

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук

на правах рукописи

Морозов Андрей Алексеевич

**Точные вильсоновские средние
в калибровочной теории Черна-Саймонса**

специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Диссертация

*на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук*

Москва 2021

Оглавление

1	Введение	4
1.1	Содержание работы	14
1.2	Основные результаты	19
1.3	Основные публикации	21
2	Теория узлов	25
2.1	Виртуальные узлы	29
3	Квантовые группы	32
4	Классический формализм Решетихина-Тураева	35
5	$\mathcal{R}$-матрицы и косы	38
5.1	Собственные значения $\mathcal{R}$ -матриц	41
5.2	$\mathcal{R}$ -матрицы и матрицы Рака	43
5.3	Общий вид фундаментальных $\mathcal{R}$ -матриц	45
6	Матрицы Рака квантовых групп	49
6.1	Матрицы Рака квантовой группы $U_q(sl_2)$	51
6.2	Метод старших весов для матриц Рака	51
6.2.1	Старшие вектора в $[1]^{\otimes 2}$	53
6.2.2	Уровень $m = 3$	53
6.2.3	Уровень $m = 4$	55
6.2.4	Коса шириной $m = 5$	58

7	Гипотеза о собственных значениях	60
7.1	Гипотеза для симметрических представлений	62
7.1.1	Фундаментальное представление $T = [1]$	62
7.1.2	Представление $T = [2]$	63
7.1.3	Связи разных представлений	64
7.2	Гипотеза для матриц Рака $U_q(sl_2)$	66
7.3	Гипотеза для 4-нитевой косы	67
8	2-мостовые и древоподобные узлы	71
8.1	Древоподобные узлы	72
8.2	Полиномы узлов-мутантов	74
9	Метод гиперкуба	80
9.1	Скобка Кауффмана	80
9.2	Разложение Сейферта диаграмм зацепления и толстые графы	81
9.2.1	Разрешения и размерности	83
9.3	Полиномы ХОМФЛИ-ПТ из гиперкуба	84
9.4	ХОМФЛИ-ПТ и толстый граф	85
9.4.1	Пример: вершина Сейферта для торического зацепления $T(2, 4)$	86
9.4.2	Пример: не-Сейфертова вершина торического зацепления $T(2, 4)$	87
9.5	Свойство факторизации	87
9.6	Преобразования толстого графа при $q \neq 1$	88
9.7	Инвариантность Редемейстера и толстые графы	90
9.7.1	1-е движение Редемейстера	90
9.7.2	2-е движение Редемейстера с параллельными нитями	91
9.7.3	2-е движение Редемейстера с антипараллельными нитями . . .	92
9.7.4	“Параллельное” 3-е движение Редемейстера	93
9.7.5	“Антипараллельное” 3-е движение Редемейстера	95
9.7.6	Все виртуальные движения Редемейстера	96
9.8	Полиномы ХОМФЛИ-ПТ для простейших виртуальных узлов	99

10 Метод эволюции	102
10.1 Примеры применения метода эволюции	104
10.1.1 Полиномы двухнитевых узлов	104
10.1.2 3-нитевые торические узлы и зацепления	107
10.1.3 Скрученные узлы	107
10.1.4 Двухнитевые зацепления с антипараллельной косой	112
10.1.5 Двойная коса	113
10.2 Метод эволюции для скобки Кауффмана	119
10.2.1 Цепочка $\mathcal{R}$ -матриц	120
11 Дифференциальное разложение	122
11.1 Дифференциальное разложение для двухкомпонентных зацеплений .	125
11.2 Трехкомпонентные зацепления	126
12 Топологический квантовый компьютер	128
12.1 Универсальные вентили и алгоритм Соловая-Китаева	129
12.2 $\mathcal{R}$ -матрицы в качестве квантовых вентилях	131
12.3 Квантовые вентили из $\mathcal{R}$ -матриц	132
13 Заключение	135

Глава 1

Введение

Большинство задач современной теоретической и математической физики так или иначе связаны с понятием квантовой теории поля. Квантовая теория поля, полученная в результате слияния квантовой механики и классической теории поля, описывает вероятностные процессы в системах, содержащих поля. Формализм квантовой теории поля подразумевает, как и в квантовой механике, рассмотрение вероятностей процессов и конфигураций поля в пространстве.

Из квантовой механики квантовой теорией поля было унаследовано понятие наблюдаемых, то есть таких величин, которые можно наблюдать, измерить в данной теории. Также при решении конкретных задач могут возникать и ненаблюдаемые величины, которые может быть удобно использовать, как промежуточные результаты в решении всей задачи, но они обычно не являются инвариантными относительно симметрий теории и их невозможно измерить. Наблюдаемые в теории соответствуют средним значениям некоторых операторов, связанных с измеряемой величиной.

Основной подход квантовой теории поля состоит в описании свойств таких средних значений. Особый интерес по этой причине составляют зависимости таких средних от различных параметров – как от самого оператора, для которого вычисляется среднее значение, так и от параметров теории – структуры пространства, калибровочной группы, констант связи и других параметров. Еще одна сложность при вычислении средних значений заключается в том, что основной способ их описания позволяет находить такие средние значения только пертурбативным образом, например, с помощью диаграмм Фейнмана. Это значит, что некоторые параметры в теории

считаются малыми, и наблюдаемые вычисляются с помощью теории возмущений по таким параметрам.

Некоторые квантовые эффекты известны как непертурбативные явления. Такие явления возникают уже в квантовой механике, например эффект Ааронова-Бома [1, 2], и их гораздо больше в калибровочной теории поля [3, 4, 5]. Преимущество таких точно вычисляемых наблюдаемых состоит в том, что выражения для таких величин, в отличие от ряда теории возмущений, четко определены, и, следовательно, доступны для тщательного и подробного анализа. С другой стороны, есть важные наблюдаемые явления, включая конфайнмент в квантовой хромодинамике [6], которые, вероятно, можно понять при изучении непертурбативных эффектов. Изучение этих эффектов привело к появлению нескольких новых типов теорий, таких как теория Зайберга-Виттена [7, 8] и конформная теория поля [9, 10], где непертурбативные эффекты играют решающую роль.

Достаточно важным классом таких непертурбативных теорий являются так называемые топологические теории поля [11]. Они представляют собой особый класс квантовых теорий поля, где наблюдаемые, например, амплитуды, не подвержены влиянию небольших возмущений, и в этом смысле являются топологическими инвариантами. Развитие теорий этого типа привело к изучению различных топологических объектов. Самый прямой способ применить квантовую теорию поля для изучения топологических объектов - это построить квантовую теорию поля с действием, которое в некотором смысле является полной производной, так что соответствующая статистическая сумма

$$\mathcal{Z} = \int_{\mathcal{M}'} [DA] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[A]} \quad (1.1)$$

остается постоянной при гладких деформациях многообразия $\mathcal{M}$ [12]-[15]. Такая статистическая сумма может быть довольно сложной для сложного многообразия с нетривиальными топологическими свойствами (например, см. [16]). Еще один случай, интересный для изучения, получается при рассмотрении очень простого многообразия, например, сферы, но зато с добавлением в интеграл (1.1) некоторой дополнительной структуры. Для калибровочной топологической теории поля одним из

интересных вариантов является вставка в интеграл вильсоновского среднего [17],

$$\langle W^{\mathcal{K}} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{M}'} [D\mathcal{A}] \text{Tr} \text{Pexp} \left(\oint_{\mathcal{K}} \mathcal{A} dx \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[\mathcal{A}]} \quad (1.2)$$

Вильсоновское среднее – это среднее значение петли Вильсона, упорядоченной вдоль контура экспоненты от интеграла связности $\mathcal{A}$ по замкнутому контуру $\mathcal{K}$.

Такие наблюдаемые в топологической теории особенно интересны из-за того, что они не зависят от координат и метрики пространства, а зависит только от конфигурации пространства, контура и параметров теории. Таким образом, рассмотрение таких наблюдаемых позволяет рассмотреть зависимости наблюдаемых именно от калибровочной группы, ее представлений и константы связи в отрыве от конкретных точек в пространстве. Такие вильсоновские средние встречаются уже при описании некоторых эффектов в четырехмерных теориях, таких как уже упоминавшиеся выше эффект Ааронова-Бома и конфайнмент. Однако, в четырехмерном случае для существования нетривиальных контуров необходимо наличие в пространстве особенностей или источников. В трехмерной теории существуют нетривиальные контуры даже в отсутствие особенностей и источников. Это связано с существованием в трехмерном пространстве узлов и зацеплений – нетривиальных вложений одной или нескольких окружностей в трехмерное пространство.

Таким образом даже для топологически тривиального многообразия можно рассматривать нетривиальное вложение контура $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}$. Это вложение можно охарактеризовать соответствующим средним значением петли Вильсона. Естественной теорией для рассмотрения топологически инвариантных наблюдаемых в трехмерном пространстве является трехмерная топологическая калибровочная теория, называемая трехмерной теорией Черна-Саймонса [18]. Эта теория определяется посредством кубического действия

$$\mathcal{S}_{CS} = \int_{\mathcal{M}} \frac{k}{4\pi} \text{Tr}_{\text{adj}} \left(\mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} - \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right). \quad (1.3)$$

Интерес к такой теории вызван наличием большого числа связей и дуальностей с другими физическими и математическими теориями. Так, из-за того, что метрика явным образом не входит в действие теории, теория Черна-Саймонса – это естественный кандидат для построения трехмерной квантовой гравитации [19]-[22]. Еще

одно интересное применение теории Черна-Саймонса состоит в построении различных анионных моделей. Анионами в данном случае называются (квази)частицы с отличными от фермионов и бозонов свойствами. Основное отличие заключается в соответствующих таким частицам собственных значениях оператора перестановки. Если для бозонов это собственное значение равно единице, а для фермионов – минус единице, то на пару анионов оператор перестановки может действовать произвольным равным по модулю единице комплексным числом в абелевом случае или же некоторым оператором в неабелевом случае. Такие квазичастицы могут существовать только в двумерных теориях, а их эволюция во времени описывается теорией Черна-Саймонса [23]. На анионных моделях основано и большинство описаний дробного квантового эффекта Холла [24, 25]. Кроме того, состояния, связанные с абелевыми и неабелевыми анионами топологичны. Опираясь на это свойство, с помощью анионов предлагается построить топологический квантовый компьютер [26]. Основная особенность топологического квантового компьютера состоит в топологичности его состояний и, соответственно, в малой вероятности возникновения случайных ошибок. По этой причине, построение такого квантового компьютера имеет большую практическую значимость для реализации эффективных квантовых вычислений.

Вильсоновские средние $\langle W_Y^K \rangle_{CS(N,k)}$ в теории Черна-Саймонса определяются для узла K в теории Черна-Саймонса с константой связи k и петлей Вильсона, несущей представление Y калибровочной группы $SU(N)$. Узлом в данном случае называется вложение окружности S^1 в трехмерное пространство (см. Рис.1.1), в качестве которого выступает обычно S^3 . Кроме того можно также рассматривать и зацепления, то есть вложение нескольких окружностей в трехмерное пространство, которые могут быть запутаны друг с другом. В этом случае, каждая из окружностей может нести свое представление Q_i .

Непосредственно с такими вильсоновскими средними связаны конформные блоки в теории Весса-Зумино-Новикова-Виттена [27]-[38]. Эта связь обусловлена тем, что 3-шар с несколькими проколами на границе можно сопоставить состоянию, отвечающему конформной корреляционной функции или конформному блоку (ее голоморфной части) в конформной теории поля на границе этого шара. Эти проколы соответствуют пересечениям такого 3-шара и контура петли Вильсона, вложенной в

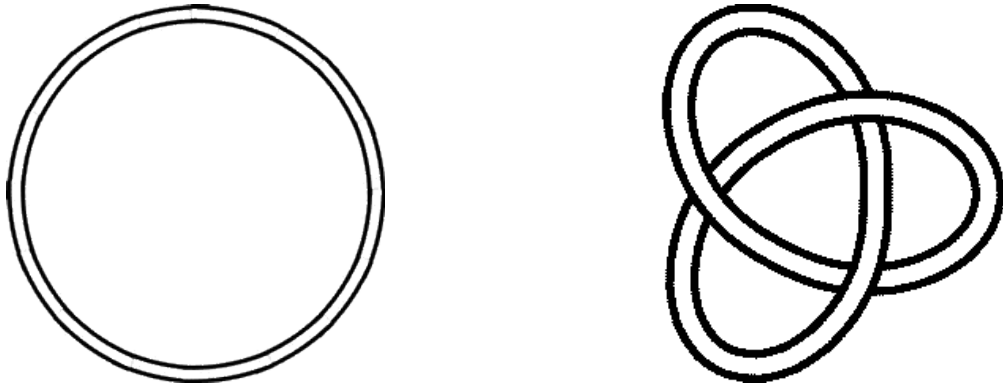


Рис. 1.1: Примеры простейших узлов – неузла (слева) и трилистника (справа).

трехмерное пространство. Вильсоновское среднее, таким образом, можно рассматривать как эволюцию конформного блока, а различные операторы, с помощью которых можно строить вильсоновские средние можно связать с конкретными преобразованиями конформных блоков.

Наибольший интерес в контексте данной диссертации представляет связь между трехмерной теорией Черна-Саймонса и теорией узлов [27]. Теория узлов в математике изучает свойства различных узлов и зацеплений. Одна из основных задач математической теории узлов состоит в том, чтоб научиться отличать узлы друг от друга. Для этого удобнее всего использовать различные инварианты узлов. Инварианты узлов – это функции от узла или от диаграммы узла – проекции узла на плоскость с сохранением информации о том, какая нить проходила выше, а какая ниже. Такие функции не должны меняться при преобразованиях пространства или проекции, не меняющих узел. Одна из основных целей математической теории узлов состоит в построении полных инвариантов узлов, то есть таких функций, которые различны, если узлы различны.

С точки зрения связи с теорией Черна-Саймонса наиболее интересны инварианты двух типов – полиномиальные и инварианты конечного типа. И те, и другие можно получить из теории Черна-Саймонса с помощью различных подходов. При вычислении вильсоновских средних с помощью функционального интеграла в теории следует зафиксировать калибровку. При выборе голоморфной калибровки функциональный интеграл для вильсоновского среднего [36]-[41] сводится к интегралу Концевича [42]. Этот интеграл описывает пертурбативное разложение по обратной константе свя-

$$A \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \mathcal{K} \end{array} - A^{-1} \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \mathcal{K}' \end{array} = (q - q^{-1}) \begin{array}{c} \nearrow \\ \mathcal{K}'' \end{array}$$

Рис. 1.2: Скейн-соотношения в топологическом оснащении (см. раздел 5.1).

зи (уровню теории Черна-Саймонса) $4\pi i/(k + N)$ для вильсоновского среднего, а различные вклады в этом пертурбативном разложении описываются инвариантами Васильева [43, 44] – инвариантами конечного типа.

Другой подход, развитие которого описано в диссертации, состоит в вычислении вильсоновских средних во временной калибровке $\mathcal{A}_0 = 0$. Как было показано Э. Виттенем [27], вильсоновские средние в теории Черна-Саймонса на многообразии S^3 с калибровочной группой $SU(2)$ равны цветным полиномам Джонса. Полиномы Джонса – одни из полиномиальных инвариантов узлов, а их раскраска (цвет) соответствует представлениям, которые несет петля Вильсона. Это утверждение можно обобщить на случай калибровочной группы $SU(N)$ с произвольным N – в этом случае полиномы Джонса следует заменить полиномами ХОМФЛИ-ПТ [45].

Полиномы Хосте-Окнеану-Милле-Фрейда-Ликориша-Йеттера-Пржтицкого-Трачука (ХОМФЛИ-ПТ) [46, 47] исходно определялись для фундаментального представления с помощью скейн-соотношений. Эти соотношения определены для диаграммы узла, они связывают между собой полиномы трех узлов и зацеплений, в которых некоторое пересечение заменено тремя способами. Эти соотношения, см. Рис.1.2, устанавливают связи между полиномами различных узлов и позволяют их построить, а точнее свести к полиному тривиального узла – неузла, см. Рис.1.1.

Полиномы ХОМФЛИ-ПТ, вычисленные с помощью соотношений на Рис. 1.2, зависят от переменных A и q . При рассмотрении узлов, а не зацеплений, и выборе полинома неузла равным единице, ХОМФЛИ-ПТ – это лорановы полиномы от переменных A и q . С точки зрения связи между теорией Черна-Саймонса и теорией узлов, эти переменные связаны с параметрами теории, а вильсоновские средние равны полиномам ХОМФЛИ-ПТ:

$$\langle W^{\mathcal{K}} \rangle_{CS(N,k)} = H^{\mathcal{K}} \left(A = q^N, \quad q = e^{\frac{2\pi i}{k+N}} \right). \quad (1.4)$$

Скейн-соотношения не работают для цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ, то есть тех, которые отвечают вильсоновским петлям, несущим старшие представления калибровочной группы. В принципе скейн-соотношения существуют и для старших представлений, цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ, но такие соотношение заметно сложнее, и их нельзя использовать для вычисления полиномов произвольных узлов и зацеплений [48]. Так, для простейшего симметрического представления группы $SU(N)$, связанного с диаграммой Юнга [2], эти соотношения устроены как

$$\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) - \frac{q^6 - q^2 + 1}{A^2 q^4} \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) + q^{-4} A^{-6} \left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \swarrow \nearrow \end{array} \right) = \frac{q^6 - q^4 + 1}{A^4 q^6} \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) \quad (1.5)$$

Наличие четвертого слагаемого в этом соотношении не позволяет выразить полином любого узла через полином неузла.

Большинство методов, позволяющих рассматривать старшие представления, базируются на алгебрах Гекке и квантовых группах [49]-[56]. В таких подходах с каждой компонентой зацепления связывают векторное пространство V , отвечающее представлению, которое несет данная компонента. Основной метод, который позволяет определить цветные полиномы узлов, пользуясь только скейн-соотношениями – это метод каблирования [57]-[61]. Он основан на том, что старшие представления вкладываются в тензорные степени фундаментального представления. Таким образом вместо полинома узла в старших представлениях можно вычислять полином в фундаментальном представлении, но связанный с узлом в котором нить заменена на “кабель” – несколько параллельных нитей.

Другой подход был предложен Н. Решетихиным и В. Тураевым [62]-[65]. Согласно такому подходу, пересечениям в узле можно сопоставить универсальную квантовую $\mathfrak{R}$ -матрицу. Этот подход будет подробнее рассмотрен в Главе 4. Квантовую $\mathfrak{R}$ -матрицу можно найти для различных групп и представлений и такой подход дает принципиальную возможность определить и вычислить цветные полиномы ХОМФЛИ-ПТ узлов [66]-[69] и полицветные полиномы зацеплений [70]-[73], то есть такие, разным компонентам которых соответствуют разные представления. Также такое определение цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ позволяет связать полиномы с квантовы-

ми группами [80]. $\mathfrak{R}$ -матричные подходы позволяют получить также и вильсоновские средние, связанные с другими калибровочными группами. Так для группы $SO(N)$ они равны полиномам Кауффмана [52], и такие полиномы также можно построить, используя соответствующую квантовую $\mathfrak{R}$ -матрицу [74, 75], как и полиномы, связанные с исключительными группами [76]. Более того вариации такого подхода применимы и к предложенным в [77] универсальным алгебрам, обобщающим различные алгебры Ли и позволяют найти соответствующие универсальные полиномы узлов [78, 79].

В диссертации описано дальнейшее развитие подхода Решетихина-Тураева (РТ). Универсальная квантовая $\mathfrak{R}$ -матрица действует на произведении двух векторных пространств, связанных с двум представлениями калибровочной группы. В диссертации предлагается вместо универсальной квантовой $\mathfrak{R}$ -матрицы использовать $\mathcal{R}$ -матрицу, действующую на старших векторах неприводимых представлений, возникающих в тензорном произведении двух сплетаемых $\mathfrak{R}$ -матрицей представлениях. С помощью такого подхода оказывается возможным представить полиномы ХОМФЛИ-ПТ в виде разложения по характерам. Коэффициенты разложения можно вычислить с использованием диагональных $\mathcal{R}$ -матриц и матриц Рака ($6-j$ символов) квантовых групп. Собственные значения диагональных $\mathcal{R}$ -матриц устроены как степени параметра q из (1.4) и могут быть легко вычислены. Таким образом, основная сложность состоит в вычислении матриц Рака квантовых групп.

В диссертации рассмотрены различные подходы к вычислению матриц Рака. Первый подход, рассмотренный в диссертации позволяет напрямую вычислить матрицы Рака. Этот метод основан на применении свойств квантовых групп для непосредственного вычисления векторов старшего веса представлений, связанных друг с другом матрицей Рака. Выражения для старших векторов позволяют непосредственно найти матрицу Рака, как матрицу поворота между двумя базисами в пространстве неприводимых представлений.

Второй подход основан на рассмотрении уравнения Янга-Бакстера, как уравнения на матрицу Рака. Уравнение Янга-Бакстера можно записать, как уравнение связывающее диагональную $\mathcal{R}$ -матрицу и матрицу Рака U :

$$\mathcal{R}URU^\dagger\mathcal{R} = URU^\dagger\mathcal{R}URU^\dagger. \quad (1.6)$$

Такое уравнение связывает между собой матрицу Рака и собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы. Это позволяет сформулировать в диссертации гипотезу о собственных значениях:

Если у двух $\mathcal{R}$ -матриц совпадают наборы нормированных собственных значений, то соответствующие им матрицы Рака также будут совпадать.

Применение этой гипотезы позволяет получить выражения для всех матриц Рака размера до 5×5 , связанных с вычислением полиномов узлов. В случае зацеплений разным нитям могут соответствовать различные представления, что сильно усложняет вычисление матриц Рака и применение гипотезы о собственных значениях. Кроме того, применение гипотезы о собственных значениях позволяет найти все матрицы Рака, связанные с 3-нитевыми косами в симметрических представлениях. Такие матрицы Рака, как можно показать с использованием гипотезы, равны матрицам Рака квантовой группы $U_q(sl_2)$, для которых известно выражение в общем виде [115].

Также в диссертации рассмотрен подход, связанный с двух-мостовыми узлами. Такой подход имеет непосредственное отношение к дуальности между теорией Черна-Саймонса и конформной теорией поля. В таком подходе рассматриваются 4-нитевые косы, но за счет специального способа замыкания косы, из всех неприводимых представлений остается только тривиальное представление. В диссертации предложено обобщение такого подхода на древоподобные узлы. Если двух-мостовые косы не замыкать с одной или двух сторон, то из операторов, соответствующих таким косам можно построить древоподобные узлы и вычислить соответствующие полиномы. Кроме того оператор, соответствующей древоподобной диаграмме можно также вставить и в косу, что позволяет описать очень большой набор узлов.

Все узлы и вильсоновские средние в теории Черна-Саймонса, обсуждавшиеся выше связаны с вложениями контуров в пространства тривиальной топологии. Однако, интерес представляют также и узлы в более сложных пространствах. Один из способов такого обобщения был предложен Л. Кауффманом [82]. Согласно этому обобщению, можно рассматривать узлы в особом классе трехмерных пространств – в толстых двумерных поверхностях. Такие узлы носят название виртуальных. И в таких узлах появляется особый класс виртуальных (стерильных) пересечений, кото-

рый связаны с прохождением нитей в разных участках толстой двумерной поверхности. Наличие таких пересечений не позволяет использовать $\mathcal{R}$ -матрицы подходы и скейн-соотношения для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ, связанные с такими узлами. В диссертации предложен метод гиперкуба, который позволяет определить и вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ таких узлов в фундаментальном представлении.

Описанные в диссертации методы позволяют получить выражения для большого числа цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ различных узлов. Полученные ответы позволяют изучить различные свойства вильсоновских средних. В диссертации описано построение дифференциального разложения для полиномов узлов и зацеплений. Такое разложение связано со свойствами представлений квантовых групп. Так как полиномы ХОМФЛИ-ПТ непосредственно связаны с этими представлениями, их свойства также отражают эту связь. И ее можно явно увидеть, описав дифференциальное разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ.

Кроме того вычисление цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ позволяет рассмотреть также различные связи между теорией Черна-Саймонса и другими теориями. В число таких теорий попадает топологическая теория струн. Согласно работам Лабастидо-Марино-Оогури-Вафы, если рассмотреть производящую функцию полиномов ХОМФЛИ для узла

$$Z^K = \sum_Q S_Q \{p_k\} \mathcal{H}_Q^K(A, q), \quad (1.7)$$

и построить от нее плетистический логарифм:

$$\log Z_{SU}^K \{A, q | \bar{p}\} = \sum_Q \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} f_Q^K(A^d, q^d) \cdot \widehat{Ad}_d S_Q \{\bar{p}\} \quad (1.8)$$

где $\widehat{Ad}_d$ – операция Адамса, заменяющая $p_k \rightarrow p_{kd}$, то функции $f_Q^K(A, q)$ обладают специальным разложением:

$$f_Q(q, A) = \sum_{n,k \geq 0, Q} C_{RQ} \mathbf{N}_{Q,n,k} A^n (q - q^{-1})^{2k-1}. \quad (1.9)$$

Числа $\mathbf{N}_{Q,n,k}$ в этом разложении – целые и связаны с числом БПС-состояний топологической теории струн [84]-[91]. Для проверки и изучения таких связей необходимы полиномы ХОМФЛИ-ПТ, окрашенные старшими представлениями, которые можно найти с помощью подходов, описанных в диссертации.

1.1 Содержание работы

Во **введении** кратко рассмотрены основные свойства и определения трехмерной теории Черна-Саймонса. Также описаны связи между этой теорией, теорией узлов и другими теориями. Так, в работах Э. Виттена было показано, что вильсоновские средние теории Черна-Саймонса с калибровочной группой $SU(2)$ равны полиномам Джонса. Это утверждение было позже обобщено на другие полиномы – ХОМФЛИ-ПТ для калибровочной группы $SU(N)$ и полиномы Кауффмана для калибровочной группы $SO(N)$.

В **главе 2** рассмотрены основные свойства и понятия математической теории узлов. Эта теория занимается изучением узлов – вложений окружностей в трехмерное пространство. В контексте данной работы в первую очередь интересны полиномиальные инварианты узлов, равные вильсоновским средним теории Черна-Саймонса. В диссертации преимущественно рассматриваются свойства и методы вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Фундаментальные полиномы ХОМФЛИ-ПТ определены посредством скейн-соотношений, связывающих между собой полиномы трех узлов, в которых одно пересечение заменено тремя способами:

$$\mathcal{K} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}, \quad \mathcal{K}' \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \nwarrow \end{array}, \quad \mathcal{K}'' \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right). \quad (1.10)$$

В **разделе 2.1** определены виртуальные узлы. Виртуальные узлы, предложенные Л. Кауффманом, – это один из возможных способов обобщения теории узлов на пространства топологии отличной от S^3 . Эти узлы описывают вложение окружностей в особый класс трехмерных пространств – толстые двумерные поверхности. Диаграммы таких узлов обладают дополнительным типом пересечений – виртуальными пересечениями, со своими свойствами. Для таких узлов неприменимо большинство стандартных методов вычисления полиномов узлов.

В **главе 3** рассмотрены основные понятия и свойства квантовых групп. Квантовые группы это квантовая деформация универсальной обертывающей алгебры. Квантовые группы обладают деформированными коммутационными соотношениями и, что в особенности важно в контексте диссертационной работы, деформированным копроизведением. Такое копроизведение для генераторов квантовой группы

зависит от параметра деформации q и устроено как

$$\begin{aligned}\Delta(E_i) &= E_i \otimes q^{h_i} + 1 \otimes E_i, \\ \Delta(F_i) &= F_i \otimes 1 + q^{-h_i} \otimes F_i, \\ \Delta(h_i) &= h_i \otimes 1 + 1 \otimes h_i.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Несмотря на такую деформацию, представления квантовых групп схожи с их классическими аналогами при $q = 1$.

В **главе 4** рассмотрен классический формализм Решетихина-Тураева для вычисления вильсоновских средних и полиномов узлов, предложенный в [63]. Этот формализм использует понятие универсальной квантовой $\mathcal{R}$ -матрицы (4.1). Такая $\mathcal{R}$ -матрица – это деформация оператора перестановки, которая коммутирует с копроизведением квантовых групп. Для вычисления полиномов узлов каждому пересечению на диаграмме узла – проекции узла на двумерную плоскость, соответствует $\mathcal{R}$ -матрица.

Также в данном разделе описана весовая матрица $\mathcal{M}$, которая соответствует изменению направления нити и необходима для топологической инвариантности ответа. Полиномы узлов можно вычислить с помощью свертки всех $\mathcal{R}$ -матриц и весовых матриц, связанных с элементами диаграммы узла.

В **главе 5** описан метод вычисления полиномов узлов для представления узла в виде косы. Для этого применяется $\mathcal{R}$ -матрица в пространстве сплетающих операторов. При этом рассматривается разложение полиномов ХОМФЛИ-ПТ по характеристам. Это разложение позволяет разделить зависимости от группы $SU(N)$ и от узла. Таким образом, полиномы, которые получаются с помощью таких методов вычисления зависят от переменной $A = q^N$, то есть сразу для любой группы $SU(N)$.

В **разделе 5.1** рассмотрены свойства диагональных $\mathcal{R}$ -матриц. Описаны собственные значения таких матриц. В том числе обсуждается зависимость этих собственных значений от обрамления узла.

В **разделе 5.2** описана связь между $\mathcal{R}$ -матрицами и матрицами Рака квантовых групп. Матрицы Рака позволяют изменять базис в пространстве неприводимых представлений в произведении представлений, связанных с нитями косы. $\mathcal{R}$ -матрицы, соответствующие пересечению различных нитей в косе связаны друг с

другом матрицами Рака. Описано, какие матрицы Рака соответствуют таким связям для различных $\mathcal{R}$ -матриц.

В разделе 5.3 описан общий вид $\mathcal{R}$ -матриц связан с кривой Любова ширины в фундаментальном представлении. Такие $\mathcal{R}$ -матрицы блочно-диагональны и содержат только блоки 2×2 и 1×1 . Описано, как и почему такая матрица устроена, где в ней находятся такие блоки и какая форма у этих блоков. Эти матрицы позволяют вычислить полиномы ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении для любого узла.

В главе 6 описаны определения и свойства $3-j$ и $6-j$ символов. Эти функции описывают разложение тензорных произведений представлений в суммы неприводимых представлений. В частности, $6-j$ символы или коэффициенты Рака описывают переходы между различными базисами в пространствах неприводимых представлений.

В разделе 6.1 приведено известное выражение для матриц Рака квантовой группы $U_q(sl_2)$.

В разделе 6.2 изложен метод вычисления коэффициентов Рака квантовых групп. Основной метод прямого вычисления состоит в построении старших векторов представлений, входящих в $6-j$ символы. Это позволяет получить их значения в явном виде. Для этого используется явный вид генераторов квантовой группы и копроизведение квантовой группы.

В Главе 7 высказана гипотеза о собственных значениях. Согласно этой гипотезе, матрицы Рака зависят только от набора нормированных собственных значений соответствующей $\mathcal{R}$ -матрицы. Эта гипотеза базируется на рассмотрении уравнения Янга-Бакстера, как уравнения на матрицу Рака. Также приведены решения этого уравнения для матриц размера до 5×5 .

В разделе 7.1 рассмотрено как гипотезу о собственных значениях можно применить к вычислению матриц Рака, связанных с симметрическими представлениями. С помощью гипотезы о собственных значениях такие матрицы Рака можно свести к известным матрицам Рака квантовой группы $U_q(sl_2)$.

В разделе 7.2 рассмотрено как гипотеза о собственных значениях работает для матриц Рака квантовой группы $U_q(sl_2)$.

В разделе 7.3 рассмотрена модификация гипотезы о собственных значениях для

4-нитевых кос. При этом матрица Рака определяется уже не решением уравнения Янга-Бакстера, а решением уравнения коммутации несоседних $\mathcal{R}$ -матриц.

Глава 8 посвящена рассмотрению 2-мостовых и древоподобных узлов. 2-мостовые узлы получаются специальным замыканием четырехнитевой косы. Такое замыкание косы соответствует тому, что полином ХОМФЛИ-ПТ равен матричному элементу произведения $\mathcal{R}$ -матриц в косе. Этот матричный элемент соответствует проекции на тривиальное представление в левом и правом концах косы. По этой причине из произведения представлений, связанных со всеми четырьмя нитями в косе нужно рассматривать только тривиальное представление. Это соответствует особому выбору матриц Рака и $\mathcal{R}$ -матриц. Эти матрицы также описаны в данном разделе.

В **разделе 8.1** описано, как подход для вычисления 2-мостовых узлов можно применить к более сложным узлам. Если 2-мостовую косу обрезать с одной или двух сторон, то такие объекты можно соединить друг с другом и получить так называемые древоподобные узлы. Полиномы для таких узлов можно получить используя те же $\mathcal{R}$ -матрицы и матрицы Рака, которые используются для вычисления полиномов двухмостовых узлов.

В **разделе 8.2** обсуждаются узлы-мутанты. Узлы-мутанты – это узлы, которые связаны операцией мутации, и полиномы таких узлов в симметрических представлениях совпадают. Используя подход древоподобных узлов оказывается возможным вычислить полиномы для некоторых пар узлов-мутантов в представлении $[2,1]$ и найти разницы между ними. Также в этом разделе приведены полиномы для самой известной пары мутантов – узлов Киношиты-Терасаки и Конвея.

В **главе 9** изложен метод гиперкуба для вычисления фундаментальных полиномов ХОМФЛИ-ПТ. Этот метод не использует понятия $\mathcal{R}$ -матрицы, вместо этого он основан на построении разрешений узла – замене пересечений на отсутствие пересечений.

Раздел 9.1 посвящен методу вычисления полиномов Джонса обычных и виртуальных узлов, предложенному Л. Кауффманом. Этот метод основан на разрешении

пересечений вместо их замены на противоположные, как в скейн-соотношениях (2.1):

$$\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} \right. - q \begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \end{array} \quad (1.12)$$

В результате узел превращается в набор окружностей, которые не пересекаются друг с другом в случае обычных узлов и имеют только виртуальные пересечения для виртуальных узлов. Эти окружности называются циклами Сейферта. Каждому циклу Сейферта соответствует квантовая размерность фундаментального представления квантовой группы $SU(2)$ равная

$$S_{[1]}^*(A = q^2, q) = \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} \equiv [2]_q. \quad (1.13)$$

Это позволяет построить полиномы Джонса в фундаментальном представлении как для обычных, так и для виртуальных узлов.

В **разделе 9.2** предложено обобщение этого подхода на полиномы ХОМФЛИ-ПТ. Для этого вместо (1.12) предлагается использовать

$$\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} \right. - q \left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - \begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \otimes \begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \end{array} \quad (1.14)$$

При этом получается гиперкуб разрешений узла. Каждой вершине этого гиперкуба соответствует некоторая квантовая размерность.

Разделы 9.3-9.6 посвящены вычислению квантовых размерностей в вершинах гиперкуба. Для таких вычислений можно применять соотношения связанные с движениями Редемейстера. Каждому движению Редемейстера соответствует условия на размерности. Это позволяет найти все такие квантовые размерности и построить соответствующие полиномы ХОМФЛИ-ПТ для обычных и виртуальных узлов.

Раздел 9.7 посвящен доказательству топологической инвариантности метода гиперкуба.

Глава 10 посвящена описанию метода эволюции. Этот метод основан на подходе Решетихина-Тураева. Каждому пересечению отвечают $\mathcal{R}$ -матрицы, а комбинации

пересечений их произведения. Если описать некоторую серию узлов, которая получается повторением определенного фрагмента, то полиномы для такой серии связаны с собственными значениями фрагмента

$$H^k = \sum_i \lambda_i^k C_i. \quad (1.15)$$

Если известны “начальные условия” эволюции – несколько полиномов из серии, то можно вычислить коэффициенты в выражении (1.15). Таким образом можно получить полиномы для всей серии, зная полиномы для нескольких узлов из серии.

В разделе 10.1 рассмотрены различные примеры применения метода эволюции.

Раздел 10.3 посвящен применению метода эволюции к скобке Кауффмана.

Глава 11 посвящена рассмотрению еще одного свойства цветных полиномов ХОМФЛИ-ПТ, отражающего их связь с представлениями квантовых групп. Это свойство называется дифференциальным разложением. Так как полином ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении должен быть равен единице при $A = q$, так как это соответствует вычислению в абелевой теории Черна-Саймонса, для него можно написать дифференциальное разложение. С учетом аналогичного свойства при $A = q^{-1}$ это разложение устроено как:

$$H_{[1]}^{\mathcal{K}}(A, q) = 1 + (Aq - A^{-1}q^{-1})(Aq^{-1} - A^{-1}q)F_1^{\mathcal{K}}(A, q). \quad (1.16)$$

Условия такого вида можно записать и для других представлений, обобщая дифференциальное разложение на старшие представления. В разделах 11.1 и 11.2 рассмотрены дифференциальные разложение для зацеплений.

Глава 12 посвящена описанию связи теории Черна-Саймонса и топологического квантового компьютера и описано, как $\mathcal{R}$ -матрицы и матрицы Рака двухмостовых узлов в фундаментальном представлении можно применять в качестве универсальных однобитных операций в квантовом компьютере.

В заключении приведены основные результаты диссертации.

1.2 Основные результаты

Результаты, выносимые на защиту диссертации:

1. Построены универсальные методы вычисления вильсоновских средних в произвольном представлении группы $SU(N)$.
2. Построен метод вычисления фундаментальных полиномов ХОМФЛИ виртуальных узлов – обобщения теории Черна-Саймонса на пространства другой топологии.
3. Построены матрицы Рака, пригодные для вычисления полиномов ХОМФЛИ в фундаментальном представлении для кос с 3-7 нитями.
4. Построены матрицы Рака, пригодные для вычисления полиномов ХОМФЛИ во всех симметрических и антисимметрических представлениях для кос с 3 нитями.
5. Предложена гипотеза собственных значений о выражении коэффициентов Рака 3-х и 4-нитевой косы через собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы.
6. Предложен метод эволюции для вычисления полиномов серий узлов.
7. Построены ответы для симметрических полиномов ХОМФЛИ скрученных узлов и узлов, связанных с двойной косой.
8. Построены выражения в произвольных симметрических представлениях для зацеплений Хопфа, Уайтхеда и колец Борромея.
9. Построен метод вычисления цветных полиномов для древовидных узлов.
10. Построены полиномы узлов-мутантов Киношита-Терасаки в представлении [2,1].
11. Построен метод для вычисления фундаментальных полиномов виртуальных узлов.
12. Построены выражения для фундаментальных полиномов ХОМФЛИ двухнитевых и твистованных виртуальных узлов.
13. Построена матричная модель для классических размерностей в вершинах гиперкуба для виртуальных узлов.

14. Построен метод вычисления квантовых размерностей в вершинах гиперкуба для виртуальных узлов.
15. Предложена система независимых размерностей, входящих в выражения для полиномов виртуальных узлов.
16. Описано, как применять квантовые R-матрицы и матрицы Рака в качестве универсальных вентилях в однокубитном квантовом компьютере.
17. Описано дифференциальное разложение для полиномов узлов и зацеплений, которое отражает групповые свойства полиномов ХОМФЛИ-ПТ.

1.3 Основные публикации

1. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid // JHEP (2012), **03**, 034, arXiv:1112.2654.
2. H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Character expansion for HOMFLY polynomials. III. All 3-Strand braids in the first symmetric representation // Int. J. Mod. Phys. A (2012), **27**, 1250099, arXiv:1204.4785.
3. H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Eigenvalue hypothesis for Racah matrices and HOMFLY polynomials for 3-strand knots in any symmetric and antisymmetric representations // Int. J. Mod. Phys. A (2012), **28**, 1340009, arXiv:1209.6304.
4. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Evolution method and “differential hierarchy” of colored knot polynomials // AIP Conf. Proc. (2013), **1562**, 123, arXiv:1306.3197.
5. S. Arthamonov, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Link polynomial calculus and the AENV conjecture // JHEP (2014), **04**, 156, arXiv:1309.7984.
6. A. Morozov, An. Morozov, Ant. Morozov, On possible existence of HOMFLY polynomials for virtual knots // Phys. Lett. B (2014), **737**, 48-56, arXiv:1407.63192.

7. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, On colored HOMFLY polynomials for twist knots // *Mod. Phys. Lett. A* (2014), **29**, 34, 1450183, arXiv:1408.3076.
8. A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov, Towards matrix model representation of HOMFLY polynomials // *Письма в ЖЭТФ* (2014), **100**:4, 297-304, arXiv:1407.3754.
9. L. Bishler, A. Morozov, An. Morozov, Ant. Morozov, Evolution method and HOMFLY polynomials for virtual knots // *Int. J. of Mod. Phys. A* (2015), **30**, 1550074, arXiv:1411.2569;
10. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh, Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams // *JHEP* (2015), **07**, 109, arXiv:1504.00371.
11. A. Morozov, And. Morozov, A. Popolitov, On matrix-model approach to simplified Khovanov–Rozansky calculus // *Phys. Lett. B* (2015), **749**, 309-325, arXiv:1506.07516.
12. A. Morozov, An. Morozov, A. Popolitov, On ambiguity in knot polynomials for virtual knots // *Phys. Lett. B* (2016), **757**, 289-302, arXiv:1511.08242.
13. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, P. Ramadevi, V. K. Singh, Tabulating knot polynomials for arborescent knots // *J. Phys. A: Math. Theor.* (2017), **50**, 085201, arXiv:1601.04199;
14. А. Ю. Морозов, А. А. Морозов, А. В. Пополитов, Матричные модели и размерности в вершинах гиперкубов // *Теоретическая и математическая физика* (2017), **192**:1, 115–163, arXiv:1508.01957.
15. C. Bai, J. Jiang, J. Liang, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, Differential expansion for link polynomials // *Phys. Lett. B* (2018), **778**, 197-206, arXiv:1709.09228;
16. S. Dhara, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, P. Ramadevi, V. K. Singh, Eigenvalue hypothesis for multi-strand braids // *Phys. Rev. D* (2018), **97**, no.12, 126015, arXiv:1711.10952;

17. C. Bai, J. Jiang, J. Liang, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A. Sleptsov, Quantum Racah matrices up to level 3 and multicolored link invariants // J. Geom. Phys. (2018) **132**, 155-180, arXiv:1801.09363 ;
18. D. Melnikov, A. Mironov, S. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Towards topological quantum computer // Nucl. Phys. B (2018), **926**, 491-508, arXiv:1703.00431.
19. A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Tangle blocks in the theory of link invariants // JHEP (2018), **09**, 128, arXiv:1804.07278.
20. H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, A non-torus link from topological vertex // Phys. Rev. D (2018), **98**, 046018, arXiv:1806.01146.
21. D. Melnikov, A. Mironov, S. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, From Topological to Quantum Entanglement // JHEP (2019), **05**, 116, arXiv:1809.04574.
22. N. Kolganov, An. Morozov, Quantum $\mathcal{R}$ -matrices as Universal Qubit Gates // Письма в ЖЭТФ (2020), **111**:9, 623-624, arXiv:2004.07764.

Благодарности

Я выражаю благодарность своим соавторам Х.Авате, А.Александрову, С.Б.Артамонову, Ч.Баю, Л.В.Бишлер, Дж.Джиангу, Дж.Джинтин, С.Дхаре, Х.Итояме, Х.Канно, Н.М.Колганову, Д.Г.Мельникову, А.Д.Миронову, С.А.Миронову, А.А.Морозову, А.Ю.Морозову, А.В.Пополитову, П.Рамадеви, В.К.Сингху, А.С.Слепцову. Также я выражаю признательность за полезные обсуждения и замечания А.С.Анохиной, В.А.Алексееву, А.В.Андрееву, Г.А.Аминову, С.М.Апенко, Э.Т.Ахмедову, А.А.Белавину, Д.В.Васильеву, Д.М.Галахову, А.С.Горскому, И.А.Даниленко, В.В.Долотину, П.И.Дунину-Барковскому, А.А.Жабин, Е.А.Зенкевичу, А.В.Зотову, М.Э.Казаряну, В.В.Киселеву, И.М.Кричеву, А.В.Малютин, А.В.Маршакову, В.В.Мишнякову, С.Навате, Н.А.Немкову, М.А.Ольшанецкому, Т.Е.Панову, И.В.Полюбину, Ф.К.Попову, А.А.Рослomu, В.А.Рубакову, А.В.Смирнову, С.В.Соколову, П.Сулковскому, В.Г.Тураеву, Е.А.Фоминых, С.М.Харчеву, С.М.Хорошкину, Н.С.Целоусову и Ш.Р.Шакирову. Кроме того я благодарен коллективу Института проблем передачи информации РАН

в целом и Лаборатории 16 в частности, коллективу Лаборатории 180 Института теоретической и экспериментальной физики и коллективу Лаборатории математической и теоретической физики за создание уникальной творческой и рабочей атмосферы, продуктивные обсуждения и замечательные семинары.

Я признателен Е.С.Сусловой за помощь и поддержку, оказанную в процессе подготовки этой работы.

Я выражаю свою глубочайшую благодарность Е.А.Салтыковой за неизменную поддержку во всех моих начинаниях.

Глава 2

Теория узлов

Теория узлов – это область математики, изучающая узлы – вложения $S^1 \hookrightarrow S^3$, и зацепления – вложения нескольких S^1 , которые в нетривиальном случае могут быть запутаны друг с другом. Основная цель математической теории узлов состоит в различении и классификации узлов. Ответ на вопрос, совпадают ли два узла друг с другом, то есть возможно ли один из них перевести плавными деформациями и без самопересечений в другой узел нетривиален. Его нетривиальность обусловлена в том числе тем, что в случае положительного ответа на вопрос достаточно описать как один узел преобразовать в другой. В случае же отрицательного ответа необходимого каким-либо образом доказать, что такого способа не существует. В частности, есть пример узлов 10_{161} и 10_{162} в классификации по таблице Рольфсена [92, 93]. Эти узлы долгое время считались различными [94, 92]. Однако, позже был предложен способ, которым один узел можно превратить во второй [95, 96].

Одним из наиболее действенных подходов к задачам теории узлов является рассмотрение так называемых инвариантов узлов. Инвариантами узлов называются такие величины, которые сохраняются при плавных деформациях узлов. Таким образом, если два узла совпадают, то их инварианты должны совпадать. Одна из главных задач современной теории узлов состоит в построении полного инварианта узла – такого инварианта, который различен для различных узлов.

Большинство инвариантов узлов и зацеплений связаны с проекциями узлов и зацеплений на двумерную плоскость. Такая проекция называется диаграммой узла или зацепления. При представлении узла или зацепления его диаграммой сохраняется

информация о типе пересечения, то есть какая нить проходит выше, а какая ниже. Также рассматривается случай общего положения при проекции на плоскость, то есть нет точки на двумерной плоскости, в которой пересекались бы три нити. Чаще всего рассматривают инварианты ориентированных зацеплений, то есть нити сопоставляется некоторое направление вдоль нее, которое обозначается стрелкой на диаграмме зацепления. Некоторые инварианты, такие как, например, полиномы ХОМФЛИ-ПТ, которым в основном посвящена данная диссертация, зависят от ориентации. Две диаграммы узлов отвечают одному узлу в том и только в том случае, если одну диаграмму можно перевести в другую с помощью плавных деформаций и трех движений Редемейстера, см. Рис.2.1.

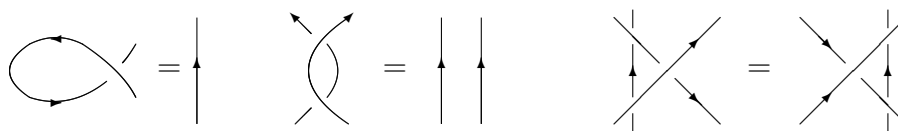


Рис. 2.1: Движения Редемейстера

Рассмотрим некоторые примеры инвариантов узлов. Простейший инвариант узла – это минимальное число пересечений которое может иметь диаграмма данного узла. На этом инварианте основана классификация узлов в таблице Рольфсена [92]. Узлы в этой классификации нумеруются 2 числами X_n , где X – минимальное число пересечений на диаграмме узла, а n – номер узла среди всех узлов с таким минимальным числом пересечений. Это, однако очень слабый и трудновычислимый инвариант узла. Еще один идеологически схожий инвариант узла – индекс косы. Косы – это особый класс диаграмм узлов и зацеплений. Они устроены как набор n параллельных нитей, правые концы которых соединяются с левыми (см. Рис.2.2). Для каждого узла и зацепления можно найти минимальное число нитей в косе, которое требуется для описания зацепления.

Также есть другой способ изображения узлов – в виде диаграммы плетенки. Для этого также рассматривается коса, но ее замыкают по другому – левый конец с левым, а правый конец с правым, см. Рис.2.3. Мы будем рассматривать такие диаграммы узлов в Главе 8.

Очень широкий класс инвариантов, имеющий непосредственное отношение к дан-

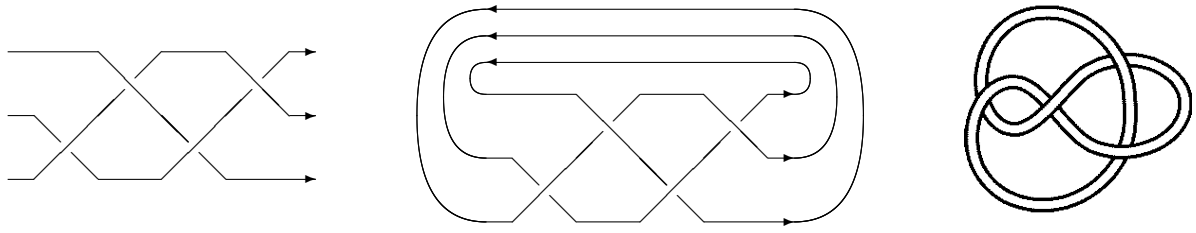


Рис. 2.2: Коса для узла-восьмерки 4_1 . Слева нарисована незамкнутая коса, как мы и будем изображать их в дальнейшем. Посередине нарисовано замыкание косы. Справа изображен узел, для которого нарисована коса.

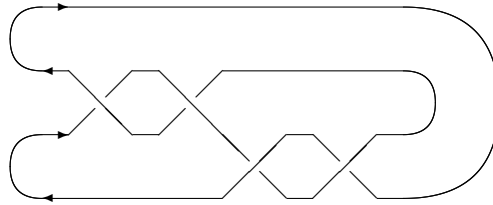


Рис. 2.3: Диаграмма-плетенка для узла-восьмерки 4_1 .

ной работе - это полиномиальные инварианты узлов. В этом случае узлу сопоставляется не число, а некоторый полином. Существуют различные полиномиальные инварианты узлов – полиномы Александера [97], Джонса [50], Кауффмана [52], ХОМФЛИ-ПТ [46, 47].

Полиномиальные инварианты можно определять различными способами. Один из наиболее универсальных подходов был предложен Дж. Конвеем. Этот метод основан на применении так называемых скейн-соотношений, которые связывают между собой полиномы трех зацеплений. Для этого выбирается некоторое пересечение на диаграмме зацепления и заменяется тремя способами:

$$\mathcal{K}^+ \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}, \quad \mathcal{K}^- \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array}, \quad \mathcal{K}^0 \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \nwarrow \end{array} \quad (2.1)$$

Тогда на полиномы трех зацеплений накладывается условие

$$F(P^{\mathcal{K}^+}, P^{\mathcal{K}^-}, P^{\mathcal{K}^0}) = 0. \quad (2.2)$$

В зависимости от выбора функции F можно получить различные инварианты узлов. Отметим, что не любая функция F отвечает какому-то инварианту узлов. Для инвариантности необходимо также, чтобы вне зависимости от способа и порядка решения соотношений на полиномы ответы всегда будут совпадать. В таблице 2.1

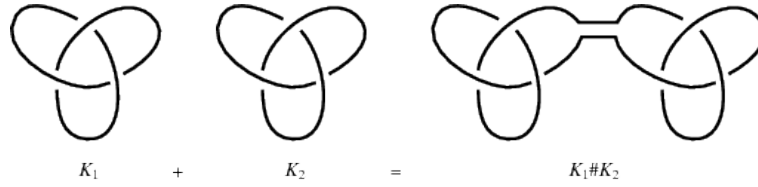


Рис. 2.4: Композиция или сумма двух узлов.

приведены примеры скейн-соотношений, с помощью которых можно вычислить различные инварианты узлов. Также скейн-соотношения позволяют выразить полино-

Полиномы	Скейн-соотношения
Александера	$P^{\mathcal{K}^+}(q) - P^{\mathcal{K}^-}(q) = P^{\mathcal{K}^0}(q - q^{-1})$
Джонса	$q^2 J^{\mathcal{K}^+}(q) - q^{-2} J^{\mathcal{K}^-}(q) = J^{\mathcal{K}^0}(q - q^{-1})$
ХОМФЛИИ-ПТ	$AH^{\mathcal{K}^+}(A, q) - A^{-1}H^{\mathcal{K}^-}(A, q) = H^{\mathcal{K}^0}(A, q)(q - q^{-1})$

Таблица 2.1: Примеры скейн-соотношений для фундаментальных полиномов Александера, Джонса и ХОМФЛИИ-ПТ

мы узлов через полиномы какого-то узла, например, тривиального неузла – незапутанной окружности. От определения полинома неузла зависит общая нормировка полиномов узлов. В диссертации рассматриваются в основном полиномы ХОМФЛИИ-ПТ и их частный случай полиномы Джонса. Мы будем обозначать нормированные полиномы ХОМФЛИИ-ПТ за H , то есть

$$H^{\text{неузла}}(A, q) = H^{\circ}(A, q) = 1. \quad (2.3)$$

Нормированные полиномы обладают важным свойством для композитных узлов. Композитный узел получается, если на одной и той же нитке завязать сначала один узел, а потом второй узел, см. Рис.2.4. Такую операцию также называют суммой узлов. Для композитных узлов выполняется следующее свойство:

$$H^{\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2}(A, q) = H^{\mathcal{K}_1}(A, q)H^{\mathcal{K}_2}(A, q). \quad (2.4)$$

Ненормированные полиномы ХОМФЛИИ-ПТ мы будем обозначать за $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}^{\circ}(A, q) = \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} \equiv \frac{\{A\}}{\{q\}}. \quad (2.5)$$

Такие полиномы обладают важным свойством для объединения двух зацеплений, то есть для двух незацепленных зацеплений в пространстве:

$$\mathcal{H}^{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2}(A, q) = \mathcal{H}^{\mathcal{K}_1}(A, q) \mathcal{H}^{\mathcal{K}_2}(A, q). \quad (2.6)$$

Другой способ задать полиномы узлов, который можно использовать для определения полиномов Кауффмана и Джонса называется скобкой Кауффмана [52]. Она также связывает полиномы различных зацеплений. Для этого пересечение заменяется четырьмя способами:

$$\mathcal{K}^+ \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}, \quad \mathcal{K}^- \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array}, \quad \mathcal{K}^0 \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \nwarrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \nearrow \nwarrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right), \quad \mathcal{K}^= \longleftrightarrow \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}. \quad (2.7)$$

Полиномы Кауффмана задаются, в числе прочих условий, соотношением на такие четыре зацепления:

$$L^{\mathcal{K}^+}(a, z) + L^{\mathcal{K}^-} = zL^{\mathcal{K}^0} + zL^{\mathcal{K}^=}. \quad (2.8)$$

Аналогичное определение можно написать и для полиномов Джонса:

$$\begin{aligned} J^{\mathcal{K}^+}(q) &= qJ^{\mathcal{K}^0} - q^2J^{\mathcal{K}^=}, \\ J^{\mathcal{K}^-}(q) &= q^{-1}J^{\mathcal{K}^0} - q^{-2}J^{\mathcal{K}^=}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.1 Виртуальные узлы

Л. Кауффман предложил подход со скобкой Кауффмана для описания специфического класса узлов – виртуальных узлов [82, 98, 99, 100]. Основная часть данной диссертации в частности, и литературы и научных статей по теории Черна-Саймонса и теории узлов в целом посвящена изучению узлов в пространстве S^3 – пространстве тривиальной топологии. Однако, от топологии пространства могут сильно зависеть свойства теории и ее наблюдаемых. Л. Кауффман предложил рассмотреть особый класс пространств сложной топологии.

Узлы в пространстве S^3 можно рассматривать как диаграммы узлов, или, другими словами, узлы в толстой двумерной сфере $S^2 \otimes I$. Это означает, что рассматриваются проекции узлов на двумерную поверхность, но при этом “толщина” этой поверхности, интервал I , позволяет по прежнему одной нити проходить над другой.

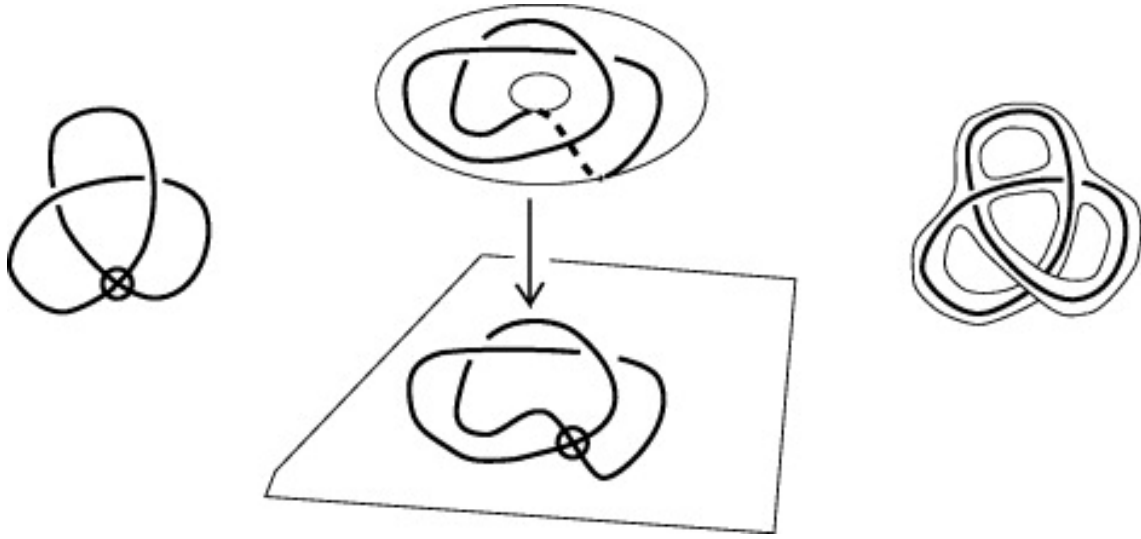


Рис. 2.5: Виртуальный узел-триптик на толстом двумерном торе $T^2 \otimes I$.

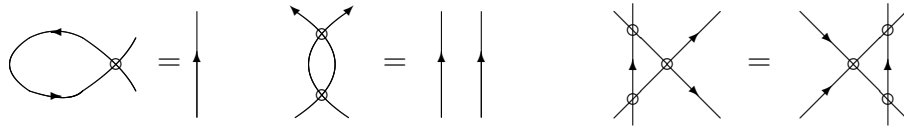


Рис. 2.6: Виртуальные движения Редемейстера

Такая логика позволяет рассмотреть более сложные пространства, заменив S^2 на любую другую двумерную поверхность. При проекции узлов в таких пространствах на плоскость $\mathbb{R}^2$ обычные пересечения, как в (2.1) и (2.7), соответствуют пересечениям в “толщине” поверхности, прохождению нитей в одной точке двумерной поверхности, но на разных уровнях в I . Но также еще существуют пересечения, соответствующие прохождению нитей в разных частях двумерной поверхности, но проецирующиеся в одну точку на диаграмме узла (см. Рис.2.5). Такие пересечения называются *виртуальными*.

Согласно Л. Кауффману [82], диаграммы виртуальных узлов связаны друг с другом виртуальными движениями Редемейстера, по аналогии с Рис.2.1. Эти виртуальные движения Редемейстера описывают, как могут изменяться виртуальные пересечения, Рис.2.6, а также как их можно сочетать с обычными пересечениями, Рис.2.7.

Скейн-соотношения (2.2) не позволяют свести полином любого виртуального узла к тривиальному. Скобка Кауффмана (2.7), в свою очередь, позволяет построить

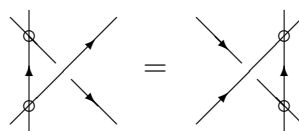


Рис. 2.7: Смешанное движение Редемейстера с одним обычным и двумя виртуальными пересечениями

соответствующие полиномы Джонса. В Главе 9 описан метод, который позволяет построить полиномы ХОМФЛИ-ПТ для виртуальных узлов.

Глава 3

Квантовые группы

Большую роль в изучении полиномиальных инвариантов узлов играют квантовые группы. Квантовыми группами называется квантовая деформация универсальной обертывающей алгебры [80, 101]. Разберем эту деформацию на примере квантовых групп $U_q(sl_N)$, которые нас интересуют в первую очередь, так как именно они связаны с полиномами ХОМФЛИ-ПТ. Квантовая группа $U_q(sl_N)$ порождается элементами $E_i, F_i, K_i = q^{h_i}$ и K_i^{-1} , где q - параметр квантовой деформации. Они удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, E_j] = a_{ij}E_j, \quad [h_i, F_j] = -a_{ij}F_j, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} \frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}}, \quad (3.1)$$

где a - матрица Картана алгебры sl_N

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j \\ -1, & i = j \pm 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.2)$$

В пределе $q \rightarrow 1$ генераторы квантовой группы переходят в генераторы универсальной обертывающей алгебры sl_N . В квантовой группе, как и в соответствующей универсальной обертывающей алгебре sl_N количество различных генераторов равно: $\#h_i = N - 1$ и $\#E_i = \#F_i = N(N - 1)/2$.

Генераторы квантовой группы также удовлетворяют квантовым соотношениям

Серра:

$$\begin{aligned}
E_i E_i E_{i+1} - (q + q^{-1}) E_i E_{i+1} E_i + E_{i+1} E_i E_i &= 0, \\
E_{i+1} E_i E_{i+1} - (q + q^{-1}) E_{i+1} E_i E_{i+1} + E_i E_{i+1} E_{i+1} &= 0, \\
F_i F_i F_{i+1} - (q + q^{-1}) F_i F_{i+1} F_i + F_{i+1} F_i F_i &= 0, \\
F_{i+1} F_i F_{i+1} - (q + q^{-1}) F_{i+1} F_i F_{i+1} + F_i F_{i+1} F_{i+1} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Еще одно определяющее свойство квантовой группы - квантованное копроизведение:

$$\begin{aligned}
\Delta(E_i) &= E_i \otimes q^{-2h_i} + 1 \otimes E_i, \\
\Delta(F_i) &= F_i \otimes 1 + q^{2h_i} \otimes F_i, \\
\Delta(h_i) &= h_i \otimes 1 + 1 \otimes h_i.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Используя эти свойства можно изучить теорию представлений квантовых групп $U_q(sl_N)$. Эта теория представлений схожа с теорией представлений соответствующей алгебры Ли. А именно, набор представлений квантовой группы при q не являющихся корнями из единицы и алгебры Ли совпадают, но различные величины, такие как, например, размерности неприводимых представлений, 3- j и 6- j символы заменяются их квантовыми аналогами.

Так, для описания квантовых размерностей, как оказывается, можно воспользоваться характеристиками представлений группы sl_N . Характеры таких представлений описываются полиномами Шура $S_Y\{p_k\}$, которые зависят от так называемых временных переменных p_k . Эти переменные – это сумма диагональных элементов матрицы, соответствующей элементу группы

$$p_k = \sum_i X_i^k. \tag{3.5}$$

Полиномы Шура можно вычислить различными способами [102, 103]. При специальном выборе значений временных переменных, называемом топологическим локусом, полиномы Шура равны квантовым размерностям представлений квантовой группы $U_q(sl_N)$:

$$\begin{aligned}
p_k^* &= \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}}, \\
S_Y^*(A, q) &= S_Y\{p_k = p_k^*\}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Для таких полиномов есть простая формула крюков, которая позволяет получить такие полиномы на топологическом локусе просто по диаграмме Юнга представле-

Глава 4

Классический формализм

Решетихина-Тураева

Вильсоновские средние можно найти рассматривая только операторы, соответствующие пересечениям на проекции контура на плоскость. Аналогичным образом и полиномы узлов можно найти по диаграмме узла, рассматривая только пересечения на диаграмме. Какая может быть форма у таких операторов?

Инвариант узла, связанный с любой диаграммой узла, не меняется при трех движениях Рейдемейстера (см. Рис. 2.1). Вильсоновские средние также должны удовлетворять аналогичному свойству из-за своей топологической инвариантности. Третье движение Рейдемейстера – это широко известное квантовое уравнение Янга-Бакстера [104, 105], которому удовлетворяют генераторы кос. Решения такого уравнения называются $\mathfrak{R}$ -матрицами. Полиномам ХОМФЛИ-ПТ и вильсоновским средним отвечает квантовая $\mathfrak{R}$ -матрица [63, 74, 106].

$\mathfrak{R}$ -матрицы – это объекты, которые встречаются в различных областях теоретической и математической физики, в частности, в интегрируемых системах [107] и квантовых группах [80]. В контексте данной работы для нас представляют интерес $\mathfrak{R}$ -матрицы, связанные с квантовыми группами. Такие матрицы задаются выражением для так называемой универсальной квантовой $\mathfrak{R}$ -матрицы:

$$\mathfrak{R} = \mathcal{P} \otimes q^{\sum_{i,j} a_{i,j}^{-1} h_i \otimes h_j} \prod_{\beta \in \Phi^+}^{\rightarrow} \exp_q \left((q - q^{-1}) E_\beta \otimes F_\beta \right), \quad (4.1)$$

где $\mathcal{P}$ – оператор перестановки

$$\mathcal{P}(x \otimes y) = y \otimes x, \quad (4.2)$$

h_i , E_β и F_β – генераторы квантовой группы, $a_{i,j}$ – матрица Картана, Φ^+ это множество всех положительных корней исходной алгебры, а квантовая экспонента определена как

$$\exp_q X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{[m]_q!} q^{m(m-1)/2}. \quad (4.3)$$

Универсальная $\mathfrak{R}$ -матрица действует, как можно видеть из определения, на произведение двух представлений квантовой группы $Y_1 \otimes Y_2$. Важным также является свойство коммутации $\mathfrak{R}$ -матрицы с копроизведением квантовой группы (3.4). Благодаря этому $\mathcal{R}$ -матрица действует тривиально умножением на некоторое собственное значение на неприводимые представления Q , входящие в прямое произведение $Y_1 \otimes Y_2$, что пригодится нам позже при описании современного подхода Решетихина-Тураева.

Вернемся к обсуждению движений Редемейстера на рис. 2.1. Как мы обсуждали выше, третье движение является графическим представлением уравнения Янга-Бакстера. Второе движение Редемейстера означает, что обратному пересечению соответствует обратная матрица $\mathfrak{R}^{-1}$. Первое движение Редемейстера с точки зрения $\mathfrak{R}$ -матриц наименее тривиально. Идейно оно означает, что если взять след от $\mathfrak{R}$ -матрицы по одному из индексов, то в результате должен получиться единичный оператор. Однако, если вычислить такое выражение для матрицы (4.1), то единичный оператор не получится, так как необходимо брать не обычный след, а квантовый.

Для вычисления полиномов узлов этот факт выражается в наличии специального оператора $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} = q^{h_\rho}, \quad (4.4)$$

где:

$$h_\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} h_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} i(N-i)h_i, \quad (4.5)$$

Графически этот оператор можно изобразить “шапкой”, которая изменяет направления на нити с движения вверх на движение вниз и наоборот. Есть четыре типа таких операторов, изображенных на Рис. 4.1

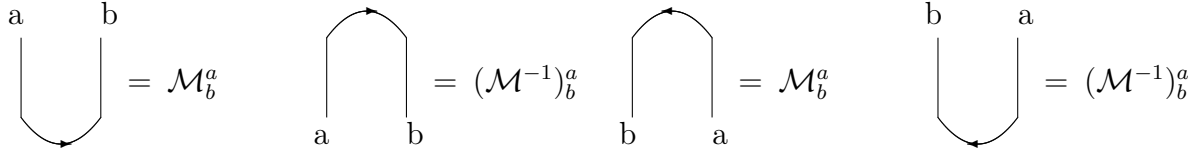


Рис. 4.1: Четыре типа операторов $\mathcal{M}$.

Если учитывать различные направления нитей, то существует восемь типов пересечений. Все эти пересечения можно выразить через операторы $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^{-1}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{-1}$, см. Рис. 4.2.

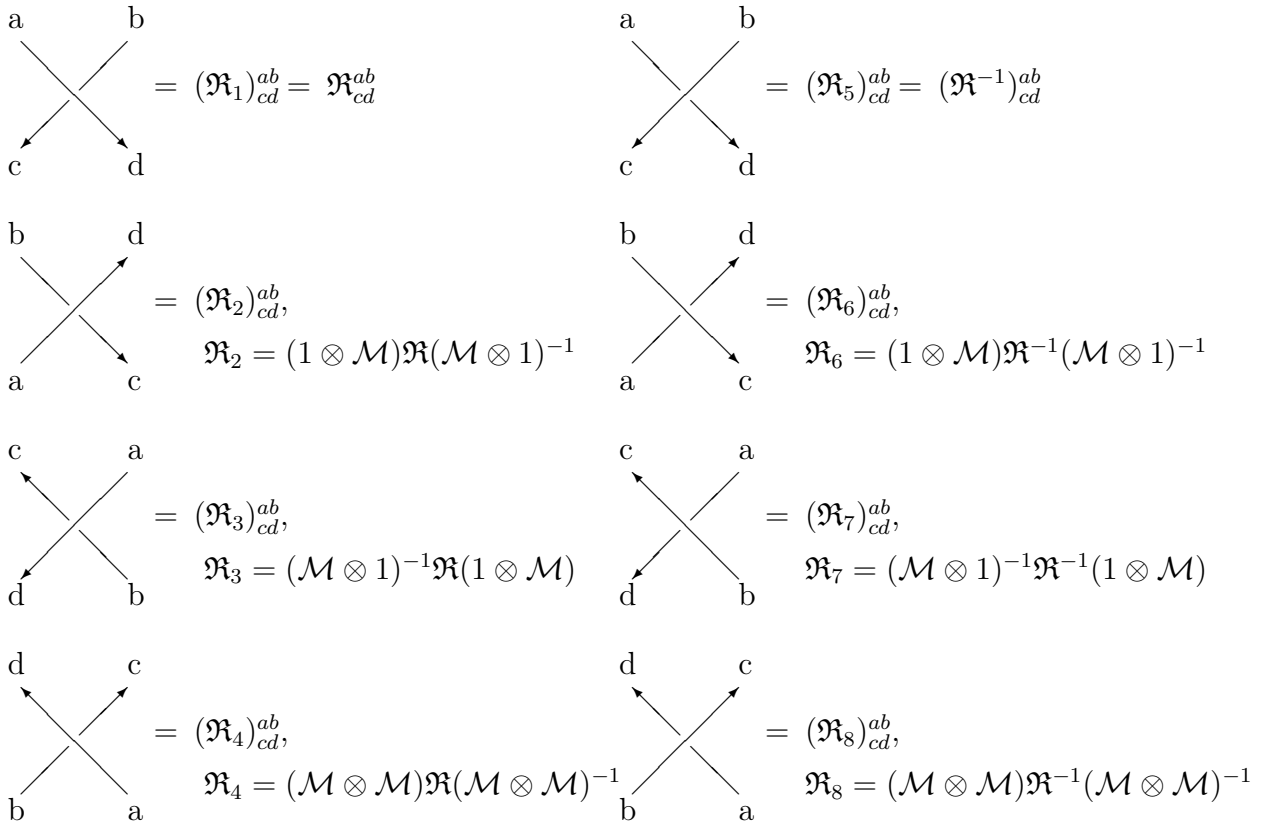


Рис. 4.2: Различные типы $\mathfrak{R}$ -матриц и их выражение через универсальную $\mathfrak{R}$ -матрицу и оператор $\mathcal{M}$.

Глава 5

$\mathcal{R}$ -матрицы и косы

Классический подход Решетихина-Тураева можно модифицировать. Универсальная $\mathcal{R}$ -матрица (4.1) коммутирует с копроизведением квантовых групп (3.4):

$$\mathfrak{R}\Delta(g)\mathfrak{R}^{-1} = \Delta(g). \quad (5.1)$$

Это означает, что $\mathfrak{R}$ -матрица действует одинаково на различные элементы векторного пространства, связанные генераторами квантовой группы. Иными словами, они действуют одинаково на все элементы неприводимого представления Q из произведения $T_1 \otimes T_2$ двух сплетаемых представлений. Таким образом, собственные значения $\mathfrak{R}$ -матрицы зависят от таких неприводимых представлений Q . Мы обсудим структуру этих собственных значений подробнее ниже в разделе 5.1. Это утверждение также можно понимать следующим образом, $\mathfrak{R}$ -матрице, можно представить, как оператор, который действует на пространстве старших векторов неприводимых представлений из произведения представлений, связанных с нитями. Мы будем называть такие матрицы $\mathcal{R}$ -матрицами:

$$\mathfrak{R}(Y_1 \otimes Y_2) = \bigoplus_Q \mathcal{R}^Q \left(M_{Y_1, Y_2}^Q \right) \otimes Q, \quad Q \in Y_1 \otimes Y_2, \quad (5.2)$$

где $\mathfrak{R}(Y_1 \otimes Y_2)$ - матрица действующая на произведении представлений Y_1 и Y_2 , а M_{Y_1, Y_2}^Q - пространство старших векторов неприводимых представлений Q из произведения $Y_1 \otimes Y_2$.

Проще всего такие $\mathcal{R}$ -матрицы рассматривать как операторы, действующие на косе (элементы группы кос). Так как каждый узел можно представить в виде косы,



Рис. 5.1: 2-нитевая коса для узла трилистника 3_1

это определение может быть применено для любых узлов. Отметим, что узел или зацепление имеют не единственное представление в виде косы. Простейший пример кос - это двухнитевые косы, см. Рис. 5.1. С точки зрения классического формализма Решетихина-Тураева это замыкание соответствует произведению матриц $\mathcal{M}$ (4.4). Это произведение образует квантовый след, который задается специальной матрицей весов, связанной с квантовой группой [80].

Ключевой для нас особенностью является то, что квантовый след от единичного оператора по неприводимому представлению Q квантовой группы $U_q(sl_N)$ равен квантовой размерности данного представления квантовой группы. Эти размерности также равны характеру представления, равному полиному Шура, как было описано в Главе 3:

$$\chi_Q(A, q) = S_Q^*(A, q). \quad (5.3)$$

Таким образом полиномы узла, вычисленные с помощью косы обладают разложением по характерам:

$$\mathcal{H}_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{K}}(A, q) = \sum_{Q \vdash T_1 \otimes T_2 \otimes \dots} h_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{K}, Q}(q) S_Q^*(A, q). \quad (5.4)$$

Коэффициенты этого разложения это функции только от переменной q . При некоторых выборах обрамления узла эти функции также могут зависеть от переменной A , однако эта зависимость простая и зависит только от представлений и общего числа $\mathcal{R}$ -матриц в косе. Мы обсудим эти свойства ниже в разделе 5.1. При выборе вертикального обрамления функции $h_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{K}, Q}$ зависят только от q .

Отметим, что формула (5.4) позволяет также задать *расширенный* полином ХОМФЛИ-ПТ. Такие полиномы получаются при подстановке в выражение (5.4) вместо полиномов Шура на топологическом локусе, полиномы Шура в общем виде:

$$\hat{\mathcal{H}}_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{K}}\{p_k\} = \sum_{Q \vdash T_1 \otimes T_2 \otimes \dots} h_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{K}, Q}(q) S_Q\{p_k\}. \quad (5.5)$$

Такие полиномы не являются инвариантами узлов, хотя и остаются инвариантами кос. Но такие обобщенные полиномы, благодаря связи с полиномами Шура, позволяют рассмотреть некоторые интегрируемые свойства полиномов ХОМФЛИ-ПТ [108].

Таким образом коэффициенты $h_{T_1 \otimes T_2 \otimes \dots}^{\mathcal{K}, Q}$ зависят только от q и не зависят от $A = q^N$, то есть от N . Характеры $S_Q^*(A, q)$ описывают зависимость от номера квантовой группы $U_q(sl_N)$. Они, однако, не зависят от конкретного узла, а только от выбранного набора представлений, связанных с нитями и ширины косы. Поэтому в формуле (5.4) разделяются зависимости полиномов ХОМФЛИ-ПТ от группы и от узла. Различные коэффициенты этого разложения можно, пользуясь данным подходом исследовать по отдельности. Отметим, что эти коэффициенты, в отличие от полного выражения $\mathcal{H}^{\mathcal{K}}$, не являются топологическими инвариантами, и зависят от выбора косы, связанной с данным узлом.

Рассмотрим эту конструкцию подробнее для большего числа нитей. На такие косы действуют различные $\mathcal{R}$ -матрицы, которые задаются номерами нитей, на которые они действуют. С помощью универсальной $\mathfrak{R}$ -матрицы они задаются посредством тензорного умножения на единичные операторы. Оператор, действующий на первые две нити, связан с оператором $\mathfrak{R} \otimes I \otimes I \dots$, оператор действующий на вторую и третью нить связан с $I \otimes \mathfrak{R} \otimes I \dots$ и так далее. $\mathcal{R}$ матрицы действуют в пространстве старших векторов представлений Q из тензорного произведения представлений T_i , связанных со всеми нитями в косе:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} \otimes I \otimes I \dots &= \oplus_Q \mathcal{R}_1^Q \left(M_{\otimes Y_i}^Q \right) \otimes Q \\ I \otimes \mathfrak{R} \otimes I \dots &= \oplus_Q \mathcal{R}_2^Q \left(M_{\otimes Y_i}^Q \right) \otimes Q, \quad Q \in \otimes Y_i \\ &\dots\end{aligned}\tag{5.6}$$

Такие $\mathcal{R}$ -матрицы удовлетворяют соотношениям группы кос, в том числе и уравнению Янга-Бакстера для кос:

$$\mathcal{R}_i^Q \mathcal{R}_{i+1}^Q \mathcal{R}_i^Q = \mathcal{R}_{i+1}^Q \mathcal{R}_i^Q \mathcal{R}_{i+1}^Q,\tag{5.7}$$

и соотношению коммутации для несоседних матриц:

$$\mathcal{R}_i^Q \mathcal{R}_j^Q = \mathcal{R}_j^Q \mathcal{R}_i^Q, \quad |i - j| \neq 1. \quad (5.8)$$

Соседние $\mathcal{R}$ -матрицы, однако, могут некоммутировать, более того, если они коммутируют для всех представлений Q , то ответ для полиномов узлов не будет зависеть от порядка пересечений. Таким образом, в интересующих нас случаях нельзя одновременно диагонализировать все матрицы $\mathcal{R}_i$.

5.1 Собственные значения $\mathcal{R}$ -матриц

Рассмотрим, как устроены собственные значения $\mathcal{R}$ -матриц, то есть как устроена диагональная $\mathcal{R}$ -матрица. Не уменьшая общности, будем считать диагональной матрицу $\mathcal{R}_1^Q$, и именно такие базисы в пространстве (старших векторов) представлений мы будем в основном рассматривать в данной работе.

Простейший случай это $\mathcal{R}$ -матрица в 2-х нитевой косе с представлениями T_1 и T_2 . Такая $\mathcal{R}$ -матрица диагональна в пространстве представлений $Q_i \in T_1 \otimes T_2$. Соответствующие собственные значения пропорциональны

$$|\lambda_i| \sim q^{\kappa_{Q_i} - \kappa_{T_1} - \kappa_{T_2}}, \quad (5.9)$$

$$\kappa_Q = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in Q} (j - i), \quad i \text{ и } j \text{ нумеруют клетки диаграммы Юнга } Q.$$

Собственные значения $\mathcal{R}$ -определены с точностью до общего коэффициента, так как такой множитель не нарушает уравнение Янга-Бакстера (5.7). Этот множитель можно выбрать по разному в зависимости от того, какие задачи решаются.

С точки зрения теории Черна-Саймонса, вильсоновские средние отвечают обрамленному узлу [45],[105]. Это обрамление влияет на общий коэффициент при полиноме узла и, таким образом, на общий коэффициент при собственных значениях $\mathcal{R}$ -матриц. Поэтому различные общие множители $\mathcal{R}$ -матриц называют различными обрамлениями. Можно показать, что различные обрамления должны отличаться множителем $q^{\kappa_Y + \frac{N|Y|}{2}}$, где $|Y|$ – это число клеток в диаграмме Юнга Y [109].

Эти обрамления можно выбрать различными способами. Один из способов отвечают топологической инвариантности получающихся полиномов узлов. Это требует

выполнения первого движения Редемейстера, см. Рис. 2.1. Согласно этому движению, (квантовый) след от $\mathfrak{R}$ -матрицы по одному из представлений должен быть равен единичному оператору. Таким образом, это фиксирует общий коэффициент в $\mathcal{R}$ -матрице:

$$|\lambda_i| = q^{\varkappa_{Q_i} - 4\varkappa_Y} A^{-|Y|} = q^{\varkappa_{Q_i} - 4\varkappa_Y - N|Y|}. \quad (5.10)$$

Такие собственные значения определены только для случая $Y_1 = Y_2 = Y$, так как только в этом случае применимо первое движение Редемейстера. С точки зрения теории узлов $Y_1 \neq Y_2$ соответствует пересечению разных компонент зацепления. Алгебраическое число таких пересечений является топологическим инвариантом [105], поэтому любой выбор общего коэффициента в таких $\mathcal{R}$ -матрицах не нарушает топологической инвариантности получающихся полиномов.

Другой выбор обрамления приходит из теории квантовых групп. Этот выбор называется вертикальным обрамлением:

$$|\lambda_i| = q^{\varkappa_{Q_i} - \frac{N|Q_i|}{2} - \varkappa_{Y_1} + \frac{N|Y_1|}{2} - \varkappa_{Y_2} + \frac{N|Y_2|}{2}}. \quad (5.11)$$

Заметим, что так как $Q \in Y_1 \otimes Y_2$, $|Q| = |Y_1| + |Y_2|$. Таким образом такие собственные значения не зависят от N и, соответственно, от A .

Рассмотрим, как устроены знаки собственных значений $\mathcal{R}$ -матриц. Для этого вернемся к формуле для универсальной $\mathfrak{R}$ -матрицы:

$$\mathfrak{R} = \mathcal{P}\hat{\mathfrak{R}} = \mathcal{P} \otimes q^{\sum_{i,j} a_{i,j}^{-1} h_i \otimes h_j} \prod_{\beta \in \Phi^+} \exp_q((q - q^{-1})E_\beta \otimes F_\beta). \quad (5.12)$$

При стремлении $q \rightarrow 1$ такая матрица превращается в оператор перестановки. От собственных значений остаются только знаки. Таким образом, знаки собственных значений определяются действием оператора перестановки на представления универсальной обертывающей алгебры. Представления для которых собственные значения положительны или отрицательны относятся к положительному или отрицательному квадрату представления Y . Для случая разных представлений оператор перестановки действует из пространства $Y_1 \otimes Y_2$ в пространство $Y_2 \otimes Y_1$. Эти два пространства отличны, таким образом, понятие собственного значения в данном случае не вполне корректно. Набор неприводимых представлений в обоих представлениях совпадает, что позволяет задать модули собственных значений. Знак собственного

значения, однако, зависит от выбора знака в старших векторов в двух тензорных произведениях. Поэтому знаки собственных значений для случая $Y_1 \neq Y_2$ могут быть заданы произвольным образом, но они должны быть согласованы с выборами знаков в соответствующих матрицах Рака, связанных с $\mathcal{R}$ -матрицами уравнением Янга-Бакстера. Такая связь будет подробнее рассмотрена в Главе 7.

Собственные значения $\mathcal{R}$ -матриц в косе с более чем двумя нитями связаны с рассмотренными собственными значениями. Рассмотрим диагональную $\mathcal{R}$ -матрицу, связанную с пересечениями первых двух нитей из косы с набором представлений $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_m$. Такая $\mathcal{R}$ -матрица действует на неприводимые представления $\sum_j \bar{Q}_j = Y_1 \otimes Y_2 \otimes \dots \otimes Y_m$. С точки зрения собственных значений нужно представить эти представления в виде $(\sum_i Q_i) \otimes \dots \otimes Y_m$. Собственные значения для представлений Q_i определяются представлениями $\bar{Q}_j$, из которых они получаются [62]. Аналогичным образом собственные значения матрицы $\mathcal{R}_k$ определяются представлениями $\bar{Q}_j$ в разложении $Y_1 \otimes \dots \otimes Y_{j-1} \otimes \sum_j \bar{Q}_j \otimes Y_{j+2} \otimes \dots$.

5.2 $\mathcal{R}$ -матрицы и матрицы Рака

Рассмотрим как устроены недиагональные $\mathcal{R}$ -матрицы. Обсудим пример, когда всем нитям соответствуют одинаковые представления Y . В этом случае все матрицы $\mathcal{R}_i$ имеют один и тот же набор собственных значений. Это значит, что эти $\mathcal{R}$ -матрицы связаны матрицами поворотов базиса, которые являются инклюзивными матрицами Рака квантовых групп. Свойства таких матриц будут подробнее рассмотрены в Главе 6. Эти матрицы Рака имеют особую структуру. Рассмотрим базис в котором матрица $\mathcal{R}_1$ диагональна. Такой базис описывается следующей расстановкой скобок в тензорном произведении представлений: $(\dots((Y \otimes Y) \otimes Y) \otimes \dots Y)$. Матрица $\mathcal{R}_2$ в этом случае будет связана с другим базисом: $(\dots(Y \otimes (Y \otimes Y)) \otimes \dots Y)$. Поворот от одного базиса к другому можно описать с помощью дерева представлений:

$$\begin{array}{c} Y & Y & Y & Y \\ & \diagdown & \diagup & \\ & T & & \\ & \diagup & \diagdown & \\ \dot{Q} & & & \\ & \diagdown & & \\ & Q & & \end{array} = \sum_{T'} u_{T'}^T \begin{array}{c} Y & Y & Y & Y \\ & \diagdown & \diagup & \\ & & T' & \\ & \diagup & \diagdown & \\ \dot{Q} & & & \\ & \diagdown & & \\ & Q & & \end{array} \quad (5.13)$$

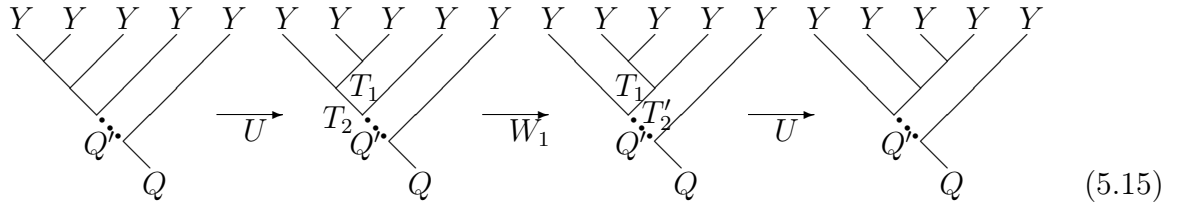
$u_{T'}^T$ – это элементы матрицы U , связанной с коэффициентом Рака $\begin{bmatrix} Y & Y & T \\ Y & Q' & T' \end{bmatrix}$.

Матрица $\mathcal{R}_2$ в этом случае равна

$$\mathcal{R}_2 = U\mathcal{R}_1U^\dagger. \quad (5.14)$$

При рассмотрении 3-нитевых кос $Q' = Q$. Однако, для большего числа нитей они могут быть не равны. Из такого описания матрицы Рака понятно, что только элементы матрицы Рака, у которых совпадают представления Q' могут быть ненулевыми. Матрица U , таким образом, блочно-диагональна, и различные блоки этой матрицы соответствуют различным Q' .

Третья матрица $\mathcal{R}_3$ соответствует базису $(...(Y \otimes (Y \otimes (Y \otimes Y))) \otimes ..Y)$. Переход от базиса, связанного с матрицей $\mathcal{R}_1$, к базису, связанному с матрицей $\mathcal{R}_3$, можно описать последовательностью деревьев



$$(5.15)$$

Первая и последняя матрицы это на самом деле такие же матрицы, как были описаны выше. Но, для связи матриц $\mathcal{R}_3$ и $\mathcal{R}_1$ необходима новая матрица W_1 . Эта матрица связана с коэффициентами Рака $\begin{bmatrix} Y & T_1 & T_2 \\ Y & Q' & T_2' \end{bmatrix}$. Матрица $\mathcal{R}_3$, таким образом, равна

$$\mathcal{R}_3 = UW_1U\mathcal{R}_1U^\dagger W_1^\dagger U^\dagger. \quad (5.16)$$

По аналогии с матрицей U , ненулевые элементы матрицы W_1 соответствуют совпадающим представлениям T_1 и совпадающим представлениям Q' . Из этого следует интересное свойство матрицы W_1 . Так как собственные значения диагональной $\mathcal{R}$ -матрицы определяются представлениями T_1 , W_1 коммутирует с диагональной $\mathcal{R}$ -матрицей.

Эту структуру можно продолжить и на последующие $\mathcal{R}$ -матрицы, например, для $\mathcal{R}_4$:

$$\mathcal{R}_4 = UW_1UW_2UW_1U\mathcal{R}_1U^\dagger W_1^\dagger U^\dagger W_2^\dagger U^\dagger W_1^\dagger U^\dagger. \quad (5.17)$$

W_2 опять таки является блочной. Эту блочную структуру можно описать с помощью путей от изначального представления Y до конечного представления Q . Это позволяет обобщить утверждение о блочной структуре матриц U и W . Если представление Q получается посредством следующей последовательности представлений

$$Y \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \rightarrow \dots \rightarrow Q, \quad (5.18)$$

то ненулевые матрицы W_i соответствует представлениям Q с одинаковыми представлениями $T_1, T_2, \dots, T_i, T_{i+2}, \dots$. Это позволяет описать блочную структуру любой матрицы Рака W_i .

Чтобы узнать как в общем виде устроены недиагональные $\mathcal{R}$ -матрицы нужно знать весь набор матриц Рака, которые известны только в определенных случаях. Ниже, в Главе 6, мы обсудим известные формулы для коэффициентов Рака.

5.3 Общий вид фундаментальных $\mathcal{R}$ -матриц

Есть, однако, набор $\mathcal{R}$ -матриц, выражение для которых известно в общем виде. Это $\mathcal{R}$ -матрицы, связанные с косами, все нити которых окрашены фундаментальными представлениями квантовой группы $U_q(sl_N)$. Общая формула для таких матриц была описана в [61, 110]. Далее в этом разделе мы будем обсуждать именно такие матрицы.

Такие $\mathcal{R}$ -матрицы устроены проще всего в базисе неприводимых представлений, которое описывается последовательным раскрытием скобок в следующем произведении представлений:

$$((\dots (1 \otimes 1) \otimes \dots \otimes 1) \otimes 1) \quad (5.19)$$

Мы будем называть такой базис стандартным. Вектора такого базиса можно описать в терминах путей на деревьях. Для описания $\mathcal{R}$ -матриц в таком базисе введем обозначение для блока b_j размера 2×2 :

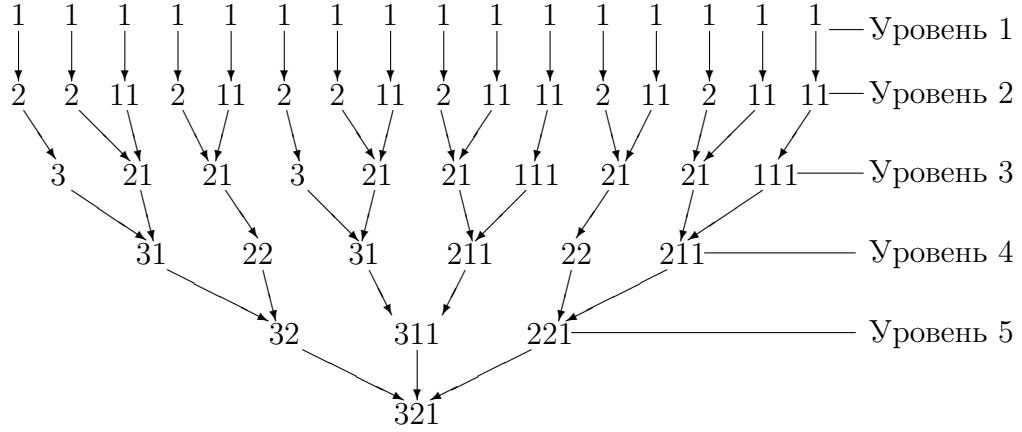


Рис. 5.2: Дерево представлений для представления $[321]$ получающегося из произведения 6 фундаментальных представлений

$$b_j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^j [j]_q} & \frac{\sqrt{[j+1]_q [j-1]_q}}{[j]_q} \\ \frac{\sqrt{[j+1]_q [j-1]_q}}{[j]_q} & \frac{q^j}{[j]_q} \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Матрицы $\mathcal{R}_{k-1}$, соответствующие пересечению $k-1$ -й и k -й нитей состоят только из блоков b_l размера 2×2 и блоков размера 1×1 , равных q или $-q^{-1}$. Размеры и расположения блоков связаны со структурой произведения представлений. Рассмотрим пример конечного представления $[3, 2, 1]$, которое получается из произведения 6 фундаментальных представлений, см Рис.5.2.

Каждая строка и столбец в $\mathcal{R}$ -матрице соответствуют одному из “листьев” дерева. Матрица $\mathcal{R}_{k-1}$ описывается уровнем k дерева. Каждый путь на уровне k либо является частью дублета, в том случае, если пути совпадают везде, кроме уровня k , или синглета. Для фундаментального представления не существует триплетов, квадруплетов и.т.д. Это связано с тем как умножаются представления. При умножении представления с диаграммой Юнга Y а фундаментальное представление, к этой диаграмме нужно добавить одну клетку. При умножении на два фундаментальных представления, что соответствуют переходу в дереве через уровень k , от уровня $k-1$ к уровню $k+1$, надо добавить две клетки. Сделать это можно тремя способами, см. пример на Рис.5.3: либо две клетки добавляются в один столбец, тогда в $\mathcal{R}$ -матрице получается блок $1 \otimes 1$ равный $-q^{-1}$, либо в одну строку, тогда блок равен q , либо

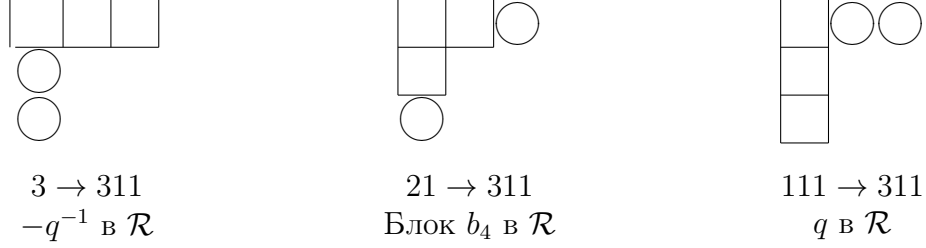


Рис. 5.3: Описание матрицы $\mathcal{R}$ в терминах добавленных клеток в диаграмме Юнга на примере уровня 4 и представления $[3, 1, 1]$, как конечного представления. Кружки обозначают клетки, добавленные к исходной диаграмме на уровне 3.



Рис. 5.4: Для ответа на вопрос, какие блоки b_i нужно использовать, можно рассмотреть диаграмму, описывающую уровень k . Если длина крюка, соединяющего две добавленные клетки на уровнях k и $k + 1$ (они отмечены крышками на картинке) равна $i + 1$, то нужно использовать блок b_i .

две клетки добавляются в разные строки и столбцы. В последнем случае очевидно существует два способа попасть с уровня $k - 1$ на уровень $k + 1$, в зависимости от порядка добавления клеток.

Выражения для необходимого блока b_l можно получить, решив уравнение Янга-Бакстера, связывающее $\mathcal{R}_k$ с $\mathcal{R}_{k-1}$. Оказывается, что форма блока зависит от длины крюка соединяющего две добавленных клетки, см. рис.5.4. А именно, если длина крюка равна $l + 1$, то необходимо использовать блок b_l из формулы (5.20). Этот блок надо поместить на пересечение соответствующих столбцов и строк. Строго говоря, блок b_j входит в матрицу R_{k-1} не в виде цельного блока, но каждый из таких блоков (но не во всех матрицах $\mathcal{R}_i$ одновременно) можно превратить в цельный блок перестановкой строк и столбцов.

С помощью таких правил можно описать любую недиагональную фундаментальную $\mathcal{R}$ -матрицу. Например, матрица $\mathcal{R}_4^{[3,2,1]}$, которая соответствует уровню 4

на рис.5.2) устроена как:

$$R_{4|321} =$$

$$\begin{array}{cccc}
q & & & \\
-\frac{1}{[2]_q q^2} & 0 & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & 0 \\
0 & -\frac{1}{[2]_q q^2} & 0 & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\
\frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & 0 & \frac{q^2}{[2]_q} & 0 \\
0 & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & 0 & \frac{q^2}{[2]_q} \\
-q^{-1} & & & \\
-\frac{1}{[4]_q q^4} & 0 & \frac{\sqrt{[3]_q [5]_q}}{[4]_q} & 0 \\
0 & -\frac{1}{[4]_q q^4} & 0 & \frac{\sqrt{[3]_q [5]_q}}{[4]_q} \\
\frac{\sqrt{[3]_q [5]_q}}{[4]_q} & 0 & \frac{q^4}{[4]_q} & 0 \\
0 & \frac{\sqrt{[3]_q [5]_q}}{[4]_q} & 0 & \frac{q^4}{[4]_q} \\
q & & & \\
-\frac{1}{[2]_q q^2} & 0 & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & 0 \\
0 & -\frac{1}{[2]_q q^2} & 0 & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\
\frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & 0 & \frac{q^2}{[2]_q} & 0 \\
0 & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & 0 & \frac{q^2}{[2]_q} \\
-q^{-1} & & &
\end{array}$$

Для других представлений такие общие ответы пока не построены, поэтому нужно использовать матрицы Рака.

Глава 6

Матрицы Рака квантовых групп

Одни из ключевых величин в теории представлений это 3-j и 6-j символы. Эти величины возникают при произведении представлений и впервые встречаются при изучении сложения моментов в квантовой механике [111]. В квантовой механике 3-j символы Вигнера определяются для произведения двух состояний с угловыми моментами j_1 и j_2 и проекциями моментов m_1 и m_2 и разложения его по состояниям с угловым моментом j_3 проекцией углового момента m_3 :

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 (-m_3) \rangle. \quad (6.1)$$

Угловые моменты являются представлениями группы $SO(3)$ или $SU(2)$. Аналогичным образом можно определить 3-j символы и для представлений других групп, в том числе квантовых.

6-j символы определяются для 6 угловых моментов и они связаны с 3-j символами:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{matrix} \right\} &= \sum_{m_1, \dots, m_6} (-1)^{\sum_{k=1}^6 (j_k - m_k)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.2)$$

С ними также связаны и W-коэффициенты Рака, отличающиеся от них коэффи-

циентом

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{array} \right\} = (-1)^{j_1+j_2+j_3+j_4} W(j_1, j_2, j_3, j_4; j_5, j_6). \quad (6.3)$$

В дальнейшем мы будем использовать оба термина взаимозаменяемым образом, так как эта разница в знаках не существенна для наших задач.

С точки зрения теории представлений 6-j символы описывают ассоциативные свойства произведения трех представлений. Произведение трех представлений с точки зрения разложения на неприводимые представления можно рассматривать двумя способами. Первый способ состоит в том, чтобы сначала перемножить и разложить на неприводимые представления первые два представления:

$$T_1 \otimes T_2 \otimes T_3 = (T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = \sum_{T_{12}} M_{1,2}^{12} \otimes T_{12} \otimes T_3 = \sum_{T_{123}} \sum_{T_{12}} M_{12,3}^{123} \otimes M_{1,2}^{12} \otimes T_{123}, \quad (6.4)$$

где $M_{1,2}^{12}$ – описывает пространство старших векторов представлений T_{12} в произведении представлений T_1 и T_2 . Остальные M определены аналогичным образом. Второй способ состоит в том, чтобы перемножить сначала последние два представления:

$$T_1 \otimes T_2 \otimes T_3 = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) = \sum_{T_{23}} M_{2,3}^{23} \otimes T_1 \otimes T_{23} = \sum_{T_{123}} \sum_{T_{23}} M_{1,23}^{123} \otimes M_{2,3}^{23} \otimes T_{123}. \quad (6.5)$$

Оба этих способа в результате в правой части должны давать одинаковый набор представлений. Однако эти два способа описывают разные способы выбора базиса. Переход из одного базиса в другой описывается матрицей Рака (матрицей, элементы которой это коэффициенты Рака). Матрицу Рака удобно описывать с помощью картинки:

$$\begin{array}{c} T_1 \quad T_2 \quad T_3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ T_{12} \quad \quad T_{123} \end{array} = \sum_{T_{23}} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_{12} \\ T_3 & T_{123} & T_{23} \end{bmatrix} \begin{array}{c} T_1 \quad T_2 \quad T_3 \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \quad T_{23} \quad T_{123} \end{array} \quad (6.6)$$

Для вычисления матриц Рака достаточно рассмотреть старшие (младшие) вектора таких представлений¹.

¹Вообще говоря аналогичные построения можно рассматривать и для других представлений, не старшего веса. Такие представления, однако, находятся вне рассмотрения данной работы.

6-j символы любой группы обладают симметрией тетраэдра [66]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_{12} \\ T_3 & T_{123} & T_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{T}_3 & \bar{T}_2 & \bar{T}_{23} \\ \bar{T}_1 & \bar{T}_{123} & \bar{T}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_3 & \bar{T}_{123} & T_{12} \\ T_1 & \bar{T}_2 & T_{23} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} T_1 & \bar{T}_{12} & \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 & \bar{T}_{23} & \bar{T}_{123} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_2 & T_1 & T_{12} \\ \bar{T}_{123} & \bar{T}_3 & \bar{T}_{23} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Также известны и другие симметрии 6-j символов для группы $U_q(sl_2)$ [80], которые также были обобщены на другие группы [112, 113, 114].

6.1 Матрицы Рака квантовой группы $U_q(sl_2)$

Единственный случай, когда известно полное выражение для матриц Рака для любых представлений – это квантовая группа $U_q(sl_2)$ [115]:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{23} \end{array} \right\} &= \sqrt{[2j_{12} + 1][2j_{23} + 1]} (-1)^{j_1 + j_2 - j_3 - j_4 - j_{12}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{[j_2 - j_1 + j_{12}]_q! [j_1 - j_2 + j_{23}]_q! [j_1 + j_2 - j_{12}]_q!}{[j_1 + j_2 + j_{12} + 1]_q!}} \sqrt{\frac{[q - j_3 + j_{12}]_q! [j_3 - j_4 + j_{12}]_q! [j_3 + j_4 - j_{12}]_q!}{[j_3 + j_4 + j_{12} + 1]_q!}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{[q - j_1 + j_{23}]_q! [j_1 - q + j_{23}]_q! [j_1 + q - j_{23}]_q!}{[j_1 + q + j_{23} + 1]_q!}} \sqrt{\frac{[j_2 - j_3 + j_{23}]_q! [j_3 - j_2 + j_{23}]_q! [j_2 + j_3 - j_{23}]_q!}{[j_2 + j_3 + j_{23} + 1]_q!}} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{j_1 + j_2 + j_3 + q} (-1)^k \frac{[k+1]_q!}{[k - j_1 - j_2 - j_{12}]_q! [k - j_3 - q - j_{12}]_q! [k - j_1 - q - j_{23}]_q!} \times \\ &\times \frac{1}{[k - j_2 - j_3 - j_{23}]_q! [j_1 + j_2 + j_3 + q - k]_q! [j_1 + j_3 + j_{12} + j_{23} - k]_q! [j_2 + q + j_{12} + j_{23} - k]_q!} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Известно выражение для таких матриц Рака и через гипергеометрические функции.

6.2 Метод старших весов для матриц Рака

Для произвольной группы общие выражения не известны. Это значит, что нужно использовать другие подходы для их вычисления. Наиболее универсальный подход

состоит в вычислении старших векторов представлений и построении соответствующих матриц Рака из таких векторов. Данный метод основан на вычислении с помощью применения повышающих и понижающих операторов E_i и F_i . С помощью выражений для копроизведения квантовых групп (3.4) оказывается возможным найти вектора старшего веса различных представлений.

Эти вектора можно выразить как элементы тензорной степени фундаментального представления. Будем обозначать вектор старшего веса фундаментального представления за V_0 , а остальные вектора за $V_1, V_2, \dots$. В этом случае вектор старшего веса для представления, связанного с диаграммой Юнга $Q = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ должен быть суммой векторов следующего вида $-V_{(\underbrace{0, 0, 0, \dots}_{\lambda_1}, \underbrace{1, 1, 1, \dots}_{\lambda_2})}$, а также аналогичных векторов с переставленными индексами. Повышающие и понижающие операторы действуют на вектора фундаментального представления следующим образом

$$\begin{aligned} E_i V_i &= V_{i-1}; & F_i V_{i-1} &= V_i. \\ H_i V_i &= +V_i; & H_i V_{i-1} &= -V_{i-1}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Рассмотрим метод построения матриц Рака на примере произведения четырех фундаментальных представлений квантовой группы $U_q(sl_2)$. Это произведение можно разложить как:

$$[1]^{\otimes 4} = [4] + 3 \cdot [3, 1] + 2 \cdot [2, 2] + 3 \cdot [2, 1, 1] + [1, 1, 1, 1].$$

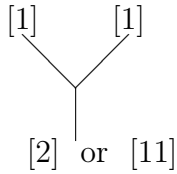
$$\begin{array}{c} [1]^{\otimes 4} \\ \swarrow \quad \searrow \\ [2] \otimes [1]^{\otimes 2} \quad [1, 1] \otimes [1]^{\otimes 2} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ [3] \otimes [1] \quad [2, 1] \otimes [1] \quad [2, 1] \otimes [1] \quad [1, 1, 1] \otimes [1] \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ [4] \quad [3, 1] \quad [3, 1] \quad [3, 1] \quad [2, 2] \quad [2, 2] \quad [2, 1, 1] \quad [2, 1, 1] \quad [2, 1, 1] \quad [1, 1, 1, 1] \end{array} \quad (6.10)$$

На нижнем уровне этого рисунка получается по 3 представления $[3, 1]$ и $[2, 1, 1]$, два представления $[2, 2]$, а представления $[4]$ и $[1, 1, 1, 1]$ появляются только по одному разу. Другое разложение можно построить, начиная с умножения двух представлений справа. Количество представлений в этом случае будет таким же, но три представления $[3, 1]$, например, будут линейной комбинацией представлений $[3, 1]$, получающихся

справа. Рассмотрим подробнее, как построить матрицу перехода между этими наборами, которая и будет матрицей Рака. Построим старшие вектора представлений, возникающих в различных степенях фундаментального представления.

6.2.1 Старшие вектора в $[1]^{\otimes 2}$

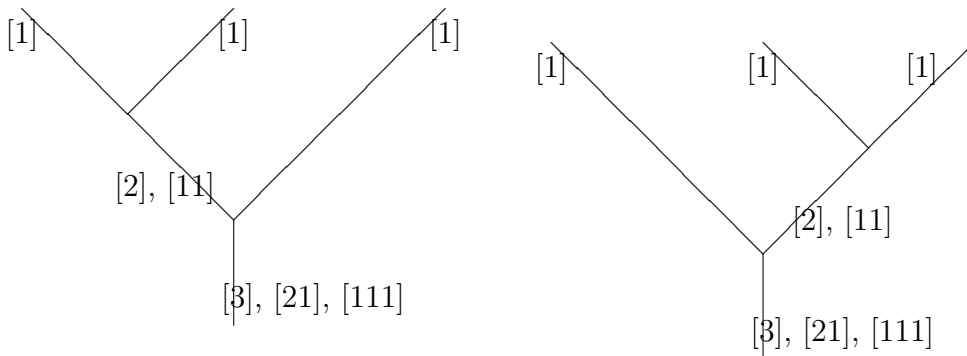
В этом случае есть только один базис:



$$\begin{array}{ccc}
 & [1]^2 & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \underline{[2]} & & \overline{[11]} \\
 T_{00} & & \\
 T_{10} + qT_{01} & & -qT_{10} + T_{01} \\
 T_{11} & &
 \end{array} \quad (6.11)$$

6.2.2 Уровень $m = 3$

В этом случае есть два возможных базиса:



Приведем вектора представлений, появляющихся в правом дереве В случае группы

$U_q(sl_2)$ (в этом случае представление $[1,1,1]$ отсутствует):

$$\begin{array}{ccc}
& \swarrow & \searrow \\
l[1] \otimes \underline{[2]} & & [1] \otimes \overline{[11]} \\
T_{000} & & \\
T_{001}; \quad T_{100} + qT_{010} & & -qT_{100} + T_{010} \\
T_{110}; \quad T_{101} + qT_{011} & & -qT_{101} + T_{011} \\
T_{111} & & \\
\downarrow & \searrow & \downarrow \\
\underline{[3]} & \underline{[21]} & \overline{[21]} \\
T_{000} & & \\
T_{100} + qT_{010} + q^2T_{001} \quad qT_{100} + q^2T_{010} - [2]_q T_{001} & & -qT_{100} + T_{010} \\
T_{110} + qT_{101} + q^2T_{011} \quad q^2[2]_q T_{110} - T_{101} - qT_{011} & & -qT_{101} + T_{011} \\
T_{111} & &
\end{array}$$

Вектора представлений для левого дерева устроены как

$$\begin{array}{ll}
[1]^3 \rightarrow \underline{[2]} \otimes [1] \rightarrow \underline{[3]} : & \begin{array}{l} T_{000} \\ T_{100} + qT_{010} + q^2T_{001} \\ T_{110} + qT_{101} + q^2T_{011} \\ T_{111} \end{array} \\
[1]^3 \rightarrow \underline{[2]} \otimes [1] \rightarrow \underline{[21]} : & \begin{array}{l} -q^2[2]_q T_{100} + T_{010} + qT_{001} \\ -[2]_q T_{011} + q^2T_{101} + qT_{110} \end{array} \\
[1]^3 \rightarrow \overline{[11]} \otimes [1] \rightarrow \overline{[21]} : & \begin{array}{l} -qT_{010} + T_{001} \\ -qT_{110} + T_{101} \end{array}
\end{array}$$

Запишем старшие вектора представлений $[2,1]$ слева и справа, а также квадрат их нормы:

$$\text{левый базис} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \underline{[21]} : & -q^2[2]_q T_{100} + T_{010} + qT_{001}; \quad ||\dots||^2 = q^3[2]_q[3]_q \\ \overline{[21]} : & -qT_{010} + T_{001}; \quad ||\dots||^2 = q[2]_q \end{array} \right.$$

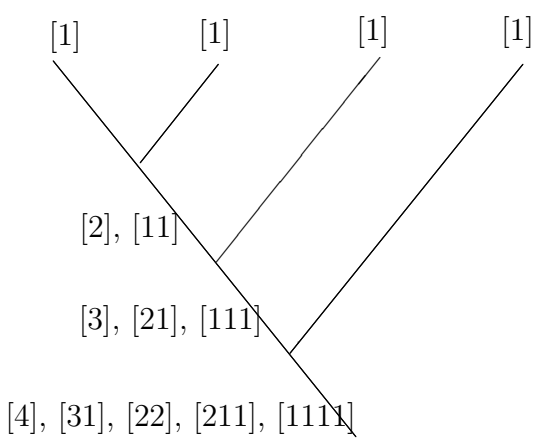
$$\text{правый базис} \longrightarrow \begin{cases} \underline{[21]} : & qT_{100} + q^2T_{010} - [2]_qT_{001}; & ||\dots||^2 = q[2]_q[3]_q \\ \overline{[21]} : & -qT_{100} + T_{010}; & ||\dots||^2 = q[2]_q \end{cases}$$

С помощью этих выражений можно построить матрицу Рака – матрицу перехода между этими базисами.

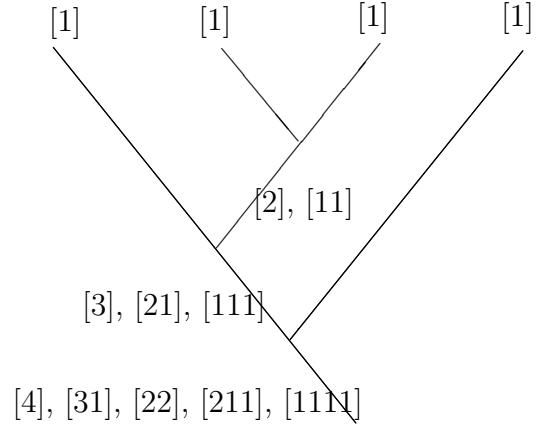
$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ -\frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{1}{[2]_q} \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

6.2.3 Уровень $m = 4$

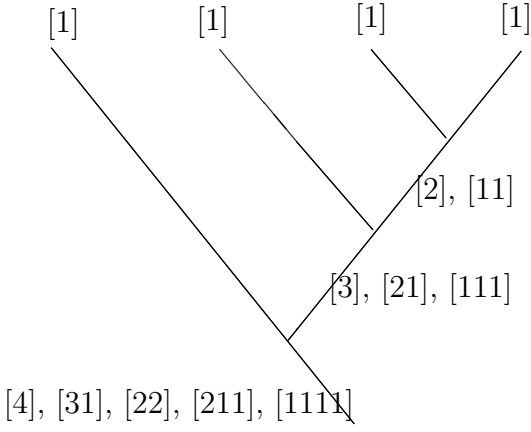
В этом случае есть 4 возможных выбора базиса:



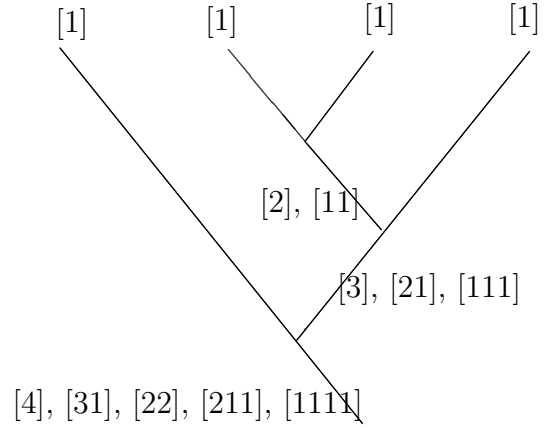
U



V



U



Вектора первого базиса равны

$$[1]^4 \rightarrow \underline{[2]} \otimes [1]^2 \rightarrow \underline{[3]} \times [1] \rightarrow \underline{[4]} :$$

$$[1]^4 \rightarrow \underline{[2]} \otimes [1]^2 \rightarrow \underline{[3]} \times [1] \rightarrow \underline{[31]} :$$

$$T_{0000}$$

$$T_{1000} + qT_{0100} + q^2T_{0010} + q^3T_{0001}$$

$$T_{1100} + qT_{1010} + q^2T_{0110} + q^2T_{1001} + q^3T_{0101} + q^4T_{0011}$$

$$T_{1110} + qT_{1101} + q^2T_{1011} + q^3T_{0111}$$

$$T_{1111}$$

$$T_{1000} + qT_{0100} + q^2T_{0010} - \frac{[3]_q}{q}T_{0001}$$

$$T_{1100} + qT_{1010} + q^2T_{0110} - \frac{1}{q^2}T_{1001} - \frac{1}{q}T_{0101} - T_{0011}$$

$$T_{1110} - \frac{1}{q^3}T_{1101} - \frac{1}{q^2}T_{1011} - \frac{1}{q}T_{0111}$$

$$\begin{aligned}
[1]^4 \rightarrow \underline{[2]} \otimes [1]^2 \rightarrow \underline{[21]} \times [1] \rightarrow \underline{[31]} : \quad & T_{1000} + qT_{0100} - \frac{[2]_q}{q}T_{0010} \\
& l[2]_q T_{1100} - \frac{1}{q^2}T_{1010} - \frac{1}{q}T_{0110} + qT_{1001} + q^2T_{0101} - [2]_q T_{0011} \\
& l[2]_q T_{1101} - \frac{1}{q^2}T_{1011} - \frac{1}{q}T_{0111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[1]^4 \rightarrow \overline{[11]} \otimes [1]^2 \rightarrow \overline{[21]} \times [1] \rightarrow \overline{[31]} : \quad & -qT_{1000} + T_{0100} \\
& -qT_{1010} + T_{0110} - q^2T_{1001} + qT_{0101} \\
& -qT_{1011} + T_{0111}
\end{aligned}$$

Среди векторов градуировки 1 можно увидеть старшие вектора трех представлений $[3, 1]$:

$$\begin{array}{lll}
\underline{[31]} & T_{1000} + qT_{0100} + q^2T_{0010} - \frac{[3]_q}{q}T_{0001} & q^{-1}[2]_q[3]_q(q^2 + q^{-2}) \\
\underline{[31]} & T_{1000} + qT_{0100} - \frac{[2]_q}{q}T_{0010} & q^{-1}[2]_q[3]_q \\
\overline{[31]} & -qT_{1000} + T_{0100} & q[2]_q
\end{array}$$

Среди векторов градуировки 2 также появляются старшие веса представления $[2, 2]$. Представления $[2, 1, 1]$ and $[1, 1, 1, 1]$ отсутствуют в случае $U_q(sl_2)$. Старшие веса представлений $[2, 2]$ равны:

$$\begin{aligned}
\underline{[21]} \otimes [1] & \longrightarrow \underline{[22]} & q[2]_q T_{1100} - \frac{1}{q}T_{1010} - T_{0110} - T_{1001} - qT_{0101} + \frac{[2]_q}{q}T_{0011} & [2]_q^2[3]_q \\
\overline{[21]} \otimes [1] & \longrightarrow \overline{[22]} & -qT_{1010} + T_{0110} + T_{1001} - \frac{1}{q}T_{0101} & [2]_q^2
\end{aligned}$$

Рассмотрим базис, связанный с правым верхним деревом. Этот базис связан с рассмотренным только что матрицей Рака U . Старшие вектора представлений $[3, 1]$ в этом базисе равны:

$$\begin{array}{lll}
\underline{[31]} & T_{1000} + qT_{0100} + q^2T_{0010} - \frac{[3]_q}{q}T_{0001} & q^{-1}[2]_q[3]_q(q^2 + q^{-2}) \\
\underline{[31]} & -q^2[2]_q T_{1000} + T_{0100} + qT_{0010} & q^3[2]_q[3]_q \\
\overline{[31]} & -qT_{0100} + T_{0010} & q[2]_q
\end{array}$$

В третьем базисе, переход к которому осуществляется матрицей V , старшие вектора представлений $[3, 1]$ равны:

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{c} [31] \\ [31] \\ \overline{[31]} \end{array} & \begin{array}{l} -q^2[3]_q T_{1000} + T_{0100} + qT_{0010} + q^2 T_{0001} \\ T_{0100} + qT_{0010} - \frac{[2]_q}{q} T_{0001} \\ -qT_{0100} + T_{0010} \end{array} & \begin{array}{l} q^5[2]_q[3]_q(q^2 + q^{-2}) \\ q^{-1}[2]_q[3]_q \\ q[2]_q \end{array}
\end{array}$$

Наконец, последний базис можно получить еще одним действием матрицы U .

Старшие вектора в этом базисе равны:

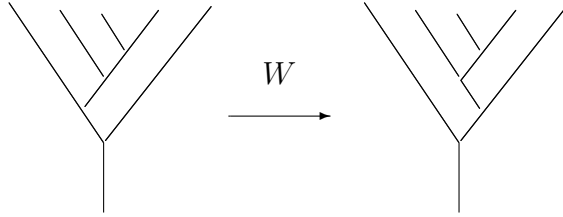
$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{c} [31] \\ [31] \\ \overline{[31]} \end{array} & \begin{array}{l} -q^3[3]_q T_{1000} + T_{0100} + qT_{0010} + q^2 T_{0001} \\ -q^2[2]_q T_{0100} + T_{0010} + qT_{0001} \\ -qT_{0010} + T_{0001} \end{array} & \begin{array}{l} q^5[2]_q[3]_q(q^2 + q^{-2}) \\ q^{-1}[2]_q[3]_q \\ q[2]_q \end{array}
\end{array}$$

Из этих формул можно получить выражения для матриц Рака:

$$\begin{aligned}
U &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ 0 & -\frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{1}{[2]_q} \end{pmatrix} \\
V &= \begin{pmatrix} \frac{1}{[3]_q} & \frac{[2]_q \sqrt{q^2 + q^{-2}}}{[3]_q} & 0 \\ -\frac{[2]_q \sqrt{q^2 + q^{-2}}}{[3]_q} & \frac{1}{[3]_q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

6.2.4 Коса шириной $m = 5$

Для косы шириной $m = 5$ добавляется еще одна матрица Рака W :



Старшие вектора представления $[4,1]$ в этих базисах равны

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{c} [41] \\ [41] \\ [41] \\ \overline{[41]} \end{array} & \begin{array}{l} T_{10000} + qT_{01000} + q^2 T_{00100} + q^3 T_{00010} - \frac{[4]_q}{q} T_{00001} \\ -q^3[3]_q T_{10000} + T_{01000} + qT_{00100} + q^2 T_{00010} \\ -q^2[2]_q T_{01000} + T_{00100} + qT_{00010} \\ -qT_{00100} + T_{00010} \end{array} & \begin{array}{l} q^{-1}[2]_q[5]_q(q^2 + q^{-2}) \\ q^5[2]_q[3]_q(q^2 + q^{-2}) \\ q^3[2]_q[3]_q \\ q[2]_q \end{array}
\end{array}$$

и

$$\begin{array}{ll}
\underline{[41]} & -q^4[4]_q T_{10000} + T_{01000} + qT_{00100} + q^2 T_{00010} + q^3 T_{00001} & q^7[2]_q[5]_q(q^2 + q^{-2}) \\
\underline{[41]} & T_{01000} + qT_{00100} + q^2 T_{00010} - \frac{[3]_q}{q} T_{00001} & q^{-1}[2]_q[3]_q(q^2 + q^{-2}) \\
\underline{[41]} & -q^2[2]_q T_{01000} + T_{00100} + qT_{00010} & q^3[2]_q[3]_q \\
\overline{[41]} & -qT_{00100} + T_{00010} & q[2]_q
\end{array}$$

Они связаны матрицей W размера 4×4 :

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{[4]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q[5]_q}}{[4]_q} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{[3]_q[5]_q}}{[4]} & \frac{1}{[4]_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Глава 7

Гипотеза о собственных значениях

Уравнение Янга-Бакстера (5.7) для $\mathcal{R}$ -матриц в косе можно переписать с помощью матриц Рака. Так как матрицу $\mathcal{R}_2$ выразить с помощью матриц Рака $\mathcal{R}_2 = U\mathcal{R}_1U^\dagger$, уравнение Янга-Бакстера записывается в виде

$$\mathcal{R}_1U\mathcal{R}_1U^\dagger\mathcal{R}_1 = U\mathcal{R}_1U^\dagger\mathcal{R}_1U\mathcal{R}_1U^\dagger. \quad (7.1)$$

Если выбрать базис, в котором матрица $\mathcal{R}_1$ – диагональна, то это уравнение связывает матрицу Рака с собственными значениями матрицы $\mathcal{R}_1$. Заметим также, что если матрицу $\mathcal{R}_1$ домножить на любой коэффициент, то уравнение (7.1) по-прежнему будет выполняться. Таким образом, параметрами в этом уравнении являются нормированные собственные значения

$$\xi_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt[n]{\prod_j \lambda_j}}, \quad (7.2)$$

где n – размер матрицы $\mathcal{R}_1$. Таким образом, $\prod_i \xi_i = 1$. Тем самым мы получаем следующее утверждение, которое было названо гипотезой о *собственных значениях*:

Если у двух $\mathcal{R}$ -матриц совпадают наборы нормированных собственных значений, то соответствующие им матрицы Рака также будут совпадать.

Уравнение (7.1) можно решить для матриц малых размеров. Матрица Рака должна быть ортогональной. Это значит, что матрицу Рака размера 2×2 можно записать в общем виде с одним параметром ϕ :

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Эта матрица определена с точностью до выбора знаков. Этот выбор, однако не влияет на решение уравнений. Уравнение на такую матрицу U можно решить и получить

$$U[\xi_1, \xi_2] = \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\xi_1^2 + 1 + \xi_2^2} \\ -\sqrt{\xi_1^2 + 1 + \xi_2^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Аналогичным образом, можно получить выражение для матрицы U размера 3×3 :

$$U[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{pmatrix} -\frac{\xi_1(\xi_2 + \xi_3)}{\xi_{12}\xi_{13}} & -\frac{1}{\xi_{12}} \sqrt{\frac{(\xi_1^3 + 1)(\xi_2^3 + 1)}{\xi_1\xi_2\xi_{13}\xi_{23}}} & -\frac{1}{\xi_{13}} \sqrt{\frac{(\xi_1^3 + 1)(\xi_3^3 + 1)}{\xi_1\xi_3\xi_{12}\xi_{32}}} \\ \frac{1}{\xi_{12}} \sqrt{\frac{(\xi_1^3 + 1)(\xi_2^3 + 1)}{\xi_1\xi_2\xi_{13}\xi_{23}}} & \frac{\xi_2(\xi_1 + \xi_3)}{\xi_{12}\xi_{23}} & \frac{1}{\xi_{23}} \sqrt{\frac{(\xi_2^3 + 1)(\xi_3^3 + 1)}{\xi_2\xi_3\xi_{12}\xi_{13}}} \\ -\frac{1}{\xi_{13}} \sqrt{\frac{(\xi_1^3 + 1)(\xi_3^3 + 1)}{\xi_1\xi_3\xi_{12}\xi_{32}}} & -\frac{1}{\xi_{23}} \sqrt{\frac{(\xi_2^3 + 1)(\xi_3^3 + 1)}{\xi_2\xi_3\xi_{12}\xi_{13}}} & -\frac{\xi_3(\xi_1 + \xi_2)}{\xi_{13}\xi_{23}} \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

и для матриц большего размера. По причине громоздкости выражений, не будем выписывать матрицы целиком. Запишем, как устроены недиагональные и диагональные элементы по отдельности. Квадраты недиагональных элементов для матриц размера $n = 2, 3, 4, 5$ равны при $i \neq j$:

$$U_{ij}^2 = \frac{1}{\xi_{ij}^2 \prod_{k \neq i, j}^n \xi_{ik}\xi_{jk}} \cdot \begin{pmatrix} n = 2 : & = \xi_1^2 - 1 + \xi_1^{-2} = \xi_2^2 - 1 + \xi_2^{-2} \\ n = 3 : & = -(\xi_i^3 + 1)(\xi_j^3 + 1)(\xi_i\xi_j)^{-1} = \\ & = -(\xi_i\xi_j)^{1/2}(\xi_i^{3/2} + \xi_i^{-3/2})(\xi_j^{3/2} + \xi_j^{-3/2}) \\ n = 4 : & \sim (\xi_i^2 - 1)(\xi_j^2 - 1) \prod_{k \neq i, j} (\xi_i\xi_k - 1 + (\xi_i\xi_k)^{-1}) \\ & = (\xi_i^2 - 1)(\xi_j^2 - 1) \prod_{k \neq i, j} (\xi_j\xi_k - 1 + (\xi_j\xi_k)^{-1}) \\ n = 5 : & (\xi_i\xi_j)(\xi_i + 1 + \xi_i^{-1})(\xi_j + 1 + \xi_j^{-1}) \cdot \\ & \cdot \prod_{k \neq i, j} (\xi_i\xi_k + 1)(\xi_j\xi_k + 1) \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

Знаки элементов U_{ij} можно восстановить с помощью следующего правила:

$$\sigma U = U^\dagger \sigma, \quad (7.7)$$

где σ — это диагональная матрица знаков, в которой знаки альтернируются. Также в формуле по прежнему остается неопределенность в знаках, которая состоит в том, что для матриц смешивания размера $(k + 1)$ остается k случайно определенных знаков — $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k = \pm 1$: $U_{ij} \sim \epsilon_{i-1}\epsilon_{j-1}U_{ij}$, которые оставляют матрицу Рака ортогональной.

Диагональные элементы матрицы U можно восстановить из свойства ортогональности матрицы Рака – $U_{ii}^2 = 1 - \sum_{j \neq i} U_{ij}^2$. Эти элементы равны:

$$U_{ii} = \frac{1}{\prod_{k \neq i} \xi_{ik}} \cdot \begin{pmatrix} n = 2 : & \sqrt{-1} \\ n = 3 : & -\xi_i \left(\sum_{k \neq i} \xi_k \right) \\ n = 4 : & \xi_i \left(\xi_i \left(\sum_{j \neq k \neq i} \xi_j \xi_k \right) - \sum_{k \neq i} \xi_k \right) \\ n = 5 : & \xi_i \left((\xi_i + 1) \left(1 + \sum_{k \neq i} (\xi_k + 1/\xi_k) \right) + \left(\sum_{k \neq j \neq i} \frac{1}{\xi_k \xi_j} \right) \right) \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

7.1 Гипотеза для симметрических представлений

7.1.1 Фундаментальное представление $T = [1]$

Рассмотрим подробнее как гипотеза о собственных значениях работает для симметрических представлений. Рассмотрим разложение по характерам (5.4). Для этого нужно начать с разложения произведения фундаментальных представлений в сумму неприводимых. Для 3-нитевой косы оно устроено как

$$[1] \otimes [1] \otimes [1] = [3] + 2 \cdot [21] + [111]. \quad (7.9)$$

Таким образом, в этом случае есть только одна нетривиальная матрица Рака размера 2×2 . Полином ХОМФЛИ при этом равен для косы $Br[a_1, b_1, \dots, a_n, b_n]$

$$A^{a_1+b_1+\dots} \mathcal{H}_{[1]}^{a_1, b_1 | \dots} = q^{a_1+b_1+\dots} S_3 + (-1/q)^{a_1+b_1+\dots} S_{111} + \left\{ \text{Tr}_{2 \times 2} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} q & \\ & -1/q \end{pmatrix}}_{\mathcal{R}_{[21]}} \underbrace{\frac{1}{[2]_q} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{[3]_q} \\ -\sqrt{[3]_q} & 1 \end{pmatrix}}_{U_{[21]}} \underbrace{\begin{pmatrix} q & \\ & -1/q \end{pmatrix}}_{\mathcal{R}_{[21]}} \underbrace{\frac{1}{[2]_q} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{[3]_q} \\ \sqrt{[3]_q} & 1 \end{pmatrix}}_{U_{[21]}^\dagger} \dots \right) \right\} S_{[21]}. \quad (7.10)$$

При выводе этой формулы также использовались собственные значения фундаментальной $\mathcal{R}$ -матрицы (5.9), соответствующие двум неприводимым представлениям $T = [2]$ и $T = [11]$ из разложения $[1] \otimes [1] = [2] + [11]$. Эти собственные значения равны $\lambda_1 = q^{\mathcal{Z}_{[2]}} A^{-1} = q/A$ and $\lambda_2 = -q^{\mathcal{Z}_{[11]}} A^{-1} = -1/(qA)$ соответственно.

Размерности представлений в этом случае равны

$$\begin{aligned} S_3^* &= \frac{\{A\}\{Aq\}\{Aq^2\}}{\{q\}\{q^2\}\{q^3\}}, \\ S_{21}^* &= \frac{\{Aq^{-1}\}\{A\}\{Aq\}}{\{q\}^2\{q^3\}}, \\ S_{111}^* &= \frac{\{Aq^{-2}\}\{Aq^{-1}\}\{A\}}{\{q\}\{q^2\}\{q^3\}}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Рассмотрим эти выражения с точки зрения гипотезы о собственных значениях. Нормированные собственные значения матрицы $\mathcal{R}_{[2,1]}$, связанной с представлением $[2, 1]$ равны

$$\xi_1 = q, \quad \xi_2 = -1/q. \quad (7.12)$$

Соответственно, матрица Рака получается равной

$$U_{[2,1]} = \frac{1}{q - (-q^{-1})} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{q^2 + 1 + (-q^{-1})^2} \\ -\sqrt{q^2 + 1 + (-q^{-1})^2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{[2]_q} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{[3]_q} \\ -\sqrt{[3]_q} & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

так как

$$\begin{aligned} [2]_q &= \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} = q + q^{-1}, \\ [3]_q &= \frac{q^3 - q^{-3}}{q - q^{-1}} = q^2 + 1 + q^{-2}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

7.1.2 Представление $T = [2]$

Собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы опять же определяются разложением на неприводимые представления $[2] \otimes [2] = [4] + [3, 1] + [2, 2]$, и они равны

$$\begin{aligned} \lambda_{[4]} &= q^{\varkappa_{[64]} - 4\varkappa_{[2]}} A^{-2} = q^2 A^{-2} \\ \lambda_{[3,1]} &= -q^{\varkappa_{[31]} - 4\varkappa_{[2]}} A^{-2} = -q^{-2} A^{-2} \\ \lambda_{[22]} &= q^{\varkappa_{[22]} - 4\varkappa_{[2]}} A^{-2} = q^{-4} A^{-2} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Для рассмотрения матриц Рака нужно записать разложение произведения трех представлений $[2]$:

$$\begin{aligned} [2] \otimes [2] \otimes [2] &= ([4] + [3, 1] + [2, 2]) \otimes [2] = \\ &= ([6] + [5, 1] + [4, 2]) + ([5, 1] + [4, 2] + [4, 1, 1] + [3, 3] + [3, 2, 1]) + ([4, 2] + [3, 2, 1] + [2, 2, 2]) = \\ &= [6] + [4, 1, 1] + [3, 3] + [2, 2, 2] + 2([5, 1] + [3, 2, 1]) + 3 \cdot [4, 2]. \end{aligned} \quad (7.16)$$

В этом случае мы можем видеть две матрицы Рака размера 2×2 и одну размера 3×3 . Матрица размера 3×3 соответствует двухстрочечной диаграмме Юнга, а потому может быть получена с помощью известной формулы (6.8) для $U_q(sl_2)$ матриц Рака.

Из гипотезы о собственных значениях мы получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{[5,1]} &= \begin{pmatrix} q^2 A^{-2} & 0 \\ 0 & -q^{-2} A^{-2} \end{pmatrix} = A^{-2} \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & -q^{-2} \end{pmatrix} \\ &\Downarrow \\ U_{[5,1]} &= \frac{1}{[2]_{q^2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{[3]_{q^2}} \\ -\sqrt{[3]_{q^2}} & 1 \end{pmatrix} = \frac{[2]_q}{[4]_q} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{[6]_q/[2]_q} \\ -\sqrt{[6]_q/[2]_q} & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{7.17}$$

где $[n]_{q^2} = (q^{2n} - q^{-2n})/(q^2 - q^{-2})$ – это квантовое число от переменной q^2 , а не q .

Аналогично и для других представлений. Для представлений $[3, 2, 1]$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{[3,2,1]} &= \begin{pmatrix} -q^{-2} A^{-2} & 0 \\ 0 & q^{-4} A^{-2} \end{pmatrix} = -q^{-3} A^{-2} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \\ &\Downarrow \\ U_{[3,2,1]} &= \frac{1}{[2]_q} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{[3]_q} \\ -\sqrt{[3]_q} & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{7.18}$$

и для представления $[4, 2]$:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{[4,2]} &= \begin{pmatrix} q^2 A^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-2} A^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & q^{-4} A^{-2} \end{pmatrix} = q^{-4/3} A^{-2} \begin{pmatrix} q^{10/3} & 0 & 0 \\ 0 & -q^{-2/3} & 0 \\ 0 & 0 & q^{-8/3} \end{pmatrix} \\ &\Downarrow \\ U_{[4,2]} &= \begin{pmatrix} \frac{[2]}{[3][4]} & -\frac{[2]}{[4]} \sqrt{\frac{[5]}{[3]}} & -\frac{\sqrt{[5]}}{[3]} \\ \frac{[2]}{[4]} \sqrt{\frac{[5]}{[3]}} & -\frac{[6]}{[3][4]} & \frac{1}{\sqrt{[3]}} \\ -\frac{\sqrt{[5]}}{[3]} & -\frac{1}{\sqrt{[3]}} & \frac{1}{[3]} \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{7.19}$$

7.1.3 Связи разных представлений

Заметим, что одна из матриц Рака, возникающих в случае представления $[2]$, совпадает с матрицей, возникающей при рассмотрении фундаментального представления $[1]$. Это не случайное совпадение, с точки зрения гипотезы о собственных значениях.

Рассмотрим тензорный квадрат симметрического представления $[p]$:

$$[p] \otimes [p] = \bigoplus_{j=0}^p [2p - j, j]\tag{7.20}$$

Соответствующие собственные значения равны

$$\begin{aligned}\lambda_{[2p-j,j]} &= (-1)^j q^{\varkappa_{[2p-j,j]} - 4\varkappa_{[p]}} A^{-p} = q^{(2p-j)(2p-j-1)/2 + (j)(j-1)/2 - j - 4p(p-1)/2} A^{-p} = \\ &= (-1)^j q^{j^2 + p - 2pj - j} A^{-p}.\end{aligned}\quad (7.21)$$

Рассмотрим представление $Q = [l, m, n]$, которое входит в $[p] \otimes [p] \otimes [p]$. Такое представление может получиться из представления $[2p-j, j]$ при выполнении следующих условий

$$\begin{aligned}2p-j &\leq l \leq 3p-j, \\ j &\leq m \leq p+j, \\ n &\leq j.\end{aligned}\quad (7.22)$$

Эти условия можно выразить по другому. Представление Q получается из всех представлений $[2p-j, j]$, таких, что

$$\max \begin{pmatrix} 2p-l \\ m-p \\ n \end{pmatrix} \leq j \leq \min \begin{pmatrix} 3p-l \\ 2p-m \\ m \end{pmatrix}.\quad (7.23)$$

Отметим, что $l + m + n = 3p$, значит $3p \geq l + m$, тогда условия упрощаются до

$$\max \begin{pmatrix} 2p-l \\ n \end{pmatrix} \equiv j_Q \leq j \leq J_Q \equiv \min \begin{pmatrix} 2p-m \\ m \end{pmatrix}.\quad (7.24)$$

Матрица Рака при этом имеет размер $(J_Q - j_Q)$.

Рассмотрим наборы собственных значений, отвечающие представлению Q из произведения $[p]^{\otimes 3}$ и представлению $\tilde{Q} = [l-1, m-1, n-1]$ из произведения $[\tilde{p}]^{\otimes 3} = [p-1]^{\otimes 3}$. Заметим, что $\tilde{j}_{\tilde{Q}} = j_Q - 1$ и $\tilde{J}_{\tilde{Q}} = J_Q - 1$. Для представлений $[\tilde{p}] = [p-1]$ и $[2\tilde{p} - \tilde{j}, \tilde{j}] = [2p-j-1, j-1]$ собственное значение равно

$$\lambda_{[2p-j-1, j-1]} = (-1)^{j-1} q^{j^2 + 3p - 2pj - j - 1} A^{-p+1}.\quad (7.25)$$

Заметим, что

$$\lambda_{[2p-j-1, j-1]} = -Aq^{2p-1} \lambda_{[2p-j, j]}.\quad (7.26)$$

Отношение таких двух собственных значений не зависит от j . Таким образом, наборы нормированных собственных значений совпадают для представления $[l, m, n]$, получившегося из тензорного куба представления $[p]$, и представления $[l-1, m-1, n-1]$,

получившегося из тензорного куба представления $[p-1]$. Из этого утверждения следует

$$U \begin{bmatrix} [p] & [p] \\ [p] & [l, m, n] \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} [p-n] & [p-n] \\ [p-n] & [l-n, m-n] \end{bmatrix} = U_{sl_2} \begin{bmatrix} p-n & p-n \\ p-n & l-m \end{bmatrix}. \quad (7.27)$$

Таким образом любая матрица Рака для симметрических представлений равна некоторой матрице Рака для квантовой группы $U_q(sl_2)$, для которых известна общая формула (6.8).

7.2 Гипотеза для матриц Рака $U_q(sl_2)$

Рассмотрим, как выполняется гипотеза для собственных значений для известных матриц Рака квантовой группы $U_q(sl_2)$. Для размера 2×2 такая матрица равна:

$$U_{U_q(sl_2)} \begin{bmatrix} p & p \\ p & 3p-1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{[p]_q}{[2p]_q} & \frac{\sqrt{[p]_q[3p]_q}}{[2p]_q} \\ -\frac{\sqrt{[p]_q[3p]_q}}{[2p]_q} & \frac{[p]_q}{[2p]_q} \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

Соответствующие собственные значения равны $\lambda_1 = q^{\varkappa[2p]-4\varkappa[p]-2}$ and $\lambda_2 = -q^{\varkappa[2p-1,1]-4\varkappa[p]-2}$, таким образом нормированные собственные значения равны $\xi_1 = q^p$ and $\xi_2 = -q^{-p} = -\xi_1^{-1}$. Тогда матрица Рака из гипотезы о собственных значениях равна this $U(2|p)$ becomes:

$$U_{U_q(sl_2)} \begin{bmatrix} p & p \\ p & 3p-1 \end{bmatrix} = U[\xi_1, \xi_2] = \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\xi_1^2 + 1 + \xi_2^2} \\ -\sqrt{\xi_1^2 + 1 + \xi_2^2} & 1 \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

Можно проверить, что эти два выражения совпадают. Также из гипотезы о собственных значениях следует, что равны следующие матрицы Рака

$$\begin{aligned} U_{[432]} = U_{[321]} &= U_{5,3} = U_{1,-1} = U_{4,2} &= U(2|p=1), \\ U_{[51]} = U_{[621]} = U_{[54]} &= U_{9,5} = U_{6,2} &= U(2|p=2), \\ U_{[81]} &= U_{15,9} &= U(2|p=3) \\ \dots & \end{aligned} \quad (7.30)$$

Для матриц размера 3×3 выражение в случае $U_q(sl_2)$ устроено как

$$U(3|p) = \begin{pmatrix} \frac{[p-1][p]}{[2p-1][2p]} & -\frac{[p]}{[2p]} \sqrt{\frac{[2] \cdot [p-1] \cdot [3p-1]}{[2p-2][2p-1]}} & -\frac{1}{[2p-1]} \sqrt{\frac{[p-1][p] \cdot [3p-2][3p-1]}{[2p-2][2p]}} \\ -\frac{[p]}{[2p]} \sqrt{\frac{[2] \cdot [p-1] \cdot [3p-1]}{[2p-2][2p-1]}} & -\frac{[p-1][p] \cdot [4p-2]}{[2p-2][2p-1][2p]} & \frac{[p-1]}{[2p-2]} \sqrt{\frac{[2][p] \cdot [3p-2]}{[2p-1][2p]}} \\ -\frac{1}{[2p-1]} \sqrt{\frac{[p-1][p] \cdot [3p-2][3p-1]}{[2p-2][2p]}} & -\frac{[p-1]}{[2p-2]} \sqrt{\frac{[2][p] \cdot [3p-2]}{[2p-1][2p]}} & \frac{[p-1][p]}{[2p-2][2p-1]} \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы $\lambda_1 = q^{\varkappa_{[2p]} - 4\varkappa[p] - 4}$, $\lambda_2 = -q^{\varkappa_{[2p-1,1]} - 4\varkappa[p] - 4}$, $\lambda_3 = q^{\varkappa_{[2p-2,2]} - 4\varkappa[p] - 4}$, если их нормировать, то получается

$$\begin{aligned} \xi_1 &= q^{2p - \frac{2}{3}} \\ \xi_2 &= -q^{-\frac{2}{3}} \\ \xi_3 &= q^{-(2p - \frac{4}{3})}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Таким образом матрица Рака из гипотезы о собственных значений равна:

$$U(3|p) = U[\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{pmatrix} -\frac{\xi_1(\xi_2 + \xi_3)}{\xi_{12}\xi_{13}} & -\frac{1}{\xi_{12}} \sqrt{\frac{(\xi_1^3 + 1)(\xi_2^3 + 1)}{\xi_1\xi_2\xi_{13}\xi_{23}}} & -\frac{1}{\xi_{13}} \sqrt{\frac{(\xi_1^3 + 1)(\xi_3^3 + 1)}{\xi_1\xi_3\xi_{12}\xi_{32}}} \\ \frac{1}{\xi_{12}} \sqrt{\frac{(\xi_1^3 + 1)(\xi_2^3 + 1)}{\xi_1\xi_2\xi_{13}\xi_{23}}} & \frac{\xi_2(\xi_1 + \xi_3)}{\xi_{12}\xi_{23}} & \frac{1}{\xi_{23}} \sqrt{\frac{(\xi_2^3 + 1)(\xi_3^3 + 1)}{\xi_2\xi_3\xi_{12}\xi_{13}}} \\ -\frac{1}{\xi_{13}} \sqrt{\frac{(\xi_1^3 + 1)(\xi_3^3 + 1)}{\xi_1\xi_3\xi_{12}\xi_{32}}} & -\frac{1}{\xi_{23}} \sqrt{\frac{(\xi_2^3 + 1)(\xi_3^3 + 1)}{\xi_2\xi_3\xi_{12}\xi_{13}}} & -\frac{\xi_3(\xi_1 + \xi_2)}{\xi_{13}\xi_{23}} \end{pmatrix}, \quad (7.33)$$

где $\xi_{ij} = \xi_i - \xi_j$. Заметим, что ξ_2 определено со знаком минус. Можно проверить, что выражения (7.33) и (7.31) совпадают.

Из гипотезы о собственных значениях следует, что следующие матрицы Рака должны быть равны

$$\begin{aligned} U_{[531]} &= U_{[42]} = U_{9,5,3} = U_{6,2,0} = U(3|p = 2), \\ U_{[72]} &= U_{15,9,5} = U(3|p = 3), \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.34)$$

7.3 Гипотеза для 4-нитевой косы

Для 4-нитевой косы существует 3 различных $\mathcal{R}$ -матрицы. Эти матрицы связаны двумя матрицами Рака (см. раздел 5.2), U и W_1 . Напомним, что $\mathcal{R}$ -матрицы должны удовлетворять соотношению группы кос (5.8)

$$\mathcal{R}_i \mathcal{R}_j \Big|_{i-j \neq 1} = \mathcal{R}_j \mathcal{R}_i. \quad (7.35)$$

Рассмотрим случай, когда все собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы различны. Тогда единственное решение уравнения (7.35) это $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1$. Матрица $\mathcal{R}_2$ при этом определяется с помощью 3-нитевой матрицы Рака U , как это описано в разделе 5.2.

Случай с совпадающими собственными значениями более интересный. Согласно разделу 5.2, как матрица Рака U , так и матрица W_1 блочно-диагональны. Также матрица W_1 коммутирует с матрицей $\mathcal{R}_1$. Если матрица $\mathcal{R}_1$ диагональна, то

$$\mathcal{R}_2 = U\mathcal{R}_1U^\dagger, \quad \mathcal{R}_3 = UW_1U\mathcal{R}_1U^\dagger W_1^\dagger U^\dagger, \quad (7.36)$$

с другой стороны, если диагонализировать матрицу $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}$, то $\mathcal{R}_3 = W_1U\mathcal{R}_2U^\dagger W_1^\dagger$, где матрица W_1 коммутирует с $\mathcal{R}$. Тогда уравнение Янга-Бакстера на матрицы $\mathcal{R}_2$ и $\mathcal{R}_3$ устроено как

$$\mathcal{R} \left(W_1U\mathcal{R}U^\dagger W_1^\dagger \right) \mathcal{R} = \left(W_1U\mathcal{R}U^\dagger W_1^\dagger \right) \mathcal{R} \left(W_1U\mathcal{R}U^\dagger W_1^\dagger \right). \quad (7.37)$$

Так как матрица W_1 коммутирует с матрицей $\mathcal{R}$, это уравнение можно переписать как

$$\mathcal{R}U\mathcal{R}U^\dagger \mathcal{R} = U\mathcal{R}U^\dagger \mathcal{R}U\mathcal{R}U^\dagger. \quad (7.38)$$

Это уравнение автоматически удовлетворяется согласно уравнению (7.1). Также в это уравнение не входит матрица W_1 . Таким образом матрицу W_1 нельзя найти из уравнения Янга-Бакстера. Но такую матрицу Рака можно найти из уравнения (7.35):

$$UW_1U\mathcal{R}U^\dagger W_1^\dagger U^\dagger \mathcal{R} = \mathcal{R}UW_1U\mathcal{R}U^\dagger W_1^\dagger U^\dagger \quad (7.39)$$

- 1) Если размер матриц равен 2×2 , или если матрица U смешивает все собственные значения, то матрица W_1 равна единичной матрице.
- 2) Если размер матриц равен 3×3 , а диагональная матрица $\mathcal{R}$ равна

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (7.40)$$

то

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \\ \frac{\sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2}}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\frac{\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

и

$$W_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 & \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2} \\ -\frac{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}(\lambda_1 - \lambda_2)} & \lambda_1 \lambda_2 \\ \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2} & \frac{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

Если порядок собственных значений в $\mathcal{R}$ -матрице отличен от рассмотренного или если пути в дереве представлений устроены по другому, смешивая первое и последнее собственные значения, то столбцы и строки в матрицах Рака U и W_1 нужно просто переставить, но те же формул будут по прежнему выполняться.

- 3) Для матрицы размера 6×6 , которая появляется в произведении четырех представлений [2], решения уравнений устроены следующим образом. Исходная диагональная матрица равна $\mathcal{R} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, тогда как матрица U состоит из трех блоков размеров 1×1 , 2×2 и 3×3 . Тогда матричные элементы можно найти с помощью гипотезы о собственных значениях для 3 нитей:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}}{\lambda_1 - \lambda_2} & & & & \\ \frac{\sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}}{\lambda_1 - \lambda_2} & -\frac{\sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} & & & & \\ & & \frac{\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} & \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3)}}{(\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)}} & \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2)}}{(\lambda_1 - \lambda_3)\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}} \\ & & \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3)}}{(\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_2)}} & -\frac{\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} & \frac{\sqrt{(\lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3)(\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2)}}{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{-(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}} \\ & & \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2)}}{(\lambda_1 - \lambda_3)\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)}} & \frac{\sqrt{(\lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3)(\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2)}}{(\lambda_2 - \lambda_3)\sqrt{-(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}} & \frac{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

Тогда из (7.39), можно построить матрицу W_1 :

$$W_1 = \begin{pmatrix} A_6 & D_6 & & E_6 \\ D_6 & B_6 & & F_6 \\ & & \frac{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3^2} & \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)}}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2} \\ E_6 & F_6 & & C_6 \\ & & \frac{\sqrt{(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^2 - \lambda_3^2)}}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2} & -\frac{\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_3^2} \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.44)$$

где

$$\begin{aligned}
A_6 &= \frac{\lambda_1^2 \lambda_2 (\lambda_2 + \lambda_3)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)}; & B_6 &= \frac{\lambda_2 (\lambda_1^3 - \lambda_1^2 \lambda_2 - \lambda_1^2 \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_3^2 + \lambda_2 \lambda_3^2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)}{(\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2)(\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)}; \\
C_6 &= \frac{\lambda_1 \lambda_3 (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2)}; & D_6 &= \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2} \sqrt{\frac{\lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3)(\lambda_1^3 - \lambda_2^2 \lambda_3)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2)}}; \\
E_6 &= -\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3} \sqrt{\frac{\lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1^3 - \lambda_2^2 \lambda_3)}{(\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2)(\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)}}; & F_6 &= -\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2} \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_3)}{(\lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2)}}.
\end{aligned}
\tag{7.45}$$

Глава 8

2-мостовые и древоподобные узлы

Рассмотрим подробнее как формализм Решетихина-Тураева работает не для кос, а для диаграммы-плетенки. Ключевым элементом такой диаграммы является замыкание, которое соединяет две нити с одной стороны, см. Рис.8.1. В классическом формализме Решетихина-Тураева такое замыкание описывается оператором $\mathcal{M}$. С точки зрения теории представлений, оно соответствует проекции на тривиальное представление с диаграммой Юнга $\emptyset$. Таким образом, если нити, ориентированной направо соответствует представление Y , то нити, ориентированной влево соответствует сопряженное представление $\bar{Y}$.

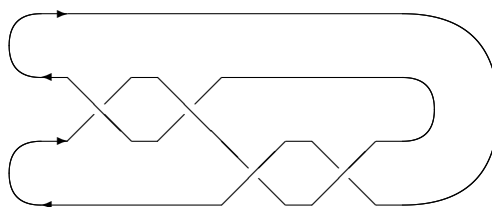


Рис. 8.1: Диаграмма-плетенка для узла-восьмерки 4_1 .

Рассмотрим 4-плетенки, то есть такие диаграммы, которые получаются из 4-нитевой косы. Такие узлы также называют 2-мостовыми, так как их можно нарисовать на плоскости только с двумя “мостами”, поднимающимися над этой плоскостью. Еще одно их название – рациональные узлы.

С обоих краев полное неприводимое представление в косе проецируется на тривиальное $\emptyset \otimes \emptyset = \emptyset$. Соответственно всюду в косе полное неприводимое представление – тривиальное представление.

Из описанных утверждение следует, что все матрицы в такой косе можно описать с помощью 4 матриц. Во-первых, это две диагональных $\mathcal{R}$ -матрицы:

$$\mathcal{R}_{Y \otimes Y} = \mathcal{R}_{\bar{Y} \otimes \bar{Y}} \equiv T, \quad \mathcal{R}_{Y \otimes Y} = \mathcal{R}_{\bar{Y} \otimes \bar{Y}} \equiv T, \quad \mathcal{R}_{Y \otimes \bar{Y}} = \mathcal{R}_{\bar{Y} \otimes Y} \equiv \bar{T}. \quad (8.1)$$

Во-вторых, с учетом симметрий тетраэдра, это две матрицы Рака:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \begin{bmatrix} Y & \bar{Y} & Q \\ Y & Y & Q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} & Y & Q \\ \bar{Y} & \bar{Y} & Q' \end{bmatrix}, \\ S &= \begin{bmatrix} Y & Y & Q \\ \bar{Y} & Y & Q' \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} Y & \bar{Y} & Q \\ \bar{Y} & \bar{Y} & Q' \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{Y} & Y & Q \\ Y & Y & Q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} & \bar{Y} & Q \\ Y & \bar{Y} & Q' \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (8.2)$$

Отметим, что из-за того, что общее представление в косе – тривиальное, четвертое представление не произвольное представление из произведения трех остальных, как это было в Главе 5, но одно конкретное представление, равное Y или $\bar{Y}$ в зависимости от конфигурации. По этой причине такие матрицы Рака называются эксклюзивными.

Полином ХОМФЛИ-ПТ для узла-плетенки равен матричному элементу произведения $\mathcal{R}$ -матриц и матриц Рака. Так, для узла на Рис. 8.1:

$$H^{4_1} = (\bar{S} \bar{T}^2 \bar{S} \bar{T}^2 \bar{S})_{\emptyset \emptyset}. \quad (8.3)$$

8.1 Древоподобные узлы

Если диаграмму узла-плетенки не замыкать с одной стороны, то такой косе соответствует оператор, действующий на неприводимых представлениях в произведении двух нитей. Так, если не замыкать косу 8.1 слева, то такому фрагменту будет соответствовать оператор

$$\mathcal{B}_{\bar{X} \emptyset} (\bar{S} \bar{T}^2 \bar{S} \bar{T}^2 \bar{S})_{\bar{X} \emptyset}, \quad (8.4)$$

где $\bar{X} \in Y \otimes \bar{Y}$. Если же такую косу не замыкать с двух сторон, то получится оператор, действующий на двух пространствах неприводимых представлений

$$\mathcal{B}_{\bar{X} \bar{Y}} (\bar{S} \bar{T}^2 \bar{S} \bar{T}^2 \bar{S})_{\bar{X} \bar{Y}}, \quad (8.5)$$

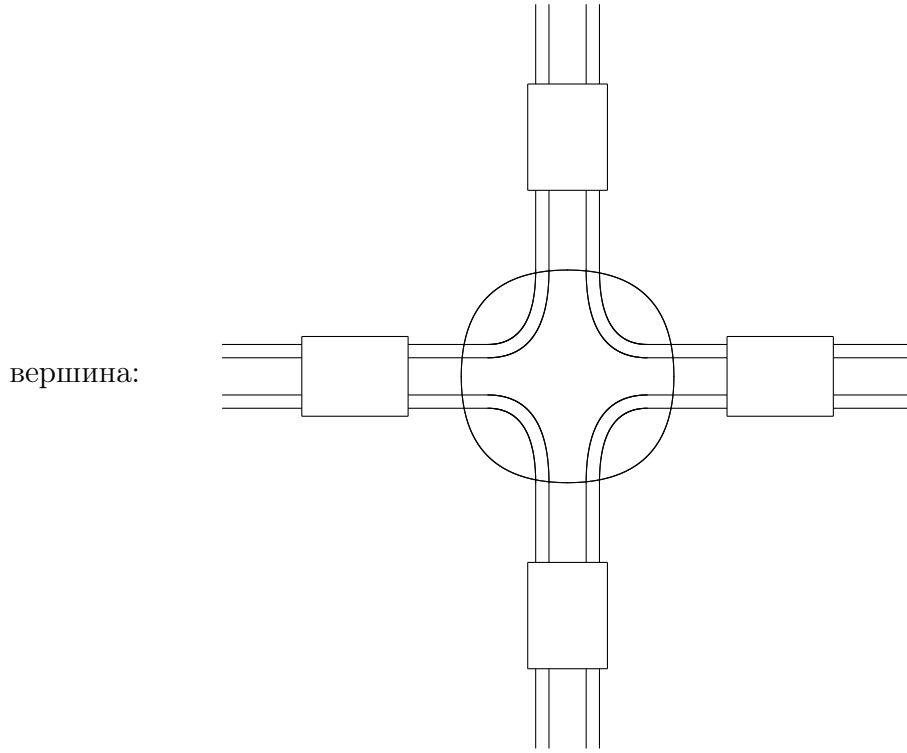


Рис. 8.2: Вершина древоподобного узла

при условии, что полное представление во всей косе остается тривиальным. Из наличия таких выражений возникает идея рассмотрения древоподобных узлов.

Если такие открытые косы соединить друг с другом с помощью некоторой вершины, как на Рис. 8.2, то получившийся объект будет отвечать

$$\sum_X \prod_i B_{XY_i}^{(i)}, \quad (8.6)$$

где $B_{XY}^{(i)}$ – оператор, отвечающий открытой косе, произведение идет по всем косам, соединяющимся в данной вершине, а сумма по всем неприводимым представлениям, в тензорном произведении представлений, связанных с парой соединяющих косы нитей. В таких вершинах может соединяться любое число кос. Различные вершины могут соединяться посредством открытой с двух сторон косы – пропагатора или ветки, см. Рис.8.3.

Если косу замкнуть с одной стороны, то получается лист древоподобного узла, см. Рис. 8.4.

С помощью таких элементов можно собирать древоподобные узлы. Вершины

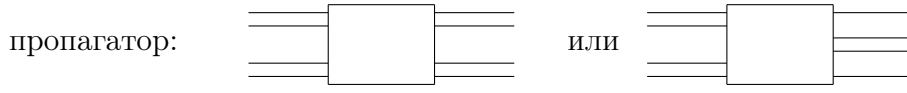


Рис. 8.3: Пропагаторы древоподобной диаграммы

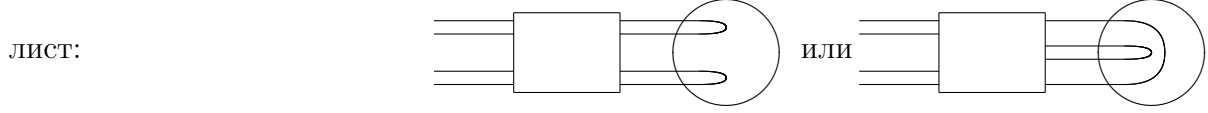


Рис. 8.4: Лист древоподобного узла

соединяются ветками-пропагаторами, а в вершинах могут соединяться различные пропагаторы и листья. Полиномы таких узлов можно вычислять с помощью тех же элементов, которые используются для вычисления двухместовых узлов. Отметим, что если в дереве есть цикл, то есть из одной вершины в другую можно попасть двумя способами, то тогда элементов двухместовых кос не хватит. В этом случае в двухместовых косах в таком цикле не только тривиальное представление, но также и все остальные. Из-за этого вычислить полиномы таких узлов намного сложнее.

Полином древоподобного узла устроен как

$$\mathcal{H}_R^K = \sum_{\{X_\mu, a_i^{(\mu)}\}} \sigma_{X|a} \prod_{\text{vertices } \mu} d_{X_\mu} \prod_{\text{propagators } \mu\nu} \frac{d_R}{\sqrt{d_{X_\mu} d_{X_\nu}}} \mathcal{B}_{X_\mu X_\nu}^{a_i^{(\mu)} a_j^{(\nu)}}, \quad (8.7)$$

где d_X – квантовые размерности представления X , $\sigma = \pm 1$ – описывают знаки в суммирования для старших представлений.

Если древоподобная диаграммы имеет один открытый пропагатор, не соединенный с вершиной, то его можно вставить в трехнитевую косу вместо $\mathcal{R}$ -матрицы.

8.2 Полиномы узлов-мутантов

Особый интерес с точки зрения математической теории узлов представляют цветные полиномы для особого класса узлов – узлов мутантов. Узлами-мутантами называется пара или группа узлов, связанных операцией мутации. Если узел разрезать на две части так, чтобы эти две части соединялись четырьмя линиями, то при развороте одной из частей на 180° вокруг любой оси получится узел-мутант, см. Рис.8.5.

Для малого числа пересечений такие узлы обычно совпадают, но начиная с 11 пересечений начинают появляться пары таких узлов-мутантов. При большем числе пересечений могут возникнуть уже и целые группы таких узлов.

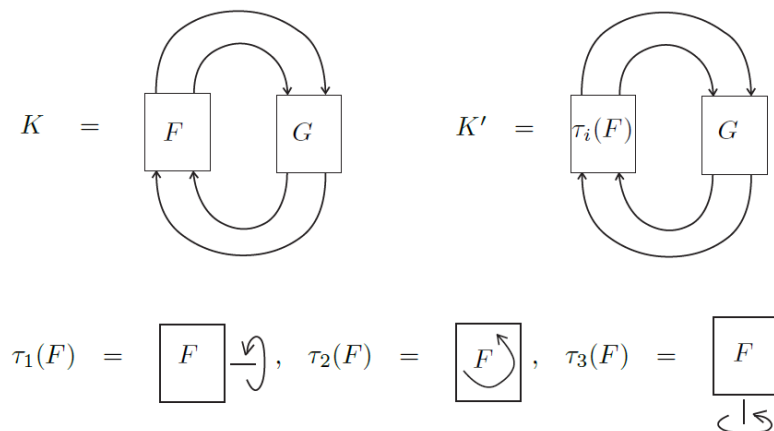


Рис. 8.5: Операция мутации

Такие узлы интересны тем, что их полиномы во всех симметрических и антисимметрических представлениях совпадают [53, 117]. Поэтому для таких узлов особенно интересно найти полиномы в несимметрических представлениях.

Для того, чтобы узлы, связанные операцией мутации отличались друг от друга, они должны быть достаточно сложными. По этой причине, их нельзя описать трехнитевой косой. Среди древоподобных узлов, однако, пары узлов-мутантов встречаются. В диссертации вычислены полиномы узлов-мутантов в простейшем несимметрическом представлении [2, 1], с использованием матриц Рака, найденных в [66].

Пары узлов-мутантов возникают в первый раз для узлов с 11 пересечениями. Существует 16 пар таких узлов мутантов. В Таблице 8.1 приведены вычисленные разницы между полиномами ХОМФЛИ-ПТ узлов мутантов.

Анализ полученных разностей позволяет записать общее выражение для разностей полиномов узлов-мутантов:

$$\boxed{H_{[21]}^{\mathcal{K}_1} - H_{[21]}^{\mathcal{K}_2} = \{q\}^4 \cdot \{Aq^3\}^2 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2 \cdot A^\gamma \cdot M_{[21]}^{\mathcal{K}}(q^2)}, \quad (8.8)$$

где функция $M_{[21]}^{\mathcal{K}}(q^2)$ зависит от рассматриваемой пары мутантов.

$\mathcal{K}_1$	$\mathcal{K}_2$	$H_{\mathcal{K}_1} - H_{\mathcal{K}_2}$
11a44	11a47	$A^{\frac{[3]^2[8][14]}{[2]^2[7]}} \cdot \{q\}^4 \{Aq^3\}^3 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2$
11a231	11a57	$A^{-5} \frac{[3]^2[8][14]}{[2]^2[7]} \cdot \{q\}^4 \{Aq^3\}^3 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2$
11n34	11n42	$-A^3 \cdot \frac{[3]^2[14]^2}{[2]^2[7]^2} \{q\}^4 \{Aq^3\}^2 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2$
11n36	11n44	$A^{-9} \frac{[3]^2[14]}{[2][7]} \cdot \{q\}^4 \{Aq^3\}^3 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2$
11n39	11n45	$A^{-3} \frac{[3]^2[14]^2}{[2]^2[7]^2} \cdot \{q\}^4 \{Aq^3\}^3 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2$
11n41	11n47	$A^{-15} \frac{[3]^2[14]}{[2][7]} \cdot \{q\}^4 \{Aq^3\}^3 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2$
11n71	11n75	$A^{13} \frac{[3]^2[8]}{[2]} \cdot \{q\}^4 \{Aq^3\}^3 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2$
11n73	11n74	$-A^{-3} \cdot \frac{[3]^2[8][14]}{[2]^2[7]} \cdot \{q\}^4 \{Aq^3\}^3 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2$
11n76	11n78	$A^{-15} \cdot \frac{[3]^2[8]}{[2]} \cdot \{q\}^4 \{Aq^3\}^3 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2$
11n151	11n152	$A^{-9} \frac{[3]^2[14]^2}{[2]^2[7]^2} \cdot \{q\}^4 \{Aq^3\}^3 \{Aq^2\} \{A\} \{A/q^2\} \{A/q^3\}^2$

Таблица 8.1: Разницы между полиномами ХОМФЛИ-ПТ узлов-мутантов в представлении $[2, 1]$

Структура этой разности не случайна. Полиномы Александера и Джонса узлов мутантов совпадают. В случае полиномов Александера это связано с тем что полиномы Александера в старших представлениях, которым отвечает диаграмма Юнга в виде крюка, связаны с фундаментальными полиномами ХОМФЛИ-ПТ [61]

$$P_Y(q) = P_{[1]}(q^{|Y|}), \quad P_Y(q) = H_Y(A = 1, q). \quad (8.9)$$

Так как полиномы ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении совпадают для узлов мутантов, соответственно и полиномы Александера в представлении $[2, 1]$ также совпадают. Из этого следует, что разницы (8.8) должны быть пропорциональны $\{A\}$.

Полиномы Джонса связаны с полиномами ХОМФЛИ-ПТ в симметрических представлениях, в частности

$$H_{[2,1]}(A = q^2, q) = J_{[2,1]}(q) = J_{[1]}(q) = H_{[1]}(A = q^2, q). \quad (8.10)$$

Таким образом разности (8.8) должны быть пропорциональны $\{Aq^{-2}\}$. Кроме того эта разница также должна зануляться и при $A = q^3$ [53]. Также обращение $q \rightarrow q^{-1}$ соответствует транспонированию представления $Y \rightarrow Y^T$. Так как диаграмма Юнга

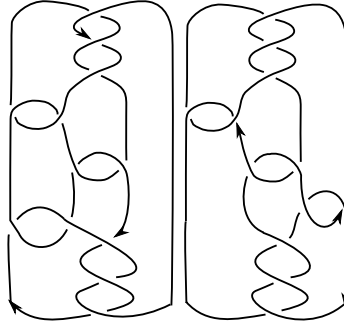


Рис. 8.6: Узлы (а) Киношиты-Терасаки и (b) Конвея

$[2, 1]$ не меняется при транспонировании, ответ должен быть симметричен относительно замены $q \rightarrow q^{-1}$. Соответственно разность должна быть пропорциональна:

$$H_{[21]}^{\mathcal{K}_1} - H_{[21]}^{\mathcal{K}_2} \sim \{Aq^3\}\{Aq^2\}\{A\}\{A/q^2\}\{A/q^3\}, \quad (8.11)$$

Остальные множители получены эмпирически.

Отметим любопытный факт, что для некоторых пар мутантов разности совпадают: для пар 11n36/11n44 и 11n41/11n47; 11n39/11n45 и 11n151/11n152; 11n71/11n75 и 11n76/11n78; 11a47/11a44, 11a57/11a231 и 11n73/11n74. Полные выражения для полиномов тем не менее различны [147].

Наиболее широко известна пара мутантов, состоящая из узла Киношиты-Терасаки 11n42 и узла Конвея 11n34, см. Рис.. В данной работе мы приводим выражения¹ для полиномов ХОМФЛИ-ПТ таких узлов в представлении $[2, 1]$,

¹Для записи полинома используется запись, предложенная в [?]. Полиномы записываются в виде матрицы коэффициентов при A^2 и q^2 по следующему правилу:

$$q^{10} A^{16} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = q^{10} A^{16} + 2q^{12} A^{16} + 3q^{10} A^{18} + 4q^{12} A^{18}.$$

$$H_{[21]}^{11n34} = \frac{1}{q^{36}A^6}. \quad (8.12)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & -9 & 14 & -17 & 22 & -25 & 29 & -29 & 30 & -29 & 29 & -25 & 22 & -17 & 14 & -9 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 3 & -18 & 28 & -61 & 94 & -144 & 178 & -226 & 245 & -264 & 245 & -226 & 178 & -144 & 94 & -61 & 28 & -18 & 3 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 9 & -13 & 29 & -30 & 57 & -52 & 84 & -77 & 121 & -107 & 169 & -165 & 213 & -176 & 213 & -165 & 169 & -107 & 121 & -77 & 84 & -52 & 57 & -30 & 29 & -13 & 9 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & 3 & -16 & 16 & -56 & 60 & -130 & 144 & -250 & 239 & -356 & 327 & -431 & 351 & -452 & 368 & -452 & 351 & -431 & 327 & -356 & 239 & -250 & 144 & -130 & 60 & -56 & 16 & -16 & 3 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & -8 & 24 & -21 & 55 & -49 & 105 & -79 & 183 & -157 & 307 & -275 & 488 & -446 & 662 & -567 & 738 & -567 & 662 & -446 & 488 & -275 & 307 & -157 & 183 & -79 & 105 & -49 & 55 & -21 & 24 & -8 & 6 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -6 & 8 & -24 & 22 & -54 & 46 & -105 & 80 & -185 & 168 & -347 & 332 & -574 & 547 & -798 & 701 & -888 & 701 & -798 & 547 & -574 & 332 & -347 & 168 & -185 & 80 & -105 & 46 & -54 & 22 & -24 & 8 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 15 & -16 & 57 & -61 & 131 & -142 & 248 & -212 & 309 & -229 & 311 & -170 & 263 & -141 & 263 & -170 & 311 & -229 & 309 & -212 & 248 & -142 & 131 & -61 & 57 & -16 & 15 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -9 & 12 & -27 & 30 & -58 & 51 & -89 & 85 & -133 & 102 & -163 & 137 & -186 & 130 & -186 & 137 & -163 & 102 & -133 & 85 & -89 & 51 & -58 & 30 & -27 & 12 & -9 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -4 & 19 & -32 & 67 & -95 & 142 & -172 & 218 & -228 & 246 & -228 & 218 & -172 & 142 & -95 & 67 & -32 & 19 & -4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -5 & 9 & -15 & 20 & -27 & 32 & -38 & 40 & -42 & 40 & -38 & 32 & -27 & 20 & -15 & 9 & -5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{[21]}^{11n42} = \frac{1}{q^{34}A^6}. \quad (8.13)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & -9 & 14 & -17 & 22 & -25 & 29 & -29 & 30 & -29 & 29 & -25 & 22 & -17 & 14 & -9 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & -1 & -10 & 14 & -37 & 58 & -95 & 116 & -154 & 165 & -180 & 165 & -154 & 116 & -95 & 58 & -37 & 14 & -10 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 7 & -6 & 17 & -11 & 27 & -13 & 38 & -26 & 73 & -64 & 131 & -138 & 193 & -156 & 193 & -138 & 131 & -64 & 73 & -26 & 38 & -13 & 27 & -11 & 17 & -6 & 7 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -6 & 3 & -12 & 5 & -30 & 14 & -62 & 49 & -132 & 108 & -216 & 189 & -305 & 233 & -344 & 268 & -344 & 233 & -305 & 189 & -216 & 108 & -132 & 49 & -62 & 14 & -30 & 5 & -12 & 3 & -6 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 8 & -1 & 13 & 14 & -3 & 59 & -37 & 142 & -113 & 254 & -201 & 385 & -310 & 492 & -375 & 540 & -375 & 492 & -310 & 385 & -201 & 254 & -113 & 142 & -37 & 59 & -3 & 14 & 13 & -1 & 8 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -8 & 1 & -12 & -13 & 0 & -59 & 38 & -144 & 124 & -294 & 258 & -471 & 411 & -628 & 509 & -690 & 509 & -628 & 411 & -471 & 258 & -294 & 124 & -144 & 38 & -59 & 0 & -13 & -12 & 1 & -8 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 6 & -3 & 11 & -5 & 31 & -15 & 63 & -47 & 130 & -81 & 169 & -91 & 185 & -52 & 155 & -41 & 155 & -52 & 185 & -91 & 169 & -81 & 130 & -47 & 63 & -15 & 31 & -5 & 11 & -3 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & 5 & -15 & 11 & -28 & 12 & -43 & 34 & -85 & 59 & -125 & 110 & -166 & 110 & -166 & 110 & -125 & 59 & -85 & 34 & -43 & 12 & -28 & 11 & -15 & 5 & -7 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 11 & -18 & 43 & -59 & 93 & -110 & 146 & -148 & 162 & -148 & 146 & -110 & 93 & -59 & 43 & -18 & 11 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -5 & 9 & -15 & 20 & -27 & 32 & -38 & 40 & -42 & 40 & -38 & 32 & -27 & 20 & -15 & 9 & -5 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Глава 9

Метод гиперкуба

В этом разделе мы рассмотрим метод вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ, не требующий применения $\mathcal{R}$ -матриц. Этот метод основан на определении кохомологических инвариантов Хованова-Рожанского [116]-[123]. Эти инварианты являются обобщением полиномов ХОМФЛИ-ПТ, однако, они сложны в вычислении. Если остановиться на промежуточном шаге в процессе их вычисления, то можно получить полиномы ХОМФЛИ-ПТ. Данный метод наиболее полезен для вычисления полиномов виртуальных узлов, для которых не применим формализм Решетихина-Тураева.

9.1 Скобка Кауффмана

Обсудим немного подробнее подход скобки Кауффмана к вычислению полиномов Джонса. Как уже было сказано, согласно подходу скобки Кауффмана полиномы Джонса трех узлов и зацеплений связаны следующими соотношениями:

$$J^{\mathcal{K}^+}(q) = qJ^{\mathcal{K}^0} - q^2J^{\mathcal{K}^-}, \quad (9.1)$$

$$J^{\mathcal{K}^-}(q) = q^{-1}J^{\mathcal{K}^0} - q^{-2}J^{\mathcal{K}^=},$$

где различные узлы отвечают замене какого-то пересечения на диаграмме узла четырьмя способами

$$\mathcal{K}^+ \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}, \quad \mathcal{K}^- \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array}, \quad \mathcal{K}^0 \longleftrightarrow \begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \nwarrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) \begin{array}{c} \nwarrow \nwarrow \\ \nearrow \nearrow \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nwarrow \\ \nearrow \nearrow \end{array} \right) \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}. \quad (9.2)$$

Если мы заменим все пересечения в узле согласно (9.1), разрешим их, то зацепление (для обычных, а не виртуальных узлов) превратится в набор несвязанных

окружностей. В случае замены K^0 такой набор окружностей носит название циклов Сейферта данной диаграммы узла. Ненормированный полином Джонса для такого набора окружностей равен $[2]_q^n$, где n – число окружностей.

Каждое пересечение в узле можно заменить двумя способами, соответственно согласно подходу скобки Кауффмана, узлу с k пересечениями сопоставляется гиперкуб разрешений, размера 2^k , каждому разрешению – размерности для получившегося набора окружностей $[2]_q^n$. Полином можно получить просуммировав эти размерности согласно (9.1).

Для виртуальных узлов построения аналогичны, только получившиеся циклы могут быть зацеплены друг с другом посредством виртуальных пересечений (см. Главу 2.1). Такие пересечения, однако, не изменяют квантовой размерности разрешений.

Для полиномов ХОМФЛИ-ПТ такой подход не работает, так как разрешение $K^=$ некорректно рассматривать для произвольной группы $U_q(sl_N)$. Это разрешение соответствует переходу представления в сопряженное (развороту стрелки). В случае $U_q(sl_2)$ сопряжение не меняет представление, но это не так для произвольного N . Рассмотрим, как этот подход можно модифицировать для группы $U_q(sl_N)$.

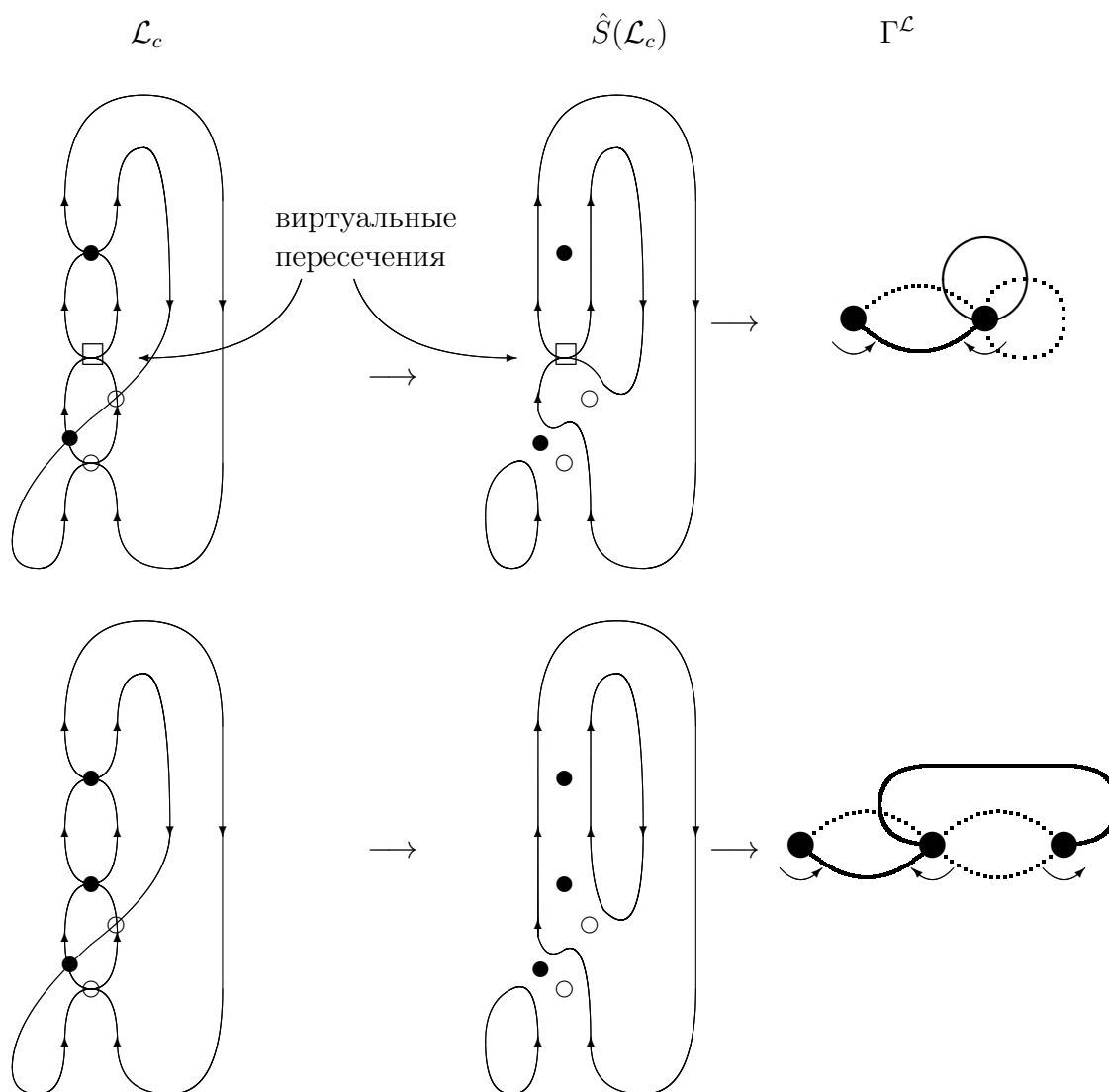
9.2 Разложение Сейферта диаграмм зацепления и толстые графы

Полиномы узлов и зацеплений на самом деле определяются не для узлов, а для диаграмм узла $\mathcal{L}_C$, которые являются графами, а именно $(2, 2)$ -валентными направленными графами. Для зацеплений в пространстве $\mathbb{R}^3$ (те зацепления, которые рассматриваются обычно в теории узлов, будем называть их обычными) диаграммы зацепления – плоские. Неплоские диаграммы зацепления связаны с виртуальными зацеплениями – зацеплениями в пространствах сложной топологии. Диаграммы обычных зацеплений могут иметь вершины двух типов – будем называть их в данном разделе черными и белыми. В формализме Решетихина-Тураева (см. Главы 4 и 5) эти вершины отвечают прямой и обратной $\mathcal{R}$ -матрице.

Если все пересечения в зацеплении *разрешить*:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} & = & \begin{array}{c} \nearrow \bullet \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \\
 \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} & = & \begin{array}{c} \nwarrow \circ \searrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array}
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{Разрешение Сейферта}} \begin{array}{c} \frown \\ \smile \end{array} \quad (9.3)$$

то диаграмма зацепления распадается на набор циклов Сейферта – ориентированных замкнутых линий, которые не пересекаются для обычных зацеплений. Рассмотрим пример двух зацеплений – виртуального и обычного. Данные зацепления распадутся на два и три цикла Сейферта соответственно:



Разрешение Сейферта не зависит от цвета вершин в диаграмме зацепления, а виртуальные пересечения не должны быть разрешены. В третьем столбце мы нарисовали

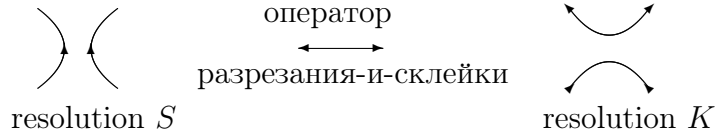
диаграмму разрешения Сейферта $\hat{S}(\mathcal{L}_C)$ с помощью графа $\Gamma^{\mathcal{L}_c}$. У этого графа вершины это циклы Сейферта, а ребра это пересечения исходного узла. Для сохранения всей информации об исходной диаграмме узлы, нужно сравнить порядок присоединения ребер к вершинам в данном графе, то есть $\Gamma^{\mathcal{L}_c}$ – это толстый граф. Таким образом, белые и черные вершины в левом столбце превратились в белые (пунктирные) и черные ребра на графе в правом столбце.

Диаграмма зацепления $\mathcal{L}_C$ – диаграмма зацепления с n вершинами, раскрашенными в черный или белый цвет – может иметь 2^n различных раскрасок. Также диаграмма зацепления имеет 2^n различных разрешений, если каждую вершину можно разрешить двумя способами, как мы обсудим ниже. Таким образом диаграмме зацепления можно поставить в соответствие n -мерный гиперкуб. У гиперкуба разрешений есть выделенная вершина Сейферта, соответствующая разрешению Сейферта (9.3) для всех пересечений. Отметим, что такой гиперкуб не зависит от раскраски вершин, раскраска вершин может отвечать одной из вершин гиперкуба если формально отождествить раскраску вершин с разрешениями.

9.2.1 Разрешения и размерности

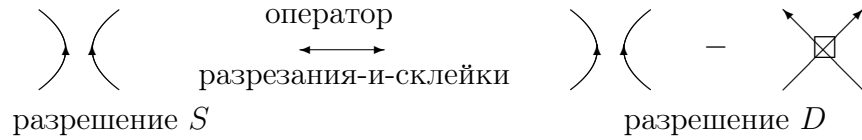
Идея подхода гиперкуба к вычислению полиномов узлов состоит в сопоставлении вершинам гиперкуба некоторых величин, определенных для соответствующих разрешений. После этого можно сопоставить изменениям разрешений вдоль ребер гиперкуба некоторые преобразования объектов в вершинах. Если эти преобразования коммутируют, то гиперкуб превращается в абелев колчан, который можно редуцировать до комплекса, для которого можно построить его полиномы Эйлера и Пуанкаре. Если вся конструкция должна удовлетворять движениям Редемейстера, то эти величины можно сопоставить полиномам ХОМФЛИ-ПТ и Хованова-Рожанского исходных зацеплений.

В исходной версии формализма Хованова [116] для обычных (невиртуальных) зацеплений и группы sl_2 вершинам гиперкуба сопоставлялись q -градуированные пространства, тогда как преобразования между ними задавались посредством операторов разрезания-и-склейки, связанные с изменением разрешения



Каждая вершина гиперкуба отвечает некоторой раскраске исходной диаграммы узла. Если белые и черные вершины разрешаются как S и K , и диаграмма зацепления распадается на ν циклов, то q -градуировка соответствующего пространства равна $[N]_q^\nu \stackrel{N=2}{=} [2]_q^\nu$. Из этого можно получить полиномы Джонса и Хованова.

Этот подход, однако, не работает для $N \neq 2$, так как разрешение K не сохраняет направления стрелок. Как обсуждалось в Главе 8, противоположное направление нити отвечает сопряженному представлению. В случае группы sl_2 сопряженное представление совпадает с несопряженным, поэтому направление стрелок в этом случае не важно. Это, однако, не выполняется для случая $N \neq 2$. Для произвольного N предлагается заменить разложение K формальной линейной комбинацией разложений:



9.3 Полиномы ХОМФЛИ-ПТ из гиперкуба

Полиномы ХОМФЛИ-ПТ в фундаментальном представлении равны сумме

$$H_{\square}^{\mathcal{L}_c} = \mathcal{C}^{\mathcal{L}_c} \sum_{v \in \mathcal{H}^{\mathcal{L}}}^{2^n} (-q)^{h(v,c)} \cdot d_v^{\mathcal{L}}(q, N) \quad (9.4)$$

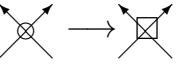
по всем вершинам v гиперкуба $\mathcal{H}^{\mathcal{L}}$. В то время как гиперкуб и размерности в вершинах зависят только от нераскрашенной диаграммы зацепления, полиномы ХОМФЛИ-ПТ зависят от раскраски. Согласно (9.4) эта зависимость дается множителем $(-q)^{h(v,c)}$, где показатель экспоненты это число ребер гиперкуба на кратчайшем пути от исходной вершины c , определяемой раскраской вершин на диаграмме зацепления, до вершины v . В топологическом обрамлении (см. раздел 5.1) также нужно добавить общий множитель перед всей суммой

$$\mathcal{C}^{\mathcal{L}_c} = q^{(N-1)n_{\bullet}} \cdot (-q^{-N})^{n_{\circ}}, \quad (9.5)$$

где $n_\bullet$ и $n_\circ$ это полное число черных и белых вершин на диаграмме зацепления.

При $q = 1$ размерность в вершинах гиперкуба равна

$$d_v^{\mathcal{L}}|_{q=1} = \sum_{s \leq w \leq v} (-)^{h(w,s)} N^{\nu_w^\times} \quad (9.6)$$

сумме по всем вершинам подкуба между вершиной v и вершиной Сейферта s , где $\nu_w^\times$ это число циклов, возникающих при разрешении белых вершин расцветки w как . Заметим, что $\nu_w^\times \neq \nu_w^K$, и число циклов при разрешении ν_w^D не входит в ответ. После подстановки выражения (9.6), формула (9.4) превращается в двойную сумму

$$\begin{aligned} H_{\square}^{\mathcal{L}_c}|_{q=1} &= \sum_{v \in \mathcal{H}^{\mathcal{L}}} (-)^{h(v,c)} \sum_{s \leq w \leq v} (-)^{h(w,s)} N^{\nu_w^\times} = \\ &= \sum_{w \in \mathcal{H}^{\mathcal{L}}} (-)^{h(w,s)} N^{\nu_w^\times} \sum_{w \leq v \leq \bar{s}} (-)^{h(v,c)} = (-)^{h(\bar{s},c)+h(\bar{s},s)} N^{\nu_{\bar{s}}^\times} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Сумма по v не равна нулю только при $w = \bar{s}$, поэтому двойная сумма превращается в одно слагаемое в анти-Сейфертовой вершине, где $\nu_{\bar{s}}^\times = l^{\mathcal{L}}$ это число компонент зацепления диаграммы $\mathcal{L}$.

При $q \neq 1$ обе суммы должны быть q -деформированы, и двойная сумма дает полиномы ХОМФЛИ-ПТ как нетривиальное квантование этой формулы. Ключевым моментом в этих вычислениях является квантование размерностей (9.6).

9.4 ХОМФЛИ-ПТ и толстый граф

Сумму (9.4) можно переписать как другую сумму по всем $2^{n^{\mathcal{L}}}$ подграфам $\bar{\gamma}$ толстого графа $\Gamma^{\mathcal{L}}$ с $n^{\mathcal{L}}$ ребрами:

$$H_{\square}^{\mathcal{L}_c} = \mathcal{C}^{\mathcal{L}_c} \sum_{\bar{\gamma} \in \{\text{flipped } \Gamma^{\mathcal{L}}\}} (-q)^{\#\text{of flips}} \cdot D_{\bar{\gamma}}(q, N) \quad (9.8)$$

Суммирование в этой формуле производится по всем изменением раскрасок – заменам сплошных ребер пунктирными и наоборот. Размерности, однако, не учитывают пунктирные линии:

$$D_{\bar{\gamma}} = D_{\bar{\gamma}_{amp}} \quad (9.9)$$

где $\bar{\gamma}_{amp}$ это граф $\bar{\gamma}$ со стертыми пунктирными ребрами. Эту сумму по изменениям раскрасок можно переписать как сумму по стираниям ребер:

$$H_{\square}^{\mathcal{L}_c} = q^{(N-1)(n_{..}(\Gamma^{\mathcal{L}}) - n_{-}(\Gamma^{\mathcal{L}}))} \sum_{\gamma \subseteq \Gamma^{\mathcal{L}}} (-q)^{n_{..}(\gamma) - n_{-}(\gamma)} \cdot D_{\gamma}(q, N) \quad (9.10)$$

Здесь $n_{-}(\gamma)$ и $n_{..}(\gamma)$ обозначают число сплошных и пунктирных ребер графа γ . Показатель экспоненты в множителе перед суммой антисимметричен по числу сплошных и пунктирных ребер. Суммирование в этой формуле производится по всем подграфам γ графа $\Gamma^{\mathcal{L}}$ с тем же числом вершин, но со стертыми ребрами, тогда как типы ребер остаются неизменными. Также эта сумма учитывает пунктирные линии также как и сплошные

$$D_{\gamma} = D_{\gamma_{colorless}}, \quad (9.11)$$

где $\gamma_{colorless}$ — это γ без раскраски ребер.

Такая формулировка имеет важные последствия: вклад конкретных подграфов γ в полином ХОМФЛИ-ПТ, как $(-q)$ -множитель, так и размерности, зависят только от подграфа γ , но не от графа $\Gamma^{\mathcal{L}}$. Если один и тот же подграф γ встречается в суммах для двух различных диаграмм зацепления $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, то его вклад будет одним и тем же в обоих случаях. Это позволяет, в отличие от исходной формулы (9.8), исследовать свойства слагаемых в суммах для различных зацеплений.

9.4.1 Пример: вершина Сейферта для торического зацепления $T(2, 4)$

сумма по изменениям раскрасок:

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet - 4q \bullet \text{---} \bullet + 6q^2 \bullet \text{---} \bullet - 4q^3 \bullet \text{---} \bullet + q^4 \bullet \text{---} \bullet \end{array} \stackrel{(9.9)}{=} \bullet \bullet - 4q \bullet \text{---} \bullet + 6q^2 \bullet \text{---} \bullet - 4q^3 \bullet \text{---} \bullet + q^4 \bullet \text{---} \bullet$$

сумма по стираниям ребер (для случая всех черных ребер она совпадает с суммой по изменениям раскрасок):

$$q^4 \bullet \text{---} \bullet - 4q^3 \bullet \text{---} \bullet + 6q^2 \bullet \text{---} \bullet - 4q \bullet \text{---} \bullet + \bullet \bullet \stackrel{(9.11)}{=} q^4 \bullet \text{---} \bullet - 4q^3 \bullet \text{---} \bullet + 6q^2 \bullet \text{---} \bullet - 4q \bullet \text{---} \bullet + \bullet \bullet$$

9.4.2 Пример: не-Сейфертова вершина торического зацепления $T(2, 4)$

сумма по изменениям раскрасок (слагаемые в одном столбце соответствуют одинаковым $(-q)$ -множителям):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{[Diagram 1]} & -q & \text{[Diagram 2]} & +q^2 & \text{[Diagram 3]} & -q^3 & +q^4 \\
 & & 3 & & 3 & & \\
 & & \text{[Diagram 4]} & & \text{[Diagram 5]} & & \\
 & & 3 & & 3 & &
 \end{array} \stackrel{(9.9)}{=} \begin{array}{ccccccc}
 \text{[Diagram 6]} & -q & \text{[Diagram 7]} & +q^2 & \text{[Diagram 8]} & -q^3 & +q^4 \\
 & & 3 & & 3 & & \\
 & & \text{[Diagram 9]} & & \text{[Diagram 10]} & & \\
 & & 3 & & 3 & &
 \end{array}$$

сумма по стиранию ребер (слагаемые в одном столбце соответствуют одинаковому числу стертых ребер):

$$\begin{array}{ccccccc}
 (-q)^2 & 3(-q)^1 & 3(-q)^0 & (-q)^{-1} & & & \\
 \text{[Diagram 1]} & \text{[Diagram 2]} & \text{[Diagram 3]} & \text{[Diagram 4]} & & & \\
 & (-q)^3 & 3(-q)^2 & 3(-q)^1 & & & \\
 & \text{[Diagram 5]} & \text{[Diagram 6]} & \text{[Diagram 7]} & & &
 \end{array} \stackrel{(9.11)}{=} \begin{array}{ccccccc}
 & 3(-q)^1 & 3(-q)^0 & (-q)^{-1} & & & \\
 & \text{[Diagram 8]} & \text{[Diagram 9]} & \text{[Diagram 10]} & & & \\
 & (-q)^3 & 3(-q)^2 & 3(-q)^1 & & & \\
 & \text{[Diagram 11]} & \text{[Diagram 12]} & \text{[Diagram 13]} & & &
 \end{array} \stackrel{(9.11)}{=} \begin{array}{ccccccc}
 & 3(-q)^1 & 3(-q)^0 & (-q)^{-1} & & & \\
 & \text{[Diagram 14]} & \text{[Diagram 15]} & \text{[Diagram 16]} & & & \\
 & (-q)^3 & 3(-q)^2 & 3(-q)^1 & & & \\
 & \text{[Diagram 17]} & \text{[Diagram 18]} & \text{[Diagram 19]} & & &
 \end{array}$$

9.5 Свойство факторизации

Размерности удовлетворяют свойству факторизации: для разделенных графов

$$D_\gamma = D_{\gamma_1} \cdot D_{\gamma_2} \quad \text{for } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \quad \text{with } \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset. \quad (9.12)$$

Это свойство естественным образом следует из свойств полиномов узлов.

Кроме этого есть у размерностей есть еще одно свойство факторизации: если граф состоит из двух частей, которые соединяются только через одну вершину, в которой ребра не переплетаются, тогда размерность $D(\gamma)/[N]$ также факторизуется:

$$[N] \cdot D\left(\begin{array}{c} \text{[Diagram: } \gamma_1 \text{ and } \gamma_2 \text{ connected at a central vertex]} \end{array}\right) = D\left(\begin{array}{c} \text{[Diagram: } \gamma_1 \text{]} \end{array}\right) \cdot D\left(\begin{array}{c} \text{[Diagram: } \gamma_2 \text{]} \end{array}\right) \quad (9.13)$$

Если к этому прибавить явное выражение для размерности графа с двумя вершинами:

$$D \left(\text{Diagram with two vertices and } n \text{ edges} \right) = [2]^{n-1} [N] [N-1] \quad (9.14)$$

где $n \geq 1$ – это число ребер в этой диаграмме, то можно получить следующее выражение:

$$[N] \cdot D \left(\text{Diagram with vertices } \gamma_1, \dots, \gamma_2 \text{ and internal vertices} \right) = [2]^{n-1} [N-1] \cdot D \left(\text{Diagram with } \gamma_1 \text{ and one vertex} \right) \cdot D \left(\text{Diagram with one vertex and } \gamma_2 \right)$$

Формула (9.13) выражает собой разложение нормированных полиномов ХОМФЛИ-ПТ для составных узлов, как обычных, так и виртуальных, в произведение нормированных полиномов ХОМФЛИ-ПТ компонент составных узлов. Графы для составных узлов имеют форму левой части уравнения (9.13), мы будем называть такие графы составными. Отметим также, что выражения (9.12) и (9.13) вместе определяют размерность отдельной вершины равной $[N]$, так как

$$\bullet \stackrel{(9.13)}{=} \frac{1}{[N]} \bullet \bullet \stackrel{(9.12)}{=} \frac{1}{[N]} \bullet^2 \longrightarrow \bullet = [N] \quad (9.15)$$

9.6 Преобразования толстого графа при $q \neq 1$

Квантовые размерности D_γ для любого толстого графа γ можно вычислить напрямую с помощью методов, которые следуют из метода Решетихина-Тураева [123], что тем не менее не всегда является простой задачей. Другой способ состоит в исследовании соотношений, которым должны удовлетворять размерности D_γ . Эти соотношения отвечают преобразованиям толстого графа γ , которые сохраняют соответствующие квантовые размерности D_γ . При этом эти преобразования на самом деле локальные, то есть затрагивающие только маленькие подграфы – с одной, двумя или тремя вершинами. Оставшаяся часть графа при этом не меняется при преобразованиях и может быть любой, но одинаковой с обеих сторон соотношения. Размерности сами по себе нелокальны, то есть зависят от всего графа, но соотношения на них включают в себя только преобразования малой части графа. На рисунках ниже жирные стрелки – это части вершин толстого графа, а тонкие линии – это ребра графа. Отметим также, что в соответствии с правилами суммирования по стиранию

ребер, каждое сплошное ребро может быть заменено пунктирным, это не влияет на размерности, а только на множитель при сумме.

Эти соотношения являются эмпирическими, но они удовлетворяют ряду важных свойств. Во-первых, они выполняются при $q = 1$. Во-вторых, вычисления с помощью этих правил позволяет получить правильные фундаментальные полиномы ХОМФЛИ-ПТ для всех узлов из таблицы Рольфсена [92, 93]. В-третьих, в разделе 9.7, показано, как эти соотношения связаны с инвариантностью Редемейстера.

- **правило- $[N - 1]$ -rule** – возможно сократить все вершины валентности 1:

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \bigcirc \curvearrowleft \end{array} \simeq [N - 1] \begin{array}{c} \uparrow \\ | \end{array} \quad (9.16)$$

- **правило- $[2]$** – можно избавиться от парных ребер (отметим, что в данном пункте важна сонаправленность двух вершин):

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array} \simeq [2] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array} \quad (9.17)$$

- **правило- $[N - 2]$ -rule** – можно сократить вершины валентности 2:

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array} \simeq [N - 2] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array} \quad (9.18)$$

- **правило- $[N - 3]$** – вершины валентности 3 можно преобразовывать:

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array} - [N - 3] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array} \simeq \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \bigcirc \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array} - [N - 3] \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \text{---} \end{array} \quad (9.19)$$

- **правило-1** – можно переставлять ребра между тремя вершинами:

$$\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} \approx \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} - \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \end{array} \quad (9.20)$$

- **правило перекидки** – можно изменять число вершин в толстом графе:

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \quad \curvearrowleft \end{array} \approx - \begin{array}{c} \curvearrowleft \quad \curvearrowright \end{array} \quad (9.21)$$

Отметим, что правило перекидки отличается от всех остальных, оно не требуется для инвариантности Редемейстера (как для обычных, так и для виртуальных движений Редемейстера). Таким образом, оно не требуется для топологической инвариантности.

9.7 Инвариантность Редемейстера и толстые графы

Докажем, что топологическая инвариантность ответов для вычислений методом гиперкуба следует из правил преобразования графов (9.16)- (9.20) и свойств факторизации (9.12) и (9.13). Для этого достаточно доказать инвариантность относительно движений Редемейстера. Рассмотрим все движения по отдельности. Эти движения, строго говоря, зависят от выбора типов пересечений – черных или белых, и направления нитей. Мы рассмотрим только существенно разные случаи, остальные случаи могут быть доказаны аналогичным образом.

9.7.1 1-е движение Редемейстера

Первое движение Редемейстера:

$$\begin{array}{c} \uparrow \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \end{array} \quad (9.22)$$

Рассмотрим вычисление методом гиперкуба для некоторой диаграммы зацепления $\mathcal{L}$, в которой присутствует петля, как в левой части равенства (9.22). Тогда сумма (9.10) по всем подграфам γ распадается на две большие подсуммы: в одной ребро, связанное с пересечением в петле сохраняется, а в другой это ребро стерто.

$$\mathcal{H}_{lhs} = (-q) \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \cdots \end{array} \right| \bigcirc + \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \end{array} \right| \bigcirc \quad (9.23)$$

Применим правило- $[N-1]$ (9.16) и правило- $[N]$ (9.15), и заметим, что эта формула преобразуется в

$$\mathcal{H}_{lhs} = \left((-q) \cdot [N-1] + [N] \right) \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \end{array} \right| = q^{1-N} \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \end{array} \right| \quad (9.24)$$

На первый взгляд сумма (9.10) в правой части состоит только из одной группы слагаемых и с неправильным множителем

$$\mathcal{H}_{rhs} = \left| \begin{array}{c} \uparrow \\ \end{array} \right| \quad (9.25)$$

но отметим, что степень q левого гиперкуба $(n_{\bullet} - n_{\circ})$ на один больше, из-за наличия одного дополнительного черного ребра, что дает дополнительный множитель q^{N-1} , таким образом

$$\mathcal{H}_{lhs} = \mathcal{H}_{rhs} \quad (9.26)$$

Если исходное пересечение в (9.22) было белым, то горизонтальное ребро в первом слагаемом (9.23) должно быть сплошным, таким образом оно входит в ответ с коэффициентом $(-q)^{-1}$ и множитель в (9.24) равен $(-q)^{-1} \cdot [N-1] + [N] = q^{N-1}$. Добавив к этому степень множителя q перед суммой в левом гиперкубе $(n_{\bullet} - n_{\circ})$ уравнение (9.26) снова выполняется.

9.7.2 2-е движение Редемейстера с параллельными нитями

Второе движение Редемейстера с параллельными нитями устроено как

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \quad (9.27)$$

Отметим важность того, что одна из вершин плоской диаграммы зацепления белая, а вторая – черная. Таким образом соответствующий толстый граф также двухцветен. Квантовые размерности, однако, не зависят от раскраски. Сумма по гиперкубу в левой части состоит из четырех слагаемых.

$$\mathcal{H}_{lhs} = 1 \cdot \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \uparrow \end{array} + (-q) \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \uparrow \end{array} + \left(-\frac{1}{q}\right) \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \uparrow \end{array} + 1 \cdot \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \uparrow \uparrow \end{array} \quad (9.28)$$

тогда как суммирование по гиперкубу в правой части состоит только из одной группы слагаемых (дополнительный множитель в этом случае равен единице, так как добавки от черного и белого ребра сокращают друг друга):

$$\mathcal{H}_{rhs} = 1 \cdot \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \end{array} \quad (9.29)$$

Применив правило-[2] к первой группе слагаемых в левом гиперкубе $\mathcal{H}_{lhs}$, заметим, что первые три группы слагаемых взаимно сокращаются и, таким образом, левая часть равна правой.

9.7.3 2-е движение Редемейстера с антипараллельными нитями

Второе движение Редемейстера с антипараллельными нитями устроено как

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \quad (9.30)$$

В этом случае суммы по гиперкубу в левой части также состоит из четырех групп слагаемых:

$$\mathcal{H}_{lhs} = 1 \cdot \text{diag}_1 + (-q) \text{diag}_2 + \left(-\frac{1}{q}\right) \text{diag}_3 + 1 \cdot \text{diag}_4 \quad (9.31)$$

а сумма в правой части все еще состоит из одной группы слагаемых (общий множитель из-за разницы числа черных и белых ребер опять таки отсутствует):

$$\mathcal{H}_{rhs} = 1 \cdot \text{diag}_5 \quad (9.32)$$

Применим правило- $[N - 2]$ (9.18) к первой группе слагаемых в левой части $\mathcal{H}_{lhs}$, правило- $[N - 1]$ (9.16) ко второй и третьей группам и правило- $[N]$ (9.15) к четвертой группе. Тогда, используя свойство квантовых чисел

$$[2][N - 1] = [N] + [N - 2], \quad (9.33)$$

заметим, что левая часть равна правой части $\mathcal{H}_{lhs} = \mathcal{H}_{rhs}$.

9.7.4 “Параллельное” 3-е движение Редемейстера

Третье движение Редемейстера включает в себя три нити, поэтому определение их как “параллельных” или “антипараллельных” не вполне корректно. Тем не менее есть две существенно разных ориентации диаграммы для третьего движения Редемейстера: в одном случае появляется на один цикл Сейферта больше, тогда как в другом случае этого не происходит. По этой причине проверка инвариантности отличается в этих двух случаях. В этом разделе мы рассмотрим случай, который не включает в себя дополнительный цикл Сейферта (назовем его для краткости “параллельным”).

Одна из вариаций этого случая устроена как (другие вариации можно доказать аналогичным образом):

$$(9.34)$$

Полный коэффициент при сумме по гиперкубам совпадает в левой и правой части. Выпишем явно различные вклады (остальная часть графа опущена, но подразумевается одинаковой во всех слагаемых):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{lhs} = & (-q) \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + q^2 \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + 1 \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + 1 \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \\ & (-q) \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + (-q) \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + \left(-\frac{1}{q} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + 1 \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (9.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{rhs} = & (-q) \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + q^2 \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + 1 \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + 1 \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \\ & (-q) \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + (-q) \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + \left(-\frac{1}{q} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) + 1 \cdot \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Заметим, что при применении правила-[2] (9.17) к третьей группе слагаемых в обеих частях равенства, она сокращается с шестой и седьмой группами. Вторая, четвертая и восьмая группы совпадают в левой и правой частях. Отметим, что четвертая группа слагаемых совпадает в левой и правой частях, несмотря на разную раскраску ребер, так как она не влияет на размерности. Наконец, оставшиеся группы слагаемых совпадают при применении правила-1 (9.20).

9.7.5 “Антипараллельное” 3-е движение Редемейстера

Типичный представитель “антипараллельного” третьего движения Редемейстера (того, в котором присутствует дополнительный цикл Сейферта) устроен как

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} \quad (9.36)$$

Полный множитель перед суммой опять таки совпадает в левой и правой частях.

Суммы устроены как:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{lhs} = & (-q) \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} + q^2 \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} + 1 \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} + 1 \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \\ & (-q) \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \end{array} + (-q) \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \end{array} + \left(-\frac{1}{q}\right) \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \end{array} + 1 \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \end{array} \end{aligned} \quad (9.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{rhs} = & (-q) \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} + q^2 \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} + 1 \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} + 1 \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} \\ & (-q) \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \end{array} + (-q) \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \end{array} + \left(-\frac{1}{q}\right) \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \end{array} + 1 \cdot \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \end{array} \end{aligned}$$

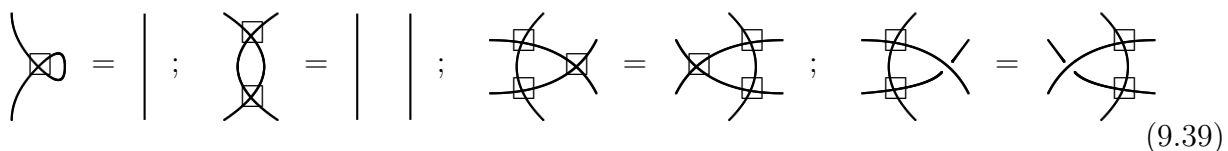
Можно проверить, что применение правила-[$N - 2$] (9.18) ко второй, третьей и четвертой группам, правила-[$N - 1$] (9.16) к пятой, шестой и седьмой группам и правила-[N] (9.15) к последней группе позволяет получить следующие коэффициенты при гиперкубах $\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array}$ (и $\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array}$), соответственно:

$$(q^2 + 2) [N - 2] - \left(\frac{1}{q} + 2q\right) [N - 1] + [N] = q[N - 3] \quad (9.38)$$

Заметим, что из правила- $[N - 3]$ в этом случае следует равенство правой и левой частей.

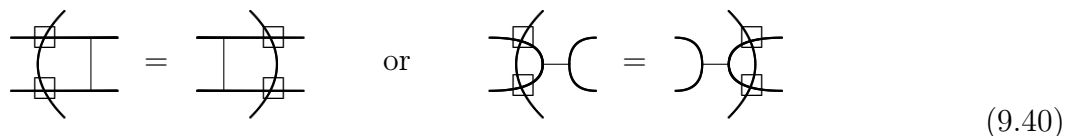
9.7.6 Все виртуальные движения Редемейстера

Инвариантность относительно всех четырех виртуальных движений Редемейстера



$$(9.39)$$

соблюдается тривиальным образом. А именно, вне зависимости от выбора направлений исходный двухцветный толстый граф $\Gamma^{\mathcal{L}}$ не изменяется при применении всех этих движений к диаграмме зацепления $\mathcal{L}$. Это касается в том числе и смешанного движения Редемейстера, в которое входят как обычные, так и виртуальные пересечения. Вне зависимости от направлений структура циклов Сейферта совпадает в обеих частях равенства:



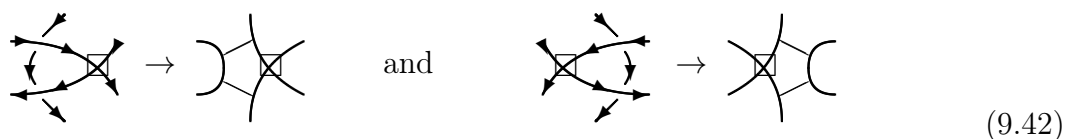
$$(9.40)$$

Отметим, что в отличие от этих движений Редемейстера, движение, которого нет в определении виртуальных узлов (которое явным образом запрещено в определении Л. Кауффмана для виртуальных узлов [?])



$$(9.41)$$

меняет структуру циклов Сейферта. Например, при некотором выборе ориентаций, левая и правая части получаются разными:



$$(9.42)$$

Таким образом, мы доказали топологическую инвариантность нашего определения фундаментальных полиномов ХОМФЛИ-ПТ, как для обычных, так и для виртуальных узлов.

9.8 Полиномы ХОМФЛИ-ПТ для простейших виртуальных узлов

Узел	Диаграмма	Джонсы	ХОМФЛИ-ПТ	Квантовые размерности для разрешений
2.1		$-q^5 + q^3 + q^2$	$-\frac{A^3}{q} + \frac{A^2}{q^2} + Aq$	
3.1		1	1	
3.2		$q^4 - q^2 - q + 1 + \frac{1}{q}$	$A^2 - \frac{A}{q} - q^2 + 1 + \frac{q}{A}$	

Узел	Диаграмма	Джонсы	ХОМФЛИИ-ПТ	Квантовые размерности для разрешений
3.3		$-q^5 + q^3 + q^2$	$-\frac{A^3}{q} + \frac{A^2}{q^2} + Aq$	$ \begin{array}{ccccc} [N-1] & \rightarrow & -[N-1]^2 & & \\ \nearrow & & \times & & \searrow \\ \boxed{[N]} & \rightarrow & -[N][N-1] & \rightarrow & -[2][N-1] \rightarrow -[N-1]([N-2]-1) \\ \searrow & & \times & & \nearrow \\ [N-1] & \rightarrow & -[N-1]^2 & & \end{array} $
3.4		$q^4 - q^2 - q + 1 + \frac{1}{q}$	$A^2 - \frac{A}{q} - q^2 + 1 + \frac{q}{A}$	$ \begin{array}{ccccc} [N-1] & \rightarrow & -[N-1]^2 & & \\ \nearrow & & \times & & \searrow \\ l[N] \rightarrow \boxed{-[N][N-1]} & \rightarrow & -[2][N-1] \rightarrow & -[N-1]([N-2]-1) & \\ \searrow & & \times & & \nearrow \\ [N-1] & \rightarrow & -[N-1]^2 & & \end{array} $
3.5		$-q^8 + q^6 + q^2$	$-A^4 + A^2(q^2 + q^{-2})$	$ \begin{array}{ccccc} [N-1] \rightarrow [2][N-1] & & & & \\ \nearrow & & \times & & \searrow \\ \boxed{[N]} \rightarrow [N-1] & \rightarrow & [2][N-1] \rightarrow [2]^2[N-1] & & \\ \searrow & & \times & & \nearrow \\ [N-1] \rightarrow [2][N-1] & & & & \end{array} $

Узел	Диаграмма	Джонсы	ХОМФЛИ-ПТ	Квантовые размерности для разрешений
3.6		$-q^8 + q^6 + q^2$	$-A^4 + A^2(q^2 + q^{-2})$	$ \begin{array}{ccccc} & [N-1] \rightarrow [2][N-1] & & & \\ \nearrow & \times & \searrow & & \\ [N] \rightarrow [N-1] & [2][N-1] \rightarrow [2]^2[N-1] & & & \\ \searrow & \times & \nearrow & & \\ & [N-1] \rightarrow [2][N-1] & & & \end{array} $
3.7		1	1	$ \begin{array}{ccccc} & [N-1] \rightarrow [2][N-1] & & & \\ \nearrow & \times & \searrow & & \\ l[N] \rightarrow [N-1] & [2][N-1] \rightarrow [2]^2[N-1] & & & \\ \searrow & \times & \nearrow & & \\ & [N-1] \rightarrow [2][N-1] & & & \end{array} $

Глава 10

Метод эволюции

Из подхода Решетихина-Тураева следует интересное свойство полиномов для серий узлов, на котором основан метод эволюции для вычисления и изучения таких полиномов. Разделим диаграмму зацепления $\mathcal{D}$, отвечающую некоторому зацеплению, на две части E и B таким образом, что их соединяет $2m$ нитей. Рассмотрим семейство $\mathcal{D}_n$, в котором B заменяется на последовательности из n копий B , как на Рис.10.1. Полиномы для такой серии должны быть устроены как

$$\mathcal{H}_T^{\mathcal{D}_n} = \text{Tr}_{T^{\otimes m}} \mathcal{E} \mathcal{B}^n, \quad (10.1)$$

где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ – это произведения $\mathcal{R}$ -матриц внутри частей E и B , а след является квантовым, то есть включает в себя множитель q^ρ [63, 80]

Теперь присоединим такую диаграмму узла к m -нитевой косе (также возможно присоединить ее к чему-нибудь еще, например, к нескольким косам с $m_1 + \dots = m$ нитями, но этой не оказывает серьезного влияния на наши рассуждения). В такой косе также возможны разные варианты для направления нитей – в общем случае в этой косе будет m_L нитей в представлении Y и m_R нитей в сопряженном представлении $\bar{Y}$, $m_R + m_L = m$. Вместо следа по всему пространству произведения представлений, как и в предыдущих разделах, рассмотрим сумму по пространству неприводимых представлений

$$Y^{\otimes m_L} \otimes \bar{Y}^{\otimes m_R} = \oplus_Q \mathcal{M}_{Y\bar{Y}}^Q \otimes Q \quad (10.2)$$

Оба множителя в (10.1) – $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ – можно разложить по неприводимым представлениям $Q \vdash m|Y|$, с собственными значениями E_Q и B_Q соответственно. Тогда можно

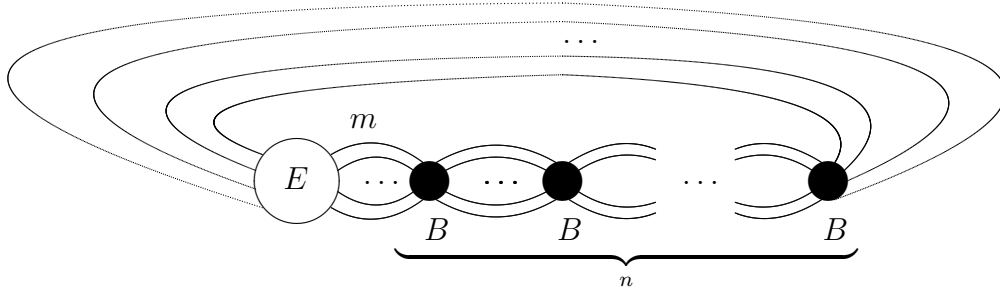


Рис. 10.1: Диаграммы серии зацеплений с общей частью E и повторяющейся частью B .

записать ответ для соответствующего *расширенного* полинома ХОМФЛИ-ПТ:

$$\mathcal{H}_Y^{\mathcal{E}\mathcal{B}^n}\{p\} = \sum_{Q \vdash m|Y|} C_{YQ} \left(\text{Tr}_{\mathcal{M}_{Y\bar{Y}}^Q} E_Q B_Q^n \right) S_Q\{p\}, \quad (10.3)$$

где $\text{Tr}_{\mathcal{M}_{Y\bar{Y}}^Q}$ обозначает след по пространству сплетающих операторов, которое обычно имеет размерность больше одного для числа нитей в косе $m > 2$. Коэффициенты C_{YQ} – это множественности в разложении:

$$C_{YQ} = \dim \mathcal{M}_{Y\bar{Y}}^Q \quad (10.4)$$

Ответ для обычного полинома ХОМФЛИ-ПТ можно получить, если зафиксировать временные переменные на топологическом локусе $p_k = \frac{A^k - A^{-k}}{q^k - q^{-k}}$.

В более общем виде полином ХОМФЛИ-ПТ можно записать через полный набор собственных значений $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{H}_Y^{\mathcal{E}\mathcal{B}^n}(A, q) = \sum_{Q_i} \alpha_{Q_i} \lambda_{Q_i}^n. \quad (10.5)$$

Коэффициенты α_{Q_i} можно найти из некоторых начальных условий – известных выражений для полиномов при конкретных n .

Для того, чтобы метод эволюции сработал нужно подобрать подходящий элемент B_Q и достаточное количество начальных условий. Однако, даже без учета этого правая часть (10.3) – это нетривиальное предположение. Дело в том, что средняя часть формулы пока неизвестна не только в случае суперполиномов (для которых $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ должны быть элементами чего-то типа дважды аффинной алгебры Гекке (ДАНА) [?], а не обычными матрицами), но и в случае полиномов ХОМФЛИ-ПТ есть неоднозначности. Матрицы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$ можно в явном виде вычислить только для случая кос,

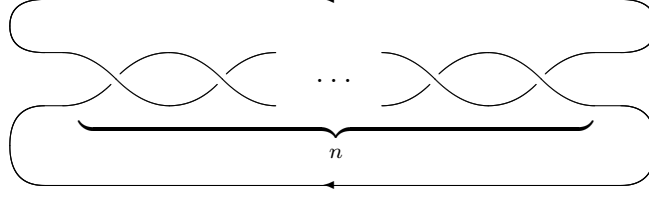


Рис. 10.2: 2-нитевая коса

но не для произвольной диаграммы зацепления. Метод эволюции, однако, позволяет избежать необходимости явного вычисления этих матриц, и в этом состоит его большое преимущество. Этот метод позволяет найти E_Q , используя только предположение о его существовании, избегая использования конкретного его определения (и тем более конструктивного определения). Данный метод бывает применим в очень большом числе случаев, даже тогда, когда сами $\mathcal{R}$ -матрицы неизвестны [124, 125]. Рассмотрим некоторые примеры применения метода эволюции.

10.1 Примеры применения метода эволюции

10.1.1 Полиномы двухнитевых узлов

Фундаментальное представление

Рассмотрим самый простой пример фундаментальных полиномов ХОМФЛИ-ПТ 2-нитевых узлов и зацеплений $T(2, n)$ (для четных n это получается двухкомпонентное зацепление, а для нечетных – узел).

Полиномы ХОМФЛИ-ПТ таких узлов и зацеплений как функции n – это сумма двух мономов:

$$H_{\square}^{[2,n]}(A, q) = \alpha_{\square,0} \left(-\frac{1}{Aq} \right)^n + \alpha_{\square,1} \left(\frac{q}{A} \right)^n \quad (10.6)$$

где $\alpha_{\square,i}$ не зависят от n , но могут зависеть от A и q . Такая формула связана с тем, что фундаментальная $\mathcal{R}$ -матрица имеет только два собственных значения. Коэффициенты α можно легко найти, рассмотрев ответы для двух конкретных узлов, например, для $n = \pm 1$. В обоих этих случаях результирующий узел является неузлом, таким

образом:

$$\frac{q\alpha_{\square,1}}{A} - \frac{\alpha_{\square,0}}{qA} = \frac{A\alpha_{\square,1}}{q} - qA\alpha_{\square,0} = \mathcal{H}_{\square}^{unknot} \quad (10.7)$$

и

$$\alpha_{\square,0} = \frac{\{A/q\}}{\{q^2\}} \mathcal{H}_{\square}^{unknot} \quad \alpha_{\square,1} = \frac{\{Aq\}}{\{q^2\}} \mathcal{H}_{\square}^{unknot} \quad (10.8)$$

Напомним, что H – нормированный полином, поэтому $H_{\square}^{unknot} = 1$, и, соответственно

$$H_{\square}^{[2,n]}(A, q) = \frac{1}{\{q^2\}A^n} \left(\{Aq\}q^n + (-)^n \{A/q\}q^{-n} \right) \quad (10.9)$$

В качестве простой проверки получившейся формулы (10.9), можно рассмотреть случай $n = 0$. В этом случае получается два несцепленных неузла, чей ненормированный полином ХОМФЛИ-ПТ равен произведению двух полиномов неузла

$$\mathcal{H}_R^{[2,0]} = \left(\mathcal{H}_R \right)^2. \quad (10.10)$$

Таким образом, нормированный полином равен

$$H_R^{[2,0]} = \frac{\left(\mathcal{H}_R^{unknot} \right)^2}{\mathcal{H}_R^{unknot}} = \mathcal{H}_R^{unknot} = D_R = S_R^* \quad (10.11)$$

В фундаментальном представлении $R = [1] = \square$, квантовая размерность D_R , то есть значение S_R^* полинома Шура $S_R\{p\}$ в топологическом локусе $p_k = p_k^* = \frac{\{A^k\}}{\{q^k\}}$, равна

$$\mathcal{H}_{\square}^{unknot} = D_{\square} = S_{\square}^* = p_1^* = \frac{\{A\}}{\{q\}} \quad (10.12)$$

таким образом полином должен быть равен $H_R^{[2,0]} = \frac{\{A\}}{\{q\}}$. Это действительно выполняется и для формулы (10.9):

$$H_R^{[2,0]} = \frac{\{Aq\} + \{A/q\}}{\{q^2\}} = \frac{(q + q^{-1})\{A\}}{q^2 - q^{-2}} = \frac{\{A\}}{\{q\}} \quad (10.13)$$

Этот пример содержит все существенные элементы метода эволюции:

- выбор параметра n , от которого ответ зависит контролируемым образом,
- определение не зависящих от n параметров в формуле с помощью “начальных условий”, то есть из известных ответов при конкретных значениях n ,
- если ответы известны в большем числе случаев, чем число неизвестных параметров в формуле, то их можно использовать для проверки формулы.

Применимость метода эволюции зависит от наличия формулы с простой зависимостью от n и от достаточного числа известных ответов, которые можно использовать, как “начальные условия”. Далее мы обсудим, какие серии такого типа можно рассматривать.

Симметрические представления

Для простейшего симметрического представления у $\mathcal{R}$ -матрицы три различных собственных значения. Соответственно зависимость от n для полинома ХОМФЛИ-ПТ дается формулой с тремя слагаемыми:

$$H_{[2]}^{[2,n]} = \frac{1}{A^n q^{4n}} \left(\alpha_{[2],0} + \alpha_{[2],1} (-q^2)^n + \alpha_{[2],2} q^{6n} \right). \quad (10.14)$$

Начальные условия можно получить из трех известных случаев $n = -1, 0, 1$:

$$\begin{aligned} H_{[2]}^{[2,\pm 1]} &= 1, \\ H_{[2]}^{[2,0]} &= D_{[2]} = S_{[2]}^* = \frac{\{Aq\}\{A\}}{\{q^2\}\{q\}} \end{aligned} \quad (10.15)$$

таким образом

$$H_{[2]}^{[2,n]} = \frac{1}{A^n q^{4n}} \left(\frac{\{A\}\{A/q\}}{\{q^4\}\{q^2\}} + \frac{\{Aq^2\}\{A/q\}}{\{q^4\}\{q\}} (-q^2)^n + \frac{\{Aq^3\}\{Aq^2\}}{\{q^4\}\{q^3\}} q^{6n} \right) \quad (10.16)$$

Аналогичный ответ можно получить и для антисимметрического представления $[1, 1]$:

$$H_{[11]}^{[2,n]} = \frac{1}{A^n q^{4n}} \left(\alpha_{[11],0} + \alpha_{[11],1} (-q^2)^n + \alpha_{[11],2} q^{6n} \right) \quad (10.17)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} H_{[1,1]}^{[2,\pm 1]} &= 1, \\ H_{[1,1]}^{[2,0]} &= D_{[11]} = S_{[11]}^* = \frac{\{A/q\}\{A\}}{\{q^2\}\{q\}}, \end{aligned} \quad (10.18)$$

что приводит к ответу

$$H_{[1,1]}^{[2,n]}(A, q) = \frac{1}{A^n q^{4n}} \left(\frac{\{A\}\{A/q\}}{\{q^4\}\{q^2\}} + \frac{\{A/q^2\}\{Aq\}}{\{q^4\}\{q\}} (-q^2)^{-n} + \frac{\{A/q^3\}\{A/q^2\}}{\{q^4\}\{q^3\}} q^{-6n} \right)$$

По аналогии с представлением $[2]$, для представления $[3]$ можно получить

$$\begin{aligned} H_{[3]}^{[2,n]}(A, q) &= -\{q\} \cdot \frac{\{A/q\}\{A\}\{Aq\}}{\{q\}\{q^2\}\{q^3\}\{q^4\}} \left(\frac{1}{A^3 q^9} \right)^{2n+1} + \{q^3\} \cdot \frac{\{Aq^3\}\{A/q\}\{A\}}{\{q\}\{q^2\}\{q^4\}\{q^5\}} \left(\frac{1}{A^3 q^7} \right)^{2n+1} - \\ &\quad - \{q^5\} \cdot \frac{\{Aq^3\}\{Aq^4\}\{A/q\}}{\{q\}\{q^4\}\{q^5\}\{q^6\}} \left(\frac{1}{A^3 q^3} \right)^{2n+1} + \{q^7\} \cdot \frac{\{Aq^3\}\{Aq^4\}\{Aq^5\}}{\{q^4\}\{q^5\}\{q^6\}\{q^7\}} \left(\frac{q^3}{A^3} \right)^{2n+1}. \end{aligned} \quad (10.19)$$

Из таких примеров можно угадать общую формулу для любого представления:

$$H_{[r]}^{[2,n]}(A, q) = \sum_{l=0}^r (-)^{r+l} \{q^{2l+1}\} \frac{\prod_{i=0}^{l-1} \{Aq^{r+i}\} \prod_{i=0}^{r-l-1} \{Aq^{i-1}\}}{\prod_{i=1}^{r-l} \{q^i\} \prod_{i=r+1}^{r+l+1} \{q^i\}} \left[\frac{q^{l(l+1)-r^2}}{A^r} \right]^{2n+1}. \quad (10.20)$$

Это выражение совпадает с ответом, полученным в [126] в терминах квантовых сим-
волов Похгаммера.

10.1.2 3-нитевые торические узлы и зацепления

В этом случае параметр n – это число “торических обмоток”. Соответствующий ан-
затц устроен как

$$H_{\square}^{[3,n]} = \frac{1}{A^{2n}} \left(\alpha_{\square}^{(3)} q^{2n} + \beta_{\square}^{(3)} (e^{2\pi i n/3} + e^{-2\pi i n/3}) + \gamma_{\square}^{(3)} q^{-2n} \right) \quad (10.21)$$

Три начальных условия можно выбрать при $n = \pm 1$ (неузлы) и при $n = 0$ (три
незацепленных неузла). Из этих начальных условий следует, что:

$$\begin{aligned} \alpha q^2 - \beta + \gamma q^{-2} &= A^2, \\ \alpha q^{-2} - \beta + \gamma q^2 &= A^{-2}, \\ \alpha + 2\beta + \gamma &= \left(\frac{\{A\}}{\{q\}} \right)^2. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Подставив решения этих уравнений в анзатц, получаем

$$H_{\square}^{[3,n]} = \frac{1}{A^{2n} \{q^3\} \{q^2\}} \left(\{Aq^2\} \{Aq\} q^{2n} + 2(q+1/q) \cos \frac{2\pi n}{3} \{Aq\} \{A/q\} + \{A/q^2\} \{A/q\} q^{-2n} \right) \quad (10.23)$$

10.1.3 Скрученные узлы

Еще один пример узлов, для которых хорошо применим метод эволюции, это скру-
ченные узлы. Такие узлы описываются антипараллельной косой, концы которой за-
цеплены друг с другом, см. Рис.10.3.

Фундаментальное представление $Y = [1]$

Подставив собственные значения встречной косы, полиномы ХОМФЛИ-ПТ можно
получить из следующей формулы

$$H_{\square}^{\text{Tw}_k}(A, q) = \alpha_{[1],0} + \alpha_{[1],1} A^{2k}. \quad (10.24)$$

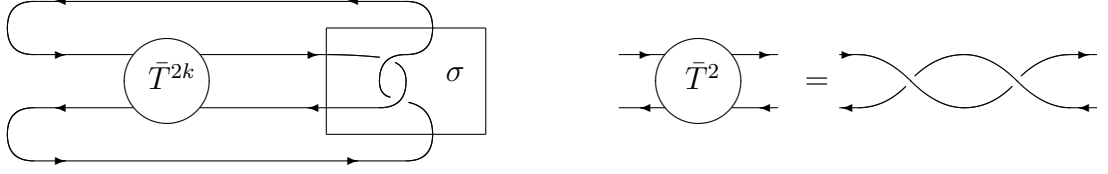


Рис. 10.3: Скрученный узел. Такие узлы определяются как встречная коса, которая замыкается с помощью элемента σ .

Для определения коэффициентов в этом выражении, достаточно полиномов для двух узлов из серии.

Полиномы ХОМФЛИ-ПТ скрученных узлов хорошо известны в трех случаях: для неузла $H_Y^{Tw_0} = 1$ для любого представления, трилистник при $k = 1$, который является торическим узлом и, соответственно выражения для полиномов известны из формулы Росс-Джонса в любом представлении [?], и узел-восьмерка, для которого ответ в любом симметрическом представлении был найден в [128]. Один из ответов можно использовать для проверки ответа. Таким образом, коэффициенты в формуле для полинома ХОМФЛИ-ПТ равны:

$$\alpha_{[1],0} = \frac{A^2}{1-A^2}(q^2 + q^{-2} - 1 - A^2) = \frac{A^2}{1-A^2}(1 + z^2 - A^2), \quad \alpha_{[1],1} = -\frac{A}{\{A\}}\{Aq\}\{A/q\}, \quad (10.25)$$

где $z = q - q^{-1}$. Таким образом ответ для полиномов скрученных узлов в любом симметрическом представлении устроен как

$$H_{\square}^{Tw_k}(A, q) = 1 + \frac{A^{k+1}\{A^{-k}\}}{\{A\}}\{Aq\}\{A/q\} = 1 + F_1^{(k)}\{Aq\}\{A/q\}, \quad (10.26)$$

где введена величина $F_1^{(k)}$:

$$F_1^{(k)} \equiv \frac{A^{k+1}\{A^{-k}\}}{\{A\}} = A \left(\frac{1}{\{A\}} - \frac{A^{2k}}{\{A\}} \right) \quad (10.27)$$

Полиномы скрученных узлов в фундаментальном представлении, полученные с помощью метода эволюции приведены в таблице 10.1. С помощью полученных ответов также можно получить рекуррентное соотношение:

$$H_{\square}^{Tw_{k+1}}(A, q) - A^2 H_{\square}^{Tw_k}(A, q) = -A^4 + A^2(1 + z^2) \quad (10.28)$$

k	Узел	$H_{\square}^{\mathcal{K}}(A, q)$	$H_{\square}^{\mathcal{K}}(A, z)$
4	9_2	$1 - \frac{A^5\{A^4\}}{\{A\}}\{Aq\}\{A/q\}$	$(1 + z^2)A^2 + z^2A^4 + z^2A^6 + (1 + z^2)A^8 - A^{10}$
3	7_2	$1 - \frac{A^4\{A^3\}}{\{A\}}\{Aq\}\{A/q\}$	$(1 + z^2)A^2 + z^2A^4 + (1 + z^2)A^6 - A^8$
2	5_2	$1 - \frac{A^3\{A^2\}}{\{A\}}\{Aq\}\{A/q\}$	$(1 + z^2)A^2 + (1 + z^2)A^4 - A^6$
1	3_1	$1 - A^2\{Aq\}\{A/q\}$	$(2 + z^2)A^2 - A^4$
0	неузел	1	1
-1	4_1	$1 + \{Aq\}\{A/q\}$	$A^{-2} - (1 + z^2 - A^2) = A^2 - 1 - z^2 + A^{-2},$
-2	6_1	$1 + \frac{\{A^2\}}{A\{A\}}\{Aq\}\{A/q\}$	$A^{-4} - A^{-2} + A^2 - z^2(1 + A^{-2})$
-3	8_1	$1 + \frac{\{A^3\}}{A^2\{A\}}\{Aq\}\{A/q\}$	$A^{-6} - (z^2 + 1)A^{-4} - z^2A^{-2} - z^2 + A^2$
-4	10_1	$1 + \frac{\{A^4\}}{A^3\{A\}}\{Aq\}\{A/q\}$	$A^{-8} - (z^2 + 1)A^{-6} - z^2A^{-4} - z^2A^{-2} - z^2 + A^2$

Таблица 10.1: Ответы для фундаментальных полиномов ХОМФЛИ-ПТ скрученных узлов. В правой колонке приведены ответы для полиномов от переменных A и $z = q - q^{-1}$, совпадающие с ответами в [93].

Представление [2]

В этом случае выражение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ состоит из трех слагаемых:

$$H_{[2]}^{\text{Tw}_k} = \alpha_{[2],0} + \alpha_{[2],1}A^{2k} + \alpha_{[2],2}q^{4k}A^{4k}. \quad (10.29)$$

Используя известные ответы для трилистника 3_1 при $k = 1$, неузла при $k = 0$ и узла-восьмерки 4_1 при $k = -1$, можно получить полное выражение для полиномов ХОМФЛИ-ПТ:

$$H_{[2]}^{\text{Tw}_k} = 1 + \frac{\{A/q\}}{\{Aq\}\{A\}} \left\{ \frac{1}{q^2} \{Aq^2\} \left(A^4q^6 - A^2(q^4 - 1)(q^2 - 1) - q^2 \right) - \frac{A^3}{q^3} (q^2 + 1) \{Aq\} A^{2k-1} (A^2q^6 - q^6 + q^4 - 1) + \{Aq^3\} \{A\}^2 A^{4k+2} q^{4k+1} \right\}. \quad (10.30)$$

Это выражение также можно переписать в виде

$$H_{[2]}^{\text{Tw}_k} = 1 + F_1^{(k)} \left(\{Aq^3\} \{A/q\} + \{Aq\} \{A/q\} \right) + F_2^{(k)} (Aq) \{Aq^3\} \{Aq^2\} \{A\} \{A/q\}, \quad (10.31)$$

k	$f_k(x)$
4	$q^{-3}(x^6 + x^{-6}) + q^{-2}(q + q^{-1})(x^4 + x^{-4}) + q^{-1}(q^2 + 1 + q^{-2})(x^2 + x^{-2}) + (q^3 + q + q^{-1} + q^{-3})$
3	$q^{-2}(x^4 + x^{-4}) + q^{-1}(q + q^{-1})(x^2 + x^{-2}) + (q^2 + 1 + q^{-2})$
2	$q^{-1}(x^2 + x^{-2}) + (q + q^{-1})$
1	1
0	0
-1	1
-2	$q(x^2 + x^{-2}) + (q + q^{-1})$
-3	$q^2(x^4 + x^{-4}) + q(q + q^{-1})(x^2 + x^{-2}) + (q^2 + 1 + q^{-2})$
-4	$q^3(x^6 + x^{-6}) + q^2(q + q^{-1})(x^4 + x^{-4}) + q(q^2 + 1 + q^{-2})(x^2 + x^{-2}) + (q^3 + q + q^{-1} + q^{-3})$

Таблица 10.2: Значения функции $f_k(x)$ при различных k .

где коэффициент $F_1^{(k)}$ совпадает с полученным в формуле (10.27) для фундаментального представления, а $F_2^{(k)}$ равно

$$\begin{aligned}
F_2^{(k)} &= (A^2q)^{k+1} f_k(Aq) = A^2q \left(\frac{1}{\{Aq\}\{A\}} - [2]_q \frac{A^{2k}}{\{Aq^2\}\{A\}} + \frac{A^{4k}q^{4k}}{\{Aq^2\}\{Aq\}} \right) = \\
&= \frac{qA^2}{\{Aq^2\}\{Aq\}\{A\}} \left(\{Aq^2\} - (q + q^{-1})A^{2k}\{Aq\} + q^{4k}A^{4k}\{A\} \right) = \\
&= \frac{qA^2}{\{Aq^2\}\{Aq\}\{A\}} \left(\{Aq^2\} - A^{2k}\{Aq^2\} - A^{2k}\{A\} + q^{4k}A^{4k}\{A\} \right).
\end{aligned} \tag{10.32}$$

Функция $f_k(x)$ при этом определена как

$$f_k(x) = \frac{x^k \{x/q\} \{(xq)^k\} - x^{-k} \{(x/q)^k\} \{xq\}}{\{x/q\} \{x\} \{xq\}} \tag{10.33}$$

и обладает рядом интересных свойств:

- для всех k – это лоранов полином по переменным x и q . Это выполняется в том числе и при $x = \pm 1$ и $x = \pm q^{\pm 1}$, когда знаменатель обращается в ноль, числитель при этом также обращается в ноль. Значения этих полиномов приведены в таблице 10.2.
- все коэффициенты этих полиномов – положительные целые числа.
- при $q = 1$ функция $f_k(x)$ сильно упрощается и сводится к $f_k(x) = \left(\frac{\{x^k\}}{\{x\}} \right)^2$

- в знаменатель симметричным образом входят три величины x , xq и x/q . Числитель также обладает такой симметрией, но его нельзя записать в виде произведения множителей с такой симметрией.

Представление [3]

Произведение представлений $[3] \otimes \overline{[3]}$ содержит четыре неприводимых представления. Поэтому формула эволюции содержит 4 слагаемых.

$$T_{[3]}^{(k)} = \alpha_{[3],0} + \alpha_{[3],1} \cdot A^{2k} + \alpha_{[3],2} \cdot q^{4k} A^{4k} + \alpha_{[3],3} \cdot q^{12k} A^{6k} \quad (10.34)$$

Для построения общего ответа недостаточно полиномов трилистника, неузла и узла-восьмерки, которые использовались для фундаментального и первого симметрического представлений. В этом случае требуется также использовать дополнительные выражения, например, полином ХОМФЛИИ-ПТ для узла 5_2 .

$$\begin{aligned} T_{[3]}^{(k)} = & 1 + F_1^{(k)}(A, q) \left(\{Aq^5\} \{A/q\} + \{Aq^3\} \{A/q\} + \{Aq\} \{A/q\} \right) + \\ & + F_2^{(k)}(A, q) \left(\{Aq^3\} \{Aq^2\} \{A\} \{A/q\} + \{Aq^5\} \{Aq^2\} \{A\} \{A/q\} + \{Aq^5\} \{Aq^4\} \{A\} \{A/q\} \right) - \\ & + F_3^{(k)}(A, q) \{Aq^5\} \{Aq^4\} \{Aq^3\} \{Aq\} \{A\} \{A/q\} \end{aligned} \quad (10.35)$$

где функции $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ можно получить из младших представлений, а

$$\begin{aligned} F_3^{(k)}(A, q) = & \frac{A^3 q^3}{\{Aq^4\} \{Aq^3\} \{Aq^2\} \{Aq\} \{A\}} \left(\{Aq^4\} \{Aq^3\} - (q^2 + 1 + q^{-2}) \{Aq^4\} \{Aq\} A^{2k} + \right. \\ & \left. + (q^2 + 1 + q^{-2}) \{Aq^3\} \{A\} A^{4k} q^{4k} - \{Aq\} \{A\} A^{6k} q^{12k} \right) = \\ = & A^3 q^3 \left(\frac{1}{\{Aq^2\} \{Aq\} \{A\}} - [3]_q \frac{A^{2k}}{\{Aq^3\} \{Aq^2\} \{A\}} + [3]_q \frac{A^{4k} q^{4k}}{\{Aq^4\} \{Aq^2\} \{Aq\}} - \frac{A^{6k} q^{12k}}{\{Aq^4\} \{Aq^3\} \{Aq^2\}} \right). \end{aligned} \quad (10.36)$$

Произвольное симметрическое представление

Полиномы ХОМФЛИИ-ПТ для произвольного скрученного узла в произвольном симметрическом представлении $[r]$ можно получить из формулы

$$H_{[r]}^{\text{Tw}_k} = 1 + \sum_{s=1}^r \frac{[r]!}{[s]! [r-s]!} F_s^{(k)}(A, q) \prod_{i=1}^s \{Aq^{r+i-1}\} \{Aq^{i-2}\} \quad (10.37)$$

Тем самым остается описать функции $F_i^{(k)}$, выражения для которых можно обобщить из младших представлений:

$$F_s^{(k)}(A^2) = q^{s(s-1)/2} A^s \sum_{j=0}^s (-)^j \frac{[s]!}{[j]! [s-j]!} \frac{\{Aq^{2j-1}\} \cdot (Aq^{j-1})^{2jk}}{\prod_{i=j-1}^{s+j-1} \{Aq^i\}} \quad (10.38)$$

Таким образом оказывается возможным описать все симметрические полиномы ХОМФЛИ-ПТ для скрученных узлов. Эти выражения совпадают с полученными в [127].

10.1.4 Двухнитевые зацепления с антипараллельной косой

Понимание устройства эволюции для встречной косы позволяет легко построить полиномы для антипараллельной двухнитевой косы. Такая коса может иметь только четное число пересечений и, соответственно, она описывает двухкомпонентные зацепления.

В фундаментальном случае $\mathcal{R}$ -матрица имеет два собственных значения, равные 1 и A . Соответственно выражение для полинома устроено как

$$\mathcal{H}_{\square \times \square}^{T[2,2k]}(A, q) = \alpha_{\square,0} + \alpha_{\square,1} A^{2k}. \quad (10.39)$$

Начальные условия эволюции можно получить из полиномов ХОМФЛИ-ПТ двух незацепленных неузлов при $k = 0$ и для зацепления Хопфа при $k = 1$ с антипараллельными компонентами. Второй полином связан с полиномом обычного зацепления Хопфа заменой $A \rightarrow 1/A$, так как он соответствует зацеплению Хопфа с обратными пересечениями. Полином двух зацепленных неузлов равен $(S_{\square}^*(A, q))^2$. Если выбрать нормировку $\mathcal{R}$ -матрицы такой, чтобы полином ХОМФЛИ-ПТ равнялся единице как при $A = q$, так и при $A = 1/q$, то выражение для полиномов такой серии устроено как

$$\mathcal{H}_{\square \times \square}^{[2,2k]}(A, q) = 1 + \frac{A^{2k}}{\{q\}^2} \{Aq\} \{A/q\}, \quad (10.40)$$

что совпадает с [122].

Аналогичным образом можно получить выражение для полинома в первом симметрическом представлении [2]. Узел в представлениях [2] и $[\bar{2}]$ равен $\frac{\{A\}\{Aq\}}{\{q\}\{q^2\}}$. Таким образом,

$$\mathcal{H}_{[2] \times [\bar{2}]}^{T[2,2k]}(A, q) = 1 + \frac{A^{2k}}{\{q\}^2} \{Aq\} \{A/q\} + \frac{q^{4k} A^{4k}}{\{q\}^2 \{q\}^2} \{Aq^3\} \{A\}^2 \{A/q\}. \quad (10.41)$$

Полученные выражения можно обобщить на произвольное симметрическое представление:

$$H_{[r] \times [\bar{r}]}^{T[2,2k]}(A, q) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{2k} \check{\alpha}_i \quad (10.42)$$

m	4	4	6	4	6	8
n	3	5	3	7	5	3
Узел	7_3	9_4	9_3	$11a_{342}$	$11a_{358}$	$11a_{364}$

Таблица 10.3: Примеры узлов, которые можно представить двойной косой.

Коэффициенты $\check{\alpha}_i$ можно найти из равенства полинома ХОМФЛИ-ПТ при $k = 0$ квадрату полинома неузла в представлении $[r]$, то есть $\left(\prod_{i=1}^r \frac{\{Aq^{i-1}\}}{\{q^i\}}\right)^2$. Коэффициенты получаются равными

$$\check{\alpha}_i = \left(\prod_{l=1}^{i-1} \frac{\{Aq^{l-1}\}}{\{q^{l+1}\}}\right)^2 \frac{\{Aq^{2i-1}\}\{A/q\}}{\{q\}^2}. \quad (10.43)$$

Таким образом,

$$H_{[r] \times [r]}^{[2, 2k]}(A, q) = \sum_{i=1}^r \left(\prod_{l=1}^{i-1} \frac{\{Aq^{l-1}\}}{\{q^{l+1}\}}\right)^2 \frac{\{Aq^{2i-1}\}\{A/q\}}{\{q\}^2} A^{ik} q^{ki(i-1)}. \quad (10.44)$$

Это выражение симметрично относительно замен $k \rightarrow -k$ и $A \rightarrow 1/A$.

10.1.5 Двойная коса

Рассмотрим узлы, описывающиеся двойной косой, которые являются двухпараметрическим обобщением двухнитевых торических и скрученных узлов одновременно. Эта серия состоит из двух кос – одной параллельной и одной антипараллельной, соединенных друг с другом, как на Рис.10.4. Эта серия параметризуется двумя целыми числами (m, n) . n должно быть нечетным, иначе косы нельзя будет соединить. m четно для узлов и нечетно для зацеплений. При $n = \pm 1$ узлы становятся торическими, а при $m = \pm 2$ – скрученными. В таблице 10.3 приведены примеры узлов, представимых двойной косой, не являющихся торическими или скрученными. Двойные косы с параметрами $(m, 2k+1)$ можно также записать $(k+2)$ -нитевой косой со следующим набором пересечений: $(\underbrace{1, \dots, 1}_{m+1}, \underbrace{2, -1, 2, 3, -2, 3, \dots}_{1} \underbrace{k+1, -k, k+1}_{k})$.

Для вычисления полиномов ХОМФЛИ-ПТ таких узлов понадобятся начальные условия в виде полиномов некоторых узлов. В качестве таких начальных условий

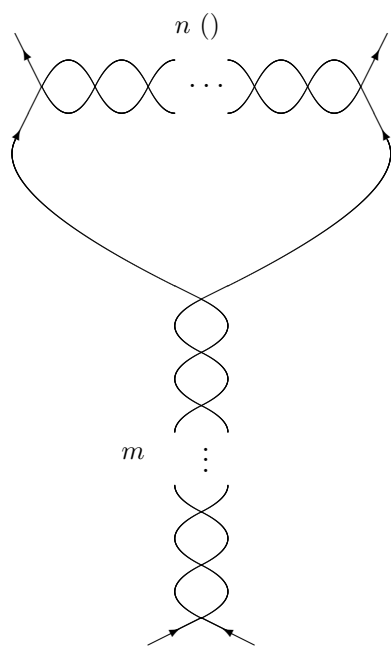


Рис. 10.4: Представление узлов в виде двойной косы. Горизонтальная коса противоположно направленная и должна иметь нечетное число пересечений n . Вертикальная коса сонаправлена и имеет m пересечений.

МОЖНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ

$$\begin{aligned}
H_r^{(0,n)}(A, q) &= 1 \\
H_r^{(2k, \pm 1)}(A, q) &= H_r^{T[2, (k+1/2 \mp 1/2)]}(A, q) \\
H_r^{(-2, 2k-1)}(A, q) &= H_r^{\text{Tw}_k}(A, q) \\
H_r^{(m,n)}(A, q) &= H_r^{(-m, -n)}(1/A, 1/q)
\end{aligned} \tag{10.45}$$

Фундаментальное представление

Собственные значения для параллельных и антипараллельных нитей равны $-1/qA$ и q/A и 1 и A соответственно. Таким образом, полином для двойной косы должен быть устроен как

$$H_{[1]}^{(m,n)}(A, q) = \frac{\alpha_{00}^{[1]}}{(qA)^m} + \frac{\alpha_{01}^{[1]} \cdot q^m}{A^m} + \frac{\alpha_{10}^{[1]} \cdot A^n}{(qA)^m} + \frac{\alpha_{11}^{[1]} \cdot A^n q^m}{A^m} \tag{10.46}$$

Применив (10.45) можно найти эти коэффициенты

$$\begin{aligned}
\alpha_{00}^{[1]} &= \frac{\{A/q\}\{q\}}{\{A\}\{q^2\}} & \alpha_{01}^{[1]} &= \frac{\{Aq\}\{q\}}{\{A\}\{q^2\}} \\
\alpha_{10}^{[1]} &= -\frac{\{Aq\}\{A/q\}}{\{A\}\{q^2\}} & \alpha_{11}^{[1]} &= \frac{\{Aq\}\{A/q\}}{\{A\}\{q^2\}}
\end{aligned} \tag{10.47}$$

Отметим, что в данном случае удалось вычислить полиномы в том числе и скрученных узлов, используя ответы только для торических узлов. Это связано с тем, что вся серия скрученных узлов в фундаментальном представлении определяется только двумя скрученными узлами (см. раздел 10.1.3), два из которых – неузел и трилистник – являются одновременно и торическими, и скрученными.

Представления [2] и [3]

В первом симметрическом представлении $Y = [2]$ полином можно представить в виде

$$H_{[2]}^{(m,n)}(A, q) = \sum_{i,j=1}^3 \alpha_{ij}^{[2]} (\lambda_i)^n (\mu_j^{[2]})^m, \tag{10.48}$$

где собственные значения равны

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{A^2 q^4}, & \lambda_2 &= \frac{1}{A^2 q^2}, & \lambda_3 &= \frac{q^2}{A^2}, \\
\mu_1 &= 1, & \mu_2 &= A, & \mu_3 &= A^2 q^2.
\end{aligned} \tag{10.49}$$

Тогда, используя (10.45) и известные выражения для торических [66] и скрученных (10.26) узлов, можно получить

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^{[2]} &= \frac{\{A/q\}\{q\}}{\{Aq\}\{q^3\}}, & \alpha_{12}^{[2]} &= \frac{\{A/q\}\{Aq^2\}\{q^2\}}{\{Aq\}\{A\}\{q^4\}}, & \alpha_{13}^{[2]} &= \frac{\{Aq^2\}\{Aq^3\}\{q\}\{q^2\}}{\{Aq\}\{A\}\{q^3\}\{q^4\}}, \\
\alpha_{21}^{[2]} &= -\frac{\{A/q\}}{\{q^3\}}, & \alpha_{22}^{[2]} &= -\frac{\{A/q\}\{A^2q^2\}\{q^2\}}{\{Aq\}\{A\}\{q^4\}}, & \alpha_{23}^{[2]} &= \frac{\{A/q\}\{Aq^3\}\{q^2\}^2}{\{A\}\{q\}\{q^3\}\{q^4\}}, \\
\alpha_{31}^{[2]} &= \frac{\{A/q\}\{A\}\{Aq^3\}}{\{Aq\}\{q^2\}\{q^3\}}, & \alpha_{32}^{[2]} &= -\frac{\{A/q\}\{A\}\{Aq^3\}}{\{Aq\}\{q\}\{q^4\}}, & \alpha_{33}^{[2]} &= \frac{\{A/q\}\{A\}\{Aq^3\}}{\{Aq\}\{q^3\}\{q^4\}}.
\end{aligned} \tag{10.50}$$

Аналогичным образом для представления $Y = [3]$

$$H_{[3]}^{(m,n)}(A, q) = \sum_{ij}^4 \alpha_{ij}^{[3]} (\lambda_i)^n (\mu_j^{[3]})^m. \tag{10.51}$$

С собственными значениями равными

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{A^3q^9}, & \lambda_2 &= \frac{1}{A^3q^7}, & \lambda_3 &= \frac{1}{A^3q^3}, & \lambda_4 &= \frac{q^3}{A^3}, \\
\mu_1 &= 1, & \mu_2 &= A, & \mu_3 &= A^2q^2, & \mu_4 &= A^3q^6.
\end{aligned} \tag{10.52}$$

В этом случае в качестве начальных условий нужно использовать полиномы ХОМФЛИ-ПТ для торических, скрученных узлов, но еще и полиномы для трехнитевых узлов, которые можно получить с помощью построений в Главе 5. При $n = 3$ двойная ко-са превращается в трехнитевую косу. Таким образом, можно получить следующие

выражения для коэффициентов.

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^{[3]} &= \frac{\{A/q\}\{q\}}{\{Aq^2\}\{q^4\}}, & \alpha_{12}^{[3]} &= \frac{\{A/q\}\{Aq^3\}\{q^3\}^2}{\{Aq\}\{Aq^2\}\{q^4\}\{q^5\}}, \\
\alpha_{13}^{[3]} &= \frac{\{A/q\}\{Aq^3\}\{Aq^4\}\{q^2\}\{q^3\}}{\{A\}\{Aq\}\{Aq^2\}\{q^4\}\{q^6\}}, & \alpha_{14}^{[3]} &= \frac{\{Aq^3\}\{Aq^4\}\{Aq^5\}\{q\}\{q^2\}\{q^3\}}{\{A\}\{Aq\}\{Aq^2\}\{q^4\}\{q^5\}\{q^6\}}, \\
\alpha_{21}^{[3]} &= -\frac{\{A/q\}\{Aq\}}{\{Aq^2\}\{q^4\}}, & \alpha_{22}^{[3]} &= -\frac{\{A/q\}\{q^3\}\left(\{Aq^5\}+\{Aq^3\}-\{A/q\}\right)}{\{Aq^2\}\{q^4\}\{q^5\}}, \\
\alpha_{23}^{[3]} &= -\frac{\{A/q\}\{Aq^4\}\{q^2\}\{q^3\}\left(\{Aq^3\}-\{Aq\}-\{A/q\}\right)}{\{A\}\{Aq^2\}\{q\}\{q^4\}\{q^6\}}, & \alpha_{24}^{[3]} &= \frac{\{A/q\}\{Aq^4\}\{Aq^5\}\{q^2\}\{q^3\}^2}{\{A\}\{Aq^2\}\{q\}\{q^4\}\{q^5\}\{q^6\}}, \\
\alpha_{32}^{[3]} &= \frac{\{A\}\{A/q\}\{Aq^3\}\{q^3\}\left(\{Aq^5\}-\{Aq\}-\{A/q\}\right)}{\{Aq\}\{Aq^2\}\{q^2\}\{q^4\}\{q^5\}}, & \alpha_{31}^{[3]} &= \frac{\{A/q\}\{A\}\{Aq^3\}}{\{Aq^2\}\{q^2\}\{q^4\}}, \\
\alpha_{33}^{[3]} &= -\frac{\{A\}\{A/q\}\{Aq^3\}\{q^3\}\left(\{Aq^5\}+\{Aq^3\}-\{A/q\}\right)}{\{Aq\}\{Aq^2\}\{q\}\{q^4\}\{q^6\}}, & \alpha_{34}^{[3]} &= \frac{\{A/q\}\{A\}\{Aq^3\}\{Aq^5\}\{q^3\}^2}{\{Aq\}\{Aq^2\}\{q\}\{q^4\}\{q^5\}\{q^6\}}, \\
\alpha_{41}^{[3]} &= -\frac{\{A/q\}\{A\}\{Aq\}\{Aq^5\}}{\{Aq^2\}\{q^2\}\{q^3\}\{q^4\}}, & \alpha_{42}^{[3]} &= \frac{\{A/q\}\{A\}\{Aq\}\{Aq^5\}\{q^3\}}{\{Aq^2\}\{q\}\{q^2\}\{q^4\}\{q^5\}}, \\
\alpha_{43}^{[3]} &= -\frac{\{A/q\}\{A\}\{Aq\}\{Aq^5\}}{\{Aq^2\}\{q\}\{q^4\}\{q^6\}}, & \alpha_{44}^{[3]} &= \frac{\{A/q\}\{A\}\{Aq\}\{Aq^5\}}{\{Aq^2\}\{q^4\}\{q^5\}\{q^6\}}.
\end{aligned} \tag{10.53}$$

Произвольное симметрическое представление

Аналогичным образом можно рассмотреть выражения для полиномов ХОМФЛИ-ПТ двойной косы в старших симметрических представлениях $[r]$. Такой полином должен быть устроен как

$$H_r^{(m,n)}(A, q) = \sum_{s,i,j=0}^r F_{si}^{(r)} X_{sj}^{(r)} \left(\lambda_i\right)^n \left(\mu_j^{(r)}\right)^m = \sum_{s,i,j=0}^r F_{si}^{(r)} X_{sj}^{(r)} A^{in-rm} q^{mi(i-1)+nj(j+1)-mr^2}, \tag{10.54}$$

с собственными значениями, равными

$$\lambda_i = A^{-r} q^{-r^2+i^2+i}, \quad \mu_i = A^i q^{i(i-1)}, \quad i = 0 \dots r. \tag{10.55}$$

Чтобы объяснить форму этого ответа, разделим в нем явно зависимости от торической и скрученной кос. Для этого рассмотрим выражения для полиномов скручен-

ных и торических узлов:

$$H_r^{\text{Tw}_k}(A, q) = \sum_{s,l=0}^r F_{sl}^{(r)} \mu_l^{2k+1}, \quad (10.56)$$

где сумма по s аналогична сумме в (10.37), то есть

$$F_{kl}^{(r)} = (-)^l \frac{\left(\frac{A}{q}\right)_k \left(q^r\right)_k^* \left(Aq^r\right)_k}{\left(Aq^{l-1}\right)_{k+1} \left(q\right)_l \left(q\right)_{k-l}} A^{l+k} q^{k(k-1)/2+l(l-1)} \{Aq^{2l-1}\} \quad \text{при } k \geq l \quad (10.57)$$

$$F_{kl}^{(r)} = 0 \quad \text{при } k < l,$$

где

$$(x)_k \equiv \prod_{i=0}^{k-1} \{xq^i\} \quad (x)_k^* \equiv \prod_{i=0}^{k-1} \{xq^{-i}\} \quad (10.58)$$

Аналогичным образом можно представить и полиномы торических узлов

$$H_r^{T[2,2k+1]}(A, q) = \sum_{s,l=0}^r X_{sl}^{(r)} \lambda_l^{2k+1}, \quad (10.59)$$

с коэффициентами, равными

$$X_{sl}^{(r)} = \frac{(-)^s}{A^{r+s} \{q\}^r} P_{r-s, r-l}, \quad P_{sj} = \sum_{i=0}^s \alpha_{sij}^{(r)} \left(Aq^{2r-j-1}\right)_{s-i}^* \left(Aq^{j-2}\right)_i^*, \quad (10.60)$$

где $\alpha_{sij}^{(r)}$ – коэффициенты, которые можно найти с помощью метода эволюции. Эти коэффициенты получаются равными

$$\alpha_{sij}^{(r)} = \frac{1}{q^{i^2+s^2/2-si+sj-2ij+(2r+1)i-(4r-1)s/2+3r(r-1)/2}} \cdot \frac{1}{\{q\}^{j-s-1}} \times \\ \times \frac{\left(q^s\right)_i^* \left(q^{r-s}\right)_{j-i}^* [r-j+i]! [2r-2j+1]! [2r-2j-s+2i+1]}{\left(q^{2r-2j+i+1}\right)_{s+1}^* [i]! [j-i]! [2r-s-j+i+1]!} \quad (10.61)$$

Заметим также, что из первых тождеств в (10.45) и (10.54) следует, что

$$\sum_{j=0}^r X_{sj}^{(r)} = \delta_{s0}. \quad (10.62)$$

10.2 Метод эволюции для скобки Кауффмана

Несмотря на отсутствие непосредственно $\mathcal{R}$ -матрицы в подходе скобки Кауффмана (см. раздел 9.1), в этом случае также применим метод эволюции для полиномов Джонса. Для этого можно построить специальную $\mathcal{R}$ -матрицу для скобки Кауффмана.

Такую матрицу можно описать введя два оператора, действующих в пространстве произведения двух фундаментальных представлений группы $U_q(sl_2)$:

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = \delta_k^i \delta_l^j, \quad \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} = \epsilon^{ij} \epsilon_{kl} \quad (10.63)$$

В двумерном случае, отвечающем фундаментальному представлению группы $U_q(sl_2)$, эписилон-символ – это дельта-символ с двумя верхними индексами, который изменяет ориентацию нити. Как уже было сказано, после разрешения всех вершин узел сводится к набору непересекающихся окружностей, размерность каждой из которых равна $D \equiv [2]_q$.

С помощью таких рассуждений можно написать $\mathcal{R}$ -матрицу, соответствующие выражениям для скобки Кауффмана [52]:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(q) &= q \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} - q^2 \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array}, \\ \mathcal{R}^{-1}(q) &= q^{-1} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} - q^{-2} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} = \mathcal{R}(q^{-1}) \end{aligned} \quad (10.64)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{kl}^{ij} &= \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagdown \diagup \\ k \quad l \end{array} = \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagdown \diagup \\ \bullet \\ \diagup \diagdown \\ k \quad l \end{array} = q \cdot \delta_k^i \delta_l^j - q^2 \cdot \epsilon^{ij} \epsilon_{kl} \\ (\mathcal{R}^{-1})_{kl}^{ij} &= \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagup \diagdown \\ k \quad l \end{array} = \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagup \diagdown \\ \circ \\ \diagdown \diagup \\ k \quad l \end{array} = q^{-1} \cdot \delta_k^i \delta_l^j - q^{-2} \cdot \epsilon^{ij} \epsilon_{kl} \end{aligned}$$

Эти матрицы не изменяются при изменении направлений нитей, и их можно совмещать (умножать) как вертикально, так и горизонтально. Произведение матриц $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}^{-1}$ при обоих вариантах умножения сводится к единичной матрице. Такие матрицы также удовлетворяют движениям Редемейстера, см. Рис. 2.1. Таким образом такие матрицы можно использовать для любой диаграммы узла, а не только для косы.

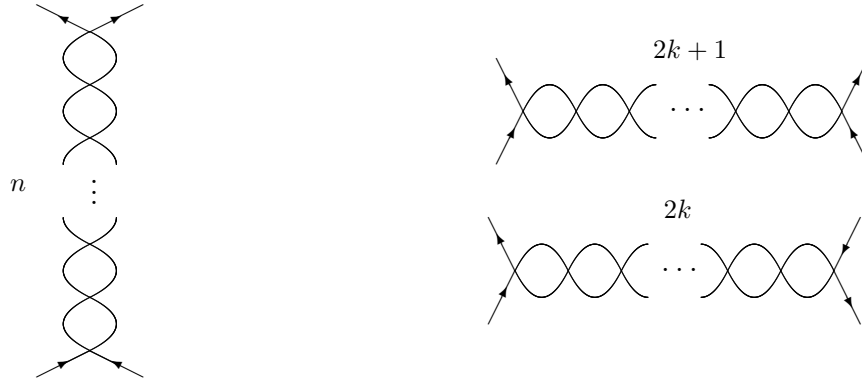


Рис. 10.5: 2-нитевые цепочки $\mathcal{R}$ -матриц

Аналогичным образом можно записать $\mathcal{R}$ -матрицу для скрученной косы:

$$\bar{\mathcal{R}}_{kl}^{ij} = \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagdown \quad \diagup \\ k \quad l \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = -q^2 \cdot \epsilon^{jl} \epsilon_{ik} + q \cdot \delta_i^j \delta_k^l = \mathcal{R}_{ik}^{jl}$$

$$\left(\bar{\mathcal{R}}^{-1}\right)_{kl}^{ij} = \begin{array}{c} i \quad j \\ \diagdown \quad \diagup \\ k \quad l \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = -q^{-2} \cdot \epsilon^{jl} \epsilon_{ik} + q^{-1} \cdot \delta_i^j \delta_k^l = \left(\mathcal{R}^{-1}\right)_{ik}^{jl}$$

В случае $U_q(sl_2)$ нет разницы между δ -функцией и ϵ -символом. Это означает, что с точки зрения вычисления можно заменить

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}} &\cong -q^3 \mathcal{R}^{-1}, \\ \bar{\mathcal{R}}^{-1} &\cong -q^{-3} \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{10.65}$$

Такое описание можно получить, рассмотрев собственные значения $\mathcal{R}$ -матриц.

10.2.1 Цепочка $\mathcal{R}$ -матриц

Начнем с рассмотрения цепочек $\mathcal{R}$ -матриц (10.64). Из них можно собрать вертикальные и горизонтальные цепочки, см. Рис.10.5.

Если подставить $\mathcal{R}$ -матрицы в вертикальную цепочку, то получится

$$\begin{aligned}
a_{n+1}) (+ b_{n+1} \smile &= \left\{ a_n) (+ b_n \smile \right\} \cdot_{\text{vert}} \left\{ q) (- q^2 \smile \right\} \smile \\
&= q a_n) (+ \left(q b_n - q^2 a_n - q^2 b_n D \right) \cdot \smile \\
&\Downarrow \\
a_{n+1} &= q a^n, \quad b_{n+1} = -q^2 a_n - q^3 b_n.
\end{aligned} \tag{10.66}$$

Из такого выражения следует, что коса с такими матрицами отвечает оператору

$$B_{\square, N=2}^{[2, n]} = q^n \left\{) (- \frac{1}{D} \left(1 - (-)^n q^{2n} \right) \cdot \smile \right\} \tag{10.67}$$

Если подставить ту же матрицу в горизонтальную цепочку, то получится:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{n+1}) (+ \bar{b}_{n+1} \smile &= \left\{ \bar{a}_n) (+ \bar{b}_n \smile \right\} \cdot_{\text{hor}} \left\{ q) (- q^2 \smile \right\} \\
&\Downarrow \\
\bar{b}_{n+1} &= -q^2 \bar{b}_n, \quad \bar{a}_{n+1} = \bar{a}_n + q \bar{b}_n.
\end{aligned} \tag{10.68}$$

Оператор, отвечающий косе тем самым равен

$$\bar{B}_{\square, N=2}^{[2, n]} = \frac{1}{D} \left(1 - (-q^2)^n \right) \cdot) (+ (-q^2)^n \smile \tag{10.69}$$

Аналогичные вычисления можно проделать и для скрученных $\mathcal{R}$ -матриц. Для этого в ответе надо поменять направления стрелок: вертикальная (горизонтальная) цепочка матриц $\bar{\mathcal{R}}$ эквивалентна горизонтальной (вертикальной) цепочке матриц $\mathcal{R}$. Также следует поменять местами $\smile$ и $) ($ в ответе. Таким образом можно применять метод эволюции к подходу скобки Кауффмана.

Глава 11

Дифференциальное разложение

Полученные с помощью описанных в предыдущих главах методов результаты позволяют изучить различные свойства полиномов узлов. Данная Глава посвящена обсуждению так называемого дифференциального разложения. Построив полиномы ХОМФЛИ-ПТ в старших представлениях для различных наборов и серий узлов, можно обобщить разложение, предложенное в [128, 129] для узла-восьмерки 4_1 . Полученные ответы позволяют обобщить это утверждение на скрученные узлы, что также было получено в [127], и для других узлов, как это предсказывалось в [130].

Начнем с абелевой теории Черна-Саймонса, когда $A = q$. В этом случае полином ХОМФЛИ-ПТ $H_{\square}(A, q)$ вырождается к одному моному q^{2s_+} . Из-за зеркальной симметрии [131, 132]

$$(Y, A, q) \rightarrow (Y^T, A, -q^{-1}), \quad (11.1)$$

где Y^T – транспонированная диаграмма Юнга, аналогичное выражение можно получить и для $H_{\square}(A, q^{-1})$, то есть при $A = q^{-1}$ полином $H_{\square}(A, q)$ также вырождается до монома q^{2s_-} . Таким образом $s_+ = s_- = 0$, и $H_{\square}(A = q, q) = 1$. Из этого следует следующее выражение для фундаментального полинома ХОМФЛИ-ПТ:

$$H_{\square}(A, q) = 1 + F_1(A, q)\{Aq\}\{A/q\} \quad (11.2)$$

Примеры такого разложения приведены в формулах (10.26) и (10.40).

Для старших представлений $Y \neq \square$ разложение на множители $H - 1$ становится более сложным. Для квантовой группы $U_q(sl_N)$, для которой $A = q^N$, представление с прямоугольной диаграммой Юнга Y с числом строк $l(Y) = N$ эквивалентно

синглетному тривиальному представлению. Другие диаграммы с N строками эквивалентны диаграммам с $N - 1$ строкой последующему правилу: $Y = [r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_N \geq 0] \cong Y' = [r_1 - r_N \geq r_2 - r_N \geq \dots r_{N-1} - r_N \geq 0]$. Например, полностью антисимметрическое представление $[1^N] = \overline{[N]}$ эквивалентно синглету, то есть устроено так же, как абелева теория. В частности, $H_{[1^r]}$ — моном от q при $A = q^r$. Из зеркальной симметрии следует, что $H_{[r]}$ должно быть мономом при $A = q^{-r}$. При правильном выборе нормировки $\mathcal{R}$ -матриц и всего полином, которая соответствует топологическому обрамлению узла, эти мономы равны единице.

Отметим, что хотя представлений в диаграммой Юнга с большим числом строк, чем N нет в группе $U_q(sl_N)$, соответствующие полиномы ХОМФЛИ-ПТ все равно существуют. Ненормированные полиномы ХОМФЛИ-ПТ $\mathcal{H}_Y(A = q^N, q)$ действительно равны нулю, но равна нулю и размерность соответствующего представления $S_Y^*(A = q^N, q)$. Нормированный же полином $H_Y(A = q^N, q) = \mathcal{H}_Y(A = q^N, q)/S_Y^*(A = q^N, q)$ не равен нулю и связан с полиномами в других представлениях [133].

С учетом описанных свойств, выражение (11.2) можно обобщить на симметрические и антисимметрические представления:

$$\begin{aligned}
H_{[r]} &= 1 + G_r(A, q)\{Aq^r\}\{A/q\} \\
&\quad \updownarrow \quad \quad \quad \Longleftarrow \quad \quad \quad (11.3) \\
&\quad \quad \quad H_{[r]}(A = q) = 1 \\
&\quad \quad \quad H_{[1^r]}(A = q^r) = 1 \\
H_{[1^r]} &= 1 + G_r(A, q^{-1})\{Aq\}\{A/q^r\}
\end{aligned}$$

Так как одну из этих формул можно получить из другой с помощью зеркальной симметрии (11.1), далее будем рассматривать только выражение для симметрических представлений. Для произвольной диаграммы Юнга Y из описанных выше свойств можно получить только более слабое утверждение:

$$H_R - H_{R'} \sim \{A/q^{l(R)}\}, \quad H_{\bar{R}} - H_{\bar{R}'} \sim \{A/q^{l(\bar{R})}\}, \quad (11.4)$$

в [129] эти свойства и их применение рассмотрены подробнее.

При конкретном выборе группы $U_q(sl_N)$ также существует еще одна симметрия между полиномами ХОМФЛИ-ПТ. Известно, что полином ХОМФЛИ-ПТ в сопряженном представлении равен полиному в исходном представлении $H_Y(A, q) =$

$H_{\bar{Y}}(A, q)$. Для диаграммы Юнга Y сопряженное представление соответствует диаграмме Юнга, дополняющей Y до прямоугольной диаграммы с N строками. В частности, сопряженное представление к $[1^r]$ – это $[1^{N-r}]$. Из этого следует следующее соотношение:

$$\begin{aligned} H_{[1^r]}(A = q^N, q) &= H_{[1^{N-r}]}(A = q^N, q), & H_{[r]}(A = q, q) &= 1 = H_{[N-r]}(A = q, q), \\ &\Downarrow \\ H_{[1^r]}(A, q) - H_{[1^{N-r}]}(A, q) &\vdots \{Aq^{-N}\}\{Aq\} \\ H_{[r]}(A, q) - H_{[N-r]}(A, q) &\vdots \{Aq^N\}\{Aq^{-1}\} \end{aligned} \quad (11.5)$$

Если совместить (11.2), (11.3) и (11.5), то можно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned} 0 &= H_{[r]}(A = q^{-r-1}, q) - H_{[1]}(A = q^{-r-1}, q) = \\ &= G_r(A = q^{-r-1}, q)\{q^{-1}\}\{q^{-r-2}\} - F_1(A = q^{-r-1}, q)\{q^{-r}\}\{q^{-r-2}\} = \\ &= \{q\}\{q^{-r-2}\}(G_r(A = q^{-r-1}, q) - [r]_q F_1(A = q^{-r-1}, q)) \\ &\Downarrow \\ G_r(A, q) - [r]_q F_1(A, q) &\vdots \{Aq^{r+1}\}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть G_r и G_{N-r} :

$$G_r(A, q) - \frac{[N-r]_q}{[r]_q} G_{N-r}(A, q) \vdots \{Aq^N\}. \quad (11.7)$$

Величина G_r , входящая в (11.3), на самом деле обладает дополнительной нетривиальной структурой. Если из G_r вычесть F_1 из (11.2), умноженную на некоторый независимый от узла коэффициент, то разность также должна разложиться на множители:

$$G_r - [r]_q F_1 = \tilde{G}_r \{Aq^{r+1}\} \quad (11.8)$$

Аналогичным образом, если подставить в формулу (11.5) $N = r + 2$, то получится еще одно соотношение на полиномы ХОМФЛИ-ПТ:

$$\begin{aligned} H_{[r]} - H_{[2]} &= \left(\underbrace{[r]\{Aq^r\} - [2]\{Aq^2\}}_{[r-2]\{Aq^{r+2}\}} \right) F_1 + \{Aq^r\}\{Aq^{r+1}\}G_r - \{Aq^3\}\{Aq^2\}G_2 \vdots \{Aq^{r+2}\} \\ &\Downarrow \\ G_r &= \frac{[r][r-1]}{[2]} \tilde{G}_2 + \{Aq^{r+2}\} \tilde{G}_r \end{aligned} \quad (11.9)$$

где коэффициент $\frac{[r][r-1]}{[2]}$ – это значение $\{Aq^3\}\{Aq^2\}$ при $A = q^{-r-2}$. Аналогичные соотношения для других представлений позволяют написать разложения для полиномов ХОМФЛИИ-ПТ, обобщающие (11.8), аналогичные полученным в [128] для узла-восьмерки:

$$\begin{aligned} H_{[1]} &= 1 + F_1(A, q)\{Aq\}\{A/q\}, \\ H_{[2]} &= 1 + [2]_q F_1(A, q)\{Aq^2\}\{A/q\} + F_2(A, q)\{Aq^3\}\{Aq^2\}\{A/q\}, \\ H_{[3]} &= 1 + [3]_q F_1(A, q)\{Aq^3\}\{A/q\} + [3]_q F_2(A, q)\{Aq^4\}\{Aq^3\}\{A/q\} + \\ &\quad + F_3(A, q)\{Aq^5\}\{Aq^4\}\{Aq^3\}\{A/q\}, \end{aligned} \quad (11.10)$$

и в общем случае

$$H_{[r]}^{\mathcal{K}} = 1 + \sum_{j=1}^r \frac{[r]!}{[j]![r-j]!} F_j^{\mathcal{K}}(A, q) \left(\prod_{i=0}^{j-1} \{Aq^{r+i}\} \right) \{A/q\}. \quad (11.11)$$

Выражение (10.37) для скрученных узлов представляет собой более сильную факторизацию для F_r , для других узлов, однако, такой более сильной факторизации нет, но (11.8) и (11.11) по-прежнему выполняются.

11.1 Дифференциальное разложение для двухкомпонентных зацеплений

Рассмотрим дифференциальное разложение для зацеплений. В этом случае можно написать формулу, аналогичную (11.5):

$$H_{r_1 \dots r_l} - H_{N-r_1 \dots N-r_l} \quad \vdots \quad \{Aq^N\}\{A/q\}, \quad (11.12)$$

В том числе для двухкомпонентных зацеплений

$$H_{r_1, r_2} - H_{N-r_1, N-r_2} \quad \vdots \quad \{Aq^N\}\{A/q\} \quad (11.13)$$

Начнем с рассмотрения зацеплений, каждая из компонент которого является неузлом. Без ограничения общности, будем рассматривать случай $r_1 > r_2$. Если положить в формуле (11.13) $N = r_1$ и учесть, что $H_{r,0}^{\mathcal{L}} = 1$, так как в этом случае остается только одна компонента, которая к тому же является неузлом, то получится

$$H_{r_1, r_2}^{\mathcal{L}} - 1 = G_{r_1, r_2}^{\mathcal{L}} \cdot \{Aq^{r_1}\}\{A/q\} \quad (11.14)$$

Если положить $N = r_1 + 1$, то получится

$$\frac{H_{r_1, r_2}^{\mathcal{L}} - H_{r_1 - r_2 + 1, 1}^{\mathcal{L}}}{\{A/q\}} = G_{r_1, r_2}^{\mathcal{L}} \cdot \{Aq^{r_1}\} - G_{r_1 - r_2 + 1, 1}^{\mathcal{L}} \cdot \{Aq^{r_1 - r_2 + 1}\} \vdots \{Aq^{r_1 + 1}\}, \quad (11.15)$$

из чего следует

$$G_{r_1, r_2}^{\mathcal{L}} = [r_2] \cdot G_{r_1 - r_2 + 1, 1}^{\mathcal{L}} + \tilde{G}_{r_1, r_2}^{\mathcal{L}} \cdot \{Aq^{r_1 + 1}\}, \quad (11.16)$$

так как $[r_2]\{Aq^{r_1}\} - \{Aq^{r_1 - r_2 + 1}\} = [r_2 - 1]\{Aq^{r_1 + 1}\}$. Рассмотрев аналогичные выражения для других значений N можно получить

$$H_{r_1, r_2}^{\mathcal{L}} = 1 + \sum_{s=1}^{r_2} \frac{[r_2]_q!}{[s]_q! [r_2 - s] + q!} \cdot F_{s|r_1 - r_2}^{\mathcal{L}}(A, q) \cdot \{A/q\} \cdot \prod_{j=0}^{s-1} \frac{\{Aq^{r_1 + j}\}}{\{Aq^j\}}. \quad (11.17)$$

Отметим, что функции F в данном случае зависят от разницы представлений $r_1 - r_2$.

Для произвольного двухкомпонентного зацепления первое слагаемое в (11.17) нужно заменить на произведение полиномов компонент зацепления:

$$H_{r_1, r_2}^{\mathcal{L}} - H_{r_1, \emptyset}^{\mathcal{L}} \cdot \mathcal{H}_{\emptyset, r_2}^{\mathcal{L}} = \sum_{s=1}^{r_2} \frac{[r_2]!}{[s]! [r_2 - s]!} \cdot F_{s|r_1 - r_2}^{\mathcal{L}}(A, q) \cdot \{A/q\} \cdot \prod_{j=0}^{s-1} \frac{\{Aq^{r_1 + j}\}}{\{Aq^j\}} \quad (11.18)$$

11.2 Трехкомпонентные зацепления

Для зацеплений с большим числом компонент возникнет больше зависимостей от различных разностей $r_1 - r_k$. Рассмотрим трехкомпонентное зацепление, каждая компонента которого является неузлом. В этом случае (11.12) устроено как

$$H_{r_1, r_2, r_3}^{\mathcal{L}_3} - H_{N - r_1, N - r_2, N - r_3}^{\mathcal{L}_3} \vdots \{Aq^N\} \{A/q\}. \quad (11.19)$$

Без ограничения общности рассмотрим случай $r_1 \geq r_2 \geq r_3$. Положив $N = r_1$, получим выражение, аналогичное (11.14):

$$H_{r_1, r_2, r_3}^{\mathcal{L}_3} - H_{r_1 - r_3, r_1 - r_2}^{\mathcal{L}_2} = G_{r_1, r_2, r_3}^{\mathcal{L}_3} \cdot \{Aq^{r_1}\} \{A/q\}, \quad (11.20)$$

где $\mathcal{L}_2$ обозначает зацепление, в котором стерли один из неузлов. Второе слагаемое в левой части в этом случае так же равно не единице, а двух-компонентному зацеплению.

При $N = r_1 + 1$, из

$$\frac{H_{r_1, r_2, r_3}^{\mathcal{L}_3} - H_{r_1 - r_3 + 1, r_1 - r_2 + 1, 1}^{\mathcal{L}_3}}{\{A/q\}} = G_{r_1, r_2, r_3}^{\mathcal{L}_3} \cdot \{Aq^{r_1}\} - G_{r_1 - r_3 + 1, r_1 - r_2 + 1, 1}^{\mathcal{L}_3} \cdot \{Aq^{r_1 - r_3 + 1}\} \quad \vdots \quad \{Aq^{r_1 + 1}\} \quad (11.21)$$

получим:

$$G_{r_1, r_2, r_3}^{\mathcal{L}_3} = [r_3] \cdot G_{r_1 - r_3 + 1, r_1 - r_2 + 1, 1}^{\mathcal{L}_3} + \tilde{G}_{r_1, r_2, r_3}^{\mathcal{L}_3} \cdot \{Aq^{r_1 + 1}\}. \quad (11.22)$$

In fact, $\mathcal{F}_{r_1, r_2, r_3}$ is a polynomial divided by $\prod_{j=0}^{r_2-1} \{Aq^j\}$, in particular, $\mathcal{F}_{r_1 - r_2 + 1, 1} = \frac{1}{\{A\}} \cdot \mathcal{F}_{1|r_1 - r_2}(A, q)$, where the new function is already a polynomial, and its notation is made better adjusted to the needs of the differential expansion. Taking this into account, we obtain the first term of the expansion:

$$\mathcal{H}_{r_1, r_2, r_3}^{\mathcal{L}_3} - \mathcal{H}_{r_1 - r_3, r_1 - r_2}^{\mathcal{L}_2} = [r_3] \cdot \mathcal{F}_{1|r_1 - r_2, r_1 - r_3}^{\mathcal{L}_3} \cdot \frac{\{Aq^{r_1}\}\{A/q\}}{\{A\}} + O\left(\{Aq^{r_1 + 1}\}\{Aq^{r_1}\}\right) \quad (11.23)$$

Глава 12

Топологический квантовый компьютер

Квантовый компьютер – это инструмент, который предлагается для решения класса NP -задач, то есть тех которые требуют экспоненциально большого ресурса при решении на обычном классическом компьютере. Типичным представителем такого типа является произведение экспоненциально больших матриц, и существуют системы, которые предлагают естественное решение такой задачи. Так, если рассмотреть систему из M спинов, то ее пространство Гильберта будет иметь размерность 2^M , а эволюция будет описываться унитарными матрицами размера $2^M \times 2^M$. Соответственно эволюция такой системы отвечают произведению матриц такого размера с течением времени. Задача квантового программирования состоит в сведении задачи к произведению больших унитарных матриц.

Квантовое программирование это деформация и обобщение классического обратимого программирования. Для обратимости алгоритма нужно избегать стирания, записывания и забывания операций, что приводит к изменению энтропии и неизбежному нагреву системы по крайней мере на $kT \log 2$ на каждый бит (предел фон Неймана-Ландауэра. Поэтому в обратимом программировании алгоритмы сводятся к произведению матриц перестановки. Любой классический алгоритм можно переписать как алгоритм для обратимого классического программирования, хотя это и не всегда является тривиальной задачей и требует большего числа бит. Квантовое программирование заменяет перестановки произвольными унитарными преобразо-

ваниями, что сильно увеличивает число возможных обратимых алгоритмов. Это, в частности, может позволить решить по крайней мере некоторые задачи типа NP . Решение таких задач на квантовом компьютере, однако, вероятно, то есть правильный ответ получается только с какой-то вероятностью. Это, однако не большая проблема, так как проверка ответов на классическом компьютере для задач такого типа требует только полиномиального времени. Использование унитарных матриц связано только с наличием систем, в которых они естественным образом возникают. Отметим также, что квантовое программирование не задано универсальным образом. Так набор элементарных операций, из которых строятся квантовые алгоритмы, которые называют *универсальными вентилями*, зависят от конкретной реализации квантового компьютера. Но выбор таких операторов можно сильно влиять на задачи программирования.

В работе [134] была предложена идея топологического квантового программирования, в котором перестановки заменяются сплетающими операторами узлов. В диссертации мы развиваем этот подход и предлагаем конкретную реализацию квантового программирования с помощью $\mathcal{R}$ -матриц.

12.1 Универсальные вентили и алгоритм Соловая-Китаева

Для эффективного применения квантового компьютера должна быть возможность запуска любой программы на таком квантовом компьютере. Но для возможности работы с таким компьютером в нем должно быть конечное число возможных базовых операций. Если возможно построить любую операцию с помощью некоторого конечного набора элементарных операций, то такой набор называется набором универсальных вентилях. Набор таких вентилях вообще говоря зависит как от числа кубит, так и от конкретной модели квантового компьютера.

В работе [135] сформулирована теорема Соловая-Китаева, которая гласит, что при наличии набора универсальных вентилях любую программу, выраженную в форме унитарной матрицы, можно приблизить за логарифмическое время и логариф-

мическим числом операторов в зависимости от степени приближения. Эта теорема формулируется в следующем виде.

Пусть $\mathcal{G}$ это набор универсальных вентилях, и выбрана некоторая точность $\epsilon > 0$. Тогда существует константа c такая, что для любой специальной унитарной матрицы U существует конечная последовательность S вентилях из набора $\mathcal{G}$ длины $O(\log^c(1/\epsilon))$, и при этом выполняется $\|U - S\| < \epsilon$.

Предположим, что $g^\dagger$ также входит в $\mathcal{G}$ для любого $g \in \mathcal{G}$, а $\|\cdot\|$ – это норма оператора (наибольшее значение этого оператора). Тогда эту теорему можно доказать путем построения явного алгоритма, который называется алгоритмом Соловая-Китаева, для получения такого приближения [136]. Псевдокод такого алгоритма устроен следующим образом:

Algorithm 1 Алгоритм Соловая-Китаева

```

function СОЛОВАЙ-КИТАЕВ(вентиль  $U$ , глубина  $n$ )
  if  $n = 0$  then
    return ИСХОДНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ( $U$ )
  else
     $U_{n-1} \leftarrow$  СОЛОВАЙ-КИТАЕВ( $U$ ,  $n - 1$ )
     $V, W \leftarrow$  ГРУППОВОЙ КОММУТАТОР( $UU_{n-1}^\dagger$ )
     $V_{n-1} \leftarrow$  СОЛОВАЙ-КИТАЕВ( $V$ ,  $n - 1$ )
     $W_{n-1} \leftarrow$  СОЛОВАЙ-КИТАЕВ( $W$ ,  $n - 1$ )
    return  $V_{n-1}W_{n-1}V_{n-1}^\dagger W_{n-1}^\dagger U_{n-1}$ 

```

Функция ИСХОДНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ(U) возвращает последовательность вентилях U_0 из набора универсальных вентилях $\mathcal{G}$, которую можно принять за исходное приближение для матрицы U с точностью ϵ_0 , которой должно быть достаточно для сходимости алгоритма. Обычно такое приближение достигается перебором всевозможных последовательностей вентилях из $\mathcal{G}$ длиной до l_0 и поиска наилучшего из них. Функция ГРУППОВОЙ КОММУТАТОР(Δ) возвращает так называемое разложение группового коммутатора матрицы Δ , то есть находит такие матрицы V, W , что $\Delta = VWV^\dagger W^\dagger$.

Алгоритм Соловая-Китаева – это рекурсивный алгоритм, который позволяет по-

строить приближение для данной матрицы U с точностью ϵ_n . Алгоритм сходится если $\epsilon_n < \epsilon_{n-1} < \dots < \epsilon_0$.

12.2 $\mathcal{R}$ -матрицы в качестве квантовых вентилях

В качестве квантовых вентилях в диссертации предлагается использовать $\mathcal{R}$ -матрицы и матрицы Рака, связанные с двух-мостовыми узлами (см. Главу 8).

Важным свойством таких $\mathcal{R}$ -матриц с точки зрения квантовых вычислений является то, что их нельзя составить в любом порядке, в противоположность тому, как это бывает для большинства моделей квантовых компьютеров. Это приводит к некоторым сложностям при вычислении последовательностей $\mathcal{R}$ -матриц, отвечающих тому или иному приближению некоторой унитарной матрицы.

Еще одна особенность такого набора вентилях состоит в том, что в данном случае отсутствуют матрицы, отвечающие однокубитным и запутывающим операциям. Вместо этого можно использовать $\mathcal{R}$ -матрицы в старших представлениях, которые можно сопоставить однокубитным операциям. Так для представления, отвечающего диаграмме Юнга [3] все матрицы будут размера 4×4 . таким образом они являются операциями на одном кукварте. Но их также можно использовать и для вычислений, которые в обычном случае соответствуют двухкубитным операциям. В диссертации подробно разбирается пример вычисления с помощью $\mathcal{R}$ -матриц, связанных с фундаментальным представлением квантовой группы $U_q(sl_N)$. Такие матрицы соответствуют однокубитным операциям.

$\mathcal{R}$ -матрицы и матрицы Рака в данном случае равны [118, 137]:

$$\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} q/A & \\ & -1/qA \end{pmatrix}, \quad \bar{T} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -A \end{pmatrix}, \\
S &= \frac{1}{\sqrt{(q+q^{-1})(A-A^{-1})}} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{A}{q} - \frac{q}{A}} & \sqrt{Aq - \frac{1}{Aq}} \\ \sqrt{Aq - \frac{1}{Aq}} & -\sqrt{\frac{A}{q} - \frac{q}{A}} \end{pmatrix}, \\
\bar{S} &= \begin{pmatrix} \frac{q-q^{-1}}{A-A^{-1}} & \frac{\sqrt{(Aq - \frac{1}{Aq})(\frac{A}{q} - \frac{q}{A})}}{A-A^{-1}} \\ \frac{\sqrt{(Aq - \frac{1}{Aq})(\frac{A}{q} - \frac{q}{A})}}{A-A^{-1}} & -\frac{q-q^{-1}}{A-A^{-1}} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{12.1}$$

Эти матрицы унитарны, если A и q по модулю равны единице.

12.3 Квантовые вентили из $\mathcal{R}$ -матриц

В этом разделе сначала будет рассмотрено, как получить исходное приближение с помощью $\mathcal{R}$ -матриц, а потом возможно применить алгоритм Соловая-Китаева для построения последующих приближений.

Алгоритм Соловая-Китаева можно применить напрямую. Для этого нужно построить все последовательности $\mathcal{R}$ -матриц длиной до l_0 . Далее, просмотрев все такие последовательности, нужно найти лучшее приближение искомой унитарной матрицы. Однако, оказывается, что в случае $\mathcal{R}$ -матриц многие из приближений совпадают. В данной работе предлагается строить исходное приближение с помощью узлов, что позволяет сильно упростить вычисления.

Элемент произведения $\mathcal{R}$ -матриц, отвечающий проекции на тривиальное представление, как обсуждалось в Главе 8, — это полином ХОМФЛИ-ПТ соответствующего узла. Так как размер всех матриц в данном случае равен 2×2 , то соответствующие унитарные матрицы определяются тремя независимыми параметрами. Один из параметров можно зафиксировать, выбрав некоторый конкретный узел. В этом и состоит причина совпадения многих из приближений, которые получаются методом перебора последовательностей $\mathcal{R}$ -матриц, так как одному и тому же узлу отвечает большое число различных реализаций с помощью произведения $\mathcal{R}$ -матриц. Оставшиеся два параметра можно зафиксировать, добавив к кросе дополнительные

$\mathcal{R}$ -матрицы слева и справа так, чтобы они меняли только относительную фазу элементов матрицы. Такие матрицы диагональны и потому не меняют полином узла.

Такой подход позволяет определить следующую реализацию исходного приближения. Во-первых надо построить набор полиномов ХОМФЛИ-ПТ для различных узлов $\mathcal{K}$. Такие ответы известны для большого числа узлов и их можно найти, например, в [93]. Затем, можно построить последовательности $S_{\mathcal{K}}$ матриц $\mathcal{R}$, отвечающих таким узлам. Для построения исходного приближения для некоторой матрицы U , надо найти узел, разница между полиномом которого и абсолютной величиной матричного элемента U_{11} минимальна: $\mathcal{K} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{K}'} |U_{11}| - |H_{[1]}^{\mathcal{K}'}(q, A)/D_{[1]}|$. Затем надо умножить последовательность $\mathcal{R}$ -матриц $S_{\mathcal{K}}$, связанную с выбранным узлом слева и справа на диагональные $\mathcal{R}$ -матрицы так, чтобы произведение было наилучшим приближением матрицы U .

Такое приближение можно использовать по следующей причине. Рассмотрим следующую параметризацию специально унитарной матрицы

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{\psi+\phi} & \sin \theta e^{\psi-\phi} \\ \sin \theta e^{\phi-\psi} & \cos \theta e^{-\psi-\phi} \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

Заметим, что абсолютные значения полиномов ХОМФЛИ-ПТ плотно заполняют отрезок $[0, 1]$. Это позволяет найти угол θ с хорошей точностью. Умножив последовательность $S_{\mathcal{K}}$ на степени $\mathcal{R}$ -матриц слева и справа можно приблизить фазы ϕ и ψ . Эти матрицы диагональны и их ненулевые элементы – это степени $q = \exp \frac{2i\pi}{N+k}$, таким образом, фаза $\frac{2\pi}{N+k}$ определяет минимально возможную точность приближения углов ϕ и ψ . Для достаточно большого значения $N + k$, точность может быть достаточной для исходного приближения. Заметим также, что необходимо, чтобы $N + k \geq 2(N + 1)$, иначе $\mathcal{R}$ -матрицы будут неунитарны.

Таким образом, естественный базис последовательностей $\mathcal{R}$ -матриц, который можно использовать для построения исходного приближения необходимых вентилей, можно параметризовать узлами. Отметим также, что полиномы ХОМФЛИ-ПТ определены для произвольного значения q , поэтому данный алгоритм применим для любых значений параметра калибровочной группы N и уровня теории k .

На Рис. 12.1-12.4 приведены узлы, связанные с нулевым и первым приближением

вентилей Адамара H и вентиля $\pi/8$ E

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}. \quad (12.3)$$

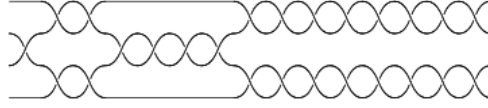


Рис. 12.1: Нулевое приближение для вентиля Адамара, узел 9_4 , точность $\epsilon = 0.043$, $N = 2$, $k = 13$



Рис. 12.2: Первое приближение для вентиля Адамара, узлы 7_4 , 9_{23} , 7_4 , 9_{23} , 9_4 , точность $\epsilon = 0.0068$, $N = 2$, $k = 13$

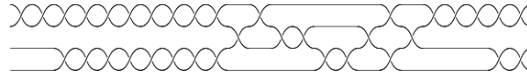


Рис. 12.3: Нулевое приближение для вентиля $\pi/8$, узел 10_{29} , точность $\epsilon = 0.028$, $N = 2$, $k = 9$



Рис. 12.4: Первое приближение для вентиля $\pi/8$, узлы 9_{17} , 9_{11} , 9_{17} , 9_{11} , 10_{29} , точность $\epsilon = 0.005$, $N = 2$, $k = 9$

Глава 13

Заключение

В данной работе были получены следующие результаты:

1. Построены универсальные методы вычисления вильсоновских средних в произвольном представлении группы $SU(N)$.
2. Построен метод вычисления фундаментальных полиномов ХОМФЛИ виртуальных узлов – обобщения теории Черна-Саймонса на пространства другой топологии.
3. Построены матрицы Рака, пригодные для вычисления полиномов ХОМФЛИ в фундаментальном представлении для кос с 3-7 нитями.
4. Построены матрицы Рака, пригодные для вычисления полиномов ХОМФЛИ во всех симметрических и антисимметрических представлениях для кос с 3 нитями.
5. Предложена гипотеза собственных значений о выражении коэффициентов Рака 3-х и 4-нитевой косы через собственные значения $\mathcal{R}$ -матрицы.
6. Предложен метод эволюции для вычисления полиномов серий узлов.
7. Построены ответы для симметрических полиномов ХОМФЛИ скрученных узлов и узлов, связанных с двойной косой.
8. Построены выражения в произвольных симметрических представлениях для зацеплений Хопфа, Уайтхеда и колец Борромея.

9. Построен метод вычисления цветных полиномов для древовидных узлов.
10. Построены полиномы узлов-мутантов Киношиты-Терасаки в представлении [2,1].
11. Построен метод для вычисления фундаментальных полиномов виртуальных узлов.
12. Построены выражения для фундаментальных полиномов ХОМФЛИ двухнитевых и твистованных виртуальных узлов.
13. Построена матричная модель для классических размерностей в вершинах гиперкуба для виртуальных узлов.
14. Построен метод вычисления квантовых размерностей в вершинах гиперкуба для виртуальных узлов.
15. Предложена система независимых размерностей, входящих в выражения для полиномов виртуальных узлов.
16. Описано, как применять квантовые R-матрицы и матрицы Рака в качестве универсальных вентилях в однокубитном квантовом компьютере.
17. Описано дифференциальное разложение для полиномов узлов и зацеплений, которое отражает групповые свойства полиномов ХОМФЛИ-ПТ.

В данной работе разработаны различные эффективные подходы к вычислению вильсоновских средних в трехмерной теории Черна-Саймонса и полиномов узлов. Эти методы позволяют эффективным образом вычислять вильсоновские средние для различных представлений и калибровочных групп. Полученные с помощью разработанных методов результаты позволяют изучать свойства и зависимости таких вильсоновских средних от представлений и параметров теории.

В рамках диссертации рассмотрены применения полученных выражений к рассмотрению дифференциального разложения для полиномов ХОМФЛИ-ПТ, описывающего их групповые свойства. Также описано применение разработанных подходов

для описания топологического квантового компьютера, основанного на применении $\mathcal{R}$ -матриц в качестве универсальных вентиляей.

Результаты данной работы опубликованы в ведущих отечественных и зарубежных научных журналах [138]-[159].

Литература

- [1] Ehrenberg W., Siday R.E. The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics // Proceedings of the Physical Society. - 1949. - Vol. B62. - P. 8–21.
- [2] Aharonov Y., Bohm D. Significance of electromagnetic potentials in quantum theory // Physical Review. - 1959. - Vol. 115. - P. 485–491.
- [3] Coleman S. Aspects of Symmetry. - Cambridge University Press, 1985. - P. 402.
- [4] Рубаков В. Классическая теория калибровочных полей.— Москва : Едиториал УРСС, 1999.— С. 336.
- [5] Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations // Phys. Lett.— 1975.— Vol. B59.— P. 85–87.
- [6] Polyakov A.M. Quark confinement and topology of gauge theories // Nucl.Phys.- 1977. - Vol. B120. - P. 429-458.
- [7] Seiberg N., Witten E. Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory // Nucl. Phys. - 1994. - Vol. B426. - P. 19-52. - arXiv:hep-th/9407087.
- [8] Seiberg N., Witten E. Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $N=2$ Supersymmetric QCD // Nucl.Phys. - 1994. - Vol. B431. - P. 484-550. - arXiv:hep-th/9408099.
- [9] Belavin A.A., Polyakov A.M., Zamolodchikov A.B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // Nucl. Phys. - 1984. - Vol. B241. - P. 333-380.

- [10] Francesco P. Di, Mathieu P., S'en'echal D. Conformal field theory.— New York : Springer, 1997.— P. 890.
- [11] Atiyah M.F. New invariants of three and four dimensional manifolds // Proc. Symp. Pure Math.— 1988.— Vol. 48.— P. 285–299.
- [12] Семенов-Тянь-Шанский М.А. Об одном свойстве интегралов Кириллова // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика, Зап. научн. сем. ЛОМИ. - 1973. - Т. 37. - С. 53-65.
- [13] Семенов-Тянь-Шанский М.А. Гармонический анализ на римановых симметрических пространствах отрицательной кривизны и теория рассеяния // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1976. - Т. 40. - Вып. 3. - С. 562-592.
- [14] Duistermaat J.J., Heckman G.J. On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space // Inv. Math. - 1982. - V. 69. - P. 259-269.
- [15] Duistermaat J.J., Heckman G.J. Addendum to On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space // Inv. Math. - 1983. - V. 72. - P. 153-158.
- [16] Hietamäki A., Morozov A.Yu., Niemi A.J., Palo K. Geometry of N Supersymmetry and the Atiyah-Singer Index Theorem // Phys. Lett. - 1991. - Vol. B263. - P. 417-424.
- [17] Пескин М. Е., Шредер Д. В. Введение в квантовую теорию поля.— Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2011.— С. 784.
- [18] Chern S.-S., Simons J. Characteristic forms and geometric invariants // Ann. Math. — 1974. — Vol. 99. — P. 48–69.
- [19] Achúcarro A., Townsend P. A Chern-Simons Action for Three-Dimensional anti-De Sitter Supergravity Theories // Phys. Lett. - 1986. - Vol. B180. - P. 89-92.
- [20] Witten E. (2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System // Nucl. Phys. - 1988. - Vol. B311. - P. 46-78.

- [21] Witten E. Three-Dimensional Gravity Revisited // arXiv:0706.3359.
- [22] Arcioni G., Blau M., O’Loughlin M. On the boundary dynamics of Chern-Simons gravity // JHEP. - 2003. - Vol. 0301, no. 067. - arXiv:hep-th/0210089.
- [23] Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, P. Kim, Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry’s phase in graphene // Nature.— 2005.— Vol. 438.— P. 201–204.
- [24] Stern A. Anyons and the quantum Hall effect — a pedagogical review // Ann. of Phys.— 2008.— Vol. 323.— P. 204–249.
- [25] Zhang Y., Tan Y.W., Stormer H.L., Kim P. Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry’s phase in graphene // Nature.— 2005.— Vol. 438.— P. 201–204.
- [26] Китаев А., Шень А., Вялый М. Классические и квантовые вычисления.— Москва : МЦНМО, 1999.— P. 192.
- [27] Witten E., Quantum field theory and Jones polynomials // Commun. Math. Phys. - 1989.- Vol. 121. - P. 351-399.
- [28] Kaul R.K. Chern-Simons theory, colored-oriented braids and link invariants // Commun. Math. Phys. — 1994. — Vol. 162. — P. 289–320. — arXiv:hep-th/9305032.
- [29] Kaul R.K., Govindarajan T.R. Three-dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links // Nucl. Phys. — 1992. — Vol. B380. — P. 293–336. — arXiv:hep-th/9111063.
- [30] Ramadevi P., Govindarajan T.R., Kaul R.K. Three dimensional Chern-Simons theory as a theory of knots and links III: Compact semi-simple group // Nucl. Phys. — 1993. — Vol. B402. — P. 548–566.— arXiv:hep-th/9212110.
- [31] Ramadevi P., Govindarajan T.R., Kaul R.K. Knot invariants from rational conformal field theories // Nucl. Phys. — 1994. — Vol. B422. — P. 291–306.— arXiv:hep-th/9312215.

- [32] Kaul R.K. Chern-Simons theory, knot invariants, vertex models and three-manifold invariants // *Frontiers of field theory, quantum gravity and strings. Proceedings.* — 1999. — P. 45–63. — arXiv:hep-th/9804122.
- [33] Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M. Perturbative aspects of Chern-Simons theory // *Phys.Lett.* — 1989. — Vol. B227. — P. 111–117.
- [34] Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M. Wilson lines in Chern-Simons theory and link invariants // *Nucl. Phys.* — 1990. — Vol. B330. — P. 575–607.
- [35] Alvarez M., Labastida J.M.F. Analysis of observables in Chern-Simons perturbation theory // *Nucl. Phys.* — 1993. — Vol. B395. — P. 198–238. — arXiv:hep-th/9110069.
- [36] Axelrod S., Singer I.M. Chern-Simons perturbation theory // *Proc. of XXth DGM conference.*— New York : World Scientific, 1991. — P. 3–45. — arXiv:hep-th/9110056.
- [37] Labastids J.M.F., Ramallo A.V. Chern-Simons theory and Conformal Blocks // *Phys.Lett.* — 1989.— Vol. B228., no.2.
- [38] Frohlich J., King C. The Chern-Simons theory and knot polynomial // *Commun. Math. Phys.*— 1989. — Vol. 126. — P. 167–199.
- [39] Labastida J.M.F., P‘erez E. Kontsevich integral for Vassiliev invariants in the holomorphic gauge // *J. Math. Phys.* — 1998. — Vol. 39. — P. 5183–5198. — arXiv:hep-th/9710176.
- [40] Labastida J. M. F. Chern-Simons gauge theory: ten years after // *AIP Conf. Proc.* — 1999. — Vol. 484. — P. 1–40. — arXiv:hep-th/9905057.
- [41] Dunin-Barkowski P., Sleptsov A., Smirnov A. Kontsevich integral for knots and Vassiliev invariants // *Int. J. Mod. Phys.* — 2013. — Vol. A28, no. 1330025. — arXiv:1112.5406.
- [42] Kontsevich M. Vassiliev’s knot invariants // *Adv. in Soviet Math.* — 1993. — Vol. 16:2.— P. 137– 150.

- [43] Vassiliev V. A. Cohomology of the knot spaces // Adv. Soviet Math.— 1990.— Vol. 1.— P. 23–69.
- [44] Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J. Introduction to Vassiliev knot invariants // Cambridge University Press.— 2012.— arXiv:math.GT/1103.5628v3.
- [45] Kauffman L. H. The interface of knots and physics.— Singapore : World Scientific, 2001.— P. 788.
- [46] Hoste J., Ocneanu A., Millett K., Freyd P., Lickorish W.B.R., Yetter D. A new polynomial invariant of knots and links // Bull. Amer. Math. Soc. - 1985. - Vol. 12. - P. 239-246.
- [47] Przytycki J., Traczyk P. Conway Algebras and Skein Equivalence of Links // Proc. Amer. Math. Soc. - 1987. - Vol. 100. - P. 744-748.
- [48] Mironov A., Morozov A. Equations on knot polynomials and 3d/5d duality // AIP Conf. Proc.— 2012.— Vol. 1483.— P. 189–211.— arXiv:1208.2282
- [49] Schwarz A.S. The partition function of a degenerate functional // Comm. Math. Phys. - 1979. - Vol. 67:1. - P. 1-16.
- [50] Jones V. F. R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebra // Bull. AMS.— 1985.— Vol. 12.— P. 103–111.
- [51] Jones V. F. R. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials // Ann. Math.— 1989.— Vol. 126.— P. 335–388.
- [52] Kauffman L. State models and the Jones polynomial // Topology.— 1987.— Vol. 26.— P. 395– 407.
- [53] Morton H. R., Ryder H. J. Mutants and $su(3)$ q invariants // Geom. Topol. Monogr.— 1998.— Vol. 1.— P. 365–381.— arXiv:math/9810197.
- [54] Morton H. R., Rampichini M. Mutual braiding and the band presentation of braid groups // Knots in Hellas 98, Proceedings of the International Conference on Knot Theory and its Ramifications, ed. C.Gordon et al., World Scientific. - 2000. - P. 335-346. - arXiv:math/9907017.

- [55] Morton H. R., Hadji R. J., Homfly Polynomials of Generalized Hopf Links // *Algebr. Geom. Topol.* - 2002. - Vol. 2. - P. 11-32. - arXiv:math/0106207.
- [56] Morton H. R., Lukac S. HOMFLY polynomial of decorated Hopf link // *J. Knot Theory and Its Ramifications.* - 2003. - Vol. 12. - P. 395-416. - arXiv:math/0108011.
- [57] Adams C. C. *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots.*— Providence : AMS, 2004.— P. 307.
- [58] Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., Sklyanin E. K. Quantum spectral transform method. recent developments // *Lecture Notes in Physics.*— 1982.— Vol. 151.— P. 61–119.
- [59] П.П.Кулеш, Н.Ю.Решетихин. О GL_3 -инвариантных решениях уравнения Янга-Бакстера и ассоциированных квантовых системах // *Зап. науч. сем. ЛОМИ.*— 1982.— Vol. 120.— P. 92– 121.
- [60] M. Jimbo T. Miwa, Okado M. An $A_{n-1}^{(1)}$ family of solvable lattice models // *Mod. Phys. Lett.*— 1987.— Vol. B1.— P. 73–79.
- [61] Анохина А. С., Морозов А. А. Процедура каблирования для полиномов ХОМ-ФЛИ // 178 (2014) 3-68, ТМФ — 2014 — Т. 178 — С. 1-58
- [62] Turaev V. G. The Yang-Baxter equation and invariants of links // *Invent. Math.*— 1988.— Vol. 92.— P. 527–533.
- [63] Reshetikhin N. Yu., Turaev V. G. Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups // *Commun. Math. Phys.*— 1990.— Vol. 127.— P. 1–26.
- [64] Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M. Chern-Simons field theory and quantum groups // In: Doebner H.D., Hennig J.D. (eds) *Quantum Groups. Lecture Notes in Physics.* - 1990. - P. 307-317.
- [65] Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M. Chern–Simons holonomies and the appearance of quantum groups // *Phys.Lett.* - 1990. - Vol. B235. - P. 275

- [66] Gu J., Jockers H. A note on colored HOMFLY polynomials for hyperbolic knots from WZW models // Commun. Math. Phys.— 2015.— Vol. 338.— P. 393–456.— arXiv:1407.5643.
- [67] HOMFLY and superpolynomials for figure eight knot in all symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // JHEP.— 2012.— Vol. 07, no. 131.— arXiv:1203.5978
- [68] Anokhina A., Mironov A., Morozov A., Morozov And. Knot polynomials in the first non-symmetric representation // Nucl. Phys.— 2014.— Vol. B882.— P. 171–194.— arXiv:1211.6375
- [69] Nawata S., Ramadevi P., Singh V. K. Colored HOMFLY polynomials can distinguish mutant knots // J. Knot Theory Ramifications.— 2017.— Vol. 26. no. 14— no. 1750096.— arXiv:1504.00364.
- [70] Zodinmawia, Ramadevi P. $SU(N)$ quantum Racah coefficients & non-torus links // Nucl. Phys.— 2013.— Vol. 870.— P. 205–242.— arXiv:1107.3918.
- [71] Nawata S., Ramadevi P., Zodinmawia. Colored HOMFLY polynomials from Chern-Simons theory // J. Knot Theory Ramifications.— 2013.— Vol. 22, no. 1350078.— arXiv:1302.5144
- [72] Galakhov D., Melnikov D., Mironov A., Morozov A. Knot invariants from Virasoro related representation and pretzel knots // Nucl. Phys.— 2015.— Vol. B899.— P. 194–228.— arXiv:1502.02621.
- [73] Zodinmawia, Ramadevi P. Reformulated invariants for non-torus knots and links.— arXiv:1209.1346.
- [74] Morozov A., Smirnov A. Chern-simons theory in the temporal gauge and knot invariants through the universal quantum R-matrix // Nucl. Phys.— 2010.— Vol. B835.— P. 284–313.— arXiv:hep-th/1001.2003.
- [75] Chen L., Chen Q. Orthogonal quantum group invariants of links // Pacific Journ. of Math.— 2012.— Vol. 257.— P. 267–318.— arXiv:1007.1656.

- [76] Bracken A. J., Gould M. D., Zhang R. B. Quantum group invariants and link polynomials // Comm. Math. Phys.— 1991.— Vol. 137:1.— P. 13–21.
- [77] Vogel P. The universal Lie algebra // препринт.- 1999. - URL: <https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.vogel/grenoble-99b.pdf>.
- [78] Mironov A., Mkrtchyan R., Morozov A. On universal knot polynomials // J. High Energ. Phys.- 2016.- Vol. 78 no.78.- arXiv:1510.05884.
- [79] Mironov A., Morozov A. Universal Racah matrices and adjoint knot polynomials. I. Arborescent knots // Physics Letters.- 2016. - Vol. B755. - P. 47-57. - arXiv:1511.09077.
- [80] Klimyk A., Schmudgen K. Quantum groups and their representations.— Berlin Heidelberg : Springer, 2012.— P. 552.
- [81] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu. Representations of the algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links // Infinite dimensional Lie algebras and groups.— Singapore : World Scientific, 1989.— P. 285–339.— URL: <https://math.berkeley.edu/~reshetik/Publications/q6j-KR.pdf>
- [82] Kauffman Louis H. Virtual knot theory // European J. Comb.— 1999.— Vol. 20.— P. 663–690.— arXiv : hep-th/9811028
- [83] Gopakumar R., Vafa C. On the Gauge Theory/Geometry Correspondence // Adv.Theor.Math.Phys. - 1999. - Vol. 3. - P. 1415-1443. - arXiv:hep-th/9811131.
- [84] Gopakumar R., Vafa C. M-Theory and Topological Strings–II // arXiv:hep-th/9812127.
- [85] Ooguri H., Vafa C. Knot Invariants and Topological Strings // Nucl.Phys. - 2000. - Vol. B577. - P. 419-438. - arXiv:hep-th/9912123.
- [86] Labastida J.M.F., Mariño M. Polynomial invariants for torus knots and topological strings // Commun.Math.Phys. - 2001. -Vol. 217. - P. 423-449. - arXiv:hep-th/0004196.

- [87] Labastida J.M.F., Mariño M., Vafa C. Knots, links and branes at large N // JHEP. - 2000. - Vol. 0011, no. 007. - arXiv:hep-th/0010102.
- [88] Labastida J.M.F., Mariño M. A New Point of View in the Theory of Knot and Link Invariants // , arXiv:math/0104180
- [89] Mariño M., Vafa C. Framed knots at large N // , arXiv:hep-th/0108064
- [90] Mironov A., Morozov A., Morozov An., Ramadevi P., Singh V.K., Sleptsov A. Checks of integrality properties in topological strings // JHEP. - 2017. - Vol. 08, no. 139. - arXiv:1702.06316
- [91] Mironov A., Morozov A., Morozov An., Sleptsov A. Gaussian distribution of LMOV numbers // Nuclear Physics. - 2017. - Vol. B924. - P. 1-32. - arXiv:1706.00761
- [92] Rolfsen, D. Table of Knots and Links // Appendix C in Knots and Links. Wilmington, DE: Publish or Perish Press. -1976. - P. 280-287.
- [93] Bar-Natan D., Scott M., et al. The Knot Atlas.— URL: <http://katlas.org> (дата обращения: 20.04.21).
- [94] Little C.N. On Knots, with a Census of Order Ten // Trans. Connecticut Acad. Sci. - 1885. - Vol. 18. - P. 374-378.
- [95] Perko, K. A. Jr. On the Classification of Knots // Proc. Amer. Math. Soc. - 1974. - Vol. 45 - P. 262-266.
- [96] Hoste, J., Thistlethwaite, M., Weeks, J. The First 1701936 Knots // Math. Intell. - 1998. - Vol. 20. - P. 33-48.
- [97] Alexander J. W. Topological invariants of knots and links // Trans. AMS.— 1928.— Vol. 30.— P. 275–306.
- [98] Kauffman L. H. Colored HOMFLY polynomials from Chern-Simons theory // J. Knot Theory Ramifications.— 2012.— Vol. 21, no. 1240007.— arXiv:1101.0665.
- [99] Kauffman L. H., Manturov V. O. Virtual knots and links // Proc. Steklov Inst. Math. - 2006. - Vol. 252. - P. 104–121. — arXiv:math/0502014.

- [100] Fenn R., Ilyutko D.P., Kauffman L.H., Manturov V.O. Unsolved Problems in Virtual Knot Theory and Combinatorial Knot Theory // arXiv:1409.2823.
- [101] Reshetikhin, N.Yu., Takhtadjan L.A., Faddeev L.D. Quantization of Lie groups and Lie algebras // Algebra and Analysis. - 1989. - Vol. 1. - P. 178-206.
- [102] Macdonald I. G. Schur functions: theme and variations // S'eminaires Lotharingien de Combinatoire.— 1992.— Vol. 28.
- [103] Macdonald I. G. Symmetric functions and Hall polynomials. - Oxford University Press, 1995. - P. 475
- [104] Jimbo M. Introduction to the Yang-Baxter equation // Int. J. of Mod. Phys.— 1989.— Vol. A04, no. 15.— P. 3759–3777.
- [105] Прасолов В. В., Сосинский А. Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия.— Москва : МЦНМО, 1997.— С. 352.
- [106] Smirnov A. Notes on Chern-Simons Theory in the Temporal Gauge // Proceedings of International School of Subnuclear Phys. in Erice, Italy, 2009 - arXiv:hep-th/0910.5011.
- [107] Baxter R. J. Exactly solved models in planar mechanics.— London : Academic Press, 1989.— P. 502.
- [108] Mironov A., Morozov A., Morozov And. Character expansion for HOMFLY polynomials. I. integrability and difference equations // Strings, gauge fields, and the geometry behind: the legacy of Maximilian Kreuzer.— Singapore : World Scientific, 2013.— P. 101–118.— arXiv : hep-th/1112.5754
- [109] Borhade P., Ramadevi P., Sarkar T. $U(N)$ Framed Links, Three-Manifold Invariants, and Topological Strings // Nucl.Phys. 2004.- Vol. B678 - P. 656-681. - arXiv:hep-th/0306283.
- [110] Anokhina A., Mironov A., Morozov A., Morozov And. Colored HOMFLY polynomials as multiple sums over paths or standard Young tableaux // Adv. in high energy phys. — 2013 — Vol. 2013, no. 931830

- [111] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики.— Москва : Наука, 1976.— Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория.— С. 768.
- [112] Morozov A., Sleptsov A. New Symmetries for the $U_q(sl_N)$ 6-j Symbols from the Eigenvalue Conjecture // Jetp Lett. - 2018.- Vol. 108. - P. 697–704.
- [113] Alekseev V., Morozov And., Sleptsov A., Multiplicity-free $U_q(sl_N)$ 6-j symbols: Relations, asymptotics, symmetries // Nucl.Phys.- 2020.- Vol. B960. no. 115164. - arXiv:1912.13325
- [114] Alekseev V., Morozov And., Sleptsov A., Interplay between symmetries of quantum 6j-symbols and the eigenvalue hypothesis // arXiv:1909.07601
- [115] Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu. Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links // Infinite dimensional Lie algebras and groups.— Singapore : World Scientific, 1989.— P. 285–339.— URL: <https://math.berkeley.edu/~reshetik/Publications/q6j-KR.pdf>
- [116] Khovanov M. A categorification of the Jones polynomial // Duke Math. J.— 2000.— Vol. 101.— P. 359–426.
- [117] Morton H.R. Mutant knots with symmetry // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. - 2009. - Vol. 146. - P. 95-107. - arXiv:0705.1321
- [118] Nawata S., Ramadevi P., Zodinmawia Multiplicity-free quantum 6j-symbols for $U_q(sl_N)$ // Letters in Mathematical Physics. - 2013. - Vol. 103. - P. 1389–1398. - arXiv:1302.5143
- [119] Bar-Natan D. On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial // Algebr. Geom. Topol.— 2002.— Vol. 2.— P. 337–370.— arXiv : math.QA/0201043.
- [120] Dolotin V., Morozov A. Introduction to Khovanov homologies. I. Unreduced Jones superpolynomial // JHEP.— 2013.— Vol. 1301, no. 065.— arXiv : hep-th/1208.4994.
- [121] Khovanov M., Rozansky L. Matrix factorizations and link homology // Fund. Math.— 2008.— Vol. 199.— P. 1–91.— arXiv : math.QA/0401268.

- [122] Carqueville N., Murfet D. Computing Khovanov-Rozansky homology and defect fusion // *Algebr. Geom. Topol.*— 2014.— Vol. 14.— P. 489–537.— arXiv : hep-th/1108.1081.
- [123] Anokhina A., Morozov A. Towards R-matrix construction of Khovanov-Rozansky polynomials. I. Primary T-deformation of HOMFLY // *JHEP.*— 2014.— Vol. 07, no. 063.— arXiv : hep-th/1403.8087.
- [124] Anokhina A., Morozov A., Popolitov A. Nimble evolution for pretzel Khovanov polynomials // *Eur. Phys. J.-* 2019.- Vol. C79, no. 867.- arXiv:1904.10277
- [125] Dunin-Barkowski P., Popolitov A., Popolitova S. Evolution for Khovanov polynomials for figure-eight-like family of knots // arXiv:1812.00858
- [126] Fuji H., Gukov S., Sulkowski P. Volume Conjecture: Refined and Categorified // *Adv. Theor. Math. Phys.* - 2012. - Vol. 16., no. 6. - P. 1669-1777. - arXiv:1203.2182.
- [127] Nawata S., Ramadevi P., Zodinmawia, Sun X. Super-A-polynomials for twist knots // *JHEP.*— 2012.— Vol. 1211, no. 157.— arXiv : hep-th/1209.1409
- [128] HOMFLY and superpolynomials for figure eight knot in all symmetric and antisymmetric representations / H. Itoyama, A. Mironov, A. Morozov, And. Morozov // *JHEP.*— 2012.— Vol. 07, no. 131.— arXiv:1203.5978
- [129] Anokhina A., Mironov A., Morozov A., Morozov And. Knot polynomials in the first non-symmetric representation // *Nucl. Phys.*— 2014.— Vol. B882.— P. 171–194.— arXiv:1211.6375
- [130] Dunfield N.M., Gukov S., Rasmussen J., The Superpolynomial for Knot Homologies // *Exp. Math.* (2006), **15**, 129-159, arXiv:math/0505662.
- [131] Dunin-Barkowski P., Mironov A., Morozov A., Sleptsov A., Smirnov A. Superpolynomials for torus knots from evolution induced by cut-and-join operators // *JHEP.*— 2013.— Vol. 03, no. 021.— arXiv:hep-th/1106.4305.
- [132] Gukov S., Stosic M. Homological algebra of knots and BPS states // *Geometry & Topology Monographs.*- 2012.- Vol. 18.- P. 309–367. - arXiv:1112.0030

- [133] Mishnyakov V., Sleptsov A., Tselousov N. A novel symmetry of colored HOMFLY polynomials coming from $sl(N|M)$ superalgebras // arXiv:2005.01188
- [134] Kauffman L.H., Lomonaco S.J.Jr. Braiding Operators are Universal Quantum Gates // New Journal of Physics. - 2004. - Vol. 6 no. 134.- P. 1-40. - arXiv:quant-ph/0401090
- [135] Kitaev A.Y. Quantum computations: algorithms and error correction // Russian Mathematical Surveys. - 1997. - Vol. 52 no. 1191
- [136] Dawson C.M., Nielsen M.A. The Solovay-Kitaev algorithm // Quantum Info. Comput. - 2006. - Vol. 6 no. 1. - P. 81–95. - arXiv:quant-ph/0505030
- [137] Mironov A., Morozov A., Sleptsov A. Colored HOMFLY polynomials for the pretzel knots and links // JHEP. - 2015. - Vol. 07 no. 069. - arXiv:1412.8432
- [138] Mironov A., Morozov A., Morozov An. Character expansion for HOMFLY polynomials. II. Fundamental representation. Up to five strands in braid // JHEP. - 2012. - Vol. 03, no. 034. - arXiv:1112.2654.
- [139] Itoyama H., Mironov A., Morozov A., Morozov An. Character expansion for HOMFLY polynomials. III. All 3-Strand braids in the first symmetric representation // Int. J. Mod. Phys. A. - 2012. - Vol. 27, no. 1250099. - arXiv:1204.4785.
- [140] Itoyama H., Mironov A., Morozov A., Morozov An. Eigenvalue hypothesis for Racah matrices and HOMFLY polynomials for 3-strand knots in any symmetric and antisymmetric representations // Int. J. Mod. Phys. - 2012. - Vol. A28., no. 1340009. - arXiv:1209.6304.
- [141] Mironov A., Morozov A., Morozov An. Evolution method and “differential hierarchy” of colored knot polynomials // AIP Conf. Proc. - 2013. - Vol. 1562, no. 123. - arXiv:1306.3197.
- [142] Arthamonov S., Mironov A., Morozov A., Morozov An. Link polynomial calculus and the AENV conjecture // JHEP. - 2014. - Vol. 04., no. 156. - arXiv:1309.7984.

- [143] Mironov A., Morozov A., Morozov An. On possible existence of HOMFLY polynomials for virtual knots // Phys. Lett. - 2014. - Vol. B737. - P. 48-56. - arXiv:1407.63192.
- [144] Mironov A., Morozov A., Morozov An. On colored HOMFLY polynomials for twist knots // Mod. Phys. Lett. 2014. - Vol. A29. - Iss. 34. - no. 1450183. - arXiv:1408.3076.
- [145] Alexandrov A., Mironov A., Morozov A., Morozov And. Towards matrix model representation of HOMFLY polynomials // Письма в ЖЭТФ. -2014. - Vol.100:4. - P. 297-304. - arXiv:1407.3754.
- [146] Bishler L., Morozov A., Morozov An., Morozov Ant., Evolution method and HOMFLY polynomials for virtual knots // Int. J. of Mod. Phys. - 2015. - Vol. A30., no. 1550074. - arXiv:1411.2569.
- [147] Mironov A., Morozov A., Morozov An., Ramadevi P., Singh V.K. Colored HOMFLY polynomials of knots presented as double fat diagrams // JHEP. - 2015. -Vol. 07., no. 109. - arXiv:1504.00371.
- [148] Morozov A., Morozov An., Popolitov A. On matrix-model approach to simplified Khovanov–Rozansky calculus // Phys. Lett. - 2015. - Vol. B749. - P. 309-325. - arXiv:1506.07516.
- [149] Morozov A., Morozov An., Popolitov A. On ambiguity in knot polynomials for virtual knots // Phys. Lett. - 2016. - Vol. B757. - P. 289-302. - arXiv:1511.08242.
- [150] Mironov A., Morozov A., Morozov An., Sleptsov A., Ramadevi P., Singh V.K. Tabulating knot polynomials for arborescent knots // J. Phys. A: Math. Theor. - 2017. - Vol.50, no. 085201. - arXiv:1601.04199.
- [151] Морозов А.Ю., Морозов А.А., Пополитов А.В. Матричные модели и размерности в вершинах гиперкубов // Теоретическая и математическая физика. - 2017. - Т. 192:1. - С. 115–163. - arXiv:1508.01957.

- [152] Bai C., Jiang J., Liang J., Mironov A., Morozov A., Morozov An., Sleptsov A.
Differential expansion for link polynomials // Phys. Lett. - 2018. - Vol. B778. - P. 197-206. - arXiv:1709.09228.
- [153] Dhara S., Mironov A., Morozov A., Morozov An., Sleptsov A., Ramadevi P., Singh V.K. Eigenvalue hypothesis for multi-strand braids // Phys. Rev. - 2018. - Vol. D97, no.12. - 126015. - arXiv:1711.10952.
- [154] Bai C., Jiang J., Liang J., Mironov A., Morozov A., Morozov An., Sleptsov A.
Quantum Racah matrices up to level 3 and multicolored link invariants // J. Geom. Phys. - 2018. - Vol. 132. - P. 155-180. - arXiv:1801.09363.
- [155] Melnikov D., Mironov A., Mironov S., Morozov A., Morozov An. Towards topological quantum computer // Nucl. Phys. - 2018. - Vol. B926. - P. 491-508. - arXiv:1703.00431.
- [156] Mironov A., Morozov A., Morozov An. Tangle blocks in the theory of link invariants // JHEP (2018), **09**, 128, arXiv:1804.07278.
- [157] Awata H., Kanno H., Mironov A., Morozov A., Morozov An. A non-torus link from topological vertex // Phys. Rev. - 2018. - Vol. D98., no. 046018. - arXiv:1806.01146.
- [158] Melnikov D., Mironov A., Mironov S., Morozov A., Morozov An. From Topological to Quantum Entanglement // JHEP. - 2019. - Vol. 05., no. 116. - arXiv:1809.04574.
- [159] Kolganov N., Morozov An., Quantum $\mathcal{R}$ -matrices as Universal Qubit Gates // Письма в ЖЭТФ. - 2020. - Т. 111:9. - С. 623-624. - arXiv:2004.07764.