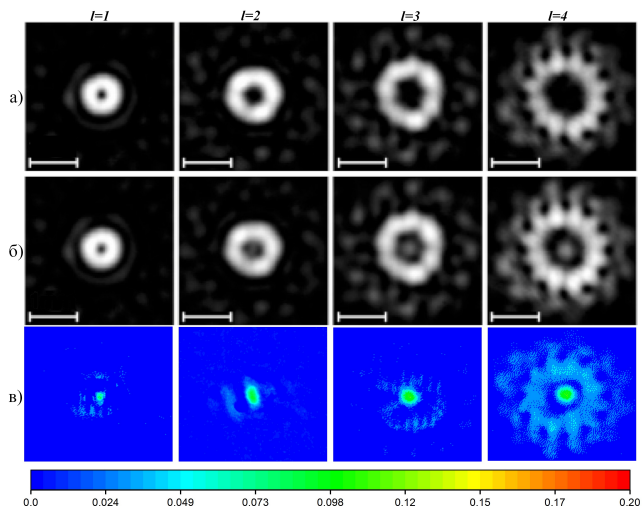


Рис. 11 — Экспериментально измеренные распределения интенсивности в фокальной плоскости линзы (см. рис. 9б) в зависимости от топологического заряда l . а) для случая установленного поляризатора, б) без поляризатора, в) разница между б) и а) [А.1.].

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. При модуляции неполяризованного света с длиной волны $\lambda = 632,8$ нм 50-мкм электрооптической ячейкой на основе планарно ориентированного сегнетоэлектрического жидкого кристалла с субволновым шагом спирали получен фазовый сдвиг глубиной π , обусловленный средним показателем преломления.
2. При модуляции частично поляризованного света с длиной волны $\lambda = 632,8$ нм 50-мкм электрооптической ячейкой на основе планарно ориентированного сегнетоэлектрического жидкого кристалла с субволновым шагом спирали, в интерферометре Маха-Цендера, получены дополнительные геометрические фазовые сдвиги глубиной от нуля, для степени поляризации $P_0 = 0$, до $\pi/6$ при $P_0 = 1$.
3. Для различных степеней поляризации P_0 измерен геометрический фазовый сдвиг на выходе интерферометра Маха-Цендера при модуляции эллиптичности входящего света от -1 до $+1$ и установленном в одно из плеч интерферометра гиротропном вращателе поляризации на угол 45° . Получен результирующий геометрический фазовый сдвиг в пределах от 0 до $\pi/4$ для степеней поляризации $P_0 = 0$ и $P_0 = 1$, соответственно.
4. При распространении света с длиной волны $\lambda = 532$ нм через двулучепреломляющую среду и зеркало Фарадея получена чисто фазовая модуляция глубиной 2π и частотой 4 кГц в планарно ориентированных геликоидальных сегнетоэлектрических жидких кристаллах с эффектом деформированной субволновой спирали. Чисто фазовая модуляция обусловлена изменениями среднего показателя преломления и инвариантна относительно состояния поляризации и степени поляризации входного излучения.
5. Изготовлен пространственно временной фазовый модулятор света с частотой модуляции до 3 кГц на основе планарно ориентированного сегнетоэлектрического жидкого кристалла с эффектом деформированной субволновой спирали. Показано, что в условиях параксиального распространения лучей и модуляции параметров поляризации (эллиптичности $|\epsilon_{ell}| \leq 0,35$ и азимута $|\theta_{ell}| \leq 0,65$ рад) отличие интенсивности от случая отсутствия модуляции поляризации не превышает 13% .

Публикации автора по теме диссертации

В публикации [A.1.] автору принадлежит результат, сформулированный в разделе 4.4. касающийся реализации ПВФМС и параметров поляризации модулируемого излучения, остальные результаты принадлежат Московскому и Самарскому научным коллективам ФИАН.

Публикации в изданиях, входящих в международную базу цитирования Web of Science:

- A.1. Ferroelectric liquid crystal with sub-wavelength helix pitch as an electro-optical medium for high-speed phase spatial light modulators / S. P. Kotova, E. P. Pozhidaev, S. A. Samagin, V. V. Kesaev, V. A. Barbashov, S. I. Torgova // Optics & Laser Technology. – 2021. – Vol. 135. – P. 106711. – DOI 10.1016/j.optlastec.2020.106711.
- A.2. Kesaev, V. V. Phase-only modulation of light / V. V. Kesaev, A. D. Kiselev // Optics Letters. – 2020. – Vol. 45. - No 24. - P. 6703-6706. – DOI 10.1364/OL.410450.
- A.3. Kiselev, A. D. Interferometric and Uhlmann phases of mixed polarization states / A. D. Kiselev, V. V. Kesaev // Physical Review A. – 2018. – Vol. 98. – No 3. – P. 033815. – DOI 10.1103/PhysRevA.98.033816.
- A.4. Kesaev, V. V. Modulation of unpolarized light in planar-aligned subwavelength-pitch deformed-helix ferroelectric liquid crystals / V. V. Kesaev, E. P. Pozhidaev, A. D. Kiselev // Physical Review E. – 2017. – Vol. 95. – No 3. – P. 032705. – DOI 10.1103/PhysRevE.95.032705.
- A.5. Electro-optical modulation in planar aligned ferro-electric liquid crystals with subwavelength helix pitch / E. P. Pozhidaev, V. A. Barbashov, V. V. Kesaev, V. I. Pogonin, S. A. Samagin, S. P. Kotova // Liquid Crystals and their Application. – 2017. – Vol. 17. – No 4. – P. 90-96. – DOI 10.18083/LCAppl.2017.4.90.
- A.6. Kiselev, A. D. Electrically controlled phases of partially polarized light and orientational Kerr effect in liquid crystal ferroelectrics / A. D. Kiselev, V. V. Kesaev, E. P. Pozhidaev // EPJ Web of Conferences. – 2017. – Vol. 161. – P. 02010. – DOI 10.1051/epjconf/201716102010.
- A.7. Kiselev, A. D. Orientational Kerr effect in liquid crystal ferroelectrics and modulation of partially polarized light / A. D. Kiselev, V. V. Kesaev, E. P. Pozhidaev // Journal of Physics: Conf. Series. – Vol. 1092. – 2018. – P. 012056. – DOI 10.1088/1742-6596/1092/1/012056.

Публикации в сборниках трудов конференций:

- C.1. Киселев, А. Д. Электроуправляемые фазы частично поляризованного света и ориентационный эффект Керра в жидкокристаллических сегнетоэлектриках / А. Д. Киселев, В. В. Кесаев, Е. П. Пожидаев // XI Международный симпозиум по фотонному эхо и когерентной спектроскопии (ФЭКС - 2017) : Сборник тезисов, Светлогорск, 16–21 сентября 2017 года. – Светлогорск: Издательство "Трoвант 2017. – С. 98-99.

С.2. С.П. Котова Е.П. Пожидаев С.А. Самагин В.В. Кесаев А.М. Майорова. – «Генерация вихревых световых полей с помощью секторной спиральной пластины на основе жидкокристаллического сегнетоэлектрика с субволновым шагом спирали». – В: Енисейская Фотоника – 2020. Первая Всероссийская научная конференция с международным участием. Тезисы докладов. – 2020 – с. 28-29.

Литература

1. Deformed helix ferroelectric liquid crystal display: A new electrooptic mode in ferroelectric chiral smectic C liquid crystals / L. A. Beresnev, V. G. Chigrinov, D. I. Dergachev et al. // *Liquid Crystals*. – 1989. – Vol. 5, no. 4. – Pp. 1171–1177. – URL: <https://doi.org/10.1080/02678298908026421>.
2. Polarization-gratings approach to deformed-helix ferroelectric liquid crystals with subwavelength pitch / Alexei D. Kiselev, Eugene P. Pozhidaev, Vladimir G. Chigrinov, Hoi-Sing Kwok // *Phys. Rev. E*. – 2011. – Vol. 83. – P. 031703. – URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.83.031703>.
3. *Kiselev Alexei D., Chigrinov Vladimir G.* Optics of short-pitch deformed-helix ferroelectric liquid crystals: Symmetries, exceptional points, and polarization-resolved angular patterns // *Phys. Rev. E*. – 2014. – Vol. 90. – P. 042504. – URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.90.042504>.
4. *Love Gordon D.* Liquid-crystal phase modulator for unpolarized light // *Appl. Opt.* – 1993. – Vol. 32, no. 13. – Pp. 2222–2223. – URL: <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-32-13-2222>.
5. *Love Gordon D., Bhandari Rajendra.* Optical properties of a QHQ ferroelectric liquid crystal phase modulator // *Optics Communications*. – 1994. – Vol. 110, no. 5. – Pp. 475 – 478. – URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0030401894902348>.
6. *Liu Jun, Wang Jian.* Demonstration of polarization-insensitive spatial light modulation using a single polarization-sensitive spatial light modulator // *Scientific Reports*. – 2015. – Vol. 5, no. 1. – P. 9959. – URL: <https://doi.org/10.1038/srep09959>.
7. Light modulation in planar aligned short-pitch deformed-helix ferroelectric liquid crystals / Svetlana P. Kotova, Sergey A. Samagin, Evgeny P. Pozhidaev, Alexei D. Kiselev // *Phys. Rev. E*. – 2015. – Vol. 92. – P. 062502. – URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.062502>.

8. Recent progress in Pancharatnam–Berry phase optical elements and the applications for virtual/augmented realities / Yun-Han Lee, Guanjun Tan, Tao Zhan et al. // *Optical Data Processing and Storage*. — 2017. — Vol. 3, no. 1. — Pp. 79–88. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.58.3264>.
9. Hariharan P., Ciddor P.E. Achromatic phase-shifters: 2. A quantized ferroelectric liquid-crystal system // *Optics Communications*. — 1995. — Vol. 117, no. 1. — Pp. 13–15. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003040189500112L>.
10. Samuel Joseph, Bhandari Rajendra. General Setting for Berry’s Phase // *Phys. Rev. Lett.* — 1988. — Vol. 60. — Pp. 2339–2342. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.2339>.
11. Pancharatnam S. Generalized theory of interference, and its applications // *Proceedings of the Indian Academy of Sciences - Section A*. — 1956. — Vol. 44, no. 5. — Pp. 247–262. — URL: <https://doi.org/10.1007/BF03046050>.
12. Geometric Phases for Mixed States in Interferometry / Erik Sjöqvist, Arun K. Pati, Artur Ekert et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 85. — Pp. 2845–2849. — URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.2845>.