

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
НАУКИ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

---

На правах рукописи

АЛКАЛАЕВ КОНСТАНТИН БОРИСОВИЧ

**БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ СИММЕТРИИ И  
AdS/CFT СООТВЕТСТВИЕ В МОДЕЛЯХ  
ТЕОРИИ ПОЛЯ**

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание учёной степени  
доктора физико–математических наук

Москва - 2021

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>7</b>
<b>Глава 1. Взаимодействия несимметричных <math>AdS_5</math> полей</b>	<b>28</b>
1.1 Развернутая форма динамики $AdS_5$ полей . . . . .	29
1.1.1 Калибровочные поля высших спинов . . . . .	31
1.1.2 Производящие функции полей и параметров . . . . .	35
1.1.3 Функционалы действия полей высших спинов . . . . .	41
1.1.4 Связи и обобщённые тензоры Вейля . . . . .	44
1.2 Супералгебры Линецкого–Фрадкина . . . . .	48
1.2.1 Супералгебра $su(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1} 8)$ . . . . .	48
1.2.2 Факторизованная супералгебра $hu_0(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1} 8)$ . . . . .	50
1.2.3 Калибровочная супералгебра $su(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1} 8)$ . . . . .	51
1.2.4 $\mathcal{N} = 2$ супермультиплеты высших спинов . . . . .	52
1.3 Действие FV типа в $AdS_5$ пространстве . . . . .	53
1.3.1 Итоговый функционал . . . . .	59
1.3.2 Вычисление калибровочной инвариантности . . . . .	60
<b>Глава 2. Несимметричные поля произвольного спина</b>	<b>72</b>
2.1 Поля дискретного спина на $\mathbb{R}^{d-1,1}$ . . . . .	73
2.1.1 Хау–дуальная реализация алгебры Пуанкаре . . . . .	74
2.1.2 БРСТ конструкция производящей формулировки . . . . .	78
2.1.3 Связь с формулировкой Лабастиды . . . . .	86

2.1.4	$Q$ -когомологический анализ . . . . .	92
2.2	Поля непрерывного спина на $\mathbb{R}^{d-1,1}$ . . . . .	94
2.2.1	Деформированные связи . . . . .	96
2.2.2	БРСТ реализация . . . . .	97
2.2.3	Конусная формулировка . . . . .	104
2.3	Поля дискретного спина на $AdS_d$ . . . . .	108
2.3.1	Алгебраическая конструкция . . . . .	110
2.3.2	Амбиент-описание $AdS_d$ полей . . . . .	112
2.3.3	БРСТ реализация . . . . .	115
2.3.4	$Q_p$ -когомологический анализ . . . . .	121
<b>Глава 3. <math>AdS_{d+1}/CFT_d</math> соответствие для несимметричных полей</b>		<b>128</b>
3.1	Конформные несимметричные поля . . . . .	129
3.1.1	Обобщённая теорема Флато-Фронсдала . . . . .	129
3.1.2	Конформно-инвариантные соотношения . . . . .	132
3.1.3	2-точечная корреляционная функция . . . . .	135
3.2	Несимметричные сохраняющиеся токи . . . . .	136
3.2.1	Общий формализм . . . . .	137
3.2.2	Вспомогательные переменные . . . . .	140
3.2.3	Сохраняющиеся токи Флато-Фронсдала . . . . .	142
3.3	$AdS_{d+1}/CFT_d$ дуальность для спин-(2, 1) поля . . . . .	149
3.3.1	Квадратичное действие . . . . .	151
3.3.2	Уравнения движения и связи . . . . .	153
3.3.3	Решение уравнений движения . . . . .	155
3.4	Эффективное голографическое действие . . . . .	161
3.4.1	Чётные/нечётные граничные размерности $d$ . . . . .	162
3.4.2	Симметричная трансмутация . . . . .	165
3.4.3	Действие для конформных калибровочных полей . . . . .	171

<b>Глава 4. Двумерная теория высших спинов</b>	<b>173</b>
4.1 Синглетон в одном измерении . . . . .	174
4.1.1 Фундаментальное представление . . . . .	174
4.1.2 Бифундаментальное представление . . . . .	177
4.2 Алгебра высших спинов в двух измерениях . . . . .	178
4.2.1 Осцилляторная реализация . . . . .	180
4.2.2 Фактор–алгебра высших спинов . . . . .	182
4.3 Модульная структура алгебры $U(o(2, 1))$ . . . . .	184
4.3.1 Присоединенный модуль . . . . .	184
4.3.2 Твистованный модуль . . . . .	186
4.3.3 Твистованное действие на алгебре высших спинов . . . . .	189
4.3.4 Обобщённые твистованные модули . . . . .	193
4.3.5 $AdS_2$ массивные скалярные поля . . . . .	199
4.4 Действие высшеспиновой $AdS_2$ гравитации . . . . .	203
4.4.1 Высшеспиновая JT гравитация . . . . .	206
4.4.2 Расширенная алгебра и действие ВФ-типа . . . . .	210
<b>Глава 5. Квазиклассическое <math>AdS_3/CFT_2</math> соответствие</b>	<b>219</b>
5.1 Классические блоки и монодромия . . . . .	222
5.1.1 НЛ теория возмущений . . . . .	227
5.1.2 Вычисление монодромии . . . . .	228
5.2 Дуальная геометрия . . . . .	231
5.2.1 Кубические вершины и неравенства треугольника . . . . .	233
5.2.2 Дуальные геодезические сети . . . . .	237
5.3 $AdS_3/CFT_2$ соответствие длина/блок . . . . .	241
5.3.1 Слабая эквивалентность . . . . .	243
5.3.2 Акцессорные и импульсные уравнения . . . . .	244
5.3.3 Слабая эквивалентность дуальных систем . . . . .	249
5.4 Вильсоновские сети и конформные блоки . . . . .	251

5.4.1	Описание общей конструкции . . . . .	253
5.4.2	$n$ -точечные функции и потомки . . . . .	260
5.4.3	Торические вильсоновские сети . . . . .	263
5.4.4	Вырожденные операторы . . . . .	266
<b>Глава 6. Торические конформные блоки</b>		<b>268</b>
6.1	1-точечный торический блок . . . . .	269
6.1.1	Глобальный торический блок . . . . .	270
6.1.2	Лёгкий торический блок . . . . .	274
6.1.3	Контракции алгебры Вирасоро . . . . .	275
6.1.4	HL торический блок . . . . .	278
6.1.5	Пертурбативный классический торический блок . . . . .	280
6.2	Дуальная интерпретация . . . . .	284
6.2.1	Формализм мировых линий на термальном $AdS_3$ . . . . .	288
6.2.2	Импульсные уравнения . . . . .	290
6.2.3	Пертурбативное разложение . . . . .	292
6.3	1-точечные торические вильсоновские сети . . . . .	297
6.3.1	Диагональная калибровка . . . . .	299
6.3.2	Представление $3j$ символами Вигнера . . . . .	300
<b>Заключение</b>		<b>305</b>
<b>Список литературы</b>		<b>308</b>
<b>Приложение А</b>		<b>344</b>
A.1	Калибровочные (супер)преобразования . . . . .	344
<b>Приложение Б</b>		<b>347</b>
B.1	Алгебры симметрий . . . . .	347
B.2	Гомологическая редукция . . . . .	349

Б.3 Детали вычислений . . . . .	350
<b>Приложение В</b>	<b>354</b>
В.1 Компонентная форма уравнений поля . . . . .	354
В.2 Явное решение уравнений и связей . . . . .	356
В.3 Модифицированные функции Бесселя . . . . .	364
В.4 Детали вычисления эффективного действия . . . . .	366
В.5 Фурье-преобразования и дифференциальная регуляризация . . . . .	368
<b>Приложение Г</b>	<b>371</b>
Г.1 Основные выражения *-произведения . . . . .	371
Г.2 Канонический базис . . . . .	372
Г.3 Твистованный базис . . . . .	375
Г.4 (Обобщённые) твистованные представления . . . . .	380
<b>Приложение Д</b>	<b>384</b>
Д.1 Формализм мировых линий с угловым дефицитом . . . . .	384
Д.2 Случай $n = 5$ : функций блока и длины . . . . .	385
Д.3 $sl(2, \mathbb{R})$ конечномерные модули . . . . .	387
<b>Приложение Е</b>	<b>389</b>
Е.1 Доказательство Утверждения 6.2 . . . . .	389

# Введение

**Актуальность темы.** Основной задачей физики фундаментальных взаимодействий является построение теории квантовой гравитации. Одним из самых концептуальных продвижений в этом направлении за все время существования проблемы, сформулированной еще Бронштейном [1], по праву считается понятие голографической дуальности, введенное т'Хоофтом и Саскиндом, и утверждающее, что степени свободы квантовой гравитации в некотором объеме пространства кодируются динамикой на границе этой области [2, 3]. Примером такой дуальности является гипотеза Малдасены  $AdS/CFT$  соответствия между теорией струн на пространстве постоянной отрицательной кривизны ( $AdS$ ) и конформной теорией поля ( $CFT$ ) на границе [4]. В более широком смысле, существенными особенностями феномена  $AdS/CFT$  соответствия является: (1) дуальность между квантовой теорией с гравитационным взаимодействием и квантовой теорией без гравитационного взаимодействия, (2) дуальность режимов слабой и сильной связи двух теорий.

Традиционный способ изучения  $AdS/CFT$  соответствия состоит в рассмотрении классической гравитации (плюс струнные поправки) в объеме для изучения конформной теории на границе. Начиная с голографического предписания Губсера, Клебанова, Полякова и Виттена (GKPW) [5, 6] был создан словарь терминов, переводящий гравитационные объекты в конформные и обратно. При этом основной круг задаваемых в  $CFT$  вопросов сводится к вычислениям в объеме лишь в окрестности конформной границы. Отметим, что обратная постановка задачи, т.е. описание гравитации в объеме за пределами области вблизи границы с помощью объектов граничной конформной теории, до сих пор плохо сформулирована (см., например, [7, 8]).

Особое внимание привлекают исследования в области голографической

дуальности между двухмерной конформной теорией поля и трехмерной гравитацией. До некоторой степени, по сравнению с высокоразмерными дуальностями,  $AdS_3/CFT_2$  соответствие может считаться менее сложным по причине присутствия в двухмерной конформной теории бесконечной симметрии Вирасоро, а также отсутствием локальных гравитационных степеней свободы в объеме (топологичности гравитации) [9, 10, 11]. Тем не менее, даже в этом упрощенном варианте не удастся вычислить полный функциональный интеграл теории. По сходным причинам также привлекает значительное внимание  $AdS_2/CFT_1$  соответствие.

С другой стороны, вся имеющаяся совокупность базовых теоретических построений (суперсимметрия, великое объединение, бранные сценарии, голография и т.д.), а также наблюдательная проблема иерархий, свидетельствует о том, что поиск теории квантовой гравитации скорее всего является синонимом построения теории всех фундаментальных взаимодействий. Здесь следует отметить два наиболее перспективных подхода, один из которых это теория (супер)струн, в более широком контексте – М-теория [12], а другой – это теория гравитации высших спинов [13, 14, 15]. Считается, что они могут быть связаны в пределе нулевого струнного натяжения [16], когда струнные амплитуды оказываются подчинены бесконечному количеству тождеств Уорда, что свидетельствует о возникновении предельной бесконечномерной калибровочной симметрии, которую можно пытаться связать с бесконечномерной симметрией высших спинов (см., например, [17]).

Несмотря на значительный прогресс в понимании голографической дуальности, следует признать, что ее структурные механизмы до сих пор остаются невыясненными. Более того, не известно ни одной пары голографически дуальных теорий, где каждый из партнеров точно решаем (т.е. известен производящий функционал/корреляционные функции), что позволило бы продемонстрировать дуальность хотя бы на частном примере. Ожидается, что присутствие бесконечномерной симметрии позволит не только получить новые точные результаты в конформной теории поля, но также построить точно решаемый пример  $AdS/CFT$  дуальности.

По этой причине значительный интерес вызывает изучение  $AdS/CFT$  соответствия в приложении к моделям с полями высших спинов, что является



более простой вычислительной и концептуальной задачей, нежели исходное голографическое соответствие между теорией струн на  $AdS_5 \times S^5$  и  $\mathcal{N} = 4$   $SYM_4$  [4]. Согласно гипотезе Клебанова–Полякова–Сезгина–Сунделла [18, 19] дуальной моделью  $AdS_4$  теории высших спинов Васильева [13] является  $O(N)$  векторная  $3d$  модель.

Возможно, что даже более простой набор интегрируемых теорий, демонстрирующий структуру голографического соответствия возникает в двух измерениях. Это т.н.  $AdS_2/SYK$  соответствие [20, 21]. Здесь теория в двумерном пространстве  $AdS_2$  отождествляется с некоторым расширением гравитацией Джакива–Тейтельбойма [22, 23], а теория на границе это одномерная модель  $SYK$  (Сачдев–Йи–Китаев) квантовых случайных взаимодействий [24, 20].

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению моделей квантовой теории поля, обладающих бесконечномерной симметрией в контексте  $AdS/CFT$  соответствия. В ней исследуется ряд фундаментальных вопросов, связанных, в первую очередь, с поведением голографически дуальных теорий в двух и более размерностях с бесконечномерными симметриями на классическом и на квантовом уровнях. Среди теорий такого типа наиболее важными будут конформная теория поля, теория гравитации с космологическим членом, а также теория полей высших спинов. Все эти теории рассматриваются как строительные блоки единой теории фундаментальных взаимодействий, которая, в свою очередь, ожидаемо характеризуются такими базовыми свойствами как богатая симметричная структура и наличие бесконечного спектра элементарных возбуждений.

**Современное состояние исследований.** Одной из ключевых концепций современной теоретической физики является то, что наблюдаемое четырехмерное пространство-время  $\mathcal{M}^{3,1}$  возникает как частное решение многомерной теории. Механизмы выделения  $\mathcal{M}^{3,1}$  могут разными (например, это редукция типа Калуцы–Клейна или бранные сценарии), однако исходная теория формулируется в пространствах старших размерностей  $\mathcal{M}^{d-k,k}$  при  $d \geq 4$ , вообще говоря, необязательно лоренцевой сигнатуры ( $k = 1$ ).

Элементарные квантовые поля в максимально-симметричном пространстве-времени  $\mathcal{M}^{d-1,1}$  размерности  $d \geq 4$  (Минковский  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  или (анти-)де Ситтер ( $A$ ) $dS_d$ ) характеризуются более чем одним спиновым числом. Та-

кие поля смешанного типа симметрии (несимметричные), как (частично-)безмассовые, так и массивные, естественным образом появляются в спектрах двух важных классов теорий, теории (супер)струн (в частности, суперструн на фоновой геометрии  $AdS_5 \times S^5$ ) и теории высших спинов, см., например, [25, 26, 27].

В отличие от хорошо изученного случая симметричных полей (см. например, обзор [28]), рассмотрение несимметричных полей высвечивает множество интересных и плохо понимаемых на данный момент вопросов. Например, это относится к развитию GKPW техники для безмассовых полей высших спинов в объеме и их дуального конформного описания на границе. Другим, причем достаточно традиционным, вопросом является описание свободных полей общего положения, т.е. с произвольными параметрами массы, непрерывных/дискретных спинов, глубины на пространстве  $(A)dS_d$ , в том числе в пределе нулевой космологической постоянной, т.е. на пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ . В настоящее время доступны несколько способов описания несимметричных полей высших спинов на  $(A)dS_d$  и  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ , как лагранжевых, так и нелагранжевых, см., например, [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52]. Естественным вопросом здесь является проблема унификации всех возможных способов описания в рамках единого, производящего подхода.

Нелинейные теории со спектром, включающим гравитон наряду с частицами спина больше двух представляют собой отличную возможность изучать квантовую гравитацию одновременно на классическом и квантовом уровнях. Теория струн, например, описывает динамику бесконечного числа массивных полей с растущими массами и спинами, а также конечный набор безмассовых полей с низшими спинами. Важной особенностью моделей с высшими спинами являются бесконечные симметрии; считается, что они должны улучшить квантовые свойства эйнштейновской гравитации. Теории безмассовых полей высших спинов здесь играют выделенную роль, поскольку могут рассматриваться как ненарушенная фаза массивных теорий высших спинов, включающих и саму теорию струн [53, 16] (см. также обсуждение в контексте  $AdS/CFT$  соответствия в работах [17, 18, 19, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60]).

Задача построения непротиворечивой теории взаимодействия безмассовых

полей высших спинов и гравитации впервые была рассмотрена Арагоном и Дезером [61]. Согласно им, нельзя построить теорию с минимальным гравитационным взаимодействием безмассовых полей на пространстве Минковского со спином  $s > 2$ , а потому не существует непротиворечивого расширения супергравитации путем включения возбуждений с высшими спинами (см. обзоры [28, 62]). Решение было предложено Васильевым и Фрадкиным в работах [63, 64], где были сформулированы основные принципы построения непротиворечивой теории взаимодействия полей высших спинов. Пространство анти-де Ситтера  $AdS$  было отождествлено как естественный фон для гравитационных взаимодействий полей высших спинов; была построена алгебра калибровочных симметрий высших спинов [65]. Оказывается, что присутствие дополнительного пространственного параметра – космологической постоянной  $\Lambda$  пространства  $AdS$  – позволяет строить в действии члены с производными высших порядков, с коэффициентами обратно пропорциональными  $\Lambda$ , что аналогично струнной теории с вершинами массивных полей высших спинов.<sup>1</sup> С другой стороны, именно пространство  $AdS$ , благодаря своей причинной структуре, играет решающую роль в  $AdS/CFT$  соответствии. Упомянем также, что большой класс вершин для кубического взаимодействия полей высших спинов известен в пространстве Минковского, но в него не входят минимальные взаимодействия с гравитацией [68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75].

В работах [76, 77] исходный  $d = 4$  подход Васильева-Фрадкина (FV) был распространен на  $d = 5$  для  $\mathcal{N} = 0$  чисто бозонных и  $\mathcal{N} = 1$  суперсимметричных кубических взаимодействий симметричных полей. Можно видеть, что  $d = 5$  теория наследует все основные характеристики  $d = 4$  теории и управляется супералгеброй симметрий высших спинов, построенной Линецким и Фрадкиным контексте  $d = 4$  конформной теории высших спинов [78, 79].<sup>2</sup> Новой особенностью, по сравнению с исходной  $d = 4$  FV теорией, является

---

<sup>1</sup>В частности, это приводит к плохо определенному пределу  $\Lambda \rightarrow 0$ . Таким образом, подтверждается того теорема, сформулированная в [61]. Однако, существует процедура, позволяющая построить некоторые неминимальные взаимодействия гравитации с полями высших спинов [66]. См. также [67], где рассматриваются частные вершины безмассовых полей спина 2 и 3. Более того, используя аналогию между безмассовыми  $AdS_d$  полями и массивными  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  полями, можно расширить эти результаты на взаимодействующие массивные поля спина 3 в пространстве Минковского [67].

<sup>2</sup>Данная алгебра также определяется как алгебра глобальных  $AdS_5$  HS симметрий в  $5d$  развернутом формализме [80]. Более общий класс (конформных) алгебр высших спинов описан в работе [81].

бесконечное вырождение спектра возбуждений: поле каждого спина входит бесконечное число раз. В связи с этим, спектр  $d = 5$  теории FV типа напоминает спектр теории струн, в которой кратность массивных возбуждений заданного спина растет с уровнем (до бесконечности).

Как было сказано выше, при переходе к старшим пространственным измерениям возникает новый феномен: при  $d > 4$  имеется более одного спинового числа, в силу чего в спектре теории высших спинов могут возникать несимметричные поля, чья индексная структура описывается диаграммами Юнга общего положения. Несимметричные поля должны взаимодействовать друг с другом и с симметричными полями, включая гравитационное, так что изучение их взаимодействий представляет собой необходимую задачу, в контексте описания теорий с максимально полным спектром элементарных возбуждений. В частности, теория FV типа для полей общего смешанного типа симметрии до сих пор неизвестна.<sup>3</sup> В данной диссертации мы частично заполняем этот пробел и в явном виде строим теории  $AdS_5$  полей высших спинов в кубическом приближении, которые содержат гравитационные вершины несимметричных полей частного типа симметрии.<sup>4</sup>

Если отвлечься от вопроса построения гравитационных вершин  $AdS_d$  полей высших спинов и вернуться, например, в теориям в пространстве  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ , то изучение общей теории представлений группы Пуанкаре позволяет ввести новый тип частиц. Помимо стандартных представлений дискретного (т.е. (полу)целого) спина, существует тип представлений т.н. непрерывного спина, определяемый дополнительным квантовым числом [88]. Соответствующие поля непрерывного спина обладают несколькими интересными свойствами, такие как присутствие размерного параметра  $\mu$  и бесконечное число физических степеней свободы [89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102]. С точки зрения традиционной теории высших спинов, наиболее поразительным и интригующим свойством является то, что динамика полей высших спинов может быть определена на пространстве полей, являющихся суммой полей фронсдаловского типа ранга  $s = 0, \dots, \infty$ . Соответствующее калибровочно-

---

<sup>3</sup>Вершины кубического взаимодействия несимметричных полей в пространстве Минковского были проанализированы в формализме светового конуса в работе [82], см. также работу [83], где были построены некоторые ковариантные вершины.

<sup>4</sup>Последующее развитие см. в работах [84, 85, 86, 87].

инвариантное действие на пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  оказывается бесконечной суммой действий Фронсдала ранга  $s$  с недиагональными вкладками, пропорциональными параметру непрерывного спина  $\mu$  [91] (допускает поднятие на  $AdS_d$  [93]). Калибровочными преобразованиями такой теории являются стандартные фронсдаловские преобразования, деформированные членами штуркельбергова типа, которые также пропорциональны  $\mu$ . Более того, поля непрерывного спина могут непротиворечивым образом взаимодействовать между собой и массивными полями высших спинов [99, 100].

С теоретико-групповой точки зрения, частица непрерывного спина соответствует бесконечномерному, безмассовому, унитарному и неприводимому представлению группы Пуанкаре  $ISO(d-1, 1)$ , индуцированному с бесконечномерного, унитарного и неприводимого представления подалгебры  $ISO(d-2)$  [88, 103, 104]. Соответствующими квантовыми числами являются стандартная масса  $m = 0$ , параметр непрерывного спина  $\mu \neq 0$ , и (полу)целые спиновые числа  $(s_1, \dots, s_p)$ , где  $p = \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$ . Упомянутая выше лагранжева формулировка была получена в случае скалярного представления, т.е. все спиновые числа равны нулю. В общем случае, динамика несимметричных полей непрерывного спина на  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  обсуждалась в работе [89] на уровне уравнений движения как частная контракция уравнений Фронсдала для безмассовых полей в пространстве  $\mathbb{R}^{d,1}$ .<sup>5</sup> В частности, в пространстве  $AdS_d$  частицы «непрерывного спина» с общими характеристиками пока не описаны, даже на теоретико-групповом уровне. Полное описание полей непрерывного спина на уровне функционала действия и изучение  $AdS/CFT$  соответствия для таких теорий на момент написания этой диссертации остается нерешенной задачей.

Среди всех безмассовых полей общего типа симметрии есть выделенный набор несимметричных полей с индексной симметрией типа «крюк», описываемой диаграммами Юнга с одной строкой длины  $s$  и одним столбцом высоты  $p \leq \frac{d}{2}$ . Например, именно такие поля возникают в  $d$ -мерном расширении исходной теоремы Флато–Фронсдала [112]: тензорное произведение двух спинорных синглетонов раскладывается в бесконечную прямую сумму бозон-

---

<sup>5</sup>Реперная лагранжева формулировка полей непрерывного спина  $(s_1, 0, \dots, 0)$  в пространстве  $AdS_d$  рассматривалась в работе [101], конусная динамика полей непрерывного спина  $(s_1, 0, \dots, 0)$  в пространстве  $AdS_5$  рассматривалась в работе [102]. Дальнейшее развитие различных подходов к описанию полей непрерывного спина см. в работах [105, 106, 107, 108, 109, 110, 111].

ных, безмассовых представлений симметрии типа «крюк» и конечный набор массивных, антисимметричных представлений, включающий массивное скалярное представление [113] (см. также [114]).<sup>6</sup> По аналогии с симметричными представлениями, возникающими в тензорном произведении двух скалярных синглетонов, теорема Флато–Фронсдала для двух спинорных синглетонов также даёт теоретико-групповое обоснование  $AdS_{d+1}/CFT_d$  соответствия в случае представлений симметрии типа «крюк». В частности, можно развить общий формализм сохраняющихся токов типа «крюк» в  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  и установить точное соответствие между несимметричными калибровочными полями в объеме и частным классом сохраняющихся токов, построенных из двух спиноров на границе. С другой стороны, GKPW процедура для несимметричных полей отсутствует даже в простейших случаях. Часть диссертационной работы посвящена первичному развитию этого направления.

Следует отметить, что, как правило, значительное внимание уделяется теориям высших спинов в трех, четырех, и старших размерностях, см., например, обзоры, [53, 14, 115, 116] и ссылки внутри), в то время как сравнительно небольшое внимание уделено двумерным теориям высших спинов [117, 118, 119, 120, 121, 122]. Одна из причин этого в том, что высшеспиновая гравитация в двух измерениях не обязательно имеет типичные свойства теорий в старших измерениях, такие как  $(A)dS$  фоновая геометрия, или бесконечное число безмассовых степеней свободы. Так, например, уравнения Фронсдала полей высших спинов  $s \geq 1$  в двух измерениях не имеют локальных степеней свободы (что видно уже на примере  $s = 2$ , когда кинетический оператор (линеаризованные уравнения Эйнштейна) тождественно равен нулю). По этой причине, двумерный случай до некоторой степени аналогичен трехмерному, где теория безмассовых полей, описываемая теорией Черна–Саймонса также не имеет локальных степеней свободы [123, 57, 124]. Отсюда следует, что в двух измерениях понятие полей высших спинов следует формулировать аккуратно и, по всей видимости, сам заимствованный из старших измерений понятийный аппарат может оказаться крайне вырожденным в плане интерпретации.

---

<sup>6</sup> Данное утверждение обобщает теорему, установленную Флато и Фронсдалом, в размерности  $d = 3$  [112]. Однако, в этом случае тензорное произведение двух синглетонов (спинорных и/или скалярных) содержит лишь симметричные представления.

С другой стороны, недавний всплеск интереса к  $AdS_2/CFT_1$  соответствию с участием SYK модели на одномерной границе [24, 20, 21] (см. обзоры [125, 126, 127]) мотивирует тотальное исследование маломерной голографической дуальности. Несмотря на важные различия, существующая аналогия между SYK моделью и  $O(N)$  векторными моделями в старших измерениях позволяет думать, что (нарушенные) симметрии высших спинов должны играть здесь важную роль, по меньшей мере в некоторых вырожденных пределах  $O(N)$ -синглетного сектора (например, в квадратичном случае  $q = 2$  или в окрестности ультрафиолетовой гауссовой фиксированной точки). Более того, существует высшеспиновое расширение исходной гравитации Джакива–Тейтельбойма [23, 22, 128], построенное в работах [120, 122, 121] в виде топологической BF теории с калибровочной алгеброй высших спинов. Однако, как известно, искомая в этом контексте дуальная гравитационная теория в объеме также должна содержать башню массивных степеней свободы, дуальных примарным операторам граничной SYK модели (билинейным  $O(N)$ -синглетам).

Прежде чем исследовать динамические аспекты двумерной теории высших спинов требуется систематическое исследование маломерных аналогов (на данный момент, стандартных) кинематических объектов, присутствующих в теориях высших спинов в старших измерениях. Например, детальный анализ высшеспиновых асимптотических симметрий был начат в работах [121, 129, 130]. Однако, аналоги ключевых теоретико–групповых структур, лежащих в основе высшеспиновых гравитаций (таких как осцилляторные реализации алгебр высших спинов, присоединенное и твистованное представления и т.д.) остаются невыясненными. В этом состоит одна из целей настоящей диссертационной работы.

Интересно, что в размерности  $d = 2$  сосуществуют два класса теорий, конформная теория поля  $CFT_2$  и теория высших спинов, которые обе обладают бесконечномерной симметрией, соответственно алгеброй Вирасоро и алгеброй высших спинов. В старших размерностях  $d > 2$  конформная симметрия становится конечномерной. С другой стороны, первая нетривиальная теория высших спинов в  $d = 3$  измерениях [131] оказывается голографически дуальной частной  $CFT_2$  с  $W$  симметрией [124, 57, 116], что опять возвращает нас к двумерным конформным теориям.

В последнее время было осознано, что  $AdS/CFT$  соответствие может быть понято на более глубоком структурном уровне, нежели сравнение корреляционных функций (производящих функционалов) дуальных теорий согласно GKPW процедуре. Действительно, корреляционные функции любой конформно-инвариантной теории раскладываются на модельно-независимые составляющие, известные как конформные блоки [132, 133]. Конформные блоки задают базис в пространстве корреляционных функций и фиксируются исключительно имеющейся конформной симметрией ( $o(d, 2)$ , Вирасоро или  $W$  расширения), что определяет их ключевую роль в реализации программы конформного бутстрапа. Поэтому, возникает естественный вопрос — чем являются дуальные аналоги функций конформных блоков? Относительно недавно такие дуальные объекты были описаны в случае очень больших конформных параметров (центральный заряд и размерности), что соответствует квазиклассическому приближению в теории гравитации в объеме. Было показано, что предельные конформные блоки (их называют (квази)классическими) равны длинам специальных геодезических графов, растянутых в асимптотически  $AdS_3$  пространстве [134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142] или равны длинам т.н. геодезических диаграмм Виттена [143]. Существенным ингредиентом здесь является т.н. приближение тяжёлых/легких (HL) операторов, когда два оператора корреляционной функции сильно тяжелее остальных [135]. Тогда в зависимости от своих конформных размерностей, тяжёлые операторы генерируют в дуальном объеме либо коническую сингулярность, либо BTZ черную дыру, а легкие операторы соответствуют пробным частицам на их фоне.

Помимо этого, существует интригующая связь между пространством квантовых состояний трёхмерной теории Черна–Саймонса в присутствии вильсоновских линий и пространством конформных блоков двумерной конформной теории поля, которая была замечено еще в конце 80-х [144, 145, 146]. Т.к.  $o(2, 2)$  теория Черна–Саймонса описывает  $3d$  гравитацию с космологической постоянной [147, 148], то такая связь приобретает новое значение в контексте  $AdS_3/CFT_2$  дуальности [149, 150, 151, 152, 153]. Более того, рассмотрение теории Черна–Саймонса с калибровочной алгеброй высших спинов [123, 57, 124] приводит к квазиклассической дуальности  $3d$  гравитаций высших спинов некоторым специальным  $W$ -инвариантными  $CFT_2$  (см. выше) и изучению режима большого заряда и соответствующих предельных  $W$



конформных блоков в таких теориях.

Отметим, что описанная выше реализация квазиклассического  $AdS_3/CFT_2$  соответствия в виде равенства «блок=длина» специфично именно для двух тяжёлых операторов и сферической топологии конформной границы. Помимо этого, в основном рассматривался случай 4-точечных классических блоков, потому что для них известны явные выражения. Вопрос распространения соответствия на случай  $n$ -точечных блоков (проблема рассматривалась с помощью различных приближений, см. например [140, 154]) на другие граничные топологии [155] и на случай нескольких тяжелых операторов рассматривается в данной диссертации. Интересно отметить, что само соответствие позволяет находить новые решения трехмерной гравитации, исходя из знания конформного блока (см. обсуждение в [156]). Также отметим, что возникающие фоновые геометрии в объеме стационарны, в то время как интерес представляет общий нестационарный случай, когда метрика явно зависит от времени, и устройство описанного выше соответствия в этом случае также неизвестно.

Особая роль конформных блоков проявляется при вычислении энтропии запутывания для области на границе со сферической топологией, составленной из нескольких интервалов. В этом случае, согласно формуле Риу–Такаянаги [157], энтропия запутывания равна длине кривой минимальной длины (геодезической) в объеме, граничные точки которой совпадают с концами интервалов. В работе [134] было предложено, что функция энтропии запутывания в этом случае демонстрирует универсальность и равна классическому конформному блоку с вакуумными внутренними каналами. Приложение этого наблюдения к другим граничным топологиям, а также возможность и смысл выхода за пределы приближения вакуумными блоками остаются неясными. Здесь мы вплотную подходим к упоминавшемуся выше вопросу о выходе за рамки вычислений в пределах асимптотической области около границы.

С технической стороны, используя имеющиеся методы вычисления исходных блоков (например, это рекурсия Замолодчикова [158] или комбинаторное представление AGT [159]), попытка сначала вычислить исходный блок, а потом взять предел большого центрального заряда оказывается неэффективной – как правило, вычисление удастся провести лишь в первых порядках разложения функций блока. Более правильным оказывается постановка задачи

исходно в режиме большого центрального заряда. Это в свою очередь, приводит к необходимости разработки новых методов вычисления предельных конформных блоков, что составляет одну из задач, решаемых в настоящей диссертации.

### **Цель работы.**

Настоящая диссертационная работа преследует следующие цели:

1. Описание несимметричных полей общего положения на пространствах постоянной кривизны и изучение их гравитационных взаимодействий в кубическом приближении.
2. Формулировка и развитие методов  $AdS_{d+1}/CFT_d$  соответствия для свободных несимметричных полей.
3. Построение двумерной теории высших спинов.
4. Развитие методов вычислений конформных блоков  $CFT_2$  в режиме большого центрального заряда.
5. Квазиклассическое  $AdS_3/CFT_2$  соответствие на уровне конформных блоков на простейших топологиях (сфера, тор).

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие

### **Задачи:**

1. Развить метод построения кубических вершин взаимодействия  $AdS_5$  полей высших спинов FV типа с участием несимметричных полей.
2. Сформулировать производящую формулировку описания полей с произвольными параметрами (масса, (непрерывный) спин, глубина) на пространствах  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  и  $(A)dS_d$ .
3. Развить голографическую GKPW процедуру для полей смешанного типа симметрии.

4. Описать основные структуры  $AdS_2$  теории высших спинов, такие как синглетон, алгебра высших спинов, присоединенное и твистованное представления, а также выяснить возможность лагранжева описания.
5. Разработать методы вычисления  $n$ -точечных конформных блоков в (суперсимметричной)  $CFT_2$  на торе и плоскости в режиме большого центрального заряда.
6. Реализовать программу установления квазиклассической  $AdS_3/CFT_2$  дуальности на уровне  $n$ -точечных конформных блоков на плоскости и торе.
7. Сформулировать общие механизмы вычисления матричных элементов голографических вильсоновских сетей в  $AdS_3$  гравитации Черна–Саймонса.

Несмотря на разнообразие решаемых в диссертационной работе задач все они направлены на развитие методов конформной теории поля и гравитации полей высших спинов и исследования возможностей применения этих методов в различных актуальных контекстах современной теоретической физики, в особенности, квантовой теории поля с бесконечномерными симметриями и голографическими дуальностями.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Производящая БРСТ формулировка несимметричных полей. Описание кубических вершин FV типа для несимметричных  $AdS_5$  полей типа «крюк».
2. Голографическая GKPW процедура для несимметричных  $AdS_d$  полей типа «крюк». Явная реализация несимметричных сохраняющихся токов.
3. Топологическая и динамическая  $AdS_2$  гравитация высших спинов.
4. Голографическое описание многоточечных квазиклассических конформных блоков в  $CFT_2$  на плоскости и торе.

5. Явная конструкция торических конформных блоков в режиме большого центрального заряда.

**Научная новизна, достоверность и личный вклад автора.** Все результаты, изложенные в данной диссертации, являются оригинальными. Новизна рассматриваемых проблем, а также достоверность результатов привело к существенному продвижению в понимании структуры голографической дуальности теорий с бесконечномерными симметриями, такими как теории высших спинов и конформные теории поля. Полученные автором результаты регулярно используются и далее развиваются российскими и зарубежными научными группами. Приведенные в диссертации результаты получены автором непосредственно и легли в основу научных статей, сделанных самостоятельно, либо в соавторстве с российскими или иностранными коллегами.

**Практическая значимость.** Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для исследования и описания широкого круга явлений в конформной теории поля и теории полей высших спинов (например, вычисление корреляционных функций, энтропий запутывания), а также в анализе  $AdS/CFT$  соответствия (в частности,  $AdS_3/CFT_2$  и  $AdS_2/SYK$ ) в различных моделях и контекстах.

В диссертационной работе впервые построены вершины взаимодействий несимметричных полей между собой, симметричными полями и гравитацией [160]. Данный результат получен в рамках  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории высших спинов в  $AdS_5$  пространстве, в кубическом приближении. В зависимости от выбранной супералгебры высших спинов спектр теории имеет либо однократное, либо бесконечнократное вырождение, что во втором случае делает ее похожей на теорию суперструн. Очевидно, что увеличение числа суперсимметрий  $\mathcal{N} > 2$  лишь усилит данное сходство, потому что в спектре будут появляться (бозонные и фермионные) несимметричные поля, второй спин которых растет,  $s_2 > 1$ . Следует отметить, что способ построения вершин взаимодействия  $FV$  типа вовлекает алгебраические инструменты анализа спектра, такие как дуальность Хау, что непосредственно связано с осцилляторной реализацией симметрии высших спинов.

Предложена производящая формулировка свободных бозонных полей произвольного типа симметрии дискретного спина на пространствах  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  и

$AdS_d$  [161, 162, 163], а также для свободных бозонных полей непрерывного спина произвольного типа симметрии на пространстве  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  [164]. Другие известные формы описания динамики полей высших спинов (подход Фронсдала, Лабастиды, Шустера–Торо, развернутый формализм, конусное описание, триpletная формулировка) возникают из нее посредством различных гомологических редукций, что оправдывает термин производящая. Теория представлена в БРСТ терминах, аналогично БРСТ описанию струнной динамики. Потенциально, это делает предлагаемую формулировку полезной при изучении (предела нулевого натяжения) теории бозонных струн на пространствах постоянной кривизны. В частности, об этом свидетельствует присутствие в теории, в качестве одной из ее эквивалентных форм, триpletного формализма описания полей высших спинов, исходно построенного как  $\alpha' \rightarrow \infty$  предел вирасоровских связей бозонной струны [165, 166].

Для определенного класса несимметричных представлений конформной алгебры  $o(d, 2)$  типа «крюк» построены ранее неизвестные в явном виде конформные операторы критической размерности, реализованные как сохраняющиеся токи на  $d$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  [167]. Также приведены явные выражения соответствующих 2-точечных корреляционных функций (см. дальнейшее развитие в работе [168]). Данный анализ дополняет обобщенную теорему Флато–Фронсдала [113], что гарантирует  $AdS_{d+1}/CFT_d$  соответствия для «крюковых» несимметричных полей на кинематическом уровне. Однако, динамическая реализация соответствия критическим образом зависит от частной теоретико-полевой реализации, используемой для описания таких полей в объеме [169]. Данные результаты выступают в поддержку гипотезы, что того, что полная нелинейная теория таких полей в пространстве  $AdS_{d+1}$  голографически дуальна модели Гросса–Неве в  $d$  измерениях, по аналогии с гипотезой Клебанова–Полякова–Сезгина–Сунделла в  $d = 3$  измерениях (см. обсуждение в работах [86, 87]). Конечно, устройство дуальности существенно зависит от четности и (не)нарушения симметрии высших спинов, а также от выбора граничных условий для массивных антисимметричных полей в объеме (включая скаляр), присутствие которых диктуется обобщенной теоремой Флато–Фронсдала.

В диссертации сформулирована двумерная теория гравитации высших спи-

нов, содержащая как топологический [120, 122], так и динамические секторы [170, 171]. В первом случае, построенная теория обобщает топологическую гравитацию Джакива–Тейтельбойма включением топологических полей старших рангов, которые можно интерпретировать как «частично–безмассовые» поля максимальной глубины. Во втором случае, в спектре возникают  $AdS_2$  массивные скалярные моды эквидистантно растущих масс  $M_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), организованных в высшеспиновый мультиплет. Согласно  $AdS_2/CFT_1$  словарю, мы приходим к выводу, что граничная дуальная теория содержит бесконечный набор примарных операторов  $\mathcal{O}_n$  с эквидистантным спектром конформных размерностей  $\Delta_n$ . Он совпадает со спектром  $O(N)$ -синглетных операторов, билинейных по большому числу  $N$  одномерных граничных полей в векторном представлении  $O(N)$ , что соответствует безаномальному спектру SYK модели, или, эквивалентно, гауссовой фиксированной точке. В взаимодействующей фиксированной точке эти операторы приобретают аномальные размерности порядка единицы, что свидетельствует о сильном нарушении симметрии высших спинов.

В контексте изучения  $AdS_3/CFT_2$  соответствия в режиме большого центрального заряда, в диссертационной работе проведены комплексные исследования поведения  $n$ -точечных квазиклассических конформных блоков  $CFT_2$  на плоскости и торе.

Доказана теорема о том, что  $n$ -точечные классические конформные блоки в НЛ приближении равны (по модулю конформного отображения) длинам дуальных геодезических графов при любом числе вставок  $n$  [172]. Данное утверждение существенно опирается на разработку монодромного метода вычислений классических блоков [173] в случае произвольного числа операторных вставок для специальной теории возмущений с двумя фоновыми примарными операторами [142, 172]. Со стороны теории в объеме сформулирован геометрический подход к нахождению длин нетривиальных геодезических конфигураций на двумерных гиперболических геометриях, возникающих как сечения фоновых трехмерных геометрий, который может применяться для вычислений на пространствах любых топологий, включая разобранный в диссертации случай диска Пуанкаре и гиперболического кольца [140, 174, 155, 175, 176].

Развитые в диссертации методы вычислений квазиклассических конформ-

ных блоков [140, 174, 175, 176, 177] позволяют анализировать предельные блочные функции в разных режимах поведения конформных параметров, т.е. центрального заряда и размерностей, посредством изучения контракций Инону-Вигнера алгебры Вирасоро. Более того, само эмпирическое определение классического блока как предельное логарифмирование исходного конформного блока алгебры Вирасоро может быть заменено на строгое определение в рамках теории представлений контрактированных алгебр (супер)Вирасоро и  $W$  расширений и их деформаций.

Для специального класса квазиклассических конформных блоков – глобальных блоков на плоскости и торе, сформулированы и изучены различные схемы вычислений, основанные на (тороидальных) вильсоновских сетях голографически дуальной  $3d$  гравитационной теории Черна–Саймонса на (термальном) пространстве  $AdS_3$  [178]. Возникающие в данном контексте вильсоновские сети являются спиновыми сетями Пенрозуа (см., например, обзор [179]). По всей видимости, данное представление глобальных блоков может быть с одной стороны перенесено на случай  $CFT_d$ , где конформная симметрия конечномерна и все блоки являются глобальными, а с другой стороны, использование спиновых сетей должно позволить сформулировать альтернативный способ вычисления глобальных  $CFT_2$  блоков на произвольных римановых поверхностях, а также эффективно учитывать  $1/c$  поправки.

**Публикации и апробация работы.** Основные результаты по теме диссертации получены в 2009–2020 годах и изложены в 20 публикациях в рекомендованных ВАК периодических изданиях для диссертаций («Journal of High Energy Physics» – 14 статей, «Nuclear Physics B» – 4 статьи, «Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical» – 2 статьи).

Результаты работ, которые легли в основу данной диссертации, докладывались на семинарах и конференциях, проводимых в различных ведущих научных центрах: международные конференции «Higher spin theory and Holography» (Россия, 2014-2018); Гинзбурговская конференция по физике (Россия, 2012); международные конференции «Quarks» (Россия, 2012, 2014); международные конференции «Supersymmetries and Quantum Symmetries» (Россия, 2009, 2011, 2013, Армения, 2019); международная конференция «Quantum Field Theory and Gravity» (Россия, 2012); международная конференция «То-

ological Field Theories, String theory and Matrix Models» (Россия, 2017, 2018); международный семинар «Higher spin gravity» (Австрия, 2012); международный семинар «Higher Spins, Strings and Dualities» (Италия, 2012); международная конференция «Integrable Systems and Quantum Symmetries» (Чехия, 2015, 2018); международный семинар «Higher spin theory and Duality» (Германия, 2016); международная конференция «New Developments in AdS3/CFT2 Holography» (Италия, 2017); международная конференция «Higher spin gravity and holography» (Южная Корея, 2017); международный семинар «Higher Spin Gravity: Chaotic, Conformal and Algebraic Aspects» (Южная Корея, 2019).

Результаты работ, представленных в диссертации, также многократно докладывались на регулярных групповых семинарах в Физического института РАН, Томского педагогического государственного университета, Объединенного института ядерных исследований, университете Тура (Франция), университете Гумбольдта (Германия), институте Альберта Эйнштейна (Германия), университета Людвиг-Максимиллиана (Германия).

Представленные в диссертационной работе результаты были получены при финансовой поддержке программ Российского фонда фундаментальных исследований, грантов Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ, программ Российской академии наук, международного научного фонда Александра фон Гумбольдта, Российского научного фонда, фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения. Для удобства, вспомогательные справочные материалы, а также некоторые технические детали вычислений сосредоточены в приложении, включающем шесть тематических разделов. Полный объем диссертации с приложениями составляет 392 страницы с 21 рисунком. Список литературы содержит 378 наименований.

В **Главе 1** строится и анализируется модель FV типа, описывающая симметричные и несимметричные безмассовые  $AdS_5$  поля, взаимодействующие друг с другом и гравитацией. Т.к. теория описывает взаимодействия полей в кубическом приближении, сначала анализируется динамика на свободном уровне, после чего развивается процедура построения кубических вершин с



учетом глобальных (супер)симметрий и калибровочной инвариантности, продиктованных структурой калибровочной алгебры. Рассматриваются две модели, симметрии которых отвечают исходной и редуцированной  $\mathcal{N} = 2$  супералгебрам высших спинов Линецкого–Фрадкина,  $su(2, 2|8)$  и  $hu_0(2, 2|8)$ . Для этих целей строится проектор, осуществляющий явную редукцию супералгебры  $su(2, 2|8)$  для получения редуцированной супералгебры  $hu_0(2, 2|8)$ .

В **Главе 2** описывается динамика свободных калибровочных полей на пространствах  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  и  $AdS_d$  в рамках БРСТ формализма. Ключевым элементом конструкции является дуальность Хау ортогональных алгебр, посредством которой можно эффективно описывать конечномерные представления алгебры Лоренца через условия старшего веса (связи) дуальной симплектической алгебры. Этот подход (с необходимыми модификациями) эффективно используется для описания (бес)конечномерных представлений алгебры Пуанкаре  $iso(d-1, 1)$  и алгебры анти-де Ситтера  $o(d-1, 2)$ . Стартуя с безмассовых полей произвольного спина в пространстве  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ , детально описывается структура связей, накладываемых: (1) через БРСТ процедуру, (2) путем выделения подпространства состояний. Показывается (динамическая) эквивалентность предложенной БРСТ формулировки развернутому формализму полей высших спинов, а также подходу Лабастиды. Предложенная конструкция обобщается на безмассовые поля непрерывного спина и произвольного типа симметрии. В завершающей части главы развивается производящая формулировка (частично-)безмассовых  $AdS_d$  полей.

В **Главе 3** рассматривается голографическое соответствие для несимметричных полей типа «крюк». Обсуждение начинается с обзора обобщённой теоремы Флато–Фронсдала и свойств конформных операторов в несимметричных представлениях группы (конформных) изометрий. В явном виде приводится 2-точечная корреляционная функция операторов такого типа. Далее развивается общий формализм несимметричных сохраняющихся токов и явно строятся сохраняющиеся токи из двух безмассовых спиноров на пространстве  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  и их производных, умноженных на элементы алгебры Клиффорда. Во второй части главы разрабатывается GKPW процедура для простейшего безмассового  $AdS_{d+1}$  поля смешанного типа симметрии типа «крюк», в результате чего явно находится 2-точечная корреляционная функция двух примарных

операторов типа «крюк» с помощью эффективного граничного действия в чётных и нечётных измерениях. Подробно анализируется трансмутация симметрий теорий в объеме и на границе. В заключение строится действие для конформных полей типа «крюк» путем отождествления с сингулярной ядра эффективного действия в чётных граничных размерностях.

В **Главе 4** строится двумерная топологическая и динамическая теория высших спинов. Рассмотрение начинается с обсуждения теоретико–представленческих вопросов, связанных с определением синглтона в одномерии и соответствующего тензорного произведения. Вводится алгебра высших спинов и обсуждается ее разные реализации, причем особое внимание уделено фактор–конструкции. Далее определяются и изучаются присоединенный и твистованный модули алгебры высших спинов, итогом чего является утверждение, что бесконечная башня массивных скалярных полей растущих масс реализуют бесконечномерное представление (мультиплет) алгебры высших спинов. Показывается, что двумерную теорию высших спинов можно сформулировать на лагранжевом уровне, вводя действие ВФ типа с калибровочной алгеброй, являющейся либо исходной алгеброй высших спинов и тогда получается топологическая теория гравитации высших спинов, обобщающая гравитацию Джакива–Тейтельбойма, либо с расширенной версией алгебры высших спинов и тогда получается динамическая теория гравитации высших спинов, спектр локальных мод которой описывается бесконечной башней массивных скалярных полей.

В **Главе 5** изучается квазиклассическая версия  $AdS_3/CFT_2$  соответствия на уровне конформных блоков на границе и дуальных графов в объеме. После краткого описания двух подходов к формулировке соответствия вводится понятие классических конформных блоков и описывается монодромный метод вычисления. Итогом является система алгебраических соотношений на акцессорные параметры, определенные как градиенты классического блока по координатам операторных вставок. Далее описываются дуальные графы мировых линий в объеме и формулируется аналогичная алгебраическая система на внешние импульсы частиц, определяемые как градиенты длины дуального графа по граничным точкам прикрепления. Показывается, что две алгебраические системы эквивалентны в слабом смысле, что подразумевает

наличие общего корня. Таким образом, доказывается равенство функций конформных блоков и длин дуальных графов. Во второй части главы в качестве конформных блоков берутся глобальные блоки, что соответствует  $sl(2, \mathbb{R})$  конформной теории на границе, в то время в объеме фиксируется  $3d$  гравитация Черна–Саймонса и частные графы из вильсоновских линий. Формулируется общий подход к описанию дуальности блоков и графов в этом случае. Особое внимание уделено случаю торической граничной геометрии, что приводит к рассмотрению конформных блоков  $CFT_2$  на торе.

В **Главе 6** рассматриваются конформные блоки торической  $CFT_2$  в пределе большого центрального заряда. Подробно рассматривается 1-точечный блок, а именно вводятся четыре типа квазиклассических 1-точечных торических блока. Показывается, что различные пределы конформных весов приводят к глобальному, легкому, тяжело–лёгкому (HL) и пертурбативному классическому блокам. Демонстрируется, что данные блоки не являются независимыми и связаны цепочками соотношений, соответствующих различным контракциям алгебры Вирасоро. Во второй части главы показывается, что пертурбативный 1-точечный конформный блок  $CFT_2$  на торе описывается как длина графа из геодезических линий типа «головастик» в трехмерном термальном пространстве  $AdS_3$ . Обсуждается распространение данного результата на 2-точечные блоки на торе в одном из OPE каналов рассеяния. В развитие конструкций предыдущей главы показывается, что глобальные торические блоки могут быть реализованы через тороидальные вильсоновские графы дуальной гравитационной теории Черна–Саймонса. Приводятся явные вычисления матричных элементов вильсоновских операторов, основанные на  $3j$  символах Вигнера и показывается, что ответ совпадает с глобальными блоками вырожденных операторов.

В **Заключении** сформулированы основные выводы диссертации.

В **Приложениях А – Е** собраны вспомогательные материалы по каждой главе, включая технические подробности вычислений, доказательства утверждений, сформулированных в основном тексте, а также краткие обзоры сторонних вопросов на уровне обозначений, определений и основных тезисов, призванных сделать изложение диссертации самодостаточным.

# Глава 1. Взаимодействия несимметричных $AdS_5$ полей

В этой главе строится  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричная теория FV (Васильева-Фрадкина) типа [160]. Алгеброй высших спинов, контролирующей взаимодействия и спектр такой модели, является  $\mathcal{N} = 2$  супералгебра Линецкого-Фрадкина [78, 79]. Она содержит  $\mathcal{N} = 2$  расширенную  $su(2, 2|2)$  супералгебру как максимальную конечномерную подалгебру, так что поля теории группируются в  $su(2, 2|2)$  супермультиплеты. Очевидно, что алгебра  $AdS_5$  изометрий  $su(2, 2)$  и алгебра  $R$ -симметрий  $u(2)$  являются бозонными подалгебрами супералгебры  $su(2, 2|2)$ .

Критической особенностью данной теории является то, что в отличие от спектров  $\mathcal{N} = 0, 1$  теорий [76, 77], супермультиплет  $\mathcal{N} = 2$  содержит т.н. «крюковые» поля, взаимодействия которых ранее не изучались. В нашем случае, это несимметричные поля определённого типа симметрии, отличающиеся от полностью симметричных полей наличием дополнительного ряда из одной клетки в соответствующей диаграмме Юнга. Обозначая спины безмассовых калибровочных полей в  $AdS_5$  парой (полу)целых чисел  $(s_1, s_2)$  получим содержимое  $\mathcal{N} = 2$  супермультиплета (при  $s_2 = 0, \frac{1}{2}$  второй спин для краткости опущен)

$$\{s\} = (s)_{[1]} \oplus (s - \frac{1}{2})_{[2]} \oplus (s - 1)_{[4]} \oplus (s - 1, 1)_{[1]} \oplus (s - \frac{3}{2})_{[2]} \oplus (s - 2)_{[1]}, \quad (1.1)$$

где  $s$  – наибольший целый спин  $2, 3, 4, \dots$ , а числа в квадратных скобках обозначают размерности представлений алгебры  $R$ -симметрии  $u(2)$ . Каждый спин- $s$  супермультиплет содержит равное количество  $16s - 8$  бозонных и фермионных степеней свободы.

В целом,  $AdS_5$  теории высших спинов с супералгеброй Линецкого–Фрадкина описывают бесконечный набор супермультиплетов (1.1) с наибольшим спином  $s$ , растущим до бесконечности

$$\sum_{k=0}^L \sum_{s=2}^{\infty} \{s\}^{(k)} \quad (1.2)$$

где  $k$  параметризует  $k$ -ю копию спин- $s$  супермультиплета. Модели, рассматриваемые в этой главе, отвечают  $L = \infty$  (нередуцированная модель) или  $L = 0$  (редуцированная модель).

Согласно структуре супермультиплета (1.1) спектр безмассовых возбуждений в полной  $\mathcal{N} = 2$  суперсимметричной теории включает низшие спины  $0, \frac{1}{2}, 1$ , содержащиеся в спин-2 (гравитон) и спин-3 (гипергравитон) супермультиплетах. Однако, поля низших спинов не будут учитываться, так что получающаяся теория не является суперсимметричной в полном смысле, т.е. не является глобально суперсимметричной. Такое возможно, потому что в кубическом приближении взаимодействие любых трёх полей можно выключить не нарушая при этом калибровочную инвариантность.<sup>7</sup> Это позволяет исключить все вершины с полями низших спинов, что эквивалентно исключению из спектра. Данное наблюдение значительно упрощает весь анализ, т.к. в теориях FV типа функционалы действия для полей низших и высших спинов формулируются в разных терминах, что ведёт к некоторым техническим сложностям (см., однако, работы [64, 180]).

## 1.1 Развернутая форма динамики $AdS_5$ полей

Изометрии пространства  $AdS_5$  образуют алгебру  $o(4, 2)$  и спектр локальных возбуждений релятивистских полей выражается в терминах весов непри-

---

<sup>7</sup> Действительно, кубическое взаимодействие спинов  $s_1 - s_2 - s_3$  может быть представлено как  $g \Phi_{a_1 \dots a_{s_1}}^{(s_1)} J^{a_1 \dots a_{s_1}}(\Phi^{(s_2)}, \Phi^{(s_3)})$ , где  $g$  – константа взаимодействия,  $\Phi^{(s_i)}$  поля со спином  $s_i$ , и  $J^{a_1 \dots a_{s_1}}(\Phi^{(s_2)}, \Phi^{(s_3)})$  – токи высших спинов, билинейные по полям и производным. Из калибровочной инвариантности следует, что токи сохраняются  $\mathcal{D}_{a_1} J^{a_1 a_2 \dots a_{s_1}}(\Phi^{(s_2)}, \Phi^{(s_3)}) \approx 0$ , где  $\approx$  означает равенство на массовой поверхности, а с другой стороны, в кубическом приближении для  $\Phi^{(s_{1,2})}$  достаточно использовать уравнение свободного поля. Более того, тождества Якоби калибровочной алгебры пропорциональны  $g^2$ . В результате, калибровочная симметрия не перемешивает различные кубические взаимодействия, что позволяет выключить любое из них.

водимых представлений максимально компактной подалгебры  $o(2) \oplus o(4) = o(2) \oplus o(3) \oplus o(3) \subset o(4, 2)$ . Квантовое число  $o(2)$  имеет смысл энергии  $E_0$ , тогда как квантовые числа  $o(4)$  являются спинами  $(s_1, s_2)$ , ассоциированными с факторами  $o(3)$  подалгебры  $o(4)$ . Для безмассовых калибровочных полей квантовые числа линейно зависимы, так что энергия может быть выражена через спины,  $E_0 = E_0(s_1, s_2)$ , что отражает тот факт, что безмассовые поля имеют меньше степеней свободы, чем массивные [30, 25]. Пусть  $D(s_1, s_2)$  это некоторое унитарное, неприводимое, бесконечномерное представление старшего веса алгебры  $o(4, 2)$ . Оно отождествляется с пространством состояний  $AdS_5$  безмассового калибровочного поля спина  $(s_1, s_2)$ . Число локальных степеней свободы безмассовых полей  $\#D(s_1, s_2)$  со спинами  $s_1 > s_2$  равно [181]

$$\#D(s_1, s_2) = \begin{cases} 2s_1 + 1, & s_1 = n, \quad s_2 = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \\ 4s_1 + 2, & s_1 = n + 1/2, \quad s_2 = 1/2, \quad n \in \mathbb{N}, \\ 4s_1 + 2, & s_1 = n, \quad s_2 = k, \quad n, k \in \mathbb{N}, \\ 4s_1 + 2, & s_1 = n + 1/2, \quad s_2 = k + 1/2, \quad n, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Для дальнейшего рассмотрения важно, что несимметричные бозонные поля ( $s_2 \neq 0$ ) имеют вдвое больше степеней свободы, чем симметричные бозонные поля ( $s_2 = 0$ ), тогда как фермионные поля имеют равное число степеней свободы независимо от значения второго спина. Безмассовые поля спинов  $s_1 = s_2$  – т.н. дублетоны – не имеют локальных степеней свободы [182, 183, 184].

Для построения модели FV типа используется развернутая формулировка динамики полей высших спинов, в рамках которой безмассовые калибровочные поля описываются как дифференциальные 1-формы, принимающие значения в некоторых неприводимых представлениях  $o(4, 2)$  алгебры (подробнее см. обзор [14]). Более того, изоморфизм  $o(4, 2) \sim su(2, 2)$  позволяет развить спинорную форму развернутого формализма  $AdS_5$  полей [80, 76, 185, 186].

Рассматриваемые поля высших спинов образуют (супер)мультиплеты безмассовых бозонных полей спина  $(s, 0)$ , фермионных полей спина  $(s, \frac{1}{2})$ , и безмассовых крюковых полей спина  $(s, 1)$ . В следующем подразделе мы сформулируем квадратичные лагранжианы таких полей, уделив особое внимание описанию «крюков». Начнем с рассмотрения  $su(2, 2)$  спинорной формы гравитации, которая служит образцом для обобщения на поля высших спинов.

### 1.1.1 Калибровочные поля высших спинов

5d гравитация с отрицательной космологической постоянной может быть сформулирована в терминах 1-формы связности со значениями в  $su(2, 2)$ <sup>8</sup>

$$\Omega(x) = dx^\mu \Omega_\mu^\alpha{}_\beta(x) T_\alpha{}^\beta, \quad (1.4)$$

где  $T_\alpha{}^\beta$  – базисные элементы  $su(2, 2)$  и связность бесследова  $\Omega_\mu^\alpha{}_\alpha = 0$ . Как обычно,  $su(2, 2)$  связность раскладывается на поле репера и лоренцеву связность. С помощью компенсаторного механизма это разложение может быть проведено в явно  $su(2, 2)$ -ковариантной форме [187, 188]. В рассматриваемом случае компенсатор является антисимметричным, биспинорным полем

$$V^{\alpha\beta}(x) = -V^{\beta\alpha}(x), \quad (1.5)$$

нормированным как  $V_{\alpha\gamma}V^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\beta$  и  $V_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\rho}V^{\gamma\rho}$ . Компенсатор не имеет локальных степеней свободы, поскольку является вспомогательным полем с законом преобразования штуркельбергова типа. Подалгебра Лоренца  $o(4, 1) \subset su(2, 2)$  является алгеброй стабильности компенсатора. Репер  $E^{\alpha\beta}$  и лоренцева спиновая связность  $\omega^\alpha{}_\beta$  определяются как [76]

$$E^{\alpha\beta} = DV^{\alpha\beta} \equiv dV^{\alpha\beta} + \Omega^\alpha{}_\gamma V^{\gamma\beta} + \Omega^\beta{}_\gamma V^{\alpha\gamma}, \quad \omega^\alpha{}_\beta = \Omega^\alpha{}_\beta + \frac{\lambda}{2} E^{\alpha\gamma} V_{\gamma\beta}, \quad (1.6)$$

где  $\lambda$  – это космологический параметр,  $\lambda^2 > 0$ ,  $d = dx^\mu \partial_\mu$  – оператор де Рама,  $D$  –  $su(2, 2)$ -ковариантная производная. Компенсатор  $V^{\alpha\beta}$  лоренц-инвариантен, что позволяет рассматривать его как симплектическую метрику для опускания/поднятия спинорных индексов лоренц-ковариантным образом,

$$X^\alpha = V^{\alpha\beta} X_\beta, \quad Y_\alpha = Y^\beta V_{\beta\alpha}. \quad (1.7)$$

В частности,  $E^{\alpha\beta}V_{\alpha\beta} = 0$  и  $\omega^{\alpha\beta}V_{\alpha\beta} = 0$ , откуда следует, что репер и лоренцева связность являются неприводимыми лоренцевыми тензорами. Построенная по связности (1.4) 2-форма кривизны  $R_\alpha{}^\beta = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta dx^\mu \wedge dx^\nu$  имеет вид

$$R_\alpha{}^\beta = d\Omega_\alpha{}^\beta + \Omega_\alpha{}^\gamma \wedge \Omega_\gamma{}^\beta. \quad (1.8)$$

<sup>8</sup>Используются обозначения  $\alpha, \beta = 1, \dots, 4$  для  $su(2, 2)$  спинорных индексов,  $i, j = 1, \dots, \mathcal{N}$  для  $u(\mathcal{N})$  индексов,  $\mu, \nu = 0, \dots, 4$  для мировых индексов,  $a, b = 0, \dots, 4$  для касательных  $o(4, 1)$  индексов.

Уравнение нулевой кривизны

$$R_\alpha{}^\beta(\Omega_0) = 0 \quad (1.9)$$

локально описывает  $AdS_5$  пространство радиуса  $\lambda^{-1}$ . Действительно, раскладывая кривизну  $R_\alpha{}^\beta$  на лоренц-ковариантные компоненты можно видеть, что стандартные тензор кручения и тензор Римана содержат вклады, пропорциональные  $\lambda^2$ . Приравнивая эти тензоры нулю получаем связь с эйнштейновской гравитацией (например, см. [14]). Фоновые гравитационные поля будут обозначаться  $\Omega_0{}^\alpha{}_\beta = (h^{\alpha\beta}, w^{\alpha\beta})$ , фоновые  $su(2, 2)$  производные как  $D_0$ . Из (1.9) следует, что  $D_0$  нильпотентна:  $D_0^2 = 0$ .

В метрической формулировке динамики полей высших спинов безмассовые спин- $s$  поля вводятся как полностью симметричные лоренцевы тензоры  $\phi_{a_1\dots a_s}(x)$  или спин-тензоры  $\psi^{\hat{\alpha}}_{a_1\dots a_{s-1/2}}(x)$ , где  $\hat{\alpha}$  - спинорный индекс. Это калибровочные поля, которые преобразуются как  $\delta\phi_{a_1\dots a_s} = \mathcal{D}_{(a_1}\xi_{a_2\dots a_s)}$  и  $\delta\psi^{\hat{\alpha}}_{a_1\dots a_{s-1/2}} = \mathcal{D}_{(a_1}\xi^{\hat{\alpha}}_{a_2\dots a_{s-3/2})}$ , где  $\mathcal{D}$  - фоновая лоренцева производная,  $\xi_{a_1\dots a_{s-1}}$  и  $\xi^{\hat{\alpha}}_{a_1\dots a_{s-5/2}}$  - калибровочные параметры. Поля и калибровочные параметры подчинены определённым алгебраическим соотношениям: следовые условия и гамма-поперечность [189, 190].

В рамках развёрнутого формализма симметричное поле заданного спина представляется как 1-форма, принимающая значения в определённой неприводимом представлении алгебры  $o(4, 2)$  [191, 192, 76, 193].<sup>9</sup> Спинорная  $su(2, 2)$  реализация полей в рамках развёрнутого формализма:

- Спин- $s$  бозонные калибровочные поля [80, 76]:

$$\Omega_\mu^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}}_{\beta_1\dots\beta_{s-1}} \quad (1.10)$$

- Спин- $s$  фермионные калибровочные поля [185, 80]:

$$\Omega_\mu^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1/2}}_{\beta_1\dots\beta_{s-3/2}} \oplus \Omega_\mu^{*\alpha_1\dots\alpha_{s-3/2}}_{\beta_1\dots\beta_{s-1/2}} \quad (1.11)$$

Здесь символ  $*$  обозначает комплексное сопряжение

$$(X_\alpha)^* = X^\beta C_{\beta\alpha}, \quad (Y^\alpha)^* = C^{\alpha\beta} Y_\beta, \quad (1.12)$$

<sup>9</sup>Здесь следует упомянуть также другие способы описания симметричных полей, предложенных в разных контекстах в работах [26, 194, 195, 196, 197, 198, 36, 199, 200, 201].



где  $C^{\alpha\beta} = -C^{\beta\alpha}$  и  $C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha}$  – это вещественные матрицы, удовлетворяющие

$$C_{\alpha\gamma}C^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\beta} . \quad (1.13)$$

Заметим, что фермионные поля описываются парой взаимно-сопряжённых мультиспиноров, а бозонные поля самосопряжены. Все мультиспиноры симметричны по верхним и нижним группам индексов, а также бесследовы по отношению к  $su(2, 2)$ -инвариантному тензору  $\delta_{\beta}^{\alpha}$ . Простейшие поля в вышеприведенном списке это поле Максвелла  $\Omega_{\mu}$ , поле Рариты–Швингера  $\Omega_{\mu}^{\alpha}$  и его сопряжённое  $\Omega_{\mu\alpha}^*$ , а также гравитационное поле  $\Omega_{\mu}^{\alpha\beta}$  (1.4).

Калибровочная симметрия определяется одним бозонным параметром – 0-формой  $\xi_{\beta_1\dots\beta_{s-1}}^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}}$  и двумя взаимно-сопряжёнными фермионными параметрами – 0-формами  $\xi_{\beta_1\dots\beta_{s-3/2}}^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1/2}}$  и  $\xi_{\beta_1\dots\beta_{s-1/2}}^*\alpha_1\dots\alpha_{s-3/2}$ . Соответствующие преобразования 1-форм калибровочных полей имеют вид

$$\delta\Omega_{\beta_1\dots\beta_{s-1}}^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}} = D_0\xi_{\beta_1\dots\beta_{s-1}}^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1}} , \quad (1.14)$$

$$\delta\Omega_{\beta_1\dots\beta_{s-3/2}}^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1/2}} = D_0\xi_{\beta_1\dots\beta_{s-3/2}}^{\alpha_1\dots\alpha_{s-1/2}} . \quad (1.15)$$

(плюс комплексно-сопряжённые выражения). Упомянутые в начале этого раздела метрические поля высших спинов закодированы как компоненты полей (1.10) и (1.11) и могут быть извлечены посредством фиксации калибровочных симметрий. Подобный механизм обобщает способ выделения метрики из поля репера в гравитации путем фиксации локальной лоренцевой симметрии.

Первый нетривиальный пример несимметричных полей – это «крюковые» поля, являющиеся бозонными спин- $(s, 1)$  безмассовыми полями. Они описываются как тензорные поля  $\phi_{a_1\dots a_s, b_1}(x)$  с двумя группами симметризованных лоренцевых индексов, удовлетворяющих условию симметрии Юнга [202, 29].<sup>10</sup> Калибровочные преобразования имеют вид  $\delta\phi_{a_1\dots a_s, b_1} = \mathcal{D}_{a_1}\xi_{a_2\dots a_s, b_1} + \mathcal{D}_{b_1}\rho_{a_1\dots a_s} + \dots$ , где точкам обозначены соответствующие симметризации Юнга, требуемые для уравнивания симметричных свойств обеих частей выражения. Здесь калибровочные параметры  $\xi_{a_2\dots a_s, b_1}$  и  $\rho_{a_1\dots a_s}$  являются тензорами ранга

<sup>10</sup>Несимметричные бозонные калибровочные поля в пространствах Минковского и AdS обсуждаются, например, в работах [203, 30, 204, 25, 35, 37, 41, 205, 161, 42, 206, 207, 162, 48, 44]. См. также следующую главу данной диссертации.

$(s - 1, 1)$  и ранга  $(s, 0)$ , соответственно. Поля и калибровочные параметры удовлетворяют определённым следовым условиям [29] (см. также Главу 2).

Следует заметить, что в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{4,1}$  поля спина  $(s_1, 1)$  дуальны полям спина  $(s_1, 0)$ , в то время как поля спина  $s_2 > 1$  не имеют локальных степеней свободы. Данный факт согласуется с тем, что локальные степени свободы полей на  $\mathbb{R}^{4,1}$  описываются неприводимыми тензорными представлениями малой алгебры Вигнера  $o(3) \subset iso(4, 1)$ . В пространстве  $AdS_5$  локальные степени свободы безмассовых полей классифицируются в соответствии с представлениями алгебры  $o(3) \oplus o(3)$ , поэтому безмассовые несимметричные поля со вторым спином  $s_2 > 0$  динамически нетривиальны.

Замечательная особенность несимметричных полей состоит в том, что в пространствах  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  и  $AdS_d$  они обладают различным числом калибровочных симметрий [30, 25]. Действительно, при рассмотрении безмассового несимметричного поля в пространстве  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  обнаруживается, что только часть его калибровочных симметрий может быть сохранена при переносе динамики в пространство  $AdS_d$ . Выживающая в  $AdS_d$  калибровочная симметрия отвечает параметру  $\xi_{a_2 \dots a_s, b_1}$ . Отсутствие одной калибровочной симметрии в  $AdS_d$  приводит к разному числу степеней свободы поля  $\phi_{a_1 \dots a_s, b_1}(x)$  в пространствах Минковского  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  и анти-де Ситтера  $AdS_d$  (см. также Главу 3).

Спинорная реализация спин- $(s, 1)$  бозонных калибровочных  $AdS_5$  полей дается следующими 1-формами [80, 186, 193]:

$$\Omega_{\mu}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}_{\beta_1 \dots \beta_{s-2}} \oplus \Omega_{\mu}^*{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{s-2}}_{\beta_1 \dots \beta_s}. \quad (1.16)$$

По аналогии с фермионными полями, «крюки» – это комплексные поля, описываемые парой взаимно-сопряжённых мультиспиноров. Все мультиспиноры симметричны по верхней и нижней группе индексов и бесследовы по отношению к  $su(2, 2)$ -инвариантному тензору  $\delta_{\beta}^{\alpha}$ . Спинорная версия калибровочной симметрии  $\xi_{a_2 \dots a_s, b_1}$  для  $AdS_5$  полей типа «крюк» определяется взаимно-сопряжёнными параметрами 0-формами  $\xi_{\beta_1 \dots \beta_{s-2}}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}$  и  $\xi_{\beta_1 \dots \beta_s}^*{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{s-2}}$  как

$$\delta \Omega_{\beta_1 \dots \beta_{s-2}}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} = D_0 \xi_{\beta_1 \dots \beta_{s-2}}^{\alpha_1 \dots \alpha_s} \quad (1.17)$$

(плюс комплексно-сопряжённые выражения).

Отметим, что простейший пример несимметричного поля – антисимметричный тензор – отсутствует в списке (1.16). Так происходит из-за того, что

антисимметричные, калибровочные  $AdS_5$  поля являются т.н. дублетонами, не имеющие локальных степеней свободы [182, 183, 184]. Таким образом, мы ограничиваем первый спин неравенством  $s_1 > 1$  и тогда первый нетривиальный пример даётся полем спина  $(2, 1)$ . Его спинорная реализация это симметричный спинор  $\Omega_\mu^{\alpha\beta}$  вместе с комплексно-сопряжённым спинором  $\Omega_\mu^*_{\alpha\beta}$ .

### 1.1.2 Производящие функции полей и параметров

Тензорные поля произвольного ранга удобно реализовывать как коэффициенты разложения полиномов по некоторому набору вспомогательных спинорных переменных. При этом возникает богатая алгебраическая структура, известная как дуальность Хау [208, 209], позволяющая контролировать теоретико-групповые свойства (спин-)тензорных полей в явном виде.

Введём два сорта вспомогательных грассмановых чётных переменных  $a_\alpha$  и  $b^\beta$ ,  $\alpha, \beta = 1, \dots, 4$ . Предполагается, что  $a_\alpha$ ,  $b^\beta$  и их производные  $\frac{\partial}{\partial a_\alpha}$ ,  $\frac{\partial}{\partial b^\beta}$  действуют в пространстве полиномов  $\mathcal{P}_8$  восьми спинорных переменных

$$F(a, b) = \sum_{m,n=0}^{\infty} F_{\beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} a_{\alpha_1} \cdots a_{\alpha_m} b^{\beta_1} \cdots b^{\beta_n}, \quad (1.18)$$

где коэффициенты разложения являются мультиспинорами, полностью симметричными по верхней и нижней группам индексов. Пространство  $\mathcal{P}_8$  является модулем алгебры  $gl(4)$  с базисными элементами, реализованными следующими дифференциальными операторами,

$$G_\alpha^\beta = \frac{1}{2} \left\{ a_\alpha, \frac{\partial}{\partial a_\beta} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ b^\beta, \frac{\partial}{\partial b^\alpha} \right\}, \quad (1.19)$$

удовлетворяющими  $gl(4)$  коммутационным соотношениям относительно стандартного коммутатора. Алгебра  $gl(4)$  действует в пространстве  $\mathcal{P}_8$  однородно, раскладывая его, таким образом, на конечномерные, неприводимые подмодули. Коэффициенты разложения в (1.18) являются  $gl(4)$  тензорами.

Условие того, что элементы  $F(a, b) \in \mathcal{P}_8$  образуют под действием преобразований из  $gl(4)$  неприводимый подмодуль выражается следующим набором соотношений [76],

$$N_a = a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\alpha} : \quad N_a F(a, b) = m F(a, b), \quad (1.20)$$

$$N_b = b^\alpha \frac{\partial}{\partial b^\alpha} : N_b F(a, b) = n F(a, b), \quad (1.21)$$

где  $m$  и  $n$  – некоторые целые числа, и

$$T^- = \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\alpha} : T^- F(a, b) = 0. \quad (1.22)$$

Операторы  $N_a, N_b$  и  $T^-$  совместно с оператором

$$T^+ = a_\alpha b^\alpha \quad (1.23)$$

образуют алгебру  $gl(2)$ . По построению, алгебры  $gl(4)$  и  $gl(2)$  взаимно коммутируют. Важно, что  $gl(4)$ -инвариантные условия (1.20)–(1.22) являются условиями старшего веса алгебры  $gl(2)$ . Действительно, посредством подходящей замены базиса можно отождествить элементы  $T^\pm$  с верхнетреугольной и нижнетреугольной подалгебрами алгебры  $gl(2)$ , а элементы  $N_{a,b}$  будут её элементами Картана. Алгебра  $gl(2)$  раскладывается стандартным образом  $gl(2) = sl(2) \oplus gl(1)$ , где часть  $sl(2)$  имеет вид

$$T^\pm, \quad T^0 = \frac{1}{4}(N_a + N_b + 4) \quad (1.24)$$

а комбинация

$$G^0 = N_a - N_b \quad (1.25)$$

задает базисный элемент подалгебры  $gl(1)$ . Коммутационные соотношения подалгебры  $sl(2)$  имеют стандартный вид

$$[T^0, T^\pm] = \pm \frac{1}{2} T^\pm, \quad [T^-, T^+] = T^0. \quad (1.26)$$

По определению, элемент  $G^0$  – центральный, т.е. коммутирует с любым элементом алгебры  $sl(2)$ .

Данное рассмотрение остается верным для подалгебры  $sl(4) \subset gl(4)$ . Заметим, что условие (1.22) также определяет вектор старшего веса  $sl(4) \subset gl(4)$ , а условия (1.20) и (1.21) фиксируют целочисленный вес  $sl(4)$  посредством

$$T^0 F(a, b) = \frac{1}{4}(m + n + 4) F(a, b), \quad (1.27)$$

вместе с соответствующим собственным значением базисного элемента  $gl(1)$ ,

$$G^0 F(a, b) = (m - n) F(a, b). \quad (1.28)$$

Итак, пространство  $\mathcal{P}_8$  оказывается  $gl(4) - gl(2)$  бимодулем; из его структуры следует, что данные две алгебры образуют Хау–дуальную пару.

В дополнение к коммутирующим вспомогательным переменным введём также вспомогательные, грассманы нечётные переменные  $\psi_i$  и  $\bar{\psi}^j$  с  $i, j = 1, \dots, \mathcal{N}$ . Это позволяет суперсимметризовать развитую выше бозонную конструкцию. С этой целью определим суперпространство  $\mathcal{P}_{8|2\mathcal{N}}$  полиномов вида

$$F(a, b, \psi, \bar{\psi}) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\mathcal{N}} F_{\beta_1 \dots \beta_m | j_1 \dots j_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n} b^{\beta_1} \dots b^{\beta_m} \psi_{i_1} \dots \psi_{i_k} \bar{\psi}^{j_1} \dots \bar{\psi}^{j_l}, \quad (1.29)$$

где коэффициенты разложения являются мультиспинорами с двумя группами полностью симметричных индексов и двумя группами полностью антисимметричных индексов. Суперпространство  $\mathcal{P}_{8|2\mathcal{N}}$  является модулем супералгебры  $gl(4|\mathcal{N})$ , базисные элементы которой задаются следующими дифференциальными операторами (все нечетные производные действуют слева)

$$\begin{aligned} G_\alpha^\beta &= \frac{1}{2} \{a_\alpha, \frac{\partial}{\partial a_\beta}\} + \frac{1}{2} \{b^\beta, \frac{\partial}{\partial b^\alpha}\}, \\ Q_\alpha^i &= a_\alpha \bar{\psi}^i + \frac{\partial}{\partial b^\alpha} \frac{\partial}{\partial \psi_i}, \quad \bar{Q}_i^\alpha = b^\alpha \psi_i + \frac{\partial}{\partial a_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}^i}, \\ U_i^j &= \frac{1}{2} [\psi_i, \frac{\partial}{\partial \psi_j}] + \frac{1}{2} [\bar{\psi}^j, \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}^i}]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Модуль  $\mathcal{P}_{8|2\mathcal{N}}$  раскладывается на инвариантные  $gl(4|\mathcal{N})$  подмодули.

Введение грассмановых нечетных переменных позволяет расширить бозонную реализацию алгебры  $gl(2)$ . Базисные элементы  $sl(2)$  в суперсимметричной реализации имеют вид [77]

$$P^+ = T^+ - \psi_i \bar{\psi}^i, \quad P^- = T^- + \frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\psi}^i \partial \psi_i}, \quad P^0 = T^0 + \frac{1}{4} (N_\psi + N_{\bar{\psi}} - \mathcal{N}), \quad (1.31)$$

и базисный  $gl(1)$  элемент

$$Z^0 = G^0 + N_\psi - N_{\bar{\psi}}, \quad (1.32)$$

$$N_\psi = \psi_i \frac{\partial}{\partial \psi_i}, \quad N_{\bar{\psi}} = \bar{\psi}^i \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}^i}. \quad (1.33)$$

Соответствующие коммутационные соотношения  $sl(2)$  имеют вид

$$[P^0, P^\pm] = \pm \frac{1}{2} P^\pm, \quad [P^-, P^+] = P^0. \quad (1.34)$$

По построению, вышеуказанные алгебра  $gl(2)$  и супералгебра  $gl(4|\mathcal{N})$  взаимно коммутируют и образуют Хау–дуальную пару. Отсюда следует, что неприводимые  $gl(4|\mathcal{N})$  подмодули в  $\mathcal{P}_{8|2\mathcal{N}}$  можно изучать накладывая следующее  $sl(2)$  условие старшего веса

$$P^- F(a, b, \psi, \bar{\psi}) = 0, \quad (1.35)$$

дополненное фиксированными собственными значениями элемента Картана  $P^0$  из  $sl(2)$  и элемента  $Z^0$  из  $gl(1)$ . Следует отметить, что такая конструкция описывает только определённый класс неприводимых представлений супералгебры  $gl(4|\mathcal{N})$ .

До сих пор мы рассматривали комплексную супералгебру  $gl(4|\mathcal{N})$ . Однако, нас интересует супералгебра  $su(2, 2|\mathcal{N})$ , определяемая как соответствующая вещественная форма  $sl(4|\mathcal{N}) \subset gl(4|\mathcal{N})$ . Условия вещественности имеют вид

$$(a_\alpha)^* = b^\beta C_{\beta\alpha}, \quad (b^\alpha)^* = C^{\alpha\beta} a_\beta, \quad (\psi_i)^* = \bar{\psi}^i, \quad (\bar{\psi}^i)^* = \psi_i, \quad (1.36)$$

где матрицы сопряжения определяются (1.13). Отсюда следует, что  $a_\alpha$  и  $b^\beta$  находятся в фундаментальном и сопряжённом фундаментальном представлениях  $su(2, 2)$ , а  $\psi_i$  и  $\bar{\psi}^i$  – в фундаментальном и сопряжённом фундаментальном представлениях  $u(\mathcal{N})$ . В следующем разделе дается реализация этой конструкции в виде звёздочного произведения.

Обсуждаемые калибровочные поля могут быть совокупно представлены как пара взаимно–сопряжённых мультиспиноров

$$\Omega_\mu^{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1+s_2-1}} \oplus \Omega_\mu^*{}_{\beta_1 \dots \beta_{s_1-s_2-1}}^{\beta_1 \dots \beta_{s_1-s_2-1}}, \quad (1.37)$$

со спинами  $s_1 = s$  и  $s_2 = 0, \frac{1}{2}, 1$ . Используя введенные выше вспомогательные спинорные переменные определим безмассовые калибровочные поля следующим образом

$$\Omega(a, b|x) = dx^\mu \Omega_\mu^{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1+s_2-1}}(x) a_{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1+s_2-1}} b^{\beta_1 \dots \beta_{s_1-s_2-1}} \quad (1.38)$$

вместе с комплексно–сопряжённым полем  $\Omega^*(a, b|x)$ . Соответствующая линеаризованная кривизна является 2-формой  $R_1 = \frac{1}{2} dx^\mu \wedge dx^\nu R_{1\mu\nu}(a, b|x)$  вида

$$R_1 = D_0 \Omega \equiv d \Omega + \Omega_0^\alpha{}_\beta (b^\beta \frac{\partial}{\partial b^\alpha} - a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta}) \wedge \Omega, \quad (1.39)$$

где  $\Omega_0^{\alpha\beta}$  есть фоновая 1-форма связности, удовлетворяющая условию нулевой кривизны (1.9), а фоновая ковариантная производная имеет вид

$$D_0 = d + \Omega_0^{\alpha\beta} \left( b^\beta \frac{\partial}{\partial b^\alpha} - a_\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} \right). \quad (1.40)$$

Нижний индекс 1 показывает, что кривизна (1.39) – это линеаризованная часть некоторой полной неабелевой кривизны, см. далее. Калибровочные преобразования имеют вид

$$\delta\Omega = D_0\xi, \quad (1.41)$$

где калибровочный параметр это 0-форма  $\xi = \xi(a, b|x)$ . Из  $D_0^2 = 0$  естественным образом следует, что линеаризованные кривизны инвариантны

$$\delta R_1(a, b|x) = 0, \quad (1.42)$$

а соответствующие тождества Бьянки имеют вид  $D_0 R_1(a, b|x) = 0$ . Используя базисные элементы  $gl(2)$  (1.24) легко сформулировать алгебраические соотношения на  $\Omega(a, b|x)$ , позволяющие выделить неприводимое поле заданного спина как решение  $gl(2)$  условия старшего веса

$$T^-\Omega(a, b|x) = 0, \quad (1.43)$$

вместе с определёнными собственными значениями элементов Картана

$$\begin{aligned} N_a\Omega(a, b|x) &= (s_1 + s_2 - 1)\Omega(a, b|x), \\ N_b\Omega(a, b|x) &= (s_1 - s_2 - 1)\Omega(a, b|x). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Последние два условия эквивалентным образом переписываются в виде

$$\begin{aligned} T^0\Omega(a, b|x) &= \frac{1}{2}(s_1 + 1)\Omega(a, b|x), \\ G^0\Omega(a, b|x) &= 2s_2\Omega(a, b|x). \end{aligned} \quad (1.45)$$

Кривизны удовлетворяют, очевидно, тем же алгебраическим условиям.

Введем следующий набор дифференциальных операторов по вспомогательным спинорным переменным [76]

$$S^- = a_\alpha \frac{\partial}{\partial b^\beta} V^{\alpha\beta}, \quad S^+ = b^\alpha \frac{\partial}{\partial a_\beta} V_{\alpha\beta}, \quad S^0 = N_b - N_a. \quad (1.46)$$

Они явно содержат компенсатор и образуют вспомогательную алгебру  $sl(2)$

$$[S^0, S^\pm] = \pm \frac{1}{2} S^\pm, \quad [S^-, S^+] = S^0. \quad (1.47)$$

Заметим, что данный набор элементов этой алгебры  $sl(2)$  коммутирует с элементами введенной ранее алгебры  $sl(2)$  (1.26).

Неприводимые  $su(2, 2)$  калибровочные поля раскладываются на  $o(4, 1)$  лоренцевы компоненты следующего вида

$$\omega_\mu^t \alpha_1 \dots \alpha_{s_1+s_2+t-1}, \beta_1 \dots \beta_{s_1-s_2-t-1}(x), \quad 0 \leq t \leq s_1 - s_2 - 1, \quad (1.48)$$

которые удовлетворяют условиям симметрии Юнга и условию  $V_{\alpha\beta}$ -поперечности. Поля (1.48) возникают как коэффициенты разложения следующей производящей функции

$$\omega^t(a, b|x) = dx^\mu \omega_\mu^t(a, b|x). \quad (1.49)$$

Условия неприводимости, накладываемые на лоренц-ковариантные тензорные поля, имеют вид двух  $gl(2)$  условий старшего веса

$$S^- \omega^t = 0, \quad T^- \omega^t = 0. \quad (1.50)$$

Первое является условием симметрии Юнга, а второе выражает тот факт, что лоренцевы тензорные поля поперечны по отношению к компенсатору  $V^{\alpha\beta}$ , т.е. являются неприводимыми представлениями алгебры Лоренца, реализованными явно  $su(2, 2)$ -ковариантным образом. Действительно, операторы (1.46) позволяют написать разложение неприводимых  $su(2, 2)$  полей в виде

$$\Omega(a, b|x) = \sum_{t=0}^{s_1-s_2-1} (S^+)^t \omega^t(a, b|x). \quad (1.51)$$

Т.к. две алгебры  $sl(2)$  (1.26) и (1.47) взаимно коммутируют, можно заключить, что второе условие старшего веса (1.50), наложенное на поле  $\omega^t(a, b|x)$ , следует из условия старшего веса (1.43), наложенное на поле  $\Omega(a, b|x)$ .

Фоновая ковариантная производная записывается в явно лоренц-ковариантном виде как  $D_0 = \mathcal{D}_0 + \sigma_- + \lambda \sigma_0 + \lambda^2 \sigma_+$ , где  $\mathcal{D}_0$  обозначает производную по отношению к фоновой лоренцевой связности  $w^{\alpha\beta}$ , а  $\sigma$ -операторы удовлетворяют соотношениям, следующим из условия нулевой кривизны  $D_0^2 = 0$ ,

$$(\sigma_\pm)^2 = 0, \quad \{\sigma_0, \sigma_\pm\} = 0, \quad \mathcal{D}^2 + \lambda^2 \{\sigma_-, \sigma_+\} + \lambda^2 (\sigma_0)^2 = 0. \quad (1.52)$$



Явные выражения для  $\sigma$ -операторов можно найти в работе [186]. Следует отметить, что нетривиальный оператор  $\sigma_0$  появляется не только для симметричных фермионных полей [192], но и для несимметричных бозонных и фермионных полей.

Лоренц-ковариантные поля  $\omega^t$  при разных значениях параметра  $t$  имеют различную динамическую интерпретацию. Различают физические, вспомогательные и экстра поля.

- Для систем целого спина  $(s, 0)$ :  $t = 0$  – физические поля,  $t = 1$  – вспомогательные поля,  $t > 1$  – экстра поля.
- Для систем полуцелого спина  $(s, \frac{1}{2})$ :  $t = 0$  – физические поля,  $t > 0$  – экстра поля. Отсутствие вспомогательных полей является следствием того, что уравнения движения фермионных полей имеют первый порядок.
- Для систем целого спина  $(s, 1)$ :  $t = 0$  – физические и вспомогательные поля,  $t > 0$  – экстра поля. Физические и вспомогательные поля отождествляются, соответственно, как  $\text{Re } \omega^0$  и  $\text{Im } \omega^0$ . В частности, это позволяет привести динамические уравнения несимметричных полей к первому порядку. Аналогичное разложение на вещественную и мнимую части удваивает число (вещественных) экстра полей (см. подробности в [186]).

Развернутые динамические уравнения движения несимметричных полей высших спинов могут быть представлены в виде системы вариационных уравнений и определённых связей. Вариационные уравнения включают только физические и вспомогательные поля; вспомогательные поля выражаются через первые производные физических полей; связи содержат все экстра поля, выраженные через производные физических полей. Следующие разделы посвящены обсуждению этой конструкции.

### 1.1.3 Функционалы действия полей высших спинов

Одно из основных преимуществ использования развернутой формулировки состоит в том, что квадратичные функционалы действия полей высших спинов могут быть представлены в явно калибровочно-инвариантном виде. Они имеют вид билинейных комбинаций линеаризованных кривизн, так что калибровочная инвариантность действия является прямым следствием инва-

риантности (1.42).

Функционал действия  $AdS_5$  полей высших спинов, описываемых посредством производящих функций по двум наборам вспомогательных переменных  $X_1 = (a_{1\alpha}, \beta_1^\beta)$  и  $X_2 = (a_{2\alpha}, \beta_2^\beta)$  может быть построен следующим схематическим образом

$$S = \int_{\mathcal{M}^5} \hat{H} \left( E, V, \frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2} \right) \wedge R(X_1) \wedge R(X_2) \Big|_{X_1=X_2=0}, \quad (1.53)$$

где  $\hat{H}$  – это полином по компенсатору и производным по вспомогательным переменным, действующим на произведение двух линеаризованных кривизн  $R(X)$ . Поскольку подынтегральное выражение является 5-формой, то  $\hat{H}$  это 1-форма, пропорциональная реперу  $E_\mu^{\alpha\beta}$ . Коэффициенты разложения  $\hat{H}$  по производным по вспомогательным переменным являются  $su(2, 2)$ -ковариантными тензорными полями, составленными из  $V^{\alpha\beta}$  и  $\delta_\beta^\alpha$ , а их комбинации параметризуют различные типы свёрток индексов кривизн. Любое такое действие явно  $su(2, 2)$ -инвариантно и автоматически калибровочно-инвариантно относительно преобразований (1.41).

В общем случае, действия типа (1.53) описывают неправильное число степеней свободы на массовой поверхности, по причине избыточных степеней свободы, ассоциированных с экстра полями. Чтобы нивелировать их вклад, следует зафиксировать оператор  $\hat{H}$  посредством условия отщепления экстра полей, которое выражается в виде равной нулю вариации квадратичного действия по отношению к экстра полям,

$$\frac{\delta S_2}{\delta \omega^{ex}} \equiv 0. \quad (1.54)$$

Экстра поля сохраняют явную калибровочную инвариантность функционала действия, при этом вышеприведённое условие отщепления исключает их из квадратичного действия. После отщепления экстра полей действие может быть приведено к минимальной форме с двумя составляющими полями – физическим и вспомогательным – однако остаточная калибровочная инвариантность становится неявной. Тем не менее, для обеих версий действия, минимальной формы с двумя полями и неминимальной с экстра полями, соответствующие уравнения движения свободных полей всегда имеют явно

калибровочно-инвариантный вид, т.е. представимы в виде линейных комбинаций линеаризованных кривизн.

Действия для спин- $(s_1, s_2)$  безмассовых калибровочных полей записываются в следующем виде [76, 185, 186]

$$S_2^{(s_1, s_2)} = \int_{\mathcal{M}^5} \hat{H} \wedge R(a_1, b_1) \wedge R^*(a_2, b_2)|_{a_i=b_i=0}, \quad s_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \quad (1.55)$$

где  $R$  и  $R^*$  – это взаимно-сопряжённые линеаризованные кривизны спина  $(s_1, s_2)$  (1.39) и  $\hat{H}$  есть операторная дифференциальная 1-форма следующего вида

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \left( \alpha(p, q) E_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}} b_{12} + \beta(p, q) E^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial b_2^\beta} a_{12} \right. \\ & \left. + \gamma(p, q) E_{\alpha}{}^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha} \partial b_1^\beta} c_{12} + \zeta(p, q) E_{\alpha}{}^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial b_2^\beta} c_{21} \right) (c_{12})^{2s_2}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Здесь  $E^{\alpha\beta}$  – это репер (1.6). Для рассматриваемого квадратичного действия репер является фоновым,  $E^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}$ , так что динамические поля содержатся только в линеаризованных кривизнах. Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\zeta$  являются функциями операторов

$$p = a_{12} b_{12}, \quad q = c_{12} c_{21}, \quad (1.57)$$

где

$$\begin{aligned} a_{12} &= V_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial a_{2\beta}}, & b_{12} &= V^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial b_1^\alpha \partial b_2^\beta}, \\ c_{12} &= \frac{\partial^2}{\partial a_{1\alpha} \partial b_2^\alpha}, & c_{21} &= \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha} \partial b_1^\alpha}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Эти функции осуществляют различные свёртки индексов фонового репера, компенсатора и кривизн.

Ниже перечислены решения условий отщепления экстра полей в случае полностью симметричных бозонных и фермионных полей, а также для несимметричных бозонных полей типа «крюк». Заметим, что квадратичные действия определены по модулю вклада полных производных.

- Спин- $(s, 0)$  бозоны:

$$\alpha(p, q) = 2 \int_0^1 d\tau \left(1 + q \frac{\partial}{\partial q}\right) \rho(\tau p + q) , \quad (1.59)$$

$$\zeta(p, q) + \gamma(p, q) = 0 , \quad \beta(p, q) = 0 , \quad \gamma(p, q) = \rho(p + q) .$$

- Спин- $(s, \frac{1}{2})$  фермионы:

$$\alpha(p, q) = - \int_0^1 d\tau \frac{\partial}{\partial p} \rho(p\tau + q) , \quad (1.60)$$

$$\gamma(p, q) = 0 , \quad \beta(p, q) = 0 , \quad q\zeta(p, q) = \rho(p + q) .$$

- Спин- $(s, 1)$  бозоны:

$$\alpha(p, q) = - \int_0^1 d\tau \frac{\partial}{\partial p} \rho(p\tau + q) , \quad (1.61)$$

$$\gamma(p, q) = 0 , \quad \beta(p, q) = 0 , \quad q\zeta(p, q) = \rho(p + q) .$$

Видно, что квадратичное действие для заданного спина однозначно фиксировано вплоть до общего фактора, запараметризованного полиномами  $\rho(p + q)$  фиксированного порядка,  $\rho(p + q) = \rho_0(p + q)^{s_1 - 2}$  для полей спина  $s_2 = 0$  и  $\rho(p + q) = \rho_0(p + q)^{s_1 - s_2 - 1}$  для полей спина  $s_2 \neq 0$ , где  $\rho_0$  – произвольные постоянные, которые не фиксируются на свободном уровне и представляют остаточную неопределенность в коэффициентах. С другой стороны, требование калибровочной инвариантности теории в кубическом приближении однозначно фиксирует  $\rho(p + q)$ , см. далее.

#### 1.1.4 Связи и обобщённые тензоры Вейля

Согласно предыдущему разделу, чтобы явно контролировать высшеспиновую калибровочную инвариантность, квадратичное действие всегда формулируется в составе с экстра полями. Оказывается, что на уровне взаимодействия вариация действия по экстра полям не может быть тождественно приравнена нулю непротиворечивым образом. Следовательно, должны быть наложены

соответствующие связи, которые выражают экстрала поля в терминах физических полей, сохраняя, таким образом, правильное число калибровочных симметрий и физических степеней свободы.

Предположим, что связи на экстрала поля имеют следующий вид [76, 77, 186]

$$\hat{\Upsilon}_2^+ \wedge r^t = 0, \quad 0 \leq t < s_1 - s_2 - 1, \quad s_2 = 0, \frac{1}{2}, 1, \quad (1.62)$$

где  $\hat{\Upsilon}_2^+$  – это некоторая операторная 2-форма, увеличивающая градуировку  $t$  на единицу. Она удовлетворяет условию

$$\sigma_+ \wedge \hat{\Upsilon}_2^+ = 0, \quad (1.63)$$

которое гарантирует, что число независимых алгебраических соотношений, наложенных на кривизну  $r^t$ , совпадает с числом компонент свободных полей  $\omega^{t>0}$  по модулю чисто калибровочных компонент вида  $\delta\omega^{t+1} = \sigma_- \xi^{t+2}$ . Можно показать, что оператор  $\hat{\Upsilon}_2^+$  однозначно фиксируется в виде

$$\hat{\Upsilon}_2^+ = \sigma_0 \wedge \sigma_+. \quad (1.64)$$

Связи (1.62) описываются 4-формой, которая в  $d = 5$  измерениях дуальна 1-форме, так что число уравнений в (1.62) совпадает с числом компонент  $\omega^{t+1}$ . Таким образом, поле  $\omega^{t+1}$  может быть выражено через производные поля  $\omega^t$  для любых  $t > 0$ . Наконец, можно найти поля  $\omega^t$  в терминах производных поля  $\omega^0$  со старшей производной порядка  $t$ . Соответствующие схематические выражения имеют вид

$$\omega^t \sim \left( \frac{\partial}{\lambda \partial x} \right)^t \omega^0. \quad (1.65)$$

На нелинейном уровне подобные выражения для экстрала полей задают полезную параметризацию старших производных в членах взаимодействия с участием полей высших спинов.

Напомним утверждение, известное в литературе как первая теорема о массовой поверхности (см., например, [210, 191, 192, 80]).

**Утверждение 1.1.** *Вариационные уравнения движения полей спина  $(s_1, 0)$  и спина  $(s_1, 1/2)$  с учётом связей на экстрала поля (1.62) представляются в виде*

$$R_{\beta_1 \dots \beta_{s_1-1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1-1}} = H_{2\delta\rho} C_0^{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1-1} \gamma_1 \dots \gamma_{s_1-1} \delta\rho} V_{\gamma_1 \beta_1} \cdots V_{\gamma_{s_1-1} \beta_{s_1-1}}, \quad (1.66)$$

$$R_{\beta_1 \dots \beta_{s_1-3/2}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1-1/2}} = H_2 \delta_\rho C_{1/2}^{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1-1/2} \gamma_1 \dots \gamma_{s_1-3/2} \delta \rho} V_{\gamma_1 \beta_1} \dots V_{\gamma_{s_1-3/2} \beta_{s_1-3/2}} , \quad (1.67)$$

плюс аналогичные уравнения для комплексно-сопряжённых кривизн. Здесь величина  $H_2 \delta_\rho = h_\delta^\gamma \wedge h_{\gamma\rho}$ . Полностью симметричный мультиспинор  $C_0^{\alpha_1 \dots \alpha_{2s_1}}$  является обобщённым бозонным тензором Вейля, полностью симметричные мультиспиноры  $C_{1/2}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2s_1}}$  и его комплексно-сопряжённый составляют обобщённый фермионный тензор Вейля.

В частности, данное утверждение гласит, что все лоренц-ковариантные кривизны, кроме кривизн  $t = s_1 - 1$  для бозонов, и  $t = s_1 - 3/2$  для фермионов, могут быть положены равными нулю на массовой поверхности, при условии наложения подходящих связей. Утверждение **1.1** обобщает хорошо известную конструкцию тензора Вейля в гравитации.

Сформулируем теперь аналогичное утверждение для несимметричных полей целого спина  $(s_1, 1)$ . Известно, что уравнения для полей высших спинов вида  $R = H_2 C$  описывают динамику  $AdS_5$  полей типа «крюк» [80]. В свою очередь, здесь показывается, что эти уравнения являются вариационными с дополнительными связями, что гарантирует, таким образом, что предложенный функционал действия (1.55) корректно описывает физические степени свободы полей типа «крюк».

**Утверждение 1.2.** *Вариационные уравнения полей спина  $(s_1, 1)$  с учётом связей на экстра поля (1.62) представляются в виде*

$$R_{\beta_1 \dots \beta_{s_1-2}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1}} = H_2 \delta_\rho C_1^{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1} \gamma_1 \dots \gamma_{s_1-2} \delta \rho} V_{\gamma_1 \beta_1} \dots V_{\gamma_{s_1-2} \beta_{s_1-2}} , \quad (1.68)$$

$$R_{\beta_1 \dots \beta_{s_1}}^*{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1-2}} = H_2 \delta_\rho C_1^*{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{s_1-2} \gamma_1 \dots \gamma_{s_1-2} \delta \rho} V^{\gamma_1 \alpha_1} \dots V^{\gamma_{s_1-2} \alpha_{s_1-2}} .$$

Полностью симметричные мультиспиноры  $C_1^{\alpha_1 \dots \alpha_{2s}}$  и  $C_1^*{}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2s} \beta_1 \dots \beta_{2s}}$  взаимно сопряжены и составляют обобщённый тензор Вейля полей типа «крюк».

Доказательство приведено в работе [160]. Используя вспомогательные переменные, выражения (1.66), (1.67) можно переписать в следующем виде

$$R^{s_1, s_2}(a, b|x) = H_2 \alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\beta} \text{Res}_\mu(\mu^{2s_2} C^{s_1, s_2}(\mu a + \mu^{-1} b|x)) , \quad (1.69)$$

$$R^{*s_1, s_2}(a, b|x) = H_2 \alpha^\beta \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \partial b^\beta} \text{Res}_\mu(\mu^{-2s_2} C^{*s_1, s_2}(\mu a + \mu^{-1} b|x)) , \quad (1.70)$$

где  $s_2 = 0, \frac{1}{2}, 1$ ,  $H_{2\alpha\beta} = h_{\alpha\gamma} \wedge h^\gamma_\beta$ ,  $\text{Res}_\mu$  выделяют  $\mu$ -независимую часть ряда Лорана по  $\mu$ . Функция одной спинорной переменной

$$C(\mu a + \mu^{-1}b) = \sum_{k,l} \frac{\mu^{k-l}}{k!l!} C^{\alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_l} a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_k} b_{\beta_1} \dots b_{\beta_l} \quad (1.71)$$

имеет полностью симметричные коэффициенты  $C^{\alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_l}$  и  $b_\beta = b^\gamma V_{\gamma\beta}$ .

Как видно, обобщённый тензор Вейля для бозонного несимметричного поля спина  $(s_1, s_2)$  представляется в виде пары взаимно-сопряжённых обобщённых тензоров Вейля, возникающих для симметричного поля спина  $(s_1, 0)$ . Из этого следует, что число физических степеней свободы поля спина  $(s_1, s_2)$  вдвое превышает их число у симметричного поля спина  $(s_1, 0)$  (1.3). В плоском пределе  $\lambda = 0$  несимметричное поле спина  $(s_1, s_2)$  раскладывается на два независимых полностью симметричных поля спина  $(s_1, 0)$ . Действительно, в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{4,1}$  несимметричные поля отсутствуют, т.к. малая алгебра Вигнера  $o(3)$  имеет лишь полностью симметричные представления. Это наблюдение подтверждает гипотезу Бринка–Васильева–Мецаева [25]: одно неприводимое безмассовое  $AdS_d$  поле в плоском пределе раскладывается в набор неприводимых безмассовых  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  полей. В случае пространства  $AdS_5$  набор соответствующих полей в пространстве  $\mathbb{R}^{4,1}$  сильно редуцируется: несимметричное бозонное  $AdS_5$  поле раскладывается на пару полностью симметричных  $\mathbb{R}^{4,1}$  полей равного спина [181].

В завершение этого раздела стоит отметить, что плоский предел  $\lambda = 0$  развёрнутого квадратичного действия (1.55) для безмассовых  $AdS_5$  полей спина  $(s, 1)$  противоречив в том смысле, что теряется половина физических степеней свободы [25]. Однако, противоречие такого рода может быть проигнорировано в нелинейной теории, т.к. как члены взаимодействия полей высших спинов содержат множитель  $\lambda^{-1}$  и поэтому наивный переход от нелинейной теории в пространстве  $AdS_5$  к теории в пространстве  $\mathbb{R}^{4,1}$  очевидно сингулярен. Возможным способом решения этой проблемы может являться использование штуркельбергова подхода, изучаемого для несимметричных полей в работах [25, 41, 46], что позволит рассматривать переход  $AdS_5 \rightarrow \mathbb{R}^{4,1}$ .

## 1.2 Супералгебры Линецкого–Фрадкина

### 1.2.1 Супералгебра $su(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1} | 8)$

Пусть грассманы чётные переменные  $a_\alpha, b^\beta$  с  $\alpha, \beta = 1, \dots, 4$  и нечётные переменные  $\psi_i$  и  $\bar{\psi}^j$  с  $i, j = 1, \dots, \mathcal{N}$  удовлетворяют ненулевым (анти-)комму- тационным соотношениям

$$[a_\alpha, b^\beta]_\star = \delta_\alpha^\beta, \quad \{\psi_i, \bar{\psi}^j\}_\star = \delta_i^j, \quad (1.72)$$

по отношению к звёздочному произведению Вейля

$$(F \star G)(a, b, \psi, \bar{\psi}) = F(a, b, \psi, \bar{\psi}) (\exp \Delta) G(a, b, \psi, \bar{\psi}), \quad (1.73)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \left( \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} + \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} + \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right).$$

Таким образом, мы получаем  $\star$ -алгебру Вейля-Клиффорда с элементами  $F = F(a, b, \psi, \bar{\psi})$  (1.29). Этих переменных достаточно для построения базисных элементов  $\mathcal{N}$ -расширенной супералгебры  $gl(4|\mathcal{N})$ ,

$$T_\alpha^\beta = \frac{1}{2} \{a_\alpha, b^\beta\}_\star, \quad Q_\alpha^i = a_\alpha \bar{\psi}^i, \quad \bar{Q}_i^\beta = b^\beta \psi_i, \quad U_i^j = \frac{1}{2} \{\psi_i, \bar{\psi}^j\}_\star. \quad (1.74)$$

Базисные элементы  $U_i^j$  образуют алгебру  $R$ -симметрии  $U(\mathcal{N}) \subset gl(4|\mathcal{N})$ . Градуированный суперкоммутатор имеет стандартную форму  $[F, G]_\star = F \star G - (-1)^{\pi(F)\pi(G)} G \star F$ , где  $Z_2$  градуировка  $\pi$  определена как

$$F(-a, -b, \psi, \bar{\psi}) = (-1)^{\pi(F)} F(a, b, \psi, \bar{\psi}), \quad \pi(F) = 0, 1. \quad (1.75)$$

Факторизация по идеалу  $gl(4|\mathcal{N})$ , порождённому центральным элементом,

$$N = a_\alpha b^\alpha - \psi_i \bar{\psi}^i, \quad (1.76)$$

даёт супералгебру  $sl(4|\mathcal{N}) \subset gl(4|\mathcal{N})$ , в то время как  $AdS_5$  супералгебра  $su(2, 2|\mathcal{N})$  определяется как вещественная форма  $sl(4|\mathcal{N})$ , выделяемая условиями вещественности (см. далее).



Высшеспиновое расширение супералгебры  $su(2, 2|\mathcal{N})$ , построенное в работе [78] под названием  $shsc^\infty(4|\mathcal{N})$  и именуемое  $cu(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  в [81], соответствует  $\star$ -алгебре всех полиномов  $F(a, b, \psi, \bar{\psi})$ , удовлетворяющих условию [79, 80, 81]

$$[N, F]_\star = 0 . \quad (1.77)$$

Таким образом, супералгебра Линецкого–Фрадкина образована  $\star$ -(анти)коммутаторами элементов централизатора  $N$  в  $\star$ -алгебре Вейля–Клиффорда. Вышеупомянутый коммутатор может быть записан как

$$[N, F]_\star = (N_a - N_b + N_\psi - N_{\bar{\psi}})F , \quad (1.78)$$

где  $N_{a,b}$  and  $N_{\psi, \bar{\psi}}$  – операторы Эйлера (1.20), (1.21), (1.33). Тогда условие (1.77) принимает вид

$$(N_a + N_\psi)F = (N_b + N_{\bar{\psi}})F , \quad (1.79)$$

откуда следует, что элемент  $F \in cu(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  зависит от одинакового числа чётных и нечётных переменных с верхними и нижними индексами. Раскладывая элементы  $F(a, b, \psi, \bar{\psi})$  по чётным/нечётным переменным, приходим к выражению (1.29). Из соотношения (1.79) следует, что полное число верхних и нижних индексов в коэффициентах разложения совпадает. Следует заметить, что (1.78) фактически есть сопряжённая реализация Хау-дуального  $gl(1)$  базисного элемента  $Z^0$  (Г.26) через  $\star$ -произведение.

Для выделения вещественной формы комплексной алгебры высших спинов  $cu(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  наложим следующее условие вещественности [81]. Введём инволюцию  $\dagger$ , определяемую соотношениями

$$(a_\alpha)^\dagger = ib^\beta C_{\beta\alpha} , \quad (b^\alpha)^\dagger = iC^{\alpha\beta} a_\beta , \quad (\psi_i)^\dagger = \bar{\psi}^i , \quad (\bar{\psi}^i)^\dagger = \psi_i , \quad (1.80)$$

где  $C_{\alpha\beta}$  и  $C^{\alpha\beta}$  – некоторые вещественные, антисимметричные матрицы, определяющие комплексное сопряжение (1.12), (1.13), ср. (1.36). Инволюция обращает порядок произведения множителей и сопрягает комплексные числа  $(F \star G)^\dagger = G^\dagger \star F^\dagger$ ,  $(\mu F)^\dagger = \mu^* F^\dagger$ ,  $\mu \in \mathbf{C}$ , где  $*$  обозначает комплексное сопряжение. Инволюция  $\dagger$  оставляет инвариантными коммутационные соотношения, определяющие  $\star$ -произведение, (1.72) и удовлетворяет  $(\dagger)^2 = Id$ . Действие инволюции  $\dagger$  канонически расширяется на произвольный элемент  $\star$ -алгебры.

Инволюция  $\dagger$  позволяет определить вещественную форму путем наложением следующего условия

$$F^\dagger = -i^{\pi(F)} F, \quad (1.81)$$

которое задает вещественную супералгебру высших спинов  $cu(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  [81], содержащую  $\mathcal{N}$ -расширенную  $AdS_5$  супералгебру  $su(2, 2|\mathcal{N})$  в качестве максимальной конечномерной подалгебры.

### 1.2.2 Факторизованная супералгебра $hu_0(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$

Супералгебра  $cu(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  не является простой и содержит бесконечно много идеалов  $I_{P(N)}$ , где  $P(N)$  – любой  $\star$ -полином центрального элемента  $N$ , образованный элементами вида  $\{x \in I_{P(N)} : x = P(N) \star F, \quad F \in cu(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)\}$  [79]. Можно рассматривать фактор–супералгебры вида

$$cu(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)/I_{P(N)}. \quad (1.82)$$

В частности, при  $P(N) = N$  возникает максимально факторизованная супералгебра. В работе [81] вещественная форма этой фактор–алгебры, выделяемая при помощи условия (1.81), обозначается как  $hu_0(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$ .

Заметим, что элемент  $N$  является базисным элементом  $P^+$  алгебры  $gl(2)$ , реализованной (1.31) в линейном пространстве супералгебры  $cu(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$ . Следовательно, факторизация  $N \equiv P^+$  оставляет только супербесследовые элементы,

$$P^- F(a, b, \psi, \bar{\psi}) = 0. \quad (1.83)$$

Таким образом, супералгебра  $hu_0(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  образована элементами с супер-бесследовыми коэффициентами разложения в (1.29). Другими словами, представители фактор–супералгебры отождествляются с векторами старшего веса алгебры  $gl(2)$ , ср. (1.35).

Фактор–алгебра также может быть определена при помощи проекционной техники, разработанной в работах [76, 77, 113]. С этой целью вводится некоторый элемент  $\Pi$ , удовлетворяющий условиям

$$\Pi \star N = N \star \Pi = 0, \quad \Pi \star F = F \star \Pi, \quad \forall F \in cu(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8). \quad (1.84)$$

В частности, отсюда следует, что  $\Pi$  есть некоторая функция  $N$ :  $\Pi = M(N)$ . Очевидно, второе условие в (1.84) удовлетворяется, и можно явно проверить, что первое условие (1.84) сводится к следующему дифференциальному уравнению

$$xM''(x) - (\mathcal{N} - 4)M' - 4xM = 0, \quad (1.85)$$

где  $x$  – неопределённая переменная, и  $M'(x)$ ,  $M''(x)$  – производные  $M(x)$ . Для  $\mathcal{N} \neq 4$  это уравнение решается в виде

$$M(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!! (2n + 3 - \mathcal{N})!!} x^{2n}, \quad (1.86)$$

а для случая  $\mathcal{N} = 4$  находим замкнутое выражение  $M(x) = e^{2x}$ . Простая форма  $\Pi$  для  $\mathcal{N} = 4$  возможно обусловлена тем, что  $su(2, 2|\mathcal{N})$  не является простой алгеброй и содержит дополнительный идеал, факторизация по которому даёт простую супералгебру  $psu(2, 2|4)$ . Следовательно, высшеспиновое расширение  $hu_0(8, 8|8)$  также не является простым.

### 1.2.3 Калибровочная супералгебра $su(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$

Процедура калибрования задаёт супералгебру  $su(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  в качестве локальной симметрии в соответствующей теории высших спинов. Будем рассматривать базисные элементы  $e_I$  супералгебры Ли  $su(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  с определёнными чётностями  $\pi(e_I) = 0, 1$ . Тогда можно определить калибровочные связности  $su(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  как 1-формы  $\Omega = dx^\mu \Omega_\mu^I e_I$ . Их чётности совпадают с чётностями базисных элементов,  $\pi(\Omega_\mu^I) = \pi(e_I) = 0, 1$ . Калибровочные преобразования и кривизна определены стандартным образом

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Omega_\nu - \partial_\nu \Omega_\mu + [\Omega_\mu, \Omega_\nu]_\star, \quad (1.87)$$

$$\delta \Omega_\mu = D_\mu \xi \equiv \partial_\mu \xi + [\Omega_\mu, \xi]_\star, \quad \delta R_{\mu\nu} = [R_{\mu\nu}, \xi]_\star. \quad (1.88)$$

Здесь скобки  $[\cdot, \cdot]_\star$  обозначают коммутатор, и предполагается, что базисные элементы  $e_I$  коммутируют с калибровочными связностями. С другой стороны, калибровочные связности коммутируют как

$$\Omega_\mu^I \Omega_\nu^J = (-)^{\pi(e_I)\pi(e_J)} \Omega_\nu^J \Omega_\mu^I, \quad (1.89)$$

в соответствии со спин–статистикой. Таким образом, калибровочные поля супералгебры  $su(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  это 1-формы (1.37), удовлетворяющие

$$\Omega_{\mu \beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} \Omega_{\nu \beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} = (-)^{(m+n)(k+l)} \Omega_{\nu \beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \Omega_{\mu \beta_1 \dots \beta_n}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}. \quad (1.90)$$

Индексы алгебры  $R$ -симметрии неявные. Заметим, что конструкция калибровочной супералгебры  $su(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  включает в себя две взаимно коммутирующие грассмановы алгебры, одна образована калибровочными связностями, другая – самими вспомогательными переменными. Стоит отметить, что при таком определении градуированный коммутатор заменяется на обычный. Так происходит потому, что для супералгебры Ли  $su(2^{\mathcal{N}-1}, 2^{\mathcal{N}-1}|8)$  выбрана грассманова оболочка первого рода [211].

#### 1.2.4 $\mathcal{N} = 2$ супермультиплеты высших спинов

Фиксируем число суперсимметрий  $\mathcal{N} = 2$ . Раскладывая произвольный элемент  $su(2, 2|8)$  по нечётным грассмановым переменным получим

$$\begin{aligned} F = & F_{e_1} + F_{o_{11}}^i \psi_i + F_{o_{12}i} \bar{\psi}^i + F_{e_{21}} (\epsilon^{mn} \psi_m \psi_n) + F_{e_{22}} (\epsilon_{mn} \bar{\psi}^m \bar{\psi}^n) + F_{e_{31}} \psi_k \bar{\psi}^k \\ & + F_{e_{32}i}^j \psi_j \bar{\psi}^i + F_{o_{21}}^i \psi_i (\psi_k \bar{\psi}^k) + F_{o_{22}i} \bar{\psi}^i (\psi_k \bar{\psi}^k) + F_{e_4} (\psi_k \bar{\psi}^k) (\psi_m \bar{\psi}^m). \end{aligned} \quad (1.91)$$

Здесь коэффициенты разложения это  $F_{e,o} = F_{e,o}(a,b)$ , метки  $e$  и  $o$  обозначают бозоны и фермионы, индексы меток нумеруют разные поля супермультиплета. Коэффициенты  $F_{e_{32}j}^i$  бесследовы:  $F_{e_{32}i}^i = 0$ . Поля  $F_{e,o}(a,b)$  необязательно имеют равно число  $a_\alpha$  и  $b^\beta$ :  $(N_a - N_b)F_{e,o}(a,b) = p F_{e,o}(a,b)$ , где  $p = 0, 1, 2$ .

Разложение  $F(a,b)$  по  $a_\alpha$  и  $b^\beta$  дает коэффициенты с ненулевым следом, т.е.  $F_{\beta_1 \dots \beta_m \gamma}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \neq 0$ , которые, в свою очередь, раскладываются на бесследовые компоненты. А именно, для любых фиксированных  $n$  и  $m$ , мультиспинор  $F_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  распадается на набор неприводимых бесследовых компонент  $F'_{\beta_1 \dots \beta_k}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ , со всеми  $k+l \leq m+n$ ,  $k-l = m-n$ ,  $k \geq 0$ ,  $l \geq 0$ .

Из (1.91) следует, что спектр  $su(2, 2|8)$  калибровочных полей представля-

ется следующей суммой (при  $s_2 = 0, \frac{1}{2}$  второй спин для краткости опущен)

$$\begin{aligned} \Omega =: & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=2}^{\infty} D_{[1]}^{(k)}(s) \oplus D_{[2]}^{(k)}\left(s - \frac{1}{2}\right) \oplus D_{[4]}^{(k)}(s - 1) \\ & \oplus D_{[1]}^{(k)}(s - 1, 1) \oplus D_{[2]}^{(k)}\left(s - \frac{3}{2}\right) \oplus D_{[1]}^{(k)}(s - 2), \end{aligned} \quad (1.92)$$

где  $D^{(k)}(s_1, s_2)$  обозначает  $k$ -ю копию спин- $(s_1, s_2)$  унитарного, неприводимого представления  $su(2, 2)$  алгебры (1.3). Числа в квадратных скобках обозначают размерности представлений алгебры  $R$ -симметрии  $u(2)$ . Заметим, что разность между наибольшим и наименьшим спинами в супермультиплете равна 2 и поле с наибольшим спином в супермультиплете всегда бозонное. Используя формулу (1.3) можно явно доказать баланс между бозонными и фермионными степенями свободы.

Рассмотрим, в качестве примера,  $s = 2$  (гравитон) супермультиплет. Он имеет вид  $(2_{[1]}, \frac{3}{2}_{[2]}, 1_{[4]}, (1, 1)_{[1]}, \frac{1}{2}_{[2]}, 0)$ , по модулю бесконечного вырождения. Подчеркнем, что представление  $(1, 1)_{[1]}$  соответствует массивному (а не безмассовому) антисимметричному полю  $B_{\mu\nu}$  [212].  $s = 3$  (гипергравитон) супермультиплет имеет вид  $(3_{[1]}, \frac{5}{2}_{[2]}, 2_{[4]}, (2, 1)_{[1]}, \frac{3}{2}_{[2]}, 1_{[1]})$ . Именно в этом супермультиплете впервые появляются несимметричные поля типа «крюк». Следует отметить, что супермультиплет  $\mathcal{N} = 3$  содержит поля того же спина, что и супермультиплет  $\mathcal{N} = 2$ , но в нём также появляются уже фермионные поля типа «крюк». Поля спина  $(s, 2)$  появляются в супермультиплете  $\mathcal{N} = 4$ . Из (1.78) следует, что значение второго спина ограничено  $s_2 \leq \mathcal{N}/2$ .

### 1.3 Действие FV типа в $AdS_5$ пространстве

Для анализа взаимодействий воспользуемся теорией возмущений, рассматривая динамические поля  $\Omega_1$  как флуктуации на фоновом  $AdS_5$  пространством

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad (1.93)$$

где вакуумные калибровочные поля  $\Omega_0$  удовлетворяют условию нулевой кривизны (1.9). Калибровочные преобразования и нелинейные кривизны даются

формулами (1.87) и (1.88). Т.к.  $R(\Omega_0) = 0$ , то  $R = R_1 + R_2$ , где

$$R_1 = d\Omega_1 + \Omega_0 \star \wedge \Omega_1 + \Omega_1 \star \wedge \Omega_0, \quad R_2 = \Omega_1 \star \wedge \Omega_1. \quad (1.94)$$

Отсюда следует, что линейаризованные кривизны  $R_1$  имеют первый порядок по флуктуациям, а  $R_2$  содержат их квадратичные комбинации. Калибровочные преобразования для полей первого порядка имеют вид

$$\delta\Omega_1 = D_0\xi + [\Omega_1, \xi]_\star, \quad \delta R_1 = [R_1, \xi]_\star. \quad (1.95)$$

Заметим, что самый младший порядок этих калибровочных преобразований имеет вид (1.41), (1.42).

Гравитационные взаимодействия полей высших спинов в кубическом приближении могут быть описаны функционалом действия FV типа

$$S(\Omega) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(R(\Omega), R(\Omega)), \quad (1.96)$$

где  $R(\Omega)$  – 2-формы кривизны, связанные с калибровочными полями супералгебры высших спинов. Величину  $\mathcal{A}(F, G) = \mathcal{A}(G, F)$  удобно считать билинейным симметричным скалярным произведением типа (1.53), определённым для любых 2-форм  $F$  и  $G$ . Важно, что вышеприведённое действие дополнено связями (1.62),

$$\hat{\Upsilon}(R_1) = 0. \quad (1.97)$$

Прежде чем явно строить кубическую теорию для  $AdS_5$  полей высших спинов, полезно рассмотреть общую схему доказательства калибровочной инвариантности вершин FV типа (более детальное обсуждение см. [63, 64, 76, 77]). Калибровочная инвариантность действия может быть достигнута путём задания для полей  $\Omega_1$  подходящего закона преобразований. Действительно, действие можно сделать инвариантным, если потребовать, чтобы  $\Omega_1$  преобразовывалось следующим образом

$$\delta\Omega_1 = D\xi + \Delta(R, \xi), \quad (1.98)$$

где  $\Delta(R, \xi)$  обозначает некоторую  $R$ -зависимую деформацию исходного закона преобразования (1.88), такую, что  $\Delta(0, \xi) = 0$ . Эти деформации являются

т.н. улучшенными диффеоморфизмами, естественно возникающие во всех теориях с динамической гравитацией [213]. В дальнейшем будем обозначать недеформированное преобразование (1.88) как  $\delta^{alg}\Omega_1$ , акцентируя внимание на том, что оно соответствует алгебраическому вкладу супералгебры  $su(2, 2|8)$ .

В рамках теории возмущений действие и калибровочные преобразования задаются разложениями

$$\begin{aligned} S(\Omega_1) &= S_2(\Omega_1) + S_3(\Omega_1) + \dots, \\ \delta\Omega_1 &= \delta_0\Omega_1 + \delta_1\Omega_1 + \dots. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Здесь преобразование нулевого порядка  $\delta_0\Omega_1$  имеет вид (1.41). Поскольку квадратичное действие инвариантно относительно линейризованных преобразований,  $\delta_0 S_2 = 0$ , действие в кубическом приближении остаётся инвариантным относительно деформированных преобразований (1.98) при условии, что выполняется следующее соотношение

$$\delta^{alg}S + \Delta S_2 + \dots = 0, \quad (1.100)$$

где точки обозначают поправки более высокого порядка  $\mathcal{O}(\Omega_1^3\xi)$ . Т.к. квадратичное действие не зависит от экстра полей, а вспомогательные поля выражаются через производные физических полей, можно получить  $\Delta S_2 = (\delta S_2/\delta\omega^0)\Delta\omega^0$ , где  $\omega^0$  обозначает физические поля.<sup>11</sup> Заметим, что  $\delta S_2/\delta\omega^0$  и деформация  $\Delta$  пропорциональны линейризованной кривизне  $R_1$ . Согласно (1.100) деформация исходного калибровочного преобразования (1.98), обеспечивающая калибровочную инвариантность действия в кубическом приближении, действительно существует, если  $\delta^{alg}S$  имеет вид определённой билинейной комбинации кривизн и калибровочного параметра  $\xi$ , т.е.  $\delta^{alg}S \sim R_1 R_1 \xi + \dots$ . Как видно, с точностью до поправок более высокого порядка,  $\delta^{alg}S$  равно нулю, если выполнены уравнения для свободного поля,  $\delta S_2/\delta\omega^0 = 0$ . Используя связи (1.97) и два утверждения **1.1** и **1.2** из предыдущего раздела, можно переформулировать условие калибровочной инвариантности в кубическом приближении следующим образом

$$\delta^{alg}S \Big|_{R_1=C} = 0, \quad (1.101)$$

---

<sup>11</sup>Напомним, что физическое поле  $\omega^0$  является лоренцевым полем  $\omega^t$  (1.49) при  $t = 0$  и для «крюковых» полей соответствует  $\text{Re}\omega^0$ .

где  $C$  – обобщённые тензоры Вейля. В частности, выполнение условия инвариантности (1.101) обеспечивает существование соответствующей деформации  $\Delta$  алгебраических калибровочных законов преобразований физических полей.

Заметим, что алгебраические калибровочные вариации вспомогательных и экстра полей также деформируются, но эти поправки не имеют значения для вариации действия в кубическом приближении. Действительно, вспомогательные и экстра поля дают вклад и в кубическое действие, и в связи (1.97), но, в силу условия отщепления экстра полей, они входят в действие только в виде трilinearных комбинаций  $\Omega_1\Omega_1\Omega_1$ . Кубическое приближение в действии даётся бilinearными комбинациями  $\Omega_1\Omega_1$ . Отсюда немедленно следует, что поправки первого порядка к закону калибровочных преобразований для вспомогательных и экстра полей не дают вклада в калибровочную вариацию действия и достаточно лишь их нулевого порядка. С другой стороны, поскольку линеаризованные кривизны  $R_1$  преобразуются однородно (1.95), калибровочная инвариантность условий (1.97) будет первого порядка по  $\Omega_1$ . Таким образом, для сохранения калибровочной инвариантности связей, нужно деформировать калибровочные преобразования экстра полей при помощи членов, линеарных по  $\Omega_1$ . Однако, они не дают вклада в вариацию действия.

Предыдущее рассмотрение даёт представление об общей схеме достижения калибровочной инвариантности в теориях FV типа. Однако, рассматриваемые пятимерные модели полей высших спинов обладают некоторыми особенностями, такими как суперсимметрия и бесконечное вырождение спектра. Следовательно, действие должно удовлетворять дополнительным условиям.

- *Инвариантность относительно R-симметрии.*  $\mathcal{N} = 2$  расширенная супералгебра  $su(2, 2|8)$  инвариантна относительно глобальных поворотов суперзарядов  $u(2)$  (1.74). Таким образом, соответствующая теория поля также должна быть инвариантна относительно такую глобальную симметрию, называемую R-симметрией.

- *Условие факторизации.* Калибрование супералгебры  $su(2, 2|8)$  задает бесконечный набор копий поля заданного спина. Условие факторизации диагонализует квадратичную часть действия (1.96) таким образом, что разные копии полей с одинаковым спином не смешиваются в квадратичном действии.

- *Условие C-инвариантности.* Действие циклично по отношению к цен-



тральному элементу  $N$  супералгебры  $su(2, 2|8)$ ,

$$\mathcal{A}(N \star F, G) = \mathcal{A}(F, G \star N) , \quad (1.102)$$

где  $F, G$  – элементы  $su(2, 2|8)$ , и потому они коммутируют с  $N$  (1.77).

Ниже рассматривается каждое из этих трех условий. Заметим, что условия факторизации и  $C$ -инвариантности для  $\mathcal{N} = 0, 1$  теорий были сформулированы в работах [76, 77]. Полное действие (1.96) естественным образом распадается на сумму бозонной и фермионной частей,

$$\mathcal{A}(F, G) = \mathcal{B}(F_e, G_e) + \mathcal{F}(F_o, G_o) , \quad (1.103)$$

где индексы  $e$  и  $o$  обозначают бозонные и фермионные компоненты суперполей  $F$  и  $G$  (1.91),  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{F}$  являются, соответственно, бозонным и фермионным действиями.

Фермионная часть является суммой действий двух симметричных фермионов, принимающих значения в  $su(2)$  алгебре,

$$\mathcal{F}(F_o, G_o) = \mathcal{F}_1(F_{o_1}, G_{o_1}) + \mathcal{F}_2(F_{o_2}, G_{o_2}) , \quad (1.104)$$

где

$$\mathcal{F}_1(F_{o_1}, G_{o_1}) = \frac{1}{2} \int \hat{H}_{o_1} \wedge G_{o_{12}i} \wedge F_{o_{11}}^i + \frac{1}{2} \int \hat{H}_{o_1} \wedge F_{o_{12}i} \wedge G_{o_{11}}^i \quad (1.105)$$

$$\mathcal{F}_2(F_{o_2}, G_{o_2}) = \frac{1}{2} \int \hat{H}_{o_2} \wedge G_{o_{22}i} \wedge F_{o_{21}}^i + \frac{1}{2} \int \hat{H}_{o_2} \wedge F_{o_{22}i} \wedge G_{o_{21}}^i . \quad (1.106)$$

Бозонная часть является суммой действия пяти бозонных полей, принимающих значения в  $u(2)$  алгебре,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(F_e, G_e) = & \mathcal{B}_1(F_{e_1}, G_{e_1}) + \mathcal{B}_{31}(F_{e_{31}}, G_{e_{31}}) \\ & + \mathcal{B}_{32}(F_{e_{32}}, G_{e_{32}}) + \mathcal{B}_4(F_{e_4}, G_{e_4}) + \mathcal{B}_2(F_{e_2}, G_{e_2}) , \end{aligned} \quad (1.107)$$

где каждый член определён следующим образом: действия для симметричных полей

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(F_{e_1}, G_{e_1}) &= \int \hat{H}_{e_1} \wedge F_{e_1} \wedge G_{e_1} , & \mathcal{B}_{31}(F_{e_{31}}, G_{e_{31}}) &= \int \hat{H}_{e_{31}} \wedge F_{e_{31}} \wedge G_{e_{31}} , \\ \mathcal{B}_{32}(F_{e_{32}}, G_{e_{32}}) &= \int \hat{H}_{e_{31}} \wedge F_{e_{31}i}^j \wedge G_{e_{31}j}^i , & \mathcal{B}_4(F_{e_4}, G_{e_4}) &= \int \hat{H}_{e_4} \wedge F_{e_4} \wedge G_{e_4} , \end{aligned} \quad (1.108)$$

действия для несимметричных полей

$$\mathcal{B}_2(F_{e_2}, G_{e_2}) = \frac{1}{2} \int \hat{H}_{e_2} \wedge F_{e_{22}} \wedge G_{e_{21}} + \frac{1}{2} \int \hat{H}_{e_2} \wedge G_{e_{22}} \wedge F_{e_{21}} . \quad (1.109)$$

По построению, вышеприведённые действия инвариантны относительно преобразований  $R$ -симметрии из  $u(2)$ . Они имеют вид (1.55), определяемый операторами  $\hat{H}_{e,o} = \hat{H}_{e,o}(E)$  (2.159), которые зависят от динамического гравитационного поля, описываемого репером  $E^{\alpha\beta}$ . Для построения кубического действия воспользуемся следующими анзацами для операторов  $\hat{H}_{e,o} = \hat{H}_{e,o}(E)$ . А именно, выберем часть коэффициентов или их линейных комбинаций равными нулю

$$\beta_e(p, q) = 0 , \quad \zeta_e(p, q) = -\gamma_e(p, q) , \quad (1.110)$$

для бозонных  $s$ -спин полей, и

$$\beta_{e,o}(p, q) = 0 , \quad \gamma_{e,o}(p, q) = 0 , \quad (1.111)$$

для фермионных  $s$ -спин полей и бозонных спин- $(s, 1)$  полей. Такой выбор согласуется с коэффициентами в квадратичном действии (1.59)-(1.61).

Важно подчеркнуть, что описание калибровочных полей как дифференциальных форм и использование компенсаторного механизма, делающего  $su(2, 2)$  симметрию явной, гарантируют, что полное действие (1.103) явно  $su(2, 2)$  ковариантно и инвариантно относительно диффеоморфизмов. Заметим, что к гравитационным полям в полном действии относятся двумя разными способами: как к реперному полю  $E^{\alpha\beta}$ , явно входящему в операторы  $\hat{H}_{e,o} = \hat{H}_{e,o}(E)$ , и как к калибровочной связности  $\Omega^{\alpha\beta}$  для  $su(2, 2) \subset cu(2, 2|8)$ . В результате, калибровочная вариация  $\delta^{alg} S$  полного действия (1.103) включает в себя два типа членов, возникающих из вариации операторов  $\hat{H}_{e,o}(E)$  и кривизн  $R(\Omega_1)$ . Инвариантность первого типа вытекает из  $su(2, 2)$  ковариантности и диффеоморфизм-инвариантности. Инвариантность второго типа приводит к условию (1.101), принимающему следующий вид

$$\mathcal{A}(R_1, [R_1, \xi]_\star) \approx 0 . \quad (1.112)$$

Здесь  $\mathcal{A}$  имеет вид (1.103) и символ  $\approx$  означает, что все линеаризованные кривизны  $R_1$  заменяются обобщёнными тензорами Вейля, согласно утверждениям **1.1** и **1.2**. Калибровочный параметр  $\xi \in cu(2, 2|8)$  произволен.

Данное обсуждение кубического приближения применяется в модели высших спинов с локальной симметрией  $su(2, 2|8)$ , однако такие же методы могут быть применены к редуцированной модели с факторизованной супералгеброй  $hu_0(2, 2|8)$ . Для построения редуцированной модели используется подход, разработанный для  $\mathcal{N} = 0, 1$  моделей [76, 77], состоящий в подстановке проектора  $\Pi$  (1.84) в действие  $su(2, 2|8)$  модели в виде

$$\mathcal{A}(F, G) \rightarrow \mathcal{A}_0(F, G) = \mathcal{A}(F, \Pi \star G), \quad (1.113)$$

где  $\mathcal{A}(F, G)$  имеет вид (1.103). Тогда  $\mathcal{A}_0(F, G)$  определяет действие редуцированной модели. Поскольку проектор  $\Pi(N)$  есть некоторая фиксированная функция от  $N$  (1.86), условие  $C$ -инвариантности гарантирует выполнения соотношения

$$\mathcal{A}(F, \Pi \star G) = \mathcal{A}(F \star \Pi, G), \quad (1.114)$$

так что содержащая  $\Pi$  билинейная форма в действии остаётся симметричной. Идея состоит в том, что все члены из  $F$  и  $G$ , пропорциональные  $N$ , не дают вклада в действие (1.113), которое, тем самым, определено на фактор-алгебре  $hu_0(2, 2|8)$ . Заметим, что  $\mathcal{A}_0(F, G)$  хорошо определено как функционал полиномиальных функций  $F$  и  $G$ , потому что в этом случае лишь конечное число членов в разложении  $\Pi$  по вспомогательным переменным даёт вклад в действие. Явный вид  $\mathcal{N} = 2$  проектора  $\Pi$  см. ниже.

### 1.3.1 Итоговый функционал

В этом разделе перечислены все коэффициенты в функционале действия  $su(2, 2|8)$  модели в кубическом приближении.

- Спин- $(s_1, 0)$  часть имеет вид

$$\alpha_{e_1}(p, q) = 2\gamma_{e_1}(p + q) - \frac{1}{2}\Phi_0 \int_0^1 d\tau \operatorname{Res}_\nu \nu e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu(\tau p + q))} \quad (1.115)$$

$$\gamma_{e_1}(p) = -\zeta_{e_1}(p) = -\frac{\Phi_0}{4} \int_0^1 d\tau \tau \operatorname{Res}_\nu \nu e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu\tau p)}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{e_{31}}(p, q) &= \frac{1}{2}\alpha_{e_1}(p, q) & \gamma_{e_{31}}(p) &= \frac{1}{2}\gamma_{e_1}(p) \\ \alpha_{e_4}(p, q) &= \frac{1}{4}\alpha_{e_1}(p, q) & \gamma_{e_4}(p) &= \frac{1}{4}\gamma_{e_1}(p) \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$\alpha_{e_{32}}(p, q) = 2\gamma_{e_{32}}(p + q) - \frac{1}{8}\Phi_0 \int_0^1 d\tau \operatorname{Res}_\nu \nu e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu(\tau p + q))} \quad (1.117)$$

$$\gamma_{e_{32}}(p) = -\zeta_{e_{32}}(p) = -\frac{\Phi_0}{16} \int_0^1 d\tau \tau \operatorname{Res}_\nu \nu e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu\tau p)}$$

Согласно (1.110):  $\beta_{e_1}(p, q) = \beta_{e_{31}}(p, q) = \beta_{e_{32}}(p, q) = \beta_{e_4}(p, q) = 0$ .

- Спин- $(s_1, 1)$  часть имеет вид

$$\alpha_{e_2}(p, q) = \zeta_{e_2}(p, q) + \frac{\Phi_0}{q} \int_0^1 d\tau \operatorname{Res}_\nu \nu^{-1} e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu(\tau p + q))} \quad (1.118)$$

$$\zeta_{e_2}(p, q) = -\frac{\Phi_0}{q(p + q)} \int_0^1 d\tau \operatorname{Res}_\nu \nu^{-1} e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu\tau(p + q))}$$

Согласно (1.111):  $\beta_{e_2}(p, q) = 0$  и  $\gamma_{e_2}(p, q) = 0$ .

- Спин- $(s_1, \frac{1}{2})$  часть имеет вид

$$\alpha_{o_1}(p, q) = \zeta_{o_1}(p, q) + \frac{\Phi_0}{2q} \int_0^1 d\tau \operatorname{Res}_\nu e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu(p\tau + q))} \quad (1.119)$$

$$\zeta_{o_1}(p, q) = -\frac{\Phi_0}{2q(p + q)} \int_0^1 d\tau \operatorname{Res}_\nu e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu(p + q)\tau)}$$

$$\alpha_{o_2}(p, q) = \frac{1}{4}\alpha_{o_1}(p, q) \quad \zeta_{o_2}(p, q) = \frac{1}{4}\zeta_{o_1}(p, q) \quad (1.120)$$

Согласно (1.111):  $\beta_{o_1}(p, q) = \beta_{o_2}(p, q) = 0$  и  $\gamma_{o_1}(p, q) = \gamma_{o_2}(p, q) = 0$ .

Здесь  $\Phi_0$  – это произвольный общий множитель, выраженный в терминах космологической и гравитационной постоянных.

Действие редуцированной  $hu(2, 2|8)$  модели определяется согласно (1.113), где вид проекционного оператора задан общим выражением (1.86) при  $\mathcal{N} = 2$ :

$$\Pi(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!! (2n + 1)!!} N^{2n}. \quad (1.121)$$

### 1.3.2 Вычисление калибровочной инвариантности

По сравнению с ранее разобранными случаями  $\mathcal{N} = 0, 1$ , новой особенностью случая  $\mathcal{N} = 2$  является появление в спектре теории несимметричных

полей типа «крюк». В этом разделе изучается условие инвариантности (1.112), причём особое внимание уделяется вычислениям с несимметричными полями. Анализ кубических вершин во многом основывается на технике, разработанной в предыдущих работах по  $\mathcal{N} = 0, 1$  теориям FV типа [76, 77]. В частности, здесь не приводятся расчёты для симметричных полей и используются результаты из работ [76, 77].

**Условие факторизации.** Для начала заметим, что по причине наличия (супер)следов  $su(2, 2|8)$  калибровочные поля  $su(2, 2|2)$  супермультиплетов не являются неприводимыми и раскладываются на (супер)бесследовые компоненты (см. предыдущий раздел). Принимая во внимание условие (1.35), назовём калибровочное поле  $\Omega(a, b, \psi, \bar{\psi}|x)$  супербесследовым, если оно удовлетворяет следующему алгебраическому условию

$$P^- \Omega(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = 0, \quad (1.122)$$

где оператор  $P^-$  имеет вид (1.31). Следовательно, использование операторов  $P^-$  и  $P^+$  позволяет разложить любой элемент  $\Omega(a, b, \psi, \bar{\psi}|x)$  супералгебры  $su(2, 2|8)$  на неприводимые  $su(2, 2|2)$  супермультиплеты

$$\Omega(a, b, \psi, \bar{\psi}|x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s_1=2}^{\infty} \chi(k, s_1) (P^+)^k \Omega^{k, s_1}(a, b, \psi, \bar{\psi}|x), \quad (1.123)$$

где  $\chi(k, s_1)$  – произвольные коэффициенты,  $s_1$  обозначает наибольший целый спин в супермультиплете, компоненты  $\Omega^{k, s_1}$  – супербесследовы (1.122). Супербесследовое разложение может быть эквивалентным образом переписано (по модулю переопределения полей) в явном  $su(2, 2)$ -ковариантном виде, со всеми бесследовыми, а не супербесследовыми мультиспинорами,

$$\Omega(a, b|x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s_1=2}^{\infty} v(n, s_1) (T^+)^n \Omega^{n, s_1}(a, b|x), \quad (1.124)$$

где  $v(n, s_1)$  – произвольные коэффициенты и  $\Omega^{n, s_1}(a, b|x)$  описывают  $n$ -ю копию неприводимого поля спина  $(s_1, s_2)$  (1.44). Заметим, что здесь всегда  $s_2 = 0, \frac{1}{2}, 1$ . Разложение, аналогичное (1.124), также верно для кривизн

$$R(a, b|x) = \sum_{n, s_1=0}^{\infty} v(n, s_1) (T^+)^n R^{n, s_1}(a, b|x), \quad (1.125)$$

где  $R^{n,s_1}(a, b|x)$  соответствуют неприводимым полям  $\Omega^{n,s_1}(a, b|x)$ .

Условие факторизации требует от действия следующего вида

$$S_2(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s_1=2}^{\infty} \sum_{s_2} S_2^{n,s_1,s_2}(\Omega^{n,s_1+2,s_2}), \quad (1.126)$$

где  $S_2$  – квадратичная часть действия (1.96),  $S_2^{n,s_1,s_2}$  – квадратичное действие  $n$ -й копии поля заданного спина (напомним, что оно принимает значения в неприводимых представлениях  $u(2)$  алгебры). Условие факторизации диагонализует действие  $S_2$ , т.е. члены, содержащие произведение полей  $\Omega^{n,s_1,s_2}$  и  $\Omega^{m,s_1,s_2}$  с  $n \neq m$  в следовом разложении (1.124) должны отсутствовать. Заметим, что коэффициенты нормировки  $v_n(T^0)$  в разложении (1.124) могут быть выбраны таким образом, что все копии с одинаковым спином в квадратичном действии входят в (1.126) с одним и тем же общим множителем. Условие факторизации для симметричных полей было проанализировано в работах [76, 77]. В этом разделе приводятся вычисления для несимметричных полей.

Из обсуждения выше следует, что условие факторизации для полей спина  $(s_1, 1)$  выполняется, если

$$\mathcal{B}_2(F_{e_2}, T^+ G_{e_2}) = \widetilde{\mathcal{B}}_2(T^- F_{e_2}, G_{e_2}), \quad (1.127)$$

где действие  $\widetilde{\mathcal{B}}_2$  определено для некоторого набора новых параметров  $(\widetilde{\alpha}_{e_2}, \widetilde{\zeta}_{e_2})$ , выраженных через старые параметры  $(\alpha_{e_2}, \zeta_{e_2})$ , см. (2.159) и (1.61). Можно найти, что два действия отличаются на следующий член

$$\int Q_{e_2}(p, q) E_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_{2\alpha} \partial b_2^{\beta}} (c_{12})^2 F_{e_{21}}(a_1, b_1) G_{e_{22}}(a_2, b_2), \quad (1.128)$$

который должен быть равен нулю,

$$Q_{e_2}(p, q) \equiv \left(1 + p \frac{\partial}{\partial p}\right) \alpha_{e_2}(p, q) + \left(1 + q \frac{\partial}{\partial q}\right) \zeta_{e_2}(p, q) = 0. \quad (1.129)$$

Новые коэффициенты выражаются через старые как

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha}_{e_2}(p, q) &= 4 \left( \left(2 + p \frac{\partial}{\partial p}\right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(3 + q \frac{\partial}{\partial q}\right) \frac{\partial}{\partial q} \right) \alpha_{e_2}(p, q), \\ \widetilde{\zeta}_{e_2}(p, q) &= 4 \left( \frac{2}{q} + \left(1 + p \frac{\partial}{\partial p}\right) \frac{\partial}{\partial p} + \left(4 + q \frac{\partial}{\partial q}\right) \frac{\partial}{\partial q} \right) \zeta_{e_2}(p, q). \end{aligned} \quad (1.130)$$

Эти коэффициенты будут подчинены условию  $C$ -инвариантности, см. ниже. Можно показать, что условие факторизации (1.129) и условие отщепления экстра полей (1.54) не противоречат друг другу и общее решение имеет вид (1.61). Аналогичным образом рассматриваются полностью симметричные поля и доказывается, что коэффициенты фиксируются условиями факторизации и отщепления экстра полей в виде (1.59) и (1.60), см. [76, 77].

**Условие  $C$ -инвариантности.** Обсудим условие  $C$ -инвариантности (1.102). Точная формула для произведения  $N \star F$  имеет вид

$$\begin{aligned} N \star F = & (T^+ - T^-)F - F_{e_1} (\psi_k \bar{\psi}^k) - F_{o_{11}}^i \psi_i (\psi_k \bar{\psi}^k) - F_{o_{12}i} \bar{\psi}^i (\psi_k \bar{\psi}^k) \\ & - F_{e_{31}} (\psi_k \bar{\psi}^k) (\psi_m \bar{\psi}^m) - \frac{1}{2} F_{e_{31}} - \frac{1}{4} F_{o_{21}}^i \psi_i - \frac{1}{4} F_{o_{22}i} \bar{\psi}^i - \frac{1}{2} F_{e_4} (\psi_m \bar{\psi}^m), \end{aligned} \quad (1.131)$$

где  $F$  задано выражением (1.91). Из условия  $C$ -инвариантности следует свойство взаимного сопряжения операторов рождения  $T^+$  и уничтожения следа  $T^-$  по отношению к скалярному произведению  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}(T^\pm F, G) = -\mathcal{A}(F, T^\mp G), \quad (1.132)$$

а относительные коэффициенты между разными типами действия фиксируются в виде

$$\mathcal{B}_1 = 2\mathcal{B}_{31}, \quad \mathcal{B}_1 = 4\mathcal{B}_4, \quad \mathcal{F}_1 = 4\mathcal{F}_2. \quad (1.133)$$

В частности, условие (1.132) в секторе несимметричных полей вместе с условием факторизации накладывает дополнительные соотношения на коэффициенты (1.130),

$$\alpha(p, q) + \tilde{\alpha}(p, q) = 0, \quad \zeta(p, q) + \tilde{\zeta}(p, q) = 0. \quad (1.134)$$

Следует заметить, что условие факторизации накладывается только на квадратичное действие, в то время как условие  $C$ -инвариантности может быть наложено также на нелинейном уровне. В частности, видно, что правила сопряжения (1.132) для свободных полей оказывается более сильной версией условия факторизации. Соотношения (1.133) для свободных полей связывают нормировочные константы квадратичных действий разных спинов.

Условие  $C$ -инвариантности также предполагает, что условие инвариантности (1.101) достаточно рассмотреть только для полей, удовлетворяющих

условию бесследовости (1.43). Поскольку кривизны раскладываются на бесследовые компоненты согласно (1.125), выделим члены нулевого порядка в  $T^+$  и обозначим их как

$$\mathcal{R}(a, b|x) \equiv \sum_{s_1=2}^{\infty} \mathcal{R}^{s_1}(a, b|x) . \quad (1.135)$$

По определению, каждый член разложения бесследов,  $T^-\mathcal{R}^{s_1} = 0$ . Напомним, что значение второго спина  $s_2 = 0, \frac{1}{2}, 1$  и  $u(2)$ -индексы присутствуют в этом выражении неявно. Можно явно продемонстрировать, что условие инвариантности (1.101) приводится к виду

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}, [\mathcal{R}, \xi]_{\star}) \approx 0 , \quad (1.136)$$

где  $\approx$  означает, что все линеаризованные кривизны заменяются на обобщёнными тензорами Вейля, согласно утверждениям **1.1** и **1.2**. Доказательство сводится к рассмотрению вариации  $\mathcal{A}(R, [R, \xi]_{\star})$ , в которой кривизны разложены согласно (1.125). Затем, используя формулу

$$T^+ F(a, b) = T^+ \star F(a, b) + (T^- - \frac{1}{2} G^0) F(a, b) , \quad (1.137)$$

где  $T^{\pm}$  и  $G^0$  имеют вид (1.24), (1.25), и условие  $C$ -инвариантности (1.132) шаг за шагом уменьшаем степень  $T^+$ , получая, в итоге, лишь бесследовые кривизны  $\mathcal{R}$  и новый калибровочный параметр  $\xi \rightarrow T^+ \star \xi$ .

**Инвариантность в кубическом порядке.** Калибровочные преобразования супералгебры  $su(2, 2|8)$  определяются калибровочным параметром 0-формой  $\xi = \xi(a, b, \psi, \bar{\psi}|x)$ , разложенным аналогично (1.91),

$$\begin{aligned} \xi = & \xi_{e_1} + \xi_{o_{11}}^i \psi_i + \xi_{o_{12}i} \bar{\psi}^i + \xi_{e_{21}} (\epsilon^{mn} \psi_m \psi_n) + \xi_{e_{22}} (\epsilon_{mn} \bar{\psi}^m \bar{\psi}^n) + \xi_{e_{31}} \psi_k \bar{\psi}^k \\ & + \xi_{e_{32}j}^i \psi_i \bar{\psi}^j + \xi_{o_{21}}^i \psi_i (\psi_k \bar{\psi}^k) + \xi_{o_{22}i} \bar{\psi}^i (\psi_k \bar{\psi}^k) + \xi_{e_4} (\psi_k \bar{\psi}^k) (\psi_m \bar{\psi}^m) . \end{aligned} \quad (1.138)$$

Поскольку кривизны  $R(a, b, \psi, \bar{\psi}|x)$  преобразуются однородно (1.88), компонентная форма  $\delta R(a, b, \psi, \bar{\psi}|x)$  содержит более сотни членов. Далее мы рассмотрим инвариантность относительно каждого типа калибровочных преобразований, связанных с супермультиплетными параметрами (1.138), однако явные вычисления слишком громоздки, чтобы приводить их здесь. Вместо



этого, мы явно проанализируем инвариантность относительно бозонной симметрии, определяемой  $\xi_{e_1}$ , а остальной анализ калибровочной инвариантности обрисован лишь в общих чертах. Явные выражения для калибровочных преобразований приведены в Приложении **A.1**.

Рассмотрим калибровочную инвариантность относительно бозонного параметра  $\xi_{e_1} = \xi_{e_1}(a, b)$  в секторе несимметричных полей. Заметим, что соответствующая симметрия не перемешивает поля разных типов (A.4). (Калибровочную инвариантность в секторе симметричных полей см. [76, 77].) Общий вид вариации действия для несимметричных полей (1.109)

$$\delta\mathcal{B}_2 = \int \hat{H}_{e_2} \delta R_{e_{22}} R_{e_{21}} + \int \hat{H}_{e_2} R_{e_{22}} \delta R_{e_{21}}. \quad (1.139)$$

Подставляя  $\delta R_{e_{21}} = [R_{e_{21}}, \xi_{e_1}]_\star$  и  $\delta R_{e_{22}} = [R_{e_{22}}, \xi_{e_1}]_\star$  из (A.4) получаем

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{B}_2 = & \int \hat{H}_{e_2} (R_{e_{22}} \star \xi_{e_1}) R_{e_{21}} - \int \hat{H}_{e_2} (\xi_{e_1} \star R_{e_{22}}) R_{e_{21}} \\ & + \int \hat{H}_{e_2} R_{e_{22}} (R_{e_{21}} \star \xi_{e_1}) - \int \hat{H}_{e_2} R_{e_{22}} (\xi_{e_1} \star R_{e_{21}}). \end{aligned} \quad (1.140)$$

Для вычисления данной вариации в виде (1.136) положим все следы в  $R_{e_{21}}$  и  $R_{e_{22}}$  равными нулю, и для соответствующих бесследовых компонент воспользуемся представлением через обобщённые тензоры Вейля, ср. (1.69) и (1.70),

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{e_{21}}(a, b) &= \text{Res}_\nu \nu^{-2} e^{\nu^{-1} a_\alpha \frac{\partial}{\partial c_\alpha} + \nu b^\beta \frac{\partial}{\partial c^\beta}} H_2^{\gamma\rho} \frac{\partial^2}{\partial c^\gamma \partial c^\rho} C_{e_{21}}(c) \Big|_{c=0}, \\ \mathcal{R}_{e_{22}}(a, b) &= \text{Res}_\nu \nu^{-2} e^{\nu a_\alpha \frac{\partial}{\partial c_\alpha} + \nu^{-1} b^\beta \frac{\partial}{\partial c^\beta}} H_2^{\gamma\rho} \frac{\partial^2}{\partial c^\gamma \partial c^\rho} C_{e_{22}}(c) \Big|_{c=0}. \end{aligned} \quad (1.141)$$

С точностью до нормировочной константы вариация  $\delta\mathcal{B}_2$  вычисляется в виде,

$$\begin{aligned} & \int H_5 \bar{k}^2 \text{Res}_\nu e^{\frac{1}{2}(\nu \bar{v}_1 - \nu^{-1} \bar{u}_1)} \nu^{-2} (\nu \bar{k} + \bar{u}_2)^2 \Phi(Z) C_{e_{22}}(c_1) C_{e_{21}}(c_2) \xi(a_3, b_3) \\ & - \int H_5 \bar{k}^2 \text{Res}_\nu e^{\frac{1}{2}(-\nu \bar{v}_1 + \nu^{-1} \bar{u}_1)} \nu^{-2} (\nu \bar{k} + \bar{u}_2)^2 \Phi(Z) C_{e_{22}}(c_1) C_{e_{21}}(c_2) \xi(a_3, b_3) + \\ & + \int H_5 \bar{k}^2 \text{Res}_\nu e^{\frac{1}{2}(\nu^{-1} \bar{v}_2 - \nu \bar{u}_2)} \nu^{-2} (\nu \bar{k} + \bar{v}_1)^2 \Phi(Y) C_{e_{22}}(c_1) C_{e_{21}}(c_2) \xi(a_3, b_3) \\ & - \int H_5 \bar{k}^2 \text{Res}_\nu e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} \bar{v}_2 + \nu \bar{u}_2)} \nu^{-2} (\nu \bar{k} + \bar{v}_1)^2 \Phi(Y) C_{e_{22}}(c_1) C_{e_{21}}(c_2) \xi(a_3, b_3), \end{aligned} \quad (1.142)$$

где введены следующие обозначения

$$\bar{k} = \frac{\partial^2}{\partial c_{1\alpha} \partial c_2^\alpha}, \quad \bar{u}_i = \frac{\partial^2}{\partial c_i^\alpha \partial a_{3\alpha}}, \quad \bar{v}_i = \frac{\partial^2}{\partial c_{i\alpha} \partial b_3^\alpha}, \quad (1.143)$$

$$Z \equiv AB = (\nu \bar{k} + \bar{u}_2)(\nu^{-1} \bar{k} - \bar{v}_2), \quad Y \equiv FD = (\nu \bar{k} + \bar{v}_1)(\nu^{-1} \bar{k} - \bar{u}_1), \quad (1.144)$$

а функция  $\Phi(Z)$  имеет вид

$$\Phi(Z) = Z(\alpha_{e_2}(Z, -Z) - \zeta_{e_2}(Z, -Z)). \quad (1.145)$$

Величина  $H_5$  является 5-формой:  $H_5 = h_\alpha^\beta h_\beta^\gamma h_\gamma^\rho h_\rho^\delta h_\delta^\alpha$ . Условие инвариантности (1.136) требует равенства вариации  $\delta \mathcal{B}_2$  нулю. Т.к. в левой части равенства (1.142) можно опустить обобщённые тензора Вейля (в силу их произвольности на массовой поверхности) и  $H_5 \bar{k}^2$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} & \text{Res}_\nu e^{\frac{1}{2}(\nu \bar{v}_1 - \nu^{-1} \bar{u}_1)} \nu^{-2} A^2 \Phi(AB) - \text{Res}_\nu e^{\frac{1}{2}(-\nu \bar{v}_1 + \nu^{-1} \bar{u}_1)} \nu^{-2} A^2 \Phi(AB) \\ & + \text{Res}_\nu e^{\frac{1}{2}(\nu^{-1} \bar{v}_2 - \nu \bar{u}_2)} \nu^{-2} F^2 \Phi(FD) - \text{Res}_\nu e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} \bar{v}_2 + \nu \bar{u}_2)} \nu^{-2} F^2 \Phi(FD) = 0. \end{aligned} \quad (1.146)$$

Определим функцию  $\tilde{\Phi}(A, B) = A^2 \Phi(AB)$ , перепишем данное уравнение как

$$\begin{aligned} & \text{Res}_\nu \nu^{-2} \left( e^{\frac{1}{2}(\nu \bar{v}_1 - \nu^{-1} \bar{u}_1)} \tilde{\Phi}(A, B) - e^{\frac{1}{2}(-\nu \bar{v}_1 + \nu^{-1} \bar{u}_1)} \tilde{\Phi}(A, B) + \right. \\ & \left. e^{\frac{1}{2}(\nu^{-1} \bar{v}_2 - \nu \bar{u}_2)} \tilde{\Phi}(F, D) - e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} \bar{v}_2 + \nu \bar{u}_2)} \tilde{\Phi}(F, D) \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.147)$$

Можно предположить, что функция  $\tilde{\Phi}(A, B) = \Phi_0^{e_2} \text{Res}_\mu (\mu^{-2} e^{\frac{1}{2}(\mu A + \mu^{-1} B)})$ , где  $\Phi_0^{e_2}$  – произвольная константа, является решением вышеприведённого уравнения. Действительно, подставляя эту функцию в (1.147), получим тождество (доказательство см. в работе [160]). Таким образом, функция

$$\Phi(A) = \Phi_0^{e_2} A^{-2} \text{Res}_\mu \left( \mu^{-2} \exp \frac{1}{2} (\mu A + \mu^{-1}) \right), \quad (1.148)$$

где  $A$  – некоторая неопределённая переменная, разрешает условие инвариантности в секторе несимметричных полей. В результате, мы приходим к следующему уравнению на коэффициентные функции

$$A(\alpha(A, -A) - \zeta(A, -A)) = \Phi_0 A^{-2} \text{Res}_\mu \left( \mu^{-2} \exp \frac{1}{2} (\mu A + \mu^{-1}) \right). \quad (1.149)$$

Левая часть этого уравнения не равна нулю при  $A = 0$ , потому что коэффициент  $\zeta(A, -A)$  не обязательно полиномиален и содержит полюса по  $A$ . Напротив, правая часть полиномиальна, но в нулевом порядке по  $A$  в общем случае не равна нулю, так что уравнение непротиворечиво при  $A = 0$ . Несмотря на то, что данное уравнение содержит коэффициенты, являющиеся функциями двух переменных  $p$  и  $q$ , на самом деле оно определяет зависимость лишь от одной переменной. Так происходит потому что уравнение (1.149) содержит функцию одной суммарной переменной  $\rho(p + q)$ , определяющую нормировочные константы квадратичного действия (1.59)-(1.61).

Уравнение (1.149) может быть переписано в удобной интегральной форме

$$\alpha(A, -A) - \zeta(A, -A) = \frac{\Phi_0^{e_2}}{2} A^{-2} \int_0^1 d\tau \text{Res}_\nu \nu^{-1} e^{\frac{1}{2}(\nu^{-1} + \nu\tau A)} . \quad (1.150)$$

Запишем ответ как функцию

$$\rho(p) = -\frac{\Phi_0}{2p} \int_0^1 d\tau \text{Res}_\nu \nu^{-1} e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu\tau p)} . \quad (1.151)$$

Следовательно, коэффициентные функции принимают вид

$$\zeta(p, q) = \frac{\rho(p + q)}{q} , \quad (1.152)$$

$$\alpha(p, q) = \frac{\rho(p + q)}{q} + \frac{\Phi_0}{2q} \int_0^1 d\tau \text{Res}_\nu \nu^{-1} e^{\frac{1}{2}(-\nu^{-1} + \nu(\tau p + q))} . \quad (1.153)$$

Можно в явном виде проверить, что приведенные выше формальные ряды удовлетворяют следующим тождествам

$$\left( p \frac{\partial^2}{\partial p^2} + 3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{4} \right) \rho(p) = 0 , \quad (1.154)$$

$$\left( \left( 2 + p \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial p} + \left( 3 + q \frac{\partial}{\partial q} \right) \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{4} \right) \alpha(p, q) = 0 , \quad (1.155)$$

которые на самом деле являются условиями (1.130), (1.134). Таким образом, видно, что коэффициентные функции для несимметричных полей удовлетворяют условию факторизации, условию  $C$ -инвариантности, условию отщепления экстремальных полей и условию инвариантности (1.136). Можно заключить, что

действие для несимметричных полей хорошо определено как на свободном уровне, так и на уровне взаимодействия (в кубическом приближении).

*Кросс-инвариантность.* Калибровочная инвариантность действий симметричных бозонных и фермионных полей по отношению к параметру по  $\xi_{e_1}(a, b)$  была рассмотрена в работах [76, 77]. Общая особенность вариаций полного действия в разных полевых секторах состоит в том, что коэффициентные функции  $\alpha(p, q)$ ,  $\beta(p, q)$ ,  $\gamma(p, q)$ , и  $\zeta(p, q)$  в (2.159) появляются только в определённых комбинациях, связанных с функциями  $\phi$  вида (1.145); точные выражения собраны в (A.1)-(A.3). Следовательно, рассмотрение калибровочной вариации удобнее проводить в терминах функций  $\Phi(X)$ . Принимая во внимание результаты предыдущих разделов, перечислим функции  $\Phi(X)$  для полей спина  $s_1$  и  $(s_1, 1)$  следующим образом

$$\Phi(X) = \Phi_0 \Psi(X), \quad \Psi(X) = X^{-2s_2} \text{Res}_\nu(\nu^{-2s_2} \exp \frac{1}{2}(\nu^{-1} + \nu X)) , \quad (1.156)$$

где  $X$  – неопределённая переменная, нормировочные константы  $\Phi_0$  произвольны, и  $s_2 = 0, \frac{1}{2}, 1$ . Этот результат даёт понять, что калибровочная инвариантность с параметром  $\xi_{e_1}$  фиксирует все коэффициенты в действиях для каждого конкретного поля из супермультиплетта и оставляет нормировочные константы произвольными. Калибровочная кросс-инвариантность накладывает на них некоторые линейные соотношения, так что все эти константы выражаются через единственную, общую константу нормировки.

Прежде чем обсуждать калибровочную кросс-инвариантность, заметим следующее. Благодаря условию  $C$ -инвариантности, инвариантность по отношению к бозонному параметру  $\xi_{e_1}(a, b)$  гарантирует инвариантность по отношению к бозонным параметрам  $\xi_{e_{31}}(a, b)$  и  $\xi_{e_4}(a, b)$ . Действительно, пусть мы доказали инвариантность действия по отношению к  $\xi_{e_1}$ , т.е., удовлетворили условию (1.101),  $\mathcal{A}(R, [R, \xi_{e_1}]_\star) \approx 0$ . Тогда то же самое верно и для другого элемента  $R' = N \star R = R \star N$  калибровочной супералгебры  $su(2, 2|8)$ , т.е.  $\mathcal{A}(N \star R, [N \star R, \xi_{e_1}]_\star) \approx 0$ . Т.к.  $N$  – это центральный элемент супералгебры  $su(2, 2|8)$ , благодаря условию  $C$ -инвариантности можно получить  $\mathcal{A}(R, [R, N \star N \star \xi_{e_1}]) \approx 0$  для некоторого нового калибровочного параметра  $\zeta = N \star N \star \xi_{e_1}$ . Фактически, параметр  $\zeta$  является комбинацией  $\zeta_{e_1}$ ,  $\zeta_{e_{31}}$ , и  $\zeta_{e_4}$ , выраженной через  $T^+$  и  $T^-$ , действующей на исходный параметр  $\xi_{e_1}$ . Инвариантность по отношению к  $\xi_{e_1}$ ,  $\xi_{e_{31}}$ , и  $\xi_{e_4}$  может быть проверена прямым вычислением: ва-

рирование относительно  $\xi_{e_{31}}$  и  $\xi_{e_4}$  даёт одинаковое соотношение для соответствующих нормировочных констант  $\Phi_0$ , что обеспечивается условием  $C$ -инвариантности (1.133), а также приводит к уравнениям на коэффициентные функции, эквивалентные возникающим из вариации по отношению к  $\xi_{e_1}$ .

Аналогично можно поступить в ситуации с калибровочными преобразованиями с фермионными параметрами  $\xi_{o_1}$  и  $\xi_{o_2}$ . Следовательно, калибровочная инвариантность по отношению к параметру  $\xi_{o_2}$  обеспечивается калибровочной инвариантностью  $\xi_{o_1}$  и условием  $C$ -инвариантности. В результате, оказывается, что достаточно проверить калибровочную инвариантность по отношению к трём бозонным параметрам  $\xi_{e_1}$ ,  $\xi_{e_{21}}$ ,  $\xi_{e_{32}i^j}$  и одному фермионному параметру  $\xi_{o_{11}i}$ . Выражения для этих калибровочных преобразований приводятся в Приложении **A.1**. Инвариантность по отношению к другим калибровочными параметрами обеспечивается условием  $C$ -инвариантности. Фактически, требование калибровочной инвариантности по отношению к вышеуказанным параметрам оставляет лишь четыре независимые нормировочные константы  $\Phi_0$  (1.156) перед действиями  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_{32}$ , и  $\mathcal{F}_1$ . Они обозначаются, соответственно,  $\Phi_0^{e_1}$ ,  $\Phi_0^{e_2}$ ,  $\Phi_0^{e_{32}}$ , и  $\Phi_0^{o_1}$ .

Обсудим теперь калибровочную инвариантность и линейные соотношения на эти четыре нормировочные константы, накладываемые каждым типом калибровочной симметрии. Чтобы найти такие соотношения, нужно использовать следующие равенства на функции  $\Psi_0(X)$ ,  $\Psi_{1/2}(X)$ ,  $\Psi_1(X)$  и их производные с различным значением спина

$$\begin{aligned} X \frac{\partial \Psi_{1/2}(X)}{\partial X} + \Psi_{\frac{1}{2}}(X) &= \frac{1}{2} \Psi_0(X), & \frac{\partial \Psi_0(X)}{\partial X} &= \frac{1}{2} \Psi_{\frac{1}{2}}(X), \\ X \frac{\partial \Psi_1(X)}{\partial X} + 2\Psi_1(X) &= \frac{1}{2} \Psi_{\frac{1}{2}}(X), & \frac{\partial \Psi_{\frac{1}{2}}(X)}{\partial X} &= \frac{1}{2} \Psi_1(X). \end{aligned} \quad (1.157)$$

Обсудим каждый из четырёх типов калибровочной симметрии. Во-первых, рассмотрим симметрию по отношению к параметру  $\xi_{e_{21}} = \xi_{e_{21}}(a, b)$  и сопряжённую к ней. Поскольку это бозонная симметрия, фермионные и бозонные части полного действия (1.103) преобразуются независимо. В фермионном секторе калибровочная симметрия смешивает поля  $\Omega_{o_1}$  и  $\Omega_{o_2}$  (A.5), (A.6), и прямым вычислением получается, что фермионная часть инвариантна при условии, что нормировочные константы соотносятся как  $\mathcal{F}_1 = 4\mathcal{F}_2$ ,

ср. (1.133). В бозонном секторе калибровочная симметрия смешивает четыре поля  $\Omega_{e_1}$ ,  $\Omega_{e_2}$ ,  $\Omega_{e_{31}}$ , и  $\Omega_{e_4}$  (А.7). Вычисляя вариацию соответствующего действия, используя равенства (1.157) и условие  $C$ -инвариантности, можно получить  $\Phi_0^{e_2} = 2\Phi_0^{e_1}$ , а  $\mathcal{B}_{31} = \frac{1}{2}\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_4 = \frac{1}{4}\mathcal{B}_1$ . Следовательно, нормировочные константы в этом секторе полностью фиксированы в терминах  $\Phi_0^{e_1}$ .

Совершенно аналогично рассматривается симметрия по отношению к  $su(2)$ -матричнозначному параметру  $\xi_{e_{32}j}^i = \xi_{e_{32}j}^i(a, b)$ . Т.к. это бозонная симметрия, то фермионные и бозонные полного действия (1.103) преобразуются независимо. В фермионном секторе калибровочная симметрия смешивает поля  $\Omega_{o_1}$  и  $\Omega_{o_2}$  (А.8) и прямым вычислением можно получить, что фермионная часть инвариантна, если нормировочные константы соотносятся как  $\mathcal{F}_1 = 4\mathcal{F}_2$ , ср. (1.133). В бозонном секторе калибровочная симметрия смешивает четыре поля  $\Omega_{e_1}$ ,  $\Omega_{e_{32}j}^i$ , и  $\Omega_{e_4}$  (А.9). Вычисляя соответствующую вариацию, используя равенства (1.157) и условие  $C$ -инвариантности, можно получить  $\Phi_0^{e_{32}} = \frac{1}{4}\Phi_0^{e_1}$ , а  $\mathcal{B}_4 = \frac{1}{4}\mathcal{B}_1$ . Следовательно, нормировочные константы этого сектора полностью фиксированы в терминах  $\Phi_0^{e_1}$ . Также, бозонные коэффициенты однозначно фиксированы и общая нормировочная константа равна  $\Phi_0^{e_1}$ .

Наконец, проанализируем симметрию по отношению к  $su(2)$ -векторнозначному фермионному параметру  $\xi_{o_{11}}^i = \xi_{o_{11}}^i(a, b)$  и ему сопряжённому. Соответствующее калибровочное преобразование суперсимметрично и перемешивает все бозонные поля и все фермионные поля, см. (А.10). Вычисляя соответствующую вариацию, используя равенства (1.157) и условие  $C$ -инвариантности, получим  $\Phi_0^{o_1} = -\Phi_0^{e_1}$ , а  $\mathcal{B}_{31} = \frac{1}{2}\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_4 = \frac{1}{4}\mathcal{B}_1$ , и  $\mathcal{F}_1 = 4\mathcal{F}_2$ , ср. (1.133). Следовательно, все нормировочные константы однозначно фиксированы и выражаются в терминах константы  $\Phi_0^{e_1}$ , обозначенной как

$$\Phi_0 \equiv \Phi_0^{e_1} . \quad (1.158)$$

Конечные выражения для коэффициентных функций собраны в (5.104)-(5.105).

В заключение следует заметить, что построение вершин взаимодействия существенным образом опирается на использование Хау-дуальных пар (супер)алгебр Ли, реализованных на (супер)пространстве вспомогательных переменных. Одним из наиболее важных приложений дуальности Хау здесь является условие  $gl(1)$  инвариантности, именуемое условием  $C$ -инвариантности

действия (1.102). Оно является прямым аналогом  $sp(2)$  инвариантности нелинейных уравнений Васильева для симметричных полей [214]. Действительно,  $N$  – это базисный элемент алгебры  $gl(1)$ , рассматриваемой как алгебра, Хаудуальная к супералгебре  $su(2, 2 | 2)$ , реализованной через  $\star$ -произведение. Тогда условие  $[N, F]_\star = 0$  (1.77) говорит нам, что поля  $gl(1)$ -инвариантны, и эта инвариантность посредством условия  $C$ -инвариантности переносится на функционал действия.

Интересно отметить некоторые направления будущих исследований. Во-первых, следует провести анализ для  $\mathcal{N} > 2$  суперсимметрий, включая, таким образом, несимметричные поля смешанной симметрии с любым спином  $s_2$ , а не только поля типа «крюк» с  $s_2 = 1$ . На данный момент эта задача остается нерешенной. Более важной и сложной задачей можно считать построение нелинейных уравнений движения для несимметричных полей во всех порядках, таким образом расширяя исходные уравнения Васильева [214]. См. недавние работы в этом направлении [87, 86]. В отличие от теорий на массовой поверхности, также имеет смысл рассматривать динамику вне массовой поверхности, т.е. поля высших спинов и их нелинейные симметрии, без наложения полевых уравнений. Было бы интересно разработать нелинейную формулировку для полей смешанного типа симметрии вне массовой поверхности для пространств Минковского и AdS, как это было сделано в случае полностью симметричных полей [215, 216, 217], см. также недавние работы [218, 219]. Также следует изучить расширение нашей модели на старшие измерения  $d > 5$  и рассмотреть теорию FV типа, основанную на алгебре высших спинов  $hu(1|(1, 2) : [M, 2])$  [113], см. работы [84, 85]. Калибрование такой алгебры даёт «крюковые» безмассовые  $AdS_d$  поля, описываемые диаграммами с одной строкой и столбцом произвольного размера (см. также Главу 3).

# Глава 2. Несимметричные поля произвольного спина

В данной главе рассматривается динамика свободных релятивистских полей общего типа симметрии (непрерывный/дискретный спин, масса/энергия, глубина) на пространствах Минковского  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  и анти-де Ситтера  $AdS_d$  и строится производящая формулировка в БРСТ терминах [161, 162, 163].

На сегодняшний день известны несколько способов описания безмассовых несимметричных полей на пространствах постоянной кривизны. Хотя существование соответствующих модулей с произвольными квантовыми числами в пространствах размерности  $d \geq 5$  стало понятным после появления знаменитой классификации Вигнера [220], нахождение ковариантных и калибровочно-инвариантных уравнений, реализующих такие модули на локальных полях было не до конца очевидным. Такие уравнения были предложены Лабастидой гораздо позже [29], а также соответствующий лагранжиан [221] (строгое доказательство того, что поля Лабастиды действительно описывают соответствующие представления малой группы Вигнера для произвольных спинов было дано относительно недавно [37]).

Впоследствии, различными авторами были предложены разные способы теоретико-полевого описания несимметричных представлений, которые выявили множество полезных алгебраических структур и полевых методов (конусное описание, метрическое описание, развернутое описание, на уровне потенциалов/кривизн, (не)вариационные уравнения, и т.д.), см., например, работы [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52]. Однако, все эти формулировки обладают теми или иными недостатками, такими как сложный набор ковариантных полей и ассо-



цированных алгебраических связей, или отсутствием явной калибровочной структуры. Более того, взаимосвязи разных подходов и вопрос динамической эквивалентности как правило требует отдельного изучения (отметим, что случай симметричных полей разобран на данный момент достаточно подробно). Подобные проблемы возникают, как правило, благодаря отсутствию унифицирующих алгебраических структур, лежащих в основе построенных формулировок. Это мотивирует модельно-независимое рассмотрение и использование хорошо разработанных теоретико-представленческих методов, скомбинированных с БРСТ техникой описания сложных калибровочных симметрий и связей. Отчасти, эта проблема решается построением производящей формулировки, описываемой в данной главе.

## 2.1 Поля дискретного спина на $\mathbb{R}^{d-1,1}$

Для решения задачи построения производящей, унифицирующей формулировки динамики полей высших спинов на пространстве  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  будем использовать подход, в рамках которого класс безмассовых представлений алгебры Пуанкаре описывается в терминах Хау дуальных алгебр Ли (см. также обсуждение в Главе 2): алгебры Лоренца  $o(1, d-1)$  и симплектической алгебры  $sp(2n)$ , реализованных на пространствах функций от вспомогательных переменных (здесь параметр  $n-1$  это число строк в диаграмме Юнга, описывающей индексную структуру соответствующего ковариантного поля).

Оказывается, что безмассовые представления Пуанкаре, которые можно реализовать локальными полями, возникают как фактор-пространства пространства полиномов. Это оказывается критически важным, потому что подобная фактор-конструкция реализуется через калибровочную инвариантность теории. С другой стороны, помимо факторизации имеет место выделение подпространств, что отвечает наложение соответствующих алгебраических связей (например, выделение конкретного спинового числа). Важной составляющей здесь автоматически оказывается кохомологическая (БРСТ) техника, которая позволяет перевести такие чисто алгебраические построения на язык калибровочной теории поля. С другой стороны, использование БРСТ методов вводит духовую градуировку, которая позволяет отделить фи-

зические поля (духовое число ноль) среди всех полей БРСТ-расширенной теории, а также отождествить обобщённые вспомогательные поля, обладающие дифференциальными/алгебраическими законами преобразований.

Примечательно, что совокупность этих методов приводит к построению производящей формулировки, позволяющей получать другие эквивалентные формы теории, по аналогии с тем, как метрическая форма гравитации Эйнштейна связана с тетрадным описанием Картана. В частности, таким образом возникает формулировка Лабастиды [29] и развернутая формулировка несимметричных полей [76, 205], между которыми принципами производящей формулировки гарантирована динамическая эквивалентность.

### 2.1.1 Хау–дуальная реализация алгебры Пуанкаре

Начнём с пространства Минковского, алгеброй инфинитезимальных симметрий которого есть алгебра Пуанкаре  $iso(d-1, 1)$ . Обозначим базисные элементы алгебры Пуанкаре как  $P_a$  и  $M_{ab}$  (трансляции и преобразования Лоренца). Предположим, что нас интересуют представления, индуцируемые с конечномерного, неприводимого представления подалгебры Лоренца  $so(d-1, 1)$ . Для этого полезно сначала обсудить подпространства, неприводимые относительно подалгебры Лоренца, которые хорошо описываются приведенной ниже осцилляторной конструкцией.

Введём бозонные (осцилляторные) переменные  $a_I^a$  и  $\bar{a}_b^J$  с индексами двух типов  $a, b = 0, \dots, d-1$ ,  $I, J = 0, \dots, n-1$ , удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям

$$[\bar{a}_a^I, a_J^b] = \delta_J^I \delta_a^b. \quad (2.1)$$

Предполагается, что переменная  $\bar{a}_a^I$  действует как  $\frac{\partial}{\partial a_I^a}$  в пространстве  $\mathcal{P}_n^d(a)$  полиномов по переменным  $a_I^a$ ,

$$\phi(a) = \sum_{m_I} \phi_{a_1 \dots a_{m_0}; \dots; c_1 \dots c_{m_{n-1}}} a_0^{a_1} \dots a_0^{a_{m_0}} \dots a_{n-1}^{c_1} \dots a_{n-1}^{c_{m_{n-1}}}, \quad (2.2)$$

где  $m_I \equiv (m_0, \dots, m_{n-1})$  – произвольные, неотрицательные, целые числа. Вводя метрику Минковского  $\eta_{ab}$ , можно реализовать алгебру Лоренца на про-

пространстве  $\mathcal{P}_n^d(a)$  следующими квадратичными комбинациями

$$M_{ab} = a_{Ia}\bar{a}_b^I - a_{Ib}\bar{a}_a^I. \quad (2.3)$$

Здесь и далее индексы  $a, b$  поднимаются и опускаются при помощи метрики Минковского. Следовательно, коэффициенты разложения (2.2) преобразуются как лоренцевы тензора. Пространство всех полиномов распадается на конечномерные неприводимые модули алгебры Лоренца (для описания всех модулей с целыми спинами в размерности  $d$  нужно принять  $n = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ ).

Полезно изучить структуру пространства  $\mathcal{P}_n^d(a)$  как модуля над ортогональной алгеброй  $so(d-1, 1)$  используя дуальность Хау [209, 208] (ср. обсуждение в Главе 1). Хау-дуальной к алгебре  $so(d-1, 1)$  является алгебра  $sp(2n)$  с базисными элементами вида

$$T_{IJ} = a_I^a a_{Ja}, \quad T_I^J = \frac{1}{2} (a_I^a \bar{a}_a^J + \bar{a}_a^J a_I^a), \quad T^{IJ} = \bar{a}_a^I \bar{a}^{Ja}. \quad (2.4)$$

Их ненулевые коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} [T_I^J, T_K^L] &= \delta_K^J T_I^L - \delta_I^L T_K^J, & [T^{IJ}, T_{KL}] &= \delta_K^I T_L^J + \delta_L^I T_K^J + \delta_K^J T_L^I + \delta_L^J T_K^I, \\ [T_K^L, T_{IJ}] &= \delta_J^L T_{KI} + \delta_I^L T_{KJ}, & [T^{IJ}, T_K^L] &= \delta_K^I T^{JL} + \delta_K^J T^{IL}. \end{aligned}$$

Диагональные элементы  $T_I^I$  образуют базис в подалгебре Картана, а  $T^{IJ}$  и  $T_I^J, I > J$  являются базисными элементами верхнетреугольной подалгебры. Заметим, что алгебра  $gl(n)$  реализуется генераторами  $T_I^J$  как подалгебра  $sp(2n)$ , а ее подалгебра  $sl(n)$  генерируется  $T_I^J$  с  $I \neq J$ .

Конечномерные неприводимые представления алгебры Лоренца в пространстве полиномов  $\mathcal{P}_n^d(a)$  выделяются условием старшего веса дуальной алгебры  $sp(2n)$ , т.е. уничтожаются верхнетреугольной подалгеброй  $sp(2n)$  вместе с условиями на веса относительно подалгебры Картана. Более того, для описания всех конечномерных, неприводимых, лоренцевых представления с целыми спинами, нужно взять  $n \leq \nu$ , где  $\nu = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  есть ранг алгебры Лоренца  $so(d-1, 1)$ . Пусть  $s_I$  – целые числа, такие что  $s_I \geq s_J$  при  $I > J$ . Веса выделяются следующими условиями

$$T_I^I \phi = (s_I + \frac{d}{2}) \phi. \quad (2.5)$$

Далее накладываются условия бесследовости и симметризации Юнга

$$T^{IJ}\phi = 0, \quad T_I^J\phi = 0 \quad I > J. \quad (2.6)$$

Таким образом, получается конечномерное, неприводимое представление алгебры Лоренца, описываемое диаграммой Юнга  $(s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_0)$  (в симметричном базисе, см. рис. 1).

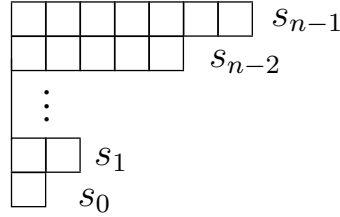


Рис. 1. Модуль  $M_n$ .

Примечательно, что набор осцилляторов (2.1) также позволяет реализовать алгебру Пуанкаре. Для этого следует ослабить часть условий (2.5) и (2.6), что позволяет описать некоторые конечномерные (неразложимые) представления алгебры Пуанкаре. Прежде всего, выберем генераторы Пуанкаре  $P_a$  действующими как «трансляции» для осциллятора с номером  $I$ . Без ограничения общности, полагаем  $I = 0$ , так что

$$P_a = \frac{\partial}{\partial a_0^a}. \quad (2.7)$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:  $a_0 \equiv y$ ,  $a_I \equiv a_i$ ,  $I > 0$  с  $i = 1, \dots, n-1$ . Более того, удобно ввести специальные обозначения для некоторых  $sp(2n)$  генераторов:

$$\begin{aligned} S_i^\dagger &\equiv T_i^0 = a_i^a \frac{\partial}{\partial y^a}, & \bar{S}^{\dagger i} &\equiv T_0^i = y^a \frac{\partial}{\partial a_i^a}, \\ N_i^{j} &\equiv T_i^j = a_i^a \frac{\partial}{\partial a_j^a} \quad i \neq j, & N_i &\equiv T_i^i - \frac{d}{2} = a_i^a \frac{\partial}{\partial a_i^a}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Очевидно, что операторы  $P_a$  коммутируют со всеми условиями неприводимости кроме  $T_0^0\phi = (s_0 + \frac{d}{2})\phi$ . Ослабляя данное весовое условие можно получить (неразложимое) представление алгебры Пуанкаре. Оно конечномерно, т.к. из условия неприводимости  $S_i^\dagger\phi = 0$  следует, что для однородного элемента степень однородности по  $y$  ниже, чем по  $a_i^a$ . Другими словами, оператор

$P_a$  действует на последнюю строку соответствующей диаграммы Юнга путем отрезания на одну клетку, и всё пространство представления составлено из лоренцевых неприводимых представлений, описываемых диаграммами Юнга с нижней строкой длины  $0 \leq s_0 \leq s_1$ . Итак, возникающий модуль Пуанкаре выделяется условиями

$$T^{IJ}\phi = 0, \quad N_i\phi = s_i\phi, \quad N_i^j\phi = 0 \quad i > j, \quad (2.9)$$

$$S_i^\dagger\phi = 0. \quad (2.10)$$

Только что построенный конечномерный модуль Пуанкаре играет важную роль в дальнейшем анализе (будет обозначаться как  $M_n$ , см. рис. 1), однако сейчас нас интересует не он. Действительно, реализованное на локальных полях представление с необходимостью является бесконечномерным. Для получения бесконечномерного модуля, рассмотрим подпространство  $M_0$ , выделенное небольшой модификацией условий неприводимости (2.5) и (2.6). А именно, в дополнение к ослаблению условия  $T_0^0\phi = (s_0 + \frac{d}{2})\phi$ , также перевернем условия симметризации Юнга, содержащие переменную  $y^a \equiv a_0^a$ , так что полный набор условий неприводимости будут иметь вид

$$T^{IJ}\phi = 0, \quad N_i\phi = s_i\phi, \quad N_i^j\phi = 0 \quad i > j, \quad (2.11)$$

$$\bar{S}^{\dagger i}\phi = 0. \quad (2.12)$$

Как показывает последнее условие, для соответствующей диаграммы Юнга это означает перестановку строк перемещением последней строки на самый верх. Итоговый модуль Пуанкаре, обозначаемый в дальнейшем как  $M_0$ , описывается бесконечным набором диаграмм Юнга с бегущим весом  $s_0$ , ограниченным снизу  $s_0 \geq s_{n-1}$ , см. рис. 5.2.

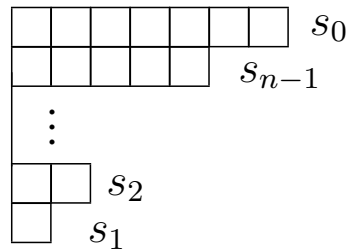


Рис. 2. Модуль  $M_0$ .

Условие (2.12) не коммутирует с  $P_a$ , однако, используя подходящий проектор можно определить действие  $P_a$  в соответствующем подпространстве. Из (2.11) следует, что квадратичный оператор Казимира алгебры Пуанкаре  $C_2 = P^2 = T^{00}$  (см. Приложение Б.1) автоматически равен нулю на модуле  $M_0$ , поэтому  $M_0$  – это безмассовый модуль Пуанкаре. В развернутой формулировке полей Фронсдала соответствующий аналог  $M_0$  называют модулем Вейля.

Происхождение различия между модулем Пуанкаре  $M_n$  (2.9), (2.10) и модулем Пуанкаре  $M_0$  (2.11), (2.12) состоит в том, что они описываются условиями старшего веса относительно двух разных выборов верхнетреугольной подалгебры  $sl(n) \subset sp(2n)$ . Эти подалгебры генерируются наборами базисных элементов  $(N_i^j \ i > j, S_i^\dagger)$  и  $(N_i^j \ i > j, \bar{S}^i)$ , соответственно. Более того, условия неприводимости этих модулей Пуанкаре всегда содержат подалгебру, образованную  $N_i^j \ i > j$ . На самом деле, есть другие варианты выбора верхнетреугольной подалгебры, содержащие  $N_i^j \ i > j$ , которые играют важную роль в дальнейшем анализе, в частности, для установления связи построенной производящей формулировки с развернутым формализмом.

## 2.1.2 БРСТ конструкция производящей формулировки

Оказывается, что подпространство  $M_0$ , выделяемое условиями (2.11) и (2.12), может быть представлено в явно Пуанкаре–инвариантном виде. Идея состоит в рассмотрении  $M_0$  как фактора некоторого Пуанкаре–инвариантного подпространства по Пуанкаре–инвариантному отношению эквивалентности. Действительно, как уже было замечено,  $M_0$  определяется условиями старшего веса (для подходящего выбора порядка весов) алгебры  $sl(n)$ , генерируемой  $N_i^j \ i > j$  вместе с  $\bar{S}^{\dagger i}$  и  $S_i^\dagger$ . Раскладывая пространство  $\mathcal{P}_n^d(a)$  на конечномерные неприводимые  $sl(n)$  компоненты можно найти, что в каждой компоненте единственным элементом, удовлетворяющим  $N_i^j \phi = 0 \ i > j$  и не находящимся в образе никакого оператора  $S_i^\dagger$ , является вектор старшего веса  $\bar{S}^{\dagger i} \phi = 0$ . Поскольку генераторы  $S_i^\dagger$  очевидно коммутируют с  $P_a$ , то приходим к следующему Пуанкаре–инвариантному отношению эквивалентности

$$\phi(y, a) \sim \phi(y, a) + S_i^\dagger \phi^i(y, a) , \quad (2.13)$$

и поэтому представители могут быть отождествлены с элементами, удовлетворяющими условиям (2.12).

**БРСТ оператор.** Полезно реализовать эту конструкцию в БРСТ терминах. Введём фермионные духовые переменные  $\bar{c}^i, b_i, i = 1, \dots, n - 1$ , удовлетворяющие<sup>12</sup>

$$[\bar{c}^i, b_j] = \delta_j^i, \quad \text{gh } \bar{c}^i = 1, \quad \text{gh } b_i = -1, \quad (2.14)$$

где  $\text{gh}$  обозначает духовое число. Эти переменные реализуются на функциях от  $b^i$  как умножение и взятие производной  $\bar{c}^i \phi = \frac{\partial}{\partial b_i} \phi$ . Рассмотрим следующий БРСТ оператор

$$Q = \bar{c}^i S_i^\dagger. \quad (2.15)$$

Т.к. связи образуют абелеву алгебру  $[S_i^\dagger, S_j^\dagger] = 0$ , кубичные по духам члены в БРСТ операторе отсутствуют.

Пространство (2.11) можно отождествить с когомологией оператора  $Q$  в нулевом духовом числе и значениями в пространстве элементов, удовлетворяющих БРСТ-расширенным условиям неприводимости

$$\hat{\mathcal{N}}_i \phi \equiv (N_i + b_i \bar{c}^i) \phi = s_i \phi, \quad \hat{\mathcal{N}}_i^j \phi \equiv (N_i^j + b_i \bar{c}^j) \phi = 0 \quad i > j, \quad T^{IJ} \phi = 0. \quad (2.16)$$

Операторы  $\hat{\mathcal{N}}_i$  и  $\hat{\mathcal{N}}_i^j$  – это БРСТ-инвариантные расширения соответствующих операторов в (2.11), т.е.  $[Q, \hat{\mathcal{N}}_i] = [Q, \hat{\mathcal{N}}_i^j] = 0$ . Как и операторы следа  $T^{IJ}$ , они накладываются непосредственно, поскольку все остальные условия и БРСТ оператор  $Q$  сохраняют подпространство, выделенное условием  $T^{IJ} \phi = 0$ . Легко проверить, что условия (2.16) согласуются друг с другом и  $Q$  действует в подпространстве (2.16). Более того, условия нулевого духового числа (т.е.  $b_i$ -независимые элементы) (2.16) явно совпадают с условиями (2.11).

Поскольку трансляции  $P_a$  и лоренцевы генераторы  $M_{ab}$ , очевидно, коммутируют с  $Q$  и условиями неприводимости (2.16), алгебра Пуанкаре действует в когомологии. В то же время, когомология с нулевым духовым числом состоит из независимых от духов элементов, отфакторизованных по образу оператора  $S_i^\dagger$ , что ведёт к отношению эквивалентности (2.13). Чтобы увидеть, что представители этих классов эквивалентности могут быть выбраны удовлетворяющими  $\bar{S}^i \phi = 0$ , заметим, что для элементов с нулевым духовым числом

<sup>12</sup>Здесь и далее, коммутатор обозначает градуированный коммутатор,  $[f, g] = fg - (-)^{|f||g|}gf$ , где  $|f|$  есть грассманова чётность  $f$ .

условия  $\hat{N}_i^j \phi = 0 \quad i > j$  сводятся к  $N_i^j \phi = 0 \quad i > j$ . Это показывает, что  $Q$ -когомология с нулевым духовым числом совпадает с модулем  $M_0$ .

Примечательно, что  $Q$ -когомология в других духовых числах в общем случае пуста. Она задается условиями старшего веса для других выборов верхнетреугольной подалгебры  $sl(n)$  содержащей  $N_i^j \quad i > j$ . Подробное обсуждение этого явления содержится в разделе 2.1.4.

**Определение калибровочной теории.** Для введения калибровочных симметрий в данном контексте, заменим модуль Пуанкаре  $M_0$  градуированным модулем Пуанкаре  $M$ , содержащим  $M_0$  в нулевом духовом числе, после чего рассмотрим ассоциированную с таким градуированным пространством калибровочную теорию. Фактически, для этого есть всё необходимое, т.к. когомология  $Q$ , задаваемая соотношениями (2.16), это градуированный модуль Пуанкаре, причем  $M_0$  является его подпространством духового числа ноль. Описание модуля Вейля  $M_0$  в терминах БРСТ оператора известно под названием БРСТ-расширенной развернутой формулировки [36, 200, 222]. Ее построение происходит следующим образом. Заменим базисные 1-формы  $dx^a$  грассмановыми нечётными переменными  $\theta^a$  с духовым числом  $\text{gh } \theta^a = 1$  и расширим исходный БРСТ оператор  $Q$  посредством введения нового оператора вида

$$\hat{\Omega} = \nabla + Q, \quad \nabla = \theta^a \left( \frac{\partial}{\partial x^a} - \frac{\partial}{\partial y^a} \right). \quad (2.17)$$

В качестве пространства представления берутся функции от пространственно-временных переменных  $x^a$  со значениями в тензорном произведении  $\hat{\mathcal{H}}$  пространства представления для  $Q$  (т.е. пространства формальных рядов по  $y^a$  и полиномов по  $a_i^a, b_i$ , удовлетворяющих (2.16)) и грассмановой алгебры, генерируемой  $\theta^a$ .

Т.к. БРСТ оператор  $\hat{\Omega}$  действует на функциях с аргументами  $x^a$  и значениями в  $\hat{\mathcal{H}}$ , соответствующая калибровочная теория поля определяется БРСТ дифференциалом  $s$ :  $s\Psi = \hat{\Omega}\Psi$ , где  $\Psi$  есть соответствующее «струнное» поле (данная заимствованная терминология обусловлена аналогичными конструкциями в БРСТ описании теории струн). Более строго, если пространство представления есть пространство функций со значениями в градуированном пространстве  $\hat{\mathcal{H}}$  с базисом  $e_A$ , то «струнное» поле это следующий объект

$$\Psi(x) = \psi^A(x) e_A, \quad \text{gh } \psi^A = -\text{gh } e_A, \quad \partial \psi^A = \partial e_A, \quad (2.18)$$



где  $\psi^A$  есть поля (включая духовые, антиполя и т.д.), соответствующей свободной теории поля, определяемой  $s$ . Заметим, что  $\text{gh } \Psi = 0$ . Соотношение  $s\Psi = \hat{\Omega}\Psi$  действительно определяет действие дифференциала  $s$  на поля  $\psi^A$ . Это действие расширяется на пространственно–временные производные  $\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_k} \psi^A$  посредством  $[s, \frac{\partial}{\partial x^a}] = 0$  и, таким образом, на локальные функции (функции полей и их производных).

Полезно разложить «струнное» поле согласно духовому числу полей  $\psi^A$  как  $\Psi = \sum_k \Psi^{(k)}$ , где  $\Psi^{(k)} = \psi^{A_k} e_{A_k}$ ,  $\text{gh } \psi^{A_k} = k$ . Входящие в  $\Psi^{(0)}$  поля являются физическими. Калибровочные параметры ассоциированы с компонентами  $\Psi^{(1)}$ . Калибровочные параметры следующего уровня приводимости ассоциированы с  $\Psi^{(2)}$ , и т.д. Уравнения движения имеют вид

$$\hat{\Omega}\Psi^{(0)} = 0, \quad \delta\Psi^{(0)} = \hat{\Omega}\Psi^{(1)}, \quad \delta\Psi^{(1)} = \hat{\Omega}\Psi^{(2)}, \quad \dots, \quad (2.19)$$

где в определении калибровочных преобразований и соотношений приводимости нужно заменить духовые поля калибровочными параметрами соответствующего поколения приводимости:  $\Psi^{(0)}$  отождествляется с общим элементом нулевого духового числа из пространства функций со значениями в  $\hat{\mathcal{H}}$ , калибровочные параметры поколения приводимости  $l$  отождествляются с функциями со значениями в  $\hat{\mathcal{H}}$  духового числа  $-l + 1$ . Например, в этих терминах калибровочное преобразование принимает привычную форму  $\delta\Psi^{(0)} = \hat{\Omega}\xi^{(-1)}$ , где  $\xi^{(-1)}$  с  $\text{gh } \xi^{(-1)} = -1$  – это калибровочный параметр.

**Производящая формулировка.** Дадим явное описание полей, уравнений движения и калибровочных симметрий теории, определяемой  $\hat{\Omega}$  и  $\hat{\mathcal{H}}$ . Введём компоненты «струнного» поля с нулевым духовым числом

$$\Psi^{(0)} = \psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_{n-1}, \quad \psi_p = \psi_{a_1 \dots a_p}^{i_1 \dots i_p}(x; y, a) b_{i_1} \dots b_{i_p} \theta^{a_1} \dots \theta^{a_p}. \quad (2.20)$$

Поля  $\psi_p$  отождествляются с дифференциальными  $p$ -формами на  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ , принимающими значения в пространстве полиномов по  $y^a, a_i^a$  и духам  $b_i$ , подчиненных условиям (2.16). Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla\psi_0 + S_i^\dagger \frac{\partial}{\partial b_i} \psi_1 &= 0, \\ \nabla\psi_1 + S_i^\dagger \frac{\partial}{\partial b_i} \psi_2 &= 0, \\ &\dots \\ \nabla\psi_{n-1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Калибровочные параметры отвечают полям с духовым числом единица, входящим в  $\Psi^{(1)}$ , которые можно представить как

$$\xi^{(-1)} = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1}, \quad \xi_p = \xi_{a_1 \dots a_{p-1}}^{i_1 \dots i_p}(x; a, y) b_{i_1} \dots b_{i_p} \theta^{a_1} \dots \theta^{a_{p-1}}. \quad (2.22)$$

Например, калибровочный параметр  $\xi_1 = \xi^i b_i$  – это 0-форма. Калибровочные преобразования имеют вид

$$\delta_\xi \psi_0 = S_i^\dagger \frac{\partial}{\partial b_i} \xi_1, \quad \delta_\xi \psi_1 = \nabla \xi_1 + S_i^\dagger \frac{\partial}{\partial b_i} \xi_2, \quad (2.23)$$

$$\delta_\xi \psi_2 = \nabla \xi_2 + S_i^\dagger \frac{\partial}{\partial b_i} \xi_3, \quad \dots, \quad \delta_\xi \psi_{n-1} = \nabla \xi_{n-1}.$$

Подобным образом можно записать калибровочные параметры поколения  $l$ , ассоциированные с полями духового числа  $l+1$ . Заметим, что в общем случае есть поля с духовым числом вплоть до  $n-1$ , так что в теории присутствуют соотношения приводимости поколения до  $n-2$ . Очевидно, что калибровочные параметры поколения  $l$  это дифференциальные  $p$ -формы с  $p \leq n-3$ .

БРСТ теория, задаваемая уравнениями и симметриями

$$\hat{\Omega} \Psi^{(0)} = 0, \quad \delta_\xi \Psi^{(0)} = \hat{\Omega} \xi^{(-1)}, \quad \dots, \quad \hat{\Omega} = \nabla + Q \quad (2.24)$$

является естественным расширением БРСТ описания полей Фронсдала работ [36, 200] на случай несимметричных полей. Уравнения (2.24) определяют калибровочную теорию  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  полей высших спинов смешанного типа симметрии, которая в данной диссертации будет называться производящей формулировкой. Ниже будет показано, что исключением обобщённых вспомогательных полей такая теория приводится к явно лагранжевой форме, что даёт уравнения движения Лабастиды [29, 221] (см. раздел **2.1.3**). Более того, исключение другого набора обобщённых вспомогательных полей приводит к развернутой форме теории [76, 205] (см. раздел **2.1.4**).

**Парент–формулировка.** Имея определяемую  $\hat{\Omega}$  теорию (2.24), можно легко избавиться от переменных  $y^a$ ,  $\theta^a$  и получить стандартное первично-квантованное БРСТ описание. Однако, это возможно, только если среди связей, наложенных на поле  $\Psi$ , нет содержащих  $\frac{\partial}{\partial y^a}$ , потому что такие связи становятся дифференциальными по  $x^a$  после исключения  $y^a$ . В нашем случае,  $\Psi$  принимает значения в ядре следующих операторов,

$$\square_y \equiv T^{00} = \frac{\partial}{\partial y_a} \frac{\partial}{\partial y^a}, \quad S^i \equiv T^{i0} = \frac{\partial}{\partial a_{ia}} \frac{\partial}{\partial y^a}, \quad (2.25)$$

которые задают связи (2.16) с производными  $\frac{\partial}{\partial y^a}$ .

Выход состоит в наложении данных связей через БРСТ процедуру. Для этого введем грассманы нечётные духовые переменные  $c_0, \bar{b}^0, c_i, \bar{b}^i$ , удовлетворяющие

$$[\bar{b}^0, c_0] = 1, \quad [\bar{b}^i, c_j] = \delta_j^i, \quad \text{gh } c_i = \text{gh } c_0 = 1, \quad \text{gh } \bar{b}^i = \text{gh } \bar{b}^0 = -1, \quad (2.26)$$

и представленные на полиномах от  $c_0, c_i$ , так, что  $\bar{b}^i \phi = \frac{\partial}{\partial c^i} \phi$  и  $\bar{b}^0 \phi = \frac{\partial}{\partial c^0} \phi$ . Расширенный БРСТ оператор имеет вид

$$\Omega^{\text{parent}} = \theta^a \left( \frac{\partial}{\partial x^a} - \frac{\partial}{\partial y^a} \right) + c_0 \square_y + c_i S^i + S_i^\dagger \frac{\partial}{\partial b_i} - c_i \frac{\partial}{\partial b_i} \frac{\partial}{\partial c_0}. \quad (2.27)$$

В качестве пространства представления берется пространство функций от  $x^a$  со значениями в  $\mathcal{H}^{\text{parent}}$ , где  $\mathcal{H}^{\text{parent}}$  есть тензорное произведение грассмановой алгебры по  $\theta^a$  с полиномами по  $y, a_i$  и духам  $c_0, c_i, b_i$ , на которые действует соответствующая модификация связей  $T^{ij}$ ,  $\hat{\mathcal{N}}_i^j$   $i > j$ ,  $\hat{\mathcal{N}}_i - s_i$ . Точнее, эти связи модифицируются духовыми вкладами, необходимыми для БРСТ-инвариантности относительно расширенного БРСТ оператора (2.27). Они имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{ij} &= \eta^{mn} \frac{\partial}{\partial a_i^m} \frac{\partial}{\partial a_j^n} + \frac{\partial}{\partial c_i} \frac{\partial}{\partial b_j} + \frac{\partial}{\partial c_j} \frac{\partial}{\partial b_i}, & \mathcal{N}_i^j &= a_i^a \frac{\partial}{\partial a_j^a} + c_i \frac{\partial}{\partial c_j} + b_i \frac{\partial}{\partial b_j}, \\ \mathcal{N}_i &= a_i^a \frac{\partial}{\partial a_i^a} + c_i \frac{\partial}{\partial c_i} + b_i \frac{\partial}{\partial b_i} \quad (\text{без суммирования по } i). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Производная  $\frac{\partial}{\partial y^a}$  действительно не входит в эти соотношения. Заметим также, что данные выражения являются БРСТ-расширенными генераторами верхнетреугольной подалгебры и элементов Картана алгебры  $sp(2n-2) \subset sp(2n)$ , Хау-дуальной к алгебре Лоренца, действующей на пространстве переменных  $a_i^a$ . Существенным для нас является следующее

**Утверждение 2.1.** Системы  $(\Omega^{\text{parent}}, \mathcal{H}^{\text{parent}})$  и  $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{H}})$  эквивалентны.

Доказательство приведено в [161]. Система  $(\Omega^{\text{parent}}, \mathcal{H}^{\text{parent}})$  задает т.н. парент-формулировку.

**Триpletная формулировка.** Поскольку связи (2.28), определяющие пространство представления системы  $(\Omega^{\text{parent}}, \mathcal{H}^{\text{parent}})$ , являются алгебраическими (т.е. не включают  $\frac{\partial}{\partial y^a}$ ), исключение переменных  $y^a, \theta^a$  становится очевидным и сводится к опусканию первого члена (с  $\theta^a$ ) и замене  $\frac{\partial}{\partial y^a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^a}$  в

оставшихся. Это можно видеть высаживая теорию в когомологии оператора де Рама  $\theta^a \frac{\partial}{\partial y^a}$  и вычисляя редуцированный БРСТ оператор [36] (краткий обзор метода гомологической редукции приведен в Приложении **Б.2**, этот метод систематически используется во всей Главе **2**). Таким образом, приходим к теории, определённой следующим БРСТ оператором

$$\Omega = c_0 \square + c_i \mathcal{S}^i + \mathcal{S}_i^\dagger \frac{\partial}{\partial b_i} - c_i \frac{\partial}{\partial b_i} \frac{\partial}{\partial c_0}, \quad (2.29)$$

где связи имеют вид

$$\square = \eta^{ab} \frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^b}, \quad \mathcal{S}_i^\dagger = a_i^a \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad \mathcal{S}^i = \frac{\partial}{\partial a_i^a} \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad (2.30)$$

и удовлетворяют следующей алгебре

$$[\square, \mathcal{S}_i] = [\square, \mathcal{S}_i^\dagger] = 0, \quad [\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j^\dagger] = \delta_{ij} \square, \quad [\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j] = [\mathcal{S}_i^\dagger, \mathcal{S}_j^\dagger] = 0. \quad (2.31)$$

Пространство представления даётся  $\mathcal{H}$ -значными функциями от  $x^a$ , где  $\mathcal{H}$  есть пространство полиномов по  $a_i$  и духам  $c_0, c_i, b_i$ , удовлетворяющим

$$\mathcal{T}^{ij} \phi = 0, \quad \mathcal{N}_i^j \phi = 0 \quad i > j, \quad \mathcal{N}_i \phi = s_i \phi, \quad (2.32)$$

где БРСТ-инвариантные ограничения  $\mathcal{T}^{ij}, \mathcal{N}_i^j$  и  $\mathcal{N}_i$  определены в (2.28). Таким образом, имеем следующее

**Утверждение 2.2.** Система  $(\Omega, \mathcal{H})$  эквивалентна  $(\Omega^{\text{parent}}, \mathcal{H}^{\text{parent}})$  и, таким образом, системе  $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{H}})$ .

Как будет видно в дальнейшем, система  $(\Omega, \mathcal{H})$  задаёт лагранжево описание несимметричных  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  полей и обычно называется триплетной формулировкой. В частности, будет явно показано, что подходящая редукция этой теории даёт формулировку Лабастиды [29, 221]. Также, в работе [161] показано, что: (1) парент-теория (2.27) (как и эквивалентная формулировка (2.24)) содержит развернутую формулировку несимметричных полей на  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  [76, 205], (2) система  $(\Omega, \mathcal{H})$  описывает унитарное неприводимое безмассовое  $m = 0$  представление со спинами  $s_{n-1}, \dots, s_1$ .

**Лагранжево описание.** Существует также альтернативная мотивация наложения связей  $\mathcal{S}^i$  и  $\square$  (2.25) посредством БРСТ оператора. А именно, оказывается, что оператор (2.29) симметричен относительно скалярного произведения вида

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int d^d x \int dc_0 \langle \phi, \psi \rangle_0, \quad (2.33)$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  – стандартное скалярное произведение в пространстве полиномов от  $c_i, b^i, a_i^a$ , тождественного пространству Фока, порожденному действием осцилляторов  $c_i, b^i, a_i^a$  на вакуумное состояние  $\omega$ , определенного как  $\bar{a}\omega = \bar{c}\omega = \bar{b}\omega = 0$ . В наших обозначениях правила сопряжения имеют вид

$$(a_i^a)^\dagger = \bar{a}_i^a, \quad (b_i)^\dagger = -\bar{b}^i, \quad (c_i)^\dagger = \bar{c}^i, \quad (2.34)$$

где пространственно–временные и внутренние индексы поднимаются и опускаются метрикой Минковского  $\eta_{ab}$  и стандартной евклидовой метрикой  $\delta_{ij}$  во внутреннем пространстве. Скалярное произведение (2.34) имеет духовое число  $-1$ , т.е.  $\langle \phi, \psi \rangle = 0$  для любых  $\phi, \psi$ , таких что  $\text{gh } \phi + \text{gh } \psi \neq 1$ . Имея невырожденное скалярное произведение с духовым числом  $-1$  и симметричный нильпотентный БРСТ оператор можно построить действие

$$S = \frac{1}{2} \langle \Psi^{(0)}, \Omega \Psi^{(0)} \rangle, \quad (2.35)$$

которое определяет уравнения движения  $\Omega \Psi^{(0)} = 0$ .

Чтобы связать эти рассуждения с имеющейся литературой и подчеркнуть квантово–механическую интерпретацию системы, сформулируем в общих чертах систему со связями, БРСТ оператор которой даётся  $\Omega$ . Переменные выберем следующим образом. Пространственно–временные переменные  $x^m, p_n$  удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям и правилам сопряжения

$$[p_m, x^n] = -\delta_m^n, \quad (x^m)^\dagger = x^m, \quad p_n^\dagger = -p_n. \quad (2.36)$$

Внутренние (спиновые) переменные (осцилляторы) удовлетворяют

$$[\bar{a}_i^m, a_j^n] = \delta_{ij} \eta^{mn}, \quad (a_i^m)^\dagger = \bar{a}_i^m \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.37)$$

Связи имеют вид<sup>13</sup>

$$\square, \quad \mathcal{S}_i^\dagger, \quad \mathcal{S}^i, \quad (2.38)$$

$$T^{ij}, \quad N_i^j \quad i > j, \quad N_i - s_i. \quad (2.39)$$

Первая строка (2.38) содержит связи с пространственно–временными производными, данные связи также образуют подалгебру (2.31). Вторая строка (2.39) образует подалгебру  $sp(2n-2) \subset sp(2n)$ , которая не действует на

<sup>13</sup>Аналогичные связи обсуждаются в [223] в контексте теорий на пространствах постоянной кривизны.

пространственно–временные переменные  $x^a$ .<sup>14</sup> Все вместе эти связи образуют верхнетреугольную подалгебру в  $sp(2n)$  вместе с  $n - 1$  элементами Картана (весовыми условиями для спиновых осцилляторов).

Квантовая система со связями первого рода определяется наложением первой строки посредством БРСТ оператора с использованием духовых переменных  $\bar{b}^0, c_0, \bar{b}^i, c_i$  и  $\bar{c}^i, b_i$ , при наложении БРСТ-расширенных связей из второй строки прямо в пространстве представления. БРСТ оператор этой системы имеет вид  $\Omega$  из (2.29). Соответствующее пространство представления  $\mathcal{H}$  выделяется условиями (2.32), которые являются БРСТ-расширенными связями (2.39).

Важно заметить, что можно рассматривать теорию, определённую действием (5.45), где  $\Psi^{(0)}$  не обязано удовлетворять связями (2.39). Такая теория описывает прямую сумму неприводимых полей, где каждое поле входит в теорию с некоторой (в общем случае, бесконечной) кратностью. С ослабленными связями (2.39), действие (5.45) известно в литературе и может быть отождествлено с подходящим транкированием лагранжиана бозонной полевой теории струн в пределе нулевого натяжения [166, 54].

### 2.1.3 Связь с формулировкой Лабастиды

В этом разделе анализируется динамическое содержание теории, определённой БРСТ оператором  $\Omega$  триплетной формулировки (2.29). Явно доказывается, что уравнения движения для несимметричных полей, задаваемые БРСТ оператором  $\Omega$ , совпадают с уравнениями Лабастиды [29, 221].

Сперва перечислим основные особенности уравнений Лабастиды, сформулированных для одного несимметричного поля  $\varphi = \varphi(a, x)$ , диаграмма Юнга которого содержит  $n - 1$  строк. Кинетический оператор  $L$  имеет вид

$$L = \square - D_i^\dagger D^i + \frac{1}{2} D_i^\dagger D_j^\dagger T^{ij}, \quad (2.40)$$

где введены дифференциальные операторы  $D_i^\dagger = a_i^a \frac{\partial}{\partial x^a}$  и  $D^i = \bar{a}_a^i \frac{\partial}{\partial x^a}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ , и оператор взятия следа  $T^{ij}$  определен в (2.4). Оператор  $L$  ком-

<sup>14</sup>В случае  $n = 3$ , т.е. для ковариантных несимметричных полей с двумя строками, эта алгебра  $sp(4)$  была рассмотрена в [31].

мутирует с симметризаторами Юнга  $N_i^j$  (2.8). Поля  $\varphi$  удовлетворяют следующему следовому условию

$$T^{(ij}T^{kl)}\varphi = 0 , \quad (2.41)$$

которое выделяет дважды бесследовые поля. Уравнения движения Лабастиды  $L\varphi = 0$  инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\delta\varphi = D_i^\dagger\Lambda^i , \quad (2.42)$$

при условии, что параметры подчинены соотношениям

$$T^{(ij}\Lambda^{k)} = 0 . \quad (2.43)$$

Подчеркнём, что в общем случае параметр  $\Lambda^i$  для данного индекса  $i$  не удовлетворяет условиям симметрии Юнга. Тем не менее, параметры для разных  $i$  и  $j$  связаны последовательностью симметризаций. Подобные соотношения можно легко получить из (2.42) требованием того, чтоб левая часть удовлетворяла симметрии Юнга. Оказывается, что реализация пространства калибровочных параметров тензорами  $\Lambda^i$ , не удовлетворяющими условиям симметрии Юнга, позволяют записать калибровочное преобразование в значительно более простой форме нежели посредством явного использования проекторов на подпространства тензоров с симметрией Юнга.

Представим «струнные» поля  $\Psi \equiv \Psi(a, b, c|x)$  следующим образом

$$\Psi = \Psi_1 + c_0\Psi_2 . \quad (2.44)$$

Для компоненты с нулевым духовым числом  $\Psi^{(0)}$  поля  $\Psi_1^{(0)} \equiv \Phi$  и  $\Psi_2^{(0)} \equiv C$  представимы в виде следующих разложений по духовым переменным

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{k=0}^{n-1} c_{i_1} \cdots c_{i_k} b_{j_1} \cdots b_{j_k} \Phi^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k} , \\ C &= \sum_{k=0}^{n-2} c_{i_1} \cdots c_{i_k} b_{j_1} \cdots b_{j_{k+1}} C^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_{k+1}} . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Коэффициенты  $\Phi^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k}(a, x)$  и  $C^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_{k+1}}(a, x)$  являются  $gl(n-1)$  тензорами, антисимметричными по каждой группе индексов, а символ  $|$  означает, что между двумя группами индексов не предполагается никакой симметрии.

Далее будем использовать обозначение  $\varphi$  для  $k = 0$  компоненты  $\Phi$ . Отметим, что компонентные поля  $\Phi^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k}$  и  $C^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_{k+1}}$  рассматривались в работе [166]; это обобщение так называемого триплета, введенного А. Бенгтссоном в работе [165] в контексте симметричных полей.

Наша цель состоит в нахождении минимального набора полей, ковариантно описывающего поля заданного спина. Этот результат достигается в два шага. Сначала избавляемся от всех обобщённых вспомогательных полей в формулировке с оператором  $\Omega$ . Затем подчиним «струнное» поле  $\Psi^{(0)}$  оставшимся условиям неприводимости (не вошедшим через БРСТ оператор), а именно, симметризатору Юнга, следовым и весовым условиям.

Воспользуемся методом гомологической редукции и разложим БРСТ оператор по степеням однородности переменной  $c_0$  следующим образом

$$\Omega = \Omega_{-1} + \Omega_0 + \Omega_1, \quad (2.46)$$

где три вклада имеют вид

$$\Omega_{-1} = -c_i \frac{\partial}{\partial b_i} \frac{\partial}{\partial c_0}, \quad \Omega_0 = c_i \mathcal{S}^i + \mathcal{S}_i^\dagger \frac{\partial}{\partial b_i}, \quad \Omega_1 = c_0 \square. \quad (2.47)$$

Компонента  $\Omega_{-1}$  наименьшей степени однородности чисто алгебраическая и поэтому все поля, не принадлежащие когомологии оператора  $\Omega_{-1}$ , являются обобщёнными вспомогательными полями (см. Приложение **Б.2**).

Для нахождения когомологии оператора  $\Omega_{-1}$ , заметим, что её можно представить в форме

$$\Omega_{-1} = -Z_+ \frac{\partial}{\partial c_0}, \quad (2.48)$$

где  $Z_+$  есть генератор алгебры  $sl(2)$ , реализованный на духовых полях (см. Приложение **Б.1**). Отсылая читателя за подробностями к работе [161], приведем здесь окончательный результат.

- Для положительных значений духового числа  $+m$ ,  $0 \leq m \leq n - 1$  когомология  $H^m$  задаётся элементами  $\phi_1 = 0$  и  $Z_+ \phi_2 = 0$ . Это означает, что «струнное» поле  $\Psi^{(-m)}$  принимает следующий вид

$$\Psi^{(-m)} = \Psi_2^{(-m)} = \sum_{k=0}^{n-m-2} c_{i_1} \dots c_{i_{k+m}} b_{j_1} \dots b_{j_{k+1}} \Psi_2^{i_1 \dots i_{k+m}, j_1 \dots j_{k+1}}, \quad (2.49)$$



где все компоненты  $\Psi_2^{i_1 \dots i_{k+m}, j_1 \dots j_{k+1}}$  это  $gl(n-1)$  диаграммы Юнга со столбцами длины  $k+m$  и  $k+1$ .

- Для отрицательных значений духового числа  $-m$ ,  $0 \leq m \leq n-1$ , когомология  $H^{-m}$  даётся элементами с  $\phi_2 = 0$  и  $Z_- \phi_1 = 0$ , так что струнное поле имеет вид

$$\Psi_1^{(m)} = \sum_{k=0}^{n-m-1} c_{i_1} \dots c_{i_k} b_{j_1} \dots b_{j_{k+m}} \Psi_1^{j_1 \dots j_{k+m}, i_1 \dots i_k}, \quad (2.50)$$

где все компоненты  $\Psi_1^{j_1 \dots j_{k+m}, i_1 \dots i_k}$  это  $gl(n-1)$  диаграммы Юнга со столбцами длины  $k+m$  и  $k$ . Коэффициенты разложения  $\Psi_1^{(m)}$  тождественны динамическим полям (при  $m=0$ ) и духовым полям уровня приводимости  $(m-1)$  (при  $m \neq 0$ ), связанными с соответствующими калибровочными параметрами.

Напомним, что для описания когомологии в подпространстве необходимо наложить алгебраические условия (2.32). Проанализируем их для представителей когомологии  $\Omega_{-1}$ . Представляя «струнное» поле в виде  $\Psi = \Psi_1 + c_0 \Psi_2$ , получим БРСТ-расширенное ограничение на след (2.28)

$$(T^{ml} + Y^{ml})(\Psi_1 + c_0 \Psi_2) = 0, \quad (2.51)$$

где духовый оператор  $Y^{ml}$  определен в Приложении **Б.1**. Очевидно, что данное условие не смешивает следы  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , и потому их можно анализировать раздельно. В обоих секторах соотношение (2.51) связывает  $(k+1)$ -ю компоненту когомологии со следом  $k$ -й компоненты. Применяя  $T^{ps}$  и  $Y^{ps}$  к левой части этого выражения, получим соотношение  $T^{ml} T^{ps} \Psi_{1,2} = Y^{ml} Y^{ps} \Psi_{1,2}$ . Замечая, что симметризованная комбинация  $Y^{(ml} Y^{ps)}$  тождественно равна нулю, получаем, что  $\Psi$  удовлетворяет ограничению на двойной след  $T^{(ml} T^{ps)} \Psi_{1,2} = 0$ .

Таким образом, для динамических полей, ассоциированных с нижней компонентой когомологии  $H^0$ , восстанавливается следовая связь Лабастиды (2.41)

$$T^{(ps} T^{ml)} \varphi = 0. \quad (2.52)$$

Также находим, что все другие компоненты  $\Phi^{j_1 \dots j_k, i_1 \dots i_k}$  при  $k > 0$  выражаются в терминах следов  $\varphi$ . Например, для низших значений  $k$  соответствующие

выражения, полученные из  $T^{ml}\Phi + Y^{ml}\Phi = 0$ , имеют вид

$$T^{ml}\varphi - \left( \Phi^{lm} + \Phi^{ml} \right) = 0 , \quad (2.53)$$

$$T^{ps}T^{ml}\varphi + 4\left( \Phi^{sl|pm} + \Phi^{pl|sm} + \Phi^{sm|pl} + \Phi^{pm|sl} \right) = 0 . \quad (2.54)$$

Отождествляя правые части с необходимыми симметризациями полей  $\Phi^{m,l}$  и  $\Phi^{sl,pm}$  можно найти, как эти компоненты выражаются через поле  $\varphi$ .

Анализ отвечающей калибровочным параметрам нулевого поколения приводимости когомологии  $H^{-1}$  совершенно аналогичен. В частности, для компоненты  $H^{-1}$  при  $k = 0$   $\Lambda^i \equiv \Psi_1^i$  получается соотношение

$$T^{(mn}\Lambda^i) = 0 , \quad (2.55)$$

которое является следовой связью Лабастиды для калибровочных параметров (2.43). Аналогично динамическим полям, компоненты  $H^{-1}$  старших рангов выражаются через следы калибровочного параметра  $\Lambda^i$ .

Далее, для анализа типов юнговской симметрии полей, наложим БРСТ-расширенные алгебраические условия

$$(N_i^j + Y_i^j)(\Psi_1 + c_0\Psi_2) = 0 \quad i > j , \quad (2.56)$$

$$(N_i + Y_i - s_i - 1)(\Psi_1 + c_0\Psi_2) = 0 , \quad (2.57)$$

где  $s_i$  – это целые спиновые веса и  $Y_i \equiv Y_i^i$  при фиксированном  $i$ . В частности, для поля  $\varphi$  получаем  $N_i^j\varphi = 0 \quad i > j$ , т.е. оно описывается диаграммой Юнга вида  $(s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_1)$  и соответствующий калибровочный параметр  $\Lambda^i$  имеет на один  $i$ -й осциллятор  $a_i^a$  меньше. Заметим, что БРСТ-расширенные условия (2.57) в общем случае не приводят к симметриям Юнга для  $\Lambda^i$ . Вместо этого, появляется набор рекуррентных соотношений на  $\Lambda^i$ , порожденных юнговскими симметризаторами  $N_i^j \quad i > j$ . Их вид легко получить из (2.56).

Для описания теории, редуцированной в когомологии  $H$  оператора  $\Omega_{-1}$ , необходимо вычислить редуцированный оператор  $\tilde{\Omega}$ , действующий в  $H$ . Итоговый оператор  $\tilde{\Omega}$  определяет уравнения движения, калибровочные симметрии и условия приводимости и может быть найден при помощи когомологической техники. Однако, будем следовать иным (эквивалентным) путем и

получим явный вид редуцированного уравнения движения и калибровочных симметрий посредством явного исключения обобщённых вспомогательных полей, связанных со стягиваемыми парами оператора  $\Omega_{-1}$ .

Калибровочные преобразования

$$\delta\Psi^{(0)} = \Omega \xi^{(-1)}, \quad \text{gh } \xi^{(-1)} = -1, \quad (2.58)$$

содержат калибровочные параметры вида  $\xi^{(-1)} = \Lambda + c_0\Upsilon$ , где  $\text{gh } \Lambda = -1$  и  $\text{gh } \Upsilon = -2$ , и

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{k=0}^{n-2} c_{i_1} \cdots c_{i_k} b_{j_1} \cdots b_{j_{k+1}} \Lambda^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_{k+1}}, \\ \Upsilon &= \sum_{k=0}^{n-3} c_{i_1} \cdots c_{i_k} b_{j_1} \cdots b_{j_{k+2}} \Upsilon^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_{k+2}}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Данная калибровочная симметрия приводима и существует набор калибровочных параметров поколения  $(l-1)$  ( $1 \leq l \leq n-1$ ) и калибровочных преобразований вида

$$\delta\xi^{(-l)} = \Omega \xi^{(-l-1)}, \quad \text{gh } \xi^{(-l)} = -l. \quad (2.60)$$

Напомним, что калибровочные параметры также подчинены БРСТ-расширенным связям (2.32). Калибровочные преобразования полей  $\Phi$  и  $C$  принимают вид

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= Z_+ \Upsilon + \Omega_0 \Lambda, \\ \delta C &= \square \Lambda - \Omega_0 \Upsilon. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Как видно, преобразования полей  $\Phi$  содержат алгебраическое слагаемое  $Z_+ \Upsilon$ . Это означает, что часть компонент полей  $\Phi$  штукельберговы и могут быть исключены при помощи подходящей калибровки. Воспользовавшись результатами кохомологического анализа оператора (2.48), можно заключить, что оставшиеся компоненты полей  $\Phi$  описываются прямоугольными  $gl(n-1)$  диаграммами Юнга. Рассмотрение калибровочных симметрий на уровне  $(m-1)$  происходит таким же образом.

Замечая, что  $\Omega_0$  действует как линейная комбинация  $\mathcal{S}^i$  и  $\mathcal{S}_i^\dagger$ , получаем для  $k=0$  компоненты  $\varphi$  следующее преобразование:

$$\delta\varphi = \mathcal{S}_i^\dagger \Lambda^i. \quad (2.62)$$

Отсюда следует, что отождествление  $\mathcal{S}_i^\dagger \equiv D_i^\dagger$  приводит к калибровочному закону Лабастиды (2.42). Уравнения движения, следующие из действия (5.45), имеют вид

$$\Omega \Psi^{(0)} = 0 , \quad (2.63)$$

и инвариантны относительно калибровочных преобразований (2.58). В терминах компонент  $\Psi^{(0)} = \Phi + c_0 C$  уравнения принимают вид

$$\square \Phi - \Omega_0 C = 0 , \quad (2.64)$$

$$\Omega_0 \Phi + Z_+ C = 0 . \quad (2.65)$$

Поля  $C$  входят во второе уравнение только алгебраически и могут быть исключены в терминах терминах первых производных полей  $\Phi$ . Действительно, по аналогии с анализом закона калибровочного преобразования, соответствующий член в уравнениях имеет вид  $Z_+ C$ . Т.к. поля  $C$  не лежат в ядре  $Z_+$ , то все они могут быть представлены некоторыми комбинациями  $\Omega_0 \Phi$ .

Для анализа полевых уравнений на компоненту  $\varphi$  выделим  $k = 0$ :

$$\square \varphi - \mathcal{S}_m^\dagger C^m = 0 , \quad (2.66)$$

$$\mathcal{S}^n \varphi - \mathcal{S}_m^\dagger \Phi^{n|m} - C^m = 0 . \quad (2.67)$$

Решая второе уравнение относительно вспомогательного поля  $C^m$  и подставляя результат в первое уравнение, получаем  $\square \varphi - \mathcal{S}_m^\dagger \mathcal{S}^m \varphi + \mathcal{S}_m^\dagger \mathcal{S}_n^\dagger \Phi^{m|n} = 0$ . Учитывая следовую связь (2.53) получим, наконец, уравнение Лабастиды

$$\left( \square - \mathcal{S}_m^\dagger \mathcal{S}^m + \frac{1}{2} \mathcal{S}_m^\dagger \mathcal{S}_n^\dagger T^{mn} \right) \varphi = 0 . \quad (2.68)$$

Действительно, отождествление  $\mathcal{S}_m^\dagger = D_m^\dagger$  и  $\mathcal{S}^m = D^m$  воспроизводит кинетический оператор (2.40).

#### 2.1.4 $Q$ -когомологический анализ

Парент-формулировка теории позволяет перейти к развернутой формулировке через редукцию в когомологии слоевой части БРСТ оператора (2.27). Это эквивалентно редукции теории (2.24) в когомологии оператора  $Q$ . Исключая обобщённые вспомогательные поля, ассоциированные со стягиваемыми

парами для  $Q$ , теорию можно свести к теории, определённой редуцированным БРСТ оператором вида  $\Omega_{unf} = d - \tilde{\sigma}$ , где  $d$  – дифференциал де Рама  $\theta^a \frac{\partial}{\partial x^a}$  и  $\tilde{\sigma}$  – это ограничение оператора  $\sigma = \theta^a \frac{\partial}{\partial y^a}$  в  $Q$ -когомологию [36]. Таким образом, имеется возможность описывать теорию в терминах полей со значениями только из  $Q$ -когомологии.

Итак, для явного описания развернутой формы теории необходимо знать  $Q$ -когомологию. В нулевом духовом числе она уже была вычислена в разделе **2.1.2**. Было показано, что представители  $Q$ -когомологии в нулевой духовом числе могут быть отождествлены с ядром операторов из верхнетреугольной подалгебры

$$U_0 = \left\{ N_i^j \quad i > j, \quad \bar{S}^i \right\}, \quad (2.69)$$

алгебры  $sl(n)$ , образованной  $N_i^j \quad i \neq j, S_i^\dagger, \bar{S}^i$ .

На самом деле, существуют другие возможные способы выбрать верхнетреугольную подалгебру, содержащую  $N_i^j \quad i > j$ . Есть  $n$  подалгебр

$$U_p = \left\{ N_i^j \quad i > j, \quad \bar{S}^i, \quad i = 1, \dots, n - p - 1, \quad S_j^\dagger, \quad j = n - p, \dots, n - 1 \right\}, \quad (2.70)$$

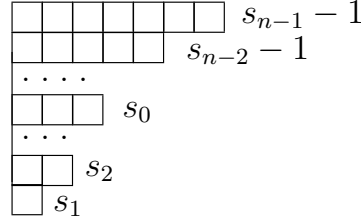
которые являются верхнетреугольными и содержат  $N_i^j \quad i > j$ . При  $p = 0$  получается (2.69).

Каждая  $U_p$  определяет модуль Пуанкаре  $M_p$  (можно последовательно определить структуру модуля Пуанкаре так же как для  $M_0$ ). Соответствующие условия имеют вид

$$T^{IJ}\phi = 0, \quad N_i^j\phi = 0 \quad i > j, \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}^i\phi = 0, \quad N_i\phi = s_i\phi, \quad i = 1, \dots, n - p - 1, \\ S_j^\dagger\phi = 0, \quad N_j\phi = (s_j - 1)\phi, \quad j = n - p, \dots, n - 1, \end{aligned} \quad (2.72)$$

и могут быть представлены диаграммой Юнга вида

Рис. 3. Модуль  $M_p$ .

с весом  $s_0$ , таким что

$$s_{n-p-1} \leq s_0 \leq s_{n-p} - 1. \quad (2.73)$$

Из этого неравенства следует, что если  $s_i = s_{i-1}$ , то модуль  $M_{n-i}$  пуст. Заметим, что какими бы ни были веса  $s_i$ , модуль  $M_0$  всегда непуст. Заметим также, что  $M_{n-1}$  совпадает с модулем из (2.9), (2.10), если произвести замену  $s_i \rightarrow s_i - 1$ . Получим следующее:

**Утверждение 2.3.** *Когомология  $Q$  в подпространстве (2.16) с дуговым числом  $p$  может быть отождествлена с подпространством  $M_p$ . В частности,  $M_p$  есть модуль Пуанкаре при любых  $p$ .*

Вторая часть утверждения немедленно следует из  $[Q, M_{ab}] = [Q, P_a] = 0$ . Доказательство всего утверждения содержится в работе [161]. Модули Пуанкаре  $M_p$  возникают в рамках развернутой формулировки несимметричных полей [205]. А именно, поля дифференциальных  $p$ -форм развернутой формулировки принимают значения в модулях  $M_p$ . Случай несимметричных полей с  $s_1 = s_2$  также рассмотрен в работах [193, 35].

## 2.2 Поля непрерывного спина на $\mathbb{R}^{d-1,1}$

Безмассовые частицы непрерывного спина [88] обладают несколькими интересными свойствами, включая присутствие размерного параметра  $\mu$  и бесконечное число физических степеней свободы [89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 106, 224, 107, 110, 111]. С точки зрения стандартной теории полей произвольного дискретного спина [214, 14] наиболее удивительным свойством является то, что динамика полей непрерывного спина может быть определена на пространстве полей, представимом суммой спин- $s$  по-

лей фронсдаловского типа, где  $s = 0, \dots, \infty$ . Соответствующее калибровочно-инвариантное действие на пространствах Минковского  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  и  $AdS_d$  является бесконечной суммой действий Фронсдала спина  $s$  с недиагональными вкладками, пропорциональными параметру непрерывного спина  $\mu$  [91, 93]. Калибровочными преобразованиями являются стандартные фронсдаловские преобразования, модифицированные штуркельберговскими вкладками, которые также пропорциональны  $\mu$ . Более того, поля непрерывного спина могут взаимодействовать между собой и с массивными полями высших (дискретных) спинов [99, 100].

С теоретико-групповой точки зрения частицы непрерывного спина соответствуют бесконечномерным безмассовым, унитарным, неприводимым представлениям алгебры Пуанкаре  $iso(d-1, 1)$ , индуцированным с бесконечномерных, унитарных, неприводимых представлений подалгебры  $iso(d-2)$  [88, 103, 104]. Квантовыми числами здесь являются масса  $m = 0$ , параметр непрерывного спина  $\mu \neq 0$ , и (полу-)целые спиновые числа  $(s_1, \dots, s_p)$ , где  $p = \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$ . Упомянутая выше лагранжева формулировка была получена для скалярного представления. В случае несимметричных полей динамика непрерывного спина на  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  была описана на уровне уравнений движения в работе [89] как размерная редукция безмассовых уравнений Фронсдала на пространстве  $\mathbb{R}^{d,1}$ .<sup>15</sup>

В данном разделе изучаются уравнения движения для полей непрерывного спина смешанного типа симметрии в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ . Для этой цели используется БРСТ формулировка, разработанная в предыдущем разделе. Будет показано, что система непрерывного спина соответствует некоторой деформации связей, рассмотренных ранее в случае полей дискретного спина, где параметром деформации выступает непрерывный спин  $\mu$ . Это позволяет сформулировать триплетную формулировку теории, которая является обобщением стандартной триплетной формулировки из предыдущего раздела, см. работы [165, 166, 161]. Если взять триплетную форму за основу, то возникает метрическая формулировка, обобщающая формулировки Фронсдала и Лабастиды [189, 221], а также конусную формулировку.

<sup>15</sup>В работе [101] было построено реперное действие для полей непрерывного спина  $(s_1, 0, \dots, 0)$  в пространстве  $AdS_d$ , конусная формулировка полей непрерывного спина  $(s_1, 0, \dots, 0)$  в пространстве  $AdS_5$  была рассмотрена в работе [102].

### 2.2.1 Деформированные связи

Алгебра Пуанкаре  $iso(d-1, 1)$  реализована согласно разделу 2.1.1 как

$$P_a = \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad M_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x^b} - x_b \frac{\partial}{\partial x^a} + a_{ai} \frac{\partial}{\partial a_i^b} - a_{bi} \frac{\partial}{\partial a_i^a}. \quad (2.74)$$

Введем обозначения (отчасти использовались ранее в предыдущем разделе)

$$\begin{aligned} \square &= \frac{\partial^2}{\partial x^b \partial x_b}, & D_i^\dagger &= a_i^b \frac{\partial}{\partial x^b}, & D^i &= \frac{\partial^2}{\partial a_i^b \partial x_b}, \\ T^{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial a_{ib} \partial a_j^b}, & T_{ij}^\dagger &= a_i^b a_{bj}, & N_i{}^j &= a_i^b \frac{\partial}{\partial a_j^b}, & N_i &= a_i^b \frac{\partial}{\partial a_i^b}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Напомним, что эти операторы образуют подалгебру в алгебре  $sp(2n+2)$ , которая в свою очередь Хау-дуальна алгебре Лоренца, образованной генераторами  $M_{ab}$ . Пространство формальных рядов по  $a_I^b = (x^b, a_i^b)$  является  $iso(d-1, 1) \oplus sp(2n+2)$  бимодулем. Сформулируем теперь систему со связями, используя в качестве исходной систему связей предыдущего раздела.

*Дифференциальные связи.* Эти связи такие же как в случае полей дискретного спина

$$\square \phi = 0, \quad D^i \phi = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.76)$$

*Алгебраические связи.* Наложим модифицированное следовое условие и юнговские симметризаторы

$$(T^{ij} - \nu^{ij})\phi = 0, \quad \nu^{ij} = \nu \delta^{1i} \delta^{1j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.77)$$

$$N_i{}^j \phi = 0 \quad i < j, \quad N_i \phi = s_i \phi, \quad i, j = 2, \dots, n, \quad (2.78)$$

где спиновые веса  $s_i \geq 0$  – это неотрицательные целые числа и  $\nu \in \mathbb{R}$ .

*Калибровочная эквивалентность.* Калибровочные преобразования задаются как

$$\delta \phi = \left( D_i^\dagger + \mu_i \right) \chi^i, \quad \mu_i = \mu \delta_{1i}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (2.79)$$

где  $\chi^i$  – калибровочные параметры удовлетворяющие связям, которые следуют из (2.76)–(2.78) и  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Отметим, что связи непротиворечивы при условии, что параметрические матрицы  $\nu^{ij}$  и  $\mu^i$  фиксированы согласно (2.77) и (2.79). Далее будет показано,



что  $\nu\mu^2$  является значением четвертичного оператора Казимира алгебры Пуанкаре  $iso(d-1, 1)$  (см. Приложение **Б.1**) так что фиксируя, например,  $\nu = 1$  находим, что  $\mu$  является параметром непрерывного спина. Также следует отметить, что похожая система связей обсуждалась в работе [89].

В отличие от системы со связями, отвечающей полям дискретного спина, данные связи не являются условиями старшего веса  $sp(2n+2)$  алгебры. Наоборот, деформированные связи подобного рода типичны в теории когерентных состояний, где состояния определяются как собственные вектора по отношению к операторам уничтожения (например, в нашем случае это  $T^{ij}$ ). Отсюда следует, что такие элементы более не диагонализуют оператор числа частиц (что соответствует отсутствующему в нашем случае оператору  $N_i$ ) и реализуются как бесконечные ряды по вспомогательным переменным.

Т.к. данная формулировка вовлекает операторы, перемешивающие тензоры разных рангов, то такая система содержит бесконечно число полей. По этой причине следует специфицировать класс допустимых функций от вспомогательных переменных  $a_i^b$ , потому как это определяет полевой состав теории. Таким классом является следующий: берутся формальные ряды по  $a_i^b$ , удовлетворяющие дополнительному условию допустимости. А именно, ряд  $f$  является допустимым, если его следовое разложение

$$f = f_0 + f_1^{ij} T_{ij}^\dagger + f_2^{ij,kl} T_{ij}^\dagger T_{kl}^\dagger + \dots, \quad T^{ij} f_p \dots = 0, \quad (2.80)$$

таково, что все коэффициенты являются полиномами конечного порядка. Очевидно, что алгебра Пуанкаре и алгебра  $sp(2n+2)$  действуют в пространстве допустимых элементов.

## 2.2.2 БРСТ реализация

Введем антикоммутирующие духовые переменные  $b^i$  духового числа  $gh\ b_i = -1$  и разделим как вспомогательные, так и духовые переменные следующим образом, выделив по одному осциллятору:  $a_i^b = (a^b, a_\alpha^b)$  и  $b^i = (b, b^\alpha)$ , где  $\alpha = 1, \dots, n-1$ . Поля и калибровочные параметры поместим в производящую функцию  $\Psi(x, a|b)$ . Она может быть разложена по степеням переменной  $b_i$

так что однородные компоненты имеют фиксированную градуировку, т.е.

$$\Psi = \sum_{n \geq 0} \Psi^{(-n)}, \quad \text{gh } \Psi^{(-n)} = -n. \quad (2.81)$$

Согласно процедуре, обсуждавшейся в предыдущем разделе, поля содержатся в компоненте духового числа 0, калибровочные параметры в компоненте духового числа  $-1$ , и т.д.

Теперь систему (2.76)–(2.79) можно переписать в БРСТ виде. Все связи остаются неизменными за исключением юнговских симметризаторов (2.78) и условий на спиновые веса, которые расширяются духовыми вкладками. А именно,

$$\mathcal{N}_\alpha^\beta \Psi = 0, \quad \mathcal{N}_\alpha \Psi = s_\alpha \Psi, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n-1, \quad (2.82)$$

где

$$\mathcal{N}_\alpha^\beta = \left( N_\alpha^\beta + b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} \right) \Big|_{\alpha < \beta} \quad \text{и} \quad \mathcal{N}_\alpha = N_\alpha + b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\alpha}, \quad (2.83)$$

причем в последней формуле нет суммирования по  $\alpha$ . Данные связи накладываются одновременно на поля и параметры.

Оператор БРСТ имеет вид

$$\mathcal{Q} = \left( D_i^\dagger + \mu_i \right) \frac{\partial}{\partial b_i} \equiv \left( D^\dagger + \mu \right) \frac{\partial}{\partial b} + D_\alpha^\dagger \frac{\partial}{\partial b_\alpha}, \quad \mathcal{Q}^2 = 0. \quad (2.84)$$

БРСТ-инвариантность связей требует, чтобы параметры  $\nu^{ij}$  и  $\mu^i$  были пропорциональны произвольным  $\nu$  и  $\mu$ .<sup>16</sup> Чтобы воспроизвести калибровочное преобразование (2.79) надо отождествить поля  $\phi(x, a)$  как компоненты нулевого духового числа  $\phi(x, a) = \Psi^{(0)}(x, a)$ , а параметры  $\chi^i(x, a)$  как компоненты духового числа минус один  $b_i \chi^i(x, a) = \Psi^{(-1)}(x, a|b)$ , ср. (2.81). Тогда калибровочное преобразование  $\delta \Psi^{(0)} = \mathcal{Q} \Psi^{(-1)}$  приводит к (2.79), где параметры  $\chi^i(x, a)$  удовлетворяют тем же связям (2.76), (2.77), в то время как (2.78) модифицируются подходящим образом.

Таким образом, формулировка содержит параметры  $\mu, \nu$  и  $(n-1)$  спиновых весов  $s_2, \dots, s_n$ . В  $d$  измерениях  $n = \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$  это позволяет описать все возможные конечномерные модули малой алгебры  $o(d-3) \subset iso(d-1, 1)$  [103].

<sup>16</sup>Для этого вычисляется  $[Q, \mathcal{N}_i^j] = \mu_i \frac{\partial}{\partial b_j}$  и  $[T^{mn}, \mathcal{N}_i^j] = \delta_i^n T^{mj} + \delta_i^m T^{nj}$ , после чего, наложением связей находим, что параметры фиксируются в виде (2.77) и (2.79).

Для описания представлений  $iso(d-1, 1)$  соответствующих системе (2.76)-(2.79) давайте рассмотрим операторы Казимира алгебры Пуанкаре (2.74) кратко описанные в Приложении **Б.1**. Квадратичный оператор Казимира  $C_2 = P_a P^a \approx 0$  равен нулю на поверхности связей (2.76). Далее, четвертичный оператор Казимира  $C_4 = (M_{ab} P^b)^2$  равен

$$C_4 \phi(x, a) = -S_i^\dagger S_j^\dagger T^{ij} \phi(x, a) \approx \mu^2 \nu \phi(x, a) , \quad (2.85)$$

где использованы дифференциальные связи (2.76), следовые условия (2.77) и отношение эквивалентности  $\phi \sim \phi + \mathcal{Q}\chi$  с калибровочным параметром, выраженным в терминах поля  $\phi$ .<sup>17</sup> В Приложении **Б.1** показано, что любой оператор Казимира старшего порядка пропорционален  $\mu^2 \nu$ . Таким образом, рассматриваемая система описывает частицы непрерывного спина, фиксация  $\nu = 1$  отождествляет  $\mu$  с параметром непрерывного спина. Подчеркнем, что такое разбиение между параметрами деформации  $\mu$  и  $\nu$  искусственно и лишь комбинация  $\mu^2 \nu$  несет инвариантный смысл.

Расширим триплетную формулировку несимметричных полей из раздела **2.1.2** на случай полей непрерывного спина. Для этого введем дополнительные антикоммутирующие духовые переменные  $c_0, c_i, i = 1, \dots, n$ , с положительными духовыми числами  $\text{gh } c_0 = 1, \text{gh } c_i = 1$ , и ассоциируем эти переменные с дифференциальными связями (2.76). Тогда БРСТ оператор (3.78) модифицируется следующим образом

$$\Omega = c_0 \square + c_i D^i + (D_i^\dagger + \mu_i) \frac{\partial}{\partial b_i} - c_i \frac{\partial}{\partial b_i} \frac{\partial}{\partial c_0} , \quad (2.86)$$

где  $\mu_i = \mu \delta_{i1}$ . Он определен на подпространстве  $\Psi = \Psi(x, a|c, b)$ , выделенном БРСТ-расширенными следовыми условиями

$$(\mathcal{T} + \nu)\Psi = 0 , \quad \mathcal{T}^\alpha \Psi = 0 , \quad \mathcal{T}^{\alpha\beta} \Psi = 0 , \quad (2.87)$$

а также юнговскими симметризаторами и спиновыми весовыми условиями

$$\mathcal{N}_\alpha{}^\beta \Psi = 0 , \quad \mathcal{N}_\alpha \Psi = s_\alpha \Psi . \quad (2.88)$$

---

<sup>17</sup>Аналогичное вычисление операторов Казимира на классах эквивалентности в случае полей дискретного спина на пространстве  $AdS_d$  дано в следующем разделе.

Расширенные связи имеют следующий явный вид

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{ij} &= T^{ij} + \frac{\partial}{\partial c_i} \frac{\partial}{\partial b_j} + \frac{\partial}{\partial c_j} \frac{\partial}{\partial b_i}, & \mathcal{N}_\alpha^\beta &= \left( N_\alpha^\beta + b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta} + c_\alpha \frac{\partial}{\partial c_\beta} \right) \Big|_{\alpha < \beta}, \\ \mathcal{N}_\alpha &= N_\alpha + b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\alpha} + c_\alpha \frac{\partial}{\partial c_\alpha}, & \alpha, \beta &= 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (2.89)$$

где в последнем выражении нет суммирования по  $\alpha$ .

Разложим  $\Psi$  на однородные компоненты определенного духового числа и выделим компоненту нулевого духового числа  $\Psi^{(0)}$ , которую можно представить в виде  $\Psi^{(0)} = \Phi + c_0 C$ , что вводит компонентные поля  $\Phi = \Phi(x, a|b, c)$  и  $C = C(x, a|b, c)$  согласно

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n-1} c_{i_1} \dots c_{i_k} b_{j_1} \dots b_{j_k} \Phi^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_k}, \quad C = \sum_{k=0}^{n-2} c_{i_1} \dots c_{i_k} b_{j_1} \dots b_{j_{k+1}} C^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_{k+1}}. \quad (2.90)$$

Данные компоненты можно отождествить как обобщённые триплетные поля, возникающие в случае полей дискретного спина в работах [165, 166, 161]. Соответствующее калибровочное преобразование имеет вид

$$\delta \Psi^{(0)} = \Omega \Psi^{(-1)}, \quad (2.91)$$

где параметры духового числа минус один  $\Psi^{(-1)} = \Lambda + c_0 \Upsilon$  задаются посредством разложений

$$\Lambda = \sum_{k=0}^{n-2} c_{i_1} \dots c_{i_k} b_{j_1} \dots b_{j_{k+1}} \Lambda^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_{k+1}}, \quad \Upsilon = \sum_{k=0}^{n-3} c_{i_1} \dots c_{i_k} b_{j_1} \dots b_{j_{k+2}} \Upsilon^{i_1 \dots i_k | j_1 \dots j_{k+2}}. \quad (2.92)$$

Аналогичным образом, компонента  $\Psi^{(k)}$  духового числа  $-k$  кодирует калибровочные параметры  $(k-1)$ -го поколения. Наконец, уравнения триплетной формулировки для полей непрерывного спина принимают вид

$$\Omega \Psi^{(0)} = 0. \quad (2.93)$$

По построению, (2.93) инвариантны относительно калибровочных преобразований (2.91), где поля и параметры подчинены связям (2.87)–(2.88). Отметим, что БРСТ оператор (2.86) для системы непрерывного спина отличается от БРСТ оператора системы дискретного спина (2.29) (с учетом переобозначений) добавлением члена, пропорционального  $\mu$ , т.е.  $\Omega \rightarrow \Omega + \mu \frac{\partial}{\partial b}$ .

Пусть дополнительная градуировка, необходимая для осуществления гомологической редукции, будет степенью однородности по  $c_0$ . Тогда БРСТ оператор (2.29) можно разложить как  $\Omega = \Omega_{-1} + \Omega_0 + \Omega_1$ , где

$$\Omega_{-1} = -c_i \frac{\partial}{\partial b_i} \frac{\partial}{\partial c_0}, \quad \Omega_0 = c_i D^i + (D_i^\dagger + \mu_i) \frac{\partial}{\partial b_i}, \quad \Omega_1 = c_0 \square. \quad (2.94)$$

Данную теорию можно редуцировать на подпространство  $\mathcal{E} = H(\Omega_{-1})$  (см. Приложение **Б.2**). Отметим, что член с  $\mu$ -деформацией входит только в  $\Omega_0$ , и, поэтому, когомология  $H(\Omega_{-1})$  не изменяется по сравнению со случаем полей дискретного спина (см. раздел **2.1.3**).

Когомология  $H(\Omega_{-1})$  в духовом числе 0 и  $-1$  может быть явно описана в терминах нижней компоненты разложения по духам  $c_i$  и  $b^i$ . Более точно, обозначая нижнюю компоненту в (2.90) как  $\varphi$ , находим  $\Phi = \varphi + \dots$ , где многоточие обозначает духовые вклады, выраженные через следы поля  $\varphi$ . Аналогичным образом, обозначим  $\chi^i$  нижнюю компоненту калибровочного параметра  $\Lambda^i$  в выражении (2.92). Тогда из (2.87)–(2.89) следует, что  $\varphi$  и  $\chi^i$  удовлетворяют модифицированным следовым условиям

$$\mathbb{T}^{(ij}\mathbb{T}^{kl)}\varphi = 0, \quad \mathbb{T}^{(ij}\chi^k) = 0, \quad (2.95)$$

где введено обозначение  $\mathbb{T}^{ij} \equiv T^{ij} + \nu \delta^{i1}\delta^{j1}$ . Юнговские симметризаторы и спиновые весовые условия принимают вид

$$N_\alpha^\beta \varphi = 0 \quad \text{при} \quad \alpha < \beta \quad \text{и} \quad N_\alpha \varphi = s_\alpha \varphi, \quad (2.96)$$

$$N_\alpha^\beta \chi^\gamma + \delta_\alpha^\gamma \chi^\beta = 0 \quad \text{при} \quad \alpha < \beta \quad \text{и} \quad N_\alpha \chi = s_\alpha \chi, \quad N_\alpha \chi^\alpha = (s_\alpha - 1) \chi^\alpha, \quad (2.97)$$

где  $N_\alpha^\beta$  и  $N_\alpha$  задаются (2.75), а в последнем выражении нет суммирования по  $\alpha$ . Отметим, что юнговские и весовые условия наложены только в секторе переменных  $a_\alpha^b$ . Однако, среди соотношений (2.95) присутствуют кросс-следовые условия, которые смешивают коэффициенты разложения по  $a^b$  и  $a_\alpha^b$ .

Далее, с помощью полученных ранее когомологических результатов можно напрямую вычислить редуцированные уравнения движения. Вводя оператор  $Z$  через  $\Omega_{-1} \equiv -\frac{\partial}{\partial c_0} Z$  (см. Приложение **Б.1**) исходные триплетные уравнения (2.93) можно представить в виде

$$\square \Phi - \Omega_0 C = 0, \quad \Omega_0 \Phi + ZC = 0, \quad (2.98)$$

где поля  $\Phi$  и  $C$  определены разложением (2.90). Из структуры когомологии  $H(\Omega_{-1})$  следует, что  $C$  является вспомогательным полем и, поэтому, воспользовавшись вторым уравнением в (2.98), его можно выразить в терминах  $\Omega_0\Phi$ . Другими словами, выражение для  $C$  задается производными от  $\Phi$ , а само  $\Phi$  сводится к нижней компоненте  $\varphi$ . Тогда (2.98) принимают вид

$$\square\varphi - (D_i^\dagger + \mu_i)C^i = 0, \quad D^i\varphi - (D_j^\dagger + \mu_j)\Phi^{ij} - C^i = 0, \quad (2.99)$$

где компонента  $\Phi^{ij}$  может быть выражена через  $\varphi$  посредством следовых условий (2.87) в виде  $\Phi^{ij} = \frac{1}{2}\mathbb{T}^{ij}\varphi$ . Исключая вспомогательное поле  $C^i$  наконец приходим к редуцированным уравнениям движения

$$\left[ \square - (D_i^\dagger + \mu_i)D^i\varphi + \frac{1}{2}(D_i^\dagger + \mu_i)(D_j^\dagger + \mu_j)(T^{ij} + \nu^{ij}) \right] \varphi = 0, \quad (2.100)$$

которые инвариантны относительно калибровочных преобразований вида

$$\delta\varphi = (D_i^\dagger + \mu_i)\chi^i. \quad (2.101)$$

Здесь поля и калибровочные параметры подчинены алгебраическим условиям (2.95)–(2.97). Выбор  $\mu, \nu = 0$  воспроизводит формулировку Лабастиды [221].

Существует интересная формулировка полей непрерывного спина, полученная Шустером и Торо, состав полей которой это бесконечная сумма фронталовских полей, а уравнения и калибровочные симметрии вовлекают недиагональные члены пропорциональные параметру  $\mu$  [91]. Покажем, что уравнения Шустера-Торо могут быть получены из нашей формулировки при  $n = 1$ . В этом случае спиновые веса равны нулю  $s_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$  так что рассматривается скалярная система непрерывного спина.

В случае  $n = 1$  уравнения движения (Г.5) принимают вид

$$\square\varphi - (D^\dagger + \mu)D\varphi + \frac{1}{2}(D^\dagger + \mu)^2(T + \nu)\varphi = 0. \quad (2.102)$$

По построению, они инвариантны относительно преобразований

$$\delta\varphi = D^\dagger\epsilon + \mu\epsilon, \quad (2.103)$$

дополненных модифицированными следовыми условиями

$$(T + \nu)^2\varphi = 0, \quad (T + \nu)\epsilon = 0. \quad (2.104)$$

Отметим, что спиновые весовые условия в этом случае отсутствуют. Однако, динамику нельзя ограничить на спин- $s$  подпространство, потому что модифицированные следовые условия несовместны со спин- $s$  весовым условием  $N\phi = s\phi$ . Тем не менее, положив оба параметра  $\nu$  и  $\mu$  в ноль воспроизводим сумму уравнений Фронсдала для всех целых спинов.

Модифицированные следовые условия можно явно разрешить в терминах тензоров, подчиненных стандартным (недеформированным) следовым условиям. А именно, в Приложении **Б.3** показано, что поля и параметры можно эквивалентным образом представить в виде

$$\varphi = \sum_{n,m=0}^{\infty} \beta_{m,n} (T^\dagger)^m \varphi_{(n)}, \quad \epsilon = \sum_{n,m=0}^{\infty} \beta_{m,n+1} (T^\dagger)^m \epsilon_{(n)}, \quad (2.105)$$

где  $T^\dagger = a^b a_b$  – оператор рождения следа, а тензора ранга  $n$  в правой части удовлетворяют фронсдаловским следовым условиям

$$T^2 \varphi_{(n)} = 0, \quad T \epsilon_{(n)} = 0. \quad (2.106)$$

Явный вид коэффициентов  $\beta_{m,n}$  приведен в Приложении **Б.3**. Таким образом, исходные  $\varphi$  и  $\epsilon$  заменяются на бесконечные наборы фронсдаловских (однажды и дважды бесследовые) тензоры ранга от 0 до  $\infty$ .

В Приложении **Б.3** явно продемонстрировано, что во фронсдаловском базисе (2.106) уравнения (2.102) совпадают с уравнениями Шустера-Торо [91, 93]

$$-\square \varphi_{(n)} + D^\dagger G_{(n-1)} + \mu [G_{(n)} + d_n T^\dagger G_{(n-2)}] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.107)$$

Здесь,

$$G_{(n)} = A_{(n)} + \mu c_n B_{(n)}, \quad (2.108)$$

с производной и алгебраическими членами собранными в

$$A_{(n)} = D\varphi_{(n+1)} - \frac{1}{2} D^\dagger T \varphi_{(n+1)}, \quad B_{(n)} = \varphi_{(n)} + a_n T^\dagger T \varphi_{(n)} + b_n T \varphi_{(n+2)}, \quad (2.109)$$

где коэффициенты задаются выражениями

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{2d + 2n - 8}, & b_n &= \frac{d + 2n - 2}{2\nu}, \\ c_n &= -\frac{1}{2b_n}, & d_n &= -\frac{\nu}{(d + 2n - 4)(d + 2n - 6)}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Отметим, что  $A_{(n)}$ ,  $B_{(n)}$ ,  $G_{(n)}$  – бесследовы. Эти комбинации полей и их производных удобны при построении дважды бесследового оператора (2.107).

Калибровочное преобразование (2.103) задается выражением

$$\delta\varphi_{(n)} = D^\dagger\epsilon_{(n-1)} + \mu [\epsilon_{(n)} + d_n T^\dagger\epsilon_{(n-2)}] . \quad (2.111)$$

Это преобразование штуркельбергова типа с тремя бесследовыми калибровочными параметрами разного ранга, что является типичным в теориях массивных полей высших спинов [196].

### 2.2.3 Конусная формулировка

Для формулировки конусной динамики полей непрерывного спина рассмотрим триплетную формулировку и исключим нефизические степени свободы посредством гомологической редукции. Это достигается с помощью подходящей градуировки, введенной в работе [225] (см. также [199, 161]) такой, что т.н. квартеты образуют подпространство  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ , а когомология нижней компоненты БРСТ оператора образует комплиментарное подпространство  $\mathcal{E}$ , описывающее конфигурации  $o(d-2)$  тензорных полей на световом конусе.

Квартетная градуировка определяется следующим образом<sup>18</sup>

$$\deg a_i^\pm = \pm 2 , \quad \deg a_i^m = 0 , \quad \deg c_0 = 0 , \quad \deg c_i = 1 , \quad \deg b^i = -1 . \quad (2.112)$$

Отметим, что в допустимом функциональном пространстве данная градуировка ограничена сверху и снизу, потому что  $\deg T^\dagger = 0$  и поэтому только коэффициенты в разложении (2.80) дают вклад в степень элемента. По предположению, эти коэффициенты являются полиномами конечного порядка по  $a$ -переменным и, следовательно, степень ограничена. Таким образом, условия применимости гомологической редукции соблюдены.

Триплетный БРСТ оператор (2.86) раскладывается на пять однородных

---

<sup>18</sup>Конусные координаты  $x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^{d-1})$  и  $x^m$ , где  $m = 1, \dots, d-2$ .  $o(d-2)$  индексы обозначены буквами из середины латинского алфавита  $m, k, l, p, s, \dots$  за исключением  $n$ . Скалярное произведение имеет вид  $A_c B^c = A^+ B^- + A^- B^+ + A^m B^m$ .



компонент  $\Omega = \Omega_{-1} + \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ , где

$$\begin{aligned} \Omega_{-1} &= p^+ \left( c_i \frac{\partial}{\partial a_i^+} + a_i^- \frac{\partial}{\partial b_i} \right), & \Omega_0 &= c_0(2p^+p^- + p_m p^m), \\ \Omega_1 &= c_i p^m \frac{\partial}{\partial a_i^m} + p^+ a_i^- \frac{\partial}{\partial b_i} + \mu \frac{\partial}{\partial b}, & \Omega_2 &= -c_i \frac{\partial}{\partial b_i} \frac{\partial}{\partial c_0}, & \Omega_3 &= p^- (c_i \frac{\partial}{\partial a_i^-} + a_i^+ \frac{\partial}{\partial b_i}). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Заметим, что  $\Omega_{-1}$  является дифференциалом де Рама по переменным  $c_i, b_i$  и  $a_i^-, a_i^+$ . Таким образом, кохомология  $H(\Omega_{-1})$ , отождествляемая с динамическими полями, состоит из элементов, зависящих только от поперечных осцилляторов  $\phi = \phi(x|a_i^m)$  [199, 161]. Проводя гомологическую редукцию получим конусный БРСТ оператор

$$\tilde{\Omega} = c_0(2p^+p^- + p^m p_m). \quad (2.114)$$

Уравнения движения принимают вид условия массовой поверхности  $p^2 = 0$ .

Следующие из (2.87)-(2.89) конусные связи задаются выражениями

$$(\tilde{T} + \nu)\phi = 0, \quad \tilde{T}^\alpha \phi = 0, \quad \tilde{T}^{\alpha\beta} \phi = 0. \quad (2.115)$$

Юнговские симметризаторы и спиновые весовые условия имеют вид

$$\tilde{N}_\alpha^\beta \phi = 0, \quad \tilde{N}_\alpha \phi = s_\alpha \phi, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n-1, \quad (2.116)$$

где

$$\tilde{T}^{ij} = \frac{\partial^2}{\partial a_i^m \partial a_{jm}}, \quad \tilde{N}_\alpha^\beta = a_\alpha^m \frac{\partial}{\partial a_\beta^m} \Big|_{\alpha < \beta}, \quad \tilde{N}_\alpha = a_\alpha^m \frac{\partial}{\partial a_\alpha^m}, \quad (2.117)$$

и нет суммы по  $\alpha$  в  $\tilde{N}_\alpha$ . Конусный БРСТ оператор (2.114) очевидным образом действует в этом подпространстве.

**Конусное представление.** Генераторы алгебры Пуанкаре (2.74) при конусном описании разбиваются на две группы: кинематические генераторы  $G_{kin} = (P^+, P^m, M^{+m}, M^{+-}, M^{mk})$  и динамические генераторы  $G_{dyn} = (P^-, M^{-k})$ . После квартетной редукции оба типа генераторов действуют в редуцированном пространстве,  $\tilde{G}_{kin}$  и  $\tilde{G}_{dyn}$ . Можно видеть, что редуцированные кинематические генераторы  $\tilde{G}_{kin}$  сохраняют стандартный вид, а редуцированные динамические генераторы  $\tilde{G}_{dyn}$  задаются новыми выражениями

$$\tilde{P}^- = -\frac{p^k p_k}{2p^+}, \quad \tilde{M}^{-m} = -\frac{\partial}{\partial p^+} p^m - \frac{\partial}{\partial p_m} \frac{p^k p_k}{2p^+} + \frac{1}{p^+} (S^{mk} p_k + H^m), \quad (2.118)$$

где  $S^{mn}$  и  $H^m$  это

$$S^{mn} = a_\alpha^m \frac{\partial}{\partial a_n^\alpha} + a^m \frac{\partial}{\partial a_n} - (m \leftrightarrow n), \quad H_n = \mu \frac{\partial}{\partial a^n}. \quad (2.119)$$

Элементы  $S^{kl}$  и  $H^n$  удовлетворяют  $iso(d-2)$  коммутационным соотношениям

$$[S^{kl}, S^{ps}] = \delta^{kp} S^{ls} + 3 \text{ terms}, \quad [S^{kl}, H^n] = \delta^{kn} H^l - \delta^{ln} H^k, \quad [H^k, H^l] = 0. \quad (2.120)$$

Для описания конусного представления с заданными весами вычислим операторы Казимира алгебры  $iso(d-2)$  (4.27) (см. обсуждение вокруг формулы (2.85)). С помощью (2.119) можно видеть, что квадратичный оператор Казимира алгебры  $iso(d-2)$  задается выражением

$$c_2 \equiv H^2 \approx \mu^2 \nu, \quad (2.121)$$

где введено обозначение  $H^2 \equiv H_m H^m$  и использованы модифицированные следовые условия (2.115), ср. (2.85). Воспользовавшись (модифицированными) следовыми условиями (2.115) и симметризаторами Юнга и спиновыми весовыми условиями (2.116) можно вычислить четвертичный оператор Казимира

$$c_4 \equiv H^2 S^2 - 2(HS)^2 \approx \mu^2 \nu \sum_{\alpha=1}^{n-1} s_\alpha (s_\alpha + d - 2\alpha - 3), \quad (2.122)$$

где  $H^2 = H^m H_m$ ,  $S^2 = S_{mn} S^{mn}$ ,  $(HS)^m = H_n S^{nm}$ . Операторы Казимира старших порядков могут быть найдены аналогичным образом (см. общее обсуждение в Приложении **Б.1**).

Отметим, что при вычислении операторов Казимира (2.121) и (2.122) явное решение связей (2.115)-(2.116) не требуется. Генераторы алгебры Пуанкаре, спроецированные на подпространство, имеют достаточно сложный вид. В частности,  $iso(d-2)$  подалгебра (2.119) теперь реализована иначе:  $S^{mn}$  по-прежнему действуют как вращения, а трансляции  $H^m$  нетривиальным образом спроецированы на данное подпространство.<sup>19</sup>

**Симметричные поля.** Обратимся к частному представлению непрерывного спина со спиновым весом  $(s, 0, \dots, 0)$ , по аналогии с полями дискретного

<sup>19</sup>В случае спин-0 поля непрерывного спина для размерности  $d \geq 4$  явная реализация дана в работе [99], а в случае спин- $s$  поля непрерывного спина для  $d = 5$  в работе [102].

спина назовем это симметричным представлением. В этом случае есть два осциллятора  $(a, a_1^m)$  и следовые условия принимают вид

$$(\tilde{T} + \nu)\phi = 0, \quad \tilde{T}^1\phi = 0, \quad \tilde{T}^{11}\phi = 0, \quad (2.123)$$

где

$$\phi = \sum_{p=0}^{\infty} \phi_{m_1 \dots m_p | n_1 \dots n_s} a^{m_1} \dots a^{m_p} a_1^{n_1} \dots a_1^{n_s}, \quad (2.124)$$

а также учтено спиновое весовое условие  $\tilde{N}_1\phi = s\phi$ .

Пусть  $Y(k, l)$  обозначает бесследовый  $o(d-2)$  тензор, описываемый диаграммой Юнга с  $k$  индексами в первой строке и  $l$  индексами во второй строке. Тогда решение следовых связей (2.123) можно представить в виде

$$\phi : \bigoplus_{l=0}^s \bigoplus_{k=s}^{\infty} Y(k, l). \quad (2.125)$$

Решение получено тензорным умножением двух независимых бесследовых ранг- $p$  и ранг- $s$  тензоров в (2.124) и вычитания кросс-следов.

При  $s = 0$  пространство (2.125) описывается как бесконечная цепочка симметричных, бесследовых  $o(d-2)$  тензоров [91, 93, 99]. В этом случае, (2.125) напрямую следует из  $o(d-2)$  версии Утверждения **Б.1** из Приложения **Б.3**. При  $s \neq 0$  пространство (2.125) является конусной версией ковариантной формулировки, обсуждавшейся в работе [95].

В частности, рассмотрим случай динамики на пятимерном пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{4,1}$ . Используя тот факт, что  $o(3)$  бесследовые тензоры удовлетворяют дуальным соотношениям Ходжа  $Y(k, 1) \sim Y(k, 0)$  и  $Y(k, m) = 0$  при  $m > 1$  находим, что в этом случае (2.125) является пространством представления, описанным в работе [103] (см. также [102]), т.е. это две бесконечные цепочки бесследовых  $o(3)$  тензоров  $Y(k, 0)$  с  $k = s, s+1, \dots, \infty$ . Четвертичный оператор Казимира (2.122) в пяти измерениях может быть представлен как  $c_4 = W^2$ , где  $W = \epsilon_{klm} H^k S^{lm}$ . Таким образом, воспроизводится результат работы [103], что собственное значение оператора Казимира равно  $W = \pm \mu s$ .

**Несимметричные поля.** Опишем пространство полей непрерывного спина на световом конусе для произвольных спиновых весов  $(s_1, \dots, s_n)$ . Пусть

$Y(l_1, \dots, l_p)$  обозначает бесследовый  $o(d-2)$  тензор с индексами, описываемыми диаграммой Юнга с  $p$  строками длин  $l_j$ , где  $j = 1, \dots, p$ . Тогда решение алгебраических условий (2.115) и (2.116) можно представить в виде

$$\phi : \bigoplus_{k=s_1}^{\infty} \bigoplus_{l_\alpha \leq s_\alpha} Y(k, l_1, \dots, l_{n-1}) . \quad (2.126)$$

Другими словами, пространство решений задается конечным набором бесконечных цепочек диаграмм Юнга с длиной первой строки бегущей от  $s_1$  до бесконечности. Эти цепочки отличаются друг от друга видом нижней части диаграмм, которая определяется всеми допустимыми (совместными с условиями юнговской симметризации) длинами  $l_\alpha = 0, 1, \dots, s_\alpha$ .

## 2.3 Поля дискретного спина на $AdS_d$

Поля в пространстве анти-де Ситтера  $AdS_d$  можно разделить на три класса, согласно значению вакуумной энергии  $E_0$ : это массивные, безмассовые и частично-безмассовые поля. В простейшем случае симметричных полей все три класса были описаны в работах [226, 210, 30, 227, 228, 196]. Однако, как уже обсуждалось, начиная с пяти измерений полностью симметричные поля являются лишь частным случаем общего семейства несимметричных полей.

Более того, можно различать унитарные и неунитарные случаи, согласно области унитарности [30, 229]. Например, все частично-безмассовые поля в пространстве  $AdS_d$  с необходимостью лежат вне области унитарности. Более того, безмассовые поля также могут быть разделены на унитарные и неунитарные [229], причем такой эффект отсутствует в пространстве Минковского. Здесь возникает необходимость определения понятия (частичной) безмассовости, которое, в итоге, сводится к наличию в соответствующих представлениях алгебры изометрии AdS  $o(d-1, 2)$  сингулярных подпредставлений при определенных значениях квантовых чисел (см., например, обсуждение в работе [25]).

На данный момент существуют различные способы описания несимметричных полей. В частности, наиболее существенным для нас является явно AdS-ковариантная формулировка [229] в терминах AdS тензоров, которую

можно рассматривать как обобщение подхода Фронсдала для симметричных  $AdS$  полей [226]. Другим интересующим нас подходом является развернутое описание в терминах дифференциальных форм со значениями в представлениях алгебры изометрий  $o(d-1, 2)$  в качестве фундаментальных полей [191, 76, 193, 230, 231, 44]. Также есть другие интересные способы описания несимметричных  $AdS$  полей [26, 181, 38, 43, 232, 46, 48]. Изучение несимметричных массивных  $AdS$  полей в основном мотивировано их присутствием в спектре струн на  $AdS$  [27] (см. также [233, 166] для инспирированного струнами описания  $AdS$  полей).

Идея формулировки, обобщающей БРСТ описание несимметричных полей на  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  из предыдущего раздела, состоит в удержании явной инвариантности по отношению к  $AdS$  алгебре  $o(d-1, 2)$  с самого начала. Это достигается: (1) определением полей на амбиент-пространстве, (2) использовании  $AdS$ -инвариантного калибровочного отношения эквивалентности. Оказывается, что в рамках амбиент-подхода более естественно использовать параметр веса  $w$ , определяющий радиальное поведение поля, вместо энергии  $E_0$ , которая, на самом деле, линейно связана с весом  $w$ . В терминах веса  $w$  (частично-)безмассовые поля соответствуют специальному целочисленному значению  $w$ , а массивные поля<sup>20</sup> соответствуют произвольным значениям  $w$  (в этом случае калибровочная инвариантность становится чисто алгебраической и может быть полностью исключена).

Алгебраическая структура предлагаемой формулировки существенным образом определяется Хау-дуальной парой  $o(d-1, 2) - sp(2n)$  [208] между алгеброй  $AdS$  изометрий  $o(d-1, 2)$  и симплектической алгеброй  $sp(2n)$ , реализованной в слое. В частности, БРСТ оператор  $\Omega = \nabla + Q_p$ , являющийся аналогом оператора (2.17) на пространстве Минковского, представим суммой  $o(d-1, 2)$  фоновой ковариантной производной  $\nabla$  построенной из  $o(d-1, 2)$  генераторов и чисто алгебраического вклада  $Q_p$  построенного из  $sp(2n)$  генераторов. Остальные связи также выражаются через  $sp(2n)$  генераторы. Помимо значения веса  $w$  различие между массивными, безмассовыми, частично-безмассовыми полями определяется видом выделенной дополнительной связи:

---

<sup>20</sup>В настоящей диссертации массивные поля не рассматриваются (кроме краткого обсуждения в середине раздела 2.3.3), см. работу [163].

для массивных полей она не накладывается, для (частично-)безмассовых полей это  $t$ -я степень соответствующего  $sp(2n)$  генератора, где  $t$  это параметр глубины частично-безмассовых калибровочных преобразований [228, 234].

### 2.3.1 Алгебраическая конструкция

Стандартный способ описания полей на пространстве  $AdS_d$  при условии, что алгебра изометрий реализована линейно, состоит в том, чтобы вместо лоренцевых  $o(d-1, 1)$  тензорных полей рассматривать  $(d-1, 2)$ -ковариантные тензорные поля [226, 30, 229]. Более того, полезно отождествить само пространство-время  $AdS_d$  как однополостной гиперboloид, вложенный в плоское амбиент-пространство  $\mathbb{R}^{d-1,2}$ , так что изометрии задаются алгеброй  $(d-1, 2)$ . Пусть  $X^A$ ,  $A = 0, \dots, d$  это декартовы координаты на  $(d+1)$ -мерном амбиент-пространстве  $\mathbb{R}^{d-1,2}$ . Реализуем пространство  $AdS_d$  как гиперboloид

$$\eta_{AB}X^AX^B + 1 = 0, \quad \eta_{AB} = \text{diag}(- + \dots + -). \quad (2.127)$$

Бесконечно малые изометрии гиперboloида образуют псевдоортогональную алгебру  $o(d-1, 2)$ .

Пусть  $A_I^A$ , где  $A = 0, \dots, d$  и  $I = 0, \dots, n-1$ , – это коммутирующие вспомогательные переменные, преобразующиеся как  $o(d-1, 2)$  векторы. Пространство функций от  $A_I^A$  является  $o(d-1, 2)$ - $sp(2n)$ -бимодулем. Алгебра  $o(d-1, 2)$  реализована следующими дифференциальными операторами

$$J^{AB} = A_I^A \frac{\partial}{\partial A_{BI}} - A_I^B \frac{\partial}{\partial A_{AI}}. \quad (2.128)$$

Алгебра  $sp(2n)$  реализована операторами

$$T_{IJ} = A_I^A A_{JA}, \quad T_I^J = \frac{1}{2} \left\{ A_I^A, \frac{\partial}{\partial A_A^J} \right\}, \quad T^{IJ} = \frac{\partial}{\partial A_A^I} \frac{\partial}{\partial A_{JA}}. \quad (2.129)$$

Эти алгебры образуют Хау-дуальную пару  $o(d-1, 2)$ - $sp(2n)$ , в частности, они коммутируют в данном представлении. Диагональные элементы  $T_I^I$  образуют базис в подалгебре Картана, а  $T^{IJ}$  и  $T_I^J$ ,  $I < J$  являются базисными элементами верхнетреугольной подалгебры. Отметим, что алгебра  $gl(n)$  реализована генераторами  $T_I^J$  как подалгебра в алгебре  $sp(2n)$ , а ее подалгебра  $sl(n)$  генерируется элементами  $T_I^J$  при  $I \neq J$ .

По аналогии с конструкцией алгебры Пуанкаре из предыдущего раздела, нам также понадобится выделить направление в пространстве осцилляторов  $A_I^A$ . Без потери общности будем считать, что оно лежит вдоль  $A_0^A$ , так что с этого момента переменные  $A_0^A$  и  $A_i^A$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , будут рассматриваться по отдельности. В частности, отождествим подалгебру  $sp(2n-2) \subset sp(2n)$ , которая сохраняет данное направление. Введем следующие обозначения  $sp(2n-2)$  генераторов

$$N_i^j \equiv T_i^j = A_i^A \frac{\partial}{\partial A_j^A} \quad i \neq j, \quad N_i = N_i^i \equiv T_i^i - \frac{d+1}{2} = A_i^A \frac{\partial}{\partial A_i^A}, \quad (2.130)$$

которые образуют  $gl(n-1)$  подалгебру, и

$$T_{ij} = A_i^A A_{jA}, \quad T^{ij} = \frac{\partial}{\partial A_i^A} \frac{\partial}{\partial A_{jA}}, \quad (2.131)$$

которые дополняют  $gl(n-1)$  до  $sp(2n-2)$ . В дальнейшем используются две различные реализации  $sp(2n)$  генераторов, содержащих  $A_0^A$  и/или  $\partial/\partial A_0^A$ .

**Реализация на амбиент-полях.** В этом случае рассматриваем пространство полиномов по  $A_i^A$  с коэффициентами в гладких функциях на  $\mathbb{R}^{d-1,2}$  с исключенным началом координат. Если  $X^A$  это координаты на  $\mathbb{R}^{d-1,2}$ ,  $A_0$  и  $\frac{\partial}{\partial A_0}$  реализуются как

$$A_0^A = X^A, \quad \frac{\partial}{\partial A_0^A} = \frac{\partial}{\partial X^A}, \quad (2.132)$$

а остальные переменные  $A_i^A$  реализованы как прежде. Сохраняя прежние обозначения (2.130), (2.131) для генераторов, не содержащих  $X^A$  и/или  $\partial/\partial X^A$ , введем новые обозначения для остальных

$$\mathcal{S}_i^\dagger = A_i^A \frac{\partial}{\partial X^A}, \quad \bar{\mathcal{S}}^i = X^A \frac{\partial}{\partial A_i^A}, \quad \mathcal{S}^i = \frac{\partial}{\partial A_i^A} \frac{\partial}{\partial X_A}, \quad \square_X = \frac{\partial}{\partial X^A} \frac{\partial}{\partial X_A}. \quad (2.133)$$

**Твистованная реализация.** Существует другая возможность реализовать Хау-дуальные алгебры на пространстве полиномов по  $A_i^A$  с коэффициентами в формальных рядах по переменным  $Y^A$ , в которой  $A_0$  и  $\frac{\partial}{\partial A_0}$  реализованы следующим образом [200, 162, 163]

$$A_0^A = Y^A + V^A, \quad \frac{\partial}{\partial A_0^A} = \frac{\partial}{\partial Y^A}, \quad (2.134)$$

где  $V^A$  – это некоторый  $o(d-1, 2)$  вектор нормализованный как  $V^A V_A = -1$ . Содержащие  $A_0$  генераторы  $sp(2n)$  реализованы (неоднородными) дифферен-

циальными операторами на пространстве функций от  $A_i^A$  и  $Y^A$  (это формальная конструкция, здесь мы опускаем рассуждения о функциональных классах). Введем следующие обозначения

$$S_i^\dagger = A_i^A \frac{\partial}{\partial Y^A}, \quad \bar{S}^i = (Y^A + V^A) \frac{\partial}{\partial A_i^A}, \quad S^i = \frac{\partial}{\partial A_i^A} \frac{\partial}{\partial Y_A}, \quad \square_Y = \frac{\partial}{\partial Y^A} \frac{\partial}{\partial Y_A}. \quad (2.135)$$

Данная реализация Хау–дуальных псевдоортогональной и симплектической алгебр будет называть твистованной Хау–дуальной реализацией.

Твистованная реализация совпадает с осцилляторной реализацией, использованной в предыдущих разделах для описания полей на пространстве Минковского, но теперь  $Y^A$  заменено на  $Y^A + V^A$ . Сдвиг на  $V^A$  важен, потому что такая реализация неэквивалентна исходной (т.е. когда  $V^A = 0$ ). Так происходит, потому что замена  $Y^A \rightarrow Y^A + V^A$  плохо определена на пространстве формальных степенных рядов. В противоположность стандартной реализации, когда условия старшего веса подалгебры  $sp(2n - 2)$  определяют конечномерные, неприводимые  $o(d - 1, 2)$ -модули, неоднородная реализация этих условий определяет как конечномерные, так и бесконечномерные  $o(d - 1, 2)$ -модули. В частности, это позволяет единообразно описывать конечномерные калибровочные модули и бесконечномерные модули Вейля,<sup>21</sup> ассоциированные с  $AdS_d$  калибровочными полями.

### 2.3.2 Амбиент–описание $AdS_d$ полей

С помощью реализации в терминах функций на  $\mathbb{R}^{d-1,2}/\{0\}$  со значениями в полиномах по  $A_i^A$  динамику унитарных безмассовых  $AdS_d$  полей можно сформулировать в явно  $o(d - 1, 2)$ -инвариантных терминах [226, 30].<sup>22</sup> Пространство полевых конфигураций может быть описано наложением определенной параболической подалгебры связей из алгебры  $sp(2n)$  с последующим взятием фактора по отношению к калибровочным преобразованиям, порождаемым элементами  $\mathcal{S}_\alpha^\dagger$  при  $\alpha = 1, \dots, p$  [162]. Теперь расширим эту конструкцию на случай полей, не обязательно являющихся унитарными или безмассовыми.

<sup>21</sup>В данном случае, это сводится к твистованному модулю развернутой формулировки (модуль Вейля) [76, 214, 193, 231, 235], см. также Главу 4.

<sup>22</sup>Обзор амбиент–подхода для описания полей на  $AdS_d$  можно найти, например, в работе [236].



Однако, оказывается, что в целом необходимо допустить наложение связей, являющихся старшими степенями определенных  $sp(2n)$  генераторов.

Связи, накладываемые на пространстве полей  $\phi = \phi(X, A)$ , можно сгруппировать следующим образом.

*Общие оффшельные связи.* Это условия бесследовости, юнговские симметризаторы, и спиновые весовые условия

$$T^{ij}\phi = 0, \quad N_i^j\phi = 0 \quad i < j, \quad N_i\phi = s_i\phi. \quad (2.136)$$

В частности, из этих соотношений следует, что спиновые веса упорядочены как  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{n-1}$ . Для описания общего несимметричного поля достаточно выбрать параметр  $n$  удовлетворяющим  $n \leq [\frac{d+1}{2}]$ .<sup>23</sup>

*Радиальная связь.* Радиальная зависимость фиксируется соотношением

$$h\phi = 0, \quad h = N_X - w, \quad N_X = X^A \frac{\partial}{\partial X^A}, \quad (2.137)$$

где  $w$  – это вещественное число, являющееся параметром теории. Это позволяет реализовать единственным образом поле на гиперboloиде (2.127) в терминах поля на амбиент-пространстве, которое подчинено данной связи. Выбирая новые координаты  $(r, x^m)$  на  $\mathbb{R}^{d-1,2}$ , такие что  $r = \sqrt{-X^2}$  является радиусом и  $x^m$  это дилатон-инвариантные координаты  $N_X x^m = 0$ , находим, что  $\phi = \phi_0(x, A) r^w$ .

*Уравнения движения.* Условия, содержащие  $X^A$ -производные вдоль гиперboloида, следует рассматривать как уравнения движения, а не связи:

$$\square_X \phi = 0, \quad \mathcal{S}^i \phi = 0. \quad (2.138)$$

Второе уравнение является условием  $\frac{\partial}{\partial X^A}$ -поперечности.

*Калибровочные преобразования.* Теперь определим калибровочную симметрию. Зафиксируем целый параметр  $p \leq n - 1$  и пусть  $\chi^\alpha = \chi^\alpha(X, A)$  при  $\alpha = 1, \dots, p$ , обозначает калибровочный параметр, который также подчинен всем соотношениям, приведенным выше: это (2.136), (2.137), и (2.138),

<sup>23</sup>В нечетных измерениях присутствуют также т.н. самодуальные поля, выделяемые дополнительными связями, вовлекающие символ Леви-Чивиты (здесь не рассматриваются). Например, в случае  $AdS_5$  самодуальные поля изучались в работе [181].

где содержащие  $N_i^j$ ,  $N_i$  и  $N_X$  связи подправлены следующим образом

$$\begin{aligned} N_i^j \chi^\alpha + \delta_i^\alpha \delta_\beta^j \chi^\beta &= 0 \quad i < j, \\ N_i \chi^\alpha + \delta_i^\alpha \chi^\alpha - s_i \chi^\alpha &= 0, \\ (N_X - w - 1) \chi^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Калибровочное отношение эквивалентности определяется как

$$\phi \sim \phi + \mathcal{S}_\alpha^\dagger \chi^\alpha. \quad (2.140)$$

Можно напрямую убедиться в том, что это отношение совместно со всем связями, наложенными на поля и параметры. Действительно, совместность гарантирована, потому что  $\mathcal{S}_\alpha^\dagger$  плюс остальные связи являются генераторами подалгебры в  $sp(2n)$  алгебре.

*Тангенциальные связи.* В дополнение к уже наложенным связям, требуется, чтобы поля не зависели от поперечных к гиперboloиду компонент  $A_i$  при таких значениях  $i$ , при которых сохраняется калибровочная инвариантность. Это достигается наложением следующих связей

$$\bar{\mathcal{S}}^{\hat{\alpha}} \phi = 0, \quad \hat{\alpha} = p + 1, \dots, n - 1. \quad (2.141)$$

*Дополнительная связь.* В зависимости от значения параметра  $w$ , определенная выше система является либо неприводимой, либо приводимой. Первая возможность реализуется для  $w$  общего положения, вторая возможность возникает только при специальном выборе

$$w = s_p - p - t. \quad (2.142)$$

Здесь параметр  $t$  принимает значения  $t = 1, 2, \dots, t_{\max}$ , где  $t_{\max} = s_p - s_{p+1}$ . В этом случае требуются дополнительные условия неприводимости

$$(\bar{\mathcal{S}}^p)^t \phi = 0. \quad (2.143)$$

Вопрос совместности связей (2.143), (2.137) и калибровочной инвариантности (2.140) выясняется прямым вычислением значения  $w$ . Совместность (2.143) и остальных связей можно проверить, используя следующие коммутационные соотношения  $sl(n) \subset sp(2n)$ :  $[N_j^k, \mathcal{S}_i^\dagger] = \delta_i^k \mathcal{S}_j^\dagger$  и  $[\bar{\mathcal{S}}^i, N_j^k] = -\delta_j^i \bar{\mathcal{S}}^k$ .

Отсюда следует, что  $N_j^k$  с  $j < k$  уменьшают значение индекса  $i$  у  $\mathcal{S}_i^\dagger$  до минимального значения  $i = 1$  и повышают его у  $\bar{\mathcal{S}}^i$  до максимального значения  $i = n - 1$ . Таким образом, образованная связями и калибровочными генераторами подалгебра может вовлекать юнговские симметризаторы  $N_i^j$  вместе с обоими генераторами  $\mathcal{S}_\alpha^\dagger$  и  $\bar{\mathcal{S}}^{\hat{\alpha}}$ , где  $\alpha$  всегда стартует с  $\alpha = 1$ , а  $\hat{\alpha}$  всегда заканчивается значением  $\hat{\alpha} = n - 1$ .

Выбор  $t = 1$  и  $s \equiv s_1 = s_2 = \dots = s_p$  сводится к описанию унитарных калибровочных полей [162]. Отметим, что связи (2.141) и (2.143) эквивалентны наложению связи  $\bar{\mathcal{S}}^i \phi = 0$ , где индекс  $i$  пробегает все допустимые значения,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Так происходит, потому что в этом случае соответствующая диаграмма Юнга обладает верхним прямоугольным блоком длины  $s$  и высоты  $p$ , так что поля автоматически удовлетворяют  $N_\alpha^\beta = 0$  для любого  $\alpha \neq \beta$  и, следовательно,  $\bar{\mathcal{S}}^p \phi = 0$  приводит к  $\bar{\mathcal{S}}^\alpha \phi = 0$ .

### 2.3.3 БРСТ реализация

Связи на поля и параметры компактно описываются введением антикоммутирующих духовых переменных  $b_\alpha$ ,  $\text{gh } b_\alpha = -1$ . В терминах производящих функций  $\Psi(X, A|b)$  связи из (2.136)-(2.138), которые не содержат  $N_i^j, N_i, N_X$ , остаются неизменными, а остальные приобретают духовые поправки

$$(N_i^j + B_i^j)\Psi = 0 \quad i < j, \quad (N_i + B_i)\chi = s_i\Psi, \quad (N_X - B - w)\Psi = 0. \quad (2.144)$$

Здесь введено следующее обозначение для духовых вкладов

$$B_i^j = \delta_i^\alpha \delta_\beta^j b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\beta}, \quad B_\alpha = b_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\alpha}, \quad B = \sum_{\alpha=1}^p B_\alpha, \quad (2.145)$$

(ср. Приложение **Б.1**). Легко видеть, что для компоненты духового числа ноль  $\Psi^{(0)} = \phi(X, A)$  и для компоненты духового числа минус один  $\Psi^{(-1)} = \chi(X, A|b) = \chi^\alpha(X, A)b_\alpha$  воспроизводятся связи на поля и калибровочные параметры, введенные в предыдущем подразделе. В то же время, калибровочное преобразование принимает стандартный вид

$$\delta\phi = \mathcal{Q}_p \chi, \quad \mathcal{Q}_p = \mathcal{S}_\alpha^\dagger \frac{\partial}{\partial b_\alpha}, \quad (2.146)$$

где  $\mathcal{Q}_p$  это БРСТ оператор,  $\text{gh } \mathcal{Q}_p = 1$ .

**Параметры теории.** Теория определяется несколькими параметрами: спины  $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{n-1}$ , вещественный параметр  $w$ , целочисленный параметр  $p$ , входящий через отношение калибровочной эквивалентности (2.140) и связи (2.141). Также, при специальных значениях веса  $w$  возникает дополнительный целочисленный параметр  $t$ , т.н. глубина калибровочных преобразований, который также проявляется через связь (2.143).

Для определения того, какое представление алгебры  $o(d-1, 2)$  выделяется наложением приведенных выше связей рассмотрим функцию  $\Phi(X, A)$ , являющейся представителем класса эквивалентности полевых конфигураций по модулю калибровочной эквивалентности, порождаемой  $\mathcal{Q}_p$ , т.е.,  $\Phi \sim \Phi + \mathcal{Q}_p \chi$  при  $\chi = b_\alpha \chi^\alpha$ . Можно явно вычислить собственное значение квадратичного оператора Казимира

$$C_2 = -\frac{1}{2} J_{AB} J^{AB}, \quad J_{AB} = L_{AB} + M_{AB}, \quad (2.147)$$

где орбитальная и спиновая части задаются выражениями

$$L_{AB} = X_A \frac{\partial}{\partial X^B} - X_B \frac{\partial}{\partial X^A}, \quad M_{AB} = \sum_{i=1}^{n-1} \left( A_{Ai} \frac{\partial}{\partial A_i^B} - A_{Bi} \frac{\partial}{\partial A_i^A} \right). \quad (2.148)$$

Учёт связи (2.136)-(2.138) позволяет прямым вычислением найти

$$C_2 = \left( w(w+d-1) + \sum_{l=1}^{n-1} s_l(s_l - 2l + d - 1) \right) \Phi - 2 \sum_{l=1}^{n-1} \mathcal{S}_l^\dagger \bar{\mathcal{S}}^l \Phi. \quad (2.149)$$

Рассмотрим более подробно последний вклад в (2.149). Суммируемое выражение  $\mathcal{S}_l^\dagger \bar{\mathcal{S}}^l$  при  $l > p$  обнуляется в силу связей (2.141). Остальные члены можно тождественно переписать в виде

$$\sum_{\alpha=1}^p \mathcal{S}_\alpha^\dagger \bar{\mathcal{S}}^\alpha \Phi = \mathcal{Q}_p \chi, \quad \chi = b_\alpha \bar{\mathcal{S}}^\alpha \Phi. \quad (2.150)$$

Легко видеть, что  $\chi$  удовлетворяет всем необходимым связям при условии, что это выполняется для поля  $\Phi$ . Действительно, единственный нетривиальный момент здесь состоит в проверке того, что  $(N_i^j + B_i^j) \chi = 0$ . Однако, это следует из равного нулю коммутатора  $[N_i^j + B_i^j, b_\alpha \bar{\mathcal{S}}^\alpha] = 0$ , который, в свою очередь, алгебраически аналогичен  $[N_i^j + B_i^j, \mathcal{S}_\alpha^\dagger \frac{\partial}{\partial b_\alpha}] = 0$ . Отметим, что для

того, чтобы приведенный выше аргумент работал, все пространство осцилляторов  $A_i$  разбито на две комплиментарные составляющие: осцилляторы  $A_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, p$ , участвующие в калибровочных преобразованиях  $\delta\Phi = \mathcal{S}_\alpha^\dagger \chi^\alpha$  и осцилляторы  $A_{\hat{\alpha}}$ ,  $\hat{\alpha} = p + 1, \dots, n - 1$ , входящие в тангенциальные связи  $\bar{\mathcal{S}}^{\hat{\alpha}}\Phi = 0$ . Другими словами, соответствующие диаграммы Юнга условно разрезаются на две части: верхняя подчинена калибровочной эквивалентности, а нижняя удовлетворяет тангенциальным связям.

Таким образом, последний член в (2.149) кохомологически тривиален и не дает вклада в собственное значение оператора Казимира, действующего на классах эквивалентности полевых конфигураций. Более формально это можно сформулировать так: в  $\mathcal{Q}_p$ -кохомологии с нулевым духовым числом вычислено собственное значение оператора Казимира. Такая постановка задачи хорошо определена, потому что в силу Хау-дуальности  $C_2$  коммутирует с  $\mathcal{Q}_p$ , а также со всеми связями, и следовательно действует в кохомологии.

В итоге, получаем следующее собственное значение

$$C_2\Phi = (w(d - 1 + w) + \sum_{l=1}^{n-1} s_l(s_l - 2l + d - 1))\Phi, \quad (2.151)$$

и поэтому анализ в терминах классов эквивалентности приводит к тому же результату, что и анализ в фиксированной калибровке [30, 229]. Теперь можно сравнить полученное нами значение с известным значением  $C_2 = C_2(E_0, s)$ . Это приводит к следующему отождествлению посредством квадратичного соотношения  $E_0(E_0 - d + 1) = w(w + d - 1)$ , откуда следует, что есть два возможных значения энергии  $E_0^1 = -w$  и  $E_0^2 = w + d - 1$ .

Обсудим два этих случая по отдельности. Если  $w$  принимает специальные значения  $w = s_p - p - t$ , то получаем  $E_0^1 = -(s_p - p - t)$  и  $E_0^2 = s_p - p - t + d - 1$ . Согласно работам [30, 237, 44] правильное значение вакуумной энергии несимметричных полей задается  $E_0^2$ . Если  $w$  общего положения, то калибровочная симметрия становится чисто алгебраической (можно показать), так что калибровочные поля в этом случае отсутствуют. После фиксации алгебраической калибровочной симметрии получаем формулировку, полностью лишенную какой-либо калибровочной симметрии. Соответствующее поле  $\tilde{\Phi}(x, A)$ , зависящее от внутренних координат  $x^m$ , где  $m = 0, \dots, d - 1$ , удовлетворяет

следующим уравнениям движения

$$\tilde{\square}\tilde{\Phi} = \mu^2\tilde{\Phi}, \quad \mu^2 = w(w + d - 1), \quad (2.152)$$

дополненными дифференциальными/алгебраическими связями, возникающими, соответственно, из  $\mathcal{S}^i\Phi = 0$  и (2.136). Здесь  $\tilde{\square}$  – это оператор, реализующий квадратичный оператор Казимира  $-\frac{1}{2}L_{AB}L^{AB}$  в терминах выбранных представителей классов эквивалентности. Явные параметризация  $\tilde{\Phi}$  и вид  $\tilde{\square}$ , а также связи зависят от конкретной фиксации калибровки [163].

**Производящая формулировка.** Обратимся теперь к построению непосредственно самой БРСТ формулировки. Хорошо известный и полезный способ описания  $AdS$  геометрии состоит в рассмотрении тривиального векторного расслоения  $\tilde{V}$  над пространством  $AdS_d$  со слоем, являющимся амбиент-пространством  $\mathbb{R}^{d-1,2}$  и структурной группой  $O(d-1,2)$ . Предположим, что данное расслоение снабжено плоской  $o(d-1,2)$ -связностью  $\omega_m^{AB}(x)$  и имеется фиксированное сечение, задаваемое  $V^A(x)$ , нормированным условием  $\eta_{AB}V^AV^B = -1$ , где  $\eta_{AB}$  это стандартная метрика (2.127) (сечение  $V^A$  играет роль компенсаторного поля, см. Главу 1). Если, помимо этого, локальный репер  $e_m^A(x) = \nabla_m V^A(x)$  имеет максимальны ранг (т.е.,  $d$ ) в любой точке базы, то  $\omega_m^{AB}(x), V^A(x)$  определяют геометрию с постоянной отрицательной кривизной. Действительно,  $g_{kl} = \eta_{AB}e_k^Ae_l^B$  задает метрику  $AdS_d$  пространства. Используя специальный локальный репер, в котором  $V^A = (0, \dots, 0, 1)$ , легко видеть, что условие нулевой кривизны для  $\omega_m^{AB}$  дает отрицательную постоянную кривизну метрики  $g_{kl}$ .

Также, введем пространство  $\mathcal{H}$  полиномов по  $A_i^A$  и духам  $b_\alpha$  с коэффициентами в формальных рядах по переменным  $Y^A$ . Алгебры  $sp(2n)$  и  $o(d-1,2)$  действуют в  $\mathcal{H}$  посредством твистованной реализации, как объяснялось в разделе 2.3.1. Необходимое нам векторное расслоение является расслоением, ассоциированным с  $\tilde{V}$  и слоем  $\mathcal{H}$ . В частности, плоская связность  $\omega_m^{AB}$  определяет плоскую ковариантную производную

$$\nabla = \theta^m \frac{\partial}{\partial x^m} + \frac{1}{2} \theta^m \omega_m^{AB} J_{AB}, \quad (2.153)$$

где  $J_{AB}$  – это  $so(d-1,2)$  генераторы (2.128), действующие на  $\mathcal{H}$  в твистованной реализации, причем выбрано  $V^A = const$ . Здесь и далее, базисные

дифференциалы  $dx^m$  на пространстве  $AdS_d$  заменяются антикоммутирующими духовыми переменными  $\theta^m$ ,  $m = 0, \dots, d-1$ ,  $\text{gh } \theta^m = 1$ , потому что при БРСТ описании  $\nabla$  возникает как часть БРСТ оператора (аналогичная конструкция обсуждалась в предыдущих разделах при описании  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  полей).

БРСТ-расширенное пространство состояний  $\tilde{\mathcal{H}}$  задается дифференциальными формами всех рангов на  $AdS_d$  со значением в расслоении  $\mathcal{H}$ , т.е. мы работаем с  $\mathcal{H}$ -значными полями, зависящими от  $x^m, \theta^m$ . Компоненты поля  $\Psi = \Psi(x, \theta|Y, A, b)$  имеют следующую индексную структуру

$$\Psi_{m_1 \dots m_r}^{A_1, \dots, A_l, \dots; \alpha_1 \dots \alpha_k}(x), \quad (2.154)$$

где  $A_l - o(d-1, 2)$ -векторные индексы,  $\alpha$  и  $m$  – антисимметричные индексы (т.к. соответствующие духовые переменные  $b_\alpha$  и  $\theta^m$  антикоммутируют).

На пространстве состояний  $\tilde{\mathcal{H}}$  определим следующий БРСТ оператор

$$\hat{\Omega} = \nabla + Q_p. \quad (2.155)$$

Здесь  $\nabla$  – производная (4.93),  $Q_p$  – алгебраический оператор вида

$$Q_p = S_\alpha^\dagger \frac{\partial}{\partial b_\alpha}, \quad (2.156)$$

где  $S_\alpha^\dagger$  являются  $sp(2n)$  генераторами (2.135). Конечно,  $Q_p$  это в точности слоевая версия амбиент-пространственного БРСТ оператора  $\mathcal{Q}_p$  из (2.146). Т.к.  $\text{gh } \theta^m = -\text{gh } b_\alpha = 1$ , БРСТ оператор  $\hat{\Omega}$  имеет стандартное духовое число  $\text{gh } \hat{\Omega} = 1$ . Более того, из  $\nabla^2 = 0$ ,  $Q_p^2 = 0$ , а также из того, что имеется структура  $o(d-1, 2) - sp(2n)$ -бимодуля, согласно которой все генераторы  $J_{AB}$  коммутируют со всеми  $sp(2n)$  генераторами, следует, что оператор  $\hat{\Omega}$  нильпотентен, так что его можно интерпретировать как БРСТ оператор.

Прежде чем обсуждать уравнения движения и калибровочные симметрии, необходимо наложить слоевые версии связей, введенных при описании амбиент-подхода в предыдущем подразделе. Оффшельные связи

$$T^{ij}\Psi = 0, \quad (N_i^j + B_i^j)\Psi = 0 \quad i < j, \quad (N_i + B_i)\Psi = s_i\Psi, \quad (2.157)$$

остаются неизменными, а содержащие  $A_0^A$  (т.е., (2.138) и (2.137), (2.141)) принимают вид

$$\square_Y \Psi = 0, \quad S^i \Psi = 0, \quad (2.158)$$

и

$$h\Psi = 0, \quad h = N_Y - B - w, \quad (2.159)$$

$$\bar{S}^{\hat{\alpha}}\Psi = 0, \quad \hat{\alpha} = p + 1, \dots, n - 1. \quad (2.160)$$

Здесь уместно напомнить, что  $N_Y = (Y^A + V^A)\frac{\partial}{\partial Y^A}$  и  $\bar{S}^i = (Y^A + V^A)\frac{\partial}{\partial A_i^A}$  и тем самым подчеркнуть различие с амбиент–реализацией. При специальных значениях  $w = s_p - p - t$  дополнительно накладывается слоевая версия (2.143):

$$(\bar{S}^p)^t\Psi = 0. \quad (2.161)$$

Отметим, что следовые связи в (2.157) и (2.158) можно коллективно представить как  $T^{IJ}\Psi = 0$ . То, что оператор  $Q_p$  действует в подпространстве, выделяемом приведенными выше связями, следует из алгебры связей, которая тождественна алгебре связей амбиент–описания. Ковариантная производная  $\nabla$  коммутирует со всеми связями в силу Хау–дуальности  $o(d - 1, 2) - sp(2n)$ .

Согласно общей прескрипции, физические поля отождествляются с элементами  $\Psi^{(0)}$  с духовым числом 0, а калибровочные параметры с элементами  $\Psi^{(-1)}$  с духовым числом  $-1$  (см. предыдущие разделы). Их компонентная форма, вытекающая из (2.154) задается значениями  $k - l = 0$  и  $k - l = -1$ , соответственно. Уравнения движения и преобразования имеют вид

$$\hat{\Omega}\Psi^{(0)} = 0, \quad \delta\Psi^{(0)} = \hat{\Omega}\Psi^{(-1)}. \quad (2.162)$$

Компонентный вид этих соотношений можно найти в работе [162]. Параметры следующих поколений возникают в духовых числах  $-n$  и соответствующие калибровочные преобразования имеют вид  $\delta\Psi^{(-n)} = \hat{\Omega}\Psi^{(-n-1)}$ . Элементы положительного духового числа соответствуют уравнениям движения и соотношениям приводимости.

Хотя предъявленная формулировка достаточно компактна, важно отметить, что пространство представления сильно ограничено накладываемыми связями. Описание, в котором (почти) все связи имплементированы через БРСТ процедуру, так что пространство полей (почти) никак не ограничено, может быть весьма полезным. Формулировки такого типа можно использовать для получения других эквивалентных форм динамики посредством исключения обобщённых вспомогательных полей методом гомологической редукции, по аналогии с  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  полями.



Например, можно кратко описать версию парент–формулировки, в которой все связи, содержащие производные по отношению к  $Y^A$  наложены через БРСТ процедуру [162]. А именно, БРСТ оператор имеет вид

$$\Omega^{\text{parent}} = \nabla + \bar{\Omega}, \quad \bar{\Omega} = Q_p + \text{“more”} = S_\alpha^\dagger \frac{\partial}{\partial b_\alpha} + c_0 \square + c_i S^i - \delta_\alpha^i c_i \frac{\partial}{\partial b_\alpha} \frac{\partial}{\partial c_0}, \quad (2.163)$$

где введены новые антикоммутирующие духовые переменные  $c_0$  и  $c_i$ , ср. (2.29) и (2.86). Отметим, что остальные связи (2.157) и (2.159)-(2.161) или, более точно, их  $\bar{\Omega}$ -инвариантные расширения, по-прежнему накладываются напрямую на элементы пространства представления. С помощью этой формы теории можно легко получить амбиент БРСТ описание, в котором, в противоположность БРСТ формулировке, рассмотренной ранее в этом разделе, калибровочные параметры не подчинены дифференциальным связям. Действительно, следуя работе [162] можно показать, что эта формулировка эквивалентна амбиент БРСТ описанию, задаваемому оператором  $\bar{\Omega}$ , в котором все связи взяты в амбиент реализации вместо твистованной реализации. То же самое применяется к оффшельным связям (2.159)-(2.161). Здесь уместно отметить, что структура возникающего таким образом БРСТ оператора, который на самом деле есть реализованный иначе  $\bar{\Omega}$  (2.163), очень похожа на БРСТ оператор, использованный для описания бозонных струн и полей высших спинов на пространстве Минковского (см., например, работы [166, 36, 161], а также обсуждение в разделе 2.1). Ожидается, что эта формулировка будет полезна при построении при построении соответствующего лагранжева описания и анализе спектра струн на пространстве  $AdS_d$ .

### 2.3.4 $Q_p$ –когомологический анализ

Для системы с БРСТ оператором вида  $\Omega = \nabla + Q$ , где  $Q$  – алгебраический оператор, важная информация закодирована в  $Q$ -когомологии. В нашем случае, интерес представляет  $Q_p$ -когомология в слое, т.е. в подпространстве  $\mathcal{H}_{\text{on-shell}} \subset \mathcal{H}$ , выделяемом связями (2.157)-(2.161).  $Q_p$ -когомология градуирована духовым числом (отметим, что духи  $\theta^m$  не являются слоевыми переменными, а следовательно не дают вклад в духовую степень в  $\mathcal{H}$ ).

$Q_p$ -когомология может интерпретирована разными способами. Во-первых, исключением всех обобщённых вспомогательных полей, ассоциированных с не

принадлежащими когомологии элементами, система редуцируется к виду, в котором поля принимают значения только в  $Q_p$ -когомологии. Такая форма теории, известная как развернутая формулировка (см. обсуждение в разделе 2.1), является в некотором смысле минимальной среди всех формулировок, в которых пространственно-временные производные входят только через дифференциал де Рама. Элементы  $Q_p$ -когомологии с духовым числом  $-k$  дают физические поля, являющиеся дифференциальными  $k$ -формами, калибровочные параметры, являющиеся дифференциальными  $(k-1)$ -формами, и т.д. В частности, в контексте развернутой формулировки  $Q_p$ -когомология в нулевом духовом числе известна как модуль Вейля<sup>24</sup>, а когомологии в отрицательных духовых числах известны как калибровочный модуль. Ассоциированные с ними поля это дифференциальные 0-формы и  $k$ -формы, связанные, соответственно, с линеаризованными кривизнами и калибровочными полями.

Опишем  $Q_p$ -когомологию в подпространстве  $\mathcal{H}_{\text{on-shell}} \subset \mathcal{H}$ , выделяемом связями (2.157)–(2.161). А именно, покажем, что

$$H^k(Q_p, \mathcal{H}_{\text{on-shell}}) = \begin{cases} \text{модуль Вейля,} & k = 0, \\ 0, & k \neq 0, -p, \\ \text{калиб. модуль,} & k = -p. \end{cases} \quad (2.164)$$

где  $H^k(\cdot)$  обозначает когомологию в духовом числе  $k$ . Когомология в промежуточных духовых числах пуста, в духовом числе  $k = 0$  непуста и отождествляется с бесконечномерным модулем Вейля, в духовом числе  $-p$  также непуста, но только при специальных значениях параметра  $w$  (2.142), в случае чего она описывает конечномерный калибровочный модуль, вводимый в рамках развернутой формулировки [76, 193, 35, 231, 44, 162, 235].

Развернутые уравнения определяются БРСТ оператором, индуцируемым  $\hat{\Omega}$  из (2.155) в когомологии его второго члена  $Q_p$ . Она может быть вычислена с помощью стандартной гомологической техники согласно Приложению Б.2 (мы не будем обсуждать развернутую форму уравнений и калибровочных симметрий, подробности могут быть найдены в работах [231, 44, 238]).

**Калибровочный модуль.** Опишем  $Q_p$ -когомологию в случае, когда  $w$

---

<sup>24</sup>Как и в разделе 2.1 термин «модуль» здесь указывает на алгебру изометрий  $o(d-1, 2)$ .  $Q_p$ -когомология является  $o(d-1, 2)$ -модулем, потому что  $Q_p$  коммутирует с  $o(d-1, 2)$  алгеброй, или, в более широком смысле, с рассматриваемой алгеброй пространственно-временных симметрий.

принимает специальные значения  $w = s_p - p - t$  при  $t = 1, 2, \dots, t_{\max}$ . Случай параметра  $w$  в общем положении соответствует массивным полям и обсуждается в работе [163]. Условие кограницы тривиально в минимальном духовом числе и поэтому представители  $Q_p$ -когомологии в духовом числе  $-p$  выделяются следующими условиями

$$\begin{aligned} S_\alpha^\dagger \Psi = 0, \quad (\bar{S}^p)^t \Psi = 0, \quad \bar{S}^{\hat{\alpha}} \Psi = 0, \quad (N_Y + t - s_p) \Psi = 0, \\ \alpha = 1, \dots, p, \quad \hat{\alpha} = p + 1, \dots, n - 1, \end{aligned} \quad (2.165)$$

а также связями (2.157). Полезно описать решения этих уравнений (2.165) используя параметризацию в терминах  $Y'^A = Y^A + V^A$ . Такая замена переменных законна, потому что из первого условия в (2.165) следует, что для однородной компоненты степень по  $Y^A$  не может превышать степени по  $A_i^A$  и поэтому  $\Psi$  является полиномом по  $Y^A$  конечного порядка.

Учитывая наличие полного духового числа, физическое поле, ассоциированное с  $Q_p$ -когомологией в духовом числе  $-p$ , является дифференциальной  $p$ -формой. Так происходит, потому что для достижения нулевого полного духового числа должно быть в точности  $p$  переменных  $\theta^m$ . Эта  $p$ -форма на  $AdS_d$  принимает значения в конечномерном неприводимом  $o(d - 1, 2)$ -модуле, описываемом диаграммой Юнга с длиной строк

$$s_1 - 1 \geq \dots \geq s_{p-1} - 1 \geq s_p - 1 \geq s_p - t \geq s_{p+1} \geq \dots \geq s_{n-1}. \quad (2.166)$$

Отметим наличие строки длины  $s_p - 1$  в середине диаграммы с последующей строкой длины  $s_p - t$ . Согласно [193, 44] такие поля описывают частично-безмассовые  $AdS_d$  поля спина  $(s_1, \dots, s_{n-1})$  с калибровочной симметрией, ассоциированной с  $p$ -й строкой и глубиной  $t$ .

**Пустая промежуточная когомология.** Доказательство того, что  $Q_p$ -когомология пуста в промежуточных духовых числах основывается на следующем наблюдении: представитель  $Q_p$ -когомологии в промежуточном духовом числе всегда может быть выбран полиномом. Это можно показать привлекая когомологические аргументы применительно к БРСТ оператору (см. предыдущий подраздел) через который наложены все связи  $S_\alpha^\dagger, N_i^j, h, \bar{S}^{\hat{\alpha}}, (\bar{S}^p)^t$  со своими собственными духами, так что только весовые условия накладываются напрямую на поля, выделяя подпространство в пространстве представления. Это позволяет переформулировать когомологическую задачу в (почти)

неограниченном связями пространстве. В общем это дает дополнительные классы когомологий, но не влияет на конечный ответ в интересующем нас секторе.

Вводя подходящую градуировку можно редуцировать задачу к вычислению когомологии слагаемого, имплементирующего связи  $N_\alpha^\beta, S_\alpha^\dagger$ , ассоциированных с верхней половиной соответствующей диаграммы Юнга. Когомология таких слагаемых известны из работы [161] и соответствующие представители могут быть выбраны полиномами. Далее, можно показать, что дополнение таких элементов до представителей полного БРСТ оператора также полиномиально. Другой способ увидеть полиномиальность представителей состоит в проведении прямого анализа соответствующего условия коцикла посредством развитой в работе [162] техники.

Итак, в пространстве полиномов можно перейти к новой переменной  $Y'^A = Y^A + V^A$  и переформулировать проблему в терминах стандартных конечномерных  $sl(n)$ -модулей. Это позволяет установить, что для полиномиального элемента духового числа  $-k$  связи (2.159) и (2.161) в целом несовместимы. Действительно, возникают весовые условия

$$N_Y \Psi_k = (s_p + k - t - p) \Psi_k, \quad (N_p + B_p) \Psi_k = s_p \Psi_k, \quad (2.167)$$

а также

$$(\bar{S}^p)^t \Psi_k = 0. \quad (2.168)$$

Из последнего условия следует, что  $\#Y'^A \geq \#A_p^A - t + 1$ , что противоречит (2.167) за исключением  $k = p$ , т.к.  $\#A_p^A$  — это либо  $s_p$ , либо  $s_p - 1$ , в зависимости от того, присутствует или нет дух  $b_p$ . Таким образом, получаем

**Утверждение 2.4.**  *$Q_p$ -когомология, вычисленная в подпространстве, выделяемом связями (2.159) и (2.161), пуста в промежуточных духовых числах  $0 < -k < p$ .*

**Вейлевская когомология.** В пространстве формальных степенных рядов существует нетривиальная когомология в духовом числе 0. Это модуль Вейля, который будет описан ниже. Его структура для унитарных безмассовых  $AdS$  калибровочных несимметричных полей была описана в работах [231, 162] (см. также работу [193] с частными случаями несимметричных полей

и работы [191, 76], где были рассмотрены симметричные поля) и в общем случае частично-бездмассовых и неунитарных бездмассовых полей в работе [235].

Производящая БРСТ формулировка дает независимое определение модуля Вейля как  $Q_p$ -когомологии в нулевом духовом числе. При таком способе структура модуля присутствует в построении с самого начала, потому как  $Q_p$  является  $o(d-1, 2)$ -инвариантным. Более того, т.к. условие коцикла тривиально в этом случае, то модуль Вейля это просто отношение  $o(d-1, 2)$ -модуля  $\mathcal{H}_{\text{on-shell}}$  по  $o(d-1, 2)$ -инвариантному подпространству. Напомним, что алгебра  $o(d-1, 2)$  дана в твистованной реализации (см. предыдущий подраздел).

*Лоренц-ковариантный базис.* Выберем  $V^A = \delta_d^A$  и положим  $Y^a = y^a$ ,  $Y^d = z$ . Аналогичным образом,  $A_i^a = a_i^a$  и  $A_i^d = u_i$ . В дальнейшем всегда будем предполагать, что все элементы  $\Psi = \Psi(Y, A)$  полностью бесследовы,  $T^{IJ}\Psi = 0$ . Нам понадобится следующая

**Лемма 2.1.** *Пространство всех бесследовых элементов  $\Psi = \Psi(Y, A)$ , удовлетворяющих условиям*

$$(\bar{S}^p)^t \Psi = 0, \quad \bar{S}^{\hat{\alpha}} \Psi = 0, \quad h \Psi = 0, \quad (2.169)$$

где  $\hat{\alpha} = p+1, \dots, n-1$ , изоморфно пространству полностью бесследовых элементов  $\Psi = \Psi(a, y, w, z)$ , удовлетворяющих условиям

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_p}\right)^t \Psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u_{\hat{\alpha}}} \Psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \Psi = 0. \quad (2.170)$$

Доказательство дано в работе [163]. Эта лемма демонстрирует, как связи  $\bar{S}^i$  и  $h$  фиксируют тот или иной типа зависимости от  $(d+1)$ -й переменной  $z$  и  $u_i$ . В частности, с ее помощью элементы, удовлетворяющие (2.159)-(2.161) можно представить в виде ряда по переменным  $u_\alpha$ ,

$$\psi = \sum_{k \geq 0} u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_k} \psi_k^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(a, y|b). \quad (2.171)$$

Этот ряд обрывается на конечном порядке, определяемом спиновыми весами  $s_\alpha$  и глубиной  $t$ . Отсюда следует, что элементы  $\psi$  не зависят от  $u_{\hat{\alpha}}$  и  $(u_p)^{t+m}$  при  $m \geq 0$ . Также, однородность по  $u_\alpha$  определяет полезную градуировку, называемую уровнем.

БРСТ оператор  $Q_p$  и связи (2.157), (2.158) можно переписать используя параметризацию (2.171). При этом следовые условия остаются неизменными, а юнговские симметризаторы и весовые спиновые условия принимают вид

$$(n_\alpha + u_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha} + B_\alpha - s_\alpha)\psi = 0, \quad (n_{\hat{\alpha}} - s_{\hat{\alpha}})\psi = 0, \quad (2.172)$$

$$(n_\alpha^\beta + u_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\beta} + B_\alpha^\beta)\psi = 0, \quad n_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}\psi = 0, \quad (n_\alpha^{\hat{\beta}} - u_\alpha \bar{s}^{\hat{\beta}})\psi = 0, \quad (2.173)$$

где  $\bar{s}^{\hat{\beta}} = y^a \frac{\partial}{\partial a^{\hat{\beta}}}$ , и  $\alpha < \beta$  и  $\hat{\alpha} < \hat{\beta}$ . Если воспользоваться связью (2.159), переписанной в лоренцевом базисе как  $((z+1)\frac{\partial}{\partial z} + y^a \frac{\partial}{\partial y^a} - B + p + t - s_p)\phi = 0$ , то БРСТ оператор можно привести к следующему виду

$$\tilde{Q}_p = q_p - \hat{h} u_\alpha \frac{\partial}{\partial b_\alpha}, \quad (2.174)$$

где  $\tilde{Q}_p$  – это оператор (2.156), переписанный в терминах параметризации (2.171), и

$$q_p = s_\alpha^\dagger \frac{\partial}{\partial b_\alpha} \equiv a_\alpha^a \frac{\partial}{\partial y^a} \frac{\partial}{\partial b_\alpha}, \quad \hat{h} = n_y - B + p + t - s_p. \quad (2.175)$$

Напомним, что  $(u_p)^t$  равен нулю в подпространстве и поэтому соответствующий вклад в (2.174) также равен нулю. В частности, при  $t = 1$ , пропорциональный  $u_p$  член в  $Q_p$  равен нулю. Отметим также, что для унитарных безмассовых полей все  $u_\alpha = 0$ , как следствие  $s_1 = \dots = s_p$ , так что редуцированный оператор это просто  $q_p$  [162].

*Модуль Вейля.* Сначала вспомним, что Пуанкаре модуль Вейля (PW) спина  $l_1 \geq l_2 \dots \geq l_{n-1}$  [191, 205] можно определить [161] как подпространство  $sl(n)$  векторов старшего веса в пространстве полиномов по переменным  $y^a$  и  $a_i^a$ , удовлетворяющих соответствующим весовым условиям (см. раздел **2.1**). PW-модуль спина  $l_1 \geq l_2 \dots \geq l_{n-1}$  можно рассматривать как подпространство, выделяемое юнговским симметризатором  $n_i^j \tilde{\psi} = 0$ , оставшимися условиями старшего веса  $\bar{s}_i \tilde{\psi} = 0$ , весовыми условиями  $(n_i - l_i) \tilde{\psi} = 0$ , и условием нулевого джухового числа  $gh \tilde{\psi} = 0$ . Для заданного  $AdS_d$  поля спина  $s_1 \geq \dots \geq s_{n-1}$  PW-модуль называется допустимым, если его веса  $l_i$  удовлетворяют  $l_i = s_i - \nu_i$ , где  $\nu_i = 0$ ,  $i \leq p$  и  $\nu_i \geq 0$ ,  $i > p$  и  $\nu_{p+1} + \dots + \nu_{n-1} \leq s_{p+1}$ .

Для унитарных полей  $AdS_d$  модуль Вейля изоморфен прямой сумме допустимых PW-модулей. Следующее утверждение является обобщением этого

результата. Оказывается, что когомология  $H^0(q_p)$ , вычисленная для спинов  $(m_1, \dots, m_{n-1})$ , обозначаемая как  $\mathcal{M}_{0,p,m}$ , может быть разложена в прямую сумму PW-модулей.

**Утверждение 2.5.** *Когомология в нулевом духовом числе  $\mathcal{M}_{0,p,m}$  БРСТ оператора  $q_p$ , вычисленная в подпространстве (2.172), (2.173), изоморфна прямой сумме допустимых PW-модулей.*

Более детальное обсуждение этого утверждения содержится в работе [163]. Спиновые веса  $\{m\}$  допустимого PW-модуля задаются исходными спинами и параметрами  $p$  и  $t$  посредством весовых связей (2.172). Обозначая  $H^0(q_p)$  на  $k$ -м уровне (см. (2.171)) как  $\mathcal{M}_{0,m,p}^{(k)}$  и его спиновые веса как  $\{m\}_k$  находим, что спины задаются как  $m_{\hat{\alpha}} = s_{\hat{\alpha}}$  при  $\hat{\alpha} = p + 1, \dots, n - 1$ , и  $m_{\alpha} = s_{\alpha} - k_{\alpha}$  при  $\alpha = 1, \dots, p$ , таком что  $k_1 + \dots + k_p = k$ .

Таким образом, вычисление  $Q_p$ -когомологии сводится к проверке того, как второй член в (2.174) действует в  $H^0(q_p)$ . Можно показать, что используя этот член, элемент  $\psi_k \in \mathcal{M}_{0,l,p}$  любого уровня  $k$ , чья градуировка по  $y^a$  меньше  $s_1$ , может быть положен равным нулю. Обозначая подпространство всех таких элементов из  $\mathcal{M}_{0,m,p}^{(k)}$  как  $\mathcal{Z}_{0,m,p}^{(k)}$  получаем компонентное описание  $AdS_d$  вейлевской когомологии [163]:

**Утверждение 2.6.**  *$AdS_d$  модуль Вейля  $\mathcal{M}_0$  заданного спина изоморфен прямой сумме фактор-пространств*

$$\mathcal{M}_0 = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{\{m\}_k} \mathcal{M}_{0,m,p}^{(k)} / \mathcal{Z}_{0,m,p}^{(k)} , \quad (2.176)$$

где  $\{m\}_k$  обозначает множество допустимых спиновых весов на  $k$ -м уровне.

Для унитарных полей оператор  $\hat{h}$  не дает вклада и  $Q_p = q_p$ . В результате,  $\mathcal{Z}_{0,m,p}^{(k)} = 0$  и  $AdS_d$  вейлевская когомология является прямой суммой допустимых PW-модулей. Другими словами, в этом случае воспроизводится гипотеза Бринка–Васильева–Мецаева, сформулированная в работе [25] и доказанная в работах [231, 162, 235]. Для неунитарных полей  $AdS_d$  модуль Вейля не представляется в виде прямой суммы допустимых PW-модулей. В качестве иллюстрации, в работе [163] подробно разобран пример полностью симметричного частично–безмассового поля ( $n = 2$ ,  $p = 1$ ,  $t \geq 1$ ), демонстрирующий утверждение выше.

# Глава 3. $AdS_{d+1}/CFT_d$ соответствие для несимметричных полей

В этой главе формулируется и изучается  $AdS_{d+1}/CFT_d$  соответствие для несимметричных тензорных полей в пространствах  $AdS_{d+1}$  и  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  на примере простейших полей такого типа, чья индексная структура описывается диаграммами Юнга с одной строкой и одним столбцом, т.н. диаграммы типа «крюк» [167, 169].

Напомним, что  $AdS_{d+1}/CFT_d$  дуальность устанавливает словарь между калибровочными полями в объеме и сохраняющимися токами на границе. В случае симметричных полей произвольного спина теоретико-групповое обоснование дуальности дается обобщённой теоремой Флато–Фронсдала для двух скалярных синглетонов [112, 113]. Граничные сохраняющиеся токи в этом случае описывают композитные возбуждения двух безмассовых скалярных полей (см., например, [239]).

Замечательно, что соответствие можно конструктивно расширить на случай полей смешанного типа симметрии. Обобщённая теорема Флато–Фронсдала по-прежнему играет центральную роль, однако теперь она вовлекает два спинорных синглтона. Действительно, тензорный квадрат двух  $o(d, 2)$  спинорных синглетонов раскладывается в бесконечную сумму бозонных безмассовых несимметричных  $AdS_{d+1}$  полей типа «крюк» и конечный набор массивных, антисимметричных  $AdS_{d+1}$  полей, включая массивный скаляр [113].

Первый вопрос, решаемый в этой главе, состоит в явном построении со-



храняющихся несимметричных токов, лежащих в основе теоретико–полевой реализации обобщённой теоремы Флато–Фронсдала. Соответствующие токи, которые будут в дальнейшем называться токами Флато–Фронсдала, строятся из двух безмассовых спиноров на пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  и конечно–го числа  $(s-1) \geq 0$  пространственно–временных производных умноженных на элементы алгебры Клиффорда ранга  $p \leq [d/2]$ . Их конформные размерности

$$\Delta_{crit} = s + d - 2 , \quad (3.1)$$

удовлетворяют унитарному пределу  $o(d, 2)$  бесконечномерных несимметричных представлений старшего веса типа «крюк» [30] (см. раздел **2.3.3** предыдущей главы). Данные токи являются  $o(d, 2)$  примарными полями смешанного типа симметрии и соответствующие условия сохранения конформно–инвариантны, т.е. также являются примарными полями.

Второй вопрос, решаемый в этой главе, состоит в теоретико–полевым рассмотрении процедуры Губсера–Клебанова–Полякова–Виттена [5, 6] для несимметричных безмассовых полей в пространстве  $AdS_{d+1}$ . Предыдущий анализ этой проблемы сводился к рассмотрению несимметричных безмассовых полей в  $AdS_5$  [32] и несимметричных массивных полей в  $AdS_{d+1}$  [240].<sup>25</sup> Безмассовые несимметричные поля в пространствах общей размерности  $AdS_{d+1}$  не рассматривались с точки зрения голографии и одна из основных целей данной главы состоит в том, что бы положить начало таким исследованиям.

## 3.1 Конформные несимметричные поля

### 3.1.1 Обобщённая теорема Флато–Фронсдала

Давайте кратко опишем бесконечномерные  $o(d, 2)$  модули, соответствующие безмассовым несимметричным  $AdS_{d+1}$  полям типа «крюк» и их реализацию в рамках обобщённой теоремы Флато–Фронсдала в секторе двух спинорных синглетонов. Рассмотрим  $AdS_{d+1}$  бозонные безмассовые поля со спинами,

<sup>25</sup>С голографической точки зрения, полностью симметричные поля произвольного спина впервые были рассмотрены в [26, 241, 242]. См. также работы по голографическому описанию симметричных полей в развернутой формулировке [243, 244, 245, 246].

описываемыми диаграммами Юнга с одной строкой длины  $s$  и одним столбцом и высоты  $p$ .<sup>26</sup> Соответствующие унитарные, бесконечномерные представления старшего веса алгебры  $o(d, 2)$  обозначаются  $\mathcal{D}(E_0 | s, p)$ , где  $o(2)$  вес это энергия  $E_0$ , значение которой задается выражением [30]

$$E_0 = s + d - 2, \quad (3.2)$$

и  $o(d)$  спиновыми веса  $(s, \overbrace{1, 1, \dots, 1}^{p-1}, 0, \dots, 0)$ , где  $s > 1$ ,  $p \leq [d/2]$ , изображаются парой чисел  $s, p$ . В дальнейшем, тензоры симметрии типа «крюк» называются тензорами  $\{s, p\}$ -типа. Случай  $s = 1, p \geq 1$  полностью антисимметричных безмассовых полей выделен, соответствующая энергия задается формулой (3.3). Отметим, что такое же значение энергии имеет место для симметричных безмассовых полей  $\mathcal{D}(s + d - 2 | s)$ , потому что  $E_0$  для унитарных представлений общего типа симметрии зависит только от размера самого верхнего прямоугольного блока соответствующей диаграммы Юнга [30]. Например, простейшее поле типа «крюк»  $s = 2, p = 2$  имеет энергию  $E_0 = d$ , что совпадает со значением энергии поля  $AdS_{d+1}$  гравитона.

Неунитарные безмассовые представления  $\mathcal{D}(E_0 | s, p)$  такого же типа симметрии имеют значения энергии [30]<sup>27</sup>

$$E_0 = d - p. \quad (3.3)$$

Отметим, что оно совпадает с энергией унитарных, антисимметричных безмассовых полей. Как следствие, значения  $E_0$  для неунитарных полей типа «крюк» высоты  $p$  и  $p$ -форм безмассовых унитарных полей совпадают. Например, простейшее поле типа «крюк»  $s = 2, p = 2$  имеет энергию  $E_0 = d - 2$ , которая одновременно является энергией  $AdS_{d+1}$  поля Калб-Рамона.

Замечательный факт относительно унитарных, несимметричных представлений  $\mathcal{D}(E_0 | s, p)$  с произвольными спинами состоит в том, что все они возникают тензорном произведении двух спинорных синглетонов Дирака. Это

<sup>26</sup>Теоретико-полевое описание  $AdS_{d+1}$  полей смешанного типа симметрии известно в рамках различных подходов [30, 25, 32, 33, 34, 40, 44, 163, 50, 51], см. также Главу 2. Также известны некоторые кубические взаимодействия между несимметричными полями и гравитацией [160, 84, 85], см. также Главу 2.

<sup>27</sup>Безмассовые поля с энергиями ниже унитарного предела (3.1) = (3.2) соответствуют неунитарным  $o(d, 2)$  представлениям. Их калибровочные симметрии имеют структуру, отличную от структуры унитарных безмассовых полей, см. [30, 25].

утверждение известно как теорема Флато–Фронсдала, которая изначально была сформулирована и доказана в случае  $o(3, 2)$  алгебры (в этом случае  $p = 1$ , так что возникают только симметричные представления) [112]. Позже эта теорема была расширена на случай  $o(d, 2)$  алгебр при произвольном значении  $d$ , и было показано, что возникает вся совокупность унитарных представлений типа «крюк» со всеми допустимыми спинами  $s$  и  $p$  [113].<sup>28</sup>

Чтобы сформулировать эту теорему давайте рассмотрим дираковский спинорный синглетон, определяемый как  $o(d, 2)$  бесконечномерный, унитарный модуль старшего веса с весами

$$E_0 = \frac{d-1}{2}, \quad \text{и} \quad s = \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right), \quad (3.4)$$

и введем обозначение  $\text{Di} = \mathcal{D}\left(\frac{d-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Тензорное произведение двух спинорных синглетонов раскладывается в прямую сумму  $o(d, 2)$  представлений типа «крюк» [113]

$$\begin{aligned} \text{Di} \otimes \text{Di} = & \mathcal{D}(d-1, 0) \oplus \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{[d/2]} \oplus \left( \mathcal{D}(s+d-2 | s, p) \oplus \right. \\ & \left. \oplus \mathcal{D}_+(s+d-2 | s, d/2) \oplus \mathcal{D}_-(s+d-2 | s, d/2) \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где (анти-)самодуальные представления  $\mathcal{D}_{\pm}(s+d-2 | s, d/2)$  возникают только в четных измерениях. Отметим, что представления  $\mathcal{D}(d-1, 0)$  и  $\mathcal{D}(d-1 | 1, m)$ ,  $m = 2, 3, \dots$  соответствуют унитарным скалярным и антисимметричным полям, являющимися массивными, потому как их энергии лежат выше критического значения (3.3). Все остальные поля в приведенном разложении являются унитарными, безмассовыми полями.

В последующих разделах будет развита реализация обобщённой теоремы Флато–Фронсдала (3.5) на уровне сохраняющихся токов, построенных из конформных спинорных полей. С этой целью сперва описываются несимметричные  $o(d, 2)$  примарные поля и соответствующие конформно-инвариантные условия, которые будут отождествлены с токами и условиями сохранения.

<sup>28</sup>В  $d = 4$  случае  $o(4, 2)$  представления произвольного типа симметрии возникают в тензорном произведении двух (супер)дублетов [247].

### 3.1.2 Конформно–инвариантные соотношения

Рассмотрим конформную алгебру  $o(d, 2)$ , действующую на  $d$ -мерном пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  координатными преобразованиями, оставляющими интервал  $ds^2 = \eta_{mn}dx^m dx^n$  инвариантным с точностью до  $x$ -зависимого положительного скалярного фактора,  $m, n = 0, \dots, d - 1$ . Соответствующий вектор Киллинга можно представить в виде

$$\xi_m(x) = P_m + \Lambda_{mn}x^n + Dx_m + K_mx^2 - 2x_m(Kx), \quad (3.6)$$

где  $P_m$ ,  $\Lambda_{mn} = -\Lambda_{nm}$ ,  $D$ , и  $K_m$  – это постоянные  $o(d - 1, 1)$  тензоры, параметризующие элементы конформной алгебры.

Одной из основных целей данного раздела является формулировка конформно-инвариантных условий, которые можно наложить на заданное несимметричное примарное поле. Такая классификационная задача была полностью решена в работе [248] с помощью техники, основанной на развернутой формулировке, исходной разработанной в контексте изучения динамики полей высших спинов. Конформные операторы и инвариантные условия для  $SU^*(4)$  группы также изучались в работе [249],  $O(4, 2)$  конформные операторы, реализованные как базисные элементы ОРЕ разложения полей материи на пространстве  $\mathbb{R}^{3,1}$  обсуждались в работах [250, 251]. Тем не менее, для целей рассмотрения примарных полей частного типа симметрии более прямым и эффективным путем оказывается использование стандартной теоретико–полевой конструкции, разработанной в случае полей низших спинов (см., например, [252]).

Основной идеей поиска конформно–инвариантных уравнений является изучение вторичных операторов для заданного примарного оператора и нахождение условий, при которых вторичный оператор опять оказывается первичным, в следствии чего конформная инвариантность остается ненарушенной. С теоретико–представленческой точки зрения такие состояния являются сингулярными векторами в представлениях, порожденных из примарных векторов. В рассматриваемой конформной теории поля примарные состояния и их сингулярные потомки реализованы как токи и условия сохранения.

Примарное поле  $\mathcal{O}^A(x)$ , где  $x \in \mathbb{R}^{d-1,1}$  и коллективный индекс  $A$  обозначает компоненты неприводимого представления алгебры Лоренца  $o(d - 1, 1)$ ,

преобразуется по отношению к конформному вектору Киллинга (3.6) следующим образом [253]

$$\delta_\xi \mathcal{O}^A(x) = -(L_\xi^\Delta \mathcal{O})^A(x), \quad L_\xi^\Delta = \xi^m \partial_m + \Delta \sigma_\xi - \frac{1}{4}(\partial_m \xi_n - \partial_n \xi_m) \Sigma^{mn}, \quad (3.7)$$

где  $(\Sigma^{mn})^A_B = -(\Sigma^{nm})^A_B$  – это  $o(d-1, 1)$  матрицы, производные  $\partial_m = \partial/\partial x^m$ , параметры  $\sigma_\xi$  являются комбинацией  $\sigma_\xi = D - 2(Kx)$ , и  $\Delta$  – это конформная размерность.

Рассмотрим частное примарное поле, являющееся бесследовым  $o(d-1, 1)$  тензором третьего ранга  $\mathcal{O}_{m|n|k}(x)$ , где черта означает, что индексы не связаны друг с другом перестановками. Соответствующий закон преобразования (6.32) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{O}_{m|n|k}(x) = & -(\xi^l \partial_l + \Delta \sigma_\xi) \mathcal{O}_{m|n|k}(x) \\ & + (\Lambda_{mp} + 2(K_m x_p - K_p x_m)) \mathcal{O}^p_{|n|k}(x) \\ & + (\Lambda_{np} + 2(K_n x_p - K_p x_n)) \mathcal{O}_{m|}^p_{|k}(x) \\ & + (\Lambda_{kp} + 2(K_k x_p - K_p x_k)) \mathcal{O}_{m|n|}^p(x), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где использованы матрицы представления  $o(d-1, 1)$  ранга 3,

$$(\Sigma^{mn})_{\alpha i | \beta j | \gamma k} = (\Sigma^{mn})_{\alpha i} \eta_{\beta j} \eta_{\gamma k} + (\Sigma^{mn})_{\beta j} \eta_{\alpha i} \eta_{\gamma k} + (\Sigma^{mn})_{\gamma k} \eta_{\alpha i} \eta_{\beta j}, \quad (3.9)$$

и  $(\Sigma^{mn})_{\alpha i} = \delta_\alpha^m \delta_i^n - \delta_\alpha^n \delta_i^m$  – это матрицы векторного  $o(d-1, 1)$  представления,  $\alpha, \beta, \gamma, i, j, k = 0, \dots, d-1$ .

Очевидно, что свертка производной с примарным полем дает в законе преобразования дополнительные неоднородные слагаемые. В рассматриваемом случае получим

$$\begin{aligned} \delta_\xi \partial^m \mathcal{O}_{m|n|k}(x) = & -L_\xi^{\Delta+1} (\partial^m \mathcal{O}_{m|n|k}(x)) \\ & + 2K^\alpha \left( (\Delta - d + 1) \mathcal{O}_{\alpha|n|k}(x) - \mathcal{O}_{n|\alpha|k}(x) - \mathcal{O}_{k|n|\alpha}(x) \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Как видно в первом члене, конформный вес потомка  $\partial^m \mathcal{O}_{m|n|k}(x)$  возрастет на единицу по сравнению с весом примарного поля. В целом, неоднородные члены во второй строке не равны нулю, но при определенной симметрии индексов они могут сократиться, что приведет к специальным значениям конформного веса  $\Delta$ . Бесследовый тензор  $\mathcal{O}_{m|n|k}(x)$  можно разложить на три

неприводимые компоненты согласно типу индексной симметрии. А именно, возникают полностью симметричная компонента  $\mathcal{O}_{(mnk)}(x)$ , полностью антисимметричная компонента  $\mathcal{O}_{[mnk]}(x)$ , и бесследовая компонента типа «крюк»  $\mathcal{O}_{mn,k}(x)$ , симметричная по первым двум индексам и удовлетворяющая условию симметризации Юнга  $\mathcal{O}_{(mn,k)}(x) \equiv 0$ .

В случае полностью симметричных и антисимметричных компонент мы приходим к выводу, что потомки преобразуются однородно при условии, что размерности принимают значения  $\Delta = d + 1$  и  $\Delta = d - 3$ , являющиеся пороговыми значениями конформных весов, см. (3.2), (3.3). Это означает, что можно наложить условия  $\partial^m \mathcal{O}_{(mnk)}(x) = 0$  или  $\partial^m \mathcal{O}_{[mnk]}(x) = 0$ , что приведет к выделению инвариантного подпространства в представлениях, порожденных соответствующими примарными полями.

Для компоненты типа «крюк»  $\mathcal{O}_{mn,k}(x)$  ситуация более содержательна. Согласно общей формуле (3.10), потомок  $\partial^m \mathcal{O}_{mn,k}(x)$  не имеет однородного закона преобразования, только его (анти)симметричные компоненты. При специальных значениях конформной размерности  $\Delta$  оказывается возможным наложить только одну из следующих связей,<sup>29</sup>

$$\begin{aligned} \Delta = d : \quad & \partial^m \mathcal{O}_{m[n,k]}(x) = 0, \\ \Delta = d - 2 : \quad & \partial^m \mathcal{O}_{m(n,k)}(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Отметим, что вторая связь эквивалентна  $\partial^m \mathcal{O}_{nk,m}(x) = 0$  посредством свойства симметризации Юнга. С точки зрения  $AdS_{d+1}/CFT_d$  соответствия первое значение конформного веса (3.11) равно энергии  $E_0 = d$  унитарного поля типа «крюк» в пространстве  $AdS_{d+1}$ , см. (3.2), а второе значение равно энергии  $E_0 = d - 2$  неунитарного поля типа «крюк», см. (3.3).

Данное рассмотрение можно легко обобщить на случай примарных полей более общего типа симметрии,  $\mathcal{O}_{m_1 \dots m_s, n_1 \dots n_{p-1}}(x)$ , где первая группа индексов полностью симметрична, вторая группа индексов полностью антисимметрична, перестановочная симметрия описывается диаграммой Юнга типа  $\{s, p\}$ ,

$$\mathcal{O}_{m_1 \dots m_s, n_1 \dots n_{p-1}}(x) : \quad \mathcal{O}_{(m_1 \dots m_s, m_{s+1})n_2 \dots n_{p-1}}(x) \equiv 0, \tag{3.12}$$

<sup>29</sup>Симметризации и антисимметризации, обозначаемые (...) и [...], осуществляются с единичным весом.

а также наложено условие бесследовости,

$$\eta^{nk} \mathcal{O}_{nkm_3\dots m_s, n_1\dots n_{p-1}}(x) = 0. \quad (3.13)$$

Отметим, что перекрестные следы также равны нулю, что является следствием свойства симметрии Юнга (3.12).

Анализ конформного преобразования потомков приводит к следующим конформно-инвариантным условиям и весам

$$\Delta = s+d-2 : \quad \partial^k \mathcal{O}_{ka_2\dots a_{s-1}a_s, m_1m_2\dots m_{p-1}}(x) - \partial^k \mathcal{O}_{k(a_2\dots a_{s-1}[m_1, a_s] m_2\dots m_{p-1})}(x) = 0, \quad (3.14)$$

$$\Delta = d-p : \quad \partial^k \mathcal{O}_{m_1\dots m_s, n_1\dots n_{p-2}k}(x) = 0, \quad (3.15)$$

где частные симметризации соответствуют диаграммам Юнга типа  $\{s-1, p\}$  и  $\{s, p-1\}$ . Стоит отметить, что конформно-инвариантное условие (3.14) выполняется, когда критическое значение конформного веса равно (3.1) или (3.2); конформно-инвариантное условие (3.15) выполняется когда конформный вес равен (3.3).

### 3.1.3 2-точечная корреляционная функция

Наличие конформной инвариантности гарантирует, что 2-точечная корреляционная функция двух примарных полей совпадающих размерностей  $\Delta$  фиксируется с точностью до общего множителя. Общий анализ показывает [252], что вид коррелятора можно кратко описать в терминах матрицы

$$I_{mn} = \eta_{mn} - 2 \frac{x_m x_n}{x^2}, \quad (3.16)$$

пропорциональной матрице Якоби преобразования инверсии  $x^i \rightarrow x^i/x^2$ . Тогда ответ для двух примарных операторов смешанного типа симметрии  $\{s, p\}$  (3.12) выписывается через два (анти)симметричных тензора,

$$S_{i_1\dots i_s | j_1\dots j_s} = I_{(i_1 j_1} \cdots I_{i_s) j_s}, \quad A_{m_1\dots m_{p-1} | n_1\dots n_{p-1}} = I_{[m_1 n_1} \cdots I_{m_{p-1}] n_{p-1}}, \quad (3.17)$$

где (анти)симметризации выполняются по отношению к первой группе индексов, а вторая группа индексов автоматически (анти)симметризована. Поэтому,  $S_{i_1\dots i_s | j_1\dots j_s} = S_{(i_1\dots i_s) | (j_1\dots j_s)}$  и  $A_{m_1\dots m_{p-1} | n_1\dots n_{p-1}} = A_{[m_1\dots m_{p-1}] | [n_1\dots n_{p-1}]}$ . Эти

тензоры являются строительными блоками искомой 2-точечной корреляционной функции. С точностью до следовых слагаемых, ответ дан выражением

$$\langle \mathcal{O}_{i_1 \dots i_s, m_1 \dots m_{p-1}}(x) \mathcal{O}_{j_1 \dots j_s, n_1 \dots n_{p-1}}(0) \rangle = C \frac{\Pi_{i_1 \dots i_s, m_1 \dots m_{p-1} | j_1 \dots j_s, n_1 \dots n_{p-1}}(x)}{|x|^{2\Delta}}, \quad (3.18)$$

где  $C$  – это нормировочный множитель,  $\Delta$  – конформный вес, и проектор  $\Pi_{\dots| \dots}(x)$  в числителе реализован через блоки рангов  $s-1$  и  $p$ , соответственно,

$$\Pi_{i_1 \dots i_s, m_1 \dots m_{p-1} | j_1 \dots j_s, n_1 \dots n_{p-1}} = S_{(i_1 \dots i_{s-1} | (j_1 \dots j_{s-1} A_{i_s})_{m_1 \dots m_{p-1} | j_s)_{n_1 \dots n_{p-1}}} + \eta\text{-terms}. \quad (3.19)$$

Корреляционная функция может быть представлена стандартным образом с явной  $x$ -зависимостью как комбинация слагаемых  $\eta_{b_1 b_2 \dots} \eta_{c_1 c_2} \frac{x^{a_1} \dots x^{a_{2n}}}{|x|^{2\Delta + 2n}}$ . В качестве примера давайте рассмотрим коррелятор примарных полей простейшего типа симметрии «крюк», который следует из общей формулы (3.18),

$$\langle \mathcal{O}_{ij, k}(x) \mathcal{O}_{mn, l}(0) \rangle = 2C \frac{\Pi_{ij, k | mn, l}(x)}{|x|^{2\Delta}}, \quad (3.20)$$

где  $C$  – это нормировочный множитель, проектор  $\Pi_{ij, k | mn, l}(x)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{ij, k | mn, l} &= (I_{im} I_{jn} + I_{in} I_{jm}) I_{kl} \\ &\quad - \frac{1}{2} (I_{im} I_{kn} + I_{in} I_{km}) I_{jl} - \frac{1}{2} (I_{jm} I_{kn} + I_{jn} I_{km}) I_{il} - \frac{2}{d-1} T_{ij, k | mn, l}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где следовая часть  $T_{ij, k | mn, l}$  задается в виде

$$\begin{aligned} T_{ij, k | mn, l} &= \eta_{ij} \eta_{mn} I_{kl} - \frac{1}{2} \eta_{mn} (\eta_{ik} I_{jl} + \eta_{jk} I_{il}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta_{ij} \eta_{ml} I_{kn} + \frac{1}{4} \eta_{ml} (\eta_{ik} I_{jn} + \eta_{jk} I_{in}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta_{ij} \eta_{ml} I_{km} + \frac{1}{4} \eta_{ml} (\eta_{ik} I_{jm} + \eta_{jk} I_{im}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Эквивалентное представление с явной  $x$ -зависимостью имеет 60 слагаемых.

## 3.2 Несимметричные сохраняющиеся токи

Будем полагать, что рассматриваемые токи составлены из элементарных  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  полей и их производных. Если составляющие поля конформны, на-



пример, это безмассовые поля материи, то возникающий ток может оказывать примарным конформным полем определенной конформной (масштабной) размерности. Как обсуждалось в предыдущем разделе, токи с выделенными конформными размерностями могут удовлетворять законам сохранения, соответствующие конформно-инвариантным условиям, а именно (3.14) или (3.15). При произвольных конформных размерностях условия сохранения все равно могут выполняться, но специальная конформная инвариантность окажется нарушенной, выживает только Пуанкаре-симметрия и масштабные преобразования, см. (3.10). В общем случае неконформных составляющих полей, как, например, в случае массивных полей материи все равно можно потребовать выполнения одного из двух условий сохранения, но конформная инвариантность очевидным образом пропадет.

Отметим, что симметричные сохраняющиеся токи произвольного спина составленные из безмассовых полей материи в  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  были ранее построены в контексте калибровочной теории высших спинов в работах [254, 255]. Также см. обсуждение симметричного случая на максимально симметричных пространствах [256, 53, 257, 258, 180]. Конформные операторы в  $\mathbb{R}^{3,1}$  с  $p = 2$  рассматривались в препринте [259], хотя при этом явная проверка выполнения условий сохранения не была продемонстрирована (см., тем не менее, обсуждение в работах [249, 250, 251, 259]).

### 3.2.1 Общий формализм

Рассмотрим тензорные токи  $J_{a_1 \dots a_s, m_1 \dots m_{p-1}}(x)$ , где  $x \in \mathbb{R}^{d-1,1}$ , индексы  $a, m = 0, \dots, d-1$ . Первая группа индексов полностью симметрична, вторая антисимметрична, перестановочная симметрия индексов описывается условиями Юнга

$$J_{a_1 \dots a_s, m_1 \dots m_{p-1}}(x) : J_{(a_1 \dots a_s, a_{s+1}) m_2 \dots m_{p-1}}(x) \equiv 0, \quad (3.23)$$

т.е., данный ток имеет тип симметрии  $\{s, p\}$ , см. (3.12). Требование бесследовости в данном случае опционально.

Чтобы сформулировать условие сохранения первого типа удобно ввести вспомогательный постоянный тензор  $\xi_1^{a_1 \dots a_{s-1}, m_1 \dots m_{p-1}}$  типа симметрии  $\{s -$

$1, p\}$ , так что токи

$$J_n(x|\xi_1) = \xi_1^{a_2 \dots a_{s-1}, m_1 \dots m_{p-1}} J_{na_2 \dots a_s, m_1 \dots m_{p-1}}(x) \quad (3.24)$$

удовлетворяют закону сохранения

$$\partial^n J_n(x|\xi_1) = 0, \quad \partial^n = \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (3.25)$$

Требование бесследовости постоянных параметров  $\xi_1^{a_1 \dots a_{s-1}, m_1 \dots m_{p-1}}$  по отношению к метрике Минковского  $\eta_{ab}$  делает ток (3.24) дважды бесследовым, а условие сохранения (3.25) при этом остается неизменным. Если не сказано обратное, параметр  $\xi_1$  считается следовым. Из (3.25) следует, что токи определены с точностью до «improvements», т.е. с точностью до тривиально сохраняющихся вкладов,

$$J_n(x|\xi_1) \sim J_n(x|\xi_1) + \partial^m I_{nm}(x|\xi_1), \quad (3.26)$$

где  $I_{nm}(x|\xi_1)$  – это локальный (конечное число производных составляющих полей), антисимметричный тензор,  $I_{nm} = -I_{mn}$ . Отметим, что «improvements» для заданного тока  $J_n(x|\xi_1)$  с размерностью  $\Delta$  имеют размерность  $\Delta - 1$ .

Сохраняющиеся токи (3.24), (3.25) определяют глобальные симметрии с постоянными  $\xi_1$  смешанного типа симметрии, генерируемые сохраняющимися токами, построенным стандартным образом

$$Q(\xi_1) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} J^*(x|\xi_1), \quad (3.27)$$

где звездочка обозначает  $(d - 1)$ -форму, дуальную исходному току,

$$\begin{aligned} J^*(x|\xi_1) &= J_{n_1 \dots n_{d-1}}^*(x|\xi_1) dx^{n_1} \wedge \dots \wedge dx^{n_{d-1}}, \\ J_{n_1 \dots n_{d-1}}^*(x|\xi_1) &= \epsilon_{n_1 \dots n_{d-1} m} J^m(x|\xi_1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Если исходный ток сохраняется, то дуальная форма, очевидным образом, оказывается замкнутой

$$dJ^*(x|\xi_1) = 0, \quad d = dx^n \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad (3.29)$$

что определяет токовую когомологию. Тривиальный когомологический класс задается нулевыми зарядами, генерируемыми «improvement» токами.

Чтобы сформулировать второй тип условий сохранения, введем вспомогательный постоянный параметр  $\xi_2^{a_1 \dots a_s, m_1 \dots m_{p-2}}$  типа  $\{s, p-1\}$ , так что токи

$$J_n(x|\xi_2) = \xi_2^{a_1 \dots a_s, m_1 \dots m_{p-2}} J_{a_1 \dots a_s, m_1 \dots m_{p-2}n}(x) \quad (3.30)$$

удовлетворяют условию сохранения

$$\partial^n J_n(x|\xi_2) = 0, \quad \partial^n = \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (3.31)$$

Требование бесследовости постоянных параметров  $\xi_2^{a_1 \dots a_{s-1}, m_1 \dots m_{p-2}}$  опять делает токи (3.30) дважды бесследовыми, а условие сохранения (3.31) остается неизменным. Аналогично соотношениям (3.27)-(3.29), введем дуальные токи  $J^*(x|\xi_2)$  и сохраняющиеся заряды  $Q(\xi_2)$ . Тогда исходные токи  $J_n(x|\xi_2)$  удовлетворяют соотношению эквивалентности

$$J_n(x|\xi_2) \sim J_n(x|\xi_2) + \partial^m K_{nm}(x|\xi_2), \quad (3.32)$$

где  $K_{nm}(x|\xi_2)$  – это антисимметричное тензорное поле  $K_{nm} = -K_{mn}$ .

Несимметричный ток (3.23) может удовлетворять либо одному из двух, либо одновременно обоим типам условий сохранения. Использование того или иного типа закона сохранения не приводит к каким-либо усложнениям по сравнению с полностью симметричным случаем. Поэтому полезно изучать токовую когомологию, когда присутствуют оба соотношения эквивалентности (3.26) и (3.32). В частности, опишем тривиальный когомологический класс. С этой целью вводятся следующие величины

$$\begin{aligned} P_{k|n}(x|\xi_1) &= \xi_1^{a_1 \dots a_{s-1}, m_1 \dots m_{p-1}} P_{ka_1 \dots a_{s-1}, m_1 \dots m_{p-1}n}(x), \\ P_{k|n}(x|\xi_2) &= \xi_2^{a_1 \dots a_s, m_1 \dots m_{p-2}} P_{a_1 \dots a_s, m_1 \dots m_{p-2}kn}(x), \end{aligned} \quad (3.33)$$

и

$$P_n(x|\xi_3) = \xi_3^{a_2 \dots a_s, m_1 \dots m_p} P_{na_2 \dots a_s, m_1 \dots m_p}(x). \quad (3.34)$$

Здесь  $P_{a_1 \dots a_s, m_1 \dots m_p}(x)$  – это некоторый следовый тензор типа  $\{s, p+1\}$  и параметры  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ , и  $\xi_3$  являются постоянными тензорами типа  $\{s-1, p\}$ ,  $\{s, p-1\}$ , и  $\{s-1, p+1\}$ , соответственно. Отметим, что  $P_{k|n}(x|\xi_2) = -P_{n|k}(x|\xi_2)$ , в то время как  $P_{k|n}(x|\xi_1)$  не имеет определенного типа симметрии по отношению к индексам  $k$  и  $n$ .

**Лемма 3.1.** Пусть ток типа  $\{s, p\}$  одновременно удовлетворяют двум условиям сохранения (3.25) и (3.31). Он является представителем тривиального кохомологического класса тогда и только тогда, когда представим в виде  $J_n(x|\xi_1) = \partial^m I_{nm}(x|\xi_1)$  и  $J_n(x|\xi_2) = \partial^m K_{nm}(x|\xi_2)$ , с

$$\partial^m I_{nm}(x|\xi_1) = \partial^k P_{k|n}(x|\xi_1) - \partial^k P_{n|k}(x|\xi_1), \quad \partial^m K_{nm}(x|\xi_2) = \partial^k P_{k|n}(x|\xi_2), \quad (3.35)$$

где  $P_{k|n}(x|\xi_1)$  и  $P_{k|n}(x|\xi_2)$  определены соотношениями (3.33), а  $P_n(x|\xi_3)$  (3.34) удовлетворяют

$$\partial^n P_n(x|\xi_3) = 0. \quad (3.36)$$

Для доказательства заметим, что все  $gl(d)$  неприводимые компоненты в  $I_{nm}(x|\xi_1)$  и  $K_{nm}(x|\xi_2)$  принадлежат тензорным произведениям антисимметричного 2-тензора и параметров  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , соответственно. Тогда можно видеть, что единственная общая компонента задается тензором типа  $\{s, p+1\}$ , которая выше была обозначена как  $P_{a_1 \dots a_s, m_1 \dots m_p}(x)$ . Таким образом, формулы (3.35) описывают две возможные проекции типа симметрии  $\{s, p\}$  тензора  $P_{a_1 \dots a_s, m_1 \dots m_p}(x)$  свернутого с одной производной. Связь (3.36) оказывается условием сохранения для (3.35).

Стоит отметить, что благодаря условию (3.36) величина  $P_n(x|\xi_3)$  может рассматриваться как сохраняющийся ток. Это наблюдение позволяет переформулировать приведенное выше утверждение следующим полезным образом: любой ток типа  $\{s, p+1\}$  с условием сохранения первого типа определяет тривиальный кохомологический класс для токов типа  $\{s, p\}$ , подчиненных условиям сохранения обоих типов.

### 3.2.2 Вспомогательные переменные

Обсудим сохраняющиеся токи, построенные из безмассовых спинорных полей в пространстве  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ . Для этого рассмотрим спинорное поле Дирака  $\psi_\alpha(x)$ ,  $\alpha = 1, \dots, 2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ . Алгебра Клиффорда определяется как множество антисимметризованных комбинаций

$$\left\{ \Gamma_{m_1 \dots m_k} = \gamma_{m_1} \dots \gamma_{m_k}, \quad k = 0, 1, \dots, d \right\} \quad (3.37)$$

от матриц  $(\gamma_m)^\alpha_\beta$  с коммутационными соотношениями  $\gamma_m\gamma_n + \gamma_n\gamma_m = 2\eta_{mn}\mathbb{1}_d$ , где  $\eta_{mn}$  есть метрика Минковского. По определению,  $k = 0$  соответствует единичной матрице  $\mathbb{1}_d$ . Дираковское сопряжение определено как  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ , где  $\dagger$  обозначает эрмитово сопряжение. Спинорное поле подчинено безмассовому уравнению Дирака  $(\gamma_m)^\beta_\alpha \partial^m \psi_\beta(x) = 0$  и  $\partial^m \bar{\psi}^\beta(x)(\gamma_m)^\alpha_\beta = 0$  для сопряженного поля.

Несимметричные токи удобно описывать как коэффициенты разложения некоторой производящей функции от вспомогательных переменных (см. также Главы **1** и **2**). Аналогичная производящая функция для полностью симметричных токов, построенных из комплексных скалярных полей была описана, например, в работе [180]. Введем вспомогательные коммутирующие переменные  $u^m u^n = u^n u^m$ , где  $m, n = 0, \dots, d-1$  и определим билокальную функцию по  $x$ -переменным и  $u$ -переменным,

$$\mathcal{J}_{m_1 \dots m_k}(x, u) = \bar{\psi}(x-u) \Gamma_{m_1 \dots m_k} \psi(x+u), \quad k = 0, \dots, d, \quad (3.38)$$

где спинорные индексы неявные и  $\Gamma_{m_1 \dots m_k}$  заданы (3.37). Сопряженный спинор определяется таким образом, чтобы свертка  $\bar{\psi}^\alpha \psi_\alpha$  оставалась инвариантной относительно преобразований Лоренца, поэтому функции  $\mathcal{J}_{m_1 \dots m_k}(x, u)$  преобразуются как антисимметричные лоренцевы тензоры ранга  $k$ . Тогда вводя вспомогательные антикоммутирующие переменные  $\theta^m \theta^n = -\theta^n \theta^m$ , где  $m, n = 0, \dots, d-1$ , можно определить расширенную производящую функцию

$$\mathcal{J}(x, u|\theta) = \sum_{k=0}^d \mathcal{J}_{m_1 \dots m_k}(x, u) \theta^{m_1} \dots \theta^{m_k}, \quad (3.39)$$

такую, что функции (3.38) возникают как коэффициенты разложения по отношению к антикоммутирующим  $\theta$ -переменным.

Дифференцирую функции (3.38) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^n \partial u_n} \mathcal{J}_{m_1 \dots m_k}(x, u) &= \\ &= -\square \bar{\psi}(x-u) \Gamma_{m_1 \dots m_k} \psi(x+u) + \bar{\psi}(x-u) \Gamma_{m_1 \dots m_k} \square \psi(x+u) \approx 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где символ слабого равенства  $\approx$  означает, что спинорные поля подчинены безмассовому уравнению Дирака, и как следствие, его квадрированной версии

$\square\psi_\alpha = 0$ ,  $\square\bar{\psi}^\alpha = 0$ , где  $\square = \partial^m\partial_m$ . Еще одно дифференцирование приводит к выражению

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_n} \mathcal{J}_{nm_1\dots m_k}(x, u) &\approx \\ &\approx -2k \partial_{[m_1} \bar{\psi}(x-u) \Gamma_{m_2\dots m_k]} \psi(x+u) + 2k \bar{\psi}(x-u) \Gamma_{[m_1\dots m_{k-1}} \partial_{m_k]} \psi(x+u). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Для доказательства этой формулы следует воспользоваться антикоммутиационными соотношениями для гамма-матриц и перетягивать  $\gamma_n$  налево и направо в  $\Gamma_{nm_1\dots m_k}$  для того, чтобы свернуть с  $x$ -производными и таким образом получить соответствующее уравнение Дирака.

Таким образом, приходим к выводу, что производящая функция (3.39) удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2}{\partial x^m \partial u_m} \mathcal{J}(x, u|\theta) \approx 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial \theta_m} \mathcal{J}(x, u|\theta) \neq 0. \quad (3.42)$$

Эти выражения напоминают условия сохранения токов. В случаях  $k = 0, 1$  симметричных токов правая часть в (3.41) слабым образом равна нулю, что в точности соответствует некому условию сохранения. При  $k \geq 2$  правая часть в (3.41) нулю не равна. Тем не менее, можно догадаться, что взятие производных и свертка индексов должна сопровождаться необходимыми симметризациями. В дальнейшем, будет показано, что условия сохранения того или иного типа выполняются для компонент определенного типа, которые содержатся в (3.38).

### 3.2.3 Сохраняющиеся токи Флато–Фронсдала

Раскладывая выражение (3.38) по степеням вспомогательной бозонной  $u$ -переменной,

$$\mathcal{J}_{m_1\dots m_p}(x, u) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} J_{a_1\dots a_s|m_1\dots m_p}(x) u^{a_1}\dots u^{a_s}, \quad (3.43)$$

получим

$$J_{a_1\dots a_s|m_1\dots m_p}(x) = \sum_{t=0}^s (-)^{p+t} \partial_{(a_1}\dots\partial_{a_t} \bar{\psi}(x) \Gamma_{m_1\dots m_p} \partial_{a_{t+1}}\dots\partial_{a_s)} \psi(x). \quad (3.44)$$

Комбинации  $J_{a_1\dots a_s|m_1\dots m_k}(x)$  являются приводимыми тензорами и их  $gl(d)$  неприводимые компоненты содержатся в тензорном произведении симметричного тензора ранга  $s$  и антисимметричного тензора ранга  $k$ . Список неприводимых компонент состоит из следующих тензоров: (I) тензор типа  $\{s+1, p\}$ , (II) тензор типа  $\{s, p+1\}$ . А именно,<sup>30</sup>

$$J_{a_1\dots a_{s+1}, m_1\dots m_{p-1}}^{(I)}(x) = J_{(a_1\dots a_s|a_{s+1})m_1\dots m_{p-1}}(x); \quad (3.45)$$

$$J_{a_1\dots a_s, m_1\dots m_p}^{(II)}(x) = J_{a_1\dots a_s|m_1\dots m_p}(x) - J_{(a_1\dots a_{s-1}[m_1|a_s]m_2\dots m_{p-1})}(x). \quad (3.46)$$

Важно, что представители двух семейств (3.45) и (3.46) с равными спинами  $s$  имеют разные масштабные размерности. Действительно, спинорное поле в  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  имеет масштабную размерность

$$\Delta_0 = \frac{d-1}{2}, \quad (3.47)$$

в то время как размерность производной  $\partial_a$  равна 1. Тогда масштабные размерности токов одинакового спина  $J_{a_1\dots a_s, m_1\dots m_p}^{(I)}(x)$  и  $J_{a_1\dots a_s, m_1\dots m_p}^{(II)}(x)$  задаются выражениями

$$\Delta_1 = s + d - 2, \quad (3.48)$$

$$\Delta_2 = s + d - 1. \quad (3.49)$$

Основной вывод состоит в том, что производящая функция  $\mathcal{J}(x, u|\theta)$  (3.39) дает два семейства несимметричных токов с разными масштабными размерностями. Размерности токов (3.45) совпадают с граничным значением  $\Delta_1 = \Delta_{crit}$  (3.1), у токов (3.46) размерность больше,  $\Delta_2 > \Delta_1$ .

При работе с многоиндексными тензорами удобно ввести следующие дифференциальные операторы

$$S = \theta^m \frac{\partial}{\partial u^m}, \quad S^* = u^m \frac{\partial}{\partial \theta^m}, \quad D = \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial u_m}, \quad D^* = \frac{\partial^2}{\partial x^m \partial \theta_m}. \quad (3.50)$$

Эти операторы удовлетворяют простым соотношениям, см. далее. Тогда токи (3.45) и (3.46) можно представить в виде

$$\mathcal{J}^{FF}(x, u|\theta) = S^* \mathcal{J}(x, u|\theta), \quad (3.51)$$

<sup>30</sup>Считаем, что высота  $p$  не превышает  $[d/2]$ . Случай  $p > [d/2]$  требует отдельного рассмотрения, что, предположительно, приведет к формулировке с дуализованными токами.

$$\mathcal{J}^{imp}(x, u|\theta) = S^* S \mathcal{J}(x, u|\theta) , \quad (3.52)$$

где производящая функция  $\mathcal{J}(x, u|\theta)$  задается (3.39). Раскладывая эти функции по вспомогательным переменным получаем компонентный вид (3.45) и (3.46), соответственно. Симметризации  $S^* \mathcal{J}^{FF}(x, u|\theta) = 0$  и  $S^* \mathcal{J}^{imp}(x, u|\theta) = 0$  теперь становятся очевидными, как следствие  $S^* S^* = 0$ .

Ниже формулируется и доказывается три Леммы, которые проясняют различие между семействами токов (3.51) и (3.52). Будет выяснено, действуют ли нулем дифференциальные операторы  $S^* S D$  и  $D^*$  на токи на массовой поверхности, чтобы быть отождествленными с двумя разными типами условий сохранения.

**Лемма 3.2.** *Токи (3.51) удовлетворяют условиям*

$$S^* S D \mathcal{J}^{FF}(x, u|\theta) \approx 0 , \quad (3.53)$$

$$D^* \mathcal{J}^{FF}(x, u|\theta) \neq 0 . \quad (3.54)$$

Для доказательства воспользуемся соотношением (3.40) в виде  $D \mathcal{J}(x, u|\theta) \approx 0$ , и соотношением (3.41) в виде  $D^* \mathcal{J}(x, u|\theta) \approx \alpha S \mathcal{J}(x, u|\theta)$ , где  $\alpha = \alpha(N_\theta)$  – это некоторая функция оператора Эйлера, считающего число  $\theta$ -переменных. Далее, используя определение (3.51) и (анти)коммутационные соотношения  $S^* D^* + D^* S^* = 0$  и  $D S^* - S^* D = D^*$ , прямым вычислением получаем выражения (3.53) и (3.54).

Лемма 3.2 утверждает, что токи (3.51) удовлетворяют только первому типу сохранения (3.25). Действительно, находим, что компонентный вид (3.53) выглядит следующим образом

$$\partial^n J_{na_2 \dots a_{s-1} a_s, m_1 m_2 \dots m_{p-1}}^{(I)}(x) - \partial^n J_{n(a_2 \dots a_{s-1} [m_1, a_s] m_2 \dots m_{p-1})}^{(I)}(x) \approx 0 . \quad (3.55)$$

Сворачивая это выражение со вспомогательным постоянным параметром  $\xi_1$  типа  $\{s-1, p\}$  восстанавливаем (3.25). Второй тип сохранения не поддерживается. Также стоит отметить, что первый тип сохранения совместен с наложением условиям (анти-)самодуальности в четных размерностях  $d$ , так что токи с  $p = d/2$  можно разложить на (анти-)самодуальные компоненты.

Условие сохранения (3.55) становится тривиальным для частного подкласса (3.51), состоящего из антисимметричных токов юкавовского типа

$$J_{m_1 \dots m_p}^{(I)}(x) = \bar{\psi}(x) \Gamma_{m_1 \dots m_p} \psi(x) , \quad p \neq 1 , \quad \Delta_1 = d - 1 , \quad (3.56)$$



которые являются обобщением юкавовского тока  $\bar{\psi}\psi$  и могут рассматриваться как токи, взаимодействующие с массивными полями  $k$ -форм. Случай  $p = 1$  исключительный, т.к. соответствующий ток – это хорошо известный электромагнитный ток  $J_{m_1}^{(I)}(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_{m_1}\psi(x)$ .

**Лемма 3.3.** *Токи (3.52) удовлетворяют условиям*

$$S^*SD\mathcal{J}^{imp}(x, u|\theta) \approx 0, \quad D^*\mathcal{J}^{imp}(x, u|\theta) \approx 0. \quad (3.57)$$

Доказательство Леммы 3.3 аналогично доказательству Леммы 3.2. Отметим, что посредством юнговской симметрии оба условия в (3.57) являются алгебраическими следствиями соотношения  $D\mathcal{J}^{imp}(x, u|\theta) \approx 0$ . Лемма 3.3 утверждает, что токи  $\mathcal{J}^{imp}(x, u|\theta)$  удовлетворяют условиям сохранения обоих типов.

**Лемма 3.4.** *Токи (3.51) и (3.52) связаны соотношением*

$$\mathcal{J}^{imp}(x, u|\theta) \approx D^*\mathcal{J}^{FF}(x, u|\theta), \quad (3.58)$$

*с точностью до нормировочного зависящего от спина множителя.*

Для доказательства Леммы 3.4 воспользуемся соотношением (3.41), записанным в виде  $D^*\mathcal{J}(x, u|\theta) \approx \alpha S\mathcal{J}(x, u|\theta)$ , где  $\alpha = \alpha(N_\theta)$  – это некоторая функция оператора Эйлера, считающего число  $\theta$ -переменных. Находим  $D^*\mathcal{J}^{FF}(x, u|\theta) = D^*S^*\mathcal{J}(x, u|\theta) = -S^*D^*\mathcal{J}(x, u|\theta) = -\alpha_+S^*S\mathcal{J}(x, u|\theta) = -\alpha_+\mathcal{J}^{imp}(x, u|\theta)$ , где  $\alpha_+ = \alpha(N_\theta + 1)$ ; последнее равенство воспроизводит определение (3.52). В частности, Лемма 3.4 проясняет причину, по которой масштабные размерности (3.48) и (3.49) отличаются на единицу.<sup>31</sup>

Все четыре Леммы 3.1–3.4 позволяют сформулировать следующие теоремы, которые играют центральную роль при изучении токов Флато–Фронсдала.

**Теорема 3.1.** *Токи (3.52) являются «improvements».*

Для доказательства достаточно заметить, что согласно Леммам 3.1 и 3.4, сохраняющиеся токи  $\mathcal{J}^{FF}(x, u|\theta)$  используют для доказательства принадлежности сохраняющихся токов  $\mathcal{J}^{imp}(x, u|\theta)$  к тривиальному кохомологическому классу.

<sup>31</sup>Например, рассмотрим ток  $J_a^{(II)} = \partial_a\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\partial_a\psi$  размерности  $\Delta_2 = d$ . Этот ток можно представить как производную тока юкавовского типа  $J_{[ab]}^{(I)}$  (3.56) с размерностью  $\Delta_1 = d - 1$  в виде  $2J_a^{(II)} \approx \partial^b J_{[ab]}^{(I)} \equiv \partial^b(\bar{\psi}\Gamma_{ab}\psi)$ . В частности, последнее равенство показывает, что токи юкавовского типа удовлетворяют условию сохранения.

**Теорема 3.2.** Токи (3.51) являются токами Флато–Фронсдала.

Данное утверждение очевидно по причине того, что токи (3.51) обладают масштабными размерностями и типами симметрии, которые в точности соответствуют спектру обобщённой теоремы Флато–Фронсдала (3.5), где энергии равны масштабным размерностям  $E_0 = \Delta_1 = s + d - 2$  для безмассовых полей (сохраняющихся токов), и  $E_0 = \Delta_1 = d - 1$  для массивных полей (токи юкавовского типа).

Здесь следует отметить, что одночастичные состояния безмассового спина в  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  образуют  $o(d, 2)$  модуль отождествляемый с синглетоном  $\text{Di}$ . В частности, соответствующие квантовые числа (3.4) и (3.47) равны друг другу. Это гарантирует, что все токи, построенные из двух спиноров и конечного числа производных, должны обладать критическими размерностями (3.1), а любые другие сохраняющиеся комбинации должны возникать на массовой поверхности как «improvements». Теоремы 3.1 и 3.2 очевидным образом подтверждают это наблюдение. В частности, отсюда следует, что настоящие конформные операторы соответствуют бесследовым, сохраняющимся токам с критическими размерностями  $\tilde{\mathcal{J}}^{FF}$ , которые могут быть построены в виде  $\tilde{\mathcal{J}}^{FF} = \mathcal{J}^{FF} + \dots$ , где многоточие обозначает члены «improvement». <sup>32</sup> Отметим, что условия сохранения и бесследовости, а также добавление «improvements» должны выполняться на массовой поверхности. <sup>33</sup> В качестве аргумента в пользу приведенного выше предположения упомянем, что любой след следового сохраняющегося тока  $\mathcal{J}^{FF}$  является на массовой поверхности членом типа «improvements». Действительно, след от сохраняющегося тока также сохраняется, как можно видеть взятием следов от условия сохранения (3.55). <sup>34</sup> Таким образом, отсюда следует, что все следы являются «improvements» на массовой поверхности, потому что их спиновые веса меньше чем веса исход-

<sup>32</sup>Некоторые примеры этой процедуры для полностью симметричных токов, построенных из двух спиноров были проанализированы в работе [255].

<sup>33</sup>Также можно добавлять тривиально сохраняющиеся величины, пропорциональные проекционной матрице  $\pi_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu - \delta_{\mu\nu} \square$  таким образом, чтобы условия сохранения и бесследовости оставались неизменными.

<sup>34</sup>Это справедливо для токов спина  $s > 2$ . В случае  $s = 2$  ситуация отличается, потому что условие сохранения либо имеет один индекс ( $p = 1$ ), либо все индексы антисимметричны ( $p \geq 2$ ). Для тока спина 2 на массовой поверхности след равен нулю. Для токов смешанного типа симметрии  $\{2, p\}$  следы не сохраняются и не равны нулю на массовой поверхности, но тем не менее все следовые слагаемые на массовой поверхности организуются в члены типа «improvements», см. далее.

ного тока, а конформные размерности выше критических размерностей.

Продемонстрируем предыдущее обсуждение на примере простейшего случая сохраняющегося тока с тремя индексами. Явное выражение для следового тока Флато–Фронсдала (3.51) имеет вид (с точностью до общего множителя)

$$\begin{aligned} J_{a_1 a_2, m_1}(x) = & -\partial_{a_1} \bar{\psi}(x) \Gamma_{a_2 m_1} \psi(x) + \bar{\psi}(x) \Gamma_{a_2 m_1} \partial_{a_1} \psi(x) \\ & -\partial_{a_2} \bar{\psi}(x) \Gamma_{a_1 m_1} \psi(x) + \bar{\psi}(x) \Gamma_{a_1 m_1} \partial_{a_2} \psi(x). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Его масштабная размерность равна  $\Delta = d$  и Лемма 3.2 в этом случае гарантирует, что ток сохраняется

$$\partial^{a_1} J_{a_1[a_2, m_1]}(x) \approx 0. \quad (3.60)$$

Бесследовая часть (3.59), обозначаемая как  $\tilde{J}_{a_1 a_2, m_1}$ , задается выражением

$$\tilde{J}_{a_1 a_2, m_1}(x) = J_{a_1 a_2, m_1}(x) + \frac{1}{2(d-1)} (\eta_{a_1 m_1} J_{a_2}(x) + \eta_{a_2 m_1} J_{a_1}(x) - 2\eta_{a_1 a_2} J_{m_1}(x)), \quad (3.61)$$

где  $J_a(x) = \eta^{mn} J_{mn, a}(x)$ . Видно, что на массовой поверхности след является полной производной юкавовского тока,  $J_a(x) \approx 2\partial_a(\bar{\psi}(x)\psi(x))$ , и, тем самым, следовая часть в (3.61) является «improvements». Действительно, при переходе на массовую поверхность след можно привести к виду  $\partial^n F_{a_1 a_2, m_1 n}(x)$ , где  $F_{a_1 a_2, m_1 n}(x) = \frac{1}{(d-1)} (\eta_{a_1 m_1} \eta_{a_2 n} + \eta_{a_2 m_1} \eta_{a_1 n} - 2\eta_{a_1 a_2} \eta_{m_1 n}) J(x)$ , где  $J$  – это юкавовский ток  $J(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x)$ , а выражение в скобках имеет индексную симметрию задаваемую диаграммой Юнга типа «окно». Условие сохранения легко получается в виде  $\partial^{a_1} \tilde{J}_{a_1[a_2, m_1]}(x) \approx -\frac{3}{2(d-1)} (\partial_{a_2} J_{m_1}(x) - \partial_{m_1} J_{a_2}(x)) \approx 0$ .

Сделаем несколько комментариев. Во-первых, важно, что доказательство сохранения бесследовой части тока основывается на алгебраической процедуре вычитания следа из следового тензора и реализация на массовой поверхности является дивергенцией юкавовского тока. Во-вторых, приведенный выше пример можно непосредственно обобщить на токи типа симметрии «крюк»  $\{2, p\}$ ; здесь след это производная токов юкавовского типа  $\bar{\psi}(x) \Gamma_{m_1 \dots m_{p-2}} \psi(x)$ , так что следовые вклады опять оказываются членами «improvements» на массовой поверхности. В-третьих, имеет смысл отметить, что поскольку ток  $J_{a_1 a_2, m_1}(x)$  имеет лишь три индекса, то отсюда следует, что двойная бесследовость выполняется автоматически.

Наконец, несимметричные бесследовые токи с произвольными спинами  $s$  и  $p$  можно построить с помощью вставки некоторого дифференциального оператора между двумя спинорами в основной формуле (3.38). Это можно сделать по аналогии с симметричным случаем [56, 180]. Отметим, тем не менее, что выбор бесследового представителя токовой когомологии не является уникальным, различные представители связаны друг с другом добавлением «improvements» на массовой поверхности, см. (3.27), (3.29).

В заключение этого раздела отметим, что было бы интересно рассмотреть следующие приложения несимметричных сохраняющихся токов. Во-первых, явная реализация сохраняющихся токов через спинорные поля материи позволяет анализировать алгебру глобальной симметрии, генерируемую сохраняющимися зарядами (3.27). Действительно, постоянные  $o(d-1, 1)$  параметры типа  $\{s-1, p\}$  можно отождествить с частью параметров алгебры симметрии высших спинов  $hu(1|(1, 2): [d, 2])$  [113]. Чтобы сделать это соответствие полным, надо следовать логике работы [260] и пользуясь токами Флато–Фронсдала, найденными в этой главе, построить полный набор сохраняющихся токов с явной  $x$ -зависимостью. Ожидается, что соответствующие постоянные параметры описываются  $o(d, 2)$  бесследовыми тензорами, тип симметрии которых задается прямоугольной диаграммой Юнга с двумя строками и одним столбцом.

Помимо этого, имея в наличии теорию высших спинов в  $AdS_{d+1}$  с алгеброй  $hu(1|(1, 2): [d, 2])$  будет интересно изучить ее голографического партнера в духе работ Клебанава и Полякова, а также Сезгина и Санделла в  $d = 3$  случае [18, 56]. Скорее всего  $hu(1|(1, 2): [d, 2])$  теория высших спинов голографически дуальна модели Гросса-Неве в  $d$  измерениях. Безусловно, данное предположение существенно зависит от ряда допущений, таких как нарушение четности/высшеспиновой симметрии и выбора регулярного  $\Delta_+ = d-1$  или нерегулярного  $\Delta_- = 1$  граничных условий для массивных антисимметричных полей в объеме (включая поле скаляра). Все эти важные вопросы должны будут изучены в рамках пока не существующей теории высших спинов для несимметричных полей (тем не менее, см. недавние работы [87, 86]).

### 3.3 $AdS_{d+1}/CFT_d$ дуальность для спин- $(2, 1)$ поля

В этом разделе рассматривается метрическое квадратичное действие для простейшего  $s = 2$ ,  $p = 2$  безмассового «крюкового» поля<sup>35</sup> в пространстве  $AdS_{d+1}$ , предложенное в [25], и разрабатывается голографическая процедура Губсера-Клебанова-Полякова-Виттена. Наше рассмотрение аналогично проведенному ранее анализу в случае полей низших спинов в работах [5, 6, 261, 262, 263, 264, 265]. В частности, используется евклидова версия пространства  $AdS_{d+1}$  с алгеброй симметрий  $o(d+1, 1)$ , и вводится параметр инфракрасного обрезания  $\epsilon$ , что позволяет сместить границу внутрь объема, и, тем самым, сформулировать граничную задачу Дирихле. Для явного решения полевых уравнений удобнее рассматривать теорию в импульсном граничном пространстве, когда все уравнения становятся алгебраическими относительно граничных импульсов. Наконец, определяется и вычисляется граничное эффективное действие.

Хотя общая стратегия похожа на ранее рассмотренные случаи, в голографическом анализе для несимметричных полей присутствует определённо новая составляющая. Действительно, здесь мы сталкиваемся с важной особенностью, которая может быть в общем случае описана как механизм Бринка-Васильева-Мецаева (БМВ) [25] (см. также Главы 1 и 2). Он гласит, что неприводимое безмассовое поле в пространстве  $AdS_{d+1}$  раскладывается в плоском пределе на набор неприводимых несимметричных полей в пространстве  $\mathbb{R}^{d,1}$ . Например, простейшее безмассовое несимметричное  $AdS_{d+1}$  поле типа «крюк» раскладывается на безмассовое поле типа «крюк» и безмассовое спин-2 поле в  $\mathbb{R}^{d,1}$ . Другими словами, механизм БМВ означает, что несимметричное безмассовое поле данного спина в  $AdS_{d+1}$  имеет больше физических степеней свободы, чем его безмассовый  $\mathbb{R}^{d,1}$  аналог того же спина, или, что эквивалентно, меньше калибровочных симметрий.<sup>36</sup>

<sup>35</sup>В отличие от тетрадной формулировки, которая обобщает тетрадную формулировку гравитации на теории высших спинов (см., например, обзор [14]), в этой главе рассматриваются метрические поля высших спинов, которые обобщают стандартное поле гравитационной метрики.

<sup>36</sup>Конечно, всегда можно ввести вспомогательные алгебраические симметрии, чтобы получить формулировку, аналогичную формулировке Штукельберга массивной электродинамики (здесь роль космологической константы играет масса). Формулировка типа Штукельберга содержит равное число физических степеней свободы до и после предельного перехода.

Пусть  $Y_{o(m)}(s, p - 1)$  – неприводимый модуль алгебры  $o(m)$ , описываемый диаграммой Юнга типа «крюк», где  $s$  и  $p$  – длина и высота «крюка». Т.к. малая алгебра Вигнера в  $\mathbb{R}^{d,1}$  это  $o(d - 1)$ , заключаем, что физические степени свободы, переносимые простейшим «крюковым» полем  $s = 2$  и  $p = 2$ , описываются как прямая сумма

$$Y_{o(d-1)}(2, 1) \oplus Y_{o(d-1)}(2, 0) . \quad (3.62)$$

Заметим, что для симметричных полей спина  $s$  (и, более обще, для произвольных прямоугольных диаграмм) физические степени свободы описываются единственным представлением  $Y_{o(d-1)}(s, 0)$ , так что эффект БМВ в этом случае отсутствует.

Отсюда следует, что благодаря механизму БМВ, приложение стандартного голографического предписания требует аккуратности. Это происходит потому, что тензоры, описывающие физические степени свободы тождественны начальным значениям для распространяющихся полей в объеме, и граничная задача делает это тождество явным. Действительно, изначальное лоренцево  $o(d, 1)$  «крюковое» поле в объеме может быть разложено на  $o(d - 1, 1)$  составляющие, что удобно с точки зрения границы, поскольку их начальные значения являются лоренцевыми полями в  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ . Для простейшего «крюкового» поля появляются несколько  $o(d - 1, 1)$  неприводимых компонент, включая описываемые диаграммами  $Y_{o(d-1,1)}(2, 1)$  и  $Y_{o(d-1,1)}(2, 0)$ . В свою очередь, каждая из этих двух компонент содержит меньшую компоненту, описываемую диаграммой  $Y_{o(d-1)}(2, 0)$ . Однако, не разрешая полевых уравнений явно, трудно сказать, какие из компонент  $o(d - 1, 1)$  (или их линейных комбинаций) изначального поля в объеме содержат  $o(d - 1)$  спин-2 составляющую, отождествляемую со вторым членом в разложении физических степеней свободы (3.62). Конечный ответ, получаемый в этой разделе состоит в том, что физические свободы, описываемые (3.62) содержатся в «крюковой»  $o(d - 1, 1)$  компоненте изначального поля в объеме, в то время как компоненты с симметрией другого типа пропорциональны начальным значениям «крюкового» поля.

Связанный вопрос затрагивает 2-точечные корреляционные функции, которые следуют из эффективного голографического действия. Хотя конформные размерности граничных конформных операторов целиком зафиксирова-

ны теорией представлений алгебры  $o(d-1, 2)$ , набор теневых полей (дополняющих конформные примарные поля), включённых в эффективное граничное действие, сильно зависит от формулировки в объеме. Например, изучение  $AdS_5$  безмассовых несимметричных полей в [32] даёт теневые поля, объединенные в одну производящую скалярную функцию, так что итоговое действие порождает набор 2-точечных корреляторов с различными конформными размерностями. Однако, выделение вклада заданной конформной размерности, гарантированного симметричными аргументами, не происходит автоматически и требует дальнейшего анализа. В нашем случае имеется единственное теневое поле, описываемое  $o(d-1, 1)$  бесследовым «крюковым» тензором, так что соответствующая 2-точечная корреляционная функция принимает стандартный вид [167] (см. также раздел 3.1.3) и конформная размерность равна вакуумной энергии «крюкового» поля в объеме [30].

### 3.3.1 Квадратичное действие

Евклидова версия пространства  $AdS_{d+1}$  глобально описывается верхним полупространством с метрикой

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = R^2 \frac{dzdz + dx^i dx^i}{z^2}, \quad (3.63)$$

где  $x^\mu = (x^0 \equiv z, x^i)$  – координаты Пуанкаре,  $\mu = 0, 1, \dots, d$  и  $i = 1, \dots, d$ , а  $R$  – радиус  $AdS_{d+1}$  (в дальнейшем,  $R = 1$ ).<sup>37</sup> Конформная граница изоморфна  $d$ -мерной сфере, являющейся компактификацией плоскости  $z = 0$  единственной точкой  $z = \infty$ . В дальнейшем, граница  $z = 0$  сдвигается во внутренность объема и вводится параметр обрезания  $\epsilon$ , так что радиальная координата пробегает  $z \in [\epsilon, \infty)$ .

Глобальные симметрии евклидова пространства  $AdS_{d+1}$  описываются алгеброй  $o(d+1, 1)$ . Будем рассматривать те модули  $o(d+1, 1)$ , которые отвечают унитарным модулям  $\mathcal{D}(E_0 | s, p-1)$  алгебры изометрий  $o(d, 2)$  стандартного пространства–времени  $AdS_{d+1}$  (с лоренцевой сигнатурой) [30]. Модули имеют спины  $s$  и  $p$ , описываемые диаграммами Юнга  $Y_{o(d)}(s, p-1)$  со строкой длины  $s$  и столбцом высоты  $p$ , а также энергией вакуума (3.2).

<sup>37</sup>Символы Кристоффеля, Риманова, Риччи и скалярная кривизна, связанные с метрикой (3.63), приводятся в работе [169].

Пусть  $\varphi_{\mu\nu,\rho}(x)$  – это  $o(d, 1)$  лоренцево тензорное поле с симметрией индексов отвечающей «крюковой» диаграмме Юнга с двумя клетками в первом ряду и одной клеткой во втором ряду, т.е.  $\varphi_{\mu\nu,\rho}(x) = \varphi_{\nu\mu,\rho}(x)$  и  $\varphi_{\mu\nu,\rho}(x) + \varphi_{\mu\rho,\nu}(x) + \varphi_{\rho\nu,\mu}(x) \equiv 0$ . Закон калибровочного преобразования имеет вид

$$\delta\varphi_{\mu\nu,\rho}(x) = \nabla_{\mu}\chi_{\nu\rho}(x) + \nabla_{\nu}\chi_{\mu\rho}(x), \quad (3.64)$$

где  $\nabla_{\mu}$  – ковариантная производная по фоновой метрике (3.63) и  $\chi_{\nu\rho}(x)$  – антисимметричный калибровочный параметр,  $\chi_{\nu\rho}(x) = -\chi_{\rho\nu}(x)$ . Калибровочное поле с законом преобразования (3.64) отвечает унитарному модулю  $\mathcal{D}(d|2, 1)$ .

Калибровочно-инвариантное действие, с точностью до членов с полной производной, обсуждаемых ниже, имеет вид [25]

$$S_0 = \frac{h_0}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} \left( \nabla_{\lambda}\varphi_{\mu\nu,\rho} \nabla^{\lambda}\varphi^{\mu\nu,\rho} - \frac{3}{2} \nabla_{\lambda}\varphi_{\mu} \nabla^{\lambda}\varphi^{\mu} - 2\nabla^{\mu}\varphi_{\mu\nu,\rho} \nabla_{\lambda}\varphi^{\lambda\nu,\rho} + \right. \\ \left. - \nabla^{\rho}\varphi_{\mu\nu,\rho} \nabla_{\lambda}\varphi^{\mu\nu,\lambda} + 3\nabla_{\nu}\varphi_{\mu} \nabla_{\rho}\varphi^{\nu\rho,\mu} + \frac{3}{2} \nabla^{\mu}\varphi_{\mu} \nabla_{\nu}\varphi^{\nu} - \frac{3}{R^2}\varphi_{\mu\nu,\rho}\varphi^{\mu\nu,\rho} - \frac{3(d-4)}{2R^2}\varphi_{\mu}\varphi^{\mu} \right), \quad (3.65)$$

где поле  $\varphi_{\rho} = g^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu,\rho}$  обозначает след, а  $h_0$  – произвольная безразмерная константа нормировки. Действие (5.45) инвариантно относительно калибровочных преобразований (3.64). Примечательно, что в плоском пределе  $R \rightarrow \infty$  действие (5.45) демонстрирует усиление калибровочной симметрии. В дополнение к (3.64) оно становится инвариантным относительно новых калибровочных преобразований,

$$\delta\varphi_{\mu\nu,\rho}(x) = 2\partial_{\rho}S_{\mu\nu}(x) - \partial_{\mu}S_{\nu\rho}(x) - \partial_{\nu}S_{\mu\rho}(x), \quad (3.66)$$

с бесследовым симметричным параметром  $S_{\mu\nu}(x) = S_{\nu\mu}(x)$ . Следовательно, в плоском пределе действие (5.45) воспроизводит действие для «крюкового» безмассового поля [266].

Допуская вклады с полной производной, можно увидеть, что самая общая форма квадратичного действия для крюковых полей имеет вид

$$S = S_0 + S_1 \equiv S_0 + \frac{h_1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} = \nabla_{\lambda}U^{\lambda}, \quad (3.67)$$



где  $S_0$  даётся (5.45), а вектор  $U^\nu$  и его дивергенция [35]

$$U^\lambda = \varphi_\mu \nabla_\rho \varphi^{\lambda\rho,\mu} + 2\varphi_\mu \nabla_\rho \varphi^{\mu\lambda,\rho}, \quad \mathcal{O} = \nabla_\lambda \varphi_\mu \nabla_\rho \varphi^{\lambda\rho,\mu} + 2\nabla_\lambda \varphi_\mu \nabla_\rho \varphi^{\mu\lambda,\rho} + \frac{3}{2}\varphi_\mu \varphi^\mu. \quad (3.68)$$

Коэффициент  $h_1$  – произвольная безразмерная константа. Стоит отметить, что добавление полной производной  $\mathcal{O}$  не нарушает калибровочной инвариантности, как в  $AdS_{d+1}$ , так и в плоском пределе.

### 3.3.2 Уравнения движения и связи

Следующие из действия (5.45) уравнения движения могут быть представлены как

$$\frac{\delta S_0}{\delta \varphi^{\mu\nu,\rho}} \equiv \mathcal{E}_{\mu\nu,\rho} = 0, \quad (3.69)$$

где вариация  $\mathcal{E}_{\mu\nu,\rho} = \mathcal{E}_{\mu\nu,\rho}(\varphi, \partial\varphi)$  обозначает получающуюся комбинацию полей второго порядка. Можно также рассмотреть её след  $\mathcal{E}_\rho \equiv g^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu,\rho}$ .

Из обсуждения увеличения количества калибровочных симметрий в плоском пределе (3.66) в предыдущем подразделе следует, что теория «крюкового» поля в  $AdS_{d+1}$  похожа на массивную электродинамику в  $\mathbb{R}^{d,1}$ . Действительно, переход к безмассовому пределу в теории Прока приводит к усилению калибровочной симметрии, так что получающаяся теория это максвелловская электродинамика. Это значит, что в массивном режиме условие Лоренца  $m^2 \partial_\mu A^\mu = 0$  получается взятием дивергенции от уравнений поля. В безмассовом пределе условие Лоренца превращается в тождество Нётер для калибровочной симметрии Максвелла. Параметр массы в электродинамике на плоском пространстве до некоторой степени аналогичен космологической постоянной в теории «крюкового» поля на пространстве  $AdS_{d+1}$ . Следовательно, есть ограничения на безмассовое крюковое поле в  $AdS_{d+1}$ , аналогичные условию Лоренца на массивные векторные поля в  $\mathbb{R}^{d,1}$ .

Действительно, возьмём дивергенцию полевого уравнения  $\nabla^\rho \mathcal{E}_{\mu\nu,\rho}$  и получим следующие дифференциальные связи

$$2\nabla^\lambda \varphi_{\mu\nu,\lambda} + \nabla_\mu \varphi_\nu + \nabla_\nu \varphi_\mu = 0, \quad \nabla^\lambda \varphi_\lambda = 0. \quad (3.70)$$

Здесь второе условие является следом первого. Можно явно проверить, что эти уравнения калибровочно-инвариантны. Используя уравнения на след  $\mathcal{E}_\rho =$

0 и связи (3.70), исходное полевое уравнение  $\mathcal{E}_{\mu\nu,\rho} = 0$  (3.69) может быть упрощено до вида

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_{\mu\nu,\rho} - \nabla_\mu \nabla^\lambda \varphi_{\lambda\nu,\rho} - \nabla_\nu \nabla^\lambda \varphi_{\lambda\mu,\rho} + \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi_\rho + \frac{1}{2} \nabla_\nu \nabla_\mu \varphi_\rho + \\ + \frac{3}{R^2} \varphi_{\mu\nu,\rho} - \frac{1}{R^2} (2g_{\mu\nu} \varphi_\rho - g_{\mu\rho} \varphi_\nu - g_{\nu\rho} \varphi_\mu) = 0, \end{aligned} \quad (3.71)$$

где  $\nabla^2 = \nabla^\lambda \nabla_\lambda$ . Взятие следа  $g_{\mu\nu}$  от (3.71) даёт

$$\nabla^2 \varphi_\gamma - \nabla^\alpha \nabla^\beta \varphi_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{3-2d}{2R^2} \varphi_\gamma = 0. \quad (3.72)$$

Юнговская симметризация полевых уравнений (3.71) пропорциональна первой производной первой связи в (3.70). Таким образом, обозначая уравнения (3.71) как  $E_{\mu\nu,\rho}$  и связи (3.70) как  $T_{\mu\nu}$  и  $T$ , имеем  $E_{\mu\nu,\rho} + E_{\mu\rho,\nu} + E_{\nu\rho,\mu} = \nabla_\mu T_{\nu\rho} + \nabla_\nu T_{\mu\rho} + \nabla_\rho T_{\mu\nu} \approx 0$ . Также  $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 4T$ .

Система полевых уравнений (3.71) вместе со связями (3.70) правильно описывает динамику «крюкового» поля в пространствах  $AdS_{d+1}$ . Форма динамических уравнений, полученных в этом разделе, служит отправной точкой дальнейшего анализа.

Полное действие (3.67) допускает эквивалентное представление

$$S = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} \left( h_0 \nabla_\lambda V^\lambda + h_1 \nabla_\lambda U^\lambda + \varphi^{\mu\nu,\rho} \mathcal{E}_{\mu\nu,\rho} \right), \quad (3.73)$$

где  $\mathcal{E}_{\mu\nu,\rho}$  – левая часть полевых уравнений (3.69), вектор  $U^\lambda$  задается (3.68) и вектор  $V^\lambda$  имеет вид,

$$\begin{aligned} V^\lambda = \varphi^{\mu\nu,\rho} \nabla^\lambda \varphi_{\mu\nu,\rho} - \frac{3}{2} \varphi_\mu \nabla^\lambda \varphi^\mu - 2\varphi^{\lambda\nu,\rho} \nabla^\mu \varphi_{\mu\nu,\rho} + \\ - \varphi^{\mu\nu,\lambda} \nabla^\rho \varphi_{\mu\nu,\rho} + \frac{3}{2} \varphi_\mu \nabla_\rho \varphi^{\lambda\rho,\mu} + \frac{3}{2} \varphi^{\lambda\rho,\mu} \nabla_\rho \varphi_\mu + \frac{3}{2} \varphi^\lambda \nabla_\nu \varphi^\nu. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Следовательно, значение действия (3.73) на массовой поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} S \approx \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} \left( h_0 \nabla_\nu V^\nu + h_1 \nabla_\nu U^\nu \right) = \frac{\epsilon^{-d}}{2} \int d^d x \left( h_0 V_\mu + h_1 U_\mu \right) n^\mu \Big|_{z=\epsilon} \\ = -\frac{\epsilon^{-d+1}}{2} \int d^d x \left( h_0 V_0 + h_1 U_0 \right) \Big|_{z=\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

где  $\approx$  означает равенство на массовой поверхности, с границей, смещённой на  $z = \epsilon$ , и вектор  $n^\mu = (-z, 0, \dots, 0)$  – это ортогональный к границе единичный вектор, направленный наружу. Выражение (3.75) будет использовано для вычисления эффективного граничного действия и связанных с ним 2-точечных корреляционных функций в разделе 3.4.

### 3.3.3 Решение уравнений движения

Для применения голографической процедуры Губсера–Клебанова–Полякова–Виттена необходимо найти решение полевых уравнений при наложении определённых граничных условия на поля в объеме. Для калибровочных полей низших спинов самым прямым путём достижения этой цели является фиксация калибровки, похожей на радиальную калибровку  $h_{0\mu} = 0$  в теории гравитации, см., например, [261, 262, 263, 264]. Будет показано, что радиальная калибровка для «крюковых» полей является эффективным инструментом, хотя для полей высших полей произвольного типа симметрии оно может стать громоздким.

Для наложения радиальной калибровки сперва требуется разложить  $o(d, 1)$  тензорное поле  $\varphi_{\mu\nu,\rho}(x)$  на  $o(d)$  компоненты. Таким образом, возникает следующий список:

$$\begin{array}{ll}
 \text{крюковая компонента:} & \varphi_{ij,k} \\
 \text{симметричная компонента:} & \varphi_{ij,0} \equiv \varphi_{ij} \\
 \text{антисимметричная компонента:} & \varphi_{0[i,j]} = \varphi_{0i,j} - \varphi_{0j,i} \\
 \text{векторная компонента:} & \varphi_{00,j}
 \end{array} \tag{3.76}$$

где  $i, j = 1, \dots, d$ . «Крюковая» компонента  $\varphi_{ij,k}$  и симметричные компоненты  $\varphi_{ij}$  из списка (3.76) имеют ненулевой след. Они будут обозначаться

$$g^{ij} \varphi_{ij,k} \equiv \varphi_k, \quad g^{ij} \varphi_{ij} \equiv \varphi_0, \tag{3.77}$$

где метрический тензор  $g^{ij}$  задается  $o(d)$  частью исходной метрики  $g^{\mu\nu}$ , т.е.  $g^{ij} = z^2 \delta^{ij}$  и  $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$ . Напомним, что число независимых компонент для «крюкового» тензора в  $n$  измерениях равно  $n(n^2 - 1)/3$ , что позволяет легко проверить это разложение простым суммированием и сравнением соответствующих размерностей.

Далее, используя калибровочные преобразования с антисимметричными калибровочными параметрами (3.64), наложим условие радиальной калибровки

$$\varphi_{0[\mu,\nu]} = 0, \quad \text{или, эквивалентно,} \quad \varphi_{0[i,j]} = \varphi_{00,j} = 0. \quad (3.78)$$

Очевидно, что число наложенных калибровочных условий равно общему числу независимых компонент антисимметричной и векторной  $o(d)$  компонент (3.76). Оставшиеся калибровочные поля являются «крюковым»  $\varphi_{ij,k}$  и симметричным  $\varphi_{ij}$  тензорными полями, как и их следы  $\varphi_k$  и  $\varphi_0$ , что в совокупности дает четыре различных  $o(d)$  тензорных поля. Следует заметить, что фиксация радиальной калибровки (3.78) неполна, так что имеется остаточная калибровочная симметрия, которая будет проанализирована далее.

Кроме наложения удобных условий фиксации калибровки, эффективное обращение с полевыми уравнениями также включает избавление от  $z^2$  в производных  $\partial^\mu$  и полях, вместе с использованием импульсного представления относительно координат  $x^i$ . Действительно, удобно разделить ковариантную производную  $\nabla_\mu$  на обычную производную  $\partial_\mu$  и коэффициенты Кристоффеля  $\Gamma_\mu$ . Затем, нужно перерастянуть производные  $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$  на множитель  $z^2$ , содержащийся в метрике, так что индексы опускаются и поднимаются при помощи  $\delta_{\mu\nu}$ . Следовательно, использование радиальной калибровки (3.78) приводит к переопределению оставшихся полей

$$\varphi_{ij,k}(z, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi_{ij,k}(z, \mathbf{x}), \quad \varphi_{ij}(z, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi_{ij}(z, \mathbf{x}), \quad (3.79)$$

$$\varphi_i(z, \mathbf{x}) \rightarrow z^2 \varphi_i(z, \mathbf{x}), \quad \varphi_0(z, \mathbf{x}) \rightarrow z^2 \varphi_0(z, \mathbf{x}),$$

$$\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \partial^i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \square = \partial^i \partial_i. \quad (3.80)$$

Теперь, обозначая перерастянутые поля (3.79) как  $\tilde{\Phi}(z, \mathbf{x})$  (индексы не пишем) введём их Фурье-образы

$$\tilde{\Phi}(z, \mathbf{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \Phi(z, \mathbf{k}), \quad \Phi(z, \mathbf{k}) = \int d^d x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\Phi}(z, \mathbf{x}), \quad (3.81)$$

где свёртка  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \delta_{ij} k^i x^j$  производится относительно евклидовой метрики. Другими словами, при интерпретации евклидового пространства  $AdS_{d+1}$  как набора евклидовых пространств  $\mathbb{R}^d$  различного размера, делается обычное

Фурье-преобразование для заданного фиксированного значения координаты  $z$ , которое иначе не применимо в глобальном  $AdS_{d+1}$  пространстве.

**Полное и неполное решение.** Детальный анализ полевых уравнений и связей начинается с переписывания всех уравнений согласно разделению индексов  $\mu, \nu, \dots$  на 0 и  $i, j, \dots$ . Все тензорные поля подвергаются преобразованию Фурье  $\Phi = \Phi(z, \mathbf{k})$  (Г.2) и обычные производные имеют вид  $\partial_m = ik_m$ . Получающиеся уравнения на компоненты (В.1)-(В.13), приведённые в Приложении В.1, образуют систему дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка по переменной  $z$ . Относительно импульсов  $k^i$  все уравнения алгебраические.

Хотя часть этих уравнений (1-го и 2-го порядка) напрямую разрешаются в элементарных функциях, остальные (уравнения 2-го порядка для симметричных и «крюковых» компонент) более сложны. Действительно, здесь возникают уравнения 2-го порядка, являющиеся уравнениями Бесселя с ненулевой правой частью. Используя для всех полей общее обозначение  $\Phi(z, \mathbf{k})$  можно представить эти уравнения как

$$\left[ \partial_z^2 + \frac{\alpha}{z} \partial_z + \frac{\beta}{z^2} + \gamma \right] \Phi(z, \mathbf{k}) = \Upsilon(z, \mathbf{k}), \quad (3.82)$$

где коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma$  определяют уравнение Бесселя в левой части, а правая даёт некоторую тензорную функцию  $\Upsilon$ , выраженной через различные компоненты. Предлагается искать решение таких уравнений через бесследовое и трансверсальное (ТТ) разложение

$$\Phi(z, \mathbf{k}) = \bar{\Phi}(z, \mathbf{k}) + \Xi\left(\Phi(z, \mathbf{k}), k^m, \frac{1}{k^2}\right), \quad (3.83)$$

где первый член – это ТТ-компонента, а второй член – неаналитичная при нулевом импульсе комбинация, включающая исходное поле  $\Phi(z, \mathbf{k})$  и импульсы  $k^m$ . Явное вычисление показывает, что ТТ-компонента решает однородное уравнение Бесселя

$$\left[ \partial_z^2 + \frac{\alpha}{z} \partial_z + \frac{\beta}{z^2} + \gamma \right] \bar{\Phi}(z, \mathbf{k}) = 0. \quad (3.84)$$

Заменой переменных можно найти, что в зависимости от коэффициентов в (3.82) ТТ-компонента является модифицированной функцией Бесселя  $\bar{\Phi}(z, \mathbf{k}) = z^\mu K_\nu(zk) \bar{\Phi}(\mathbf{k})$ , где  $\bar{\Phi}(\mathbf{k})$  – некоторый граничный ТТ-тензор, а  $\mu$  и  $\nu$  – фиксированные числа.

Для решения полевых уравнений воспользуемся следующей стратегией.

- Во-первых, рассмотрим часть системы уравнений и найдём решения для каждой из тензорных компонент  $\varphi_{ij,k}$ ,  $\varphi_{ij}$  и их следов  $\varphi_i$ ,  $\varphi_0$  (3.79) по модулю некоторых коэффициентов, являющихся произвольными функциями импульсов. Такое решение полностью фиксирует зависимость от  $z$ , но зависимость от  $k^m$  в целом не определяется. Поскольку получающееся решение содержит функциональную свободу, будем называть его неполным. Оно рассматривается в явном виде в Приложении **В.2**.

Выделение неполного решения предшествует нахождению полного решения. Важно, что граничные условия ещё не наложены.

- Во-вторых, используя оставшуюся часть системы, найдём полное решение, удовлетворяющее определённым граничным условиям. А именно, ставится граничная задача Дирихле, откуда следует, что все неопределённые функции, входящие в неполное решение, выражаются в терминах единственного граничного тензора с симметрией типа «крюк», см. далее.

В частности, отсюда следует, что произвольные функции, параметризующие неполное решение, могут стать зависимыми от дополнительных параметров, которые характеризуют определённые граничные условия. Например, введение обрезания  $\epsilon$  не имеет отношения к нахождению неполного решения, но появляется позже, при решении задачи Дирихле.

**Постановка граничных условий.** Перечень найденных в Приложении **В.2** неполных решений имеет вид ( $\nu = d/2$ )

$$\begin{aligned} \varphi_0(z, \mathbf{k}) &= \frac{C(\epsilon, \mathbf{k})}{z^2}, & \varphi_i(z, \mathbf{k}) &= \frac{A_i(\epsilon, \mathbf{k})}{z} + \frac{B_i(\epsilon, \mathbf{k})}{z^3}, \\ \varphi_{ij}(z, \mathbf{k}) &= z^{\nu-2} K_\nu(zk) F_{ij}(\epsilon, \mathbf{k}) + \dots, \\ \varphi_{ij,k}(z, \mathbf{k}) &= z^{\nu-3} K_\nu(zk) G_{ij,k}(\epsilon, \mathbf{k}) + \dots, \end{aligned} \tag{3.85}$$

где выражения для следов точные, а для симметричной и «крюковой» компонент включают только ТТ-части, и многоточия обозначают неаналитический

вклад вида (3.83). Другие компоненты поля, перечисленные в (3.76), обнуляются посредством фиксации радиальной калибровки (3.78). Чтобы найти точные значения неопределённых граничных тензоров  $A_i(\epsilon, \mathbf{k})$ ,  $B_i(\epsilon, \mathbf{k})$ ,  $C(\epsilon, \mathbf{k})$ , и граничных ГТ-тензоров  $F_{ij}(\epsilon, \mathbf{k})$ ,  $G_{ij,k}(\epsilon, \mathbf{k})$  (вместе с опущенным в (3.85) произвольным тензором  $a_{ij}(\epsilon, \mathbf{k})$ , входящим в неаналитическую часть «крюковой» компоненты, см. (В.29)) нужно фиксировать тот или иной набор граничных условий. Далее накладываются условия Дирихле.

Итак, считаем, что «крюковая» компонента  $\varphi_{ij,k}(z, \mathbf{k})$  должна быть зафиксирована на границе, а остальные поля не должны слишком быстро расти при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Тогда единственный непротиворечивый способ удовлетворить этим граничным условиям это потребовать, чтобы граничные значения всех компонент выражались в терминах граничного значения крюковой компоненты, не подчиненной никаким связям,

$$\varphi_{ij,k}(\epsilon, \mathbf{k}) \equiv \pi_{ij,k}(\mathbf{k}) , \quad \text{с нулевым следом} \quad \delta^{ij} \pi_{ij,k}(\mathbf{k}) = 0 . \quad (3.86)$$

Можно также оставить граничное значение следа ненулевым. Однако, как обсуждается в конце раздела 3.4.2, на границе существует остаточная калибровочная симметрия штуркельбергова типа, позволяющая занулить след путем наложения калибровки.

**Полное решение.** Окончательный ответ для различных тензорных компонент, вычисленных в Приложении В.2 имеет вид.

- Следовые компоненты, формулы (В.40), (В.49):

$$\varphi_0(z, \mathbf{k}) = 0 , \quad \varphi_i(z, \mathbf{k}) = \frac{\epsilon^3}{4(d-2)} \left[ \frac{1}{z} - \frac{\epsilon^2}{z^3} \right] k^m k^n \pi_{mn,i}(\mathbf{k}) . \quad (3.87)$$

- Симметричная компонента, формула (В.46):

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(z, \mathbf{k}) = & \\ = -i \left( \frac{\epsilon}{z} \right)^2 \frac{\epsilon}{W(\epsilon k)} \frac{\mathcal{K}_\nu(zk)}{\mathcal{K}_\nu(\epsilon k)} & \left( k^m \pi_{ij,m}(\mathbf{k}) + \frac{k^m k^n}{2k^2} (k_i \pi_{mn,j}(\mathbf{k}) + k_j \pi_{mn,i}(\mathbf{k})) \right) \\ & - \frac{i\epsilon}{2(d-2)} \left( \frac{\epsilon}{z} \right)^2 \frac{k^m k^n}{k^2} (k_i \pi_{mn,j}(\mathbf{k}) + k_j \pi_{mn,i}(\mathbf{k})) , \end{aligned} \quad (3.88)$$

где функции  $\mathcal{K}_\nu$  и  $W$ , определённые в (В.56), являются комбинациями модифицированных функций Бесселя (см. Приложение В.3).

- «Крюковая» компонента, формула (В.51):

$$\varphi_{ij,k}(z, \mathbf{k}) = \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^3 \frac{\mathcal{K}_\nu(zk)}{\mathcal{K}_\nu(\epsilon k)} \bar{\varphi}_{ij,k}(\mathbf{k}) + \dots, \quad (3.89)$$

где  $\bar{\varphi}_{ij,k}(\mathbf{k})$  – ТТ часть (В.50) граничного «крюкового» тензора  $\pi_{ij,k}(\mathbf{k})$ , многоточие обозначает члены (больше двух десятков), определяющие неаналитический вклад вида (3.83).

**Граничное поведение.** Рассмотрим полное решение в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ .

- Граничное значение следовой компоненты (3.87) тождественно равно нулю

$$\varphi_i(\epsilon, \mathbf{k}) = 0, \quad (3.90)$$

что согласуется с бесследовостью граничного значения «крюкового» поля  $\varphi_{ij,k}(\epsilon, \mathbf{k}) = \pi_{ij,k}(\mathbf{k})$ . Скалярная компонента следа равна нулю при любых значениях координаты  $z$ , см. (3.87).

- Из (3.88) находим, что симметричная компонента стремится к нулю на границе

$$\varphi_{mn}(\epsilon, \mathbf{k}) = \frac{i\epsilon}{(d-2)} k^l \pi_{mn,l}(\mathbf{k}) + \dots \Big|_{\epsilon=0} = 0. \quad (3.91)$$

Заметим, что ее след тоже обнуляется.

- Подстановка  $z = \epsilon$  в решение для «крюковой» компоненты (3.89) и использование определения (В.50) воспроизводит исходное граничное условие (3.86)

$$\varphi_{ij,k}(\epsilon, \mathbf{k}) \equiv \pi_{ij,k}(\mathbf{k}). \quad (3.92)$$

Все другие компоненты «крюкового» поля в объёме в радиальной калибровке (3.78) равны нулю.

Данный анализ отвечает на вопрос о физических степенях свободы, обсуждавшийся в самом начале этого раздела. Поведение «крюкового» поля на границе явно демонстрирует, что физические степени свободы переносятся только «крюковой» компонентой  $\varphi_{ij,k}(x, \mathbf{k})$ . Следовательно, спин-2 мода, появляющаяся вследствие механизма БМВ, является  $o(d-1)$  симметричной составляющей  $o(d)$  граничного тензора  $\pi_{ij,k}(\mathbf{k})$ . В частности, это означает, что граничное эффективное действие выражается только в терминах граничных «крюковых» тензоров.



### 3.4 Эффективное голографическое действие

Рассмотрим Фурье-преобразованное квадратичное действие на массовой поверхности,

$$S \approx \int d^d x d^d y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \mathcal{I}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (3.93)$$

где ядро  $\mathcal{I}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – это билакальная функция пространственных координат, параметризованная импульсами и параметром обрезания. В общем случае, ядро представляется в виде ряда Лорана по параметру обрезания, а коэффициенты разложения не обязательно аналитичны при нулевом импульсе. Оно может быть представлено как сумма двух вкладов  $\mathcal{I}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{N}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \text{Loc}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , где  $\text{Loc}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  обозначает все локальные члены, дающие под действием преобразования Фурье члены с дельта-функциями. Такие члены можно последовательно убрать голографической процедурой перенормировки [267]. Другими словами, локальные члены в импульсном пространстве представляются в виде  $\sim (k^2)^m$ , где порядки  $m$  – целые положительные числа.

Явное вычисление показывает, что все полюса по параметру обрезания имеют нулевые коэффициенты, так что остается регулярная часть  $\mathcal{N}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , причем начиная с члена, пропорционального  $\epsilon^6$ . Таким образом, определим эффективное действие следующим образом

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{\epsilon^6} \int d^d x d^d y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \mathcal{N}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\epsilon \rightarrow 0}. \quad (3.94)$$

Степень параметра обрезания показывает, как быстро значение  $\mathcal{N}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  растёт со смещением границы к бесконечности.

Рассмотрим теперь поверхностный член в квадратичном действии (3.75), определяемый радиальными векторными компонентами  $V_0$  (3.74) и  $U_0$  (3.68). Используя калибровку (3.78) и граничное поведение решения, рассмотренное в предыдущем разделе, найдём, что все члены в  $U_0$  дают вклад в  $\text{Loc}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , а единственный член в  $V_0$ , который может содержать нелокальные вклады, даётся нормальной производной «крюковой» компоненты

$$S \approx -\frac{h_0 \epsilon^{-2\nu+7}}{2} \int d^d x d^d y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \varphi_{ij, \mathbf{k}}(\epsilon, \mathbf{k}) \partial_z \varphi_{ij, \mathbf{k}}(z, \mathbf{k}) \Big|_{z=\epsilon}, \quad \nu = \frac{d}{2}. \quad (3.95)$$

Все другие члены в  $V_0$  принадлежат  $\text{Loc}_{\epsilon, \mathbf{k}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . В частности, отсюда следует, что общая константа  $h_1$ , входящая в полное действие (3.67), пропадает из эффективного действия.

**2-точечная корреляционная функция.** Предполагаем, что полученное из (3.95) эффективное действие (3.94) имеет вид

$$S_{\text{eff}} = C \int d^d x d^d y \left[ \pi^{ij, k}(\mathbf{x}) \langle \mathcal{O}_{ij, k}(\mathbf{x}) \mathcal{O}_{mn, l}(\mathbf{y}) \rangle \pi^{mn, l}(\mathbf{y}) \right], \quad (3.96)$$

где  $C$  – это константа перенормировки, и 2-точечная функция [167]

$$\langle \mathcal{O}_{ij, k}(\mathbf{x}) \mathcal{O}_{mn, l}(0) \rangle = \frac{\Pi_{ij, k|mn, l}(\mathbf{x})}{|x|^{2\Delta}}, \quad \Delta = d, \quad (3.97)$$

сворачивается с двумя граничным бесследовыми полями  $\pi^{ij, k}(\mathbf{x})$ , являющимися начальными значениями полей в объёме, см. (3.20)-(3.22). Напомним, что вид 2-точечной функции (3.97) полностью фиксируется алгеброй конформных симметрий  $o(d+1, 1)$ , реализуемой масштабными изометриями евклидовой метрики в пространстве  $\mathbb{R}^d$ . Теперь следует прояснить появление данной 2-точечной функции как граничного значения действия. Для этого, обсудим трансформационные свойства полей и действия в объёме и на границе.

### 3.4.1 Чётные/нечётные граничные размерности $d$

**Нечётные размерности.** Рассмотрим сначала случай нечётных размерностей  $d$ , отвечающий нецелым значениями порядка модифицированной функции Бесселя  $\nu = d/2$ . Для нахождения значения оншельного действия (3.95) следует вычислить нормальную производную  $\partial_z \varphi_{ij, k}(z, \mathbf{k})|_{z=\epsilon}$ . Прямое вычисление даёт формулы, собранные в Приложении В.4. В результате, находим, что нормальная производная раскладывается по степеням параметра обрезания  $\epsilon$  следующим образом

$$\begin{aligned} \partial_z \varphi_{ij, k}(z, \mathbf{k}) \Big|_{z=\epsilon} &= \epsilon^{-1} \Lambda_{ij, k}^{(-1)}(\mathbf{k}) + \epsilon \Lambda_{ij, k}^{(1)}(\mathbf{k}) + \dots \\ &+ \epsilon^{2\nu-1} k^{2\nu} \Lambda_{ij, k}^{(2\nu-1)}(\mathbf{k}) + \dots, \end{aligned} \quad (3.98)$$

где многоточия в первой и второй строке обозначают члены более высоких порядков,  $\mathcal{O}(\epsilon^3 k^4)$  и  $\mathcal{O}(\epsilon^{2\nu+1} k^{2\nu+2})$ , соответственно. Функции  $\Lambda_{ij, k}^{(\dots)}(\mathbf{k})$  явля-

ются некоторыми комбинациями граничного «крюкового» тензора и импульсов. Заметим, что первый член в (3.98) появляется от дифференцирования отношения  $\epsilon/z$ , возводимого в различные степени, возникающие в решении (3.89). Второй и третий члены вместе с членами высших порядков появляются от дифференцирования  $\mathcal{O}(\epsilon^m k^{m+1})$  и  $\mathcal{O}(\epsilon^{2\nu+l} k^{2\nu+l+1})$  членов в разложении логарифмических производных различных функций в (В.51), вычисленных с использованием разложения модифицированных функций Бесселя (В.57). Таким образом, у нас есть три типа членов, которые надо анализировать отдельно.

Есть две причины выделения первых трёх членов в (3.98). С одной стороны, это члены низшего порядка по  $\epsilon$  в своих группах, а потому вкладами высших порядков в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  можно пренебречь. С другой стороны, первые два члена содержат сингулярные по  $k$  вклады, а также вклады, пропорциональными чётным степеням,  $k^{2m}$ , а в третьем члене содержатся только нечётные степени импульсов  $k^{d+2l}$  (напомним, что  $\nu = d/2$  и  $d$  нечётное). Таким образом, при рассмотрении разложения (3.98) контролируется малость  $\epsilon$  и неаналитичность при нулевых импульсах.

Из выражений (В.68)-(В.72) можно с помощью функций низших порядков получить, что

$$\Lambda_{ij,k}^{(-1)}(\mathbf{k}) = 0, \quad \Lambda_{ij,k}^{(1)}(\mathbf{k}) = 0, \quad (3.99)$$

в то время как  $k^{2\nu} \Lambda_{ij,k}^{(2\nu-1)}(\mathbf{k})$  определяет нелокальный вклад низшего порядка в значение оншельного действия и потому дает искомую 2-точечную корреляционную функцию.

Конечное выражение для эффективного действия (3.94), получаемое подстановкой коэффициента  $\Lambda_{ij,k}^{(2\nu-1)}(\mathbf{k})$  (3.98) в оншельное действие (3.95), имеет вид

$$S_{\text{eff}} = \kappa_o \int d^d x d^d y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} k^d \mathcal{Z}(k | \pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})), \quad \kappa_o = h_0 \frac{d}{2^{d+1}} \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(1+d/2)}, \quad (3.100)$$

где билोकальная функция ядра имеет вид

$$\mathcal{Z}(k|\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})) = \left( \pi_{ij,k}(\mathbf{x})\pi_{ij,k}(\mathbf{y}) - 2\pi_{mi,j}(\mathbf{x})\pi_{ni,j}(\mathbf{y}) \frac{k^m k^n}{k^2} - \right. \\ \left. - \frac{d+1}{d-2} \pi_{ij,k}(\mathbf{x})\pi_{ij,m}(\mathbf{y}) \frac{k^k k^m}{k^2} + \frac{3}{2} \pi_{ij,k}(\mathbf{x})\pi_{mn,k}(\mathbf{y}) \frac{k^i k^j k^m k^n}{k^4} \right). \quad (3.101)$$

Отметим, что  $\Gamma(1 - d/2)$  в (3.100) не имеет нулей для нечётных  $d$ .

Далее, используя формулу преобразования Фурье (В.75) можно получить 2-точечную функцию в координатном представлении

$$\tilde{S}_{\text{eff}} = \tilde{\kappa}_o \int d^d x d^d y \frac{\tilde{\mathcal{Z}}(\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2d}}, \quad \tilde{\kappa}_o = -\frac{h_0}{2\pi^{d/2}} \frac{1}{(d-2)} \frac{\Gamma(d+2)}{\Gamma(d/2)}, \quad (3.102)$$

с билोकальным ядром вида

$$\tilde{\mathcal{Z}}(\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})) = \left( \pi_{ij,k}(\mathbf{x})\pi_{ij,k}(\mathbf{y}) - 4\pi_{mi,j}(\mathbf{x})\pi_{ni,j}(\mathbf{y}) \frac{z^m z^n}{z^2} - \right. \\ \left. - 2\pi_{ij,k}(\mathbf{x})\pi_{ij,m}(\mathbf{y}) \frac{z^k z^m}{z^2} + 6\pi_{ij,k}(\mathbf{x})\pi_{mn,k}(\mathbf{y}) \frac{z^i z^j z^m z^n}{z^4} \right), \quad (3.103)$$

где введены обозначения  $z^i = x^i - y^i$  и  $z^2 = z^i z_i$ . Можно показать, что билोकальная функция  $\tilde{\mathcal{Z}}(\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y}))$  совпадает с тензором (3.21), свёрнутым с  $\pi_{ij,k}$  следующим образом

$$\tilde{\mathcal{Z}}(\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})) = \frac{1}{3} \pi_{ij,k}(\mathbf{x}) \Pi_{ij,k|mn,l}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \pi_{mn,l}(\mathbf{y}). \quad (3.104)$$

В частности, из (3.20) получается, что эффективное действие воспроизводит 2-точечную функцию двух несимметричных примарных операторов с конформными размерностями (вакуумными энергиями)  $\Delta = E_0 = d$  (3.2).

**Чётные размерности.** Для рассмотрения целых  $\nu$  или чётных размерностей  $d$ , нужно переделать вышеприведённые вычисления, начиная с разложения модифицированной функции Бесселя целого порядка в окрестности малого аргумента. Повторение вычислений необходимо, т.к. разложение для целых  $\nu$  содержит логарифмический вклад, см. формулу (В.60). Следовательно, вычисление 2-точечной корреляционной функции в импульсном представлении даёт результат, отличающийся от случая нецелого  $\nu$ . В координатном представлении конечный результат совпадает с (3.102), что может быть объяснено отсутствием нулей гамма-функции в общем коэффициенте (3.102), в отличие от нулей в общем коэффициенте (3.100).

Совершенно аналогично выражению (3.98) можно найти, что разложение по  $\epsilon$  нормальной производной для чётных  $d$  имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_z \varphi_{ij,k}(z, \mathbf{k}) \Big|_{z=\epsilon} &= \epsilon^{-1} \Lambda_{ij,k}^{(-1)}(\mathbf{k}) + \epsilon \Lambda_{ij,k}^{(1)}(\mathbf{k}) + \dots \\ &+ \epsilon^{2\nu-1} k^{2\nu} \ln \frac{\epsilon k}{2} \Lambda_{ij,k}^{(2\nu-1)}(\mathbf{k}) + \dots, \end{aligned} \quad (3.105)$$

где многоточия в первой и второй строке обозначают члены высших порядков,  $\mathcal{O}(\epsilon^3 k^4)$  и  $\mathcal{O}(\epsilon^{2\nu+1} k^{2\nu+2})$ , соответственно. Прямое вычисление приводит к соотношениям  $\Lambda_{ij,k}^{(-1)}(\mathbf{k}) = \Lambda_{ij,k}^{(1)}(\mathbf{k}) = 0$ , которые, очевидно, совпадают с (3.99), поскольку первая группа членов в разложении модифицированной функции Бесселя (В.57) и (В.60) одинакова. Различие появляется в последнем члене, содержащем логарифм. Следовательно, перенормированное значение оншельного действия в импульсном представлении равно

$$S_{\text{eff}} = \kappa_e \int d^d x d^d y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} k^d \ln \frac{\epsilon k}{2} \mathcal{Z}(k | \pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})), \quad (3.106)$$

где ядро задаётся таким же выражением (3.101), однако общий коэффициент другой,

$$\kappa_e = (-)^{\frac{d}{2}} \frac{h_0 d}{2^d \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2} + 1)}. \quad (3.107)$$

Для выполнения преобразование Фурье необходимо воспользоваться формулой (В.90), что даёт следующее выражение

$$\tilde{S}_{\text{eff}} = \tilde{\kappa}_e \int d^d x d^d y \frac{\tilde{\mathcal{Z}}(\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2d}}, \quad \tilde{\kappa}_e = -\frac{h_0}{2\pi^{d/2}} \frac{1}{(d-2)} \frac{\Gamma(d+2)}{\Gamma(d/2)}, \quad (3.108)$$

которое, очевидно, идентично ранее полученному оншельному действию в нечётной размерности  $d$  (3.102).

### 3.4.2 Симметричная трансмутация

Действие «крюкового» поля в объёме (3.67) инвариантно относительно глобальных и локальных преобразований

$$\delta \varphi_{\mu\nu,\rho}(x) = \delta_\chi^L \varphi_{\mu\nu,\rho}(x) + \delta_\xi^G \varphi_{\mu\nu,\rho}(x), \quad (3.109)$$

где локальная часть даётся калибровочными преобразованиями (3.64), а глобальная часть является производной Ли относительно векторов Киллинга фоновой метрики  $AdS_{d+1}$  (см. ниже). Имея явное решение задачи Дирихле для уравнений «крюкового» поля, полезно изучить поведения симметрий (3.109).

В нашем случае, глобальные симметрии евклидового пространства  $AdS_{d+1}$  образуют алгебру  $o(d+1, 1)$ , которая описывает конформную инвариантность граничного эффективного действия. Поскольку квадратичное действие (3.67) инвариантно относительно глобальных  $AdS_{d+1}$  симметрий, естественно ожидать, что инвариантность сохраняется и для граничного действия. Действительно, ранее было показано, что определённые части действия на массовой поверхности тождественны 2-точечным корреляционным функциям, которые конформно-инвариантны. Это демонстрирует, что используемая  $\epsilon$ -регуляризация не противоречит глобальной конформной симметрии, по крайней мере для граничных условий Дирихле.

**Глобальные симметрии.** Рассмотрим глобальные преобразования симметрии для полей в объёме и на границе. Наша цель – продемонстрировать происхождение симметричной трансмутации из объёма на границу в пределе  $z = \epsilon \rightarrow 0$ . Для этого, найдём векторы Киллинга евклидовой метрики  $AdS_{d+1}$  (3.63). Они даются  $o(d)$  скаляром и векторными компонентами  $o(d+1)$  вектора Киллинга  $\xi^\mu = (\xi^0(z, \mathbf{x}), \xi^m(z, \mathbf{x}))$ , а именно,

$$\xi^0(z, \mathbf{x}) = (D - 2(Kx))z, \quad (3.110)$$

$$\xi^m(z, \mathbf{x}) = \Lambda^{mn}x_n + P^m + Dx^m + K^m x^2 - 2x^m(Kx) + K^m(z^2 - \epsilon^2), \quad (3.111)$$

где  $\Lambda^{mn} = -\Lambda^{nm}$ ,  $P^m, K^m, D$  – постоянные  $o(d)$  тензоры, параметризующие алгебру  $o(d+1, 1)$ , ср. (3.6). Эта параметризация оказывается удобной с точки зрения граничной геометрии, поскольку  $\Lambda^{mn}$  и  $P^m$  отождествляются с параметрами лоренцевых бустов и трансляций в пространстве  $\mathbb{R}^d$ , а  $K^m$  и  $D$  – с параметрами специальных конформных и масштабных преобразований.

Глобальные  $o(d+1, 1)$  преобразования «крюкового» поля в объёме  $\varphi_{\mu\nu, \rho}(x)$  определяются стандартным образом

$$\begin{aligned} \delta_\xi^G \varphi_{\mu\nu, \rho}(x) &= \mathcal{L}_\xi \varphi_{\mu\nu, \rho}(x) \equiv \xi^\gamma \partial_\gamma \varphi_{\mu\nu, \rho}(x) + \\ &+ \partial_\mu \xi^\gamma \varphi_{\gamma\nu, \rho}(x) + \partial_\nu \xi^\gamma \varphi_{\mu\gamma, \rho}(x) + \partial_\rho \xi^\gamma \varphi_{\mu\nu, \gamma}(x), \end{aligned} \quad (3.112)$$

т.к. производная Ли относительно поля Киллинга  $\xi^\mu$  даётся (3.110) и (3.111).

В предыдущем разделе было установлено, что почти все  $o(d+1)$  составляющие исходного «крюкового» поля в объёме имеют нулевые граничные значения. Единственной компонентой с ненулевым граничным значением оказывается крюковая компонента  $\varphi_{ij,k}(z, \mathbf{x})$ , см. (3.86). Следовательно, закон преобразования этой компоненты получается из (3.112) в виде

$$\begin{aligned} \delta_\xi^G \varphi_{mn,l}(z, \mathbf{x}) = & \mathcal{L}_\xi \varphi_{mn,l}(z, \mathbf{x}) + \xi^0 \partial_z \varphi_{mn,l}(z, \mathbf{x}) - \\ & - \frac{1}{2} \partial_m \xi^0 \varphi_{nl}(z, \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \partial_m \xi^0 \varphi_{nl}(z, \mathbf{x}) + \partial_l \xi^0 \varphi_{mn}(z, \mathbf{x}) , \end{aligned} \quad (3.113)$$

где  $\mathcal{L}_\xi$  обозначает производную Ли относительно компонент вектора Киллинга (3.111). Используя (В.46) и (В.49) можно найти, что в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  последние три члена стремятся к нулю, см. (3.91) и (3.90). Тогда используя  $z$ -компоненту вектора Киллинга (3.110) в импульсном представлении, находим, что ведущий вклад в

$$\xi^0 \partial_z \varphi_{ij,k}(z, \mathbf{k}) \Big|_{z=\epsilon} \sim \epsilon \partial_z \varphi_{ij,k}(z, \mathbf{k}) \Big|_{z=\epsilon} = \Lambda_{ij,k}^{(-1)}(\mathbf{k}) = 0 \quad (3.114)$$

тождественно равен нулю в силу (3.98), (3.99). В результате, индуцированное на границу преобразование (3.112) в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$  принимает вид

$$\delta_\xi^G \pi_{ij,k}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_\xi \varphi_{ij,k}(\mathbf{x}) . \quad (3.115)$$

Это значит, что граничное тензорное поле  $\pi_{ij,k}(\mathbf{x})$  имеет масштабную размерность  $\Delta_s = 0$  (обсуждение свойств преобразования несимметричных примарных полей в этом контексте см. раздел **3.1.2**). Вспоминая, что размерности конформных партнёров в  $d$  измерениях соотносятся как  $\Delta_s + \Delta_p = d$ , немедленно получаем, что конформный партнёр граничного тензора имеет масштабную размерность  $\Delta_p = d$ .

С другой стороны, действие (3.67) инвариантно относительно глобальных  $o(d+1, 1)$  преобразований симметрии, и эта инвариантность превращается в глобальную инвариантность оншельного действия (3.96). Тогда дуальная конформная размерность  $\Delta_s = 0$  гарантирует, что конформные партнёры граничных значений  $\pi_{ij,k}(\mathbf{k})$  являются примарными конформными «крюковыми» полями  $\mathcal{O}^{ij,k}(\mathbf{k})$  критической размерности  $\Delta_p = d$ , а их 2-точечные

функции даются (3.20). Как и ожидалось, эта конформная размерность в точности совпадает с вакуумной энергией безмассового «крюкового» поля в  $AdS_{d+1}$ .

Соотношения (3.114) работают только для нецелых  $\nu = d/2$ . В чётных размерностях нормальная производная в импульсном представлении содержит логарифмический вклад (3.105). Однако, используя обратное преобразование Фурье в координатное представление, основанное на дифференциальной регуляризации (B.90) в Приложении B.5, можно восстановить регулярное поведение по  $\epsilon$ , так что для чётных размерностей формула (3.115) формально верна в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Локальные симметрии.** Фиксация радиальной калибровки (3.78) приводит к остаточным калибровочным преобразованиям. Для нахождения их явного вида необходимо решить уравнения, выражающие тот факт, что локальные вариации калибровочных условий должны компенсироваться глобальными вариациями

$$\delta_G \varphi_{00,i}(x) = \delta_L \varphi_{00,i}(x), \quad \delta_G \varphi_{0[i,j]}(x) = \delta_L \varphi_{0[i,j]}(x), \quad (3.116)$$

где локальные вариации возникают из калибровочного преобразования (3.64). Следовательно, калибровка инвариантна относительно преобразований (3.109).

Чтобы разрешить условия (3.116) закон преобразования (3.64) следует представить в следующем виде

$$\delta_L \varphi_{\mu\nu,\rho}(x) = \partial_\mu \chi_{\nu\rho}(x) - \partial_\nu \chi_{\mu\rho}(x) - 2\Gamma_{\mu\nu}^\gamma \chi_{\gamma\rho}(x) - \Gamma_{\mu\rho}^\gamma \chi_{\nu\gamma}(x) - \Gamma_{\nu\rho}^\gamma \chi_{\mu\gamma}(x), \quad (3.117)$$

где символы Кристоффеля вычислены в координатах Пуанкаре (3.63). Раскладывая исходный  $o(d, 1)$  калибровочный параметр по  $o(d)$  компонентам как  $\chi_{mn}(x) = -\chi_{nm}(x)$  и  $\chi_m(x) \equiv \chi_{0m}(x)$ , получаем, что векторный и антисимметричный параметры преобразуются как

$$\begin{aligned} \delta_L \varphi_{00,m}(z, \mathbf{x}) &= \frac{2}{z} \left( N_z + 2 \right) \chi_m(z, \mathbf{x}), \quad N_z = z \frac{d}{dz}, \\ \delta_L \varphi_{0[m,n]}(z, \mathbf{x}) &= \frac{2}{z} \left( N_z + 3 \right) \chi_{mn}(z, \mathbf{x}) + \partial_{[m} \chi_{n]}(z, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.118)$$

С другой стороны, используя (3.112), получим, что глобальные преобразова-



ния этих компонент имеют вид

$$\begin{aligned}\delta_G \varphi_{00,m}(z, \mathbf{x}) &= -2zK^n \varphi_{nm}(z, \mathbf{x}), \\ \delta_G \varphi_{0[m,n]}(z, \mathbf{x}) &= 2zK^l \varphi_{l[m,n]}(z, \mathbf{x}),\end{aligned}\quad (3.119)$$

где симметричная и «крюковая» компоненты поля (точнее, их Фурье-образы) даются решениями (В.46) и (В.51), и  $K^m$  – постоянный параметр специального конформного преобразования, см. (3.111).

Рассмотрим теперь условия (3.116). Первое уравнение в (3.116) является неоднородным линейным уравнением

$$(N_z + 2)\chi_m(z, \mathbf{x}) = -z^2 K^n \varphi_{nm}(z, \mathbf{x}), \quad (3.120)$$

и его общее решение имеет вид

$$\chi_n(z, \mathbf{x}) = - \int_0^1 dt t^3 z^2 K^m \varphi_{mn}(tz, \mathbf{x}) + \frac{g_n(\epsilon, \mathbf{x})}{z^2}, \quad (3.121)$$

где  $g_n(z, \mathbf{x})$  – произвольная векторная функция, представляющая общее решение однородного уравнения (3.120). Второе уравнение в (3.116)

$$(N_z + 3)\chi_{mn}(z, \mathbf{x}) = z^2 K^l \varphi_{l[m,n]}(z, \mathbf{x}) - \frac{z}{2} \partial_{[m} \chi_{n]}(z, \mathbf{x}), \quad (3.122)$$

и его общее решение имеет вид

$$\chi_{mn}(z, \mathbf{x}) = \int_0^1 dt t^4 z^2 K^l \varphi_{l[m,n]}(tz, \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \int_0^1 dp p^3 z \partial_{[m} \chi_{n]}(pz, \mathbf{x}) + \frac{f_{mn}(\epsilon, \mathbf{x})}{z^3}, \quad (3.123)$$

где  $f_{mn}(\epsilon, \mathbf{x})$  – произвольная антисимметричная функция, представляющая общее решение однородного уравнения (3.122). Можно заключить, что есть такое решение для калибровочных и глобальных параметров, которое не меняет калибровку (3.78).

Обсудим теперь граничное поведение параметров (3.121) и (3.123). Обсуждение в разделе **3.3.3** позволяет заключить, что

$$\chi_m(z, \mathbf{x}) \Big|_{z=\epsilon \rightarrow 0} = \epsilon^{-2} g_m(\epsilon, \mathbf{x}), \quad \chi_{mn}(z, \mathbf{x}) \Big|_{z=\epsilon \rightarrow 0} = \epsilon^{-3} f_{mn}(\epsilon, \mathbf{x}). \quad (3.124)$$

Чтобы избежать полюсов по  $\epsilon$  следует зафиксировать зависимость от  $\epsilon$  функций  $g_m(\epsilon, \mathbf{x})$  и  $f_{mn}(\epsilon, \mathbf{x})$  следующим образом

$$g_m(\epsilon, \mathbf{x}) = \epsilon^3 \vartheta_i(\mathbf{x}) + \dots, \quad f_{mn}(\epsilon, \mathbf{x}) = \epsilon^3 \zeta_{mn}(\mathbf{x}) + \dots, \quad (3.125)$$

где многоточия обозначают члены высших порядков по  $\epsilon$ , а  $\vartheta_m(\mathbf{x})$  и  $\zeta_{mn}(\mathbf{x})$  – произвольные граничные тензоры. Первое разложение в (3.125) объясняется формой калибровочных преобразований для «крюковой» компоненты, взятой из (3.117),

$$\begin{aligned} \delta_L \varphi_{mn,k}(z, \mathbf{x}) = & \partial_m \chi_{nk}(z, \mathbf{x}) + \partial_n \chi_{mk}(z, \mathbf{x}) \\ & - \frac{1}{z} \left( 2\delta_{mn} \chi_k(z, \mathbf{x}) - \delta_{mk} \chi_n(z, \mathbf{x}) - \delta_{nk} \chi_m(z, \mathbf{x}) \right), \end{aligned} \quad (3.126)$$

где калибровочные параметры имеют интегральные представления (3.121) и (3.123). Правая часть этого выражения несингулярна, при условии, что параметр  $g_m(z, \mathbf{x})$  имеет асимптотику (3.125) в пределе  $\epsilon \rightarrow 0$ . Именно по этой причине первое разложение в (3.125) начинается с  $\epsilon^3$ , а не с  $\epsilon^2$ , как можно было бы заключить из (3.124).

Примечательно, что кроме части с производными, определяемой параметром  $\zeta_{mn}(\mathbf{x})$ , высаженный на границу закон преобразования (3.126) содержит также штуркельбергову (алгебраическую) часть, определяемую независимым параметром  $\vartheta_m(\mathbf{x})$

$$\delta_L \varphi_{mn,k}(\mathbf{x}) = \partial_m \zeta_{nk}(\mathbf{x}) + \partial_n \zeta_{mk}(\mathbf{x}) - \left( 2\delta_{mn} \vartheta_k(\mathbf{x}) - \delta_{mk} \vartheta_n(\mathbf{x}) - \delta_{nk} \vartheta_m(\mathbf{x}) \right). \quad (3.127)$$

Можно заметить, что штуркельберговых параметров достаточно, чтобы при помощи калибровки избавиться от следа граничного «крюкового» тензора  $\varphi_{ij,k}(\mathbf{x})$ . Именно поэтому в разделе **3.3.3** было выбрано граничное значение крюковой компоненты бесследовой, см. (3.86).

Это явление не обсуждалось ранее в литературе, несмотря на то, что штуркельберговы преобразования для тензоров на границе напрямую следуют из ковариантных производных, содержащихся в изначальных калибровочных преобразованиях в объёме, ср. (3.117). Следовательно, штуркельберговы преобразования позволяют сделать граничные значения тензоров бесследовыми. В частности, для безмассового случая спина 2, рассмотренного в [261, 262, 264], след симметричного граничного тензора может быть сдвинут в ноль путём штуркельбергова преобразования, и его можно не анализировать.

Далее, оказывается, что остаточные калибровочные преобразования, спроецированные на граничный крюковый бесследовый тензор  $\pi_{mn,l}(\mathbf{x})$ , имеют

вид

$$\begin{aligned} \delta^L \pi_{mn,i}(\mathbf{x}) = & \partial_m \zeta_{nl}(\mathbf{x}) + \partial_n \zeta_{ml}(\mathbf{x}) - \\ & - \frac{1}{d-1} \left[ 2\delta_{mn} \partial^k \zeta_{kl}(\mathbf{x}) - \delta_{ml} \partial^k \zeta_{kn}(\mathbf{x}) - \delta_{nl} \partial^k \zeta_{km}(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (3.128)$$

где  $\zeta_{mn}(\mathbf{x})$  – антисимметричный остаточный калибровочный параметр  $\zeta_{mn} = -\zeta_{nm}$ , и обе части (3.128) обладают симметрией Юнга типа «крюк» и нулевыми следами.

### 3.4.3 Действие для конформных калибровочных полей

Следуя анализу полностью симметричных полей в работах [261, 268], давайте регуляризуем плохо определенное в чётных размерностях эффективное действие и отождествим его сингулярную часть с калибровочно-инвариантным действием для конформных «крюковых» полей  $\pi_{mn,k}(\mathbf{x})$ . Таким образом, воспроизводится известное в литературе действие [269] (см. формулу (3.130) ниже).

В чётных размерностях функции  $1/x^{d+2m}$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$ , плохо определены как обобщенные функции (см., например, [270]). В нашем случае, параметр  $m$  принимает значения  $m = d/2, d/2 - 1, d/2 - 2$ , и основная идея состоит в рассмотрении таких распределений посредством формулы (В.79) с целью сведения  $1/x^{d+2m}$  к  $1/x^d$ . В свою очередь, для работы с функцией  $1/x^d$  существуют различные регуляризационные схемы. Например, можно воспользоваться размерной регуляризацией и представить  $1/x^d \sim \frac{1}{\sigma} \delta(x) +$  конечная часть, где  $d - [d] = -2\sigma$ , и  $[d]$  – целое. Конечная часть может быть определена при помощи дифференциальной регуляризации, описанной в Приложении В.5. Сингулярная часть имеет вид

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+2m}} \stackrel{\sigma \rightarrow 0}{\equiv} \tau_m \square_x^m \left[ \frac{s_d}{2\sigma} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right], \quad (3.129)$$

где коэффициенты  $\tau_m$  даются (В.79), и  $s_d$  – площадь поверхности единичной  $S^{d-1}$  сферы. Также можно получить формулы регуляризации для функций вида  $x^{-d-2m} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ , появляющихся в 2-точечном корреляторе (3.102), (3.103), путем последовательного действия производными на основное регуляризирующее соотношение (3.129).

Применяя данную схему регуляризации, с точностью до общей нормировочной константы можно найти коэффициент при сингулярной части ядра эффективного действия (3.108), который отождествляется с действием  $S_{\text{conf}} = \int d^d x \mathcal{L}_{\text{conf}}$ , определяемым лагранжианом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{conf}} = & \pi_{ij,k} \square^{\frac{d}{2}} \pi^{ij,k} + 2\partial^m \pi_{mi,j} \square^{\frac{d}{2}-1} \partial_n \pi^{ni,j} \\ & + \frac{d+1}{d-2} \partial^m \pi_{ij,m} \square^{\frac{d}{2}-1} \partial_n \pi^{ij,n} + \frac{3}{2} \partial^i \partial^j \pi_{ij,k} \square^{\frac{d}{2}-2} \partial_m \partial_n \pi^{mn,k} . \end{aligned} \quad (3.130)$$

Конформная инвариантность исходного эффективного действия (3.108) и критическая конформная размерность гарантируют, что данный лагранжиан конформно-инвариантен и калибровочно-инвариантен относительно калибровочных преобразований (3.128), что, тем не менее, может быть проверено прямым вычислением.

В завершение этого раздела стоит отметить, что вышеприведённое рассмотрение предполагает, что калибровочно-инвариантные действия для конформных полей произвольного типа симметрии в пространстве Минковского чётной размерности [269] могут систематически быть воспроизведены процедурой регуляризации, применённой к 2-точечным корреляционным функциям несимметричных примарных полей. Действительно, можно показать, что 2-точечные корреляторы двух примарных полей целиком выражаются через матрицу (3.16) простым требованием симметрии Юнга и свойств следа. По построению, такой коррелятор, свёрнутый с двумя теневыми полями, конформно-инвариантен, являясь, фактически, граничным действием. Затем, применяя процедуру регуляризации, описанную выше, можно напрямую получить конформно-инвариантное квадратичное действие для теневых полей. Для критических конформных размерностей теневые поля являются калибровочными, так что соответствующее действие также калибровочно-инвариантно.

# Глава 4. Двумерная теория ВЫСШИХ СПИНОВ

В этой главе строится теория высших спинов в двух измерениях как расширение топологической гравитации Джакива–Тейтельбойма [120, 122]. Динамические степени свободы включаются путем добавления бесконечного набора полей материи, организованного в мультиплет алгебры высших спинов [170, 171].

Симметрия высших спинов в двух измерениях отождествляется [122] с алгеброй Ли  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ , исходно введенной в работах [271, 272], где параметр  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . При целых  $\lambda = N \in \mathbb{N}$ , данная алгебра может быть транкирована до конечномерной алгебры  $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{R})$  и соответствующий спектр образован калибровочными полями спина  $2, 3, \dots, N$  [120]. В пространствах старших размерностей, алгебра высших спинов полностью определяет кинематику гравитации высших спинов посредством нескольких своих представлений: синглетонного, присоединенного, твистованного. В рассматриваемом случае двух измерений, синглетонный модуль кодирует граничные  $CFT_1$  фундаментальные степени свободы, в то время как присоединенный и твистованный модули приводят, в двумерном объеме, к топологическим полям высших спинов и массивным скалярным полям, соответственно [170]. Расширение исходной алгебры высших спинов  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  посредством косога произведения с группой  $\mathbb{Z}_2$ , генерируемой инволютивным автоморфизмом (т.н. «твист»), позволяет объединить высшеспиново–гравитационный сектор и сектор полей материи в единый объект. Более того, действие BF типа, ассоциированное с такой расширенной алгеброй высших спинов является естественным расширением высшеспиновой гравитации Джакива–Тейтельбойма, линеаризация которой воспроизво-

дит правильные уравнения движения для топологических и локальных мод. В этом состоит главный результат данной главы. Отметим, что в отличие от стандартной ВФ теории, данная высшеспиновая теория ВФ типа не является чисто топологической и содержит распространяющиеся поля материи. Такое возможно в силу того, что калибровочная алгебра построена как косое произведение бесконечномерной алгебры Ли с конечной группой, приводя, таким образом, к полям в твистованном представлении алгебры  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ . Это представление разваливается на бесконечномерные неприводимые представления алгебры изометрий  $AdS_2$ , соответствующих полям материи с локальными степенями свободы.

## 4.1 Синглетон в одном измерении

### 4.1.1 Фундаментальное представление

В размерности  $d \geq 3$  синглетоны традиционно определяются как минимальные или ультракороткие унитарные, неприводимые  $o(d, 2)$ -модули с ограниченной энергией (см. например, [273]). В терминах  $AdS_{d+1}/CFT_d$  дуальности поля синглетонов соответствуют полям в объеме чьи степени свободы сосредоточены на конформной границе [274] (см. обсуждение в Главе 3).

Как обычно, в конформной теории поля, примарный оператор (и его потомки) описывается (обобщённым) модулем Верма  $\mathcal{V}(\Delta; \vec{s})$ , который индуцирован с  $o(2) \oplus o(d)$ -модуля младшего веса  $[\Delta; \vec{s}]$ . Здесь,  $\Delta$  – конформный вес,  $\vec{s} := (s_1, \dots, s_r)$  – целый  $o(d)$ -вес, составленный из  $r$  спиновых весов, где  $r$  это ранг  $o(d)$ . Неприводимый модуль, построенный как фактор модуля Верма  $\mathcal{V}(\Delta; \vec{s})$  по его максимальному подмодулю, обозначаться  $\mathcal{D}(\Delta; \vec{s})$ . Простейший пример синглтона это конформный скаляр, также называемый «Рас», существующий в любой размерности  $d$ . Он соответствует неприводимому фактор-модулю

$$\text{Рас}(d, 2) := \mathcal{D}\left(\frac{d-2}{2}; 0\right) = \mathcal{V}\left(\frac{d-2}{2}; 0\right) / \mathcal{V}\left(\frac{d+2}{2}; 0\right). \quad (4.1)$$

Ситуация значительно упрощается в  $d = 1$  размерности. Неприводимые модули младшего веса полностью характеризуются конформным весом, т.к.

спиновые веса отсутствуют. Фактически,  $d = 1$  конформная алгебра в этом случае это наименьшая некомпактная простая алгебра Ли  $o(1, 2) \cong sp(2, \mathbb{R}) \cong su(1, 1) \cong sl(2, \mathbb{R})$ . Таким образом, все унитарные неприводимые  $o(1, 2)$ -модули младшего веса являются разумными кандидатами на роль синглтона, потому что не один из них не «короче» или «меньше» других. Такие модули принадлежат дискретной серии представлений алгебры  $o(1, 2)$ .

С точностью до нормировки, соответствующие массовые слагаемые таких полей в объеме  $AdS_2$  задаются собственным значением  $m^2$  квадратичного оператора Казимира  $\mathcal{C}_2(o(1, 2))$ ,

$$m^2 = \frac{1}{4}(\lambda^2 - 1) = -\Delta_+ \Delta_- , \quad (4.2)$$

где  $\lambda$  – вещественный параметр, который без потери общности будем считать положительным,  $\lambda \geq 0$ ,

$$\Delta_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \lambda) \quad (4.3)$$

– это конформные веса полей в объеме, подчиненных граничным условиям Дирихле ( $\Delta_+$ ) или Неймана ( $\Delta_-$ ), причем  $\Delta_+ \geq \Delta_-$  и  $\Delta_+ + \Delta_- = 1$ .

**Унитарные синглтоны.** Любые модули Верма младшего веса  $\mathcal{V}_{\Delta}$  алгебры  $o(1, 2)$  могут быть синглтонами в  $d = 1$  измерении. Они унитарны тогда и только тогда, когда конформный вес неотрицателен (см. Приложение Д.3)

$$\mathcal{V}_{\Delta} \text{ унитарный} \iff \Delta \geq 0 , \quad (4.4)$$

что эквивалентно пределу Брейтенлонера–Фридмана  $m^2 \geq -\frac{1}{4}$  [275]. Более того, модули неприводимы тогда и только тогда, когда вес положителен

$$\mathcal{V}_{\Delta} \text{ унитарный, неприводимый} \iff \Delta > 0 . \quad (4.5)$$

Соответственно, согласно классификации  $o(1, 2)$ -модулей младшего веса, это приводит к следующим трем случаям:

- *Голографическое вырождение.* Область унитарности  $0 \leq \lambda < 1$  выделена, потому что оба значения  $\Delta_{\pm} = \frac{1 \pm \lambda}{2}$  конформного веса (примарного и теневого оператора) унитарны. Это соответствует явлению «голографического вырождения» в контексте  $AdS/CFT$  дуальности [276], когда  $AdS_2$  скалярное поле имеет отрицательную массу  $-\frac{1}{4} \leq m^2 < 0$ , ср. (4.2), но при этом унитарно, т.к. находится выше предела Брейтенлонера–Фридмана. Будем называть

«типом- $\lambda$ » серию возможных алгебр высших спинов и теорий, основанных на свободных унитарных синглтонах с  $0 < \lambda < 1$ .<sup>38</sup>

- *Спинорный синглетон.* Предельный случай  $\lambda = 1$  (соответственно,  $m^2 = 0$ ) выделен, потому что  $\Delta_- = 0$  является конформным весом тривиального представления и  $\Delta_+ = 1$  – конформный вес его инвариантного подпространства. Физически, примарное поле веса  $\Delta = 0$  соответствует оффшельному  $d = 1$  спинорному синглетону  $\mathcal{V}_0$ , который является неприводимым  $o(1, 2)$ -модулем, т.к. раскладывается на полупрямую сумму  $\mathcal{V}_0 \cong \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1$  неприводимых модулей. Фактически, оншельный  $d = 1$  спинор,  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{V}_0/\mathcal{V}_1$ , это константа, т.е. соответствует тривиальному представлению. Теория высших спинов, соответствующая оффшельному спинору без нулевой моды,  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{V}_1$ , будет называться «типом-В», по аналогии с терминологией в старших измерениях (см. [277, 167]).

- *Синглетон произвольного спина.* Унитарная область  $\lambda > 1$  соответствует общему случаю допустимого конформного веса  $\Delta_+ = \frac{1+\lambda}{2}$ . Все такие модули Верма  $\mathcal{V}_{\frac{1+\lambda}{2}}$  неприводимы и унитарны,  $m^2 > 0$ . В некотором смысле, о них можно думать как об (оффшельных) спин- $j$  синглтонах. Соответственно, будем называть такие теории «типом- $J$ » (см. аналогичную терминологию в работе [278]) при  $\lambda = N \in \mathbb{N}$ , по аналогии с синглтонами в старших измерениях, где спин целочисленен.

- *Неунитарный синглетон.* Для положительных целых  $\lambda = N > 1$  (при  $N \in \mathbb{N}$ ),  $o(1, 2)$ -модуль  $\mathcal{V}_{\frac{1-N}{2}}$  приводим, причем  $\mathcal{V}_{\frac{1+N}{2}}$  – это подмодуль. Соответствующий фактор является неприводимым модулем

$$\mathcal{D}_{\frac{N-1}{2}} \cong \mathcal{V}_{\frac{1-N}{2}} / \mathcal{V}_{\frac{1+N}{2}} \quad (4.6)$$

конечной размерности  $N$ . Будем называть теории, основанные на конечномерных, неунитарных представлениях «типом- $N$ ».<sup>39</sup>

Подытоживая, можно сказать, что при переходе в два измерения дискретный набор теорий высших спинов в старших измерениях типов А,В,С,... сливается в однопараметрическое семейство моделей, запараметризованных

<sup>38</sup>Отметим, что  $0 \leq \lambda \leq 1$  это область значений  $\lambda$ , рассматриваемых  $AdS_3/CFT_2$  высшеспиновой голографии [58], где имеются две копии алгебры  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ .

<sup>39</sup>См. обсуждение конечномерных синглетов и ассоциированных с ними топологических высшеспиновых моделей в работе [279].



непрерывным  $\lambda$ , выраженным через вес синглетонного модуля (4.3).

### 4.1.2 Бифундаментальное представление

Сначала отметим, что спектр граничных «односледовых» операторов для векторных моделей очень прост по причине того, что синглеты векторного представления порождаются из билинейных синглетов. Таким образом, спектры определяются разложением тензорного произведения двух синглетов на неприводимые  $o(d, 2)$ -модули. Это разложение, известное как теорема Флато–Фронсдала [112] (см. подробное обсуждение в Главе 3). Для скалярного синглтона в размерности  $d$  данное разложение имеет вид (ср. (3.5))

$$\text{Rac}(d, 2) \otimes \text{Rac}(d, 2) = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \mathcal{D}(s + d - 2; s), \quad (4.7)$$

где  $\mathcal{D}(s + d - 2; s)$  –  $o(d, 2)$ -модуль, описываемый спин- $s$  полями в объеме, дуальными сохраняющимся токам на границе [113, 114]. С точки зрения теории в объеме, модули, возникающие в данном разложении на неприводимые  $o(d, 2)$ -модули определяют спектр полей теории высших спинов в объеме, дуальной свободному конформному скаляру.

Стандартный результат для тензорного произведения между двумя модулями Верма алгебры  $o(1, 2)$  задается разложением Клебша–Гордона (см., например, [278])

$$\mathcal{V}_{\Delta_1} \otimes \mathcal{V}_{\Delta_2} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_{\Delta_1 + \Delta_2 + n}. \quad (4.8)$$

При  $\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta$ , получаем одномерную версию теоремы Флато–Фронсдала (4.7)

$$\mathcal{V}_{\Delta} \otimes \mathcal{V}_{\Delta} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_{2\Delta + n}. \quad (4.9)$$

Подстановка  $\Delta = \Delta_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \lambda)$  дает

$$\mathcal{V}_{\frac{1 \pm \lambda}{2}} \otimes \mathcal{V}_{\frac{1 \pm \lambda}{2}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_{n+1 \pm \lambda}. \quad (4.10)$$

Спектр конформных весов в правой части задается

$$\Delta_n^{\pm} = n + 1 \pm \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (4.11)$$

Соответствующий спектр масс задается соотношением

$$(m_n^\pm)^2 = \Delta_n^\pm(\Delta_n^\pm - 1) = (n \pm \lambda + 1)(n \pm \lambda). \quad (4.12)$$

Для определенности, в дальнейшем считаем  $\Delta_- = \frac{1-\lambda}{2}$  конформным весом синглтона, что является допустимым, если забыть про вопросы унитарности. Спектр теории типа-N для конечномерного синглетонного модуля (4.6) можно получить из разложения Клебша-Гордона конечномерных модулей

$$\mathcal{D}_{\frac{N-1}{2}} \otimes \mathcal{D}_{\frac{N-1}{2}} = \bigoplus_{n=0}^{N-1} \mathcal{D}_j. \quad (4.13)$$

В заключение отметим, что формула (4.10) также имеет естественную интерпретацию в рамках  $AdS_3/CFT_2$  дуальности, благодаря изоморфизму  $o(2, 2) = o(2, 1) \oplus o(2, 1)$ . Массивный скаляр на пространстве  $AdS_3$  с энергией  $E_0 = 1 \pm \lambda$  описывается неприводимым  $o(2, 2)$ -модулем из левой части (4.9). Индекс  $n$  возникающий в правой части разложения (4.9) по отношению к подалгебре  $o(2, 1) \subset o(2, 2)$  на самом деле можно проинтерпретировать как метку Фурье мод при компактификации типа Калуцы-Клейна [280, 281, 282]. Отсюда следует, что спектр (4.11) массивных скалярных мод в двумерной теории высших спинов можно получать размерной редукцией теории Васильева-Прокушкина в трех измерениях, в которой локальные степени свободы описываются одним скалярным полем массы  $M^2 = 1 - \lambda^2$  [131].<sup>40</sup>

## 4.2 Алгебра высших спинов в двух измерениях

Современное определение алгебр высших спинов состоит в отождествлении с алгебрами Ли эндоморфизмов синглетонного модуля (см., например, исходные работы [283, 284, 285] и современную трактовку в произвольных размерностях [286, 287, 288]). Пусть  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  – универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Аннигилятор  $\text{Ann}V \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  неприводимого  $\mathfrak{g}$ -модуля  $V$  называется примитивным идеалом. Благодаря лемме Шура, примитивный идеал содержится в идеале, порожденном операторами Казимира алгебры

<sup>40</sup>Напомним, что алгебры высших спинов в трех измерениях задается двум копиями алгебры в двух измерениях,  $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{hs}[\lambda] \oplus \mathfrak{hs}[\lambda]$ , так что параметр  $\lambda$  определяет спектр в обоих случаях.

$\mathfrak{g}$  минус их собственные значения на  $V$ . Алгебра Ли  $\mathfrak{gl}(V)$  эндоморфизмов неприводимого  $\mathfrak{g}$ -модуля  $V$  может быть определена как реализация  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  на  $V$ : она изоморфна фактору  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\text{Ann}(V)$  универсальной обертывающей по примитивному идеалу и наделена коммутатором.

Алгебра высших спинов синглтона  $\mathcal{V}_{\frac{1\pm\lambda}{2}}$  является фактором

$$\mathfrak{gl}(\mathcal{V}_{\frac{1\pm\lambda}{2}}) = \frac{\mathcal{U}(o(1, 2))}{\text{Ann}(\mathcal{V}_{\frac{1\pm\lambda}{2}})} \cong \mathfrak{gl}[\lambda], \quad (4.14)$$

изоморфным алгебре  $\mathfrak{gl}[\lambda] \cong \mathfrak{gl}[-\lambda]$ , определенной в работе [271] как фактор

$$\mathfrak{gl}[\lambda] := \frac{\mathcal{U}(o(1, 2))}{\left(\mathcal{C}_2(o(1, 2)) - \frac{1}{4}(\lambda^2 - 1)\right)\mathcal{U}(o(1, 2))}, \quad (4.15)$$

универсальной обертывающей алгебры  $sl(2, \mathbb{R}) \cong o(1, 2)$  по идеалу, порожденному собственным значением  $\frac{1}{4}(\lambda^2 - 1)$  квадратичного оператора Казимира  $\mathcal{C}_2(o(1, 2)) \in \mathcal{U}(o(1, 2))$ . Соответствующая алгебра высших спинов, обозначаемая  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ , обычно определяется вычитанием одномерного абелева идеала:

$$\mathfrak{gl}[\lambda] = u(1) \oplus \mathfrak{hs}[\lambda]. \quad (4.16)$$

Итак, алгебра высших спинов  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  проста при  $|\lambda| \notin \mathbb{N}$ .

Замечательный изоморфизм  $o(1, 2) \cong sp(2, \mathbb{R})$  приводит к тому, что модуль Верма  $\mathcal{V}_{1/4}$  (соответственно,  $\mathcal{V}_{3/4}$ ) изоморфен подпространству четных (соответственно, нечетных) полиномов по операторам рождения фоковского пространства, порожденного одним осциллятором. Соответственно, алгебра высших спинов  $\mathfrak{hs}[1/2]$  изоморфна подалгебре  $\mathcal{A}_2^{\text{even}}$ , натянутой на полиномы алгебры Вейля  $\mathcal{A}_2$  двумерного пространства. В целом, модули Верма  $\mathcal{V}_{\frac{1\pm\lambda}{2}}$  допускают реализацию в терминах деформированных осцилляторов с параметром деформации  $\nu$ , определяемым как  $\lambda = \frac{1}{2}(\nu + 1)$  [272].

При  $\lambda = N \in \mathbb{N}$ , алгебра высших спинов типа-J  $\mathfrak{hs}[N]$  не является простой и содержит бесконечномерный идеал, который можно отфакторизовать [271, 272]. Этот идеал  $\mathcal{J}_N \subset \mathfrak{hs}[N]$  связан с существованием подмодуля  $\mathcal{V}_{\frac{1+N}{2}} \subset \mathcal{V}_{\frac{1-N}{2}}$  (см., например, [278]). Соответствующий фактор

$$sl(N, \mathbb{R}) \cong \frac{\mathfrak{hs}[N]}{\mathcal{J}_N} \quad (4.17)$$

– это конечномерная алгебра высших спинов  $sl(N, \mathbb{R})$  типа-N. Изоморфизм алгебр Ли (4.17) является следствием изоморфизма модулей (4.6), и поэтому  $gl(N, \mathbb{R}) \cong gl(\mathcal{D}_{\frac{N-1}{2}})$ . Другой способ понять данный результат состоит в использовании главного вложения  $sl(2, \mathbb{R}) \subset sl(N, \mathbb{R})$ . Действительно, разложим приводимый  $sl(2, \mathbb{R})$ -модуль  $sl(N, \mathbb{R})$  в сумму неприводимых  $sl(2, \mathbb{R})$ -модулей

$$sl(N, \mathbb{R}) = \bigoplus_{j=1}^{N-1} \mathcal{D}_j, \quad (4.18)$$

где  $\mathcal{D}_j$  обозначает спин- $j$  конечномерные и неприводимые  $sl(2, \mathbb{R})$ -модули размерности  $2j + 1$ . Это можно сравнить с разложением приводимого  $sl(2, \mathbb{R})$ -модуля  $\mathfrak{hs}[N]$  в сумму

$$\mathfrak{hs}[N] = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}_j. \quad (4.19)$$

Идеал  $\mathcal{J}_N \subset \mathfrak{hs}[N]$  раскладывается как

$$\mathcal{J}_N = \bigoplus_{j=N}^{\infty} \mathcal{D}_j, \quad (4.20)$$

приводя, тем самым, к фактору (4.17).

### 4.2.1 Осцилляторная реализация

Следуя исходному определению бозонных алгебр высших спинов в произвольной размерности [214, 113], в двух измерениях мы вводим переменные  $Y_\alpha^A$ , с  $sp(2, \mathbb{R})$ -векторным индексом  $\alpha$  и  $o(2, 1)$ -векторным индексом  $A$ ,<sup>41</sup> подчиненные коммутационным соотношениям

$$[Y_\alpha^A, Y_\beta^B]_* = \epsilon_{\alpha\beta} \eta^{AB}. \quad (4.21)$$

<sup>41</sup>Симплектические  $sp(2, \mathbb{R})$ -индексы  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, 2$  опускаются и поднимаются:  $T^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} T_\beta$  и  $T_\alpha = T^\beta \epsilon_{\beta\alpha}$ , посредством  $sp(2, \mathbb{R})$ -инвариантной метрики, являющейся символом Леви-Чивиты  $\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}$ , где  $\epsilon_{12} = 1$ . Векторные  $o(2, 1)$  индексы  $A, B, C, \dots = 0, 1, 2$  опускаются и поднимаются посредством  $o(2, 1)$ -инвариантной метрики  $\eta_{AB} = \text{diag}(-++)$ . Лоренцевы векторные  $o(1, 1)$  индексы  $a, b, c, \dots = 0, 1$  и  $o(1, 1)$ -инвариантная метрика  $\eta_{ab} = \text{diag}(-+)$ .  $o(2, 1)$ -ковариантный символ Леви-Чивиты  $\epsilon_{ABC}$  определяется  $\epsilon_{012} = 1$ . Звездочный (анти)коммутатор  $[ , ]_*$  (соответственно:  $\{ , \}_*$ ).

Пространство полиномов по  $Y$ -переменным, наделенное вейлевским  $*$ -произведением,

$$* = \exp \left( \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \eta^{AB} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial Y_\alpha^A} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial Y_\beta^B} \right), \quad (4.22)$$

является алгеброй Вейля  $\mathcal{A}_3$ , которая, в свою очередь является бимодулем над алгебрами  $o(2, 1)$  и  $sp(2, \mathbb{R})$ . Базисные элементы этих алгебр задаются выражениями

$$T^{AB} = \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta} \{Y_\alpha^A, Y_\beta^B\}_* = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} Y_\alpha^A Y_\beta^B, \quad t_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta_{AB} \{Y_\alpha^A, Y_\beta^B\}_* = \eta_{AB} Y_\alpha^A Y_\beta^B. \quad (4.23)$$

Элементы  $T^{AB}$  и  $t_{\alpha\beta}$  взаимно коммутируют,  $[T^{AB}, t_{\alpha\beta}]_* = 0$ . Более того, две данные алгебры образуют Хау-дуальную пару  $o(2, 1) - sp(2, \mathbb{R})$  [209].

Рассмотрим подалгебру  $\mathcal{S}_3 \subset \mathcal{A}_3$  полиномов, порожденную  $sp(2, \mathbb{R})$ -инвариантными элементами, т.е.

$$[t_{\alpha\beta}, F(Y)]_* = 0. \quad (4.24)$$

Отметим, что т.к. индексы  $A, B, \dots$  пробегает лишь три значения, оказывается возможным ввести новые переменные

$$Z_A := \frac{1}{2} \epsilon_{ABC} \epsilon^{\alpha\beta} Y_\alpha^B Y_\beta^C, \quad (4.25)$$

которые, фактически, являются дуализованными по Ходжу  $o(2, 1)$  базисными элементами  $T^{AB}$  (4.23). Следовательно, они удовлетворяют коммутационным соотношениям  $[Z_A, Z_B]_* = \epsilon_{ABC} Z^C$ .

Можно показать, что любой элемент  $F \in \mathcal{S}_3$ , т.е.  $sp(2, \mathbb{R})$ -синглет (4.24), можно переписать эквивалентным образом как степенной ряд по  $Z$ -переменным,

$$F(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{A_1 \dots A_k} Z^{A_1} \dots Z^{A_k}, \quad (4.26)$$

в котором полностью симметричные  $o(2, 1)$ -тензоры  $F_{A_1 \dots A_k}$  постоянны. Таким образом, мы приходим к выводу, что состоящая из  $sp(2, \mathbb{R})$ -синглетов ассоциативная алгебра  $\mathcal{S}_3$  и универсальная обертывающая алгебра  $U(o(2, 1))$  изоморфны [122],

$$\mathcal{S}_3 \cong U(o(2, 1)). \quad (4.27)$$

По существу, здесь приведена осцилляторная реализация хорошо известной теоремы Пуанкаре–Биркгофа–Витта, утверждающей, что универсальная обертывающая алгебра и симметрическая алгебра изоморфны как векторные пространства. В нашем случае, это позволяет свести воедино стандартную звездочную технику вычислений с абстрактным определением алгебры высших спинов  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  как фактор–алгебры (4.15).

### 4.2.2 Фактор–алгебра высших спинов

В рамках осцилляторной реализации из предыдущего раздела элементы алгебры  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  являются классами эквивалентности

$$F \sim F + \hat{D}_\lambda G, \quad F, G \in \mathcal{S}_3, \quad (4.28)$$

где отношение эквивалентности имеет вид

$$\hat{D}_\lambda G \equiv (C_2 - \mu_\lambda) * G, \quad \mu_\lambda := \frac{1}{4}(\lambda - 1)(\lambda + 1), \quad (4.29)$$

в котором элемент Казимира алгебры  $o(2, 1)$  задается как  $C_2 = \frac{1}{2} T_{AB} * T^{AB}$ . Из (Г.7) можно найти, что  $C_2 = -(Z_A Z^A - 6) / 16$  и его действие на универсальной обертывающей алгебре задается через

$$C_2 * F(Z) = \frac{1}{16} (Z^2 - (N + 2)(N + 3)) (\square - 1) F(Z), \quad (4.30)$$

где

$$N = Z^A \frac{\partial}{\partial Z^A}, \quad Z^2 = Z^A Z_A, \quad \square = \eta^{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^A \partial Z^B}. \quad (4.31)$$

Операторы  $N$  и  $Z^2$ ,  $\square$  действуют на коэффициенты разложения степенного ряда (4.26) как считающий оператор и операторы рождения/уничтожения следа. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям  $sl(2, \mathbb{R})$  алгебры

$$[\square, N] = 2\square, \quad [Z^2, N] = -2Z^2, \quad [\square, Z^2] = 4N. \quad (4.32)$$

С помощью соотношения (4.30) находим

$$\hat{D}_\lambda G(Z) = \left[ -\mu_\lambda + \frac{1}{16} (Z^2 - (N + 2)(N + 3)) (\square - 1) \right] G(Z). \quad (4.33)$$

Теперь опишем линейное пространство алгебры высших спинов. Свобода выбора представителей на факторе приводит к проблеме того, какой именно базис (т.е. частное сечение фактора) является наиболее уместным и простым в практических вычислениях. В дальнейшем изложении будут использованы два выделенных базиса, а следующее утверждение описывает представителей, которые можно назвать *каноническими*, поскольку они наиболее естественны в терминах осцилляторного подхода.

**Утверждение 4.1.** *Фактор-алгебра (4.15) как линейное пространство изоморфна подпространству  $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}_3$ , выделяемому условием  $\square H(Z) = 0$ . Это подпространство градуировано по степени однородности  $Z^A$ ,*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n, \quad \mathcal{D}_n = \{H \in \mathcal{S}_3 : \square H = 0, (N - n)H = 0\}. \quad (4.34)$$

Компонентный вид канонического сечения, выделяемого условиями (4.34), задается степенным рядом

$$H(Z) = \sum_{n \geq 0} H_{A_1 \dots A_n} Z^{A_1} \dots Z^{A_n}, \quad \eta^{BC} H_{BCA_3 \dots A_n} = 0. \quad (4.35)$$

Другими словами, канонический базис в алгебре  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  задается бесследовыми  $o(2, 1)$ -тензорами ранга  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Доказательство приведено в Приложении **Г.2**. Оно основано на следовом разложении элементов  $F \in \mathcal{S}_3$ , которое в терминах  $*$ -произведения может быть представлено в виде

$$F = \sum_{k \geq 0} (C_2 - \mu_\lambda)_*^k * F^{(k)}, \quad \text{где} \quad \square F^{(k)} = 0, \quad (4.36)$$

и  $(C_2 - \mu_\lambda)_*^k$  обозначает  $k$ -ю степень  $*$ -произведения. Здесь, элементы  $F^{(k)}$  бесследовы, но не имеют определенной градуировки. Таким образом, любой элемент раскладывается в сумму бесследового элемента и членов, пропорциональных  $C_2 - \mu_\lambda$ , т.е.  $F(Z) = F^{(0)}(Z) + \hat{\mathcal{D}}_\lambda * G(Z)$ , ср. (4.29). Следовательно, факторизация явная и  $F^{(0)}(Z)$  такого же вида что и  $H(Z)$  в (4.35).

## 4.3 Модульная структура алгебры $U(o(2, 1))$

Есть два типа представлений алгебры  $o(2, 1)$ , естественным образом реализуемые на универсальной обертывающей алгебре  $U(o(2, 1))$ . Они определяются через присоединенное и твистованное действия универсальной обертывающей алгебры  $U(o(2, 1))$  на себе, после чего действие ограничивается на подалгебру  $o(2, 1) \subset U(o(2, 1))$ . По построению, такие модули бесконечномерны, более того, они в сильной степени приводимы как  $o(2, 1)$ -модули. В зависимости от типа представления будут введены подходящие условия неприводимости, в силу чего (твистованное)присоединенное представление раскладывается в бесконечный набор неприводимых (бес)конечномерных подмодулей.

### 4.3.1 Присоединенный модуль

Присоединенное действие алгебры  $o(2, 1)$  на универсальной обертывающей определяется как

$$\mathcal{T}_A F \equiv [T_A, F]_* = T_A * F - F * T_A, \quad \forall F \in U(o(2, 1)). \quad (4.37)$$

Посредством звездочного выражения (Г.7) получаем, что присоединенное действие задается однородным дифференциальным оператором

$$\mathcal{T}_A = -\epsilon_{ABC} Z^B \frac{\partial}{\partial Z_C}. \quad (4.38)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 4.2.** *Универсальная обертывающая алгебра  $U(o(2, 1))$ , как присоединенный  $o(2, 1)$ -модуль, раскладывается в бесконечный набор конечномерных  $o(2, 1)$ -модулей с бесконечными кратностями,*

$$U(o(2, 1)) \cong \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n^{(m)}, \quad (4.39)$$

где индекс  $t$  обозначает  $t$ -ю копию модуля  $\mathcal{D}_n$ , образованного ранг- $n$  бесследовыми  $o(2, 1)$ -тензорами.



Доказательство приведено в Приложении **Г.2**. Присоединенные генераторы (4.37) обладают хорошо определенным действием на элементах фактор-алгебры, т.к.<sup>42</sup>

$$[\mathcal{T}_A, \hat{\mathcal{D}}_\lambda] = 0, \quad (4.40)$$

где  $\hat{\mathcal{D}}_\lambda$  задано в (4.33). Из звездочного разложения (4.36) следует, что спроецированные на фактор-алгебру  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  генераторы  $\mathcal{T}_A$  реализуются такими же однородными дифференциальными операторами (4.38), потому что следовая связь инвариантна относительно присоединенного действия,

$$[\mathcal{T}_A, \square] = 0, \quad (4.41)$$

см. (Г.17). Действительно, действуя  $\mathcal{T}_A$  на элемент  $F \in U(o(2, 1))$ , разложенный согласно (4.36), получаем  $\mathcal{T}_A F = \mathcal{T}_A F^{(0)} + \mathcal{T}_A \hat{\mathcal{D}}_\lambda * G$ . Затем, с помощью соотношения (4.40), видим, что второй член опять вида  $\hat{\mathcal{D}}_\lambda * (\mathcal{T}_A G)$ . В итоге, с помощью (4.41) проверяем, что первый член задает действие  $o(2, 1)$  на фактор-алгебре, т.к.  $\mathcal{T}_A F^{(0)} \in \mathcal{H}$ .

Из вышесказанного и Утверждений **4.1** и **4.2** следует, что векторное пространство алгебры  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  в каноническом базисе представляется прямой суммой бесконечного числа конечномерных подмодулей  $\mathcal{D}_n$ ,  $\dim \mathcal{D}_n = 2n + 1$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ). Это согласуется с формулой [278]

$$\mathcal{V}_\Delta \otimes \bar{\mathcal{V}}_\Delta = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n, \quad (4.42)$$

Левая часть соответствует  $o(2, 1)$ -модулю, образованному эндоморфизмами пространства  $\mathcal{V}_\Delta$ , и может быть интерпретирована двумя конкретными способами. Во-первых, левую часть можно понимать как образованную бра и кет векторами из элементов модуля Верма  $\mathcal{V}_\Delta$ . Во-вторых, ее можно понимать как образованную элементами алгебры  $\mathfrak{gl}[\lambda]$  эндоморфизмов модуля Верма  $\mathcal{V}_\Delta$ . В обоих случаях, возникает одинаковое разложение на неприводимые  $o(2, 1)$ -модули (4.42).

---

<sup>42</sup>Отметим, что (анти)коммутаторы, вычисленные по отношению к звездочному произведению отмечаются \* как, например, в (4.115). (Анти)коммутаторы без \* определяются по отношению к их собственному закону умножения.

### 4.3.2 Твистованный модуль

**Определение твистованного действия.** Прежде чем сформулировать твистованное действие алгебры  $o(2, 1)$  на ее универсальной обертывающей, давайте начнем с абстрактного обсуждения случая симметричной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и ее универсальной обертывающей  $U(\mathfrak{g})$ .

Симметричной алгеброй Ли называется алгебра Ли  $\mathfrak{g}$ , наделенная инволютивным автоморфизмом  $\tau$ . Собственные пространства

$$\mathfrak{g}_{\pm} = \{y \in \mathfrak{g} \mid \tau(y) = \pm y\} \quad (4.43)$$

оператора  $\tau$  задают разложение в полупрямую сумму  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ . Другими словами,  $\mathfrak{g}_+$  – это подалгебра  $\mathfrak{g}$ , которая будет называться изотропной подалгеброй, а  $\mathfrak{g}_-$  – это  $\mathfrak{g}_+$ -модуль, который будет называться модулем трансляций. Эквивалентным образом, симметричная алгебра Ли определяется как  $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра Ли в том смысле, что

$$[\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_+] \subset \mathfrak{g}_+, \quad [\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-] \subset \mathfrak{g}_-, \quad [\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_-] \subset \mathfrak{g}_+. \quad (4.44)$$

Например, алгебра изометрий  $\mathfrak{g} = o(d, 2)$  пространства  $AdS_{d+1}$  – это симметричная алгебра Ли  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$  с лоренцевой алгеброй  $\mathfrak{g}_+ = o(d, 1)$  в качестве изотропной подалгебры. Более того, дополнение  $\mathfrak{g}_- = \mathbb{R}^{d,1}$  является лоренцевым модулем, образованным трансляциями. Соотношения (4.44) в этом случае становятся  $o(d, 2)$  коммутационными соотношениями в лоренцевом базисе.

Универсальная обертывающая алгебра  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  симметричной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  является ассоциативной алгеброй, в которой  $\tau$  наследуется как канонический автоморфизм, называемый твистом. Как таковая, универсальная обертывающая алгебра обладает двумя представлениями себя на себе. Присоединенное представление

$$ad : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) : y \mapsto ad_y \quad (4.45)$$

стандартно и определяется как

$$ad_y(a) := y \circ a - a \circ y, \quad \forall a, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \quad (4.46)$$

где  $\circ$  обозначает произведение в  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Для симметричной алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  существует другое представление

$$\tau ad : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) : y \mapsto \tau ad_y \quad (4.47)$$

алгебры Ли  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  на себе посредством определения

$$\tau ad_y(a) := y \circ a - a \circ \tau(y), \quad \forall a, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \quad (4.48)$$

которое называется твистованным представлением.<sup>43</sup>

Ограничения этих представлений на изотропную подалгебру  $\mathfrak{g}_+ \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  совпадают,

$$\tau ad|_{\mathfrak{g}_+} = ad|_{\mathfrak{g}_+}. \quad (4.49)$$

Однако, ограничения на всю алгебру  $\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  отличаются, т.к. для  $y_{\pm} \in \mathfrak{g}_{\pm}$  имеем

$$\tau ad_{y_{\pm}}(a) := y \circ a \mp a \circ y, \quad \forall a \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}). \quad (4.50)$$

С одной стороны,  $ad|_{\mathfrak{g}}$  сохраняет каноническую фильтрацию универсальной обертывающей  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  по степеням элементов алгебры. С другой стороны,  $\tau ad|_{\mathfrak{g}}$  сохраняет фильтрацию по степеням элементов изотропной подалгебры  $\mathfrak{g}_+$ , ср. (4.49), но увеличивает на один фильтрацию по степеням элементов модуля трансляций  $\mathfrak{g}_-$ , см. далее.

Наконец, если (примитивный) идеал  $\text{Ann}V \subset U(o(2, 1))$  (неприводимого)  $\mathfrak{g}$ -модуля  $V$  инвариантен относительно автоморфизма  $\tau$ , то данный автоморфизм является хорошо определенным на факторе  $U(o(2, 1))/\text{Ann}V \cong \mathfrak{gl}(V)$ , который, тем самым, реализует на себе присоединенное и твистованное представление алгебры  $\mathfrak{g}$  посредством данных выше определений, перенесенных на классы эквивалентности. В случае синглетонного модуля  $\text{Rac}(d, 2)$  алгебры изометрий  $\mathfrak{g} = o(d, 2)$  пространства  $AdS_{d+1}$  данная конструкция приводит к присоединенному и твистованному модулям бозонной алгебры высших спинов [214, 113, 290].

**Твист и компенсатор.** Давайте реализуем базисные элементы алгебры  $o(2, 1)$  в лоренцевом базисе,  $T_A = (P_a, L)$ , где  $P_a$  – трансляции и  $L$  – лоренцево вращение с коммутационными соотношениями  $[L, L] = 0$ ,  $[L, P_a] = \epsilon_{ab}P^b$ , и  $[P_a, P_b] = \epsilon_{ab}L$ , где  $\epsilon_{ab}$  – это  $o(1, 1)$  символ Леви-Чивиты ( $a, b = 0, 1$ ), ср. (4.44). Тогда твист действует как

$$\tau(L) = L, \quad \tau(P_a) = -P_a. \quad (4.51)$$

<sup>43</sup>Исходно, твистованное представление было определено в контексте теории высших спинов в работе [53]. В математической литературе оно определялось в работе [289].

Для реализации этого преобразования в рамках  $o(2, 1)$ -ковариантного осциляторного подхода раздела **4.2.1** будем использовать компенсаторный формализм [187] (см. также Главы **1** и **2**). Приведенное выше разбиение на вращения и трансляции можно осуществить явно  $o(2, 1)$ -ковариантным образом введением (постоянного) компенсатора –  $o(2, 1)$ -вектора  $V^A$ , подчиненного условию нормировки  $V_A V^A = 1$ .

Стандартный представитель можно выбрать в виде  $V^A = (0, 0, 1)$ , Лоренцева подалгебра  $\mathfrak{so}(1, 1) \subset o(2, 1)$  определяется как алгебра стабильности компенсатора. Тогда любой  $o(1, 1)$ -тензор  $H^{a_1 \dots a_s}$  можно представить как  $o(2, 1)$ -тензор  $F^{A_1 A_2 \dots A_s}$ , подчиненный условию  $V^A$ -поперечности,  $V_{A_1} F^{A_1 A_2 \dots A_s} = 0$  (см. детальное обсуждение в обзоре [14]). Для заданного  $o(2, 1)$  базисного элемента  $T^A$  можно определить ковариантизованный лоренцев базисный элемент в виде

$$L = T^B V_B, \quad P^A = T^A - V^A V_B T^B. \quad (4.52)$$

По построению, трансляции удовлетворяют условию поперечности  $P^A V_A = 0$ , так что стандартным выбором компенсатора мы воспроизводим трансляции  $P^A = (P^a, 0)$  в лоренцевом базисе.

Компенсатор определяет ковариантное разбиение вспомогательных переменных  $Z^A$  вдоль параллельных и поперечных направлений,

$$Z^A = Z_{\parallel}^A + Z_{\perp}^A, \quad (4.53)$$

где  $Z_{\parallel}^A = (Z \cdot V) V^A$  и  $Z_{\perp}^A = Z^A - (Z \cdot V) V^A$ . Два набора взаимно поперечны,  $Z_{\parallel} \cdot Z_{\perp} = 0$ . Дальнейшее обсуждение содержится в Приложении **Г.3**. Здесь приводится список используемых ниже операторов,

$$\begin{aligned} N_{\parallel} &= Z_{\parallel} \cdot \partial_{\parallel}, & Z_{\parallel}^2 &= Z_{\parallel} \cdot Z_{\parallel}, & \square_{\parallel} &= \partial_{\parallel} \cdot \partial_{\parallel}, \\ N_{\perp} &= Z_{\perp} \cdot \partial_{\perp}, & Z_{\perp}^2 &= Z_{\perp} \cdot Z_{\perp}, & \square_{\perp} &= \partial_{\perp} \cdot \partial_{\perp}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Это считающие и следовые операторы (4.31), заданные в  $\parallel$  и  $\perp$  направлениях. Каждый набор образует свою собственную алгебру  $sl(2, \mathbb{R})$ , ср. (4.32).

**Твистованное действие на модуле универсальной обертывающей.** Следуя общим определениям (4.48), твистованное действие  $o(2, 1)$  на универсальной обертывающей алгебре  $\mathcal{U}(o(2, 1))$  задается выражением

$$\mathbb{T}_A F \equiv [[T_A, F]]_* := T_A * F - F * \tau(T_A), \quad \forall F \in \mathcal{U}(o(2, 1)), \quad (4.55)$$

или, с учетом автоморфизма твиста (4.51), твистованное действие может быть задано в ковариантизованном лоренцевом базисе как

$$\mathbb{L}F = [L, F]_* \quad \text{и} \quad \mathbb{P}_A F = \{P_A, F\}_* . \quad (4.56)$$

Двойные скобки обозначают твистованный коммутатор который, как следует из последней строки, является либо коммутатором, либо антикоммутатором, в зависимости от  $L$  или  $P_A$ , определенных в (4.52). Воспользовавшись звездочными произведениями (Г.7) и продольными/поперечными переменными (4.53) находим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= -\epsilon_{ABC} V^A Z_{\perp}^B \partial_{\perp}^C , \\ \mathbb{P}^A &= Z_{\perp}^A - (N + 2) \partial_{\perp}^A , \end{aligned} \quad (4.57)$$

Здесь,  $N = N_{\parallel} + N_{\perp}$ , ср. (4.54). Видим, что лоренцево вращение действует однородно по  $Z_{\perp}$ , а трансляции действуют неоднородно, т.к.  $Z_{\perp}^A$  и  $\partial_{\perp}^A$  соответственно увеличивают и уменьшают степень на единицу, как обсуждалось выше.

Ковариантизованные твистованные генераторы удовлетворяют  $o(2, 1)$  коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\mathbb{L}, \mathbb{P}^A] &= \epsilon^{ABC} V_C \mathbb{P}_B , \\ [\mathbb{P}^A, \mathbb{P}^B] &= \epsilon^{ABC} V_C \mathbb{L} . \end{aligned} \quad (4.58)$$

Оператор Казимира в твистованном представлении задается выражением

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_2 &= \frac{1}{2} \mathbb{T}_A \mathbb{T}^A = \frac{1}{2} (T_A, (T^A, \cdot)_*)_* \equiv \mathbb{P}_A \mathbb{P}^A + \mathbb{L}^2 , \\ &= -[Z_{\perp}^2 - (N + 2)(N + 3)](\square_{\perp} - 1) + (N_{\parallel} + 1)(N_{\parallel} + 2) , \end{aligned} \quad (4.59)$$

где точка обозначает произвольный элемент универсальной обертывающей алгебры, ср. (Г.18).

### 4.3.3 Твистованное действие на алгебре высших спинов

Твистованные генераторы (4.55) обладают хорошо определенным действием на элементах фактор-алгебры, т.к.

$$[\mathbb{T}^A, \hat{\mathcal{D}}_{\lambda}] = 0 , \quad (4.60)$$

где  $\hat{\mathcal{D}}_\lambda$  задан выражением (4.33). Другими словами, фактор является инвариантным пространством. Обозначим проекцию твистованных генераторов на фактор–алгебру как

$$\mathbb{T}^A \longrightarrow \mathbb{T}_\lambda^A, \quad (4.61)$$

где итоговые генераторы линейно зависят от параметра  $\lambda$ . Попытка построить проекцию  $\mathbb{T}_\lambda^A$  посредством общей формулы (4.36) не срабатывает, потому что подпространство бесследовых элементов не является  $\mathbb{T}^A$ -инвариантным, т.е.  $[\mathbb{T}^A, \square] \not\approx 0$ . Это означает, что представителей фактор–алгебры следует выбирать каким-то другим способом. Явная проекция для нахождения вида  $\mathbb{T}_\lambda^A$  может быть технически очень сложна, потому что использование канонического базиса в алгебре высших спинов неадекватно анализу твистованного представления.<sup>44</sup>

Таким образом, наряду с каноническим базисом в алгебре высших спинов будем рассматривать твистованный базис, который оказывается уместным при обсуждении твистованного  $o(2, 1)$  действия на универсальной обертывающей алгебре и ее факторах. Обозначим через  $\tilde{\mathcal{S}}_3$  пополнение алгебры  $\mathcal{S}_3$  полиномов по переменным  $Z$ , см. (4.26). Более точно, алгебра  $\tilde{\mathcal{S}}_3$  образована полиномами по переменным  $Z_\parallel$ , но также допускаются степенные ряды по переменным  $Z_\perp$ . Это пополнение будет играть свою роль, когда мы заменим следовое условие  $\square H(Z) = 0$  в каноническом базисе на модифицированное следовое условие  $(\square_\perp - 1) H(Z) = 0$  в твистованном базисе. Однако, уравнение  $(\square_\perp - 1) H(Z) = 0$  не имеет полиномиальных решений помимо тривиального. Строго говоря, следует ввести аналогичное пополнение универсальной обертывающей алгебры  $U(o(2, 1))$ , изоморфное  $\tilde{\mathcal{S}}_3$  как линейное пространство (в дальнейшем, будем неявно это подразумевать).

**Утверждение 4.3.** *Как линейное пространство, фактор–алгебра (4.15) изоморфна бесконечномерному подпространству  $\tilde{\mathcal{H}} \subset \tilde{\mathcal{S}}_3$ , которое выделяется связью  $(\square_\perp - 1) H(Z) = 0$ . Это подпространство градуировано по степе-*

---

<sup>44</sup>Твистованное действие на  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  может быть явным образом построено если фактор–алгебра (4.15) реализована во внутренних переменных, например, с использованием деформированных осцилляторов [272]. Это интересная задача на будущее.

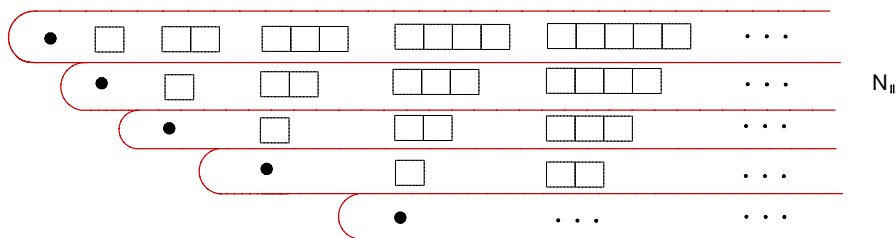


Рис. 4.  $o(1, 1)$ -ковариантный базис в  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  в твистованном виде. Каждая диаграмма Юнга длины  $k$  это ранг- $k$  неприводимый  $o(1, 1)$ -модуль  $d_k$ . Подпространства  $\mathcal{W}_n$  обведены красными контурами. Считаящий оператор  $N_{\parallel}$  имеет фиксированное значение на всех элементах внутри заданного контура.

ни однородности  $Z_{\parallel}^A$ ,

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n, \quad \mathcal{W}_n = \{H \in \mathcal{S}_3 : (\square_{\perp} - 1)H = 0, (N_{\parallel} - n)H = 0\}. \quad (4.62)$$

Детальное доказательство см. в Приложении Г.3. Ниже приводится общая идея этого утверждения.

В каноническом базисе, подпространство  $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}_3$  выделяется соотношением  $\square H(Z) = 0$ , являющимся трехмерным уравнением Даламбера. Как известно, его пространство решений образовано неприводимыми конечномерными  $o(2, 1)$ -модулями  $\mathcal{D}_n$  всех рангов ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) или, эквивалентным образом, «сферическими гармониками»:  $\mathcal{H} = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \dots$ , см. (4.34). Далее, правила ветвления  $\mathcal{D}_n \cong d_0 \oplus d_1 \oplus d_2 \oplus \dots \oplus d_n$  каждого неприводимого  $o(2, 1)$ -модуля в виде суммы  $o(1, 1)$ -модулей  $d_k$  (размерности  $\dim d_0 = 1$  или  $\dim d_k = 2$  при  $k > 0$ ), образованных ранг- $k$  бесследовыми лоренцевскими тензорами, приводят к следующему разложению

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \dots = \infty \cdot d_0 \oplus \infty \cdot d_1 \oplus \infty \cdot d_2 \oplus \dots, \quad (4.63)$$

где бесконечные коэффициенты в правой части означают, что каждый  $o(1, 1)$ -модуль  $d_k$  входит бесконечное (счетное) число раз.

В твистованном базисе, подпространство  $\tilde{\mathcal{H}} \subset \tilde{\mathcal{S}}_3$  выделяется соотношением  $(\square_{\perp} - 1)H(Z) = 0$ , являющимся двухмерным уравнением Клейна–Гордона и его общее решение имеет вид бесконечного ряда по степеням радиуса с коэффициентами, являющимися «сферическими гармониками» на окружности,

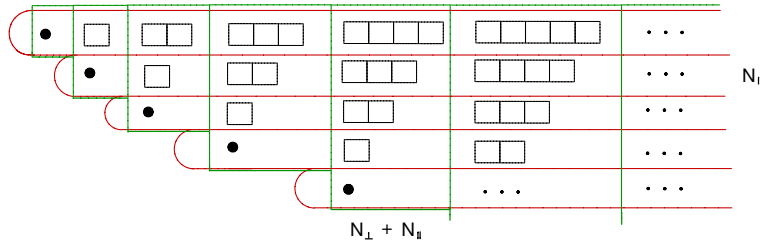


Рис. 5.  $o(1,1)$ -ковариантный базис в  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  в каноническом и твистованном виде. Каждая диаграмма Юнга длины  $k$  обозначает  $o(1,1)$ -модуль  $d_k$  бесследовых тензоров ранга  $k$ . Подпространства  $\mathcal{W}_n$  показаны внутри красных контуров. Считающий оператор  $N_{\parallel}$  имеет фиксированное значение на всех элементах внутри заданного красного контура.  $o(2,1)$ -модули  $\mathcal{D}_n$  показаны внутри зеленых вертикальных контуров. Считающий оператор  $N = N_{\perp} + N_{\parallel}$  имеет фиксированное значение для всех элементов внутри заданного зеленого контура.

т.е. Фурье-модами, которые можно записать в ковариантном виде.<sup>45</sup> В нашем случае, аналог радиуса это  $Z_{\perp}$  и его квадрат  $Z_{\perp}^2$  это оператор рождения следа (в  $\perp$ -направлении). Т.к.  $H(Z) = H(Z_{\perp}, Z_{\parallel})$ , зависимость от параллельных координат  $Z_{\parallel}$  никак не ограничивается уравнением Клейна-Гордона, так что степень однородности по  $Z_{\parallel}$  просто задает дополнительный индекс, пробегающий от нуля до бесконечности. Другими словами, пространство решений связи  $(\square_{\perp} - 1)H(Z) = 0$  может быть представлена в виде (рис. 4)

$$\tilde{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{W}_0 \oplus \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \dots = \infty \cdot (d_0 \oplus d_1 \oplus d_2 \oplus \dots). \quad (4.64)$$

Здесь, бесконечные коэффициенты в правой части означают, что каждый  $o(1,1)$ -модуль  $d_k$  входит бесконечное число раз. Как линейное пространство, каждый бесконечномерный неразложимый  $o(2,1)$ -модуль  $\mathcal{W}_k$  раскладывается в бесконечный набор  $\mathcal{W}_k \cong d_0 \oplus d_1 \oplus d_2 \oplus \dots$  из  $o(1,1)$ -модулей при любом  $k$ . Сравнивая (4.63) и (4.64), мы приходим к однозначному соответствию между каноническим и твистованным базисами на фактор-пространстве, см. рис. 5.

Твистованные генераторы  $\mathbb{T}_{\lambda}^A$  обладают хорошо определенным действием

<sup>45</sup>Необходимо отметить, что данное модифицированное следовое условие также возникает в контексте теории полей непрерывного спина, см. Главу 2. Там же обсуждается функциональный класс, аналогичный пополнению  $\tilde{\mathcal{S}}_3$ .



в каждом подпространстве  $\mathcal{W}_n$  и поэтому наделяют их структурой  $o(2, 1)$ -модуля. В следующем разделе будет показано, что  $o(2, 1)$ -модули  $\mathcal{W}_n$  в (4.62) изоморфны модулям Верма  $\mathcal{V}_{\Delta_n}$  с конформными весами, зависящим линейно от параметра  $\lambda$ ,

$$\mathcal{W}_n \cong \mathcal{V}_{\Delta_n} \quad \text{с весом} \quad \Delta_n = n - \lambda + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.65)$$

В литературе по теориям высших спинов модули  $\mathcal{W}_n$  известны как модули Вейля (см., например, обзор [14] и Главы **1** и **2**), см. раздел **4.3.5** далее.

#### 4.3.4 Обобщённые твистованные модули

Введем класс представлений алгебры  $o(2, 1)$ , которые, с некоторой потерей строгости, будем называть обобщёнными твистованными представлениями. Такие представления обобщают введенные ранее твистованные представления алгебры Ли  $o(2, 1)$  на ее универсальной обертывающей  $U(o(2, 1))$ , при этом они всегда бесконечномерны и раскладываются в бесконечный набор модулей Верма с бегущим конформным весом.

**Обобщённые твистованные представления.** Твистованные генераторы  $\mathbb{L}$  и  $\mathbb{P}^A$  принадлежат общему классу  $o(2, 1)$  генераторов (4.58), таких что трансляции реализованы неоднородно по  $Z_{\perp}$ -переменным,

$$\mathbb{L} = -\epsilon_{ABC} V^C Z_{\perp}^A \partial_{\perp}^B, \quad \mathbb{P}^A = Z_{\perp}^A - [N_{\perp} + \Delta(N_{\parallel})] \partial_{\perp}^A, \quad (4.66)$$

см. Приложение **Г.4**. Коммутационные соотношения (4.58) удовлетворяются для любой функции  $\Delta(N_{\parallel})$ , являющейся степенным рядом по  $N_{\parallel}$ . Будем называть это функцией конформного веса.

Отметим, что приведенная выше реализация  $o(2, 1)$  в линейном пространстве  $\mathcal{S}_3$  напоминает способ реализации конформной алгебры на примарных полях  $SFT_d$ . В нашем случае, конформная алгебры  $o(2, 1)$  с базисными элементами  $(P, K, D)$  может быть реализована на функциях  $\phi(t)$  одной пространственно-временной переменной  $t \in \mathbb{R}$  неоднородными дифференциальными операторами

$$P = \frac{d}{dt}, \quad K = t^2 \frac{d}{dt} + 2t\Delta, \quad D = -t \frac{d}{dt} - \Delta, \quad (4.67)$$

где  $\Delta$  – конформная размерность. Вводя считающий оператор  $N = t \frac{d}{dt}$  и определяя  $L_{\pm} = P \pm K$ ,  $L_0 = -D$  находим элементы изоморфной алгебры  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$$L_{\pm} = \frac{d}{dt} \pm t(N + 2\Delta - 1), \quad L_0 = N + \Delta, \quad (4.68)$$

которые схематически такие же, как твистованные генераторы (4.66), т.е. однородное  $L_0$  и неоднородные  $L_{\pm}$ .

Важное свойство обобщённых твистованных представлений состоит в том, что генераторы (4.66) слабо коммутируют с операторами  $N_{\parallel}$  и  $\square_{\perp} - 1$ :

$$[\mathbb{L}, N_{\parallel}] = 0, \quad [\mathbb{P}^A, N_{\parallel}] = 0, \quad [\mathbb{L}, \square_{\perp} - 1] = 0, \quad [\mathbb{P}^A, \square_{\perp} - 1] = 2 \partial_{\perp}^A (\square_{\perp} - 1). \quad (4.69)$$

Более того, эти операторы тривиально коммутируют между собой,

$$[N_{\parallel}, \square_{\perp} - 1] = 0. \quad (4.70)$$

Следуя Утверждению 4.3, линейное пространство алгебры  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  можно реализовать как подпространство  $\tilde{\mathcal{H}} \subset \tilde{\mathcal{S}}_3$ , выделяемое связью  $(\square_{\perp} - 1)H(Z) = 0$ , и далее расслоенное на подпространства согласно собственным значениям считающего оператора  $N_{\parallel}$ . Из (4.69) следует, что твистованные генераторы обладают хорошо определенным действием на подпространстве  $\tilde{\mathcal{H}}$  и поэтому наделяют его структурой  $o(2, 1)$ -модуля.

Пусть  $\mathcal{H}_{\Delta}$  – это векторное пространство  $\tilde{\mathcal{H}}$ , рассматриваемое как  $o(2, 1)$ -модуль, специфицируемый некоторой функцией конформного веса  $\Delta(N_{\parallel})$ . Такой  $o(2, 1)$ -модуль  $\mathcal{H}_{\Delta}$  расслоен согласно собственным значениями  $n$  оператора  $N_{\parallel}$ , где каждый подмодуль изоморфен модулю Верма  $\mathcal{V}_{\Delta_n}$  конформного веса  $\Delta_n \equiv \Delta(n)$ . Тогда  $\mathcal{H}_{\Delta}$  представим в виде бесконечной прямой суммы модулей Верма с весами, собранными в конкретную функцию конформного веса,

$$\mathcal{H}_{\Delta} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_{\Delta_n}. \quad (4.71)$$

Собственное значение оператора Казимира на модуле Верма  $\mathcal{V}_{\Delta_n}$  задается

$$[C_2]_n = \Delta_n (\Delta_n - 1), \quad (4.72)$$

см. (Г.55) и (Г.56).

**Специальные значения и факторизация.** С помощью (4.53), любой  $F \in \mathcal{S}_3$  можно представить в виде  $F(Z) = F(Z_\perp, Z_\parallel)$ , и, поэтому, можно ввести фильтрации по отношению к поперечным и параллельным переменным, степень  $\perp$  и степень  $\parallel$ , соответственно. Линейное пространство алгебры  $\mathcal{S}_3$  биградуировано следующим образом,

$$\mathcal{S}_3 = \bigoplus_{n,m=0}^{\infty} \mathcal{U}_{n,m}, \quad (4.73)$$

где  $\mathcal{U}_{n,m}$  это подпространства фиксированной градуировки,

$$\mathcal{U}_{n,m} = \{ \forall F \in \mathcal{S}_3 : N_\parallel F = n F, N_\perp F = m F \}. \quad (4.74)$$

Рассмотрим трансляции  $\mathbb{P}^A$ , определенные с произвольной функцией конформного веса  $\Delta(N_\parallel)$ , ср. (4.66), действующие на векторном пространстве (4.73), изоморфном универсальной обертывающей алгебре  $U(o(2, 1))$ . Во-первых, из (4.69) имеем  $[\mathbb{P}^A, N_\parallel] = 0$ , и, поэтому,  $\mathbb{P}^A$  оставляет степень  $\parallel$  неизменной. Во-вторых, трансляции задаются неоднородными операторами, которые можно разбить на две части

$$\mathbb{P}^A = \mathbb{W}_+^A + \mathbb{W}_-^A, \quad (4.75)$$

где

$$\mathbb{W}_+^A = Z_\perp^A, \quad \mathbb{W}_-^A = -[N_\perp + \Delta(N_\parallel)] \partial_\perp^A. \quad (4.76)$$

Операторы  $\mathbb{W}_\pm^A$  увеличивают/уменьшают степень  $\perp$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_+^A &: \mathcal{U}_{n,m} \rightarrow \mathcal{U}_{n,m+1}, \\ \mathbb{W}_-^A &: \mathcal{U}_{n,m} \rightarrow \mathcal{U}_{n,m-1}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

но их сумма (4.75) не обладает таким свойством и смешивает вклады различных степеней  $\perp$ . Лоренцево вращение не меняет ни одной из этих двух степеней,

$$\mathbb{L} : \mathcal{U}_{n,m} \rightarrow \mathcal{U}_{n,m}, \quad (4.78)$$

поэтому подпространства  $\mathcal{U}_{n,m}$  являются  $o(1, 1)$ -инвариантными.

Т.к. степень  $\parallel$  не меняется при действии твистованных генераторов, мы приходим к выводу, что собственное значение  $n$  оператора  $N_\parallel$  нумерует разные  $o(2, 1)$ -модули. Простоты ради, не будем явно писать  $n$  и обозначим  $\mathcal{U}_{n,m} \equiv$

$\mathcal{U}_m$ , имея ввиду, что выбран частный  $o(2, 1)$ -модуль с фиксированным  $n$ . Номер  $m$  будем называть уровнем. Из (4.78) следует, что каждый уровень лоренц-инвариантен (т.е.  $o(1, 1)$ -инвариантен), а трансляции сдвигают уровень вперед-назад.

Определим следующую фильтрацию по подпространствам  $\mathcal{Q}_l$ , степень  $\perp$  которых не превышает  $l \in \mathbb{N}_0$ :

$$\mathcal{Q}_l = \bigoplus_{m=l}^{\infty} \mathcal{U}_m, \quad \mathcal{Q}_l \subset \mathcal{Q}_{l-1} \subset \dots \subset \mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}_0. \quad (4.79)$$

Как правило, благодаря свойству (4.77), пространство  $\mathcal{Q}_0$  инвариантно по отношению к действию трансляций

$$\mathbb{P}^A \mathcal{Q}_0 \subset \mathcal{Q}_0. \quad (4.80)$$

Однако, при специальных значениях префактора в понижающем операторе  $\mathbb{W}_-^A$  (4.76), подпространство  $\mathcal{Q}_l \subset \mathcal{Q}_0$  может оказаться инвариантным при некотором  $l$ ,

$$\mathbb{P}^A \mathcal{Q}_l \subset \mathcal{Q}_l. \quad (4.81)$$

Отметим, что оператор  $\mathbb{W}_+^A$  действует в  $\mathcal{Q}_0$  повышением градуировки (4.77), следовательно подпространства  $\mathcal{Q}_l$  являются  $\mathbb{W}_+^A$ -инвариантными при любом  $l \in \mathbb{N}_0$ . Наоборот, оператор  $\mathbb{W}_-^A$  действует понижением градуировки (4.77) и его естественные инвариантные подпространства дополняют  $\mathcal{Q}_l \subset \mathcal{Q}_0$ . Тогда рассматривая их сумму находим, что есть  $\mathbb{P}^A$ -инвариантные подпространства, при условии что префактор в  $\mathbb{W}_-^A$  становится равным нулю для некоторых значений оператора  $N_{\perp}$  и функции конформного веса  $\Delta(n)$ ,

$$\mathbb{W}_-^A \mathcal{Q}_l = 0 : \quad l - 1 + \Delta(n) \approx 0, \quad (4.82)$$

где слабое равенство  $\approx$  означает действие на полиномах  $F(Z_{\perp}, Z_{||})$  с фиксированным значением  $n$  степени  $||$ . Т.к. префактор линеен по  $N_{\perp}$ , есть только два собственных пространства оператора  $\mathbb{W}_-^A$  с собственным значением ноль на  $\mathcal{Q}_0$ :

- подпространство  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{Q}_0$  (константы по  $Z_{\perp}$ , где  $\partial_{\perp}$  действует нулем);

– подпространство  $\mathcal{U}_l \subset \mathcal{Q}_0$  (когда префактор равен нулю (4.82)).

В итоге, фактор

$$D_{l-1} = \mathcal{Q}_0 / \mathcal{Q}_l \quad (4.83)$$

оказывается (конечномерным)  $o(2, 1)$ -модулем. По сути, это такой же механизм факторизации по отношению к инвариантным подпространствам как при рассмотрении модулей Верма и сингулярных подмодулей, см. Приложение **Д.3**.

В целом,  $o(2, 1)$ -модуль  $D_l$  приводим, потому как еще не наложено модифицированное следовое условие. Следуя обсуждению после (Г.36), можно заключить, что подпространство, выделяемое этим условием в факторе  $D_l$  является неприводимым конечномерным  $o(2, 1)$ -модулем  $\mathcal{D}_l$  (4.6) размерности  $2l + 1$ .

В качестве иллюстрации рассмотрим, например, следующую функцию конформного веса

$$\Delta(N_{\parallel}) = N_{\parallel} - \lambda + 1, \quad \text{при} \quad \lambda \in \mathbb{N}_0. \quad (4.84)$$

Для занумерованных  $n$  модулей  $\mathcal{Q}_0$  уравнение (4.82) имеет нули на уровнях  $m = \lambda - n$ . Отсюда следует, что фактор–пространства возникают в подпространствах с индексами  $n = 0, 1, 2, \dots, \lambda - 1$ .<sup>46</sup> Например, зафиксируем  $\lambda = 1$  и тогда имеется только один ноль в модуле  $\mathcal{Q}_0$  с индексом  $n = 0$ . Возникающий фактор  $D_0$  – это тривиальный  $o(2, 1)$ -модуль  $\mathcal{D}_0$ , потому как нули возникают на уровне 1, ср. (4.6).

Накладывая далее модифицированное следовое условие  $\square_{\perp} - 1 \approx 0$  получаем модуль  $\mathcal{H}_{\Delta}$  (4.71) с конкретной функцией конформного веса (4.84). Факторизация дает конечномерный модуль

$$\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_{\lambda-1}, \quad (4.85)$$

показанный на рис. **6** слева от вертикальной линии. С другой стороны, в правой части находится бесконечномерный модуль, выделяемый из подпространства  $\mathcal{S}_{\lambda}$  модифицированной следовой связью,

$$\mathcal{D}_{\lambda} \oplus \mathcal{D}_{\lambda+1} \oplus \mathcal{D}_{\lambda+2} \oplus \dots. \quad (4.86)$$

<sup>46</sup>Формально, следует также рассматривать  $n = \lambda$ , но в этом случае ноль достигается действием  $\partial_{\perp}$  на константы, как обсуждалось после (4.82).

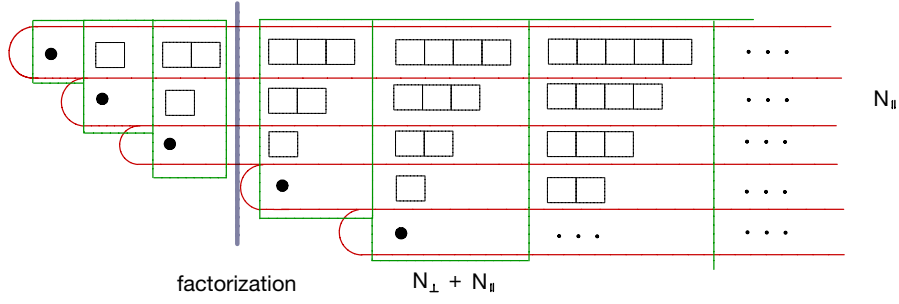


Рис. 6. Подпространство  $\mathcal{H}_\Delta$ , выделяемое модифицированным следовым условием, расслаивается на модули Верма  $\mathcal{V}_{\Delta_n}$  с  $n = 0, 1, 2, \dots$ , см. (4.71). Зеленые и красные контуры показывают модули  $\mathcal{D}_l$  и  $\mathcal{V}_{\Delta_n}$ , соответственно. Вертикальная фиолетовая линия визуализирует факторизацию с функцией конформного веса (4.84).

Это можно непосредственно видеть подсчетом элементов в  $o(1, 1)$  базисе, в идеале (4.86) и в возникающем факторе (4.85), см. Приложение Г.4.

**Твистованное действие на алгебре высших спинов.** Как ранее обсуждалось, мы не собираемся явно строить фактор  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  в терминах внутренних переменных. Вместо этого, стартуя с универсальной обертывающей алгебры  $U(o(2, 1))$  в качестве обобщённого твистованного  $o(2, 1)$ -модуля, определенного некоторой  $\Delta(N_{\parallel})$ , и используя факторизационные свойства алгебры  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  при целых  $\lambda$ , мы можем однозначно фиксировать проекцию  $\mathbb{T}_\lambda^A$  на  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  твистованного действия  $\mathbb{T}^A$  на  $U(o(2, 1))$ .

Для построения твистованного модуля  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  алгебры  $o(2, 1)$  с генераторами, действующими как  $\mathbb{T}_\lambda^A$ , проделаем следующие шаги. Рассмотрим обобщённое твистованное действие алгебры  $o(2, 1)$ , т.е. когда лоренцево вращение и трансляции реализованы как (4.66) с функцией конформного веса  $\Delta(N_{\parallel})$ , удовлетворяющей следующим условиям:

1. Функция  $\Delta(N_{\parallel})$  линейна по  $\lambda$ ;
2. Префактор  $l - 1 + \Delta(N_{\parallel})$  имеет нули при  $\lambda \in \mathbb{Z}$  согласно (4.17).

Условие (1) следует из того факта, что отношение эквивалентности (4.33) квадратично по  $\lambda$  и поэтому действующие на представителях генераторы

$o(2, 1)$  линейны по  $\lambda$  (лоренцево вращение неизменно, модифицируются только трансляции). Условие (2) требует, чтобы структура твистованного модуля на классах эквивалентности обязательно была согласована с существованием дополнительных идеалов в алгебре  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  при целых  $\lambda$ , тем самым гарантируя изоморфизм (4.17). Фактически, это последнее условие единственным образом фиксирует функцию конформного веса как линейную по  $N_{\parallel}$ . Такая функция  $\Delta(N_{\parallel})$  в точности задается выражением (4.84). В качестве примера рассмотрим случай  $\lambda = 1$ . Здесь фактор  $\mathfrak{gl}[1]/\mathcal{I}_1 \cong \mathbb{R}$  согласуется с (4.17), что в точности соответствует  $D_0$  из (4.83). При произвольных целых  $\lambda \in \mathbb{N}$  фактор и подпространство задаются (4.85) и (4.86) в соответствии с (4.18) и (4.20).<sup>47</sup>

В итоге, находим, что решение задается единственным образом в виде

$$\mathbb{T}_{\lambda}^A : \quad \mathbb{L}_{\lambda} = -\epsilon_{ABC} V^C Z_{\perp}^A \partial_{\perp}^B, \quad \mathbb{P}_{\lambda}^A = Z_{\perp}^A - (N_{\perp} + N_{\parallel} - \lambda + 1) \partial_{\perp}^A. \quad (4.87)$$

Соответствующий оператор Казимира, вычисленный на связях (4.62), следует из (Г.55) и принимает значения

$$[\mathbb{C}_2]_n = (n - \lambda)(n - \lambda + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.88)$$

ср. (4.12), что согласуется с формулой для конформных весов (4.11).

### 4.3.5 $AdS_2$ массивные скалярные поля

Пусть  $\mathcal{M}_2$  – это двухмерное многообразие с локальными координатами  $x^m$  ( $m = 0, 1$ ). Полями являются  $p$ -формы ( $p = 0, 1, 2$ ) со значениями в векторном пространстве  $\tilde{\mathcal{S}}_3$ , обозначаемые как  $U_{[p]} \in \Omega^p(\mathcal{M}_2) \otimes \tilde{\mathcal{S}}_3$ . 1-форма  $U_{[1]} \in \Omega^1(\mathcal{M}_2) \otimes \tilde{\mathcal{S}}_3$  называется формой связности (Картана), если ее  $o(2, 1)$  компонента  $X_{[1]}^A T_A = e_{[1]}^a P_a + \omega_{[1]} L$  такова, что компоненты  $e_{[1]}^a$  вдоль генераторов трансляций определяют невырожденное поле репера, т.е.  $e_{\mu}^a$  – это невырожденная матрица размера  $2 \times 2$ . Это условие в дальнейшем будет называться условием невырожденности.

<sup>47</sup>С другой стороны, эту факторизацию можно видеть анализируя два типа твист-инвариантных идеалов в универсальной обертывающей алгебре  $U(o(2, 1))$ , один из которых дает алгебру  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ , а второй гарантирует факторизацию (4.85) при целых  $\lambda$  [122].

Более детально, для описания гравитационных полей введем  $o(2, 1)$ -значную 1-форму связности

$$W_{[1]} = W_{[1]}^A T_A, \quad \text{где} \quad W_{[1]}^A = dx^m W_m^A, \quad (4.89)$$

и  $T^A$  –  $o(2, 1)$  базисные элементы ( $A = 0, 1, 2$ ). С помощью компенсатора и ковариантизованного базиса (4.52) связность можно разбить на репер  $e_{[1]}$  и лоренцеву спиновую связность  $\omega_{[1]}$  как сумму  $W_{[1]} = e_{[1]} + \omega_{[1]}$ , где  $e_{[1]}^A = W_{[1]}^A - V^A \omega_{[1]}$  и  $\omega_{[1]} = V_A W_{[1]}^A$ , причем репер это ковариантизованное  $o(1, 1)$ -векторное поле,  $V_A e^A = 0$ . Выбирая компенсатор в виде  $V^A = (0, 0, 1)$  получим стандартный репер  $e_m^a$  и спиновую связность  $\omega_m$ . Соответствующая 2-форма кривизны задается выражением

$$R_{[2]}^A = dW_{[1]}^A + \frac{1}{2} \epsilon^{ABC} W_{[1]B} \wedge W_{[1]C}, \quad (4.90)$$

где  $d = dx^m \partial_m$  – дифференциал де Рама,  $\wedge$  – внешнее произведение. Метрика определяется стандартным образом как  $g_{mn} = \eta_{AB} e_m^A e_n^B$ . Тогда все производные объекты (кривизны, ковариантные производные и т.д.) можно ввести стандартным образом. Пространство  $AdS_2$  локально описывается 1-формой связности  $W_{[1]}^A$ , подчиненной условию нулевой кривизны

$$R_{[2]}^A(W) = 0, \quad (4.91)$$

при условии, что  $2 \times 2$  матрица репера  $e_m^a$  обратима, т.е. выполнено условие невырожденности, введенное выше. Отметим, что три уравнения (4.91) эквивалентны одному уравнению Джакива–Тейтельбойма  $R - \Lambda = 0$ , где  $R$  и  $\Lambda$  – скалярная кривизна и космологическая константа [23, 22, 128].

**Ковариантные производные.** Поля  $U_{[p]} \in \Omega^p(\mathcal{M}_2) \otimes \tilde{\mathcal{S}}_3$  можно объединить в производящие функции от вспомогательных переменных  $Z^A$ . Для произвольного элемента имеем разложение

$$U_{[p]}(x|Z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_{A_1 \dots A_n}(x) Z^{A_1} \dots Z^{A_n}, \quad (4.92)$$

где коэффициенты разложения неявно  $p$ -формы и явно  $o(2, 1)$ -тензоры.

Присоединенные производные задаются выражением

$$\nabla = d + W_{[1]}^A \mathcal{T}_A, \quad (4.93)$$



где  $\mathcal{T}_A$  – это базисные элементы алгебры  $o(2, 1)$  в присоединенном представлении (4.38). Также вводится класс ковариантных производных, которые можно назвать твистованными производными, определяемые как

$$\tilde{\nabla} = d + W_{[1]}^A \mathbb{T}_A , \quad (4.94)$$

где  $\mathbb{T}_A = (\mathbb{P}_A, \mathbb{L})$  – это базисные элементы алгебры  $o(2, 1)$  в твистованном представлении (4.66) с некоторой функцией конформного веса. При квадрировании обе производные дают 2-форму кривизны

$$\nabla\nabla = R_{[2]}^A \mathcal{T}_A , \quad \tilde{\nabla}\tilde{\nabla} = R_{[2]}^A \mathbb{T}_A . \quad (4.95)$$

**Полевые уравнения: калибровочный сектор.** Пусть  $\Omega^1(\mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{H}$  – это подпространство 1-форм  $\Omega_{[1]} = \Omega_{[1]}(x|Z)$ , выделенных следовым условием  $\square \Omega_{[1]} = 0$ . Согласно Утверждению 4.1, решение этого условия задается набором 1-форм, принимающих значения в конечномерных, неприводимых представлениях  $\mathcal{D}_s$  алгебры  $o(2, 1)$ ,

$$\Omega_{[1]}(x|Z) = \sum_{s=0}^{\infty} \Omega_{A_1 \dots A_s}(x) Z^{A_1} \dots Z^{A_s} , \quad (4.96)$$

где каждый коэффициент разложения является 1-формой с полностью симметричными и бесследовыми касательными индексами,

$$\Omega_m^{A_1 \dots A_s} = \Omega_m^{(A_1 \dots A_s)} , \quad \eta_{A_1 A_2} \Omega_m^{A_1 A_2 A_3 \dots A_s} = 0 . \quad (4.97)$$

Они являются калибровочными полями в присоединенном представлении, возникающем при калибровании алгебры высших спинов  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ .

Полевые уравнения записываются посредством присоединенной производной (4.93) как условие ковариантного постоянства

$$\nabla \Omega_{[1]} \equiv (d + W_{[1]}^A \mathcal{T}_A) \Omega_{[1]} = 0 , \quad (4.98)$$

где 1-форма связности задает фоновую геометрию  $AdS_2$  (4.91). Таким образом, данные уравнения описывают свободную динамику в калибровочном секторе. Их можно получить как линеаризацию полных уравнений движения возникающих из ВФ действия с калибровочной алгеброй  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  [120, 122]

(см. раздел 4.4.1). У таких калибровочных полей нет локальных степеней, свободы потому что действие теории топологическое и его уравнения движения (4.98) являются условиями ковариантного постоянства в конечномерных представлениях (см., например, обсуждение в работе [291]).

**Полевые уравнения: скалярный сектор.** Пусть  $\Omega^0(\mathcal{M}_2) \otimes \tilde{\mathcal{H}}$  – это пространство 0-форм  $C_{[0]} = C_{[0]}(x|Z)$ , выделяемых модифицированным следовым условием  $(\square_{\perp} - 1) C_{[0]} = 0$ , и которое дополнительно ограничивается условием фиксации степени  $\parallel$ ,

$$(N_{\parallel} - n) C_{[0]} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.99)$$

Эти два условия можно решить в лоренцевых компонентах в виде набора бесконечномерных пространств, занумерованных индексом  $n$ ,

$$\Omega^0(\mathcal{M}_2) \otimes \tilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n, \quad \mathcal{W}_n = \{C_{a_1 \dots a_k}^{(n)}(x) \mid k = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (4.100)$$

где каждый элемент является симметричным бесследовым  $o(1, 1)$  тензорным полем,

$$C_{a_1 \dots a_k}^{(n)} = C_{(a_1 \dots a_k)}^{(n)}, \quad \eta^{a_1 a_2} C_{a_1 \dots a_k}^{(n)} = 0. \quad (4.101)$$

Согласно Утверждению 4.3 такой набор образует твистованное представление алгебры высших спинов  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ .

Полевые уравнения другого типа можно записать с помощью твистованных производных (4.94) как условие ковариантного постоянства

$$\tilde{\nabla}_{\lambda} C_{[0]} \equiv (d + W_{[1]A} \mathbb{T}_{\lambda}^A) C_{[0]} = 0, \quad (4.102)$$

где 1-форма связности  $W_{[1]}^A$ , подчиненная условию нулевой кривизны (4.91), по-прежнему задает  $AdS_2$  фон, а  $\mathbb{T}_{\lambda}^A$  – это базисные элементы алгебры  $o(2, 1)$  в обобщённом твистованном представлении (4.87).

Раскладывая  $C_{[0]} \in \Omega^0(\mathcal{M}_2) \otimes \tilde{\mathcal{H}}$  согласно (4.100) можно спроектировать исходные уравнения (4.102) на подпространства  $\mathcal{W}_n$  с  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Итоговые уравнения в каждом неприводимом секторе известны как развернутые уравнения для скалярных полей, а подпространства  $\mathcal{W}_n$  это вейлевские модули [119, 292]. Из анализа предыдущего раздела следует, что значения оператора Казимира на каждом подпространстве  $\mathcal{W}_n$  даются выражением (4.88).

Тогда система (4.102) описывает бесконечную башню скалярных  $AdS_2$  полей  $\Phi_n \equiv C^{(n)}(x)$ , отождествляемых с нижними компонентами в каждом вейлевском модуле (4.100),

$$(\nabla^2 + M_n^2) \Phi_n = 0, \quad \text{с массами} \quad M_n^2 = (n - \lambda)(n - \lambda + 1), \quad (4.103)$$

где  $\nabla^2$  – это оператор Даламбера на  $AdS_2$  пространстве,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

## 4.4 Действие высшеспиновой $AdS_2$ гравитации

Прежде чем рассматривать функционалы действия ВФ типа, которые, по сути, являются действиями в реперной форме, полезно сперва обсудить проблему построения высшеспиновых взаимодействий в метрической форме и сравнить два подхода. В старших измерениях существует широкий класс свободных калибровочных теорий, включающих безмассовые (или частично–безмассовые) симметричные поля произвольных спинов (и глубин). Для каждой соответствующей калибровочной теории, формально справедливой в любой размерности  $d$ , можно попытаться подставить  $d = 2$  во всех формулах (в действии, калибровочных преобразованиях, и т.д.) и определить «безмассовые» (или «частично–безмассовые») поля заданного «спина» (и «глубины») в двух измерениях как итоговую теорию данного типа. В целом, можно считать, что соответствующие свободные калибровочные теории «высших спинов» не имеют локальных степеней свободы, но, в то же время являются нетривиальным вне массовой поверхности, т.е. их квадратичные лагранжианы не представимы полными производными (см., например, [293]).<sup>48</sup> Фактически, в двух измерениях единственные локальные степени свободы переносятся полями материи произвольной массы (бозонные скаляры или фермионные спиноры). В этом смысле, вопрос построения непротиворечивых взаимодействий между полями высших спинов выглядит более естественным, если пытаться строить их взаимодействие с полями материи.

В качестве первого шага в этом направлении можно рассмотреть нётеров-

<sup>48</sup>Отметим, однако, исключительный случай безмассового спин-2 поля, лагранжиан которого в двух измерениях является полной производной. Это согласуется с тем, что действие Гильберта-Эйнштейна в этом случае является топологическим инвариантом.

ские кубические взаимодействия между одним спин- $s$  и двумя спин-0 полями. Они имеют вид  $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_s} J^{\mu_1 \dots \mu_s}$ , где  $\varphi_{\mu_1 \dots \mu_s}$  – ранг- $s$  метрическое калибровочное поле и  $J^{\mu_1 \dots \mu_s}$  – сохраняющийся ток, построенный стандартным образом из двух скаляров. Хорошо известно, что любая комбинация таких вершин типа  $(s, 0, 0)$  при любом  $s = 0, 1, 2, \dots$  остается непротиворечивой в кубическом приближении. Отметим, что если рассматривать теории фронсдаловского типа, то существуют также вершины типа  $(s, s, 0)$  и  $(s, s, 1)$  при  $s \geq 2$ , которые, совместно с некоторыми стандартными вершинами с участием низших спинов, исчерпывают все возможные типы кубических взаимодействий в этом случае [293].<sup>49</sup> Как обычно, для выхода за рамки кубического приближения необходимо специфицировать мультиплеты полей высших спинов как в калибровочном секторе, так и в секторе материи. Именно здесь алгебра высших спинов и ее представления становятся критичными для анализа непротиворечивых взаимодействий.

С одной стороны, сектор скалярных полей материи вполне однозначен, т.к. его спектр полностью фиксируется симметриями высших спинов [170] (см. предыдущий раздел). С другой стороны, спектр калибровочных полей, взаимодействующих с заданной башней массивных полей материи, по всей видимости, не фиксируется однозначно в метрическом подходе. Например, можно взять сумму фронсдаловских действий и начать добавлять обсуждавшиеся выше нётеровские кубические взаимодействия. Такая линия анализа может быть интересна сама по себе (т.к. приводит к минимальному взаимодействию и обратной реакции материи на гравитацию), однако в этом вопросе предпочтительнее придерживаться требований, возникающих в рамках реперного подхода к динамике полей высших спинов. Фактически, в рамках реперного подхода (в любой размерности) калибровочный сектор полностью фиксирован заданной алгеброй высших спинов. Следует отметить, что в двух измерениях соответствующая метрическая формулировка несколько отличается от того, что можно было бы ожидать (т.е. сумму фронсдаловских действий) исходя из стандартного сценария в старших измерениях и поэтому требуются поясняющие комментарии.

---

<sup>49</sup>Строго говоря, результаты работы [293] применимы только на пространстве Минковского, однако введение космологической постоянной  $\Lambda$  должно расширить список возможных вершин только вкладками  $\sim \Lambda$ .

Раскладывая присоединенное представление алгебры высших спинов  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  на неприводимые представления алгебры  $o(2, 1)$  изометрий  $AdS_2$  пространства, приходим к определению калибровочных полей спина  $s$  как 1-форм связностей со значениями в симметричных ранг- $(s - 1)$  представлениях алгебры  $o(2, 1)$ . В старших измерениях такая процедура калибрования обычно приводит к метрическим полям фронсдаловского типа (см., например, обзор [14]). Однако, в случае  $d = 2$  можно показать, что соответствующая метрическая система отлична от теорий фронсдаловского типа, обсуждавшихся выше [120, 122]. Этот феномен присутствует уже в случае спин-2 поля без космологической постоянной, когда тождественно равно нулю уравнение Эйнштейна  $G_{\mu\nu} \equiv 0$  заменяется уравнением Джакива–Тейтельбойма  $R = 0$ . Используя стандартную когомологическую технику развернутой формулировки можно показать, что аналогичная картина имеет место для полей высших спинов: уравнения эйнштейновского типа заменяются на условие плоскостности. Более того, возникающие при этом калибровочные поля метрического типа могут быть проинтерпретированы как частично–безмассовые поля максимальной глубины [120, 122].<sup>50</sup>

Отметим, что действие для реперных частично–безмассовых полей максимальной глубины в произвольных размерностях не могут быть построены в терминах внешних произведений 2-форм напряженностей, как в случае действий типа Васильева–Лопатина [191]. Вместо этого, существует действие максвелловского типа в терминах частных лоренцевых компонент полевых напряженностей, построенных из заданных калибровочных полей [230]. В этом смысле,  $d = 2$  ВФ действие является аналогом действия типа Васильева–Лопатина в  $d \geq 4$  измерениях (как и действие Черна–Саймонса в  $d = 3$  измерениях).

Однако, использование ВФ действия приводит к кинетическим операторам, чей вид существенно отличается от кинетических операторов, получаемых пределом  $d = 2$  в стандартных теориях метрического типа в  $d$  измерениях

---

<sup>50</sup>В произвольных размерностях, 1-формы калибровочных полей со значениями в симметричных представлениях алгебры изометрий соответствуют частично–безмассовым полям максимальной глубины [230]. Симметричные представления исчерпывают все (независимые, исключаем разного рода дуальности) представления алгебры  $o(2, 1)$ , приводя, тем самым, к отсутствию привычной реперной формулировки в двух измерениях для полей высших спинов, безмассовых или частично–безмассовых не максимальной глубины.

[234, 196] для частично–безмассовых полей максимальной глубины. Более того, каждое частично–безмассовое поле идет в паре с партнером дилатонного типа. Для бесконечного набора полей высших спинов это приводит к бесконечному набору полей дилатонного типа, которые, в свою очередь, образуют единый мультиплет алгебры высших спинов (в присоединенном представлении). Эта башня дополнительных полей может выглядеть неестественно с точки зрения старших измерений, но если рассмотреть высшеспиновое расширение гравитации Джакива–Тейтельбойма, то такой мультиплет генерируется автоматически из исходного дилатона (требованием высшеспиновой симметрии). Более общо, можно привести аргументы в пользу того, что панорама гравитационных теорий в двух измерениях всегда содержит поля дилатонного типа (см., например, [294]). Соответственно, можно ожидать, что их высшеспиновые расширения обязаны включать мультиплеты дилатонного типа, точно также как в случае гравитации Джакива–Тейтельбойма.

Вместо того, чтобы придерживаться метрического взгляда на нётеровскую программу построения взаимодействий, которая безусловно, интересна сама по себе, будем преследовать иные цели: (1) понять, как посредством реперного подхода свести воедино калибровочный мультиплет и мультиплет материи соответствующей алгебры высших спинов, (2) инициировать программу построения/изучения их взаимодействий на уровне действий ВФ типа. В качестве первого шага в этом направлении мы рассматриваем минимальные взаимодействия полей материи и калибровочных полей высших спинов посредством расширения исходной калибровочной алгебры высших спинов.

#### 4.4.1 Высшеспиновая JT гравитация

Рассмотрим топологическую  $2d$  теорию поля в качестве высшеспиновой гравитации с космологическим членом. Такая теория может быть сформулирована в виде двумерной ВФ модели с  $\mathcal{A}$ -значными 0-формами и 1-формами полей, где  $\mathcal{A}$  – это (бес)конечномерная алгебра высших спинов.<sup>51</sup>

В работе [120] подробно рассмотрен конечномерный случай  $\mathcal{A} = sl(N, \mathbb{R})$

---

<sup>51</sup>Двумерная топологическая теория гравитации и ее высшеспиновые расширения можно определить другим способом как топологические теории типа Виттена [295]. Изучаемая нами высшеспиновая гравитация является топологической теорией типа Шварца.

при  $N \geq 2$ . Данная калибровочная алгебра может быть записана в высшеспиновом базисе, когда генераторы упорядочены как  $sl(2, \mathbb{R})$  неприводимые представления ранга  $s = 1, 2, \dots, N - 1$ , так что соответствующие связности отождествляются с двумерными полями спина  $(s + 1)$ . Случай  $N = 2$  соответствует дилатонной гравитации Джакива–Тейтельбойма [128], а случай  $N \geq 3$  описывает высшеспиновое расширение.

Основное состояние данной модели задается  $AdS_2$  пространством. Отсюда следует, что калибровочный сектор  $sl(N, \mathbb{R})$  высшеспиновой гравитации содержит калибровочные поля в пространстве  $AdS_2$  со спинами  $s = 2, 3, \dots, N$  и массами  $m_s^2 = s(s - 1)\Lambda$ , где  $\Lambda$  – это космологическая постоянная. Эти поля следует рассматривать как топологические «частично–безмассовые» поля максимальной глубины [120], т.е. данная система не имеет локальных степеней свободы. Таким образом, высшеспиновая  $AdS_2$  гравитация может быть интерпретирована как дилатонная гравитация топологических «частично–безмассовых» полей высших спинов.<sup>52</sup>

В этом разделе мы формулируем высшеспиновую  $AdS_2$  гравитацию с (бес-)конечным набором полей как ВФ теорию бесконечномерной калибровочной алгебры высших спинов  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ . Определение ВФ действия требует наличия инвариантной симметричной билинейной формы на алгебре Ли симметрий теории. Другими словами, такая алгебра должна быть квадратичной.

**След на алгебре.** Кратко напомним, что симметричная билинейная форма  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  на алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  (присоединенно–)инвариантна, если

$$\langle [a_1, a_2], a_3 \rangle = \langle a_1, [a_2, a_3] \rangle, \quad \forall a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{g}. \quad (4.104)$$

Алгебры Ли с невырожденной, инвариантной, симметричной, билинейной формой называются (регулярными) квадратичными алгебрами. Все конечномерные редуктивные алгебры Ли квадратичны. Число таких независимых билинейных форм равно числу абелевых и простых факторов, например, два в случае  $gl(N, \mathbb{R}) = u(1) \oplus sl(N, \mathbb{R})$ . Замечательно, что бесконечномерная алгебра Ли  $\mathfrak{gl}[\lambda]$  квадратична (при любом  $\lambda$ ).

<sup>52</sup>Частично–безмассовые поля в старших измерениях имеют локальные степени свободы [296, 234, 196, 230]; их взаимодействие на уровне действия известно лишь в кубическом приближении [297]. См. также Главу 2.

Давайте определим ассоциативную алгебру  $Mat[\lambda]$  как фактор ассоциативных алгебр (4.15), пока без введения лиевой структуры, которая приводит к ассоциированной алгебре Ли  $\mathfrak{gl}[\lambda]$ . При произвольных  $\lambda \in \mathbb{R}$  эта алгебра является бесконечномерным аналогом ассоциативной алгебры  $Mat(N, \mathbb{R})$  матриц размера  $N \times N$ , что подчеркивается выбором обозначений.

На алгебре  $Mat[\lambda]$  существует след, который можно реализовать, например, либо через деформированные осцилляторы [272], либо через конструкцию фактор-алгебры [122]. По определению, это линейная форма  $\text{Tr} : Mat[\lambda] \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая свойству цикличности

$$\text{Tr} [ [a_1, a_2]_* ] = 0, \quad \forall a_1, a_2 \in Mat[\lambda]. \quad (4.105)$$

Эквивалентно, соответствующая линейная форма  $\text{Tr} : \mathfrak{gl}[\lambda] \rightarrow \mathbb{R}$  на ассоциированной алгебре Ли должна быть вырождена на производной алгебре Ли  $\mathfrak{gl}[\lambda]'$ , образованной скобками Ли.<sup>53</sup> Отметим, что  $u(1)' = 0$  (т.к. она абелева) и  $\mathfrak{hs}[\lambda]' = \mathfrak{hs}[\lambda]$  для  $\lambda$  общего положения (т.к. она простая), следовательно,  $\mathfrak{gl}[\lambda]' = \mathfrak{hs}[\lambda]$ . Поэтому, единственная возможность (с точностью до умножения на константу) это отождествление следа  $\text{Tr} : \mathfrak{gl}[\lambda] \rightarrow \mathbb{R}$  с проектором на идеал  $u(1)$ , т.е.  $\text{Tr}[a] = 0$ , если  $a \in \mathfrak{hs}[\lambda]$ , и  $\text{Tr}[a] = a$ , если  $a \in u(1)$ , где центр  $u(1)$  отождествлен с  $\mathbb{R}$ .

Соответственно, линейная форма  $\text{Tr} : Mat[\lambda] \rightarrow \mathbb{R}$  отождествляется с проектором на центр  $Z \cong \mathbb{R}$ . Отсюда следует важное свойство: след является твист-инвариантным,

$$\text{Tr} [\tau(a)] = \text{Tr} [a], \quad \forall a \in Mat[\lambda], \quad (4.106)$$

т.к.  $\tau(a) = a$  для любого  $a \in \mathbb{R}$ .

Отметим, что след на  $Mat[\lambda]$  автоматически определяет инвариантную, симметричную, билинейную форму на  $\mathfrak{gl}[\lambda]$  (а также на подалгебре  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ )

$$\langle a_1, a_2 \rangle_{\mathfrak{gl}[\lambda]} := \text{Tr} [a_1 * a_2], \quad (4.107)$$

которая невырождена для нецелых  $\lambda$  (случай целых  $\lambda$  обсуждается ниже). Этот феномен аналогичен связи между формой Киллинга на  $sl(N, \mathbb{R})$  и следом

<sup>53</sup>Производная алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  является идеалом, обозначаемым  $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$  и определяемым как  $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .



на  $Mat(N, \mathbb{R})$ . Отметим, что  $u(1)$  и  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  взаимно ортогональны по отношению к (4.107), т.к.  $\text{Tr}[a_1 * a_2] = a_1 \text{Tr}[a_2] = 0$  при  $a_1 \in \mathbb{R}$  и  $a_2 \in \mathfrak{hs}[\lambda]$ .<sup>54</sup>

**Топологическое ВФ действие.** Высшеспиновое расширение гравитации Джакива–Тейтельбойма описывается в реперной формулировке ВФ функционалом [120, 122]

$$S_{\text{HSJT}}[A, B] = \int_{\mathcal{M}_2} \text{Tr}[B_{[0]} * F_{[2]}] , \quad (4.108)$$

где:

- $B_{[0]}$  – 0-форма в присоединенном представлении, т.е.  $B_{[0]} \in \Omega^0(\mathcal{M}_2) \otimes \mathfrak{gl}[\lambda]$ ;  $\delta_\epsilon B_{[0]} = [\epsilon_{[0]}, B_{[0]}]_*$  – калибровочное преобразование с параметром 0-формой  $\epsilon_{[0]} \in \Omega^0(\mathcal{M}_2) \otimes \mathfrak{gl}[\lambda]$ .
- $D = d + A_{[1]}$  – ковариантная производная по отношению к 1-форме связности  $A_{[1]} \in \Omega^1(\mathcal{M}_2) \otimes \mathfrak{gl}[\lambda]$  в присоединенном представлении и удовлетворяет условию невырожденности из раздела 4.3.5; калибровочное преобразование  $\delta_\epsilon A_{[1]} = D\epsilon_{[0]}$ .
- $F_{[2]} = dA_{[1]} + A_{[1]} \wedge *A_{[1]}$  – 2-кривизны 1-формы связности  $A_{[1]}$ , тогда  $F_{[2]} \in \Omega^2(\mathcal{M}_2) \otimes \mathfrak{gl}[\lambda]$ ; относительно калибровочных преобразований преобразуется однородно:  $\delta_\epsilon F_{[2]} = [\epsilon_{[0]}, F_{[2]}]_*$ .

Уравнения движения, следующие из действия (4.108),

$$F_{[2]} = 0 , \quad DB_{[0]} = 0 , \quad (4.109)$$

являются соответственно условиями плоскостности и ковариантного постоянства. Пространство  $AdS_2$ , т.е.  $R_{[2]}^A = 0$  (4.91), является решением уравнений (4.109) при выборе  $A_{[1]} = W_{[1]} \in \Omega^1(\mathcal{M}_2) \otimes o(2, 1)$  и  $B_{[0]} = 0$ . Линеаризуем эти уравнения над решением  $AdS_2$ , выбирая

$$A_{[1]} = W_{[1]} + \Omega_{[1]} , \quad (4.110)$$

т.е.  $\Omega_{[1]}$  – флуктуация 1-формы связности  $A_{[1]}$  над  $AdS_2$  фоном  $W_{[1]}$ . Линеаризация уравнений (4.109) дает, соответственно,

$$\nabla \Omega_{[1]} = 0 , \quad \nabla B_{[0]} = 0 , \quad (4.111)$$

<sup>54</sup>В любой квадратичной алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  центре  $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}$  и производная алгебра  $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$  являются ортогональными дополнениями, как следует из условия инвариантности (4.104). Таким образом, любая квадратичная алгебра Ли раскладывается в прямую сумму  $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}'$  ее центра и производной.

где ковариантная производная  $\nabla$  определена в (4.93) (более детальное обсуждение содержится в работе [122]). Первое уравнение (4.111) воспроизводит (4.98), второе уравнение определяет  $\mathfrak{gl}[\lambda]$ -значное скалярное поле  $B_{[0]}(x)$  везде на базовом многообразии  $\mathcal{M}_2$  в терминах его значения  $B_{[0]}(x_0)$  в любой заданной точке  $x_0$  (через параллельный перенос посредством плоской 1-формы  $o(2, 1)$ -связности  $W_{[1]}$ ). Эти глобальные степени свободы являются высшеспиновым обобщением дилатонного решения в гравитации Джакива–Тейтельбойма и находятся во взаимнооднозначном соответствии полями Киллинга (максимальной глубины) на пространстве  $AdS_2$  [122]. Они образуют неприводимый  $o(2, 1)$ -модуль размерности  $2s - 1$ , где  $s$  – это спин соответствующего калибровочного поля .

Сделаем два комментария. Во-первых, конструкция ВФ действия остается неизменной, если заменить  $\mathfrak{gl}[\lambda]$  на  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  согласно (4.16). Т.к.  $u(1)$  и  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  ортогональны, единственное отличие будет в вычитании из ВФ действия  $u(1)$  подсектора: этот  $u(1)$  вклад описывает постоянное скалярное поле на массовой поверхности и топологическое спин-1 калибровочное поле. Во-вторых, для  $\lambda \in \mathbb{N}$  алгебра  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  перестает быть простой и содержит бесконечномерный идеал  $\mathcal{J}_N$ , приводя к фактору  $sl(N, \mathbb{R}) = \mathfrak{hs}[N]/\mathcal{J}_N$  (см. раздел 4.2). В этом случае, билинейная форма (4.107) становится вырожденной [272], так что поля со значениями в идеале  $\mathcal{J}_N$  не дают вклада в действие. Единственные отличные от нуля вклады отождествляются с  $sl(N, \mathbb{R})$ -значными дифференциальными формами. Отсюда следует, что итоговое высшеспиновое ВФ действие (4.108) сводится к  $sl(N, \mathbb{R})$  ВФ действию [120]. При  $N = 2$  воспроизводится ВФ действие Джакива–Тейтельбойма [128].

#### 4.4.2 Расширенная алгебра и действие ВФ-типа

Существует расширение обсуждавшейся в предыдущем разделе высшеспиновой гравитации Джакива–Тейтельбойма, когда алгебра высших спинов  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  заменяется на расширенную алгебру высших спинов, которую будем обозначать  $\mathfrak{ehs}[\lambda]$ , основанное на трюке замены  $\mathfrak{gl}[\lambda]$  двумя копиями самой себя и введением некоторого закона умножения между элементами копий.<sup>55</sup> Более

<sup>55</sup>Отметим, что аналогичный способ также использовался в работе [119] в контексте другой высшеспиновой модели в двух измерениях. Спектр такой теории состоит из единственного скаляра фиксированной

строого, соответствующее расширение алгебры  $Mat[\lambda]$  определяется введением smash-произведения исходной ассоциативной алгебры и конечной группы  $\mathbb{Z}_2$  ее автоморфизмов.

**Смаш-произведение.** Смаш-произведение (smash product) можно определить следующим образом (см., например, [298]). Пусть  $H$  – это группа. Рассмотрим  $H$ -модуль алгебры  $\mathcal{A}$  и пусть  $\pi$  обозначает соответствующее действие  $H$  на  $\mathcal{A}$ . Т.н. косое групповое кольцо группы  $H$  над  $\mathcal{A}$  обозначается как  $\mathcal{A}\#H$  и состоит из пар  $(a, h)$ , где  $a \in \mathcal{A}$  и  $h \in H$ , наделенное смаш-произведением  $(a_1, h_1)\#(a_2, h_2) = (a_1 \pi_{h_1}(a_2), h_1 h_2)$ , где  $\pi_h$  обозначает действие элемента  $h \in H$  на  $\mathcal{A}$ . В нашем случае,  $\mathcal{A} = Mat[\lambda]$  и  $H = \mathbb{Z}_2$ , а смаш-произведение реализовано на  $Mat[\lambda]\#\mathbb{Z}_2$  согласно (4.112). Будем обозначать алгебру со смаш-произведением как  $Mat[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ .<sup>56</sup>

Пусть  $\mathbb{Z}_2 = \{\mathbf{1}, \boldsymbol{\tau}\}$  – это группа автоморфизмов, порожденных твистом  $\tau$ . Тогда ассоциативная алгебра, обозначаемая  $Mat[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ , является векторным пространством элементов представимых в виде  $a \mathbf{1} + b \boldsymbol{\tau}$ , где  $a, b \in Mat[\lambda]$ , и наделенных смаш-произведением  $\star$ , которое определяется следующим образом

$$(a_1 \mathbf{1} + b_1 \boldsymbol{\tau}) \star (a_2 \mathbf{1} + b_2 \boldsymbol{\tau}) = \left( a_1 * a_2 + b_1 * \tau(b_2) \right) \mathbf{1} + \left( a_1 * b_2 + b_1 * \tau(a_2) \right) \boldsymbol{\tau}, \quad (4.112)$$

где  $*$  обозначает произведение в  $Mat[\lambda]$ . Ассоциированная алгебра Ли будет обозначаться  $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ . Она образована элементами  $a \mathbf{1} + b \boldsymbol{\tau}$ , где  $a, b \in \mathfrak{gl}[\lambda]$  и наделена  $\star$ -коммутатором

$$\begin{aligned} [a_1 \mathbf{1} + b_1 \boldsymbol{\tau}, a_2 \mathbf{1} + b_2 \boldsymbol{\tau}]_{\star} &= \\ &= \left( [a_1, a_2]_{*} + (b_1 * \tau(b_2) - b_2 * \tau(b_1)) \right) \mathbf{1} + \left( [a_1, b_2]_{\tau} - [a_2, b_1]_{\tau} \right) \boldsymbol{\tau}, \end{aligned} \quad (4.113)$$

где  $[a, b]_{*} = a * b - b * a$  – это  $*$ -коммутатор и  $[a, b]_{\tau} = a * b - b * \tau(a)$  – твистованный  $*$ -коммутатор. Это означает, что  $\star$ -присоединенное действие  $\mathfrak{gl}[\lambda]$  на его расширении  $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$  объединяет присоединенное и твистованное действие

---

массы, что кардинальным образом отличается от рассматриваемой здесь модели, в которой спектр содержит бесконечное число скалярных полей.

<sup>56</sup>В теории высших спинов, косые групповые кольца различных групп (иногда называемые внешними клейнианами) над ассоциативными алгебрами существенным образом использовались при построении нелинейных уравнений движения, см., например, оригинальные работы [299, 131] и последующее развитие в работах [300, 301].

$\mathfrak{gl}[\lambda]$  на себе,

$${}^*ad_y(a \mathbf{1} + b \boldsymbol{\tau}) := [y \mathbf{1}, a \mathbf{1} + b \boldsymbol{\tau}]_* = {}^*ad_y(a) \mathbf{1} + {}^\tau ad_y(b) \boldsymbol{\tau}, \quad (4.114)$$

для  $\forall y, a, b \in \mathfrak{gl}[\lambda]$ , где использованы следующие обозначения

$${}^*ad_y(a) = [y, a]_* := y * a - a * y, \quad \forall y, a \in \mathfrak{gl}[\lambda], \quad (4.115)$$

$${}^\tau ad_y(a) = [y, a]_\tau := y * a - a * \tau(y), \quad \forall y, a \in \mathfrak{gl}[\lambda]. \quad (4.116)$$

**След на алгебре.** Можно показать, что центр  $\mathcal{Z}$  ассоциативной алгебры  $Mat[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$  является одномерной подалгеброй  $\mathcal{Z} = \mathbb{R} \mathbf{1} := \{c \mathbf{1} \mid \forall c \in \mathbb{R}\}$ . Проекция на центр  $\mathcal{Z}$  приводит к естественному следу на  $Mat[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ . Обозначим как  $\mathbb{T}r$  след на  $Mat[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ , определенный как ограничение на след  $Tr$  на  $Mat[\lambda]$ . Иными словами,

$$\mathbb{T}r[a \mathbf{1} + b \boldsymbol{\tau}] = Tr[a], \quad \forall a, b \in Mat[\lambda]. \quad (4.117)$$

Свойство цикличности,

$$\mathbb{T}r \left[ [a_1 \mathbf{1} + b_1 \boldsymbol{\tau}, a_2 \mathbf{1} + b_2 \boldsymbol{\tau}]_* \right] = Tr \left[ [a_1, a_2]_* + b_1 * \tau(b_2) - b_2 * \tau(b_1) \right] = 0, \quad (4.118)$$

следует из коммутационного соотношения (4.113), определения (4.117), свойств инволюции и автоморфизма оператора твиста  $\tau^2 = \mathbb{1}$  и  $\tau(a * b) = \tau(a) * \tau(b)$ , а также свойств (4.105), (4.106). Отметим, что хотя расширенный след  $\mathbb{T}r$  вырожден вдоль направления дополнительного генератора  $\boldsymbol{\tau}$ , симметричная билинейная форма, которую он определяет,

$$\begin{aligned} & \langle a_1 \mathbf{1} + b_1 \boldsymbol{\tau}, a_2 \mathbf{1} + b_2 \boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2} := \\ & := \mathbb{T}r[(a_1 \mathbf{1} + b_1 \boldsymbol{\tau}) * (a_2 \mathbf{1} + b_2 \boldsymbol{\tau})] = Tr[a_1 * a_2 + b_1 * \tau(b_2)], \quad (4.119) \\ & = \langle a_1, a_2 \rangle_{\mathfrak{gl}[\lambda]} + \langle b_1, \tau(b_2) \rangle_{\mathfrak{gl}[\lambda]}, \end{aligned}$$

наоборот, невырождена (для получения последних двух строк использованы соотношения (4.112) и (4.107)). Цикличность расширенного следа и тождества Якоби  $\star$ -коммутатора гарантируют, что данная симметричная, билинейная форма также инвариантна по отношению к  $\star$ -присоединенному действию  $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$  на себе. Другими словами, бесконечномерная алгебра  $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$  является квадратичной алгеброй Ли. Этих двух свойств (невырожденность и

присоединенная инвариантность) достаточно для определения подходящего ВФ действия. Более того, это также означает, что данная алгебра Ли раскладывается в прямую сумму

$$\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2 = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{ehs}[\lambda] , \quad (4.120)$$

где центр является абелевым идеалом  $\mathfrak{u}(1) = \mathbb{R} \mathbf{1}$  и производная алгебра, обозначается  $\mathfrak{ehs}[\lambda] = (\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2)'$ , является расширением алгебры  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ , образованным элементами  $a \mathbf{1} + b \boldsymbol{\tau}$ , где  $a \in \mathfrak{hs}[\lambda]$  и  $b \in \mathfrak{gl}[\lambda]$ . Эта расширенная алгебра высших спинов  $\mathfrak{ehs}[\lambda]$  является идеалом в  $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$  и, в частности,  $\star$ -присоединенное действие (4.114) может быть последовательно ограничено на  $\mathfrak{ehs}[\lambda]$ .

**Действие ВФ типа.** Расширение исходного ВФ действия (4.108) посредством введенного выше smash-произведения задается функционалом ВФ типа

$$S_{\text{EHS JT}}[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \int_{\mathcal{M}_2} \text{Tr}[\mathcal{B}_{[0]} \star \mathcal{F}_{[2]}] , \quad (4.121)$$

где

- $\mathcal{B}_{[0]} = B_{[0]} \mathbf{1} + C_{[0]} \boldsymbol{\tau}$  – 0-форма со значениями в  $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ ; калибровочное преобразование  $\delta_\varepsilon \mathcal{B}_{[0]} = [\varepsilon_{[0]}, \mathcal{B}_{[0]}]_\star$ , где  $\varepsilon_{[0]} = \epsilon_{[0]} \mathbf{1} + \kappa_{[0]} \boldsymbol{\tau}$  – параметр со значением в  $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ .
- $\mathcal{D} = d + \mathcal{A}_{[1]}$  – расширенная, высшеспиновая, ковариантная производная по отношению к 1-форме связности  $\mathcal{A}_{[1]} = A_{[1]} \mathbf{1} + Z_{[1]} \boldsymbol{\tau}$  со значениями в  $\star$ -присоединенном представлении; калибровочное преобразование  $\delta_\varepsilon \mathcal{A}_{[1]} = \mathcal{D}\varepsilon_{[0]}$ . Отметим, что условие невырожденности 1-формы связности  $\mathcal{A}_{[1]}$  эквивалентно условию невырожденности 1-формы связности  $A_{[1]}$  из раздела 4.4.1. Подчеркнем, что для 1-форм  $Z_{[1]}$  такое условие не накладываемся.
- $\mathcal{F}_{[2]} = d\mathcal{A}_{[1]} + \mathcal{A}_{[1]} \wedge \star \mathcal{A}_{[1]}$  – 2-форма расширенной кривизны со значениями в  $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ , преобразуется однородно  $\delta_\varepsilon \mathcal{F}_{[2]} = [\varepsilon_{[0]}, \mathcal{F}_{[2]}]_\star$ .

Уравнения движения, следующие из действия ВФ типа (4.121), накладывают условия плоскостности и ковариантного постоянства

$$\mathcal{F}_{[2]} = 0 , \quad \mathcal{D}\mathcal{B}_{[0]} = 0 , \quad (4.122)$$

являющиеся естественными расширениями уравнений (4.109). Воспользовавшись (4.112) и (4.113) можно получить компонентный вид

$$F_{[2]} + Z_{[1]} \wedge * \tau(Z_{[1]}) = 0 , \quad (4.123)$$

$$dZ_{[1]} + A_{[1]} \wedge * Z_{[1]} + Z_{[1]} \wedge * \tau(A_{[1]}) = 0 , \quad (4.124)$$

и

$$DB_{[0]} + Z_{[1]} * \tau(C_{[0]}) - C_{[0]} * \tau(Z_{[1]}) = 0 , \quad (4.125)$$

$$\tilde{D}C_{[0]} - [B_{[0]}, Z_{[1]}]_{\tau} = 0 , \quad (4.126)$$

где использовались определения  $F_{[2]} = dA_{[1]} + A_{[1]} \wedge * A_{[1]}$  и  $D = d + [A_{[1]}, \cdot]_{*}$ , являющиеся, соответственно,  $\mathfrak{gl}[\lambda]$  кривизной и  $*$ -присоединенной ковариантной производной, а также введена твистованная ковариантная производная  $\tilde{D} = d + [A_{[1]}, \cdot]_{\tau}$ . Таким образом, видно, что  $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$  теория ВФ типа содержит стандартную  $\mathfrak{gl}[\lambda]$  ВФ теорию в качестве подсектора, при условии, что все поля транкированы на подалгебру  $\mathfrak{gl}[\lambda] \subset \mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ , т.е.

$$\mathcal{A}_{[1]} = A_{[1]} \mathbf{1} , \quad \mathcal{B}_{[0]} = B_{[0]} \mathbf{1} . \quad (4.127)$$

Итак, действие расширенной высшеспиновой гравитации (4.121) может быть сведено к действию высшеспиновой гравитации Джакива–Тейтельбойма (4.108) посредством транкирования (4.127).

Отметим, что при наложении подходящего условия калибровки на массовой поверхности, 1-форму  $Z_{[1]}$  можно положить в ноль. Действительно, уравнение (4.124) означает, что локально  $Z_{[1]} = \tilde{D}K_{[0]}$  для некоторой 0-формы  $K_{[0]}$ , при условии, что  $A_{[1]}$  удовлетворяет уравнению (Б.14). Тогда выписывая калибровочное преобразование в секторе 1-форм по компонентам,

$$\delta A_{[1]} = D\epsilon_{[0]} + Z_{[1]} * \tau(\kappa_{[0]}) - \kappa_{[0]} * \tau(Z_{[1]}) , \quad (4.128)$$

$$\delta Z_{[1]} = \tilde{D}\kappa_{[0]} - [\epsilon_{[0]}, Z_{[1]}]_{\tau} , \quad (4.129)$$

можно видеть, что воспользовавшись параметром  $\kappa_{[0]}$ , поле  $Z_{[1]}$  можно занулить на массовой поверхности. Подобное калибровочное условие никак не ограничивает другой калибровочный параметр  $\epsilon_{[0]}$ , т.к.  $[\epsilon_{[0]}, Z_{[1]}]_{\tau} = 0$  если  $Z_{[1]} = 0$ . В частности, остается  $\delta_{\epsilon} A_{[1]} = D\epsilon_{[0]}$  при любом  $\epsilon_{[0]} \in \Omega^0(\mathcal{M}_2) \otimes \mathfrak{gl}[\lambda]$ .

Отметим, условие  $Z_{[1]} = 0$  достижимо, если не накладывать условие невырожденности на  $Z_{[1]}$ , в отличие от  $A_{[1]}$ . Однако, на данный момент, нет никакой очевидной мотивации для введения второго реперного поля и поэтому такая частная калибровка действительно достижима в рамках настоящего анализа. Отметим, что при  $Z_{[1]} = 0$  уравнение (Б.14) сводится к  $F_{[2]} = 0$ .

Подводя краткие итоги, видим, что условие плоскостности для 1-форм  $\mathcal{A}_{[1]}$  в (4.122) означает, что локально расширенная 1-форма связности описывает  $AdS_2$  пространство, т.е. в подходящей калибровке  $\mathcal{A}_{[1]} = W_{[1]} \mathbf{1}$ . Тогда в силу свойства (4.114), условие ковариантного постоянства для 0-форм  $\mathcal{B}_{[0]}$  (4.122) раскладывается в виде

$$\nabla B_{[0]} = 0, \quad \tilde{\nabla} C_{[0]} = 0. \quad (4.130)$$

В этом смысле, уравнения движения расширенной теории ВФ типа (4.121) можно рассматривать как высшеспиновую ковариантизацию твистованного уравнения (4.102) на дополнительные 0-формы  $C_{[0]}$ , совместно с присоединенным уравнением (4.111) на 0-формы  $B_{[0]}$  уже присутствующим в высшеспиновой гравитации Джакива–Тейтельбойма.

Давайте рассмотрим другое транкирование уравнений движения (4.122),

$$\mathcal{A}_{[1]} = A_{[1]} \mathbf{1}, \quad \mathcal{B}_{[0]} = C_{[0]} \boldsymbol{\tau}, \quad (4.131)$$

которое приводит к системе

$$F_{[2]} = 0, \quad \tilde{D}C_{[0]} = 0. \quad (4.132)$$

Линеаризация этих уравнений над  $AdS_2$  решением  $W_{[1]}$  условия нулевой кривизны (4.91) посредством разложения (4.110) 1-формы связности  $A_{[1]}$  приводит к выражениям

$$\nabla \Omega_{[1]} = 0, \quad \tilde{\nabla} C_{[0]} = 0, \quad (4.133)$$

которые полностью воспроизводят линейные уравнения (4.98) и (4.102).

**Интерпретация.** Теперь суммируем наши знания расширенной теории и сделаем несколько комментариев о ее полевом составе вне/на массовой поверхности. Вне массовой поверхности присутствуют следующие поля:

1. Поле  $A_{[1]}$  – стандартная высшеспиновая связность. На массовой поверхности (локально) описывает  $AdS_2$  решение  $W_{[1]}$  (также как для спин-2 гравитации Джакива–Тейтельбойма), потому что невырождена.
2. Поле  $V_{[0]}$  – высшеспиновое расширение поля дилатона гравитации Джакива–Тейтельбойма. Оно играет роль лагранжева множителя для условия плоскостности на  $A_{[1]}$  и поэтому критично для наличия принципа действия, ровно по той же причине как в случае спина 2 (для которого действие Гильберта–Эйнштейна в двух измерениях это граничный член, следовательно спин-2 теории требуют добавления поля дилатона). На массовой поверхности, 0-формы описывают бесконечный набор тензоров Киллинга всех спинов и максимальной глубины. Например, дилатон в теории Джакива–Тейтельбойма лежит в фундаментальном представлении алгебры  $o(2, 1)$ . В общем случае, поля 0-форм являются топологическими в том смысле, что каждое из них описывается на массовой поверхности конечномерным  $o(2, 1)$  представлением.
3. Поле  $Z_{[1]}$  можно рассматривать как лагранжев множитель для твистованного уравнения, однако его истинная роль гораздо больше.<sup>57</sup> Фактически, в произвольной размерности  $d$  твистованное уравнение (само по себе) может быть получено из действия ВФ типа введением лагранжева множителя, являющимся  $(d - 1)$ -формой со значениями в таком же представлении. В целом, вопрос состоит в том, возникают ли новые степени свободы, связанные с таким дополнительным набором полей, и насколько естественно новые поля согласуются с остальными полями теории. В нашем случае, поле  $Z_{[1]}$  является чисто калибровочным на массовой поверхности (в отличие от  $A_{[1]}$ , которое топологическое, но не чисто калибровочное, т.к.  $A_{[1]}$  невырождено, а  $Z_{[1]}$  вырождено) и делает калибровочную симметрию явной по отношению к расширенной алгебре высших спинов, которая, в свою очередь, объединяет калибровочный сектор и сектор материи. Отметим, что хотя  $Z_{[1]}$  чисто калибровочное на массовой поверхности, оно не является таковым вне массовой поверх-

---

<sup>57</sup>Строго говоря, поле  $Z_{[1]}$  не является лагранжевым множителем в привычном смысле, т.к. действие содержит член (продиктованный калибровочной инвариантностью) квадратичный по  $Z_{[1]}$  (и линейный по  $V_{[0]}$ ).



ности и играет определяющую роль в определении действия.

4. Поле  $C_{[0]}$  – динамическое, т.к. данная 0-форма на массовой поверхности имеет локальные степени свободы бесконечного набора скалярных полей с растущим эквидистантным спектром масс.

Физический спектр теории (на массовой поверхности):

*Топологический сектор:* бесконечная башня дилатонных скалярных полей  $\chi^{(s)}$ , вся совокупность которых лежит в присоединенном представлении алгебры высших спинов  $\mathfrak{gl}[\lambda]$ . Относительно  $o(2, 1)$  оно раскладывается в бесконечный набор тензоров Киллинга максимальной глубины для калибровочных полей всех спинов  $s = 1, 2, 3, \dots$ . Каждое дилатонное поле лежит в конечномерном  $o(2, 1)$  представлении.

*Динамический сектор:* бесконечная башня динамических скалярных полей  $\Phi_n$ , вся совокупность которых лежит в твистованном представлении алгебры высших спинов  $\mathfrak{gl}[\lambda]$ . Относительно  $o(2, 1)$  оно раскладывается в бесконечный набор массивных скаляров, подчиненных уравнениям (4.103) при  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Каждое скалярное поле лежит в конечномерном  $o(2, 1)$  представлении.

**Факторизация.** В завершение сделаем два комментария, аналогичные комментариям в конце предыдущего раздела. Во-первых, для построения действия ВФ типа можно рассмотреть дифференциальные формы со значениями в подалгебре  $\mathfrak{ehs}[\lambda]$  (вместо  $\mathfrak{gl}[\lambda] \rtimes \mathbb{Z}_2$ ) в целях исключения  $u(1)$  подсектора. Это означает, что  $A_{[1]}$  и  $B_{[0]}$  ограничены на  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ , как в высшеспиновой гравитации Джакива–Тейтельбойма, в то время как  $Z_{[1]}$  и  $C_{[0]}$  по-прежнему принимают значения во всей алгебре  $\mathfrak{gl}[\lambda]$ . Например,  $u(1)$ -связность при транкировании (4.131) отщепляется от присоединенного сектора, а скалярные компоненты по-прежнему присутствуют в твистованном секторе, что позволяет уравнениям (4.133) оставаться непротиворечивыми. Во-вторых, отметим, что при целых значениях параметра (т.е.  $\lambda = N \in \mathbb{N}$ ), расширенная алгебра высших спинов  $\mathfrak{gl}[N] \rtimes \mathbb{Z}_2$  содержит конечномерный идеал, обозначаемый как

$\mathcal{J}_N \rtimes \mathbb{Z}_2$ , где  $\mathcal{J}_N$  – бесконечномерные идеалы в  $\mathfrak{gl}[N]$  (см. раздел 4.2). Итоговый фактор

$$\frac{\mathfrak{gl}[N] \rtimes \mathbb{Z}_2}{\mathcal{J}_N \rtimes \mathbb{Z}_2} = \{a \mathbf{1} + b \boldsymbol{\tau} \mid \forall a, b \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{R})\} \quad (4.134)$$

является конечномерной алгеброй Ли, обозначаемой  $gl(N, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ . Ее безцентральная часть определяется разложением:<sup>58</sup>

$$gl(N, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2 = u(1) \oplus esl(N, \mathbb{R}). \quad (4.135)$$

Можно рассмотреть ВФ теорию с калибровочной алгеброй  $gl(N, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ , которая приводит к топологической системе уравнений движений вида (твистованного)присоединенного условия ковариантного постоянства на конечномерном пространстве полей. В частности, для (4.131) уравнения движения сводятся к стандартным  $gl(N, \mathbb{R})$  ВФ уравнениям, дополненным новыми топологическими уравнениями в секторе 0-форм. В этом случае они аналогичны уравнениям, осуждавшимся в рамках трехмерной теории высших спинов [302, 131], в виде топологической подсистемы, которая отщепляется от исходных динамических твистованных уравнений при целых  $\lambda = N$ .

---

<sup>58</sup>Обозначение  $esl(N, \mathbb{R})$  введено по аналогии с обозначением  $\mathfrak{ehs}[\lambda]$  для бесконечномерной расширенной алгебры высших спинов. Оно всего лишь означает, что  $esl(N, \mathbb{R})$  является расширением  $sl(N, \mathbb{R})$ , полученным факторизацией по центру  $u(1)$  фактора  $gl(N, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ . Было бы интересно выяснить просто оно или нет, а также получить явную реализацию твиста на  $gl(N, \mathbb{R})$  и соответствующих уравнений.

# Глава 5. Квазиклассическое $AdS_3/CFT_2$ соответствие

В этой главе, в рамках квазиклассического  $AdS_3/CFT_2$  соответствия, рассматриваются классические  $n$ -точечные конформные блоки с двумя тяжелыми и  $n - 2$  легкими операторами в  $CFT_2$  на плоскости и показывается, что они равны длинам дуальных геодезических графов в трехмерном пространстве с конической сингулярностью [140, 142, 174, 172]. Также изучается голографическое соответствие между вильсоновскими сетями в  $3d$  теории гравитации Черна-Саймонса с тороидальными граничными условиями и глобальными конформными блоками граничной торической  $CFT_2$  [178].

$AdS/CFT$  соответствие дает эффективный способ вычисления конформных корреляционных функций исходя из действия  $AdS$  теории, по крайней мере, в приближении седловой точки [4, 6, 5]. Интересно, что дуальность можно понять на более глубоком структурном уровне. Действительно, корреляционные функции могут быть разложены на конформные блоки, которые являются модельно-независимыми и полностью фиксируются конформной симметрией. С другой стороны, естественно задаться вопросом, что является дуальным аналогом конформных блоков для теории в объеме. Относительно недавно искомые дуальные объекты были описаны для случая  $CFT_2$  конформных блоков, рассматриваемых в режиме больших параметров  $\Delta, c \gg 1$ , что соответствует квазиклассическому приближению с точки зрения гравитации. Было показано, что такие предельные конформные блоки на плоскости, называемые классическими, эквивалентно описываются как длины некоторых геодезических сетей, натянутых в асимптотически  $AdS_3$  пространстве [134, 135, 136, 303, 304, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 154, 305]. Существенным

ингредиентом здесь является heavy-light (HL) приближение, когда два примарных оператора служат фоном для других операторов [135]. В зависимости от своих конформных размерностей, фоновые операторы производят дефицит угла или BTZ черную дыру теории в объеме, при этом пертурбативные операторы соответствуют пробным массивным частицам, распространяющимся на фоне такой геометрии.

Основная идея, лежащая в основе квазиклассического  $AdS_3/CFT_2$  соответствия такого типа, достаточно проста. В квазиклассике центральный заряд и конформные размерности стремятся к бесконечности таким образом, что отношения  $\Delta/c$  остаются фиксированными. Далее, конформный блок  $F(z|\Delta, c)$  экспоненцируется  $F(z|\Delta, c) \sim \exp\left(\frac{1}{c}f\left(z|\frac{\Delta}{c}\right)\right)$ , в результате чего возникает т.н. классический конформный блок  $f\left(z|\frac{\Delta}{c}\right)$  [158]. С другой стороны, классические траектории в гравитационной теории, описывающие геодезическое движение массивных частиц, соответствующих вставкам примарных операторов на границе, доминируют в функциональном интеграле, см. например, работы [306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313].

Связь между классическими конформными блоками и классической механикой выходит далеко за пределы  $AdS_3/CFT_2$  дуальности. Действительно, известно, что конформные блоки являются решениями BPZ условий отщепления сингулярных векторов [132]. С другой стороны, было показано, что конформные блоки с произвольными конформными размерностями в квазиклассическом пределе удовлетворяют уравнению Пенлеве VI, которое называется BPZ условием, представленным в форме Гамильтона-Якоби [314]. Отсюда следует, что, ограничивая конформные параметры в рамках HL теории возмущений, уравнение Пенлеве VI может быть пертурбативно сведено к уравнению движения массивных частиц, распространяющихся в асимптотически  $AdS_3$  пространстве.

Изучение BPZ условий отщепления сингулярных векторов проливает свет на множество алгебраических структур (см., например, [315, 314]). Например, вычисление монодромии BPZ условий в квазиклассическом приближении, сведенное к фуксову уравнению второго порядка, и классические конформные блоки глубоко связаны [132, 158]. Фуксово уравнение  $\psi''(z) + T(z)\psi(z) = 0$  обладает группой монодромий, определяемой видом тензора энергии-импульса

$T(z)$ , где конформные размерности  $\Delta$  – это вычеты в полюсах второго порядка, в то время как акцессорные параметры  $c_i$  – это вычеты в простых полюсах. С другой стороны, акцессорные параметры являются градиентами классических конформных блоков  $c_i = \frac{\partial}{\partial z_i} f(z|\frac{\Delta}{c})$ . Таким образом фиксация монодромии позволяет явно вычислять классические конформные блоки.

Классические конформные блоки в НЛ приближении могут вычисляться в рамках разных подходов, например, с использованием монодромного метода [134, 135, 137, 142, 154], с помощью метода рекурсии Замолодчикова, FKW метода глобальных блоков [137, 138, 174], или АГТ комбинаторного представления [140]. Каким бы методом мы не пользовались, итоговые выражения для конформных блоков воспроизводят длину дуальной геодезической сети. Однако, по всей видимости, только монодромный метод концептуально объясняет, почему соответствие вообще имеет место. Например, акцессорный параметр монодромного метода может интерпретироваться как импульс частицы в объеме, чья мировая линия прикрепляется к конформной границе [137].<sup>59</sup> Это вполне естественно, потому что акцессорный параметр является градиентом классического конформного блока, в то время как внешний импульс это градиент оншельного действия частицы. Точное соотношение, основанное на анализе акцессорных и импульсных уравнений, дано в работе [142].

В первой половине этой главы приводится доказательство *AdS/CFT* соответствия между  $n$ -точечными классическими конформными блоками и дуальными геодезическими сетями в НЛ приближении. Будет показано, что многоточечные блоки и дуальные длины совпадают с точностью до логарифмических вкладов, связанных с конформными отображениями комплексной плоскости на цилиндр. Важно отметить, что для доказательства явный вид этих функций не важен. Вместо этого, используя монодромный метод на границе и формализм мировых линий в объеме, показывается, что два описания  $n$ -точечных конфигураций являются эквивалентными.

Во второй половине главы дается описание дуальности конформных блоков и вильсоновских сетей. Здесь мы перефразируем всю конструкцию в са-

---

<sup>59</sup>Акцессорные параметры ранее уже возникали в связи с механическими импульсами. См., например, [316], где обсуждается гамильтонова структура 2+1 гравитации в контексте т.н. гипотезы Полякова и теории Лиувилля.

мых общих терминах, что в итоге позволяет перейти к конкретным вычислениям в следующей главе. Отличие от предыдущих рассуждений состоит, во-первых, в том, что в объеме предъясняется конкретная гравитационная модель – теория Черна-Саймонса, в то время как ранее все построения были модельно-независимыми. Во-вторых, изучаемые конформные блоки являются глобальными, что соответствует предельному значению центрального заряда  $c = \infty$ , или, эквивалентно, переходу к  $sl(2)$  конформно-инвариантной  $SFT_2$ , что является дальнейшим упрощением по отношению к полной теории в квазиклассическом пределе.

Рассматриваемые сети вильсоновских линий это типичные спиновые сети Пенроуза [317, 179]. С формальной стороны, такая сеть является графом в пространстве  $AdS_3$  с некоторым числом граничных прикреплений, ребер, ассоциированных с  $sl(2, \mathbb{R})$  представлениями и вершинами, определяемыми 3-валентными интертвинерами. При фиксированной фоновой гравитационной связности вильсоновская сеть является калибровочно-инвариантным функционалом ассоциированных представлений. Для получения интерпретации в терминах конформных блоков вычисляется матричный элемент оператора вильсоновской сети между специальными граничными состояниями, реализованных векторами старшего или младшего веса в соответствующих  $sl(2, \mathbb{R})$  модулях. Мы будем рассматривать голографическое соответствие между вильсоновскими сетями и конформными блоками в случае конечномерных  $sl(2, \mathbb{R})$  модулей. Наш основной интерес – торические вильсоновские сети на термальном пространстве  $AdS_3$  и соответствующие торические конформные блоки. В этой главе описана общая конструкция, применимая на любой топологии, а конкретные вычисления торических конфигураций будут приведены в следующей главе.

## 5.1 Классические блоки и монодромия

Вычисление  $n$ -точечных классических конформных блоков посредством метода монодромии основывается на двух основных идеях. Во-первых, конформные блоки в заданном канале являются собственными функциями оператора монодромии, ассоциированного с определенным контуром в области со

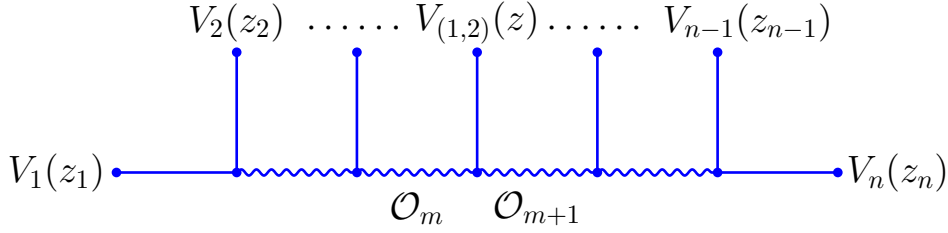


Рис. 7.  $(n + 1)$ -точечный конформный блок в частном канале, где вырожденный оператор сливается с примарным оператором  $\mathcal{O}_m$  и дает примарный оператор  $\mathcal{O}_{m+1}$  при любом  $m = 1, \dots, n - 3$ . Существуют  $2(n - 3)$  блоков такого типа, возникающих как решения условия отщепления. В пределе  $c \rightarrow \infty$  вырожденный оператор отфакторизовывается и поэтому единственно возможный итоговый блок такой, как показан на рис. 8 ниже. Три точки зафиксированы,  $z_1 = 0$ ,  $z_{n-1} = 1$ ,  $z_n = \infty$ .

вставкой оператора. Во-вторых, в пределе  $c \rightarrow \infty$  определенный вырожденный оператор квантового  $(n + 1)$ -точечного конформного блока не дает вклада, приводя к классическому  $n$ -точечному конформному блоку. Сравнение монодромных матриц вдоль определенных контуров, вычисленных до и после взятия квазиклассического предела, определяет все градиенты  $n$ -точечного классического блоков в терминах координат вставок операторов. Таким образом, задача сводится к решению дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Рассмотрим  $(n+1)$ -точечный коррелятор  $\langle V_{(1,2)}(y)V_1(z_1) \cdots V_n(z_n) \rangle$  на плоскости с одним вырожденным оператором на втором уровне размерности  $\Delta_{(1,2)}$  в точке  $y$  и  $n$  примарными операторами размерностей  $\Delta_i$  в точках  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Корреляционная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка, являющимся ВРЗ условием отщепления сингулярного вектора на втором уровне [132]. То же самое верно для конформных блоков, потому что условие отщепления определяется только алгеброй Вирасоро. Пространство решений такого уравнения двумерное, следовательно, операторы монодромии это матрицы  $2 \times 2$ . С другой стороны, любой  $(n + 1)$ -точечный конформный блок в данном канале имеет  $n$  особых точек и, следовательно, существуют  $n$  независимых монодромий.

Рассмотрим ОРЕ, ассоциированные с множеством концентрических конту-

ров вокруг общего центра  $z_1 = 0$ . Вставляя вырожденный примарный оператор  $V_{(1,2)}(y)$  между примарными операторами  $V_k(z_k)$  and  $V_{k+1}(z_{k+1})$ , мы фиксируем определенный канал, что означает, что  $y$  должен лежать на контуре, охватывающем точки вставок  $z_1, \dots, z_m$ :

$$\text{Контур } \gamma_k \text{ обходит точки } \{z_1, \dots, z_{k+1}\}, \quad k = 1, \dots, n-3. \quad (5.1)$$

Точки  $z_{k+2}, \dots, z_n$  находятся вне контура  $\gamma_k$  и, следовательно,  $\gamma_k \subset \gamma_{k+1}$ . Возникающие ОРЕ каналы показаны на рис. 7.

Замечательно, что ОРЕ привязывает монодромию решений вокруг определенных контуров к размерностям обменных операторов особенно простым способом. Для вырожденного примарного оператора, вставленного как на рис. 7 находим, что в конформном блоке доминирует вклад  $(z_m - y)^{\tilde{\Delta}_{m+1} - \Delta_{(1,2)} - \tilde{\Delta}_m}$ . Используя ОРЕ, можно видеть, что перемещение  $y$  вокруг  $z_m$  эквивалентно перемещению вокруг точек вставок тех операторов, слитых в данный обменный оператор. Таким образом, вычисляя монодромию такой степенной функции легко находим монодромию вдоль контура  $\gamma_k$  (5.1).

Действительно, воспользовавшись параметризацией Лиувилля<sup>60</sup> находим, что  $\Delta_{(1,2)} = -1/2 - 3b^2/4$ , в то время как конформные размерности обменных операторов связаны посредством правила слияния следующим образом:  $\tilde{\Delta}_{m+1} - \tilde{\Delta}_m = -b^2/4 \pm ibP_m$  [132]. Далее, монодромная матрица по контуру  $\gamma_k$  дается выражением:

$$\tilde{M}(\gamma_k) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i M_{+k}} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i M_{-k}} \end{pmatrix}, \quad M_{\pm k} = \frac{1}{2} + \frac{b^2}{2} \pm ibP_{k-1}. \quad (5.2)$$

Классические конформные блоки возникают в пределе, когда центральный заряд и конформные размерности одновременно стремятся к бесконечности. Как внешние, так и внутренние размерности  $\Delta_m$  и  $\tilde{\Delta}_n$  растут линейно с центральным зарядом  $c$  таким образом, что отношения  $\epsilon_m = 6\Delta_m/c$  и  $\tilde{\epsilon}_n = 6\tilde{\Delta}_n/c$ , называемые классическими размерностями, остаются фиксированными в  $c \rightarrow \infty$ . Квантовый конформный блок представлен как экспонента классического конформного блока [158]. Операторы с фиксированными клас-

<sup>60</sup>Делаем замену  $(\Delta, c) \rightarrow (P, b)$  согласно  $\Delta(P) = \frac{c-1}{24} + P^2$  и  $c = 1 + 6(b + b^{-1})^2$  [132]. Предел  $c \rightarrow \infty$  эквивалентен  $b \rightarrow 0$ .



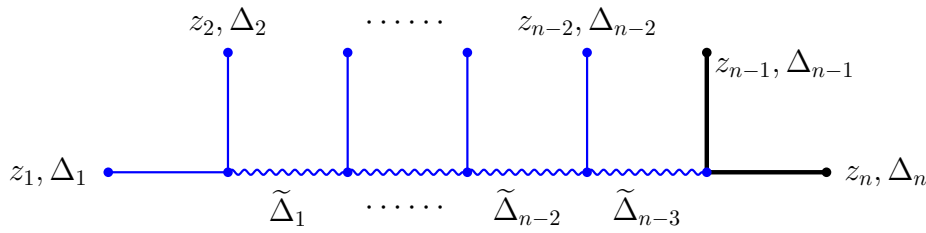


Рис. 8.  $n$ -точечный конформный блок. Две толстые черные линии изображают фоновые тяжелые операторы, тонкие голубые линии изображают примарные и обменные пертурбативные тяжелые операторы.

сическими размерностями являются тяжелыми, в то время как операторы с нулевыми классическими размерностями являются легкими.

В нашем случае  $(n + 1)$ -точечного конформного блока все операторы предполагаются тяжелыми, в то время как вырожденный оператор является легким,  $\lim_{b \rightarrow 0} \Delta_{(1,2)} = 1/2$ . Таким образом, в квазиклассическом пределе он отщепляется от остальных (тяжелых) операторов, причем прилегающие внутренние размерности стремятся друг к другу  $\lim_{b \rightarrow 0} (\tilde{\Delta}_m - \tilde{\Delta}_{m+1}) = 0$ , см. рис. 7. Предельный  $(n + 1)$ -точечный конформный блок факторизуется как

$$\mathcal{F}(y, z | \Delta_m, \tilde{\Delta}_n) \Big|_{c \rightarrow \infty} \rightarrow \psi(y|z) \exp \left[ -\frac{c}{6} f(z | \epsilon_i, \tilde{\epsilon}_j) \right], \quad (5.3)$$

где введено обозначение  $z = \{z_1, \dots, z_n\}$ , функция  $\psi(y|z)$  описывает квазиклассический вклад вырожденного оператора, экспоненциальный фактор  $f(z | \epsilon_i, \tilde{\epsilon}_j)$  – это  $n$ -точечный классический конформный блок, зависящий от внешних и внутренних классических конформных размерностей  $\epsilon_i$  и  $\tilde{\epsilon}_j$  [158] (см. также [158, 318, 134, 314, 304]). Отметим, что  $(n + 1)$ -точечные конформные блоки могут рассматриваться в разных ОРЕ каналах, возникающих при различных способах вставок вырожденного оператора между других операторов, см. рис. 7. Такое упорядочивание выделяет определенный ОРЕ канал предельного  $n$ -точечного блока (5.3), см. рис. 8.

Функция  $\psi(y|z)$  удовлетворяет фуксову уравнению, возникающему из ВРЗ

условия отщепления

$$\left[ \frac{d^2}{dy^2} + T(y|z) \right] \psi(y|z) = 0, \quad \text{где} \quad T(y|z) = \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon_i}{(y - z_i)^2} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{y - z_i}. \quad (5.4)$$

Акцессорные параметры  $c_i$  являются градиентами классического  $n$ -точечного конформного блока

$$c_i(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.5)$$

и удовлетворяют линейным соотношениям

$$\sum_{i=1}^n c_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n (c_i z_i + \epsilon_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (c_i z_i^2 + 2\epsilon_i z_i) = 0. \quad (5.6)$$

Отсюда следует, что при разложении тензора энергии–импульса около  $y = \infty$  вклады  $1/y^l$ ,  $l = 1, 2, 3$  отсутствуют, и, следовательно, вблизи бесконечности он ведет себя как  $T(y) \sim 1/y^4$ . Выбирая  $c_2, \dots, c_{n-2}$  как независимые параметры и фиксируя, соответственно,  $z_1 = 0, z_{n-1} = 1, z_n = \infty$ , получаем, что верхние соотношения решаются в виде [142, 154]

$$c_1 = - \sum_{i=2}^{n-2} [c_i(1 - z_i) - \epsilon_i] + \epsilon_1 + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \quad (5.7)$$

$$c_{n-1} = - \sum_{i=2}^{n-2} c_i z_i + \epsilon_n - \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i, \quad c_n = 0. \quad (5.8)$$

Тензор энергии–импульса  $T(y|z)$  принимает вид

$$T(y|z) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\epsilon_i}{(y - z_i)^2} + \sum_{i=2}^{n-2} c_i \frac{z_i(z_i - 1)}{y(y - z_i)(y - 1)} + \frac{\epsilon_n - \sum_{i=1}^{n-1} \epsilon_i}{y(y - 1)}. \quad (5.9)$$

Соответствующее фуксово уравнение имеет  $n$  регулярных сингулярных точек вокруг которых мы вычисляем монодромию. Продолжая решения  $\psi(y|z)$  вдоль контуров  $\gamma_k$  (5.1) на проколотой  $y$ -плоскости и сравнивая возникающие монодромные матрицы с (5.2), можем найти акцессорные параметры как функции классических конформных размерностей и точек вставок.

### 5.1.1 НЛ теория возмущений

Хотя общее решение фуксова уравнения с  $n$  особыми точками неизвестно, можно попробовать использовать теорию возмущений. Идея заключается в рассмотрении  $k$  тяжелых операторов как фоновых для оставшихся  $n - k$  тяжелых операторов. Отсюда следует, что соответствующие размерности ограничиваются как  $\epsilon_{pert}/\epsilon_{back} \ll 1$ , где  $\epsilon_{back}$  – размерности фоновых операторов,  $\epsilon_{pert}$  – размерности пертурбативных операторов. Очевидно, что самые простые случаи представлены  $k = 2$  или  $k = 3$  фоновыми операторами. Случай  $k = 1$  фонового оператора является тривиальным, потому что в силу конформной инвариантности 1-точечные функции на плоскости равны нулю. В случае  $k = 2$ , фоновые конформные размерности должны быть равны друг другу, чтобы соответствующая 2-точечная функция была отлична от нуля. Для применения теории возмущений в случае  $k \geq 4$ , необходимо знать точные решения фуксова уравнения с  $k$  особыми точками.

Следуя работам [135, 137, 142, 154], рассмотрим случай  $k = 2$  фоновых операторов (жирные черные линии на рис. 8). Пусть  $\epsilon_{n-1} = \epsilon_n \equiv \epsilon_h$  будут фоновыми тяжелыми размерностями, а  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 2$  возмущенными тяжелыми размерностями. Предполагается, что  $\epsilon_i/\epsilon_h \ll 1$ . Далее, фуксово уравнение (5.4) с тензором энергии–импульса (5.9) может быть разрешено методом возмущений. Разложим исходные функции как

$$\psi(y, z) = \psi^{(0)}(y, z) + \psi^{(1)}(y, z) + \psi^{(2)}(y, z) + \dots, \quad (5.10)$$

$$T(y, z) = T^{(0)}(y, z) + T^{(1)}(y, z) + T^{(2)}(y, z) + \dots, \quad (5.11)$$

$$c_i(z) = c_i^{(0)}(z) + c_i^{(1)}(z) + c_i^{(2)}(z) + \dots, \quad (5.12)$$

где параметры разложения это пертурбативные тяжелые размерности. Разложение аксессуарных параметров начинается с линейных по размерностям членов, поэтому  $c_i^{(0)} = 0$ . Для простоты, обозначим  $c_i^{(1)}(z) := c_i(z)$ . Классический конформный блок (5.3) раскладывается аналогично,

$$f(z) = f^{(0)}(z) + f^{(1)}(z) + f^{(2)}(z) + \dots, \quad (5.13)$$

в соответствии с разложением (5.12) и соотношением (5.5). Ведущее приближение соответствует классическому конформному блоку 2-точечной функции

фоновых операторов. Следовательно,  $f^{(0)}(z) = 0$  и первая нетривиальная поправка дается  $f^{(1)}(z)$ . По аналогии с аксессуарными параметрами первого порядка будем обозначать  $f^{(1)}(z) := f(z)$  и, таким образом, соотношение (5.5) остается неизменным.

Используя соотношения (5.10)-(5.12) находим, что пертурбативно разложенное фуксово уравнение приводит к системе неоднородных линейных уравнений  $\mathcal{D}_0\psi^{(s)}(y, z) + T^{(s)}\psi^{(s-1)}(y, z) = 0$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ , с одинаковой дифференциальной частью, задаваемой оператором  $\mathcal{D}_0 = d^2/dy^2 + T^{(0)}(y)$ . В нижнем порядке имеем

$$\mathcal{D}_0\psi^{(0)}(y, z) = 0, \quad \mathcal{D}_0\psi^{(1)}(y, z) + T^{(1)}\psi^{(0)}(y, z) = 0, \quad (5.14)$$

где компоненты тензора энергии-импульса определяются выражениями (5.9)

$$T^{(0)}(y) = \frac{\epsilon_h}{(y-1)^2}, \quad T^{(1)}(y, z) = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\epsilon_i}{(y-z_i)^2} + \sum_{i=2}^{n-2} c_i \frac{z_i(z_i-1)}{y(y-z_i)(y-1)} - \frac{\sum_{i=1}^{n-2} \epsilon_i}{y(y-1)}, \quad (5.15)$$

при соглашении, что  $z_1 = 0$ . В ведущем порядке есть две ветви решений  $\psi_{\pm}^{(0)}(y, z) = (1-y)^{(1\pm\alpha)/2}$ , где

$$\alpha = \sqrt{1-4\epsilon_h}. \quad (5.16)$$

Используя решения нулевого порядка, находим функции первого порядка

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}^{(1)}(y, z) = & \frac{1}{\alpha} \psi_{+}^{(0)}(y) \int dy \psi_{-}^{(0)}(y) T^{(1)}(y, z) \psi_{\pm}^{(0)}(y) \\ & - \frac{1}{\alpha} \psi_{-}^{(0)}(y) \int dy \psi_{+}^{(0)}(z) T^{(1)}(y, z) \psi_{\pm}^{(0)}(y). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Поправки  $\psi_{\pm}^{(1)}$  имеют точки ветвления, наследованные от  $\psi_{\pm}^{(0)}(y)$  и  $T(y, z)$ .

### 5.1.2 Вычисление монодромии

Пронесем пертурбативное решение  $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \dots$  вдоль контуров (5.1). Обход точек ветвления этого решения определяет монодромию как  $\mathbb{M}(\gamma) : \psi \rightarrow \mathbb{M}(\gamma)\psi$ , где матрица монодромии также раскладывается  $\mathbb{M} = \mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_1 + \dots$ .

В матричном виде,

$$\gamma_k : \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} M_{++}(\gamma_k) & M_{+-}(\gamma_k) \\ M_{-+}(\gamma_k) & M_{--}(\gamma_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Раскладывая решение и матрицу монодромии находим, что матрица в нулевом порядке  $\mathbb{M}_0$  определяет монодромию функции  $\psi^{(0)}(y)$  с точкой ветвления  $y = 1$ . Однако, контуры  $\gamma_k$  (5.1) не охватывают эту точку и поэтому  $\mathbb{M}_0 = \mathbb{I}$ . Отсюда следует, что пертурбативное решение, представленное в виде линейной комбинации решений нулевого порядка с интегральными коэффициентами (5.17) оказывается весьма удобной при монодромных вычислениях. Действительно, все вычисление сводится к вычислению интегралов вдоль контуров  $\gamma_k$ ,

$$I_{\pm+}^{(k)}(z) = +\frac{1}{\alpha} \int_{\gamma_k} dy \psi_-^{(0)}(y) T^{(1)}(y, z) \psi_{\pm}^{(0)}(y), \quad (5.19)$$

$$I_{\pm-}^{(k)}(z) = -\frac{1}{\alpha} \int_{\gamma_k} dy \psi_{\pm}^{(0)}(y) T^{(1)}(y, z) \psi_-^{(0)}(y). \quad (5.20)$$

Подставляя поправку тензора энергии–импульса  $T^{(1)}(y, z)$  (5.15) и используя теорему о вычетах, получаем выражения

$$I_{+-}^{(k)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \left[ \alpha \epsilon_1 + \sum_{i=2}^{n-2} (c_i(1-z_i) - \epsilon_i) - \sum_{i=2}^{k+1} (1-z_i)^\alpha (c_i(1-z_i) - \epsilon_i(1+\alpha)) \right], \quad (5.21)$$

$$I_{++}^{(k)} = \frac{2\pi i}{\alpha} \sum_{i=k+2}^{n-2} [c_i(1-z_i) - \epsilon_i], \quad I_{-+}^{(k)} = I_{+-}^{(k)}|_{\alpha \rightarrow -\alpha}, \quad I_{--}^{(k)} = I_{++}^{(k)}|_{\alpha \rightarrow -\alpha}. \quad (5.22)$$

Для заданного числа точек вставок  $n$  интегралы  $I_{++}$  и  $I_{--}$  по максимальному контуру  $\gamma_{n-3}$  всегда равны нулю,  $I_{++}^{(n-3)} = -I_{--}^{(n-3)} = 0$ . Отсюда следует, что элементы матрицы первого порядка  $\mathbb{M}_1$  являются буквально контурными интегралами,  $M_{\pm\pm}(\gamma_k) = I_{\pm\pm}^{(k)}$ . Таким образом, матрица монодромии второго порядка  $\mathbb{M} = \mathbb{M}_0 + \mathbb{M}_1$  задается выражением

$$\mathbb{M}(\gamma_k) = \begin{pmatrix} 1 + I_{++}^{(k)} & I_{+-}^{(k)} \\ I_{-+}^{(k)} & 1 + I_{--}^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Матрицы  $\mathbb{M}(\gamma_k)$  (5.23) с одной стороны, и матрицы  $\tilde{\mathbb{M}}(\gamma_k)$  (5.2) при бесконечном центральном заряде и малых пертурбативных классических размерностях с другой стороны, описывают одинаковую монодромию, ассоциированную с перемещением вырожденного оператора вдоль контуров  $\gamma_k$ . Приравнявая соответствующие собственные значения двух матриц мы приходим к системе уравнений на конформные размерности обменных операторов, точек вставок и аксессуарных параметров.

Будем рассматривать монодромию (5.2) в квазиклассическом режиме. Предельная матрица имеет вид

$$\lim_{b \rightarrow 0} \tilde{\mathbb{M}}(\gamma_k) = \begin{pmatrix} e^{2\pi i M_{-k}} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i M_{+k}} \end{pmatrix}, \quad M_{\pm k} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\tilde{\epsilon}_k}. \quad (5.24)$$

В рамках теории возмущений собственные значения матрицы (5.24) в линейном порядке по размерностям обменных операторов задаются  $\lambda_{\pm k} = 1 \pm 2\pi i \tilde{\epsilon}_k$ . В целях диагонализации матриц (5.23), рассмотрим характеристическое уравнение  $\det(\mathbb{M}(\gamma_k) - \lambda_k \mathbb{1}) = 0$ . Используя (5.22) находим, что собственные значения определяются квадратичным уравнением  $(1 - \lambda_k)^2 = I_{++}^{(k)} + I_{+-}^{(k)} I_{-+}^{(k)}$ . Приравнявая два набора собственных значений, получаем следующую систему

$$\left(I_{++}^{(k)}\right)^2 + I_{-+}^{(k)} I_{+-}^{(k)} = -4\pi^2 \tilde{\epsilon}_k^2, \quad k = 1, \dots, n-3. \quad (5.25)$$

В дальнейшем, уравнения (5.25), дополненные уравнениями (5.7), будем называть аксессуарными уравнениями. Вспоминая вид контурных интегралов (5.21)–(5.22) находим, что (5.25) является системой квадратичных уравнений с коэффициентами, зависящими от точек вставок  $z_k$  и конформных размерностей  $\alpha, \epsilon_i, \tilde{\epsilon}_j$ . Разрешая эту систему можно однозначно выразить аксессуарные параметры как функции конформных размерностей и координат вставок. Обсуждение аксессуарных уравнений и их дуальной интерпретации будет подробно продолжено в последующих разделах. Здесь только подчеркнем, что классические конформные размерности внешних и внутренних операторов в (5.25) произвольны. Однако, можно накладывать те или иные ограничения в целях применения различных аппроксимационных схем для решения аксессуарных уравнений [135, 137, 142, 174, 154, 319, 320, 321, 322].

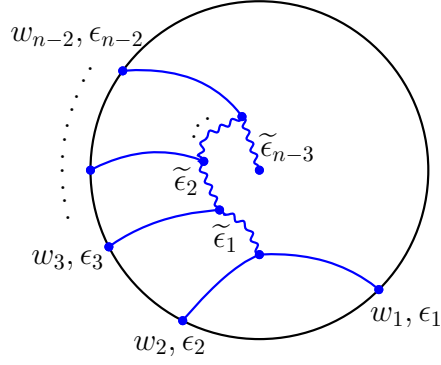


Рис. 9. Сеть геодезических линий на гиперболическом диске. Прямые и волнистые линии обозначают внешние ( $\epsilon_m$ ) и внутренние ( $\tilde{\epsilon}_k$ ) частицы, многоугольники обозначают пропущенную середину графа. Граничные точки прикрепления имеют координаты  $w_m$ ,  $m = 1, \dots, n - 2$ .

## 5.2 Дуальная геометрия

Пертурбативные конформные блоки можно реализовать в терминах массивных точечных частиц, распространяющихся в трехмерном пространстве с метрикой [135]

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 \rho} \left( dt^2 + \sin^2 \rho d\phi^2 + \frac{1}{\alpha^2} d\rho^2 \right), \quad (5.26)$$

где  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in [0, \pi/2]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$ . Это пространство содержит коническую сингулярность с угловым дефицитом  $2\pi(1 - \alpha)$ , где  $\alpha \in (0, 1]$ . Метрика (5.26) описывает пространство постоянной отрицательной кривизны с топологией  $\mathbb{R} \times \mathcal{C}_2$ . Конформная граница расположена при  $\rho \rightarrow \pi/2$  и является евклидовым цилиндром с локальными координатами  $t$  и  $\phi$ .

Двумерные сечения при  $\phi = const$  и  $t = const$  также являются пространствами постоянной отрицательной кривизны, отождествляемые с гиперболической плоскостью с проколами, которые соответствуют исходной конической сингулярности, спроецированной в два измерения. Присутствие конической сингулярности нарушает глобальную  $AdS_3$  изометрию ( $\alpha = 1$ ) до абелевой изометрии  $\mathbb{R} \oplus o(2)$ , порожденную двумя векторами Киллинга  $\partial_t$  и  $\partial_\phi$ . На конформной границе данная абелева изометрия расширяется до полной алгебры Вирасоро.

Массивная частица на пространстве с угловым дефицитом (5.26) описывается действием  $S = \epsilon \int d\lambda \sqrt{g_{tt}\dot{t}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + g_{\rho\rho}\dot{\rho}^2}$ , где  $\epsilon$  – классическая конформная размерность отождествляемая с массой, метрические коэффициенты считываются из (5.26),  $\lambda$  – эволюционный параметр, а точка обозначает дифференцирование по  $\lambda$ , см. Приложение Д.1.

Абелева изометрия гарантирует, что координаты  $\phi$  и  $t$  цикличны, т.е.  $\delta S/\delta\phi \equiv 0$  и  $\delta S/\delta t \equiv 0$ . Отсюда следует, что исходная механика может быть сведена к более простой системе, описываемой функцией Рауса, что означает частичное преобразование Лежандра по отношению к скоростям  $\dot{\phi}$  и  $\dot{t}$ . Накладывая связь  $\dot{t} = 0$ , получаем действие Рауса, описывающее массивную частицу на гиперболическом диске с проколами,

$$S = \int d\lambda L, \quad L = \epsilon \sqrt{\alpha^2 \tan^2 \rho \dot{\phi}^2 + \sec^2 \rho \dot{\rho}^2}. \quad (5.27)$$

Остаточная изометрия задается алгеброй  $sl(2, \mathbb{R})$  при  $\alpha = 1$  и  $o(2)$  при  $\alpha \neq 1$ .

Рассмотрим теперь на пространстве с конической сингулярностью несколько массивных частиц. Они взаимодействуют друг с другом, образуя кубические вершины из мировых линий. Конечно, также возможны другие типы вершин, включая четвертичную и старших порядков. Однако, соответствие блок/длина выделяет только кубические вершины. Имеется  $2n - 5$  частиц, соответствующих полному числу внешних/внутренних линий дуальных диаграмме  $n$ -точечного конформного блока рис. 8. Внешние  $n - 2$  линии прикреплены к границе в фиксированных точках  $w = (w_1, \dots, w_{n-2})$ , где  $w = \phi + it$ . Внутренние  $n - 3$  линий протянуты между вершинами за исключением радиальной линии, кончающейся в центре диска. Получающаяся геодезическая сеть на гиперболическом диске показана на рис. 9 [140]. Она может быть получена вставкой диаграммы конформного блока на рис. 8 на диск таким образом, что две линии фоновых операторов стягиваются в точку, совмещенную с центром диска, а точки вставок примарных операторов располагаются на граничной окружности.<sup>61</sup>

Геодезические на гиперболическом срезе постоянного времени (5.27) наиболее просто описываются с помощью модели диска Пуанкаре. В этом случае,

<sup>61</sup>Геодезическая сеть на рис. 9 может быть получена из геодезической диаграммы Виттена [141, 323].



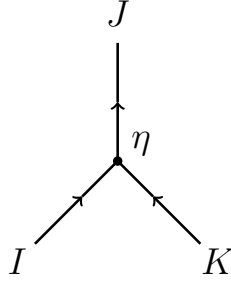


Рис. 10. Кубическая вершина на гиперболическом диске. Входящие ( $I$ ,  $K$ ) и исходящие ( $J$ ) импульсы ограничены условием равновесия. Радиальное положение вершинной точки параметризовано  $\eta = \cot^2 \rho$ , где  $\rho$  — радиальное расстояние от центра.

они являются сегментами окружностей, перпендикулярных границе, включая окружности бесконечного радиуса (радиальная линия на рис. 9). Длины геодезических известны явно как функции концов см., например, формулу (Д.4).

### 5.2.1 Кубические вершины и неравенства треугольника

Любая вершина геодезической сети связывает три внешних/внутренних линии, см. рис. 6.61. В рамках формализма мировых линий вершинное действие трех разных линий имеет вид

$$S_\star = \epsilon_I \int_{\circ_I}^\bullet d\lambda L_I + \epsilon_J \int_{\circ_J}^\bullet d\lambda L_J + \epsilon_K \int_{\circ_K}^\bullet d\lambda L_K, \quad I \neq J \neq K, \quad (5.28)$$

где каждый член является действием на гиперболическом диске (5.27) с вершинной точкой  $\bullet$  и внешними концами  $\circ_A$ , где  $A = I, J, K$ . Принцип наименьшего действия гарантирует, что геодезические сегменты удовлетворяют условиям равновесия в вершинной точке,

$$P^{(I)} + P^{(J)} + P^{(K)} = 0, \quad (5.29)$$

где  $P_m^{(A)} = \partial L_A / \partial \dot{X}_{(A)}^m$  — канонические импульсы трех частиц с координатами  $X_{(A)}^m$ , где  $m = \rho, \phi$  and  $A = I, J, K$ .

Условие равновесия параметризуется классическими конформными раз-

мерностями  $\epsilon_A$  и угловыми параметрами

$$s_A = \frac{|P_\phi^{(A)}|}{\alpha}. \quad (5.30)$$

Параметр  $s_A$  – постоянная интегрирования, описывающая вид частного геодезического сегмента (см. Приложение Д.1). Т.к.  $P_\phi^{(A)} = \pm \alpha s_A$ , где общий знак зависит от направления движения, находим, что радиальная и угловая проекции условия (5.29) имеют вид

$$\epsilon_I \sqrt{1 - s_I^2 \eta} - \epsilon_J \sqrt{1 - s_J^2 \eta} + \epsilon_K \sqrt{1 - s_K^2 \eta} = 0, \quad (5.31)$$

$$\epsilon_I s_I + \epsilon_J s_J - \epsilon_K s_K = 0, \quad (5.32)$$

где радиальные скорости выражены через положения вершинной точки согласно (Д.3).

С помощью линейного соотношения (5.32), уравнение с радикалами (5.31) явно решается следующим образом

$$\eta = \frac{1 - \sigma_{IJ}^2}{s_I^2 + s_J^2 - 2\sigma_{IJ} s_I s_J}, \quad \text{где} \quad \sigma_{IJ} = \frac{\epsilon_I^2 + \epsilon_J^2 - \epsilon_K^2}{2\epsilon_I \epsilon_J}. \quad (5.33)$$

Замечательно, что других корней нет. Действительно, уравнение с радикалами (5.31) решается выделением одного из радикалов с одной стороны, после чего обе стороны уравнения квадратируются. Возникающее уравнение линейно по  $\eta$ . Например, представление (5.33) получается выделением первого радикала в (5.31). Другие эквивалентные выражения для положения вершинной точки получаются выделением второго и третьего радикалов,

$$\eta = \frac{1 - \sigma_{IK}^2}{s_I^2 + s_K^2 - 2\sigma_{IK} s_I s_K}, \quad \text{где} \quad \sigma_{IK} = \frac{\epsilon_I^2 + \epsilon_K^2 - \epsilon_J^2}{2\epsilon_I \epsilon_K}, \quad (5.34)$$

$$\eta = \frac{1 - \sigma_{JK}^2}{s_J^2 + s_K^2 + 2\sigma_{JK} s_J s_K}, \quad \text{где} \quad \sigma_{JK} = \frac{\epsilon_J^2 + \epsilon_K^2 - \epsilon_I^2}{2\epsilon_J \epsilon_K}. \quad (5.35)$$

Отметим, что уравнения (5.31) и (5.32) являются линейными комбинациями однотипных членов, но с разными знаками. Именно поэтому  $\sigma_{JK}$  в (5.35) имеет другой знак.

Радикалы в уравнении (5.31) накладывают ограничения на радиальное положение вершинной точки

$$0 \leq \eta \leq 1/s_A^2, \quad A = I, J, K. \quad (5.36)$$

Область  $\eta < 0$  является нефизической и соответствует чисто мнимым значениям радиального положения вершины. Рассматривая область  $\eta \geq 0$  обнаруживаем, что классические конформные размерности удовлетворяют неравенствам треугольника.<sup>62</sup>

**Утверждение 5.1.** *Условие вещественности  $\eta \geq 0$  выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} \epsilon_I + \epsilon_J &\geq \epsilon_K, \\ \epsilon_I + \epsilon_K &\geq \epsilon_J, \\ \epsilon_J + \epsilon_K &\geq \epsilon_I. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Для доказательства введем классический фьюжн-полином [140]

$$\Pi_{IJK} = (\epsilon_I + \epsilon_J + \epsilon_K)(-\epsilon_I + \epsilon_J + \epsilon_K)(\epsilon_I - \epsilon_J + \epsilon_K)(\epsilon_I + \epsilon_J - \epsilon_K). \quad (5.38)$$

Данный полином обладает двумя основными свойствами<sup>63</sup>

$$\Pi_{IJK} = \Pi_{IKJ} = \Pi_{JKI}, \quad (5.39)$$

и

$$\Pi_{IJK} = 4\epsilon_I^2\epsilon_J^2(1 - \sigma_{IJ}^2), \quad \Pi_{IKJ} = 4\epsilon_I^2\epsilon_K^2(1 - \sigma_{IK}^2), \quad \Pi_{JKI} = 4\epsilon_J^2\epsilon_K^2(1 - \sigma_{JK}^2), \quad (5.40)$$

где сигмы определяются выражениями (5.33)–(5.35). Также введем

$$\begin{aligned} s_{IJ} &= s_I^2 + s_J^2 - 2\sigma_{IJ}s_Is_J, \\ s_{IK} &= s_I^2 + s_K^2 - 2\sigma_{IK}s_Is_K, \\ s_{JK} &= s_J^2 + s_K^2 + 2\sigma_{JK}s_Js_K. \end{aligned} \quad (5.41)$$

<sup>62</sup>Неравенства треугольника (5.37) также выполнены для вершины двух фоновых тяжелых операторов размерности  $\epsilon_h \equiv \epsilon_{n-1} = \epsilon_n$  и пертурбативного тяжелого обменного оператора размерности  $\tilde{\epsilon}_{n-3}$ . В этом случае,  $2\epsilon_h \gg \tilde{\epsilon}_{n-3}$  и  $\tilde{\epsilon}_{n-3} \geq 0$ .

<sup>63</sup>Отметим, что классический фьюжн-полином это функция Герона, определяющая площадь треугольника  $\text{Area}_\Delta(\epsilon_I, \epsilon_J, \epsilon_K) = \frac{1}{4}\sqrt{\Pi(\epsilon_I, \epsilon_J, \epsilon_K)}$  в пространстве конформных размерностей.

Тогда положения вершин (5.33), (5.34), (5.35) задаются функциями

$$\eta = \left( \frac{1}{2\epsilon_I\epsilon_J} \right)^2 \frac{\Pi_{IJK}}{s_{IJ}}, \quad \eta = \left( \frac{1}{2\epsilon_I\epsilon_K} \right)^2 \frac{\Pi_{IKJ}}{s_{IK}}, \quad \eta = \left( \frac{1}{2\epsilon_J\epsilon_K} \right)^2 \frac{\Pi_{JKI}}{s_{JK}}. \quad (5.42)$$

Предположим далее, что  $\epsilon_I + \epsilon_J < \epsilon_K$ . Квадрируя это неравенство и используя (5.40) находим, что  $\sigma_{IJ} < -1$  и  $\Pi_{IJK} < 0$ . С другой стороны, угловые импульсы неотрицательны,  $s_{I,J,K} \geq 0$ , поэтому если  $\sigma_{IJ} < -1$ , то  $s_{IJ} \geq 0$ . Подставляя для  $\eta$  первое выражение в (5.42) заключаем, что  $\eta < 0$ . Отсюда следует, что  $\epsilon_I + \epsilon_J \geq \epsilon_K$  является необходимым условием вещественности положений вершин. Второе неравенство треугольника доказывается аналогичным образом. Предположим, что  $\epsilon_I + \epsilon_K < \epsilon_J$ . Подставляя для  $\eta$  второе выражение в (5.42) заключаем, что  $\eta \geq 0$ , если выполнено  $\epsilon_I + \epsilon_K \geq \epsilon_J$ .

Далее, предположим, что  $\epsilon_J + \epsilon_K < \epsilon_I$ . В этом случае, удобно представить  $\eta$  третьим выражением в (5.42), где  $\sigma_{JK}$  в  $s_{JK}$  имеет противоположный знак по сравнению с  $s_{IJ}$  и  $s_{IK}$ , ср. (5.41). Подставляя два других доказанных треугольных неравенства  $\epsilon_I + \epsilon_J \geq \epsilon_K$  and  $\epsilon_I + \epsilon_K \geq \epsilon_J$  в  $\Pi_{JKI}$  находим, что  $\Pi_{JKI} \geq 0$ . С другой стороны, квадрируя  $\epsilon_J + \epsilon_K \geq \epsilon_I$  получаем  $\sigma_{JK} > 1$ , откуда следует  $s_{JK} \geq 0$ . В заключение отметим, что наличие треугольных неравенств (5.37) является необходимым условием для  $\eta \geq 0$ .

Из неравенств (5.37) следует, что сигмы (5.33)–(5.35) можно параметризовать как косинусы  $\sigma_{AB} = \cos \gamma_{AB}$ , где  $\gamma_{AB}$  – угол между  $\epsilon_A$  и  $\epsilon_B$  сторонами треугольника (5.37) в пространстве конформных размерностей. Вводя согласно (5.41) величины  $s_{AB}^2 = s_A^2 + s_B^2 \pm 2\sigma_{AB}s_A s_B$ , положение вершинной точки (5.33)–(5.35) можно задать как

$$\eta = \left[ \frac{\sin \gamma_{IJ}}{s_{IJ}} \right]^2 = \left[ \frac{\sin \gamma_{IK}}{s_{IK}} \right]^2 = \left[ \frac{\sin \gamma_{JK}}{s_{JK}} \right]^2. \quad (5.43)$$

В таком виде оно напоминает закон синусов в тригонометрии. Тем не менее, в отличие от конформных размерностей, угловые параметры  $s_I, s_J, s_K$  не образуют треугольник, потому что в целом  $s_{AB} \neq s_C$ . Было бы интересно понять роль отношения  $(\sin \gamma)/s$  как инварианта геометрии кубических вершин на гиперболическом пространстве. Пока же просто упомянем, что неравенства треугольника (5.37) аналогичны неравенствам треугольника для конформных размерностей примарных операторов в квазиклассическом пре-

деле 3-точечной функции DOZZ [324]. Отметим, что неравенства треугольника в теории Лиувилля дополняются пределом Зайберга [325] и ограничением Гаусса-Бонне [324]. Все вместе они гарантируют вещественность решения уравнения Лиувилля.

## 5.2.2 Дуальные геодезические сети

Склеивая вместе  $n - 3$  вершины  $\eta_1, \dots, \eta_{n-3}$  с концевыми точками, прикрепленными к  $n - 2$  граничным точкам  $w = (w_1, \dots, w_{n-2})$  и центру диска, получаем сеть на рис. 9. На этой стадии все сегменты сети естественным образом поделены на внешние и внутренние. В дальнейшем будем использовать конденсированный индекс  $A = 1, \dots, 2n - 5$ :

$$\{A\} = \{i, \tilde{j}\} : \quad i = 1, \dots, n - 2, \quad \tilde{j} = 1, \dots, n - 3, \quad (5.44)$$

для нумерации  $n - 2$  внешних и  $n - 3$  внутренних сегментов. Полное действие задается суммой  $n - 3$  вершинных действий (5.28), т.е.  $S = \sum_{m=1}^{n-3} S_\star^{(m)}$ , где концевые точки связаны таким образом, чтобы образовать сеть на рис. 9. Итоговое действие имеет вид

$$S = \sum_{A=1}^{2n-5} \epsilon_A \int_{\circ_A}^{\bullet_A} d\lambda L_A, \quad (5.45)$$

где лагранжиан  $L_A$  описывает  $A$ -й геодезический внешний/внутренний сегмент с концевыми точками  $\circ_A$  и  $\bullet_A$ , определяемыми видом сети. Любая вершина  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 3$  соединяет линии с номерами  $I = i + 1$ ,  $J = \tilde{i}$ ,  $K = \widetilde{i - 1}$ , где, для удобства, мы приравняли  $\tilde{0} = 1$ .

Для заданного стационарного действия  $S$  находим условия равновесия (5.29) в каждой вершинной точке

$$P_{(i+1)} + P_{(\tilde{i})} + P_{(\widetilde{i-1})} = 0, \quad i = 1, \dots, n - 3, \quad (5.46)$$

и вытекающие импульсы во всех точках прикрепления на границе и в центре диска,

$$P_{(A)} = \frac{\partial S}{\partial X_{(A)}}, \quad A = 1, \dots, n - 3, \widetilde{n - 3}, \quad (5.47)$$

где последнее равенство считается слабым, т.е. действие  $S$  вычислено на массовой поверхности.

Все точки прикрепления имеют предельные радиальные положения:  $\rho = \pi/2$  для граничных точек и  $\rho = 0$  для центра диска. Отсюда следует, что радиальные компоненты (5.47) тривиализуются, потому что соответствующие члены не дают вклада в вариацию  $\delta S$ . Действие на массовой поверхности зависит от углов граничных точек прикрепления и центра диска,  $S = S(w, \phi_o)$ . Используя (5.30) неравные нулю компоненты (5.47) можно представить как угловые градиенты действия на массовой поверхности

$$s_i = \frac{1}{\alpha \epsilon_i} \frac{\partial S}{\partial w_i}, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad (5.48)$$

$$\tilde{s}_{n-3} = \frac{1}{\alpha \epsilon_i} \frac{\partial S}{\partial \phi_o}. \quad (5.49)$$

Угловая координата центра  $\phi_o$  не определена и поэтому производная в (5.49) равна нулю, в силу чего имеем

$$\tilde{s}_{n-3} = 0. \quad (5.50)$$

Отсюда следует, что соответствующая мировая линия радиальна. Вспоминая, что в центре диска расположена коническая сингулярность мы приходим к выводу, что радиальное падение внешних частиц в центр вполне естественно.

Угловые компоненты условий равновесия (5.46) можно явно записать в виде

$$\epsilon_i s_i + \tilde{\epsilon}_{i-1} \tilde{s}_{i-1} - \tilde{\epsilon}_{i-2} \tilde{s}_{i-2} = 0, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (5.51)$$

Решение соотношений (5.51) может быть представлено в виде

$$\tilde{\epsilon}_k \tilde{s}_k = \epsilon_1 s_1 - \sum_{i=2}^{k+1} \epsilon_i s_i, \quad k = 1, \dots, n-3. \quad (5.52)$$

Тем самым, все внутренние импульсы выражаются через внешние. Фиксируя  $k = n-3$ , находим, что полный вытекающий угловой параметр равен нулю. Действительно, в этом случае правая часть (5.52) – это сумма вытекающих параметров в граничных точках прикрепления, а левая часть – это вытекающий параметр в центре диска (5.50). В итоге, все внешние параметры линейно

зависимы,

$$-\epsilon_1 s_1 + \sum_{i=2}^{n-2} \epsilon_i s_i = 0. \quad (5.53)$$

Фиксируя  $I = \widetilde{k-2}$ ,  $J = \widetilde{k-1}$ ,  $K = k$  находим, что радиальные компоненты условий равновесия (5.46) можно явно записать в виде

$$\tilde{\epsilon}_{k-1} \sqrt{1 - \tilde{s}_{k-1}^2 \eta_{k-1}} - \tilde{\epsilon}_{k-2} \sqrt{1 - \tilde{s}_{k-2}^2 \eta_{k-1}} + \epsilon_k \sqrt{1 - \tilde{s}_k^2 \eta_{k-1}} = 0. \quad (5.54)$$

Положения вершин  $\eta_{k-1}$  напрямую следуют из общей формулы (5.33),

$$\eta_{k-1} = \frac{1 - \sigma_k^2}{s_k^2 + \tilde{s}_{k-2}^2 - 2\sigma_k s_k \tilde{s}_{k-2}}, \quad \sigma_k = \frac{\epsilon_k^2 + \tilde{\epsilon}_{k-2}^2 - \tilde{\epsilon}_{k-1}^2}{2\epsilon_k \tilde{\epsilon}_{k-2}}, \quad (5.55)$$

где  $k = 2, \dots, n-2$ . Эквивалентные представления для  $\eta_{k-1}$  можно получить при помощи соотношений (5.34) и (5.35).

Теперь рассмотрим угловые положения концевых точек, определяющие пределы интегрирования в функционале действия (5.45). Пусть  $\psi_i$  обозначают углы вершин  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, n-3$ , а  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, n-2$  обозначают углы граничных точек прикрепления, см. рис. 11. Как правило, внутренние линии соединяют две соседних вершины, а внешние линии соединяют вершины и граничные точки. С помощью рис. 11 находим угловой растров  $i$ -го внешнего сегмента

$$\Delta\phi_i = w_i - \psi_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n-2, \quad (5.56)$$

а также угловой растров  $i$ -го внутреннего сегмента

$$\Delta\tilde{\phi}_i = \psi_{i+1} - \psi_i, \quad i = 1, \dots, n-4. \quad (5.57)$$

Самая крайняя правая и самая крайняя левая части геодезической сети на рис. 9 отличаются от общего положения на рис. 11. Поэтому, отождествим  $w_1 = \psi_0$  и, следовательно,  $\Delta\tilde{\phi}_0 = (\psi_1 - \psi_0)$  – это угловой растров первой внешней линии. Также,  $\Delta\tilde{\phi}_{n-3} = 0$ , потому что крайняя внутренняя линия радиальна. С помощью рис. 11 находим, что угловые положения удовлетворяют уравнению баланса

$$(w_k - w_{k-1}) + \Delta\phi_{k-1} = \Delta\phi_k + \Delta\tilde{\phi}_{k-2}, \quad k = 2, \dots, n-2. \quad (5.58)$$





$k = 2, \dots, n - 2$ . Левая часть (5.60) унимодулярна, так что соответствующие вещественная и мнимая части не являются независимыми. Таким образом, комплексные уравнения (5.60) эквивалентны исходным вещественным уравнениям (5.58).<sup>64</sup>

Уравнение углового баланса (5.60) слишком сложно по причине присутствия радикалов, зависящих от радиальных положений вершин, которые, в свою очередь, нетривиально зависят от угловых параметров (5.55). Корни такой системы неизвестны, кроме простейшего частного случая  $n = 4$  [135, 137], в котором решение может быть найдено точно, и случая  $n = 5$  [140, 142], в котором доступны некоторые пертурбативные решения.<sup>65</sup> В следующем разделе показано, что уравнения, описывающие дуальную геодезическую сеть (5.51), (5.55), (5.60) имеют корни, совпадающие с акцессорными уравнениями монодромного метода (5.7), (5.25).

### 5.3 $AdS_3/CFT_2$ соответствие длина/блок

Дуальность этого типа наиболее очевидна в случае 2-точечной корреляционной функции тяжелых фоновых операторов. Два оператора в точках  $z = 1$  и  $z = \infty$  создают асимптотически  $AdS_3$  геометрию (5.26) в объеме с цилиндрической конформной границей. Угловой дефицит  $\alpha$  в метрике (5.26) связан с размерностью фонового оператора соотношением (Г.35). Его можно объяснить использованием трехмерной метрики асимптотически  $AdS_3$  пространства в форме Баньядоса [326], куда входит фоновое значение тензора энергии-импульса  $T^{(0)}(z)$  (5.15) (см. [136, 138]). Отметим, что исходная  $CFT_2$  определена на сфере, которая есть компактифицированная плоскость. Однако, делая два прокола на сфере, мы получаем обратно плоскость с одним проколом, которую можно конформно отобразить на цилиндр. Противоположные концы получившегося бесконечного цилиндра соответствуют вставкам фоновых операторов.<sup>66</sup>

<sup>64</sup>Существует другое (эквивалентное, но громоздкое) представление угловых уравнений, см. [140].

<sup>65</sup>Приблизительные решения в других ОРЕ каналах также рассматривались в работах [135, 154].

<sup>66</sup>Данное топологическое рассуждение можно провести строго в рамках теории Лиувилля с тяжелыми операторными вставками, см., например, [327].

Обозначим  $(z, \bar{z})$  координаты на комплексной плоскости и  $(w, \bar{w})$  координаты на граничном цилиндре. Определим конформное отображение

$$w = i \ln(1 - z) . \quad (5.63)$$

В нашем случае, граничные точки прикрепления  $w_i$  расположены на окружности, получаемой сечением граничного цилиндра, см. рис. 9. Отсюда следует, что точки вставок  $z_i$  лежат на окружности единичного радиуса

$$(z_i - 1)(\bar{z}_i - 1) = 1 , \quad i = 1, \dots, n - 2 . \quad (5.64)$$

В частности, фиксированная глобальной конформной  $sl(2, \mathbb{C})$  изометрией плоскости точка  $z_1 = 0$  отображается в точку  $w_1 = 0$ , фиксированную  $o(2)$  изометрией граничной окружности.

Суть дальнейшего рассмотрения состоит в том, что дуальность типа длина/блок можно показать не имея в распоряжении явных выражений функций геодезических длин и конформных блоков. Ранее мы видели, что классические конформные блоки и геодезические длины определены посредством вспомогательных параметров, подчиненных системе алгебраических уравнений. Естественно задаться вопросом – когда две системы уравнений эквивалентны друг другу при условии, что блок и длина связаны конформным преобразованием (5.63)? Оказывается, что возможная эквивалентность имеет место в слабом смысле – требуется, чтобы две системы, в целом разные, имели общие корни. В данном разделе мы изучаем такую эквивалентность в  $n$ -точечном случае.

Соответствие между  $CFT_2$  с двумя фоновыми операторами в пределе большого центрального заряда и дуальными геодезическими сетями на пространстве с угловым дефицитом требует, чтобы  $n$ -точечный пертурбативный классический блок (5.3) и действие на массовой поверхности для дуального графа (5.45) были связаны между собой следующим образом

$$f(z) = S(w) + i \sum_{k=1}^{n-2} \epsilon_k w_k . \quad (5.65)$$

Здесь, последний член обусловлен конформным преобразованием (5.63)  $n - 2$  пертурбативных тяжелых операторов. Действительно, в результате конформ-

ного преобразования соответствующая корреляционная функция обзаводится факторами  $(dw/dz)^{-\epsilon_i}$  в точках вставок, после чего экспоненцирование в пределе больших параметров дает классический блок (5.3).

**Утверждение 5.2.** *При конформном отображении (5.63) и соотношении (5.65) акцессорные и угловые параметры связаны как*

$$c_k = \epsilon_k \frac{1 \pm i\alpha s_k}{1 - z_k}, \quad k = 1, \dots, n - 2, \quad (5.66)$$

где используется соглашение, что « $-$ » при  $k = 1$  и « $+$ » при  $k \neq 1$ .

Для доказательства напомним, что акцессорные параметры пертурбативных тяжелых операторов и угловые параметры соответствующих внешних линий определены как градиенты, т.е.

$$c_k = \frac{\partial f}{\partial z_k}, \quad s_k = \frac{1}{\alpha \epsilon_k} \frac{\partial S}{\partial w_k}, \quad k = 1, \dots, n - 2, \quad (5.67)$$

ср. (5.5) и (5.48). Тогда соотношение (5.66) непосредственно следует из конформного преобразования (5.63), примененного к выражениям (5.67), дополненными заменой (5.65).

Для завершения доказательства дуальности типа длина/блок следует показать, что системы алгебраических уравнений на акцессорные и угловые параметры имеют общие корни. С этой целью, мы найдем одинаковые структуры на обеих сторонах дуальности и частично решим уравнения в объеме, чтобы показать, что возникающие остаточные уравнения полностью совпадают с уравнениями на границе.

### 5.3.1 Слабая эквивалентность

На формальном уровне проблема выглядит следующим образом. Рассмотрим потенциальное векторное поле

$$A_i(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n - 2, \quad (5.68)$$

на многообразии с  $n - 2$  локальными переменными  $x^i$  и потенциалом  $U(x)$ . Пусть компоненты вектора  $A_i$  подчинены алгебраическим уравнениям, неявно

задаваемыми выражениями

$$C_\alpha^{(N)}(A, B) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad (5.69)$$

где  $B_k$  – некоторые вспомогательные переменные,  $k = 1, \dots, N - (n - 2)$ . Коэффициенты в (5.69) могут явно зависеть от координат  $x$  и каких-нибудь дополнительных параметров. Будем предполагать, что алгебраическая система (5.69) невырождена и поэтому вспомогательные переменные можно полностью выразить в терминах компонент векторного поля,  $B = B(A)$ .

Рассмотрим две потенциальные векторные системы, определенные двумя разными наборами

$$\{x, U(x), A(x), B(x), C^{(N)}\}, \quad (5.70)$$

$$\{y, \tilde{U}(y), \tilde{A}(y), \tilde{B}(y), \tilde{C}^{(\tilde{N})}\}. \quad (5.71)$$

**Определение 5.1.** *Две системы (5.70), (5.71) называются слабо эквивалентными, если неявные соотношения ( $\alpha = 1, \dots, N$  и  $\tilde{\beta} = 1, \dots, \tilde{N}$ )*

$$C_\alpha(A, B) = 0, \quad C_{\tilde{\beta}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0, \quad (5.72)$$

*имеют не менее одного общего корня  $\{A_i^0(x)\} \rightarrow \{\tilde{A}_i^0(y)\}$  при отображениях*

$$x \rightarrow y, \quad U(x) \rightarrow \tilde{U}(y). \quad (5.73)$$

В нашем случае, граничная система не имеет переменных В-типа, которые характерны для системы в объеме. Это достаточно общая ситуация в контексте *AdS/CFT* соответствия в целом, в том смысле, что не все переменные в объеме являются фундаментальными. Интегрируя по степеням свободы, отождествляемым здесь с переменными В-типа, мы остаемся с переменными А-типа, которые являются фундаментальными граничными переменными.

### 5.3.2 Акцессорные и импульсные уравнения

Фиксируя  $\epsilon_{n-1} = \epsilon_n$ , соберем вместе акцессорные уравнения (5.7) и (5.25),

$$c_1 = - \sum_{i=2}^{n-2} [c_i(1 - z_i) - \epsilon_i] + \epsilon_1, \quad (5.74)$$

$$(I_{++}^{(k)})^2 + I_{-+}^{(k)} I_{+-}^{(k)} = 4\pi^2 \tilde{\epsilon}_k^2, \quad k = 1, \dots, n-3, \quad (5.75)$$

где независимыми переменными являются  $c_1, \dots, c_{n-2}$ , величины  $I_{\pm\pm}^{(k)}$  задаются выражениями (5.21), (5.22). В совокупности, имеется  $(n-2)$  уравнений на  $(n-2)$  переменных.

С учетом конформного отображения (5.63), введем следующее обозначение

$$A_p = a_p(1 + is_p), \quad \bar{A}_p = \bar{a}_p(1 - is_p), \quad \text{где } a_p = (1 - z_p)^\alpha. \quad (5.76)$$

Точки вставок лежат на единичной окружности (5.64), так что  $\bar{a}_p = 1/a_p$ . Более того, в целях упрощения акцессорных уравнений восстановим внутренние угловые импульсы в терминах внешних импульсов (5.52). В итоге, акцессорные уравнения можно переписать через внешние и внутренние импульсы.

**Утверждение 5.3.** *Акцессорные уравнения (5.74) и (5.75) эквивалентным образом переписываются в терминах угловых параметров в виде*

$$\epsilon_1 s_1 - \sum_{i=2}^{n-2} \epsilon_i s_i = 0, \quad (5.77)$$

$$\text{Re} \left[ 2\pi i \bar{A}_{k+1} I_{+-}^{(k-1)} \right] = 4\pi^2 \tilde{\epsilon}_{k-1} (s_{k+1} \tilde{s}_{k-1} + \sigma_{k+1}), \quad (5.78)$$

где  $k = 1, \dots, n-3$ , и

$$I_{+-}^{(k-1)} = 2\pi i \left( \epsilon_1 \bar{A}_1 + \sum_{p=2}^k \epsilon_p A_p \right), \quad (5.79)$$

где  $\sigma_k$  (5.55),  $\tilde{s}_k$  (5.52).

Для доказательства напомним, что размерности тяжелых фоновых полей равны,  $\epsilon_{n-1} = \epsilon_n$ . Тогда линейное соотношение (5.7) принимает вид

$$c_1 - \epsilon_1 = - \sum_{i=2}^{n-2} [c_i(1 - z_i) - \epsilon_i]. \quad (5.80)$$

С учетом соотношения дуальности (5.66) оно преобразуется в линейное соотношение между внешними угловыми параметрами (5.53),

$$\epsilon_1 s_1 - \sum_{i=2}^{n-2} \epsilon_i s_i = 0. \quad (5.81)$$

Далее, с помощью (5.66) контурные интегралы (5.21)–(5.22) можно выразить в терминах внешних угловых параметров  $s_k$ ,  $k = 1, \dots, n - 3$ . Вводя обозначения (5.76) находим, что контурные интегралы задаются выражениями

$$I_{+-}^{(k)} = 2\pi i \left[ \epsilon_1 \bar{A}_1 + \sum_{p=2}^{k+1} \epsilon_p A_p \right] \equiv I_{+-}^{(k-1)} + 2\pi i \epsilon_{k+1} A_{k+1}, \quad (5.82)$$

$$I_{-+}^{(k)} = 2\pi i \left[ \epsilon_1 A_1 + \sum_{p=2}^{k+1} \epsilon_p \bar{A}_p \right] \equiv I_{-+}^{(k-1)} + 2\pi i \epsilon_{k+1} \bar{A}_{k+1}, \quad (5.83)$$

$$I_{++}^{(k)} = 2\pi \left[ -\epsilon_1 s_1 + \sum_{p=2}^{k+1} \epsilon_p s_p \right] \equiv I_{++}^{(k-1)} + 2\pi i \epsilon_{k+1} s_{k+1}, \quad (5.84)$$

где используется соглашение, что  $I_{+-}^{(0)} \equiv 2\pi i \epsilon_1 \bar{A}_1$  и  $I_{++}^{(0)} \equiv -2\pi \epsilon_1 s_1$ . В частности, в качестве проверки на совместность находим из (5.53) что  $I_{++}^{(n-3)} = 0$ , см. комментарии после формулы (5.22).

Акцессорные уравнения (5.74) теперь представимы в виде

$$\left( -\epsilon_1 s_1 + \sum_{p=2}^{k+1} \epsilon_p s_p \right)^2 - \left( \epsilon_1 \bar{A}_1 + \sum_{p=2}^{k+1} \epsilon_p A_p \right) \left( \epsilon_1 A_1 + \sum_{p=2}^{k+1} \epsilon_p \bar{A}_p \right) + \tilde{\epsilon}_k^2 = 0, \quad (5.85)$$

где  $k = 1, 2, \dots, n - 3$ . Уравнения (5.85) при  $k$  и  $k - 1$  связаны следующим образом. Подставляем равенства в правой части соотношений (5.82)–(5.84) в (5.85) и находим

$$4\pi s_{k+1} I_{++}^{(k-1)} + 2\pi i \left( A_{k+1} I_{-+}^{(k-1)} + \bar{A}_{k+1} I_{+-}^{(k-1)} \right) = 8\pi^2 \tilde{\epsilon}_{k-1} \sigma_{k+1}, \quad (5.86)$$

где сигма задается (5.55). Далее, замечаем, что  $I_{++}^{(k-1)}$  может быть выражена через внутренние угловые параметры посредством соотношения (5.52), а именно,  $I_{++}^{(k-1)} = -2\pi \tilde{\epsilon}_{k-1} \tilde{s}_{k-1}$ . Наконец, получаем равенство

$$2\pi i \left( A_{k+1} I_{-+}^{(k-1)} + \bar{A}_{k+1} I_{+-}^{(k-1)} \right) = 8\pi^2 \tilde{\epsilon}_{k-1} (\tilde{s}_{k-1} s_{k+1} + \sigma_{k+1}). \quad (5.87)$$

Т.к.  $(I_{-+}^{(k)})^* = -I_{+-}^{(k)}$ , где  $*$  – комплексное сопряжение, и  $\operatorname{Re} x = (x + x^*)/2$ , приходим к выводу, что итоговое уравнение в точности дается соотношением (5.78), а (5.79) это (5.82).

Теперь, используя обозначение (5.76) перепишем импульсные уравнения, состоящие из условий равновесия (5.51), (5.54), и условий углового баланса (5.60), в виде

$$\epsilon_i s_i + \tilde{\epsilon}_{i-1} \tilde{s}_{i-1} - \tilde{\epsilon}_{i-2} \tilde{s}_{i-2} = 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (5.88)$$

$$\tilde{\epsilon}_{k-1} \sqrt{1 - \tilde{s}_{k-1}^2 \eta_{k-1}} - \tilde{\epsilon}_{k-2} \sqrt{1 - \tilde{s}_{k-2}^2 \eta_{k-1}} - \epsilon_k \sqrt{1 - \tilde{s}_k^2 \eta_{k-1}} = 0, \quad k = 2, \dots, n-2, \quad (5.89)$$

$$D_k^+ = \frac{\bar{A}_{k+1}}{\bar{A}_k} D_{k-1}^-, \quad k = 2, \dots, n-2, \quad (5.90)$$

где независимые переменные – это угловые параметры  $s_1, \dots, s_{n-2}, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n-3}$  и положения вершин  $\eta_1, \dots, \eta_{n-3}$ , а  $D_k^\pm$  заданы выражениями (5.61), (5.62). В совокупности, имеется  $(3n - 8)$  уравнений на  $(3n - 8)$  переменных.

По сравнению с границей, в объеме присутствуют избыточные переменные двух типов: внутренние угловые параметры  $\tilde{s}_k$  и радиальные положения вершин  $\eta_k$ . Это переменные  $B$ -типа, введенные в разделе 5.3.1. Переменными  $A$ -типа в этом случае являются аксессуарные параметры и внешние импульсы. Отсюда следует, что прямой способ сравнить два описания состоит в том, чтобы выразить  $\eta_k$  через  $s_i$  и  $\tilde{s}_j = \tilde{s}_j(s_i)$  посредством (5.88), (5.89) с помощью (5.55), после чего подставить их в уравнения углового баланса (5.90). Однако, возникающие уравнения, зависящие только от  $s_i$ , получаются крайне громоздкими. В дальнейшем мы частично решим импульсные уравнения, что значительно упрощает анализ дуальности.

С этой целью заметим, что функции  $D_k^\pm$  являются строительными блоками уравнений углового баланса (5.90). Рассмотрим их свойства более подробно, при том условии, что выполнены условия равновесия (5.88) и (5.89). Как оказывается, эти функции пропорциональны контурным интегралам  $I_{+-}^{(k)}$ .

**Лемма 5.1.** *При наложенных условиях равновесия (5.88) и (5.89), функции  $D_k^-$  (5.61) и  $D_k^+$  (5.62) линейно зависимы,*

$$\tilde{\epsilon}_{k-1} D_k^- - \tilde{\epsilon}_{k-2} D_k^+ = \epsilon_k A_k \bar{A}_k, \quad k = 2, \dots, n-2. \quad (5.91)$$

Для доказательства, следуя определению (5.61) и (5.62), рассмотрим разницу

$$\tilde{\epsilon}_{k-1} D_k^- - \tilde{\epsilon}_{k-2} D_k^+ \equiv \left( \sqrt{1 - s_k^2 \eta_{k-1}} - i s_k \sqrt{1 + \eta_{k-1}} \right) \Delta B_k, \quad (5.92)$$

где

$$\begin{aligned}\Delta B_k &= \tilde{\epsilon}_{k-1}(\sqrt{1 - \tilde{s}_{k-1}^2 \eta_{k-1}} - i\tilde{s}_{k-1}\sqrt{1 + \eta_{k-1}}) \\ &\quad - \tilde{\epsilon}_{k-2}(\sqrt{1 - \tilde{s}_{k-2}^2 \eta_{k-1}} - i\tilde{s}_{k-2}\sqrt{1 + \eta_{k-1}}) = \\ &= (\tilde{\epsilon}_{k-1}\sqrt{1 - \tilde{s}_{k-1}^2 \eta_{k-1}} - \tilde{\epsilon}_{k-2}(\sqrt{1 - \tilde{s}_{k-2}^2 \eta_{k-1}}) + i(\tilde{\epsilon}_{k-2}\tilde{s}_{k-2} - \tilde{\epsilon}_{k-1}\tilde{s}_{k-1})) .\end{aligned}\quad (5.93)$$

Вещественная и мнимая части задаются условиями равновесия (5.89) и (5.88). Отсюда следует соотношение

$$\Delta B_k = \epsilon_k \left( \sqrt{1 + s_k^2 \eta_{k-1}} + i\sqrt{1 + \eta_{k-1}} \right) , \quad (5.94)$$

которое без учета  $\epsilon_k$  является комплексно-сопряженным первому фактору в (5.92). С помощью (5.64) и (5.76) находим, что абсолютное значение этого числа равно  $1 + s_k^2 = A_k \bar{A}_k$ . Таким образом, соотношение (5.91) верно, и Лемма 5.1 доказана.

**Лемма 5.2.** *При наложенных условиях равновесия (5.88) и (5.89), вещественную часть функции  $D_k^+$  можно выбрать в виде*

$$\operatorname{Re} D_k^+ = -(s_k \tilde{s}_{k-2} + \sigma_k) , \quad k = 2, \dots, n-2 , \quad (5.95)$$

где  $\sigma_k$  (5.55).

Для доказательства Леммы 5.2, частично решим импульсные уравнения. Для этого разрешим (5.62) в терминах радиальных положений вершин

$$\eta_{k-1} = \frac{1 - (\operatorname{Re} D_k^+ + s_k \tilde{s}_{k-2})^2}{s_k^2 + \tilde{s}_{k-2}^2 + 2s_k \tilde{s}_{k-2} (\operatorname{Re} D_k^+ + s_k \tilde{s}_{k-2})} , \quad (5.96)$$

где функция  $D_k^+$  ограничена уравнением баланса (5.60). Удобно определить ее вещественную часть как  $\operatorname{Re} D_k^+ = (D_k^+ + D_k^{+*})/2$ , где \* обозначает комплексное сопряжение. Другие решения отсутствуют, т.к. уравнения (5.62) решаются квадрированием радикалов: возводя дважды в квадрат получаем линейное по  $\eta_k$  уравнение (см. комментарии после формулы (5.33)).

Приравнивая два различных, но эквивалентных представления (5.55) и (5.96) радиального положения вершины  $\eta_{k-1}$ , находим, что вещественная часть  $D_k^+$  подчинена квадратичному соотношению

$$\frac{1 - \sigma_k^2}{s_k^2 + \tilde{s}_{k-2}^2 - 2\sigma_k s_k \tilde{s}_{k-2}} = \frac{1 - (\operatorname{Re} D_k^+ + s_k \tilde{s}_{k-2})^2}{s_k^2 + \tilde{s}_{k-2}^2 + 2s_k \tilde{s}_{k-2} (\operatorname{Re} D_k^+ + s_k \tilde{s}_{k-2})} . \quad (5.97)$$



Есть два разных корня при каждом  $k = 2, \dots, n - 2$ ,

$$\operatorname{Re}D_k^+ + s_k \tilde{s}_{k-2} + \sigma_k = 0, \quad (5.98)$$

$$\operatorname{Re}D_k^+ + s_k \tilde{s}_{k-2} - \sigma_k \frac{s_k^2 + \tilde{s}_{k-2}^2 - 2\sigma_k^{-1} s_k \tilde{s}_{k-2}}{s_k^2 + \tilde{s}_{k-2}^2 - 2\sigma_k s_k \tilde{s}_{k-2}} = 0. \quad (5.99)$$

Выбираем первый корень (5.98), см. комментарии после Утверждения **5.5** далее.

Следующее утверждение формулирует импульсные уравнения в терминах новых переменных  $D_k^\pm$ .

**Утверждение 5.4.** Уравнения (5.88)-(5.90) можно переписать в виде

$$\epsilon_i s_i + \tilde{\epsilon}_{i-1} \tilde{s}_{i-1} - \tilde{\epsilon}_{i-2} \tilde{s}_{i-2} = 0, \quad i = 2, \dots, n - 1, \quad (5.100)$$

$$\operatorname{Re}D_{k+1}^+ = -(s_{k+1} \tilde{s}_{k-1} + \sigma_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n - 2, \quad (5.101)$$

где  $D_k^-$  и  $D_{k+1}^+$ ,  $k = 1, \dots, n - 2$ , удовлетворяют условиям

$$\tilde{\epsilon}_{k-1} D_k^- - \tilde{\epsilon}_{k-2} D_k^+ = \epsilon_k A_k \bar{A}_k, \quad k = 1, \dots, \quad (5.102)$$

$$D_k^+ = \frac{\bar{A}_{k+1}}{A_k} D_{k-1}^-, \quad k = 2, \dots, n - 2. \quad (5.103)$$

Доказательство прямо следует из Лемм **5.1** и **5.2**. Здесь радиальные положения вершин были исключены посредством введения новых независимых переменных  $D_k^\pm$ , подчиненных соотношениям (5.102) и (5.103). В таком виде импульсные уравнения имеют похожую структуру с аксессуарными уравнениями Утверждения **5.3**.

### 5.3.3 Слабая эквивалентность дуальных систем

Объединяя Утверждения **5.3** и **5.4** находим, что две системы уравнений могут быть слабо эквивалентными, если контурные интегралы  $I_{-+}^{(k-1)}$  и функции  $D_k^+$  связаны как  $\bar{A}_{k+1} I_{-+}^{(k-1)} \sim D_k^+$ . С другой стороны, кажется, что это невозможно, потому как при заданном линейном соотношении (5.66) контурные интегралы квадратичны по аксессуарным параметрам, а функции  $D_k^\pm$  являются сложными функциями с радикалами и рациональными функциями

импульсов, ср. (5.61), (5.62). Однако, из Утверждения 5.4 следует, что функции  $D_k^\pm$  теперь являются независимыми переменными, подчиненными линейным уравнениям (5.102) и (5.103) с коэффициентами, не более чем квадратичными по  $A_k$  и  $\bar{A}_k$ . Ниже мы явно решаем эти линейные соотношения.

Во-первых, в предыдущем разделе было показано, что соотношение (5.100) можно разрешить в терминах внешних параметров, что дает (5.77), см. (5.51)–(5.53). Во-вторых, вспоминая, что нижние индексы можно отождествить как  $\tilde{0} = 1$ , что влечет за собой  $\tilde{\epsilon}_0 \equiv \epsilon_1$ , находим, что уравнения (5.102) явно представимы в виде

$$\epsilon_1 D_1^- = \epsilon_1 A_1 \bar{A}_1, \quad \tilde{\epsilon}_1 D_2^- = \epsilon_1 D_2^+ + \epsilon_2 A_2 \bar{A}_2, \quad \tilde{\epsilon}_2 D_3^- = \epsilon_2 D_3^+ + \epsilon_3 A_3 \bar{A}_3, \quad \dots, \quad (5.104)$$

а уравнения (5.103) это система соотношений

$$D_2^+ = \frac{\bar{A}_2}{A_1} D_1^-, \quad D_3^+ = \frac{\bar{A}_3}{A_2} D_2^-, \quad D_4^+ = \frac{\bar{A}_4}{A_3} D_3^-, \quad \dots \quad (5.105)$$

Решая рекуррентно уравнения (5.104) и (5.105), можно выписать общее решение

$$D_{k+1}^+ = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_{k-1}} \bar{A}_{k+1} (\epsilon_1 \bar{A}_1 + \sum_{p=2}^k \epsilon_p A_p), \quad D_k^- = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_{k-1}} \bar{A}_k (\epsilon_1 \bar{A}_1 + \sum_{p=2}^k \epsilon_p A_p). \quad (5.106)$$

Далее, используя выражение (5.79), находим соотношение

$$D_{k+1}^+ = \frac{1}{2\pi i \tilde{\epsilon}_{k-1}} \bar{A}_{k+1} I_{+-}^{(k-1)}, \quad (5.107)$$

которые в итоге доказывает финальное

**Утверждение 5.5.** *Акцессорные уравнения (5.74) и (5.75) слабо эквивалентны импульсным уравнениям (5.100) и (5.101).*

Слабая эквивалентность подразумевает, что система в объеме имеет больше корней по сравнению с граничной системой. Наш выбор корней скрыт в Лемме 5.2. При доказательстве Леммы 5.2 было показано, что есть другое возможное значение  $\text{Re} D_k^+$ . Однако, использование соответствующего корня (5.99) не приводит к известным примерам дуальности. Другими словами, по всей видимости, существуют допустимые конфигурации в объеме, которые не могут быть реализованы через классический конформный блок.

В заключение этого раздела, суммируем достигнутое. Мы показали, что  $n$ -точечный классический конформный блок в НЛ приближении равен (по модулю конформного отображения) длине дуальной геодезической сети, при любом  $n$ . Для этого мы переформулировали обе системы в объеме и на границе в виде потенциально-векторных уравнений, где компоненты вектора подчинены алгебраическим уравнениям. Было продемонстрировано, что обе алгебраические системы имеют общие корни. Это гарантирует наличие дуальности, несмотря на то, что явные выражения функций на обеих сторонах дуальности неизвестны (за исключением некоторых аппроксимаций). Более того, используя понятие слабой эквивалентности было показано, что множество корней граничной системы является подмножеством корней системы в объеме.

Еще раз подчеркнем, что вычисление явных выражений функций конформного блока и длины геодезического графа является сложной технической проблемой. По всей видимости, т.к. система аксессуарных/импульсных уравнений эквивалентна одному алгебраическому уравнению порядка  $\mathcal{O}(n)$ , где  $n$  – число точек вставок в корреляторе, то нахождение решения выглядит как проблема NP сложности. На текущий момент удалось найти решения в случае  $n = 5$ , когда система уравнений сводится к одному уравнению четвертого порядка. Однако, несмотря на существование общей формулы корней, она, в силу громоздкости, не имеет особого практического значения. Поэтому развиваются следующие за НЛ приближением другие аппроксимационные схемы. Это, например, суперлегкое (super-light) разложение, когда вводится дополнительная иерархия малости конформных размерностей [140, 174, 142, 320, 328]. В рамках такого суперлегкого разложения вычислен 5-точечный классический конформный блок [140, 174, 142]. Явные функции представляются в виде рядов по иерархии малых размерностей, см. Приложение Д.2.

## 5.4 Вильсоновские сети и конформные блоки

Формулировка Черна-Саймонса  $3d$  гравитации с космологическим членом возникает при объединении поля репера и спиновой связности в  $o(2, 2)$ -связность  $\mathcal{A}$  [147, 148]. Путем разложения калибровочной алгебры  $o(2, 2) \approx sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$  вводятся ассоциированные (анти-)киральные связности  $A, \bar{A}$

для каждого простого фактора  $sl(2, \mathbb{R})$  с базисными элементами  $J_{0,\pm 1}$ , см. Приложение **Е.3**. Тогда действие  $3d$  гравитации задается  $o(2, 2)$  действием Черна-Саймонса

$$S[\mathcal{A}] = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}^3} \text{Tr}(d\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}) , \quad (5.108)$$

где  $k$  связано с 3-мерной постоянной Ньютона  $G_3$  посредством соотношения  $k = l/(4G_3)$ , а  $l$  – это  $AdS_3$  радиус,  $\text{Tr}$  обозначает инвариантную форму Киллинга. Эквивалентным образом, действие факторизуется как  $S[\mathcal{A}] = S[A] - S[\bar{A}]$ , где каждая киральная компонента является  $sl(2, \mathbb{R})$  действием Черна-Саймонса. Удобный выбор локальных координат:  $x^\mu = (\rho, z, \bar{z})$  с радиальной координатой  $\rho \geq 0$  и (анти)голоморфными координатами  $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$ .

Уравнения движения, следующие из действия Черна-Саймонса (5.108), решаются плоскими  $o(2, 2)$ -связностями  $\mathcal{A}$ . Наложением подходящих граничных условий, решения могут быть представлены через (киральные) компоненты вида  $A = U^{-1}\Omega U + U^{-1}dU$ , где калибровочный групповой элемент имеет вид  $U(x) = \exp \rho J_0$  [329], а голоморфная гравитационная связность задается выражением

$$\Omega = \left( J_1 - 2\pi \frac{6T(z)}{c} J_{-1} \right) dz , \quad (5.109)$$

где  $T(z)$  – голоморфный граничный тензор энергии-импульса, центральный заряд  $c$  определяется через соотношение Брауна–Энно  $c = 3l/(2G_3)$  [9].

Каждому пути  $L$  с концевыми точками  $x_1, x_2 \in \mathcal{M}_3$  можно сопоставить следующий киральный вильсоновский оператор

$$W_R[L] = \mathcal{P} \exp \left( - \int_L \Omega \right) , \quad (5.110)$$

где киральная  $sl(2, \mathbb{R})$ -связность задается (5.109) в некотором представлении  $R$ . Похожим образом рассматривается  $\bar{W}_R[L]$  в анти-киральном секторе. Относительно действия калибровочной группы вильсоновский оператор преобразуется однородно как  $W_R[L] \rightarrow U_R(x_2)W_R[L]U_R^{-1}(x_1)$ , где групповой калибровочный элемент  $U_R = \exp \epsilon J_R$  с генераторами  $J_R$  в заданном представлении  $R$ . Т.к. решения теории даны плоскими связностями, вильсоновские операторы зависят только от граничных точек пути  $L$  и топологии базового

многообразия  $\mathcal{M}_3$ . (Анти-)киральные вильсоновские операторы (5.110) играют определяющую роль при обсуждении (анти-)голоморфных конформных блоков граничной конформной теории.

### 5.4.1 Описание общей конструкции

Метрика евклидова  $AdS_3$  пространства возникает из (5.109) выбором постоянного граничного тензора энергии–импульса. В дальнейшем, временное направление будет либо периодическим, либо непериодическим. В непериодическом случае, тензор энергии–импульса можно выбрать равным нулю  $T(z) = 0$ , так что киральная гравитационная связность (5.109) принимает следующий вид

$$\Omega = J_1 dz , \quad (5.111)$$

и соответствующая  $AdS_3$  метрика задается в координатах Пуанкаре. В периодическом случае (термальный  $AdS_3$ ), тензор энергии–импульса равен  $T(z) = -c/48\pi$ , так что киральная гравитационная связность задается выражением

$$\Omega = \left( J_1 + \frac{1}{4} J_{-1} \right) dw , \quad (5.112)$$

дополненным стандартным отождествлением  $w \sim w + 2\pi$  и  $w \sim w + 2\pi\tau$ , где  $i\tau \in \mathbb{R}_-$ . Граничный (прямоугольный) тор определяется модулярным параметром  $\tau$ , алгебра конформной симметрии в пределе большого заряда  $c$  сводится к конечномерной подалгебре  $sl(2, \mathbb{R}) \oplus sl(2, \mathbb{R})$  (см. обсуждение в Главе 6).

В киральном секторе вильсоновский оператор (5.110) для связностей (5.111) или (5.112) является голономией кирального калибровочного поля вдоль пути  $L$  с концевыми точками  $x_1, x_2$ :

$$W_a[x_1, x_2] = \mathcal{P} \exp \left( - \int_{x_1}^{x_2} \Omega \right) = \exp(x_{12} \Omega) , \quad (5.113)$$

где  $x_{mn} = x_m - x_n$ , и  $a$  нумерует конечномерные спин- $j_a$  представления  $\mathcal{D}_a$  киральной калибровочной алгебры  $sl(2, \mathbb{R})$ . Напомним, что вильсоновские операторы обладают транзитивным свойством

$$W_a[x_1, x_2] = W_a[x_1, x] W_a[x, x_2] , \quad (5.114)$$

где  $x$  – произвольная промежуточная точка. Соотношение (5.114) очевидно для независимых от координат связностей вида (5.111) и (5.112).

Для реализации конформных блоков посредством вильсоновских сетей нам понадобятся следующие ингредиенты.

- 1) Вильсоновский оператор  $W_a[z, x]$  в спин- $j_a$  представлении  $\mathcal{D}_a$  алгебры  $sl(2, \mathbb{R})$ , соединяющий внешний оператор  $\mathcal{O}_{\Delta_a}(z, \bar{z})$  на границе с некоторой точкой  $x$  в объеме. Конформная размерность граничного оператора равна  $\Delta_a = -j_a$ .
- 2) Вильсоновский оператор  $W_a[x, y]$ , соединяющий две точки в объеме  $x$  и  $y$ . Цикл в термальном  $AdS_3$  соответствует вильсоновскому петлевому оператору  $W_a[x, x + 2\pi\tau]$ .
- 3) 3-валентная вершина в точке  $x_b$  объема связывает три вильсоновских оператора, ассоциированных с тремя представлениями  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$  посредством 3-валентного интертвинера (сплетающий оператор)

$$I_{a;b,c} : \quad \mathcal{D}_b \otimes \mathcal{D}_c \rightarrow \mathcal{D}_a , \quad (5.115)$$

удовлетворяющего определяющему свойству  $sl(2, \mathbb{R})$  инвариантности

$$I_{a;b,c} U_b U_c = U_a I_{a;b,c} , \quad (5.116)$$

где  $U_\alpha$  занумерованные  $\alpha = a, b, c$  – это линейные операторы, действующие в соответствующих пространствах представлений. Другими словами, интертвинер принадлежит одномерному пространству  $sl(2, \mathbb{R})$ -инвариантов  $\text{Inv}(\mathcal{D}_a^* \otimes \mathcal{D}_b \otimes \mathcal{D}_c)$ , где  $*$  обозначает контраградиентное представление.

- 4) Прикрепленные к границе вильсоновские операторы действует на граничные состояния  $|a\rangle \in \mathcal{D}_a$ .

В целом,  $n$ -точечный глобальный конформный блок  $\mathcal{F}(\Delta, \tilde{\Delta}|\mathbf{q}, z)$  на римановой поверхности рода  $g$  с модулярными параметрами  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_g)$ , внешними и внутренними конформными размерностями  $\Delta$  и  $\tilde{\Delta}$ , может быть вычислен в виде следующего матричного элемента

$$\mathcal{F}(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j|\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \langle\langle \Phi [W_a, I_{b;c,d}|\mathbf{q}, \mathbf{z}] \rangle\rangle , \quad (5.117)$$

ср. с формулой соответствия для классических блоков (5.65). Здесь, вильсоновский сетевой оператор  $\Phi[W_a, I_{b;c,d}]$  строится из вильсоновских операторов  $W_a$ , ассоциированных с частными (объем–объем, объем–граница) сегментами, склеенных вместе 3-валентными интертвинерами  $I_{b;c,d}$  для образования конкретного графа с граничными прикреплениями  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ . Двойные скобки означают, что вычисляется частный матричный элемент оператора  $\Phi$  между специальными векторами ассоциированных  $sl(2, \mathbb{R})$  представлений таким образом, что итоговая величина является синглетом  $sl(2, \mathbb{R})$  калибровочной алгебры. Посредством общих аргументов можно показать, что матричный элемент (5.117): (а) не зависит от положений вершинных точек в объеме, благодаря калибровочной ковариантности вильсоновских операторов, (б) преобразуется относительно граничных  $sl(2)$  конформных преобразований как  $n$ -точечная корреляционная функция.

**Вертексные функции.** Обсудим примеры оператора (5.117). Это будут 2-точечная, 3-точечная и 4-точечная вильсоновские сети в пространстве  $AdS_3$  с плоской границей. Сначала рассмотрим 3-валентную вершину, состоящую из трех прикрепленных к границе вильсоновских линий, соединяющихся в точке объема  $x$ . Пусть  $|a\rangle$  – некоторый вектор в спин- $j_a$  представлении  $\mathcal{D}_a$ , который будем называть граничным вектором. Действуя вильсоновским оператором объем–граница  $W_a[x, z]$  получаем следующий вектор

$$|\tilde{a}\rangle = W_a[x, z]|a\rangle, \quad (5.118)$$

ассоциированный с некоторым квази-примарным или вторичным граничным оператором  $\mathcal{O}(z, \bar{z})$  конформного семейства  $[\mathcal{O}_{\Delta_a}]$  размерности  $\Delta_a = -j_a$ .

Векторы (5.118) являются единственными элементами вильсоновского сетевого оператора (5.117), которые зависят от положений граничных операторов. Таким образом, именно их свойства полностью определяют то, как возникающие  $SFT_2$  корреляционные функции (конформные блоки) преобразуются относительно преобразований глобальной конформной алгебры. Можно показать, что в зависимости от выбора частного  $W_a$  и  $|a\rangle \in \mathcal{D}_a$ , конформная инвариантность корреляционных функций квази-примарных операторов гарантируется следующим базовым свойством [150, 152, 151, 178]

$$(\mathcal{L}_n - C_n^m J_m) |\tilde{a}\rangle = 0, \quad n = 0, \pm 1, \quad (5.119)$$

где  $[C_n^m]$  – это  $[3 \times 3]$  постоянная матрица. Данное условие требует, чтобы конформное преобразование генерировалось некоторой специальной комбинацией киральных  $sl(2, \mathbb{R})$  калибровочных преобразований. Здесь  $J_n$  – базисные элементы (киральной)  $sl(2, \mathbb{R})$  калибровочной алгебры в представлении  $\mathcal{D}_a$ , а  $\mathcal{L}_n$  – граничные конформные базисные элементы, реализованные дифференциальными операторами в координатах  $z$ , удовлетворяющие коммутационным соотношениям (голоморфной)  $sl(2, \mathbb{R})$  конформной алгебры  $[\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n] = (m - n)\mathcal{L}_{m+n}$ . Явный вид матрицы  $C_n^m$  фиксируется частным выбором гравитационных связностей в операторах  $W_a$  и граничных векторов  $|a\rangle$  (см. ниже). Технически,  $C$  вычисляется в каждом отдельном случае и, более того, для нас это две фоновые гравитационные связности (5.111) и (5.111), причем обе с постоянными коэффициентами. Важной задачей является формализация возможных свойств данной матрицы, таких как унитарность, и т.д. (пока единственным очевидным свойством является обратимость). С другой стороны, концептуально очевидно, что матрица  $C$  является производным объектом. Его точное определение и свойства должны строго выводиться из голографических тождеств Уорда дуальных  $3d$  теории Черна-Саймонса и  $CFT_2$ , обсуждаемых, например, в работе [151].

**3-точечная вертексная функция.** Следуя общему определению вильсоновского сетевого оператора (5.117), воспользуемся интертвинером (5.115) и зададим 3-валентную вертексную функцию (см. рис. 12) в виде следующего матричного элемента

$$V_{a,b,c}(\mathbf{z}) = \langle \tilde{a} | I_{a;b,c} | \tilde{b} \rangle \otimes | \tilde{c} \rangle = \langle a | W_a[z_1, x] I_{a;b,c} W_b[x, z_2] W_c[x, z_3] | b \rangle \otimes | c \rangle , \quad (5.120)$$

где  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$  обозначает положения граничных конформных операторов,  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$  – произвольные граничные векторы. С помощью условия инвариантности (5.116), записанного в виде

$$I_{a;b,c} W_b[x, z_2] = W_a[x, z_2] I_{a;b,c} W_c^{-1}[x, z_2] = W_a[x, z_2] I_{a;b,c} W_c[z_2, x] , \quad (5.121)$$

совместно с свойством транзитивности (5.114), 3-валентную вертексную функцию можно представить как

$$V_{a,b,c}(\mathbf{z}) = \langle a | W_a[z_1, z_2] I_{a;b,c} W_c[z_2, z_3] | b \rangle \otimes | c \rangle . \quad (5.122)$$





Рис. 12. Вильсоновские сети: 3-валентная вершина (слева) и 4-валентная вершина как две 3-валентные вершины, соединенные ребром (справа).

Это выражением получается эквивалентным образом выбором вершинной точки в объеме  $x = z_2$ , что приводит к  $W_b[z_2, z_2] = \mathbb{1}$ . Такой выбор обоснован, потому что, как отмечалось ранее, итоговый вильсоновский сетевой оператор не зависит от положения вершинных точек. С другой стороны, такая свобода выбора вершинной точки закодирована в трансформационных свойства инертвинера.

Сделаем два комментария. Во-первых, для получения нетривиального инертвинера со свойством (5.116) веса трех представлений должны удовлетворять треугольному неравенству. Действительно, тензорно перемножая два неприводимых представления как (5.115) мы получаем стандартный ряд Клебша-Гордона

$$\mathcal{D}_a \otimes \mathcal{D}_b = \bigoplus_{j_c=|j_a-j_b|}^{j_a+j_b} \mathcal{D}_c. \quad (5.123)$$

Если представление  $\mathcal{D}_c$  заданного спина  $j_c$  возникает в правой части разложения Клебша-Гордона, то соответствующий инертвинер это просто проектор, иначе он равен нулю. Эквивалентно,  $j_a + j_b - j_c \geq 0$ . Во-вторых, (5.122) можно переписать через матричные элементы в стандартном базисе (Д.12) вставкой разложений единиц,

$$\mathbb{1} = \sum_{m=-j}^j |j, m\rangle \langle j, m| \quad (5.124)$$

и получить

$$V_{a,b,c}(\mathbf{z}) = \sum_m \sum_k \sum_n \left( \langle j_a, m | I_{a,b,c} | j_b, k \rangle \otimes | j_c, n \rangle \right) \langle \tilde{a} | j_a, m \rangle \langle j_b, k | \tilde{b} \rangle \langle j_c, n | \tilde{c} \rangle. \quad (5.125)$$

В этом виде 3-валентная вертексная функция представляется как произведение четырех матричных элементов, которые существенным образом упрощаются когда  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$  выбраны каким-нибудь каноническим образом, например, векторами старшего или младшего веса. Последние три фактора это матричные элементы вильсоновских операторов, или, эквивалентно, координаты тильдованных векторов в стандартном базисе.

Первый фактор это матричный элемент инертвинера, который, по сути, является  $3j$  символом Вигнера.<sup>67</sup> Действительно, обозначим матричный элемент инертвинера и  $3j$  символа как

$$[I_{a;b,c}]^m_{kn} = \langle j_a, m | I_{a;b,c} | j_b, k \rangle \otimes | j_c, n \rangle, \quad [W_{a,b,c}]_{mkn} = \begin{pmatrix} j_a & j_b & j_c \\ m & k & n \end{pmatrix}. \quad (5.126)$$

Здесь каждое магнитное число  $m, n, k$  принадлежит своей области определения. Тогда два этих тензора связаны соотношением

$$[I_{a;b,c}]^m_{kn} = \sum_l \epsilon^{(a)ml} [W_{a,b,c}]_{lkn}, \quad (5.127)$$

где  $\epsilon^{(a)ml}$  – тензор Леви–Чивиты в представлении  $\mathcal{D}_a$ . Очевидно, что оба тензора  $sl(2, \mathbb{R})$  инвариантны, и  $3j$  символ принадлежит  $\text{Inv}(\mathcal{D}_a \otimes \mathcal{D}_b \otimes \mathcal{D}_c)$ . Тензор Леви–Чивиты в  $\mathcal{D}_a$  задается выражением

$$\epsilon^{(a)mn} = (-)^{j_a - m} \delta_{m, -n} = \sqrt{2j_a + 1} \begin{pmatrix} j_a & j_a & 0 \\ m & m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_a \\ mn \end{pmatrix}. \quad (5.128)$$

Последнее равенство определяет  $1jm$  символ Вигнера, который рассматривается как инвариантная метрика, связывающая стандартный и контраградиентный базисы. В частности, этот объект позволяет ввести 2-точечную вертексную функцию

$$V_{a,b}(\mathbf{z}) = \langle \tilde{a} | I_{a;b} | \tilde{b} \rangle = \delta_{ab} \langle a | I_{a;a} W_a[z_1, z_2] | a \rangle, \quad (5.129)$$

<sup>67</sup>Строго говоря, здесь рассматриваются  $SL(2, \mathbb{R}) \approx SU(1, 1)$   $3mj$  символы Вигнера, которые, вообще говоря, отличаются от  $SU(2)$   $3mj$  символов Вигнера для произвольных ((не)унитарных, (бес)конечномерных и т.д.) представлений. Однако, в данной диссертации рассматриваются только конечномерные представления для которых два типа символов совпадают [330].

где  $I_{a;a}$  – это 2-валентный инертвинер, принадлежащий  $\text{Inv}(\mathcal{D}_a^* \otimes \mathcal{D}_a)$ , определение которого прямо следует из (5.115), (5.116) при  $\mathcal{D}_c = 1$ . Таким образом,

$$[I_{a;a}]_m^n = \begin{pmatrix} j_a \\ mn \end{pmatrix}. \quad (5.130)$$

Возвращаясь к 3-точечным вертексным функциям, можно явно проверить, что выбирая граничные векторы как векторы старшего веса соответствующих спин- $j_\eta$  представлений  $\eta = a, b, c$  (см. Приложение **Е.3**)

$$|\eta\rangle = |\text{hw}\rangle_\eta : \quad J_{-1}|\text{hw}\rangle_\eta = 0, \quad J_0|\text{hw}\rangle_\eta = j_\eta|\text{hw}\rangle_\eta, \quad (5.131)$$

а также фиксируя вильсоновский оператор в евклидовом  $AdS_3$  пространстве, определяемый связностью (5.111), мы воспроизводим 3-точечную корреляционную функцию квази-примарных операторов на плоскости [149, 150]:

$$V_{a,b,c}(\mathbf{z}) = \langle \mathcal{O}_{\Delta_a}(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{O}_{\Delta_b}(z_2, \bar{z}_2) \mathcal{O}_{\Delta_c}(z_3, \bar{z}_3) \rangle. \quad (5.132)$$

Можно показать, что основное трансформационное свойство (5.119), обеспечивающее конформную инвариантность 3-точки (5.132) определяется антидиагональной единичной матрицей  $C_m^n$ , т.е.,

$$\begin{aligned} (J_1 + \mathcal{L}_{-1})W|\text{hw}\rangle &= 0, \\ (J_0 + \mathcal{L}_0)W|\text{hw}\rangle &= 0, \\ (J_{-1} + \mathcal{L}_1)W|\text{hw}\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5.133)$$

**4-точечная вертексная функция.** Введем 4-точечную вертексную функцию между четырьмя представлениями  $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c, \mathcal{D}_d$ , построенную через два 3-валентных вертекса, соединенных между собой посредством промежуточного ребра  $W_e \equiv W_e[y, x]$  в представлении  $\mathcal{D}_e$  (см. рис. **12**), а именно,

$$V_{a,b,c,d|e}(\mathbf{z}) = \langle \tilde{d} | I_{d;c,e} W_e I_{e;a,b} | \tilde{a} \rangle \otimes | \tilde{b} \rangle \otimes | \tilde{c} \rangle. \quad (5.134)$$

Транзитивное свойство позволяет записать  $W_e[y, x] = W_e[y, 0]W_e[0, x]$  и тогда: (1) для левого фактора повторяем аргументы, приведенные вокруг формулы (5.121), чем исключаем зависимость от  $y$ , (2) для левого фактора используем трансформационное свойство инертвинера, чем исключаем зависимость

от  $x$ . Итог таков, что положения  $x, y$  выпадают из формулы (5.134). Можно считать, что мы выбрали  $x = y = 0$ , так что промежуточный вильсоновский оператор тривиализуется  $W_e[x, x] = \mathbb{1}$ . В итоге, находим, что вертексная функция приводится к виду

$$V_{a,b,c,d|e}(\mathbf{z}) = \langle d | W_d[z_4, 0] I_{d;c,e} I_{e;a,b} W_a[0, z_1] W_b[0, z_2] W_c[0, z_3] | a \rangle \otimes | b \rangle \otimes | c \rangle . \quad (5.135)$$

Аналогично предыдущему рассмотрению 3-валентных функций вильсоновские операторы можно переставить посредством трансформационного свойства интертвинеров, после чего вставить разложения единиц. Итоговым выражением является свёртка шести матричных элементов. Выбирая  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, |d\rangle$  векторами старшего веса в своих представлениях получаем 4-точечный конформный блок на плоскости [149, 150].

Для наших дальнейших целей, выражения для 3-точечной функции (5.129) или (5.122), а также для 4-точечной функции (5.134) окажутся удобными при построении торических конформных конфигураций (см. Главу 6). Ожидается, что построение оператора  $\Phi$  (5.117) для вильсоновских сетей с большим числом концевых точек приводит к многоточечным конформным блокам, хотя это не было проверено явно (за исключением 5-точечного блока на плоскости в  $s$ -канале [149] и 2-точечных блоков на торе, в обоих каналах [178]). В следующем разделе оператор  $\Phi$  рассматривается в терминах  $n$ -валентных интертвинеров.

### 5.4.2 $n$ -точечные функции и потомки

**Потомки.** Покажем, что при выборе потомков векторов старшего веса в соответствующих представлениях на роль граничных векторов получается 3-точечная функция любых трех вторичных операторов

$$\mathcal{O}_\Delta^{(l)}(z, \bar{z}) = (\mathcal{L}_{-1})^l \mathcal{O}_\Delta(z, \bar{z}) , \quad (5.136)$$

где  $\mathcal{L}_{-1}$  – один из трех конформных генераторов на плоскости,  $\mathcal{L}_n = z^{n+1} \partial + (n+1) \Delta z^n$ ,  $n = 0, \pm 1$ . Выбирая потомки как

$$|\eta\rangle = |j_\eta, k\rangle = (J_1)^k |\text{hw}\rangle_\eta , \quad \eta = a, b, c , \quad (5.137)$$

и используя следующее: (1) гравитационная связность задается (5.111), так что  $[W_a[x, y], J_1] = 0$ , (2) свойство  $J_1 \sim \mathcal{L}_{-1}$  (5.133), мы находим, что соответствующая (голоморфная) 3-точечная корреляционная функция задается выражением

$$\begin{aligned} V_{a,b,c}(\mathbf{z}) &= \langle \mathcal{O}_{\Delta_a}^{(k)}(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{O}_{\Delta_b}^{(l)}(z_2, \bar{z}_2) \mathcal{O}_{\Delta_c}^{(m)}(z_3, \bar{z}_3) \rangle \\ &= \left( \mathcal{L}_{-1}^{(1)} \right)^k \left( \mathcal{L}_{-1}^{(2)} \right)^l \left( \mathcal{L}_{-1}^{(3)} \right)^m \langle \mathcal{O}_{\Delta_a}(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{O}_{\Delta_b}(z_2, \bar{z}_2) \mathcal{O}_{\Delta_c}(z_3, \bar{z}_3) \rangle, \end{aligned} \quad (5.138)$$

где верхний индекс ( $i$ ) в последней строчке указывает на  $i$ -ю точку.

Аналогичным образом 4-точечная функция вторичных примарных операторов может быть получена выбором граничных векторов как векторов-потомков в соответствующих представлениях. Действительно, 4-точечная корреляционная функция квази-примарных конформных операторов раскладывается как

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{O}_{\Delta_a}(z_1, \bar{z}_1) \mathcal{O}_{\Delta_b}(z_2, \bar{z}_2) \mathcal{O}_{\Delta_c}(z_3, \bar{z}_3) \mathcal{O}_{\Delta_d}(z_4, \bar{z}_4) \rangle \\ &= \sum_{e, \tilde{e}} C_{ab, e\tilde{e}} C_{e\tilde{e}, cd} V_{a,b,c,d|e}(\mathbf{z}) \bar{V}_{a,b,c,d|\tilde{e}}(\bar{\mathbf{z}}), \end{aligned} \quad (5.139)$$

где  $C_{ab, e\tilde{e}}$ ,  $C_{e\tilde{e}, cd}$  – структурные константы,  $e, \tilde{e}$  обозначает промежуточные представления  $\mathcal{D}_e$ ,  $\mathcal{D}_{\tilde{e}}$  в (анти)голоморфных секторах, и  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$ ,  $|c\rangle$ ,  $|d\rangle$  внутри вертексных функций являются граничными векторами старшего веса (5.131), как обсуждалось после формулы (5.135). Тогда применяя все предыдущие аргументы получаем 4-точечную корреляционную функцию вторичных операторов.

**Интертвинеры старших валентностей.** 4-точечная вертексная функция (5.135) определяется как свертка двух интертвинеров по одному индексу. Возникающий  $sl(2)$ -инвариантный тензор является 4-валентным интертвинером,

$$I_{ab,cd|e}^{(1)} = I_{d;c,e} I_{e;a,b}. \quad (5.140)$$

Аналогично (5.126), с помощью определения тензора Леви–Чивиты (5.128) можно вычислить 4-валентный интертвинер в стандартном базисе,

$$\left[ I_{ab,cd|e}^{(1)} \right]_{n_1 n_2 n_3}^{n_4} = (-)^{j_d - n_4} \sum_m (-)^{j_e - m} \begin{pmatrix} j_a & j_b & j_e \\ n_1 & n_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_e & j_c & j_d \\ -m & n_3 & -n_4 \end{pmatrix}. \quad (5.141)$$

Фиксируя другой порядок меток представлений  $a, b, c, d$ , можно ввести еще один 4-валентный инертвинер для графа с переставленными ребрами

$$I_{ac,bd|e}^{(2)} = I_{d;b,e} I_{e;a,c} , \quad (5.142)$$

или, в компонентах,

$$\left[ I_{ac,bd|e}^{(2)} \right]_{n_1 n_2 n_3}^{n_4} = (-)^{j_d - n_4} \sum_m (-)^{j_e - m} \begin{pmatrix} j_a & j_c & j_e \\ n_1 & n_3 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_e & j_b & j_d \\ -m & n_2 & -n_4 \end{pmatrix} . \quad (5.143)$$

Два данных инертвинера задают два базиса в  $\text{Inv}(\mathcal{D}_d^* \otimes \mathcal{D}_a \otimes \mathcal{D}_b \otimes \mathcal{D}_c)$ . В стандартном базисе, один инертвинер выражается через другой посредством следующего соотношения

$$I_{e|ac,bd}^{(2)} = \sum_{j_k} (-)^{j_b + j_c + j_e + j_k} (2j_k + 1) \begin{Bmatrix} j_a & j_b & j_k \\ j_d & j_c & j_e \end{Bmatrix} I_{k|ab,cd}^{(1)} , \quad (5.144)$$

где, по определению, коэффициенты разложения являются  $6j$  символами Вигнера. В терминах разложения по конформным блокам 4-точечной корреляционной функции  $\langle \mathcal{O}_{\Delta_a} \mathcal{O}_{\Delta_b} \mathcal{O}_{\Delta_c} \mathcal{O}_{\Delta_d} \rangle$  можно говорить про обмены в двух ОРЕ каналах, а смена базиса (5.144) это соотношение кроссинга. Матрица кроссинга задается  $6j$  символом Вигнера который, в свою очередь, может быть получен из (5.144) в виде свертки двух разных 4-валентных инертвинеров, или, эквивалентным образом, четырех 3-валентных инертвинеров.<sup>68</sup>

Инертвинеры старших валентностей можно ввести таким же способом и строить  $n$ -точечные конформные блоки. При фиксированном порядке представлений  $n$ -валентный инертвинер возникает как свёртка  $n - 2$  копии 3-валентных инертвинеров посредством разными способами упорядоченных  $n - 3$  промежуточных представлений,

$$I_{a_1, a_2, \dots, a_n | e_1, \dots, e_{n-3}} = I_{a_1; a_2, e_1} I_{e_1; a_3, a_4} \dots I_{e_{n-3}; a_{n-1}, a_n} . \quad (5.145)$$

Каждая возможная свертка определяет базис в  $\text{Inv}(\mathcal{D}_{j_1}^* \otimes \dots \otimes \mathcal{D}_{j_n})$ , который можно изменить посредством  $3(n - 2)j$  символа Вигнера. Например, в 5-точечном случае матрицы кроссинга задаются  $9j$  символами Вигнера, и т.д.

<sup>68</sup> $6j$  символы Вигнера для конформной группы  $O(d - 1, 2)$  привлекли недавно некоторый интерес в связи с их ролью в изучении кроссинг-уравнений, см. например, работы [331, 332, 333, 334, 335, 336].

Соответствующие  $n$ -точечные конформные блоки конформных (квази-первичных/вторичных) операторов в  $[\mathcal{O}_{\Delta_i}]$  размерностей  $\Delta_i = -j_{a_i}$  строятся действием заданным  $n$ -валентным инертвинером на  $n$  граничных состояний  $|\tilde{a}_i\rangle = W_i[0, z_i]|a_i\rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ , см. (5.118), следующим образом

$$F(\Delta_i, \tilde{\Delta}_j|\mathbf{z}) = \langle \tilde{a}_1 | I_{a_1, a_2, \dots, a_n | e_1, \dots, e_{n-3}} | \tilde{a}_2 \rangle \otimes \dots \otimes |\tilde{a}_n\rangle, \quad (5.146)$$

где инертвинер построен частным упорядочиванием представлений, что соответствует некоторому ОРЕ каналу рассеяния в  $CFT_2$  с размерностями  $\tilde{\Delta}_l = -j_{e_l}$ ,  $l = 1, \dots, n-3$ . Таким образом, мы явно получаем вильсоновский сетевой оператор на плоскости (5.117).

### 5.4.3 Торические вильсоновские сети

Как обсуждалось в разделе 5.4.1, благодаря калибровочной ковариантности, вильсоновские сети не зависят от положения вершин в объеме. Отсюда следует, что заданный вильсоновский оператор типа объем–объем на самом деле стягивается в точку и поэтому все диаграммы, у которых обменные каналы разложены по петлям и деревьям содержат вклады только контактного типа. Однако, на нетривиальных топологиях (например, на торе) существуют нестягиваемые циклы. Тогда ассоциированные вильсоновские сети будут содержать нестягиваемые петли, задаваемые нетривиальными голономиями.

Общая идея такова, что торические блоки можно строить из вильсоновских сетей, описанных на сферической топологии (с учетом выкалывания можно считать плоской) простым склеиванием внешних концов по модулю  $2\pi\tau$  (см. рис. 13) и последующим отождествлением соответствующих представлений. Взятие следа в таком представлении сохраняет общую калибровочную  $sl(2, \mathbb{R})$  ковариантность. Более конкретно, берется  $(n+2)$ -точечная функция на сфере (5.146) с  $n+2$  граничными состояниями в  $\mathcal{D}_{j_l}$ ,  $l = 1, \dots, n+2$ , где какие-нибудь два принадлежат одному представлению, например,  $\mathcal{D}_{j_1} \approx \mathcal{D}_{j_k}$  при некотором  $k$ . Далее, взятие следа по  $\mathcal{D}_{j_1}$  естественным образом выделяет часть исходного  $(n+2)$ -валентного инертвинера с участием двух вильсоновских операторов и некоторым числом составляющих его 3-валентных инертвинеров (в нашем случае это  $k$ ). С помощью свойства инвариантности

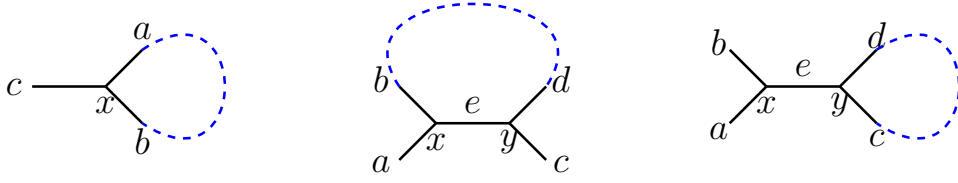


Рис. 13. Вильсоновские сети: 3-валентная вершина (слева) и 4-валентная вершина как две 3-валентные вершины, соединенные ребром (справа).

интертвинеров, эти два вильсоновских оператора можно пронести через интертвинеры и образовать один вильсоновский оператор типа петлевого (т.е. со следом). Схематично это выглядит как  $\text{Tr}_{j_1} \left( W_{j_1}[0, 2\pi\tau] I_{j_1; a, b} \dots I_{c; d, j_1} \right)$ . Настоящий петлевой вильсоновский оператор получается только когда исходно берется 2-точечная функция на сфере и в этом случае получается  $sl(2, \mathbb{R})$  характер (см. ниже), в то время как для многоточечных функций оператор под знаком следа с необходимостью содержит по-меньшей мере один интертвинер.

Давайте продемонстрируем, как эта процедура работает для 3-валентной функции (5.122) на торе  $\mathbb{T}^2$  с локальными координатами  $(w, \bar{w})$ , что в итоге приводит к торической 1-точечной вильсоновской сети. Вильсоновские операторы строятся посредством использования соответствующей фоновой гравитационной связности термального  $AdS_3$  пространства (5.112). отождествим две концевые точки 3-валентного графа слева на рис. 13, что означает, что точки  $w_1 = -2\pi\tau$  и  $w_2 = 0$  лежат на термальном цикле. отождествляя  $\mathcal{D}_a \cong \mathcal{D}_b$ , выбирая  $|a\rangle = |b\rangle = |j_a, m\rangle$  и затем суммируя по всем базисным состояниям в  $\mathcal{D}_a$  (напомним, что стандартный базис ортонормирован), из (5.122) находим выражение

$$\begin{aligned} \mathring{V}_{a|c}(\tau, \mathbf{w}) &= \sum_m \left( \langle j_a, m | W_a[-2\pi\tau, 0] I_{a; a, c} | j_a, m \rangle \right) W_c[0, w] | c \rangle \\ &= \text{Tr}_a \left( W_a[0, 2\pi\tau] I_{a; a, c} \right) W_c[0, w] | c \rangle, \end{aligned} \quad (5.147)$$

где  $\mathring{V}$  обозначает итоговую торическую вертексную функцию с некоторым  $|c\rangle \in \mathcal{D}_c$ . Если  $\mathcal{D}_c$  это тривиальное представление (т.е.  $j_c = 0$ ), то вильсоновский оператор  $W_c = \mathbb{1}_c$ , а интертвинер  $I_{a; a, 0} = \mathbb{1}_a$ , так что (5.147) становится



вильсоновским петлевым оператором,

$$\mathring{V}_{a|0}(\tau) = \text{Tr}_a \left( W_a[0, 2\pi\tau] \right), \quad (5.148)$$

который известен как характер представления  $\mathcal{D}_a$  [144]. Для нетривиальных представлений  $\mathcal{D}_c$  можно выбрать  $|c\rangle$  вектором младшего веса в  $\mathcal{D}_c$  и получить выражением, выдвинутое в качестве гипотезы в работе [152]. В Главе 6 будет явно продемонстрировано, что выражение (5.147) воспроизводит 1-точечный торический глобальный конформный блок.

Теперь давайте обратимся к 2-точечным торическим вильсоновским сетям и рассмотрим правый граф на рис. 13. Здесь представления с метками  $a, b, c, d$  ассоциированы с концевыми точками, упорядоченными как  $w_1, w_2, w_3, w_4$ . Используем вертексную функцию (5.135) и отождествим представления  $\mathcal{D}_d \cong \mathcal{D}_c$  и соответствующие концевые точки  $w_4 = -2\pi\tau$  и  $w_3 = 0$ . Далее, выбирая  $|d\rangle = |c\rangle = |j_c, m\rangle$  и суммируя по всем  $m$  получаем след по  $\mathcal{D}_c$ . Тогда из (5.135) напрямую возникает выражение

$$\mathring{V}_{(t)c,e|a,b}(\tau, \mathbf{w}) = \text{Tr}_c \left( W_c[0, 2\pi\tau] I_{c;c,e} \right) I_{e;a,b} W_a[0, w_1] W_b[0, w_2] |a\rangle \otimes |b\rangle. \quad (5.149)$$

Другая возможная торическая 2-точечная вильсоновская сеть соответствует среднему графу на рис. 13. Здесь мы фиксируем концевые точки как  $w_4 = -2\pi\tau$  и  $w_2 = 0$ . Отождествляя представления  $\mathcal{D}_d \cong \mathcal{D}_b$  и затем суммируя по всем состояниям  $|d\rangle = |b\rangle = |j_b, m\rangle$ , находим

$$\mathring{V}_{(s)b,e|a,c}(\tau, \mathbf{w}) = \text{Tr}_b \left( W_b[0, 2\pi\tau] I_{b;c,e} I_{e;a,b} \right) W_a[0, w_1] W_c[0, w_3] |a\rangle \otimes |c\rangle. \quad (5.150)$$

С помощью кроссинг-уравнений (5.144) можно видеть, что только что построенные 2-точечные торические вертексные функции связаны посредством  $6j$  символов Вигнера. В работе [178] явно проверено, что вертексные функции (5.150) и (5.149) с граничными векторами  $|a\rangle, |b\rangle$ , выбранными векторами младшего веса, равны глобальным 2-точечным торическим конформным блокам в  $t$ -канале и  $s$ -канале. В заключение отметим, что обе функции (5.149) и (5.150) сводятся к (5.147), если один из внешних спинов равен нулю. Например, можно положить  $j_a = 0$ , в случае чего  $I_{e;0,b} \sim \delta_{eb} \mathbb{1}_e$  (5.130) и  $W_a[0, w_1] = \mathbb{1}_a$ . То же самое верно при  $j_b = 0$ . Другими словами, 2-

точечные вертексные функции действительно воспроизводят 1-точечные вертексные функции, когда один из внешних спинов равен нулю. Соответствующие торические блоки обладают таким же свойством.

#### 5.4.4 Вырожденные операторы

Прежде чем в следующей главе рассматривать различные предельные блоки, давайте кратко обсудим происхождение и уместность рассмотрения вырожденных  $sl(2)$  конформных операторов. Т.к.  $sl(2) \subset Vir$ , конформные размерности вырожденных квази-примарных операторов можно получать как предел больших  $c$  в размерностях Каца  $\Delta_{(r,s)}$  с целыми  $r, s \geq 1$  [337]. Раскладываясь вокруг бесконечного центрального заряда  $c = \infty$ , получим следующие выражения для кацевских размерностей

$$\Delta_{(r,s)} = c \frac{1-r^2}{24} - \frac{s-1}{2} - \frac{(1-r)(13r-12s+13)}{24} + \mathcal{O}(1/c). \quad (5.151)$$

Отсюда следует, что в режиме большого заряда  $c$  можно различать легкие ( $\Delta \sim \mathcal{O}(c^0)$ ) и тяжелые ( $\Delta \sim \mathcal{O}(c^1)$ ) вырожденные операторы. Более того, операторы размерности  $\Delta_{(1,s)}$  всегда легкие,

$$\Delta_{(1,s)} = -\frac{s-1}{2} + \mathcal{O}(1/c), \quad (5.152)$$

а тяжелые операторы имеют размерность  $\Delta_{(r,s)}$  при  $r > 1$ . Типичным примером здесь является операторы низших размерностей: легкий оператор размерности  $\Delta_{(1,2)}$  и тяжелый оператор размерности  $\Delta_{(2,1)}$ .<sup>69</sup> С другой стороны,  $sl(2)$  подалгебра со всеми своими представлениями может рассматриваться как контракция Инону-Вигнера алгебры Вирасоро (см. Главу 6). Тогда формула (5.152) определяет  $1/c$  как малый параметр контракции и вырожденные вирасоровские примарные операторы размерности  $\Delta_{(1,s)}$  в пределе большого заряда  $c$  переходят в вырожденные  $sl(2)$  операторы, соответствующие конечномерным, неунитарным  $sl(2)$  модулям с (полу-)целыми спинами  $j = -(s-1)/2$ , где  $s = 1, 2, 3, \dots$

<sup>69</sup>Как мы видели ранее в этой главе, такой легкий оператор возникает в монодромном методе вычисления  $n$ -точечных классических (большие заряды  $c$ ) конформных блоков посредством  $(n+1)$ -точечных блоков с одним вырожденным легким оператором  $\Delta_{(1,2)}$ .

Из общезначительской точки зрения, можно заметить, что вырожденные примарные операторы составляют спектры минимальных  $\mathcal{W}_N$  моделей, в частности, вирасоровских  $Vir = \mathcal{W}_2$  минимальных моделей, что имеет прямое отношение к теме настоящей диссертации. Более того, специальный класс минимальных косетных  $CFT_2$  моделей считается дуальным  $3d$  гравитации высших спинов [58, 131]. Такие модели, комплиментарно стандартному пределу т'Хоофта, также рассматриваются в пределе большого заряда  $c$  [338, 339]. Несмотря на то, что граничная теория становится неунитарной (конформные размерности отрицательны, как, например, в обсуждении выше), подобный режим весьма интересен и показателен, т.к. согласно формуле Брауна-Энно,  $G_3 \sim 1/c$  [9], гравитация в объеме является квазиклассической. Более того, дуальная гравитационная теория может быть переформулирована как теория Черна-Саймонса, что опять возвращает нас назад к изучению вильсоновских сетей и конформных блоков, однако теперь для неунитарных конечномерных представлений [151, 340, 341, 342, 343].<sup>70</sup>

---

<sup>70</sup>Еще одним связанным направлением, где возникают неунитарные блоки с большим зарядом, является изучение термодинамики черных дыр и потеря информации в контексте  $AdS_3/CFT_2$  дуальности, как следствие симметрии Вирасоро, как в пределе  $c = \infty$ , так и с  $1/c$  поправками [344].

# Глава 6. Торические конформные блоки

В данной главе рассматриваются торические конформные блоки и их голографически дуальная реализация [155, 175, 176, 177, 178]. В основном, нас будут интересовать 1-точечные конформные блоки в различных режимах большого центрального заряда.

В первой части этой главы изучаются различные квазиклассические конформные блоки торической  $SFT_2$ . Существует несколько различных торических блоков при больших  $c$ : глобальный, лёгкий, тяжёлый-лёгкий (HL) и классический блоки. Три из них изучались в сферическом случае. Мы добавляем ещё один торический тип в этот список: лёгкий блок, ранее не известный. Действительно, 1-точечный торический конформный блок зависит от трёх конформных параметров, асимптотическое поведение которых определяет различные предельные функции блока. Мы опишем четыре торических блока, вычисленные при разных масштабах конформных размерностей по отношению к центральному заряду, который либо велик, либо бесконечен. Оказывается, такие квазиклассические блоки связаны друг с другом. Более того, торические блоки, соответствующие бесконечному центральному заряду, определяются разными контракциями алгебры Вирасоро: это глобальный, лёгкий и тяжёлый-лёгкий блоки. Блок четвертого типа – (пертурбативный) классический блок, определяемый как асимптотическое разложение исходного конформного блока при большом центральном заряде, в принципе можно связать с  $1/c$  деформациями одной из контракций алгебры Вирасоро.

Во второй части главы рассматривается реализация торических блоков в терминах графов на трехмерном пространстве. С одной стороны, это геодези-

ческие сети мировых линий, дуальные пертурбативным классическим блокам, по аналогии с рассмотрением в разделе 5.3. С другой стороны, будет изучено соответствие глобальных блоков с вильсоновскими сетями в гравитационной теории Черна-Саймонса согласно общему изложению раздела 5.4.

## 6.1 1-точечный торический блок

1-точечный конформный блок торической  $CFT_2$  определяется (см., например, [345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353]) как голоморфный вклад в 1-точечную корреляционную функцию заданного (квази-)примарного оператора,

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta, \tilde{\Delta}}(z, \bar{z}) \rangle = \text{Tr} \left( q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0} \mathcal{O}_{\Delta, \tilde{\Delta}}(z, \bar{z}) \right) = \sum_{\tilde{\Delta}, \tilde{\bar{\Delta}}} C_{\tilde{\Delta}, \tilde{\bar{\Delta}}}^{\Delta, \bar{\Delta}} \mathcal{V}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(z, q|c) \mathcal{V}_{\tilde{\bar{\Delta}}, \bar{\Delta}}(\bar{z}, \bar{q}|c), \quad (6.1)$$

где след  $\text{Tr}$  берется по пространству состояний теории, правая часть определяет ОРЕ разложение на (анти)голоморфные торические блоки, коэффициентами разложения являются 3-точечные структурные константы с двумя отождествленными конформными размерностями, что соответствует образованию петли во внутреннем канале (см., например, рис. 14 или 17). Параметр  $q = \exp 2\pi i\tau$ , где  $\tau \in \mathbb{H}$  это модуль тора, конформные размерности  $\Delta, \tilde{\Delta}$  параметризуют внешний (квази-)примарный оператор и ОРЕ канал.

Компонентный вид 1-точечного торического блока задается выражением

$$q^{c/24 - \tilde{\Delta}} \mathcal{V}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q|c) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \mathcal{V}_n(\Delta, \tilde{\Delta}, c) = 1 + \left[ 1 + \frac{(\Delta - 1)\Delta}{2\tilde{\Delta}} \right] q + \dots, \quad (6.2)$$

где коэффициенты разложения имеют вид следующих матричных элементов

$$\mathcal{V}_n(\Delta, \tilde{\Delta}, c) = \frac{1}{\langle \tilde{\Delta} | \mathcal{O}_{\Delta}(z) | \tilde{\Delta} \rangle} \sum_{n=|M|=|N|} B^{M|N} \langle \tilde{\Delta}, M | \mathcal{O}_{\Delta}(z) | N, \tilde{\Delta} \rangle, \quad (6.3)$$

где  $|\tilde{\Delta}, M\rangle = L_{-m_1}^{i_1} \dots L_{-m_k}^{i_k} |\tilde{\Delta}\rangle$  – потомки в модуле Верма алгебры Вирасоро, порожденные из примарного вектора  $|\tilde{\Delta}\rangle$ . Здесь  $M$  обозначает базисные мономы,  $|M| = i_1 m_1 + \dots + i_k m_k$  обозначает сумму индексов генераторов Вирасоро. Матрица  $B^{M|N}$  является обратной к матрице Грама  $B_{M|N} = \langle \tilde{\Delta}, M | N, \tilde{\Delta} \rangle$ . Заметим, что блок не зависит от  $z$  согласно тождествам Уорда.

Рассмотрим разложение функции блока (6.2) при больших  $c$ . Все ассоциированные с режимом большого заряда конформные блоки называются квазиклассическими. Возможны различные квазиклассические блоки, поскольку (6.2) также зависит от конформных размерностей  $\Delta$  и  $\tilde{\Delta}$ , которые можно масштабировать в терминах центрального заряда. Будем различать следующие четыре типа.

- $\Delta$  и  $\tilde{\Delta}$  фиксированы в пределе  $c \rightarrow \infty$ . В зависимости от конкретной  $1/c \rightarrow 0$  контракции алгебры Вирасоро возникают глобальный или лёгкий блоки. Лёгкий блок является ведущей асимптотикой в  $c$ -рекуррентном представлении торического блока [175].
- $\Delta$  и  $\tilde{\Delta}/c$  фиксированы в пределе  $c \rightarrow \infty$ . В этом случае получаем тяжёлый-лёгкий (HL) блок. Следовательно,  $\tilde{\Delta} \gg 1$  и, таким образом,  $\Delta/\tilde{\Delta} \ll 1$ . Примечательно, что противоположный режим тяжёлого внешнего оператора и лёгкого обменного оператора не существует для 1-точечного конформного блока тора, ср. первый коэффициент в (6.2). Следовательно, концепция разложения вблизи вакуумного блока (промежуточный канал размерности ноль), используемая для вычисления конформных блоков в  $SFT_2$  на плоскости [134, 135, 137, 140, 142, 354] (см. Главу 5), напрямую не может быть применен к 1-точечным торическим блокам.
- $\Delta/c$  и  $\tilde{\Delta}/c$  фиксированы при  $c \rightarrow \infty$ . Возникающее асимптотическое разложение функции блока (6.2) – это экспонента классического конформного блока. Пертурбативный классический торический блок получается при  $\Delta/\tilde{\Delta} \ll 1$ .

В последующих подразделах мы подробно остановимся на каждом из четырех введенных выше торических блоков.

### 6.1.1 Глобальный торический блок

Алгебра симметрий Вирасоро  $Vir$  на любой римановой поверхности содержит конечномерную подалгебру  $sl(2, \mathbb{C}) \subset Vir$ . Следовательно, всегда можно

ограничить вирасоровский конформный блок общего вида конформным блоком подалгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ . Возникающий таким образом глобальный блок оказывается значительно более простой функцией известной в замкнутом виде (см. ниже), зависящей от конформных размерностей, но не от центрального заряда. Заметим, что общий конформный блок в  $CFT_d$  для  $d > 2$  при ограничении на  $d = 2$  измерений даёт именно глобальный блок.

При переходе к  $sl(2, \mathbb{C})$  конформной симметрии общая формула (6.3) упрощается и даёт определение глобального торического блока

$$\mathcal{F}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \mathcal{F}_n(\Delta, \tilde{\Delta}), \quad \mathcal{F}_n(\Delta, \tilde{\Delta}) = \frac{1}{\langle \tilde{\Delta} | \mathcal{O}_{\Delta}(z) | \tilde{\Delta} \rangle} \frac{\langle \tilde{\Delta} | L_1^n \mathcal{O}_{\Delta}(z) L_{-1}^n | \tilde{\Delta} \rangle}{\langle \tilde{\Delta} | L_1^n L_{-1}^n | \tilde{\Delta} \rangle}, \quad (6.4)$$

где  $L_{0, \pm 1}$  – базисные элементы алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ . Коэффициенты можно найти в явном виде<sup>71</sup>

$$\mathcal{F}_n(\Delta, \tilde{\Delta}) = \sum_{p=0}^n \frac{n!}{(n-p)!(p!)^2} \frac{\Gamma(2\tilde{\Delta})}{\Gamma(2\tilde{\Delta}+p)} \frac{\Gamma(\Delta+p)}{\Gamma(\Delta-p)}. \quad (6.5)$$

Удобное представление глобального торического блока задается гипергеометрической функцией с префактором [348]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q) &= \frac{q^{\tilde{\Delta}}}{1-q} {}_2F_1\left(\Delta, 1-\Delta, 2\tilde{\Delta} \mid \frac{q}{q-1}\right) = \\ &= 1 + \left[1 + \frac{(\Delta-1)\Delta}{2\tilde{\Delta}}\right]q + \left[1 + \frac{(\Delta-1)\Delta}{2\tilde{\Delta}} + \frac{(\Delta-1)\Delta(\Delta^2 - \Delta + 4\tilde{\Delta})}{4\tilde{\Delta}(2\tilde{\Delta}+1)}\right]q^2 + \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

Отметим, что при  $\Delta = 0$  приведенная выше 1-точечная функция блока становится  $sl(2, \mathbb{C})$  характером

$$\mathcal{F}_{\tilde{\Delta}, 0}(q) = \frac{q^{\tilde{\Delta}}}{1-q} = q^{\tilde{\Delta}} (1 + q + q^2 + q^3 + \dots), \quad (6.7)$$

что указывает на существование ровно одного состояния на каждом уровне соответствующего модуля Верма алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$ .

Выражение (6.6) предполагает, что функция глобального блока удовлетворяет гипергеометрическому уравнению Гаусса. Чтобы это увидеть, преобразованием Пфаффа можно привести глобальный торический блок (6.6) к

<sup>71</sup>Детальный вывод элементов матрицы  $sl(2, \mathbb{C})$  можно найти в [174].

виду<sup>72</sup>

$$\mathcal{F}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q) = (1 - q)^{-\Delta} {}_2F_1(2\tilde{\Delta} - \Delta, 1 - \Delta, 2\tilde{\Delta} | q) . \quad (6.8)$$

Таким образом, возникает ассоциированное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\mathcal{F}'' + 2 \left( \frac{\tilde{\Delta}}{q} - \frac{1}{1 - q} \right) \mathcal{F}' - \left( \frac{\Delta(\Delta - 1)}{q(1 - q)^2} + \frac{2\tilde{\Delta}}{q(1 - q)} \right) \mathcal{F} = 0 , \quad (6.9)$$

которое имеет три особые точки  $0, 1$  и  $\infty$ . Одно из двух независимых решений даётся (6.8). Заметим, что глобальные блоки на сфере удовлетворяют аналогичным дифференциальным уравнениям второго порядка, следующим из задачи на собственные значения операторов Казимира  $sl(2, \mathbb{C})$  в заданных ОРЕ каналах [355, 174]. Случай тора более изошрённый, поскольку глобальной симметрией является  $u(1) \oplus u(1) \subset sl(2, \mathbb{C})$ , так что термин «глобальный» здесь несколько запутывает. С другой стороны, уравнение (6.9) должно реализовываться как условие на канал Казимира для тора, что было явно продемонстрировано в работе [152].

Рассмотрим режим, в котором размерности  $\Delta$  и  $\tilde{\Delta}$  стремятся к бесконечности взаимно согласованным образом. А именно, введём параметр растяжения, обозначенный  $\kappa$ ,

$$\Delta = \kappa \sigma , \quad \tilde{\Delta} = \kappa \tilde{\sigma} , \quad (6.10)$$

где  $\sigma$  и  $\tilde{\sigma}$  – перерастянутые конформные размерности. Рассмотрим асимптотическое поведение функции блока (6.8) при больших  $\kappa$ , при условии, что  $\sigma$  и  $\tilde{\sigma}$  фиксированы. Сформулируем следующее

**Утверждение 6.1.** *Асимптотическое разложение функции глобального блока при больших  $\kappa$  имеет вид*

$$\mathcal{F}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q) = \exp [ \kappa g_0(\sigma, \tilde{\sigma} | q) ] , \quad \kappa \rightarrow \infty , \quad (6.11)$$

---

<sup>72</sup>Заметим, что 4-точечный глобальный блок на сфере также даётся гипергеометрической функцией. Можно предположить, что соответствие между 1-точечным торическим блоком и 4-точечным сферическим блоком [346, 347, 348] является точным в случае  $sl(2, \mathbb{C})$  симметрии, если конформные размерности удовлетворяют подходящим линейным соотношениям, а  $q$  и  $z$  соотносятся обычным образом.



где  $g_0(\sigma, \tilde{\sigma}|q)$  даётся степенным рядом

$$g_0(\sigma, \tilde{\sigma}|q) = \tilde{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} g_{0n}(q) \left(\frac{\sigma}{\tilde{\sigma}}\right)^{2n}, \quad g_{0n}(q) = \frac{q^n}{\varkappa_n} \frac{q^{n-1} + \gamma_{n,n-2}q^{n-2} + \dots + \gamma_{n,0}}{(1-q)^{2n-1}}, \quad (6.12)$$

величины  $\gamma_{n,i} = (-1)^{n-i+1} \binom{2n-1}{n+i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , – это биномиальные коэффициенты и  $\varkappa_n = \frac{4^n(2n-1)n}{2}$ .

Доказательство напрямую следует из теории дифференциальных уравнений с большим параметром. В общем случае, асимптотическое разложение при больших  $\kappa$  принимает вид

$$\mathcal{F}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q) = \exp \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^{\lambda-n} g_n(\sigma, \tilde{\sigma}|q) \right], \quad (6.13)$$

где  $\lambda$  – положительное целое число. Коэффициенты разложения  $g_n(\sigma, \tilde{\sigma}|q)$  можно найти подстановкой (6.13) в исходное дифференциальное уравнение (6.9). Возникающие рекуррентные уравнения фиксируют  $\lambda = 1$ , а первый коэффициент  $g_0(\sigma, \tilde{\sigma}|q)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$(g'_0(\sigma, \tilde{\sigma}|q))^2 + \frac{2\tilde{\sigma}}{q} g'_0(\sigma, \tilde{\sigma}|q) - \frac{\sigma^2}{q(1-q)^2} = 0, \quad (6.14)$$

где штрих обозначает производную по  $q$ . Все другие коэффициенты в (6.13) выражаются в терминах  $g_0(\sigma, \tilde{\sigma}|q)$  и его производных. Квадратное уравнение (6.14) даёт два значения производной, из которых выбирается пертурбативно регулярное решение в  $q = 0$ . Интегрированием получаем

$$g_0(\sigma, \tilde{\sigma}|q) = \int_0^q dx \left( -\frac{\tilde{\sigma}}{x} + \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^2}{x^2} + \frac{\sigma^2}{x(1-x)^2}} \right). \quad (6.15)$$

Константа интегрирования фиксируется условием нормировки  $\mathcal{F}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(0) = 1$ , или, эквивалентно,  $g_0(\sigma, \tilde{\sigma}|0) = 0$ . Теперь разложим подынтегральное выражение в правой части (6.15) по малому параметру  $\delta = \sigma/\tilde{\sigma}$ . Интегрированием результата придём к (6.12).

### 6.1.2 Лёгкий торический блок

В общем случае лёгкий блок можно определить как  $c \rightarrow \infty$  предел полного квантового вирасоровского конформного блока. Например, известно, что на сфере предельная 4-точечная блочная функция является гипергеометрической [158]. В 5-точечном случае на сфере это гипергеометрический ряд Хорна по двум переменным [174], случай  $n$  точек вставок был изучен в работе [356]. Лёгкие сферические блоки также известны в случае  $W_N$  симметрии [357, 358]. Лёгкий и глобальный блоки на сфере совпадают, вне зависимости от числа точек вставок.

Разложим блоки с конформными размерностями  $\Delta = \mathcal{O}(c^0)$  и  $\tilde{\Delta} = \mathcal{O}(c^0)$  вблизи точки  $c = \infty$ . В этом режиме вирасоровский торический блок (6.2) имеет вид

$$q^{c/24 - \tilde{\Delta}} \mathcal{V}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q|c) = \mathcal{L}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q) + \mathcal{O}(c^{-1}), \quad (6.16)$$

где ведущий вклад определяется как 1-точечный лёгкий торический блок. Оказывается, что глобальный и лёгкий блоки на торе отличаются. Лёгкий блок является формальным степенным рядом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(\Delta, \tilde{\Delta}) q^n = \\ &= 1 + \left[ 1 + \frac{(\Delta - 1)\Delta}{2\tilde{\Delta}} \right] q + \left[ 2 + \frac{(\Delta - 1)\Delta}{2\tilde{\Delta}} + \frac{(\Delta - 1)\Delta(\Delta^2 - \Delta + 4\tilde{\Delta})}{4\tilde{\Delta}(2\tilde{\Delta} + 1)} \right] q^2 + \dots \end{aligned} \quad (6.17)$$

Полезно сравнить с выражением глобального блока (6.6) и обнаружить небольшое различие в первом члене второй квадратной скобки. Тем не менее, различие нарастает в старших степенях модулярного параметра и мы приходим к следующему утверждению.

**Утверждение 6.2.** *Глобальный и лёгкий блоки связаны соотношением*

$$\mathcal{L}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q) = \frac{1 - q}{\varphi(q)} \mathcal{F}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q), \quad (6.18)$$

где  $\varphi(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$  — это функция Эйлера.

При разложении по модулярному параметру соотношение (6.18) принимает вид

$$\mathcal{L}_n(\Delta, \tilde{\Delta}) = \sum_{k=0}^n p_1(n-k) \mathcal{F}_k(\Delta, \tilde{\Delta}), \quad (6.19)$$

где  $p_1(n-k)$  – число разбиений  $n-k$ , не содержащих 1, при условии  $p_1(0) = 1$ . Эквивалентно,  $\mathcal{L}_n = [\mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n-2} + \mathcal{F}_{n-3} + p_1(4)\mathcal{F}_{n-4} + \dots]$ .

Подробное доказательство Утверждения **6.2** приводится в Приложении **Е.1**. Если вкратце, то анализируются матричные элементы примарного оператора и элементы матрицы Грама, являющиеся полиномиальными функциями центрального заряда. Заметим, что коэффициенты блока уровня  $n$  могут быть представлены как след произведения матриц  $[n \times n]$ , см. (6.3). Таким образом, коэффициенты блока оказываются рациональными функциями центрального заряда  $c$ . В Приложении **Е.1** показывается, что лишь диагональные элементы дают вклад в пределе  $c \rightarrow \infty$ . С другой стороны, диагональные элементы в точности являются коэффициентами глобального блока, взвешенные с числом базисных элементов  $L_{-1}$  алгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  на заданном уровне, что приводит к весовому множителю в соотношении (6.18).

### 6.1.3 Контракции алгебры Вирасоро

Рассмотрим контракцию Инону–Вигнера [359] алгебры Вирасоро, где параметр деформации – это обратный центральный заряд. В пределе  $c \rightarrow \infty$  есть два различных типа контракций, соответствующих глобальному и лёгкому торическим блокам. Одна из контракций порождает алгебру Гейзенберга, что объясняет вид множителя в (6.18).

Коммутационные соотношения алгебры Вирасоро и закон преобразования примарных операторов имеют вид

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (6.20)$$

$$[L_m, \mathcal{O}_\Delta] = z^m(z\partial_z + (m+1)\Delta)\mathcal{O}_\Delta. \quad (6.21)$$

Перемасштабированные генераторы определяются как  $L_m \rightarrow c^{-\gamma(m)}L_m$ , где  $\gamma(m)$  – некоторая функция индекса  $m \in \mathbb{Z}$ . Есть два естественных случая:

(А)  $\gamma(|m| \leq 1) = 0$  и  $\gamma(|m| \geq 2) = 1$ ; (В)  $\gamma(|m| \leq 1) = 0$  и  $\gamma(|m| \geq 2) = 1/2$ .  
Обозначим

$$L_{0,\pm 1} \rightarrow l_{0,\pm 1} = L_{0,\pm 1}, \quad L_m \rightarrow a_m = L_m/c^\gamma, \quad |m| \geq 2, \quad (6.22)$$

где  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 1/2$  отвечают случаям (А) и (В).

Закон преобразования (6.21) также перемасштабируется. В пределе  $c \rightarrow \infty$  удержание конформной размерности  $\Delta$  конечной приводит к тому, что в обоих случаях (А) и (В) примарный оператор преобразуется как

$$[l_m, \mathcal{O}_\Delta] = z^m(z\partial_z + (m+1)\Delta)\mathcal{O}_\Delta, \quad [a_m, \mathcal{O}_\Delta] = 0. \quad (6.23)$$

Следовательно, операторы  $\mathcal{O}_\Delta$  одновременно являются  $sl(2, \mathbb{C})$  конформными операторами и  $a_m$ -синглетами.

В случае (А) контрактированная алгебра Вирасоро разбивается на алгебру  $sl(2, \mathbb{C})$  и бесконечномерную абелеву алгебру  $\mathcal{A}$ ,

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n}, \quad [a_m, a_n] = 0, \quad (6.24)$$

$$[l_m, a_n] = (m-n)a_{m+n}, \quad |m+n| \geq 2; \quad [l_m, a_n] = 0, \quad |m+n| \leq 1.$$

Контрактированная алгебра это полупрямая сумма  $Vir_A = sl(2, \mathbb{C}) \ltimes \mathcal{A}$ , а  $\pm$  ветви  $\mathcal{A}$  являются  $sl(2, \mathbb{C})$ -модулями младшего веса. В случае (В) контрактированная алгебра Вирасоро разбивается на алгебру  $sl(2, \mathbb{C})$  и бесконечномерную алгебру Гейзенберга  $\mathcal{H}$

$$[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n}, \quad [a_m, a_n] = \frac{m(m^2-1)}{12}\delta_{m+n,0}, \quad (6.25)$$

$$[l_m, a_n] = (m-n)a_{m+n}, \quad |m+n| \geq 2; \quad [l_m, a_n] = 0, \quad |m+n| \leq 1.$$

Контрактированная алгебра это полупрямая сумма  $Vir_B = sl(2, \mathbb{C}) \ltimes \mathcal{H}$ , а  $\pm$  ветви  $\mathcal{H}$  являются  $sl(2, \mathbb{C})$ -модулями младшего веса. Сравнивая (6.24) и (6.25) видим, что единственное различие состоит в центральном члене в (6.25), что объясняется тем фактом, что алгебра Гейзенберга является центрально-расширенной абелевой алгеброй.

Покажем, что контрактированные алгебры  $Vir_A$  и  $Vir_B$  соответствуют глобальному и лёгкому торическим блокам. Пусть базисные мономы представляются в виде

$$|M, \tilde{\Delta}\rangle = a_{\bar{M}} l_{-1}^s |\tilde{\Delta}\rangle, \quad |M| = s + |\bar{M}|, \quad (6.26)$$

где введены обозначения  $a_{\bar{M}} = a_{-m_1}^{i_1} \dots a_{-m_k}^{i_k}$  и  $i_1 m_1 + \dots + i_k m_k = |\bar{M}|$ . Здесь действуют стандартные правила сопряжения  $a_{-m} = (a_m)^\dagger$ .

Глобальный торический блок соответствует случаю (А). Вычислим коэффициенты блока (6.3), где базисные мономы  $|\tilde{\Delta}, M\rangle$  будут элементами модуля контрактированной алгебры  $Vir_A$ , а примарный оператор удовлетворяет (6.23). Абелев фактор  $\mathcal{A}$  реализуется тривиально, и единственными состояниями, дающими вклад в коэффициенты блока, имеют  $\bar{M} = 0$ . Следовательно, коэффициенты блока уровня  $n$  содержат максимум  $l_{\pm 1}$  генераторов,  $n = s$ , так что итоговое выражение будет глобальным блоком (6.4). Заметим, что транкирование алгебры Вирасоро до подалгебры  $sl(2, \mathbb{C})$  из раздела **6.1.1** эквивалентно рассмотрению контрактированной алгебры  $Vir_A$  с тривиально реализованным абелевым фактором.

Лёгкий торический блок соответствует случаю (В). Для вычисления конформного блока алгебры  $Vir_B$  заметим, что матрица Грама и матричные элементы примарного поля диагональны,  $\langle \tilde{\Delta}, M | N, \tilde{\Delta} \rangle = \delta_{MN} \alpha_M \langle \tilde{\Delta} | l_1^s l_{-1}^s | \tilde{\Delta} \rangle$  и  $\langle \tilde{\Delta}, M | \mathcal{O}_\Delta | N, \tilde{\Delta} \rangle = \delta_{MN} \beta_M \langle \tilde{\Delta} | l_1^s \mathcal{O}_\Delta l_{-1}^s | 1 \tilde{\Delta} \rangle$ , где  $\alpha_M = \beta_N$  – это ненулевые константы, бра и кет векторы даны в базисе (6.26). Т.к.  $\mathcal{H}$  является идеалом и  $a_m | \tilde{\Delta} \rangle = 0$ , находим, что соотношение  $[a_m, l_{-1}^s] | \tilde{\Delta} \rangle = 0$  даёт первое из вышеприведенных равенств. Второе равенство следует из первого равенства и коммутатора (6.23). Следовательно, число  $s$  генераторов  $l_m$  в матричных элементах на уровне  $n$  меняется от 0 до  $n$ .

Видим, что в отличие от случая (А), фактор Гейзенберга  $\mathcal{H}$  реализуется нетривиально, и, таким образом, ассоциированный с фактором  $sl(2, \mathbb{C})$  глобальный блок и блок, ассоциированный с полной алгеброй  $Vir_B = sl(2, \mathbb{C}) \rtimes \mathcal{H}$ , становятся связаны. При вычислении коэффициентов разложения (6.3) на уровне  $n$ , бесконечномерную алгебру Гейзенберга  $\mathcal{H}$  можно заменить конечномерной алгеброй Гейзенберга  $\mathcal{H}_{p(n)+1}$  с числом  $p(n) + 1$  базисных элементов, где  $k(n)$  – число разбиений  $n$ . Тогда воспользовавшись соотношениями на диагональные матрицы, найдём, что соответствующий конформный блок даётся суммой коэффициентов глобального блока  $\mathcal{F}_i$ ,  $i = n, n - 2, n - 3, \dots, 1, 0$  из (6.4) с весами, равными числу генераторов  $l_{-1}$  в базисных мономах на уровне  $n$ , ср. (6.19). Действительно, базис (6.26) естественным образом пронумерован числом генераторов  $l_{-1}$ , так что можно организовать все базисные элементы

согласно  $s$ -нумерации. Тогда первые несколько элементов на уровне  $n$  имеют вид  $l_{-1}^n|\tilde{\Delta}\rangle$ ,  $a_{-2}l_{-1}^{n-2}|\tilde{\Delta}\rangle$ ,  $a_{-3}l_{-1}^{n-3}|\tilde{\Delta}\rangle$ , и т.д. Таким образом, находим, что блок  $Vir_B = sl(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{H}$  действительно отождествляется с лёгким блоком, выраженным в терминах глобального блока (6.18).

#### 6.1.4 НЛ торический блок

Тяжёлый-лёгкий (НЛ) предел функций конформных блоков предполагает, что часть размерностей перемасштабируются линейно по отношению к центральному заряду, а другая часть размерностей фиксирована [138, 135]. Таким образом, в режиме больших значений  $c$  можно различать тяжёлые и лёгкие операторы (см. также раздел 5.4.4).

1-точечный блок зависит от двух конформных размерностей  $\Delta$  и  $\tilde{\Delta}$ . В этом случае НЛ предел определяется условиями  $\Delta = \mathcal{O}(c^0)$  и  $\tilde{\Delta} = \mathcal{O}(c^1)$  при  $c \rightarrow \infty$ . Заметим, что в отличие от сферических блоков внешний оператор лёгкий, а обменный оператор тяжёлый. В обратном режиме блок не существует, поскольку функция блока расходится. Следовательно, есть только один НЛ торический блок, задаваемый следующей предельной функцией

$$\mathcal{H}_{\tilde{\epsilon}, \Delta}(q) = \lim_{\substack{c \rightarrow \infty \\ \Delta, \tilde{\epsilon} \text{ - фикс}}} q^{c/24 - \tilde{\Delta}} \mathcal{V}(\Delta, c\tilde{\epsilon}, c|q), \quad (6.27)$$

где  $\tilde{\epsilon} = \tilde{\Delta}/c$  – внутренняя классическая конформная размерность. Коэффициенты блока, вычисленные до достаточно высокого порядка, имеют вид

$$\mathcal{H}_{\tilde{\epsilon}, \Delta}(q) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + \dots = \frac{1}{\varphi(q)}, \quad (6.28)$$

где  $\varphi(q)$  – функция Эйлера, ср. (6.18). Здесь последнее равенство является гипотезой, основанной на первых членах разложения, следующих из явных вычислений первых нескольких уровней. Ниже показывается, что НЛ блок действительно является обратной функцией Эйлера. В этом случае НЛ блок равен 0-точечному блоку, или, что эквивалентно, характеру алгебры Вира-соро. Заметим, что НЛ блок, как оказывается, не зависит от конформных размерностей, т.е.  $\mathcal{H}_{\tilde{\epsilon}, \Delta}(q) \equiv \mathcal{H}(q)$ .

**Утверждение 6.3.** *НЛ блок является предельным случаем лёгкого блока*

$$\mathcal{H}(q) = \lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q) , \quad (6.29)$$

где функция  $\mathcal{L}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q)$  задана выражением (6.17).

Доказательство напрямую следует из соотношения между глобальным и лёгким блоками (6.18) и предела функции (6.6) при  $\tilde{\Delta} \rightarrow \infty$ .

Соотношение (6.29) аналогично соотношению между глобальным и НЛ блоками на сфере [138, 174]. Напомним, что два тяжёлых примарных оператора в сферических блоках могут порождаться сингулярным конформным отображением  $z \rightarrow z^\alpha$ , где  $\alpha$  выражается в терминах тяжёлых размерностей, см. (Г.35). Утверждается, что НЛ блок является глобальным блоком со вставками лёгких операторов, пересчитанных в новых координатах, дополненным, согласно правилу преобразования корреляторов, соответствующими якобианами. С голографической точки зрения, конформное отображение генерирует тяжёлые вставки на границе, отвечающие конической сингулярности или ВТЗ черной дыре (см. Главу 5). В случае тора, внешний оператор легче обменного, и поэтому не может создавать сингулярности подобно тому, как это происходит в сферическом случае. Соответствующая геометрия в объеме задается термальным пространством  $AdS_3$  [155]. Таким образом, дополнительных якобианов перехода не возникает и лёгкий торический блок, заменяющий глобальный блок в сферическом случае (согласно Утверждению 6.2), связан с НЛ блоком соотношением (6.29).

Аналогично рассмотрению глобального и лёгкого блоков, НЛ блок (6.28) связан с определённой контракцией алгебры Вирасоро. Действительно, перемасштабирование генераторов Вирасоро

$$L_0 \rightarrow l_0 = L_0/c , \quad L_m \rightarrow l_m = L_m/\sqrt{2c} , \quad m \neq 0 , \quad (6.30)$$

приводит к тому, что в пределе  $c \rightarrow \infty$  коммутационные соотношения контрактированной алгебры Вирасоро и закон преобразования примарного оператора принимают вид

$$[l_m, l_n] = m\delta_{m+n,0} l_0 + \frac{m(m^2 - 1)}{24} \delta_{m+n,0} , \quad m, n \in \mathbb{Z} , \quad (6.31)$$

$$[l_m, \mathcal{O}_\Delta(z)] = 0 , \quad m \in \mathbb{Z} . \quad (6.32)$$

В данном случае, контрактивная алгебра Вирасоро оказывается бесконечномерной алгеброй Гейзенберга  $\mathcal{H}$ . Ее коммутационные соотношения (6.31) могут быть записаны в стандартной форме путём линейного преобразования базисных элементов  $l_m$ .<sup>73</sup> Важно, что внешний оператор оказывается  $\mathcal{H}$ -синглетом. Следовательно, коэффициенты предельного блока (6.3) – это следы единичных  $[p(n) \times p(n)]$  матриц

$$\mathcal{H}_n = \text{Tr} \mathbb{1}_{p(n)} \equiv p(n) , \quad (6.33)$$

где  $p(n)$  – разбиение уровня  $n$ , ср. (6.28). Конкретная форма соответствующей матрицы Грама значения не имеет.

### 6.1.5 Пертурбативный классический торический блок

В отличие от рассмотренных выше предельных функций конформного блока в этом разделе рассматривается асимптотическое разложение торического блока при больших значениях центрального заряда  $c$ , когда все конформные размерности растут линейно, т.е.  $\Delta = \mathcal{O}(c^1)$  и  $\tilde{\Delta} = \mathcal{O}(c^1)$ . Это означает, что внешние и обменные операторы тяжёлые. Раскладывая функцию блока (6.2) вблизи точки  $c = \infty$  получаем следующий ряд Лорана

$$\mathcal{V}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q|c) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{v_n(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q)}{c^n} , \quad (6.34)$$

где конечные параметры

$$\epsilon = \frac{\Delta}{c} \quad \text{и} \quad \tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\Delta}}{c} , \quad (6.35)$$

являются классическими конформными размерностями, а  $v_n(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q)$  – это степенные ряды по модулярному параметру  $q$  с коэффициентами разложения, являющимися рациональными функциями от  $\epsilon$  и  $\tilde{\epsilon}$ .

При больших  $c$  правильная часть ряда (6.34) стремится к нулю. Менее очевиден тот факт, что главная часть экспоненцируется [173]. Следовательно,

<sup>73</sup>Заметим, что исходная подалгебра  $sl(2, \mathbb{C})$  контрактуется в трёхмерную алгебру Гейзенберга  $\mathcal{H}_3 \subset \mathcal{H}$ , см. также [360].



1-точечный торический блок асимптотически эквивалентен (см. также Главу 5)

$$\mathcal{V}_{\tilde{\Delta}, \Delta}(q|c) \sim \exp [c f(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q)] \quad \text{при} \quad c \rightarrow \infty . \quad (6.36)$$

Здесь, функция  $f(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q)$  – это классический конформный блок на торе [353]

$$f(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q) = (\tilde{\epsilon} - 1/4) \log q + \sum_{n=1}^{\infty} q^n f_n(\epsilon, \tilde{\epsilon}) = (\tilde{\epsilon} - 1/4) \log q + \frac{\epsilon^2}{2\tilde{\epsilon}} q + \dots . \quad (6.37)$$

Другие коэффициенты на нижних уровнях можно найти в работах [353, 155]. Заметим, что коэффициенты  $f_n(\epsilon, \tilde{\epsilon})$  являются комбинациями коэффициентов разложения  $v_{m \geq 0}(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q)$  в (6.34).

1-точечный пертурбативный классический торический блок определяется введением безразмерного параметра лёгкости

$$\delta = \Delta/\tilde{\Delta} < 1 , \quad (6.38)$$

который показывает относительный вес размерностей при любых значениях центрального заряда  $\Delta/\tilde{\Delta} = \epsilon/\tilde{\epsilon}$  [140, 174]. Переходя от исходной параметризации  $(\epsilon, \tilde{\epsilon})$  к новой параметризации в терминах параметра лёгкости  $(\delta, \tilde{\epsilon})$ , классический конформный блок представляется как двойной ряд по параметрам  $\delta$  и  $\tilde{\epsilon}$ ,

$$f(\delta\tilde{\epsilon}, \tilde{\epsilon}|q) = \sum_{n=2}^{\infty} \psi_n(\tilde{\epsilon}|q) \delta^n , \quad \text{где} \quad \psi_n(\tilde{\epsilon}|q) = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_n^{(m)}(q) \tilde{\epsilon}^m . \quad (6.39)$$

Удерживая в исходном классическом блоке члены, не более чем линейные по  $\tilde{\epsilon}$ , получим линеаризованную версию функции торического блока [155]

$$f(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q) = f^{lin}(\delta, \tilde{\epsilon}|q) + \mathcal{O}(\tilde{\epsilon}^2) . \quad (6.40)$$

Ведущий член в этом разложении определяется как пертурбативный классический торический блок.

Функция  $f^{lin}(\delta, \tilde{\epsilon}|q)$  задаётся коэффициентами разложения  $\psi_n^{(1)}(q)$  ряда (6.39). Оказывается, что  $\psi_{2k+1}^{(1)}(q) = 0$  при  $k = 1, 2, \dots$ . Обозначая  $\psi_{2k}^{(1)}(q) \equiv f_k^{(1)}(q)$  найдём пертурбативный классический торический блок в виде следующего ряда

$$f^{lin}(\delta, \tilde{\epsilon}|q) \equiv (\tilde{\epsilon} - 1/4) \log q + \tilde{\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(1)}(q) \delta^{2n} . \quad (6.41)$$

Коэффициенты разложения в (6.41) можно явно вычислить до высокого порядка, что позволяет предположить общую формулу [155]

$$f_n^{(1)} = \frac{q^n}{\varkappa_n} \frac{q^{n-1} + \gamma_{n,n-2}q^{n-2} + \dots + \gamma_{n,0}}{(1-q)^{2n-1}}, \quad (6.42)$$

где  $\gamma_{n,i} = (-1)^{n-i+1} \binom{2n-1}{n+i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , – биномиальные коэффициенты, а  $\varkappa_n$  – некоторые постоянные  $\varkappa_1 = 2$ ,  $\varkappa_2 = 48$ ,  $\varkappa_3 = 480$ ,  $\varkappa_4 = 3584$ ,  $\varkappa_5 = 23040$ , и т.д.<sup>74</sup>

Примечательно, что пертурбативный классический торический блок связан с глобальным блоком при больших размерностях. А именно, сформулируем следующую гипотезу, которую можно доказывать явным вычислением в любом порядке.

**Гипотеза 6.1.** Коэффициенты  $g_{0n}(q)$  экспоненцированного глобального блока (6.12) и коэффициенты пертурбативного классического блока  $f_n^{(1)}(q)$  (6.41) совпадают, т.е. имеет место равенство

$$f_n^{(1)}(q) = g_{0n}(q). \quad (6.43)$$

Иначе говоря, соотношение (6.43) гласит, что переход от параметризации  $(\varkappa, \sigma, \tilde{\sigma})$  глобального блока (6.10) к параметризации  $(c, \epsilon, \tilde{\epsilon})$  классического блока (6.35) устанавливает точное равенство пертурбативного классического блока экспоненциальному выражению глобального блока при больших размерностях

$$g_0(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q) = f^{lin}(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q), \quad (6.44)$$

ср. Утверждение **6.1**. Это соотношение, выраженное в логарифмической форме, аналогично соотношению между глобальным и пертурбативными классическими блоками на сфере [138, 174] (см. обсуждение в середине раздела **6.1.4**).

Принимая Гипотезу **6.1** можно явно найти коэффициенты  $\varkappa_n$  в (6.42) как  $\varkappa_n = \frac{4^n(2n-1)n}{2}$ , ср. первые пять коэффициентов после (6.42). Воспользовавшись интегральным представлением для глобального блока (6.15) и Утверждением **6.1** можно предположить существование замкнутого выражения для

<sup>74</sup>Как правило, пертурбативные классические блоки на сфере и торе являются бесконечными рядами по безразмерному параметру лёгкости [140, 174, 155]. Исключением является 4-точечный пертурбативный классический блок на сфере, являющийся линейной функцией от конформных размерностей [135, 137].

1-точечного пертурбативного классического блока на торе

$$f^{lin}(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q) = \int_0^q dx \left( -\frac{\tilde{\epsilon}}{x} + \sqrt{\frac{\tilde{\epsilon}^2}{x^2} + \frac{\epsilon^2}{(1-x)^2 x}} \right). \quad (6.45)$$

С точки зрения *AdS/CFT*, пертурбативный классический блок реализуется как длина геодезического графа типа «головастик» в термальном пространстве  $AdS_3$  [155, 176] (см. следующий раздел). Проверка осуществляется в рамках теории возмущений по параметру лёгкости  $\delta = \epsilon/\tilde{\epsilon}$  в первых порядках разложения в (6.45). Тем не менее, интегральная формула может быть доказана в терминах теории в объеме, устанавливая, тем самым, соответствие во всех порядках по  $\delta$  [361, 362].

В заключение этого раздела отметим, что по всей видимости, (пертурбативный) классический блок, определяемый как асимптотическое разложение исходного вирасоровского конформного блока при большом центральном заряде, можно связать с  $1/c$  деформациями одной из контракций алгебры Вирасоро, рассмотренных в предыдущих разделах. Действительно, теория представлений контрактированных алгебр Ли [359] существенным образом основана на предельном соотношении  $\epsilon\nu \sim 1$  между параметром контракции  $\epsilon \rightarrow 0$  и размерностями  $\nu$  представлений неконтрактированной алгебры. Другими словами, размерность бесконечно растёт по мере приближения параметра контракции к нулю. В нашем случае это соотношение воспроизводится условием  $\Delta/c \sim 1$ , см. (6.35). Ожидается, что квазиклассические блоки могут быть целиком переформулированы в терминах теории представлений контрактированных алгебр Вирасоро и их деформаций малым поправками по  $1/c$ .

Такая же процедура контракции может быть в равной степени применена в случае сферической  $CFT_2$ , а также для конформных теорий на римановых поверхностях любого рода. В том числе, допускается суперсимметризация всех построений. Так, в работе [177] аналогичным образом изучены предельные 1-точечные торические суперблоки  $\mathcal{N} = 1$  алгебры Невье-Шварца.<sup>75</sup>

<sup>75</sup>Контракции алгебры Вирасоро и ассоциированные блоки аналогичны т.н. нерегулярными блоками и их квазиклассическими пределами [363, 364, 365, 366].

## 6.2 Дуальная интерпретация

Хорошо известно, что общее решение для классической евклидовой  $AdS_3$  гравитации топологически связано со полным тором (бубликом) [367], так что соответствующая граничная  $CFT_2$ , в сущности, является торической теорией, характеризующейся параметрами данного частного решения [368]. В этом случае предлагается следующая голографическая интерпретация 1-точечного пертурбативного классического блока на торе: геометрия в объеме отождествляется с термальным  $AdS_3$ , а внешние и обменные операторы классического блока соответствуют массивным пробным частицам на фоне такой геометрии, массы которых отождествляются с классическими конформными размерностями [155, 176]. Заметим, что в данном рассмотрении фоновая геометрия не имеет конических сингулярностей, т.е. не создаётся примарным оператором 1-точечной функции – все внешние и промежуточные частицы являются динамическими. В этом состоит существенное отличие от конформных блоков на сфере в контексте  $AdS_3/CFT_2$  соответствия, где два тяжёлых оператора создают сингулярности углового дефицита или BTZ черной дыры (см. Главу 5). В торическом случае, термальная  $AdS_3$  фоновая геометрия фактически постулируется. Тяжёлым объектом здесь является петля, а внешняя линия рассматривается как производящая малые деформации.<sup>76</sup> (Петлю можно представлять как силовую линию некоторого потенциала, создаваемую двумя тяжёлыми полями в бесконечно разделённых точках цилиндра, но с отождествлёнными концами.)

Главный результат можно сформулировать следующим образом. По модулю зависящих от граничного регулятора вкладов (вообще говоря, бесконечных), 1-точечный пертурбативный классический блок  $f^{lin}$  с внешней  $\epsilon$  и внутренней  $\tilde{\epsilon}$  классическими размерностями, может быть реализован в виде суммы

$$- f^{lin} = S_{thermal} + \tilde{\epsilon} S_{loop} + \epsilon S_{leg} , \quad (6.46)$$

где первый член это голоморфная часть действия трёхмерной гравитации, вы-

<sup>76</sup>Конфигурация на рис. 15 может быть обобщена заменой сегмента петли геодезической, кратно оборачивающейся вокруг нестягиваемого цикла. Итоговая конфигурация характеризуется числом намоток и должна приводить к другим локальным минимумам действия гравитации. Дуальная  $CFT_2$  интерпретация, однако, неочевидна.

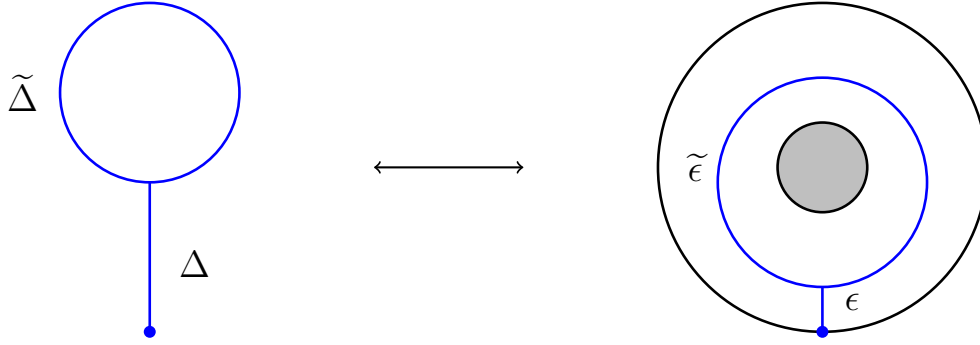


Рис. 14. 1-точечный конформный блок как диаграмма типа «головастик», вложенная в термальное пространство  $AdS_3$ . Петля диаграммы конформного блока отождествляется с нестягиваемым циклом термального  $AdS_3$ .

численная на термальном пространстве  $AdS_3$ , а второй и третий члены задают длину геодезического графа типа «головастик», прикрепленного внешним концом к некоторой точке на конформной границе, рис. 14. См. аналогичную формулу в случае сферических блоков, (5.65).

Геодезический граф типа «головастик» лежит на двумерном кольце, являющемся срезом евклидова термального пространства  $AdS_3$  с интервалом

$$ds^2 = -\tau^2 \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (6.47)$$

где  $\tau$  – чисто мнимый модулярный параметр, координаты  $t \sim t + 2\pi$ ,  $\varphi \sim \varphi + 2\pi$ ,  $r \geq 0$ . Топологически, термальное пространство  $AdS_3$  является полным тором (бубликом), где время направлено по нестягиваемому циклу. Далее радиус  $AdS_3$  полагается равным  $l = 1$ .

Функциональный интеграл теории гравитации в геодезическом приближении вычисляется в окрестности седловой точки некоторого частного решения. Известно, что в низкотемпературном режиме  $\text{Im } \tau \gg 1$  термальная  $AdS_3$  геометрия доминирует в функциональном интеграле [369]. Следовательно, классическое действие на массовой поверхности теории гравитации с материей, представленной массивными внешними и промежуточными частицами, имеет вид

$$S_{total} = S_{thermal} + \tilde{\epsilon} S_{loop} + \epsilon S_{leg}, \quad (6.48)$$

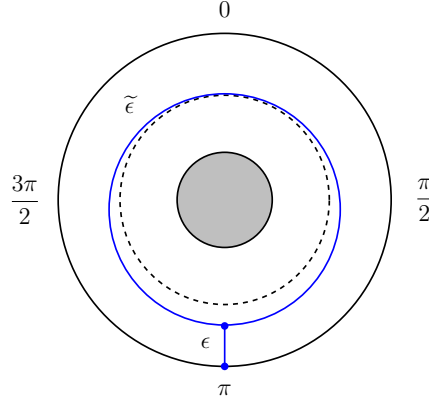


Рис. 15. Кольцо и диаграмма типа «головастик». Внутренняя и внешняя чёрные сплошные окружности отвечают конформной границе. Пунктирная окружность отвечает  $r = 0$ . Синяя петля — деформация пунктирной окружности, возникающая при включении внешнего примарного оператора, представленного сплошным синим сегментом. Вершина и точки прикрепления к границе берутся при  $t = \pi$ . Как обычно, время бежит по часовой стрелке.

где первый член отвечает действию гравитации на фоне термальной  $AdS_3$  геометрии, второй и третий члены отвечают суммарной геодезической длине петли и радиальной линии с конформными весами (6.35), отождествляемыми с массами частиц в пределе  $c \rightarrow \infty$ . Ниже будет показано, что пертурбативный конформный блок (6.41) равен полному действию  $f^{lin} = -S_{total}$ , согласно формуле соответствия (6.46).

Рассмотрим сперва случай внешнего оператора конформной размерности  $\Delta = 0$ . 1-точечный конформный блок превращается в 0-точечный конформный блок тождественный характеру Вирасоро. Соответствующий граф является петлёй, представленной окружностью постоянного радиуса вдоль  $r = 0$ , см. рис. 15. Полное действие (6.48) сводится к  $S_{total} = S_{thermal} + \tilde{\epsilon} S_{loop}$ . Т.к. голоморфная часть гравитационного действия на термальной  $AdS_3$  геометрии была вычислена в работах [367, 369, 370] и равна  $S_{thermal} = i\pi\tau/2$  в терминах перерастянутого центрального заряда  $k = c/6$ , а длина петли равна  $S_{loop} = -2\pi i\tau$ , находим, что

$$S_{total} \Big|_{\epsilon=0} = -2\pi i (\tilde{\epsilon} - 1/4) \tau := -(\tilde{\epsilon} - 1/4) \log q = -f^{lin}(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (6.49)$$

Это в точности минус главный член в классическом блоке (6.41), если уравнять модулярные параметры торической  $CFT_2$  и термального  $AdS_3$ .

При включении внешнего оператора  $\Delta \neq 0$  окружность постоянного радиуса, отождествляемая с 0-точечным блоком, деформируется линией внешнего оператора, протянутой от конформной границы к некоторой вершинной точке в объеме.<sup>77</sup> Получающийся «головастик» отвечает 1-точечному конформному блоку. Предполагается, что петля значительно массивнее внешней линии и таким образом мы реализуем описанную в разделе **6.1.5** теорию НЛ возмущений классического конформного блока. Для количественного описания вида деформации потребуем, чтобы радиальное отклонение от окружности постоянного радиуса при  $t = 0$  было равно нулю. Тогда если время течет от 0 до  $\pi$  отклонение достигает максимального значения там, где внешняя линия встречается с петлей (эта точка задает радиальное положение вершины).

Описанная выше картина может быть обобщена на случай  $n$ -точечных торических блоков. Например, можно взять блок в ОРЕ канале называемом  $s$ -каналом или «ожерельем» [176]. В этом случае формула соответствия (6.46) принимает более общий вид,

$$-f^{lin}(x, q) \cong S_{therm} + L_{dual}(y, \beta), \quad (6.50)$$

где  $L_{dual}(y, \beta)$  – это длина дуальной геодезической сети типа ожерелье, концы которого прикреплены к конформной границе в точках  $y_i, i = 1, \dots, n$ , см. рис. 14. Здесь используются следующие отождествления модулярного параметра и координат точек вставок примарных операторов

$$\beta = -\log q, \quad y_i = -\log x_i. \quad (6.51)$$

Отметим, что при описании соответствия между классическими конформными блоками и геодезическими сетями на двумерном срезе (6.46) подразумевается, что модулярный параметр  $q$  и координаты примарных операторов вещественны (6.51). Таким образом, рассматриваемый конформный блок, являющийся по определению комплексной функцией, приравнивается к веще-

<sup>77</sup>При  $\delta > 1$  петлю следует рассматривать уже как возмущение внешней линии, причем в пределе  $\delta = \infty$  петля отделяется от внешней линии, т.к.  $\tilde{\epsilon} = \epsilon/\delta$ . Однако, со стороны конформной теории, коэффициенты классического блока в этом пределе расходятся, ср. (6.37).

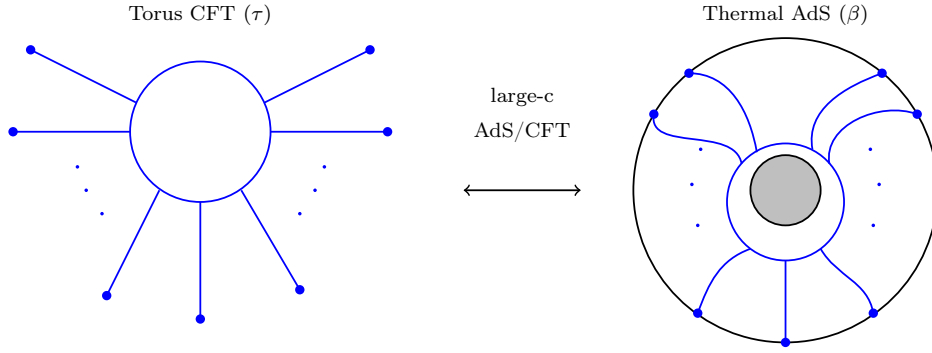


Рис. 16.  $n$ -точечный торический блок в  $s$ -канале с модулем  $\tau$  голографически реализуется дуальным графом типа «ожерелье» на двумерном сечении термального пространства  $AdS_3$ . Время бежит вдоль натягиваемого цикла  $t \sim t + \beta$ . Точки вставок примарных операторов  $x_i$  на конформной границе отображаются в граничные точки прикрепления графа в объеме  $y_i$ .

ственной геодезической длине на термальном пространстве  $AdS_3$  с чисто мнимым модулем  $\tau_{ads}$ . Т.к.  $q = e^{2\pi i \tau_{cft}}$ , то с точностью до модулярных преобразований параметр  $\tau_{cft}$  можно выбрать принимающим одно из двух значений:  $\tau_{cft} = 0 + ia$  или  $\tau_{cft} = \frac{1}{2} + ia$ , где  $\forall a \in \mathbb{R}$ . Поэтому,

$$\tau_{cft} = \tau_{ads} \quad \text{или} \quad \tau_{cft} = \tau_{ads} + \frac{1}{2}. \quad (6.52)$$

В первом случае тор, на котором определена рассматриваемая  $CFT_2$ , действительно является конформной границей трехмерного пространства, что реализуется отображением (6.51). Во втором случае, модулярные параметры различаются, однако в низкотемпературном приближении  $\tau_{ads} \rightarrow \infty$ , мы снова приходим к стандартной дуальности с  $\tau_{cft} \approx \tau_{ads}$  [155]. Далее рассматривается только второй случай. Обсуждение первого случая содержится в работе [176].

### 6.2.1 Формализм мировых линий на термальном $AdS_3$

Как мы видели в Главе 5, способ вычисления длин геодезических в рамках формализма мировых линий частиц является достаточно прозрачным и конструктивным, как с физической точки зрения (в плане геодезического прибли-



жения для исходного КТП функционала действия), так и с математической точки зрения (дифференциальные уравнения геодезических частично решаются и дополняются набором алгебраических импульсных уравнений, типа уравнений равновесия и углового баланса). Напомним, что каждый геодезический сегмент описывается следующим действием

$$S = \int_1^2 d\lambda \sqrt{g_{mn}(x) \dot{x}^m \dot{x}^n}, \quad (6.53)$$

где 1 и 2 – начальное/конечное положения, локальные координаты  $x^m = (t, \phi, r)$ , метрические коэффициенты  $g_{mn}(x)$  определяются интервалом термального пространства  $AdS_3$  (6.47), а скорость  $\dot{x}$  определяется относительно параметра эволюции  $\lambda$ . Дальнейшие подробности см. в Приложении **Д.1**.

Т.к. метрические коэффициенты не зависят от времени и угловых переменных, соответствующие импульсы сохраняются,  $\dot{p}_t = 0$  и  $\dot{p}_\phi = 0$ . Ограничим динамику системы на поверхность уровня, характеризуемую постоянным углом  $\phi = 0$ , отвечающим сохраняющемуся  $p_\phi = 0$ , а остальные сохраняющиеся импульсы  $p_t$  будут интегралами движения, задающими форму геодезической линии. Поверхность уровня отождествляется с кольцом, получающимся сечением термального пространства  $AdS_3$  вдоль нестягиваемого цикла. Условие нормировки (выбор параметра эволюции) принимает вид  $g_{tt} \dot{t}^2 + g_{rr} \dot{r}^2 = 1$ , и с учётом  $g_{tt}g_{rr} = -\tau^2$ , находим

$$\dot{r} = \pm \sqrt{r^2 - s^2 + 1}, \quad s \equiv i \frac{|p_t|}{\tau}. \quad (6.54)$$

Общий знак отвечает направлению течения параметра эволюции.

Длина петли может быть вычислена из определения временного импульса  $p_t = g_{tt} \dot{t}$ . Представляя петлю как две полупетли, находим

$$\dot{t} = \frac{i}{\tau} \frac{s}{1 + r^2} : \quad S_{loop} = \frac{2\tau}{is} \int_0^\pi dt (1 + r^2(t)), \quad (6.55)$$

где  $s$  – петлевой импульс, а радиальное отклонение  $r(t)$  определяется из условия нормировки (6.54). Заметим, что радиальное отклонение является расстоянием между синей петлёй и пунктирной окружностью на рис. **15**. Оно

удовлетворяет граничному условию<sup>78</sup>

$$r(0) = 0, \quad r(\pi) = \rho, \quad (6.56)$$

где  $\rho$  – радиальное положение вершины. Если петля является окружностью постоянного радиуса, то из (6.54) следует, что  $s^2 = 1 + r^2$ , и, таким образом,  $S_{loop} = -2\pi i \tau s$ . Для  $r = 0$  длина равна  $S_{loop} = -2\pi i \tau$ . Граничное условие (6.56) хорошо мотивировано в низкотемпературном режиме  $\text{Im } \tau \gg 1$  поскольку тогда значение длины петли велико. По этой причине, создаваемое внешней линией в точке вершины возмущение постепенно уменьшается по мере приближения к верхней точке петли  $t = 0$ . Такая интуитивная оценка будет ниже подтверждена явным вычислением (см. комментарии под (6.76)).

Как будет показано далее, временной импульс внешней линии равен нулю,  $s = 0$ . Это означает, что данная геодезическая вытянута в радиальном направлении и имеет длину

$$S_{leg} = \int_{\rho}^{\Lambda} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = -\text{ArcSinh } \rho, \quad (6.57)$$

где  $\rho$  – радиальное положение вершины. Параметр обрезания  $\Lambda$  вводится для регуляризации положения конформной границы. Член, появляющийся после интегрирования в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ , является бесконечной константой и, в конечном счете, отбрасывается.

## 6.2.2 Импульсные уравнения

**Условия равновесия.** Конфигурация геодезических сегментов в окрестности вершинной точки описывается суммой трёх слагаемых вида (6.53) (см. Главу 5). Минимизация данной комбинации приводит к тому, что временной импульс в вершинной точке (6.56) удовлетворяет условию равновесия

$$\tilde{\epsilon} p_m^1 + \tilde{\epsilon} p_m^2 + \epsilon p_m^0 = 0, \quad (6.58)$$

где  $p^{1,2}$  – входящие/исходящие внутренние импульсы,  $p^0$  – внешний импульс. Поскольку «головастик» целиком лежит в плоскости сечения постоянного угла, то пространственно–временной индекс принимает только два значения,

<sup>78</sup>Также можно наложить более слабое условие  $r(0) = \tilde{\rho}$ , допускающее ненулевое радиальное отклонение в верхней точке петли [176].

$m = (t, r)$ . Здесь предполагается, что параметр эволюции  $\lambda$  увеличивается по мере удаления от вершины. Любая замкнутая кривая очевидно имеет  $|p_m^1| = |p_m^2|$ , а общий знак может быть различен. Действительно, относительный знак  $\pm$  зависит от того, выбирается  $m = t$  или  $m = r$ , см. ниже.

С помощью параметризации (6.54) находим, что временная компонента (6.58) имеет вид

$$\tilde{\epsilon}(s_1 - s_2) + \epsilon s_0 = 0 . \quad (6.59)$$

Т.к. для петли  $s_1 = s_2 \equiv s$ , то  $s_0 = 0$ . Иными словами, сегмент объем-граница направлен вдоль радиуса. Радиальная составляющая условия равновесия (6.58) более содержательна,

$$\tilde{\epsilon}(\dot{r}_1 + \dot{r}_2) - \epsilon \dot{r}_0 = 0 , \quad (6.60)$$

где  $\dot{r}$  задаётся выражением (6.54) с положительным знаком. Поскольку  $r_1 = r_2$ , то  $\delta \dot{r}_0 = 2\dot{r}_1$ , где  $\delta = \epsilon/\tilde{\epsilon}$ . Тогда положение вершины  $\rho$  выражается в терминах петлевого импульса  $s$  в виде следующего вершинного уравнения

$$\rho = \sqrt{\frac{s^2}{1 - \delta^2/4} - 1} . \quad (6.61)$$

В частности, видно, что если внешний оператор выключен, т.е.  $\delta = 0$ , то имеется следующее решение

$$\delta = 0 : \quad s = 1 , \quad \rho = 0 . \quad (6.62)$$

Это решение является затравочным в теории возмущений, обсуждаемой в следующем разделе. Оно означает, что в данном случае петля является окружностью, положение вершины  $\rho = 0$ , точка прикрепления линии внешнего оператора  $t = \pi$ .

**Условие полуцикла.** Для нахождения временной зависимости радиального отклонения петли воспользуемся петлевым временным импульсом  $p_t = g_{tt}\dot{t}$  и вспомним, что  $\dot{r}$  имеет вид (6.54). Взятием частного получим дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{dt}{dr} = \frac{i}{\tau} \frac{s}{(1 + r^2)\sqrt{r^2 - s^2 + 1}} , \quad (6.63)$$

где  $s$  – петлевой импульс. В области определения  $t \in [0, t]$  и  $r \in [0, r]$  уравнение (6.63) сводится интегрированием к следующему эволюционному соотношению

$$e^{-2it}(r^2 + 1)(s^2 - 1) = -r(2s\sqrt{r^2 - s^2 + 1} + rs^2 + r) + s^2 - 1, \quad (6.64)$$

где зависимость от параметра эволюции присутствует только в экспоненте. Заметим, что модуль  $\tau$  входит в выражение экспоненциально и именно таким способом модулярный параметр  $q = \exp 2\pi i\tau$  возникает в конечных выражениях длины геодезического графа. Решение (6.64) может быть использовано для нахождения положения вершины (6.56) при помощи т.н. условия полуцикла

$$e^{-2i\pi\tau} = \frac{-\rho(2s\sqrt{\rho^2 - s^2 + 1} + \rho s^2 + \rho) + s^2 - 1}{(\rho^2 + 1)(s^2 - 1)}, \quad (6.65)$$

получаемое подстановкой  $t = \pi$  и  $\rho = r(\pi)$  в соотношение (6.64). Заметим, что значения (6.62) являются решением вышеприведённого уравнения.

Условие равновесие решенное в виде вершинного уравнения (6.61) и условие полуцикла (6.65) – это два алгебраических уравнения на две переменных  $\rho$  и  $s$ . Система может быть однозначно разрешена в виде  $s = s(\delta, \tau)$  и  $\rho = \rho(\delta, \tau)$ . Однако, в отличие от условия равновесия, условие полуцикла довольно сложное, что делает проблематичным нахождение точных решений. Вместо этого, в следующем разделе разрабатывается теория возмущений, позволяющая найти  $s$  и  $\rho$  в виде степенных рядов по  $\delta$  с ведущим членом в виде затравочного решения (6.62).

### 6.2.3 Пертурбативное разложение

Следуя общей идеологии НЛ теории возмущений и суперлегкого разложения [140, 142], описанной в Главе 5, рассмотрим диаграмму «головастика» посредством последовательного учета возмущений затравочного решения, отвечающего петле постоянного радиуса (6.62). В этом случае малое взаимодействие связано с постепенным включением внешнего оператора. Итак, ищем функцию длины в следующем виде

$$L = \tilde{\epsilon} S_{loop}(\tau, \epsilon, \tilde{\epsilon}) + \epsilon S_{leg}(\tau, \epsilon, \tilde{\epsilon}), \quad (6.66)$$

где  $S_{loop}$  и  $S_{leg}$  задаются (6.55) и (6.57). Очевидно, что петлевой и радиальный сегменты параметризуются модулярным параметром и конформными размерностями. В частности, в рамках выбранной теории возмущений обе длины представляются степенными рядами по параметру лёгкости  $\delta$  (6.38), введённому при обсуждении классического блока,

$$\begin{aligned} S_{loop} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{loop}^{(n)}(\tau) \delta^n, \\ S_{leg} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{leg}^{(n)}(\tau) \delta^n, \end{aligned} \quad (6.67)$$

где  $S_{loop}^{(0)}(\tau) = -2\pi i \tau$  и  $S_{leg}^{(0)}(\tau) = 0$ . Замечая, что  $\tilde{\epsilon} \delta^n = \epsilon \delta^{n-1}$ , получим функцию длины в виде

$$L = -2\pi i \tilde{\epsilon} \tau + \tilde{\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ S_{loop}^{(n)}(\tau) + S_{leg}^{(n-1)}(\tau) \right] \delta^n. \quad (6.68)$$

Сравнивая с выражением для пертурбативного блока (6.41) находим, что для выполнения соответствия между длиной дуального графа и конформным блоком необходимо потребовать следующее условие

$$S_{loop}^{(n)}(\tau) + S_{leg}^{(n-1)}(\tau) = 0, \quad \text{при} \quad n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.69)$$

Ниже показано, что это свойство коэффициентов разложения следует из частного вида временного импульса и положения вершины как функций параметра лёгкости  $\delta$ .

Аналогичным образом раскладываются временной импульс, радиальное отклонение, положения вершины:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \delta^n, \quad r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t) \delta^n, \quad \rho = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \delta^n, \quad (6.70)$$

где затравочные значения даны  $s_0 = 1$ ,  $r_0(t) = 0$  и  $\rho_0 = 0$ , ср. (6.56). Следовательно, длина петли (6.55) задается рядом

$$\begin{aligned} S_{loop} &= -2\pi i \tau + 2\pi i \tau s_1 \delta - 2i \tau \delta^2 \int_0^\pi dt (r_1^2(t) + s_1^2 - s_2) \\ &\quad - 2i \tau \delta^3 \int_0^\pi dt (-r_1^2(t) s_1 + 2r_1(t) r_2(t) - s_1^3 + 2s_1 s_2 - s_3) + \mathcal{O}(\delta^4). \end{aligned} \quad (6.71)$$

Точно также раскладывается радиальная длина (6.57),

$$S_{leg} = -\rho_1\delta - \rho_2\delta^2 - \left(\rho_3 - \frac{\rho_1^3}{6}\right)\delta^3 + \mathcal{O}(\delta^4). \quad (6.72)$$

**Пертурбативные импульс и радиус.** Будем решать эволюционное уравнение (6.64) и вершинное уравнение (6.61) пертурбативно. Оказывается, что разложенное по  $\delta$  эволюционное уравнение содержит члены с полуцелыми степенями  $\delta^{m/2}$  при  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Решение в этом случае содержит члены типа  $0/0$ . Однако, всех неопределённостей можно избежать, если в разложениях (6.70) потребовать равенства нулю всех членов вида  $s_{2k+1} = 0$  и  $r_{2k} = 0$  для любых  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда видоизмененные пертурбативные разложения принимают вид

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=0}^{\infty} s_{2n}\delta^{2n} = s_0 + s_2\delta^2 + s_4\delta^4 + \dots, \\ r(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n+1}(t)\delta^{2n+1} = r_1(t)\delta + r_3(t)\delta^3 + \dots, \\ \rho &= \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{2n+1}\delta^{2n+1} = \rho_1\delta + \rho_3\delta^3 + \dots. \end{aligned} \quad (6.73)$$

В частности, из (6.71) и (6.72) следует, что условие (6.69) автоматически выполняется. Вклады низших порядков в вершинном уравнении имеют вид

$$(1 - 2\sqrt{\rho_1^2 - 2s_2})\delta + \mathcal{O}(\delta^2) = 0, \quad (6.74)$$

$$-2\delta^2((\sqrt{r_1^2 - 2s_2} + r_1)r_1 + s_2(e^{-2i\tau t} - 1)) + \mathcal{O}(\delta^3) = 0. \quad (6.75)$$

Разрешая их в каждом порядке по  $\delta$  находим первые радиальные поправки

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \frac{1}{2}\operatorname{sech}(-i\pi\tau)\sinh(-i\tau t), \\ r_3(t) &= \frac{1}{16}\operatorname{sech}^3(-i\pi\tau)\sinh(-i\tau t)\cosh^2(-i\tau t), \\ r_5(t) &= \frac{3}{256}\operatorname{sech}^5(-i\pi\tau)\sinh(-i\tau t)\cosh^4(-i\tau t), \dots, \end{aligned} \quad (6.76)$$

и поправки к петлевому импульсу

$$s_2 = -\frac{1}{8}\operatorname{sech}^2(-i\pi\tau), \quad s_4 = -\frac{1}{128}\operatorname{sech}^4(-i\pi\tau), \quad s_6 = -\frac{1}{1024}\operatorname{sech}^6(-i\pi\tau), \dots \quad (6.77)$$

Зависимость от  $\tau$  показывает, что при  $\operatorname{Im} \tau \approx 1$  радиальное отклонение быстро начинает расти около верхней точки петли, а для больших  $\operatorname{Im} \tau \gg 1$  тот же эффект имеет место вблизи вершинной точки. Подставляя  $t = \pi$  в (6.76) находим поправки к положению вершины

$$\rho_1 = \frac{1}{2} \tanh(-i\pi\tau), \quad \rho_3 = \frac{1}{16} \tanh(-i\pi\tau), \quad \rho_5 = \frac{3}{256} \tanh(-i\pi\tau), \dots \quad (6.78)$$

Появление общего множителя в этих формулах позволяет записать положение вершины в виде

$$\rho = g(\delta) \tanh(-i\pi\tau), \quad \text{где} \quad g(\delta) = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{16}\delta^2 + \frac{3}{256}\delta^3 + \dots \quad (6.79)$$

Следовательно, зависимости от модуля  $\tau$  и параметра лёгкости  $\delta$  расфакторизовываются. Также отметим, что модулярный параметр чисто мнимый и поэтому функция радиального положения (6.76) непериодична по параметру эволюции  $t \sim t + 2\pi$ . Наконец, есть другая ветвь радиального положения с общим знаком минус. Она отвечает «головастику» во внутренней области на рис. 15, которая эквивалентная внешней за счет особенности устройства сечения бублика вдоль постоянного угла.

**Пертурбативные длины.** Воспользовавшись найденными поправками (6.76), (6.77), (6.78) можно легко найти поправки к длине петли и внешней линии согласно выражениям (6.71) и (6.72). Рассмотрим сначала нетривиальные поправки низшего порядка

$$S_{loop}^{(2)}(\tau) = -\frac{1}{4} \tanh(-i\pi\tau), \quad S_{leg}^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2} \tanh(-i\pi\tau). \quad (6.80)$$

Отождествляя модулярные параметры согласно второму равенству в (6.52)

$$\tau_{cft} = \tau_{ads} + \frac{1}{2}, \quad (6.81)$$

видим, что приведенные выше функции длины, выраженные через конформный модулярный параметр, в точности равны

$$S_{loop}^{(2)}(q) := f_1(q) + \frac{1}{4}, \quad S_{leg}^{(1)}(q) := -2f_1(q) - \frac{1}{2}, \quad (6.82)$$

и поэтому, по модулю аддитивной постоянной, функция длины дуальной геодезической сети (6.66), (6.68) в первом нетривиальном порядке равна

$$L(q) := -\tilde{\epsilon} \log q - \tilde{\epsilon} \delta^2 f_1(q) + \mathcal{O}(\delta^4). \quad (6.83)$$

Добавляя гравитационное действие на термальном  $AdS_3$  и сравнивая с первыми коэффициентами пертурбативного классического блока (6.41), находим, что  $S_{thermal}(q) + L(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q) = -f^{lin}(\epsilon, \tilde{\epsilon}|q)$  согласно формуле соответствия (6.46). Поправки высших порядков могут быть вычислены аналогичным образом. Предполагая (6.81) можно показать, что с точностью до мультипликативной и аддитивной констант выполняются соотношения  $S_{loop}^{(2k)} \sim f_k$  и  $S_{leg}^{(2k-1)} \sim f_k$ , так что их искомая комбинация имеет вид  $S_{loop}^{(2k)} + S_{leg}^{(2k-1)} = -f_k + const_k$ , и поэтому формула соответствия (6.46) выполняется.

Наконец, вспомним, что в низкотемпературном режиме, когда термальная  $AdS_3$  геометрия доминирует в гравитационном функциональном интеграле, мнимая часть  $Im(\tau) \gg 1$ , так что вещественной добавкой  $1/2$  в (6.81) можно пренебречь. Следовательно, в этом режиме модулярные параметры геометрий на границе и в объеме совпадают,  $CFT_2$  определена на двумерном торе, который действительно является границей трехмерного термального пространства  $AdS_3$ . С другой стороны, известно, что существуют другие седловые точки, доминирующие в функциональном интеграле гравитационной теории при других температурах, или, эквивалентно, при других  $\tau$  [369]. В частности, в высокотемпературном режиме  $Im \tau \ll 1$ , гравитационное действие на термальном пространстве  $AdS_3$  меньше, чем на фоне BTZ чёрной дыры, чей модулярный параметр связан с модулярным параметром термального  $AdS_3$  модулярным преобразованием  $\tau \rightarrow -1/\tau$ . Однако, интерпретация пертурбативного классического 1-точечного торического блока  $f^{lin}(\epsilon, \tilde{\epsilon}|\tau)$  в терминах дуального геодезического графа специфична именно для термального пространства  $AdS_3$ , а не для BTZ чёрной дыры просто потому, что ведущий член здесь – это  $\sim \tau$ , а не  $\sim 1/\tau$ .



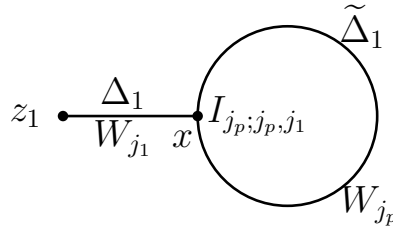


Рис. 17. 1-точечный конформный блок на торе.  $\Delta$  и  $\tilde{\Delta}$  – это внешняя и внутренняя конформные размерности. Тот же самый граф изображает торическую вильсоновскую сеть с вильсоновским оператором  $W_{j_1}$  и вильсоновской петлей  $W_{j_p}$ , а также интертвинер  $I_{j_p; j_p, j_1}$  в точке объема  $x$ .

### 6.3 1-точечные торические вильсоновские сети

Начнем этот раздел с замечания, что функция глобального блока (6.6) имеет полюса при значениях размерности петлевого канала  $\tilde{\Delta} = -n/2$ , где  $n \in \mathbb{N}_0$  что наиболее явно видно, если переписать блок как функцию Лежандра [178]. В целом, конформные размерности  $\Delta, \tilde{\Delta}$  считаются произвольными. Соответствующие операторы ассоциированы с (не)унитарными бесконечномерными представлениями  $sl(2, \mathbb{C})$  конформной алгебры. При целых отрицательных размерностях (будем рассматривать только целые значения, см. Приложение Д.3)

$$\Delta = -j_1 \quad \text{и} \quad \tilde{\Delta} = -j_p, \quad j_1, j_p \in \mathbb{N}_0, \quad (6.84)$$

данные представления содержат сингулярные подмодули на уровне  $2j$  конформной размерности  $\Delta' = -\Delta + 1$ , поэтому можно рассматривать факторпредставления  $\mathcal{D}_j$ , являющиеся конечномерными неунитарными спин- $j$  модулями размерности  $2j + 1$  (см. аналогичное обсуждение в Главе 4).

Отметим, что вырожденная размерность петлевого канала  $\tilde{\Delta}$  (6.84) определяет полюса функции блока. Отсюда следует, что для нахождения торических блоков, ассоциированных с представлением  $\mathcal{D}_j$ , можно следовать двумя эквивалентными путями. Первый состоит в использовании BPZ процедуры [132] наложения условия отщепления сингулярного вектора на корреляционный функции. Например, для 0-точечного блока, являющегося характером

представления (6.7), BPZ условие разрешается вычитанием характера сингулярного подмодуля  $\mathcal{F}_{\tilde{\Delta},0}$  из исходного характера  $\mathcal{F}_{\tilde{\Delta},0}$ . Итогом будет являться хорошо известное выражение для конечномерного  $sl(2, \mathbb{C})$  характера

$$\chi_p \equiv \mathcal{F}_{\tilde{\Delta},0}(q) - \mathcal{F}_{\tilde{\Delta}',0}(q) = q^{-j_p} (1 + q + q^2 + \dots + q^{2j_p}) = q^{-j_p} \frac{1 - q^{j_p+1}}{1 - q}. \quad (6.85)$$

Аналогичным образом можно сформулировать и разрешить BPZ условие отщепления для 1-точечных блоков.

Альтернативный путь состоит в определении торического блока как (анти)голоморфной составляющей корреляционной функции, построенной взятием следа сразу в конечномерном модуле. В этом случае голоморфный 1-точечный блок задается выражением

$$\mathcal{F}_{j_p, j_1}(q) = \text{Tr}_{j_p} (q^{L_0} \mathcal{O}_{j_1}), \quad (6.86)$$

где квази-примарный оператор  $\mathcal{O}_{j_1}$  соответствует представлению  $\mathcal{D}_{j_1}$ , след взят по представлению  $\mathcal{D}_{j_p}$ , ср. (6.1). Возникающая функция блока будет полиномом порядка  $2j_p$  по модулярному параметру,

$$\mathcal{F}_{j_p, j_1}(q) = q^{-j_p} (f_0 + qf_1 + q^2 f_2 + \dots + q^{2j_p} f_{2j_p}), \quad (6.87)$$

коэффициенты которого задаются выражением

$$f_n = {}_3F_2(-j_1, j_1 + 1, -n; 1, -2j_p; 1) = \sum_{m=0}^n \frac{(-)^m n!}{(n-m)!(m!)^2} \frac{(j_1 + m)_{2m}}{(2j_p)_m}, \quad (6.88)$$

где  $(x)_n = x(x-1)\dots(x-n+1)$  – убывающий факториал. Выбор  $j_1 = 0$  воспроизводит (6.85). Отметим, что наложение BPZ условия отщепления заставляет конформные размерности удовлетворять правилу слияния

$$0 \leq j_1 \leq 2j_p. \quad (6.89)$$

В следующем разделе мы явно вычислим 1-точечную торическую вертексную функцию (5.147) в термальном пространстве  $AdS_3$ , которая оказывается равной 1-точечному блоку (6.87)–(6.88). Этим равенством реализуется другой (модельно-зависимый) способ установить  $AdS_3/CFT_2$  соответствие для конформных блоков, в данном случае для глобальных.

### 6.3.1 Диагональная калибровка

Выберем граничное состояние вектором младшего веса в соответствующем спин- $j_a$  представлении  $\mathcal{D}_a$  (см. Приложение Д.3)

$$|a\rangle = |\mathbb{w}\rangle_a \in \mathcal{D}_a : \quad J_1|\mathbb{w}\rangle_a = 0, \quad J_0|\mathbb{w}\rangle_a = -j_a|\mathbb{w}\rangle_a, \quad (6.90)$$

а также вильсоновский оператор в евклидовом термальном  $AdS_3$  пространстве, определяемом гравитационной связностью (5.112). Если сделать калибровочное преобразование  $\Omega = U \tilde{\Omega} U^{-1} + U dU^{-1}$ , где калибровочный  $SL(2, \mathbb{R})$  групповой элемент  $U = \exp \frac{i}{2} J_{-1} \exp -i J_1 \exp -\frac{i\pi}{2} J_0$ , то киральную связность (5.112) можно привести к диагональному виду  $\tilde{\Omega} = -i J_0 dw$ , по сравнению с исходным недиагональным видом.<sup>79</sup> Киральные вильсоновские операторы (5.113) в диагональной калибровке принимают следующий общий вид

$$W_a[x_1, x_2] = \exp(-ix_{12} J_0). \quad (6.91)$$

Вильсоновская петля вдоль термального цикла может теперь быть записана в терминах модулярного параметра

$$W_a[0, 2\pi\tau] = \exp(2\pi i \tau J_0) \equiv q^{J_0}, \quad q = \exp 2\pi i \tau, \quad (6.92)$$

где  $J_0$  берется в представлении  $\mathcal{D}_a$ . Благодаря трансформационному свойству интертвинеров, работа с вильсоновскими операторами в диагональной калибровке не изменяет торические вертексные функции раздела 5.4.3, за тем исключением, что граничные векторы младшего веса (6.90) преобразуются

$$|\mathbb{w}\rangle_a \rightarrow |\hat{\mathbb{w}}\rangle_a = U_a^{-1} |\mathbb{w}\rangle_a \in \mathcal{D}_a, \quad (6.93)$$

посредством калибровочного группового (постоянного) элемента  $U_a$  в представлении  $\mathcal{D}_a$  (см. выше). В диагональной калибровке конформная инвариантность торических вертексных функций гарантирована свойством (5.119), которое теперь определяется единичной матрицей  $C_m^n = \delta_m^n$ , а голоморфные генераторы конформной алгебры  $\mathcal{L}_n = -\exp(inw)(i\partial_w - n\Delta)$  вычислены в цилиндрических координатах на торе  $\mathbb{T}^2$ .

<sup>79</sup>См. работу [371], где диагональные калибровки обсуждаются в случае  $sl(N, \mathbb{R})$  гравитации высших спинов.

Трансформированный граничный вектор (6.93) удовлетворяет следующим линейным соотношениям [152]

$$\begin{aligned} (J_1 + J_{-1} - 2J_0) |\mathbb{0}_{\hat{w}}\rangle &= 0, \\ (J_1 - J_{-1} + 2j) |\mathbb{0}_{\hat{w}}\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (6.94)$$

которые по сути являются двумя преобразованными условиями младшего веса (6.90). Представляя  $|\mathbb{0}_{\hat{w}}\rangle \in \mathcal{D}_j$  в стандартном базисе как

$$|\mathbb{0}_{\hat{w}}\rangle = \beta_{j,j}|j, j\rangle + \beta_{j,j-1}|j, j-1\rangle + \cdots + \beta_{j,-j}|j, -j\rangle, \quad (6.95)$$

действуя на это состояние генераторами  $J_1$  и  $J_{-1}$  и используя определяющие соотношения (6.94), получаем рекуррентную систему

$$\begin{aligned} \beta_{j,k}(h_j + k) &= M_-(j, k+1)\beta_{j,k+1}, \\ M_+(j, k-1)\beta_{j,k-1} &= (k - h_j)\beta_{j,k}, \end{aligned} \quad (6.96)$$

где  $k = -j, -j+1, \dots, j-1, j$  и  $M_{\pm}(j, k)$  определены в (Д.12). Фиксируя общую нормировку  $\beta_{j,j} = 1$  и решая (6.96), окончательно находим

$$\beta_{j,k} = - \prod_{r=0}^{j-k-1} \frac{M_-(j, j-r)}{r+1} = \prod_{r=0}^{j-k-1} \frac{2j-r}{M_+(j, j-r-1)}. \quad (6.97)$$

В качестве примера, приведем вид трансформированного граничного состояния в фундаментальном (спинорном) представлении  $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}}$ . Прямое применение формул (6.95), (6.97) дает следующий вектор

$$|\mathbb{0}_{\hat{w}}\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (6.98)$$

### 6.3.2 Представление $3j$ символами Вигнера

Рассмотрим 1-точечную торическую вильсоновскую сеть в диагональной калибровке. Для этого, воспользовавшись трансляционной инвариантностью, положим  $w = 0$ , так что  $W_c = \mathbb{1}_c$ , и затем вставим разложения единиц (5.124), что позволяет представить вертексную функцию (5.147) следующим образом

$$\begin{aligned} \mathring{V}_{a|c}(\tau) &= \sum_{m,n=-j_a}^{j_a} \sum_{l=-j_c}^{j_c} \left( \langle j_a, m | W_a[0, 2\pi\tau] | j_a, n \rangle \right) \times \\ &\quad \times \left( \langle j_a, n | I_{a;a,c} | j_a, m \rangle \otimes | j_c, l \rangle \right) \langle j_c, l | \mathbb{0}_{\hat{w}} \rangle_c, \end{aligned} \quad (6.99)$$

где вильсоновский оператор задан выражением (6.92), а  $|\hat{\mathbb{W}}\rangle_c$  – это трансформированный граничный вектор (6.93). Первый фактор в (6.99) является т.н. D-матрицей Вигнера  $SU(1, 1)$  группового элемента (6.92),

$$D^{(j_a)m}_n \equiv \langle j_a, m | q^{J_0} | j_a, n \rangle = \delta_n^m q^n, \quad m, n = -j_a, -j_a + 1, \dots, j_a, \quad (6.100)$$

где последнее равенство получено использованием стандартного базиса (Д.12).<sup>80</sup> Последний фактор – это  $l$ -я координата трансформированного граничного вектора в стандартном базисе,

$$V_{(j_c)}^l \equiv \langle j_c, l | \hat{\mathbb{W}} \rangle_c, \quad l = -j_c, -j_c + 1, \dots, j_c, \quad (6.101)$$

Она задается выражениями (6.95), (6.97). Наконец, второй фактор – это матричный элемент инертвинера, который задает  $3j$  символ Вигнера (5.127). Собирая все матричные элементы воедино находим выражение

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{V}_{a|c}(\tau) &= \sum_{m, n = -j_a}^{j_a} \sum_{l = -j_c}^{j_c} D^{(j_a)m}_n [I_{a, a, c}]^n_{ml} V_{(j_c)}^l \\ &= (-)^{j_a} V_{(j_c)}^0 \sum_{m = -j_a}^{j_a} (-)^m q^m \begin{pmatrix} j_c & j_a & j_a \\ 0 & m & -m \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.102)$$

где при получении второго равенства были использованы: (1) соотношения (5.126), (5.127), (2) свойство  $3j$  символа  $[W_{a, b, c}]_{mkn}$ , что  $m + n + k = 0$ , (3) D-матрица  $D^{(j_a)m}_n$  диагональна, т.е.  $m - n = 0$ . Последние два свойства позволяют свести три суммы к одной. Также отсюда следует, что только средняя компонента (магнитное число = 0) граничного трансформированного вектора дает вклад, причем это общий фактор.

Далее, ассоциируем представления  $\mathcal{D}_a \approx \mathcal{D}_{j_p}$  и  $\mathcal{D}_c \approx \mathcal{D}_{j_i}$  с внутренней петлей и внешней линией. В этом случае сумму в правой части соотношения (6.102) можно привести к виду

$$\sum_{m = -j_p}^{j_p} (-)^m \begin{pmatrix} j_1 & j_p & j_p \\ 0 & m & -m \end{pmatrix} q^m = q^{-j_p} \sum_{n = 0}^{2j_p} (-)^{n-j_p} \begin{pmatrix} j_1 & j_p & j_p \\ 0 & n - j_p & j_p - n \end{pmatrix} q^n, \quad (6.103)$$

<sup>80</sup>Отметим, что след D-матрицы (6.100) дает  $su(1, 1)$  характер (6.85).

который получается пересуммированием с  $n = m + j_p$ . С другой стороны, коэффициенты разложения 1-точечного блока (6.87) задаются гипергеометрической функцией (6.88). Следовательно, для сопоставления реализации (6.102) с конформным блоком, необходимо удостовериться, что выполняется следующее тождество

$${}_3F_2(-j_1, j_1 + 1, -n; 1, -2j_p; 1) = \varkappa (-)^{n-j_p} \begin{pmatrix} j_1 & j_p & j_p \\ 0 & n - j_p & j_p - n \end{pmatrix}, \quad (6.104)$$

где  $\varkappa$  это  $n$ -независимый фактор. Данное соотношение выполняется для

$$\varkappa = (-)^{j_p} \begin{pmatrix} j_1 & j_p & j_p \\ 0 & j_p & -j_p \end{pmatrix}^{-1} = (-)^{j_p} \frac{(2j_p + 1) \sqrt{\Gamma(1 + 2j_p - j_1) \Gamma(2 + 2j_p + j_1)}}{\Gamma(2j_p + 2)}. \quad (6.105)$$

Чтобы в этом убедиться, воспользуемся явным выражением для  $3j$  символов [372]

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \\ &= \delta_{m_1+m_2+m_3,0} \frac{\sqrt{(j_3 - j_1 + j_2)!} \sqrt{(-j_3 + j_1 + j_2)!} \sqrt{(j_3 + j_1 + j_2 + 1)!}}{\Gamma(j_3 + j_1 + j_2 + 2) \sqrt{(j_3 + j_1 - j_2)!}} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{(j_3 - m_3)!} \sqrt{(j_1 - m_1)!}}{\sqrt{(j_3 + m_3)!} \sqrt{(j_1 + m_1)!} \sqrt{(j_2 - m_2)!} \sqrt{(j_2 + m_2)!}} \\ &\quad \times \frac{(-)^{j_1+m_2-m_3} (2j_3)! (j_3 + j_2 + m_1)!}{(j_3 - j_1 + j_2)! (j_3 - m_3)!} \end{aligned} \quad (6.106)$$

$$\times {}_3F_2(-j_3 + m_3, -j_3 - j_1 - j_2 - 1, -j_3 + j_1 - j_2; -2j_3, -j_3 - j_2 - m_1; 1), \quad (6.107)$$

которое дает правую часть формулы (6.104)

$$\begin{aligned} \varkappa(-)^{n-j_p} \begin{pmatrix} j_1 & j_p & j_p \\ 0 & n-j_p & j_p-n \end{pmatrix} &= \\ &= \frac{(2j_p)!(-1)^{n-j_1} {}_3F_2(-j_1-2j_p-1, j_1-2j_p, -n; -2j_p, -2j_p; 1)}{n!(2j_p-n)!}. \end{aligned} \quad (6.108)$$

Правая часть в этом выражении может быть преобразована с помощью преобразования (эйлеровского типа) для обобщённой гипергеометрии (см., например, [373]),

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(d)\Gamma(-a-b-c+d+e) {}_3F_2(e-a, e-b, c; -a-b+d+e, e; 1)}{\Gamma(d-c)\Gamma(-a-b+d+e)} &= \\ &= {}_3F_2(a, b, c; d, e; 1), \end{aligned} \quad (6.109)$$

и, таким образом, доказывается равенство (6.104), которое, в свою очередь, доказывает вильсоновское представление (6.102) 1-точечных глобальных торических блоков (6.87).

В заключение отметим, что аналогичные вычисления проделаны для 2-точечных вертексных функций и показано, что они равны 2-точечным торическим блокам в двух возможных каналах [178]. Очевидно, что помимо движения в сторону расширения этих вычислений по числу точек вставок, общее направление исследований состоит в использовании спиновых сетей для обобщения вильсоновского представления  $sl(2, \mathbb{R})$  (глобальных) конформных блоков на конформные блоки всей алгебры Вирасоро. В этом отношении интересны недавние работы [151, 340, 341, 342, 343], в которых изучаются  $1/c$  поправки к сферическим (планарным) глобальным блокам в  $\text{SFT}_2$ . В целом, задача может выглядеть как формулировка вильсоновского сетевого представления квантовых конформных блоков в виде теории возмущения по  $1/c$  поправкам в  $\text{SFT}_2$  на общих римановых поверхностях  $\Sigma_g$ .

Очевидно, что проблема совершенно нетривиальна уже в ведущем порядке, т.к. даже глобальные блоки на  $\Sigma_g$  неизвестны. Выход за глобальный предел  $c = \infty$  по существу сводится к вычислению кратных корреляторов тензора энергии-импульса (как в случае сферической  $\text{SFT}_2$ , рассматриваемой в этом контексте в работах [151, 340]). Однако, кратные корреляторы типа  $\langle TT\dots T \rangle$

на поверхностях произвольного рода, в частности, на торе, очень сложны. Отчасти, по причине нетривиальных модулярных свойств дважды периодических функций (в случае тора).



# Заключение

В заключении перечислим результаты, полученные в данной диссертации.

1. Построена теория, описывающая безмассовые  $AdS_5$  поля высших спинов смешанного типа симметрии, взаимодействующие друг с другом и гравитацией в кубическом приближении. В рамках формулировки FV типа разработаны две модели с калибровочной симметрией, отвечающие редуцированной и нередуцированной  $\mathcal{N} = 2$  супералгебрам высших спинов, отличие которых состоит в однократном и бесконечнократном вырождении спектра элементарных частиц.
2. Построена производящая формулировка динамики свободных, безмассовых и частично-безмассовых полей смешанного типа симметрии на пространстве  $AdS_d$ . Аналогичная формулировка построена для безмассовых полей и полей непрерывного спина смешанного типа симметрии в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ . Методом гомологической редукции воспроизведены известные формулировки динамики полей высших спинов.
3. Развита формализм несимметричных сохраняющихся токов, описываемых диаграммами Юнга с одной строкой и одним столбцом. Предъявлен полный список сохраняющихся токов, построенных из двух безмассовых спиноров на пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ , который в точности соответствует представлениям, возникающим в обобщённой теореме Флато–Фронсдала для двух спинорных синглетонов.
4. Установлено  $AdS_{d+1}/CFT_d$  соответствие для простейшего несимметричного безмассового  $AdS_{d+1}$  поля типа «крюк». Явно решена задача Ди-

рихле для полевых уравнений. Вычислено эффективное граничное действие теории, откуда получена 2-точечная корреляционная функция примарных операторов. В четных граничных размерностях  $d$  действие для конформных полей типа «крюк» на границе отождествлено с сингулярной частью ядра эффективного действия. Явно описана трансмутация симметрий теорий в объеме и на границе.

5. Сформулирована двумерная топологическая гравитация высших спинов, обобщающая гравитацию Джакива–Тейтельбойма. Теория определяется ВФ действием с бесконечномерной калибровочной алгеброй высших спинов. Спектр задается (бес)конечным набором «частично-безмассовых» топологических полей высших спинов максимальной глубины на пространстве  $AdS_2$ .
6. Сформулирована двумерная динамическая гравитация высших спинов. Описаны кинематические структуры теории: синглетон, алгебра высших спинов, калибровочные поля старшего ранга, поля материи. Динамика задается действием ВФ типа с расширенной бесконечномерной калибровочной алгеброй высших спинов. Теория описывает бесконечный набор скалярных полей на пространстве  $AdS_2$  с растущим эквидистантным спектром масс, взаимодействующих посредством бесконечного числа топологических калибровочных полей высших спинов.
7. В рамках квазиклассического  $AdS_3/CFT_2$  соответствия показано, что пертурбативный конформный  $n$ -точечный блок в  $CFT_2$  на плоскости равен длине дуального геодезического графа в пространстве  $AdS_3$  с конической сингулярностью. С этой целью в граничной  $CFT_2$  разработана специальная теория возмущений, когда два примарных оператора являются фоновыми для остальных  $n - 2$  операторов, рассматриваемых как флуктуации. В дуальной гравитационной теории показано, что динамика может быть редуцирована на двумерный срез постоянного времени с гиперболической геометрией, а мировые линии образует двумерный геодезический граф.
8. В рамках квазиклассического  $AdS_3/CFT_2$  соответствия показано, что пертурбативный конформный 1-точечный блок в  $CFT_2$  на торе равен

длине дуального геодезического графа типа «головастик» в термальном пространстве  $AdS_3$ . Данный результат распространён на 2-точечные блоки на торе в одном из каналов рассеяния.

9. Явно вычислены четыре типа 1-точечных блоков (супер) $CFT_2$  на торе в режиме большого центрального заряда. Показано, что различные пределы конформных весов приводят к глобальному, лёгкому, тяжело-лёгкому и пертурбативному классическому блокам. Установлено, что данные блоки не являются независимыми и связаны цепочками соотношений, соответствующих различным контракциям алгебры Вирасоро.
10. Сформулировано  $AdS_3/CFT_2$  соответствие между вильсоновскими сетями в  $3d$  теории гравитации Черна–Саймонса с торическими граничными условиями и конформными блоками граничной  $CFT_2$  на торе. Показано, что специальные матричные элементы вильсоновских операторов соответствуют глобальным конформным блокам вырожденных квази-примарных операторов. Формализован общий подход к описанию дуальности вильсоновских сетей и конформных блоков. Вычислены 1-точечный торический блок и 2-точечный торический блок в двух разных каналах рассеяния через матричные элементы вильсоновских операторов в конечномерных, неприводимых представлениях алгебры  $sl(2, \mathbb{R})$ .

**Благодарности.** В заключение мне приятно поблагодарить своих соавторов Ксавье Бекара, Владимира Александровича Белавина, Романа Викторовича Гейко, Максима Анатольевича Григорьева, Илью Юрьевича Типунина за многолетнее, плодотворное сотрудничество.

Также большое значение для меня имели обсуждения с Николасом Буланжером, Михаилом Андреевичем Васильевым, Вячеславом Евгеньевичем Диденко, Михаилом Сергеевичем Каленковым, Никитой Георгиевичем Мисунной, Карапетом Мкртчяном, Русланом Романовичем Мецаевым, Ченгом Пенгом, Дмитрием Семеновичем Пономаревым, Евгением Дмитриевичем Скворцовым, Александром Георгиевичем Смирновым, Эйханом Джунгом, а также со многими сотрудниками ОТФ ФИАН. Всех их я сердечно благодарю.

# Список литературы

1. Bronstein M. Quantentheorie schwacher Gravitationsfelder // Phys. Z. Sowjetunion. — 1936. — Vol. 9. — P. 140–157.
2. 't Hooft G. Dimensional reduction in quantum gravity // Conf. Proc. C. — 1993. — Vol. 930308. — P. 284–296. — gr-qc/9310026.
3. Susskind L. The World as a hologram // J. Math. Phys. — 1995. — Vol. 36. — P. 6377–6396. — hep-th/9409089.
4. Maldacena J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // Adv.Theor.Math.Phys. — 1998. — Vol. 2. — P. 231–252. — hep-th/9711200.
5. Gubser S., Klebanov I. R., Polyakov A. M. Gauge theory correlators from noncritical string theory // Phys.Lett. — 1998. — Vol. B428. — P. 105–114. — hep-th/9802109.
6. Witten E. Anti-de Sitter space and holography // Adv. Theor. Math. Phys. — 1998. — Vol. 2. — P. 253–291. — hep-th/9802150.
7. Rangamani M., Takayanagi T. Holographic Entanglement Entropy. — Springer, 2017. — Vol. 931. — Springer.
8. Harlow D. TASI Lectures on the Emergence of Bulk Physics in AdS/CFT // PoS. — 2018. — Vol. TASI2017. — P. 002. — 1802.01040.
9. Brown J. D., Henneaux M. Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity // Commun. Math. Phys. — 1986. — Vol. 104. — P. 207–226.

10. Coussaert O., Henneaux M., van Driel P. The Asymptotic dynamics of three-dimensional Einstein gravity with a negative cosmological constant // *Class. Quant. Grav.* — 1995. — Vol. 12. — P. 2961–2966. — gr-qc/9506019.
11. Witten E. Three-Dimensional Gravity Revisited. — 2007. — hep-th/0706.3359.
12. Becker K., Becker M., Schwarz J. H. String theory and M-theory: A modern introduction. — Cambridge University Press, 2006. — 12. — ISBN: 978-0-511-25486-4, 978-0-521-86069-7.
13. Vasiliev M. A. Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions // *Phys. Lett.* — 1990. — Vol. B243. — P. 378–382.
14. Bekaert X., et al. Nonlinear higher spin theories in various dimensions. — 2005. — hep-th/0503128.
15. Giombi S. Higher Spin — CFT Duality // Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings. — 2017. — P. 137–214. — 1607.02967.
16. Gross D. J. High-Energy Symmetries of String Theory // *Phys. Rev. Lett.* — 1988. — Vol. 60. — P. 1229.
17. Sundborg B. Stringy gravity, interacting tensionless strings and massless higher spins // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* — 2001. — Vol. 102. — P. 113–119. — hep-th/0103247.
18. Klebanov I. R., Polyakov A. M. AdS dual of the critical  $O(N)$  vector model // *Phys. Lett. B.* — 2002. — Vol. 550. — P. 213–219. — hep-th/0210114.
19. Sezgin E., Sundell P. Massless higher spins and holography // *Nucl. Phys.* — 2002. — Vol. B644. — P. 303–370. — hep-th/0205131.
20. Kitaev A. A simple model of quantum holography // KITP strings seminar and Entanglement 2015 program (Feb. 12, April 7, and May 27, 2015). — Vol. <http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/>.

21. Maldacena J., Stanford D. Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model // Phys. Rev. — 2016. — Vol. D94, no. 10. — P. 106002. — 1604.07818.
22. Jackiw R. Lower Dimensional Gravity // Nucl. Phys. — 1985. — Vol. B252. — P. 343–356.
23. Teitelboim C. Gravitation and Hamiltonian Structure in Two Space-Time Dimensions // Phys. Lett. — 1983. — Vol. 126B. — P. 41–45.
24. Sachdev S., Ye J. Gapless spin fluid ground state in a random, quantum Heisenberg magnet // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Vol. 70. — P. 3339. — cond-mat/9212030.
25. Brink L., Metsaev R. R., Vasiliev M. A. How massless are massless fields in AdS(d) // Nucl. Phys. — 2000. — Vol. B586. — P. 183–205. — hep-th/0005136.
26. Metsaev R. R. Light cone form of field dynamics in anti-de Sitter spacetime and AdS/CFT correspondence // Nucl. Phys. — 1999. — Vol. B563. — P. 295–348. — hep-th/9906217.
27. Tseytlin A. A. On limits of superstring in  $AdS_5 \times S^5$  // Theor. Math. Phys. — 2002. — Vol. 133. — P. 1376–1389. — hep-th/0201112.
28. Sorokin D. Introduction to the classical theory of higher spins. — 2004. — hep-th/0405069.
29. Labastida J. M. F. Massless Bosonic Free Fields // Phys. Rev. Lett. — 1987. — Vol. 58. — P. 531.
30. Metsaev R. R. Massless mixed symmetry bosonic free fields in d- dimensional anti-de Sitter space-time // Phys. Lett. — 1995. — Vol. B354. — P. 78–84.
31. Burdik C., Pashnev A., Tsuluaia M. On the mixed symmetry irreducible representations of the Poincare group in the BRST approach // Mod. Phys. Lett. — 2001. — Vol. A16. — P. 731–746. — hep-th/0101201.

32. Metsaev R. R. Massless arbitrary spin fields in AdS(5) // Phys. Lett. — 2002. — Vol. B531. — P. 152–160. — hep-th/0201226.
33. Zinoviev Y. On massive mixed symmetry tensor fields in Minkowski space and (A)dS. — 2002. — hep-th/0211233.
34. Alkalaev K., Shaynkman O., Vasiliev M. Frame-like formulation for free mixed-symmetry bosonic massless higher-spin fields in AdS(d). — 2006. — hep-th/0601225.
35. Alkalaev K. B. Two-column higher spin massless fields in AdS(d) // Theor. Math. Phys. — 2004. — Vol. 140. — P. 1253–1263. — hep-th/0311212.
36. Barnich G., et al. Parent field theory and unfolding in BRST first-quantized terms // Commun. Math. Phys. — 2005. — Vol. 260. — P. 147–181. — hep-th/0406192.
37. Bekaert X., Boulanger N. Tensor gauge fields in arbitrary representations of  $GL(D, \mathbb{R})$ . II: Quadratic actions // Commun. Math. Phys. — 2007. — Vol. 271. — P. 723–773. — hep-th/0606198.
38. Buchbinder I., Krykhtin V., Takata H. Gauge invariant Lagrangian construction for massive bosonic mixed symmetry higher spin fields // Phys.Lett. — 2007. — Vol. B656. — P. 253–264. — 0707.2181.
39. Moshin P., Reshetnyak A. BRST approach to Lagrangian formulation for mixed-symmetry fermionic higher-spin fields // JHEP. — 2007. — Vol. 0710. — P. 040. — 0707.0386.
40. Boulanger N., Iazeolla C., Sundell P. Unfolding Mixed-Symmetry Fields in AdS and the BMV Conjecture: II. Oscillator Realization // JHEP. — 2009. — Vol. 07. — P. 014. — 0812.4438.
41. Zinoviev Y. M. Toward frame-like gauge invariant formulation for massive mixed symmetry bosonic fields // Nucl. Phys. — 2009. — Vol. B812. — P. 46–63. — 0809.3287.



42. Campoleoni A., et al. Unconstrained Higher Spins of Mixed Symmetry. I. Bose Fields // Nucl. Phys. B. — 2009. — Vol. 815. — P. 289–367. — 0810.4350.
43. Fotopoulos A., Tsulaia M. Gauge Invariant Lagrangians for Free and Interacting Higher Spin Fields. A Review of the BRST formulation // Int. J. Mod. Phys. — 2009. — Vol. A24. — P. 1–60. — 0805.1346.
44. Skvortsov E. D. Gauge fields in (A)dS(d) and Connections of its symmetry algebra // J. Phys. A. — 2009. — Vol. 42. — P. 385401. — 0904.2919.
45. Skvortsov E. D. Frame-like Actions for Massless Mixed-Symmetry Fields in Minkowski space // Nucl. Phys. B. — 2009. — Vol. 808. — P. 569–591. — 0807.0903.
46. Zinoviev Y. M. Towards frame-like gauge invariant formulation for massive mixed symmetry bosonic fields. II. General Young tableau with two rows // Nucl. Phys. B. — 2010. — Vol. 826. — P. 490–510. — 0907.2140.
47. Zinoviev Y. M. Frame-like gauge invariant formulation for mixed symmetry fermionic fields // Nucl. Phys. B. — 2009. — Vol. 821. — P. 21–47. — 0904.0549.
48. Bastianelli F., Corradini O., Waldron A. Detours and Paths: BRST Complexes and Worldline Formalism // JHEP. — 2009. — Vol. 05. — P. 017. — 0902.0530.
49. Skvortsov E. D., Zinoviev Y. M. Frame-like Actions for Massless Mixed-Symmetry Fields in Minkowski space. Fermions // Nucl. Phys. B. — 2011. — Vol. 843. — P. 559–569. — 1007.4944.
50. Burdik C., Reshetnyak A. On representations of Higher Spin symmetry algebras for mixed-symmetry HS fields on AdS-spaces. Lagrangian formulation // J.Phys.Conf.Ser. — 2012. — Vol. 343. — P. 012102. — 1111.5516.
51. Campoleoni A., Francia D. Maxwell-like Lagrangians for higher spins // JHEP. — 2013. — Vol. 03. — P. 168. — 1206.5877.

52. Zinoviev Y. M. Massive two-column bosonic fields in the frame-like formalism // Nucl. Phys. B. — 2016. — Vol. 913. — P. 301–317. — 1607.08476.
53. Vasiliev M. A. Higher spin gauge theories: Star-product and AdS space. — 1999. — hep-th/9910096.
54. Bonelli G. On the tensionless limit of bosonic strings, infinite symmetries and higher spins // Nucl. Phys. — 2003. — Vol. B669. — P. 159–172. — hep-th/0305155.
55. Bianchi M. Higher spins and stringy AdS(5) x S(5) // Fortsch. Phys. — 2005. — Vol. 53. — P. 665–691. — hep-th/0409304.
56. Giombi S., Yin X. Higher Spin Gauge Theory and Holography: The Three-Point Functions // JHEP. — 2010. — Vol. 09. — P. 115. — 0912.3462.
57. Henneaux M., Rey S.-J. Nonlinear  $W_{infinity}$  as Asymptotic Symmetry of Three-Dimensional Higher Spin Anti-de Sitter Gravity // JHEP. — 2010. — Vol. 12. — P. 007. — 1008.4579.
58. Gaberdiel M. R., Gopakumar R. An AdS Dual for Minimal Model CFTs // Phys. Rev. — 2011. — Vol. D83. — P. 066007. — 1011.2986.
59.  $AdS_4/CFT_3$  Construction from Collective Fields / de Mello Koch R., Jevicki A., Jin K., and Rodrigues J. P. — 2010. — 1008.0633.
60. Douglas M. R., Mazzucato L., Razamat S. S. Holographic dual of free field theory. — 2010. — 1011.4926.
61. Aragone C., Deser S. Consistency Problems of Hypergravity // Phys. Lett. — 1979. — Vol. B86. — P. 161.
62. Bekaert X., Boulanger N., Sundell P. How higher-spin gravity surpasses the spin two barrier: no-go theorems versus yes-go examples. — 2010. — 1007.0435.
63. Fradkin E. S., Vasiliev M. A. On the Gravitational Interaction of Massless Higher Spin Fields // Phys. Lett. — 1987. — Vol. B189. — P. 89–95.

64. Fradkin E. S., Vasiliev M. A. Cubic Interaction in Extended Theories of Massless Higher Spin Fields // Nucl. Phys. — 1987. — Vol. B291. — P. 141–171.
65. Fradkin E. S., Vasiliev M. A. Candidate to the Role of Higher Spin Symmetry // Ann. Phys. — 1987. — Vol. 177. — P. 63.
66. Boulanger N., Leclercq S., Sundell P. On The Uniqueness of Minimal Coupling in Higher-Spin Gauge Theory // JHEP. — 2008. — Vol. 08. — P. 056. — 0805.2764.
67. Zinoviev Y. M. On spin 3 interacting with gravity // Class. Quant. Grav. — 2009. — Vol. 26. — P. 035022. — 0805.2226.
68. Berends F. A., Burgers G. J. H., Van Dam H. On spin three selfinteractions // Z. Phys. — 1984. — Vol. C24. — P. 247–254.
69. Bengtsson A. K. H., Bengtsson I., Linden N. Interacting Higher Spin Gauge Fields on the Light Front // Class. Quant. Grav. — 1987. — Vol. 4. — P. 1333.
70. Deser S., Yang Z. Inconsistency of spin 4 - spin-2 gauge field couplings // Class. Quant. Grav. — 1990. — Vol. 7. — P. 1491–1498.
71. Fradkin E. S., Metsaev R. R. A Cubic interaction of totally symmetric massless representations of the Lorentz group in arbitrary dimensions // Class. Quant. Grav. — 1991. — Vol. 8. — P. L89–L94.
72. Bekaert X., Boulanger N., Cnockaert S. Spin three gauge theory revisited // JHEP. — 2006. — Vol. 01. — P. 052. — hep-th/0508048.
73. Boulanger N., Leclercq S., Cnockaert S. Parity violating vertices for spin-3 gauge fields // Phys. Rev. — 2006. — Vol. D73. — P. 065019. — hep-th/0509118.
74. Metsaev R. R. Cubic interaction vertices for massive and massless higher spin fields // Nucl. Phys. — 2006. — Vol. B759. — P. 147–201. — hep-th/0512342.

75. Manvelyan R., Mkrtchyan K., Ruhl W. General trilinear interaction for arbitrary even higher spin gauge fields // Nucl. Phys. — 2010. — Vol. B836. — P. 204–221. — 1003.2877.
76. Vasiliev M. A. Cubic interactions of bosonic higher spin gauge fields in AdS(5) // Nucl. Phys. — 2001. — Vol. B616. — P. 106–162. — hep-th/0106200.
77. Alkalaev K. B., Vasiliev M. A.  $N = 1$  supersymmetric theory of higher spin gauge fields in AdS(5) at the cubic level // Nucl. Phys. — 2003. — Vol. B655. — P. 57–92. — hep-th/0206068.
78. Fradkin E. S., Linetsky V. Y. Conformal superalgebras of higher spins // Mod. Phys. Lett. — 1989. — Vol. A4. — P. 2363–2375.
79. Fradkin E. S., Linetsky V. Y. Cubic Interaction in Conformal Theory of Integer Higher Spin Fields in Four-dimensional Space-time // Phys. Lett. B. — 1989. — Vol. 231. — P. 97–106.
80. Sezgin E., Sundell P. Doubletons and 5D higher spin gauge theory // JHEP. — 2001. — Vol. 09. — P. 036. — hep-th/0105001.
81. Vasiliev M. A. Conformal higher spin symmetries of 4D massless supermultiplets and  $osp(L,2M)$  invariant equations in generalized (super)space // Phys. Rev. — 2002. — Vol. D66. — P. 066006. — hep-th/0106149.
82. Fradkin E. S., Metsaev R. R. Cubic scattering amplitudes for all massless representations of the Poincare group in any space-time dimension // Phys. Rev. — 1995. — Vol. D52. — P. 4660–4667.
83. Fotopoulos A., Tsulaia M. Interacting Higher Spins and the High Energy Limit of the Bosonic String // Phys. Rev. — 2007. — Vol. D76. — P. 025014. — 0705.2939.
84. Boulanger N., Skvortsov E. D., Zinoviev Yu. M. Gravitational cubic interactions for a simple mixed-symmetry gauge field in AdS and flat backgrounds // J. Phys. — 2011. — Vol. A44. — P. 415403. — 1107.1872.

85. Boulanger N., Skvortsov E. D. Higher-spin algebras and cubic interactions for simple mixed-symmetry fields in AdS spacetime // JHEP. — 2011. — Vol. 09. — P. 063. — 1107.5028.
86. Sharapov A., Skvortsov E., Tran T. Towards massless sector of tensionless strings on AdS<sub>5</sub> // Phys. Lett. B. — 2020. — Vol. 800. — P. 135094. — 1908.00050.
87. Grigoriev M., Skvortsov E. D. Type-B Formal Higher Spin Gravity // JHEP. — 2018. — Vol. 05. — P. 138. — 1804.03196.
88. Bargmann V., Wigner E. P. Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1948. — Vol. 34. — P. 211.
89. Bekaert X., Mourad J. The Continuous spin limit of higher spin field equations // JHEP. — 2006. — Vol. 01. — P. 115. — hep-th/0509092.
90. Bengtsson A. K. H. BRST Theory for Continuous Spin // JHEP. — 2013. — Vol. 10. — P. 108. — 1303.3799.
91. Schuster P., Toro N. Continuous-spin particle field theory with helicity correspondence // Phys. Rev. — 2015. — Vol. D91. — P. 025023. — 1404.0675.
92. Bekaert X., Najafizadeh M., Setare M. R. A gauge field theory of fermionic Continuous-Spin Particles // Phys. Lett. — 2016. — Vol. B760. — P. 320–323. — 1506.00973.
93. Metsaev R. R. Continuous spin gauge field in (A)dS space // Phys. Lett. — 2017. — Vol. B767. — P. 458–464. — 1610.00657.
94. Metsaev R. R. Fermionic continuous spin gauge field in (A)dS space // Phys. Lett. B. — 2017. — Vol. 773. — P. 135–141. — 1703.05780.
95. Zinoviev Yu. M. Infinite spin fields in  $d = 3$  and beyond // Universe. — 2017. — Vol. 3, no. 3. — P. 63. — 1707.08832.
96. Najafizadeh M. Modified Wigner equations and continuous spin gauge field // Phys. Rev. D. — 2018. — Vol. 97, no. 6. — P. 065009. — 1708.00827.

97. Bekaert X., Skvortsov E. D. Elementary particles with continuous spin // Int. J. Mod. Phys. — 2017. — Vol. A32. — P. 1730019. — 1708.01030.
98. Rehren K.-H. Pauli-Lubanski limit and stress-energy tensor for infinite-spin fields // JHEP. — 2017. — Vol. 11. — P. 130. — 1709.04858.
99. Metsaev R. R. Cubic interaction vertices for continuous-spin fields and arbitrary spin massive fields // JHEP. — 2017. — Vol. 11. — P. 197. — 1709.08596.
100. Bekaert X., Mourad J., Najafizadeh M. Continuous-spin field propagator and interaction with matter // JHEP. — 2017. — Vol. 11. — P. 113. — 1710.05788.
101. Khabarov M. V., Zinoviev Yu. M. Infinite (continuous) spin fields in the frame-like formalism // Nucl. Phys. — 2018. — Vol. B928. — P. 182–216. — 1711.08223.
102. Metsaev R. R. Continuous-spin mixed-symmetry fields in AdS(5) // J. Phys. A. — 2018. — Vol. 51, no. 21. — P. 215401. — 1711.11007.
103. Brink L., et al. Continuous spin representations of the Poincare and superPoincare groups // J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 43. — P. 6279. — hep-th/0205145.
104. Bekaert X., Boulanger N. The Unitary representations of the Poincare group in any spacetime dimension // 2nd Modave Summer School in Theoretical Physics Modave, Belgium, August 6-12, 2006. — 2006. — hep-th/0611263.
105. Buchbinder I. L., et al. Model of massless relativistic particle with continuous spin and its twistorial description // JHEP. — 2018. — Vol. 07. — P. 031. — 1805.09706.
106. Alkalaev K., Chekmenev A., Grigoriev M. Unified formulation for helicity and continuous spin fermionic fields // JHEP. — 2018. — Vol. 11. — P. 050. — 1808.09385.

107. Metsaev R. R. Light-cone continuous-spin field in AdS space // Phys. Lett. B. — 2019. — Vol. 793. — P. 134–140. — 1903.10495.
108. Burdík v., Pandey V. K., Reshetnyak A. BRST–BFV and BRST–BV descriptions for bosonic fields with continuous spin on  $R^{1,d-1}$  // Int. J. Mod. Phys. A. — 2020. — Vol. 35, no. 26. — P. 2050154. — 1906.02585.
109. Buchbinder I. L., et al. Massless finite and infinite spin representations of Poincaré group in six dimensions // Phys. Lett. B. — 2021. — Vol. 813. — P. 136064. — 2011.14725.
110. Najafizadeh M. Supersymmetric Continuous Spin Gauge Theory // JHEP. — 2020. — Vol. 03. — P. 027. — 1912.12310.
111. Buchbinder I. L., et al. Towards Lagrangian construction for infinite half-integer spin field // Nucl. Phys. B. — 2020. — Vol. 958. — P. 115114. — 2005.07085.
112. Flato M., Fronsdal C. One Massless Particle Equals Two Dirac Singletons: Elementary Particles in a Curved Space. 6 // Lett. Math. Phys. — 1978. — Vol. 2. — P. 421–426.
113. Vasiliev M. A. Higher spin superalgebras in any dimension and their representations // JHEP. — 2004. — Vol. 12. — P. 046. — hep-th/0404124.
114. Dolan F. A. Character formulae and partition functions in higher dimensional conformal field theory // J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 47. — P. 062303. — hep-th/0508031.
115. Giombi S., Yin X. The Higher Spin/Vector Model Duality // J. Phys. A. — 2013. — Vol. 46. — P. 214003. — 1208.4036.
116. Gaberdiel M. R., Gopakumar R. Minimal Model Holography // J. Phys. A. — 2013. — Vol. 46. — P. 214002. — 1207.6697.
117. Bengtsson A. K. H., Bengtsson I. Higher 'Spins' in One and Two Space-time Dimensions // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 174. — P. 294–300.

118. Fradkin E. S., Linetsky V. Ya. Higher Spin Symmetry in One-dimension and Two-dimensions. 1. // *Mod. Phys. Lett.* — 1989. — Vol. A4. — P. 2635–2647.
119. Vasiliev M. A. Higher spin gauge interactions for matter fields in two-dimensions // *Phys. Lett.* — 1995. — Vol. B363. — P. 51–57. — hep-th/9511063.
120. Alkalaev K. B. On higher spin extension of the Jackiw-Teitelboim gravity model // *J. Phys.* — 2014. — Vol. A47. — P. 365401. — 1311.5119.
121. Grumiller D., Leston M., Vassilevich D. Anti-de Sitter holography for gravity and higher spin theories in two dimensions // *Phys. Rev.* — 2014. — Vol. D89, no. 4. — P. 044001. — 1311.7413.
122. Alkalaev K. B. Global and local properties of AdS<sub>2</sub> higher spin gravity // *JHEP.* — 2014. — Vol. 10. — P. 122. — 1404.5330.
123. Blencowe M. P. A Consistent Interacting Massless Higher Spin Field Theory in  $D = (2+1)$  // *Class. Quant. Grav.* — 1989. — Vol. 6. — P. 443.
124. Campoleoni A., et al. Asymptotic symmetries of three-dimensional gravity coupled to higher-spin fields // *JHEP.* — 2010. — Vol. 11. — P. 007. — 1008.4744.
125. Sárosi G. AdS<sub>2</sub> holography and the SYK model // *PoS.* — 2018. — Vol. Modave2017. — P. 001. — 1711.08482.
126. Rosenhaus V. An introduction to the SYK model. — 2018. — 1807.03334.
127. Trunin D. A. Pedagogical introduction to SYK model and 2D Dilaton Gravity. — 2020. — 3. — 2002.12187.
128. Fukuyama T., Kamimura K. Gauge Theory of Two-dimensional Gravity // *Phys. Lett.* — 1985. — Vol. 160B. — P. 259–262.
129. Grumiller D., Salzer J., Vassilevich D. AdS<sub>2</sub> holography is (non-)trivial for (non-)constant dilaton // *JHEP.* — 2015. — Vol. 12. — P. 015. — 1509.08486.



130. González H. A., Grumiller D., Salzer J. Towards a bulk description of higher spin SYK // JHEP. — 2018. — Vol. 05. — P. 083. — 1802.01562.
131. Prokushkin S. F., Vasiliev M. A. Higher spin gauge interactions for massive matter fields in 3-D AdS space-time // Nucl. Phys. — 1999. — Vol. B545. — P. 385. — hep-th/9806236.
132. Belavin A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory // Nucl.Phys. — 1984. — Vol. B241. — P. 333–380.
133. Dolan F. A., Osborn H. Conformal partial waves and the operator product expansion // Nucl. Phys. B. — 2004. — Vol. 678. — P. 491–507. — hep-th/0309180.
134. Hartman T. Entanglement Entropy at Large Central Charge. — 2013. — 1303.6955.
135. Fitzpatrick A. L., Kaplan J., Walters M. T. Universality of Long-Distance AdS Physics from the CFT Bootstrap // JHEP. — 2014. — Vol. 1408. — P. 145. — 1403.6829.
136. Asplund C. T., et al. Holographic Entanglement Entropy from 2d CFT: Heavy States and Local Quenches // JHEP. — 2015. — Vol. 1502. — P. 171. — 1410.1392.
137. Hijano E., Kraus P., Snively R. Worldline approach to semi-classical conformal blocks // JHEP. — 2015. — Vol. 07. — P. 131. — 1501.02260.
138. Fitzpatrick A. L., Kaplan J., Walters M. T. Virasoro Conformal Blocks and Thermality from Classical Background Fields // JHEP. — 2015. — Vol. 11. — P. 200. — 1501.05315.
139. Perlmutter E. Virasoro conformal blocks in closed form // JHEP. — 2015. — Vol. 08. — P. 088. — 1502.07742.
140. Alkalaev K. B., Belavin V. A. Classical conformal blocks via AdS/CFT correspondence // JHEP. — 2015. — Vol. 08. — P. 049. — 1504.05943.

141. Hijano E., et al. Semiclassical Virasoro blocks from AdS<sub>3</sub> gravity // JHEP. — 2015. — Vol. 12. — P. 077. — 1508.04987.
142. Alkalaev K. B., Belavin V. A. Monodromic vs geodesic computation of Virasoro classical conformal blocks // Nucl. Phys. — 2016. — Vol. B904. — P. 367–385. — 1510.06685.
143. Hijano E., et al. Witten Diagrams Revisited: The AdS Geometry of Conformal Blocks // JHEP. — 2016. — Vol. 01. — P. 146. — 1508.00501.
144. Witten E. Quantum Field Theory and the Jones Polynomial // Commun. Math. Phys. — 1989. — Vol. 121. — P. 351–399.
145. Verlinde H. L. Conformal Field Theory, 2-*D* Quantum Gravity and Quantization of Teichmüller Space // Nucl. Phys. — 1990. — Vol. B337. — P. 652.
146. Labastida J., Ramallo A. Chern-Simons Theory and Conformal Blocks // Phys. Lett. B. — 1989. — Vol. 228. — P. 214–222.
147. Achúcarro A., Townsend P. K. A Chern-Simons Action for Three-Dimensional anti-De Sitter Supergravity Theories // Phys. Lett. — 1986. — Vol. B180. — P. 89. — [732(1987)].
148. Witten E. (2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System // Nucl. Phys. — 1988. — Vol. B311. — P. 46.
149. Bhatta A., Raman P., Suryanarayana N. V. Holographic Conformal Partial Waves as Gravitational Open Wilson Networks // JHEP. — 2016. — Vol. 06. — P. 119. — 1602.02962.
150. Besken M., et al. Holographic conformal blocks from interacting Wilson lines // JHEP. — 2016. — Vol. 08. — P. 099. — 1603.07317.
151. Fitzpatrick A. L., et al. Exact Virasoro Blocks from Wilson Lines and Background-Independent Operators // JHEP. — 2017. — Vol. 07. — P. 092. — 1612.06385.
152. Kraus P., et al. Witten Diagrams for Torus Conformal Blocks // JHEP. — 2017. — Vol. 09. — P. 149. — 1706.00047.

153. Bhatta A., Raman P., Suryanarayana N. V. Scalar Blocks as Gravitational Wilson Networks // JHEP. — 2018. — Vol. 12. — P. 125. — 1806.05475.
154. Banerjee P., Datta S., Sinha R. Higher-point conformal blocks and entanglement entropy in heavy states // JHEP. — 2016. — Vol. 05. — P. 127. — 1601.06794.
155. Alkalaev K. B., Belavin V. A. Holographic interpretation of 1-point toroidal block in the semiclassical limit // JHEP. — 2016. — Vol. 06. — P. 183. — 1603.08440.
156. Hulík O., Raeymaekers J., Vasilakis O. Multi-centered higher spin solutions from  $\mathcal{W}_N$  conformal blocks // JHEP. — 2018. — Vol. 11. — P. 101. — 1809.01387.
157. Ryu S., Takayanagi T. Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96. — P. 181602. — hep-th/0603001.
158. Zamolodchikov A. Conformal Symmetry in Two-dimensional Space: Recursion Representation of the Conformal Block // Teor.Mat.Fiz. — 1987. — Vol. 73. — P. 103–110.
159. Alday L. F., Gaiotto D., Tachikawa Y. Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories // Lett. Math. Phys. — 2010. — Vol. 91. — P. 167–197. — 0906.3219.
160. Alkalaev K. FV-type action for  $AdS_5$  mixed-symmetry fields // JHEP. — 2011. — Vol. 03. — P. 031. — 1011.6109.
161. Alkalaev K. B., Grigoriev M., Tipunin I. Y. Massless Poincare modules and gauge invariant equations // Nucl. Phys. — 2009. — Vol. B823. — P. 509–545. — 0811.3999.
162. Alkalaev K. B., Grigoriev M. Unified BRST description of AdS gauge fields // Nucl. Phys. — 2010. — Vol. B835. — P. 197–220. — 0910.2690.

163. Alkalaev K., Grigoriev M. Unified BRST approach to (partially) massless and massive AdS fields of arbitrary symmetry type // Nucl. Phys. — 2011. — Vol. B853. — P. 663–687. — 1105.6111.
164. Alkalaev K. B., Grigoriev M. A. Continuous spin fields of mixed-symmetry type // JHEP. — 2018. — Vol. 03. — P. 030. — 1712.02317.
165. Bengtsson A. K. H. A Unified Action for Higher Spin Gauge Bosons From Covariant String Theory // Phys. Lett. B. — 1986. — Vol. 182. — P. 321–325.
166. Sagnotti A., Tsulaia M. On higher spins and the tensionless limit of string theory // Nucl. Phys. — 2004. — Vol. B682. — P. 83–116. — hep-th/0311257.
167. Alkalaev K. Mixed-symmetry tensor conserved currents and AdS/CFT correspondence // J. Phys. — 2013. — Vol. A46. — P. 214007. — 1207.1079.
168. Costa M. S., Hansen T. Conformal correlators of mixed-symmetry tensors // JHEP. — 2015. — Vol. 02. — P. 151. — 1411.7351.
169. Alkalaev K. Massless hook field in AdS(d+1) from the holographic perspective // JHEP. — 2013. — Vol. 1301. — P. 018. — 1210.0217.
170. Alkalaev K., Bekaert X. Towards higher-spin AdS<sub>2</sub>/CFT<sub>1</sub> holography // JHEP. — 2020. — Vol. 04. — P. 206. — 1911.13212.
171. Alkalaev K., Bekaert X. On BF-type higher-spin actions in two dimensions // JHEP. — 2020. — Vol. 05. — P. 158. — 2002.02387.
172. Alkalaev K. B. Many-point classical conformal blocks and geodesic networks on the hyperbolic plane // JHEP. — 2016. — Vol. 12. — P. 070. — 1610.06717.
173. Zamolodchikov A. Two-dimensional conformal symmetry and critical four-spin correlation functions in the Ashkin-Teller model // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1986. — Vol. 90. — P. 1808–1818.

174. Alkalaev K. B., Belavin V. A. From global to heavy-light: 5-point conformal blocks // JHEP. — 2016. — Vol. 03. — P. 184. — 1512.07627.
175. Alkalaev K. B., Geiko R. V., Rappoport V. A. Various semiclassical limits of torus conformal blocks // JHEP. — 2017. — Vol. 04. — P. 070. — 1612.05891.
176. Alkalaev K. B., Belavin V. A. Holographic duals of large- $c$  torus conformal blocks // JHEP. — 2017. — Vol. 10. — P. 140. — 1707.09311.
177. Alkalaev K., Belavin V. Large- $c$  superconformal torus blocks // JHEP. — 2018. — Vol. 08. — P. 042. — 1805.12585.
178. Alkalaev K., Belavin V. More on Wilson toroidal networks and torus blocks // JHEP. — 2020. — Vol. 11. — P. 121. — 2007.10494.
179. Baez J. C. Spin network states in gauge theory // Adv. Math. — 1996. — Vol. 117. — P. 253–272. — gr-qc/9411007.
180. Bekaert X., Joung E., Mourad J. On higher spin interactions with matter // JHEP. — 2009. — Vol. 05. — P. 126. — 0903.3338.
181. Metsaev R. R. Mixed symmetry massive fields in AdS(5) // Class. Quant. Grav. — 2005. — Vol. 22. — P. 2777–2796. — hep-th/0412311.
182. Gunaydin M., van Nieuwenhuizen P., Warner N. P. General construction of the unitary representations of anti-de Sitter superalgebras and the spectrum of the  $S^{*4}$  compactification of eleven-dimensional supergravity // Nucl. Phys. — 1985. — Vol. B255. — P. 63.
183. Gunaydin M., Minic D., Zagermann M. 4D doubleton conformal theories, CPT and II B string on AdS(5) x S(5) // Nucl. Phys. — 1998. — Vol. B534. — P. 96–120. — hep-th/9806042.
184. Ferrara S., Fronsdal C. Gauge fields and singletons of AdS(2p+1) // Lett. Math. Phys. — 1998. — Vol. 46. — P. 157–169. — hep-th/9806072.
185. Alkalaev K. B. Free fermionic higher spin fields in AdS(5) // Phys. Lett. — 2001. — Vol. B519. — P. 121–128. — hep-th/0107040.

186. Alkalaev K. B. Mixed-symmetry massless gauge fields in AdS(5) // Theor. Math. Phys. — 2006. — Vol. 149. — P. 1338–1348. — hep-th/0501105.
187. Stelle K. S., West P. C. Spontaneously Broken De Sitter Symmetry and the Gravitational Holonomy Group // Phys. Rev. D. — 1980. — Vol. 21. — P. 1466.
188. Preitschopf C. R., Vasiliev M. A. The superalgebraic approach to supergravity. — 1997. — hep-th/9805127.
189. Fronsdal C. Massless Fields with Integer Spin // Phys. Rev. — 1978. — Vol. D18. — P. 3624.
190. Fang J., Fronsdal C. Massless Fields with Half Integral Spin // Phys. Rev. D. — 1978. — Vol. 18. — P. 3630.
191. Lopatin V. E., Vasiliev M. A. Free Massless Bosonic Fields of Arbitrary Spin in  $d$ -dimensional De Sitter Space // Mod. Phys. Lett. A. — 1988. — Vol. 3. — P. 257.
192. Vasiliev M. A. Free Massless Fermionic Fields of Arbitrary Spin in  $d$ -dimensional De Sitter Space // Nucl. Phys. B. — 1988. — Vol. 301. — P. 26–68.
193. Alkalaev K. B., Shaynkman O. V., Vasiliev M. A. On the frame-like formulation of mixed-symmetry massless fields in (A)dS( $d$ ) // Nucl. Phys. — 2004. — Vol. B692. — P. 363–393. — hep-th/0311164.
194. Segal A. Y. Point particle in general background fields vs. free gauge theories of traceless symmetric tensors // Int. J. Mod. Phys. — 2003. — Vol. A18. — P. 4999–5021. — hep-th/0110056.
195. Vasiliev M. A. Relativity, causality, locality, quantization and duality in the Sp(2M) invariant generalized space-time. — 2001. — hep-th/0111119.
196. Zinoviev Y. M. On massive high spin particles in (A)dS. — 2001. — hep-th/0108192.

197. Francia D., Sagnotti A. Free geometric equations for higher spins // *Phys. Lett.* — 2002. — Vol. B543. — P. 303–310. — hep-th/0207002.
198. Buchbinder I. L., Pashnev A., Tsulaia M. Massless higher spin fields in the AdS background and BRST constructions for nonlinear algebras. — 2002. — hep-th/0206026.
199. Barnich G., Bonelli G., Grigoriev M. From BRST to light-cone description of higher spin gauge fields. — 2005. — hep-th/0502232.
200. Barnich G., Grigoriev M. Parent form for higher spin fields on anti-de Sitter space // *JHEP.* — 2006. — Vol. 08. — P. 013. — hep-th/0602166.
201. Buchbinder I. L., Galajinsky A. V., Krykhtin V. A. Quartet unconstrained formulation for massless higher spin fields // *Nucl. Phys.* — 2007. — Vol. B779. — P. 155–177. — hep-th/0702161.
202. Ouvry S., Stern J. Gauge Fields of Any Spin and Symmetry // *Phys. Lett. B.* — 1986. — Vol. 177. — P. 335–340.
203. Siegel W., Zwiebach B. Gauge String Fields from the Light Cone // *Nucl. Phys.* — 1987. — Vol. B282. — P. 125.
204. Pashnev A., Tsulaia M. Description of the higher massless irreducible integer spins in the BRST approach // *Mod. Phys. Lett.* — 1998. — Vol. A13. — P. 1853. — hep-th/9803207.
205. Skvortsov E. D. Mixed-Symmetry Massless Fields in Minkowski space Unfolded // *JHEP.* — 2008. — Vol. 07. — P. 004. — 0801.2268.
206. Boulanger N., Iazeolla C., Sundell P. Unfolding Mixed-Symmetry Fields in AdS and the BMV Conjecture: I. General Formalism // *JHEP.* — 2009. — Vol. 07. — P. 013. — 0812.3615.
207. Buchbinder I. L., Krykhtin V. A., Ryskina L. L. BRST approach to Lagrangian formulation of bosonic totally antisymmetric tensor fields in curved space // *Mod. Phys. Lett.* — 2009. — Vol. A24. — P. 401–414. — 0810.3467.

208. Howe R. Remarks on classical invariant theory // Trans. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 2. — P. 313.
209. Howe R. Transcending classical invariant theory // J. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 3. — P. 2.
210. Vasiliev M. A. Free massless fields of arbitrary spin in the de Sitter space and initial data for a higher spin superalgebra // Fortsch. Phys. — 1987. — Vol. 35. — P. 741–770.
211. Berezin F. A., Kirillov (Ed. ) A. A., Leites (Ed. ) D. Introduction to superanalysis. — Dordrecht, Netherlands: Reidel ( 1987) 424 P. ( Mathematical Physics and Applied Mathematics, 9).
212. Romans L. J. Gauged  $\mathcal{N} = 4$  supergravities in five-dimensions and their magnetovac backgrounds // Nucl. Phys. — 1986. — Vol. B267. — P. 433.
213. Jackiw R. Gauge covariant conformal transformations // Phys. Rev. Lett. — 1978. — Vol. 41. — P. 1635.
214. Vasiliev M. A. Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d) // Phys. Lett. — 2003. — Vol. B567. — P. 139–151. — hep-th/0304049.
215. Sagnotti A., Sezgin E., Sundell P. On higher spins with a strong  $\text{Sp}(2, \mathbb{R})$  condition. — 2005. — hep-th/0501156.
216. Vasiliev M. A. Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2006. — Vol. 3. — P. 37–80. — hep-th/0504090.
217. Grigoriev M. Off-shell gauge fields from BRST quantization. — 2006. — hep-th/0605089.
218. Misuna N. On unfolded off-shell formulation for higher-spin theory // Phys. Lett. B. — 2019. — Vol. 798. — P. 134956. — 1905.06925.
219. Misuna N. G. Off-shell higher-spin fields in  $\text{AdS}_{\{4\}}$  and external currents. — 2020. — 12. — 2012.06570.



220. Wigner E. P. On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group // *Annals Math.* — 1939. — Vol. 40. — P. 149–204.
221. Labastida J. M. F. Massless Particles in Arbitrary Representations of the Lorentz Group // *Nucl. Phys. B.* — 1989. — Vol. 322. — P. 185–209.
222. Grigoriev M. Off-shell gauge fields from BRST quantization. — 2006. — hep-th/0605089.
223. Hallowell K., Waldron A. Supersymmetric Quantum Mechanics and Super-Lichnerowicz Algebras // *Commun. Math. Phys.* — 2008. — Vol. 278. — P. 775–801. — hep-th/0702033.
224. Buchbinder I. L., Fedoruk S., Isaev A. P. Massless infinite spin (super)particles and fields // *Proc. Steklov Inst. Math.* — 2020. — Vol. 309. — P. 46–56. — 1911.00362.
225. Aisaka Y., Kazama Y. Relating Green-Schwarz and extended pure spinor formalisms by similarity transformation // *JHEP.* — 2004. — Vol. 04. — P. 070. — hep-th/0404141.
226. Fronsdal C. Singletons and Massless, Integral Spin Fields on de Sitter Space (Elementary Particles in a Curved Space. 7 // *Phys. Rev.* — 1979. — Vol. D20. — P. 848–856.
227. Deser S., Nepomechie R. I. Gauge invariance versus masslessness in de sitter space // *Annals Phys.* — 1984. — Vol. 154. — P. 396.
228. Deser S., Waldron A. Gauge invariances and phases of massive higher spins in (A)dS // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 87. — P. 031601. — hep-th/0102166.
229. Metsaev R. R. Arbitrary spin massless bosonic fields in d-dimensional anti-de Sitter space. — 1997. — hep-th/9810231.
230. Skvortsov E. D., Vasiliev M. A. Geometric formulation for partially massless fields // *Nucl. Phys.* — 2006. — Vol. B756. — P. 117–147. — hep-th/0601095.

231. Boulanger N., Iazeolla C., Sundell P. Unfolding Mixed-Symmetry Fields in AdS and the BMV Conjecture: I. General Formalism // JHEP. — 2009. — Vol. 07. — P. 013. — 0812.3615.
232. Reshetnyak A. A. Nonlinear Operator Superalgebras and BFV-BRST Operators for Lagrangian Description of Mixed-symmetry HS Fields in AdS Spaces. — 2008. — 0812.2329.
233. Bonelli G. On the covariant quantization of tensionless bosonic strings in AdS spacetime // JHEP. — 2003. — Vol. 11. — P. 028. — hep-th/0309222.
234. Deser S., Waldron A. Partial masslessness of higher spins in (A)dS // Nucl. Phys. — 2001. — Vol. B607. — P. 577–604. — hep-th/0103198.
235. Skvortsov E. D. Gauge fields in (A)dS within the unfolded approach: algebraic aspects // JHEP. — 2010. — Vol. 01. — P. 106. — 0910.3334.
236. Bekaert X., Meunier E. Higher spin interactions with scalar matter on constant curvature spacetimes: conserved current and cubic coupling generating functions // JHEP. — 2010. — Vol. 1011. — P. 116. — 1007.4384.
237. Deser S., Waldron A. Arbitrary spin representations in de Sitter from dS/CFT with applications to dS supergravity // Nucl. Phys. — 2003. — Vol. B662. — P. 379–392. — hep-th/0301068.
238. Ponomarev D. S., Vasiliev M. A. Frame-Like Action and Unfolded Formulation for Massive Higher-Spin Fields // Nucl. Phys. — 2010. — Vol. B839. — P. 466–498. — 1001.0062.
239. Jevicki A., Jin K., Ye Q. Collective Dipole Model of AdS/CFT and Higher Spin Gravity // J. Phys. A. — 2011. — Vol. 44. — P. 465402. — 1106.3983.
240. Metsaev R. R. AdS friendly light-cone formulation of conformal field theory // Phys. Lett. — 2006. — Vol. B636. — P. 227–233. — hep-th/0512330.
241. Metsaev R. CFT adapted gauge invariant formulation of arbitrary spin fields in AdS and modified de Donder gauge // Phys.Lett. — 2009. — Vol. B671. — P. 128–134. — 0808.3945.

242. Chang C.-M., Yin X. Higher Spin Gravity with Matter in  $AdS_3$  and Its CFT Dual // JHEP. — 2012. — Vol. 10. — P. 024. — 1106.2580.
243. Giombi S., Yin X. Higher Spins in AdS and Twistorial Holography // JHEP. — 2011. — Vol. 1104. — P. 086. — 1004.3736.
244. Vasiliev M. A. Holography, Unfolding and Higher-Spin Theory // J. Phys. A. — 2013. — Vol. 46. — P. 214013. — 1203.5554.
245. Bekaert X., Grigoriev M. Notes on the ambient approach to boundary values of AdS gauge fields // J. Phys. A. — 2013. — Vol. 46. — P. 214008. — 1207.3439.
246. Didenko V. E., Skvortsov E. D. Towards higher-spin holography in ambient space of any dimension // J. Phys. A. — 2013. — Vol. 46. — P. 214010. — 1207.6786.
247. Gunaydin M., Marcus N. The Spectrum of the  $s^{*5}$  Compactification of the Chiral  $N=2$ ,  $D=10$  Supergravity and the Unitary Supermultiplets of  $U(2, 2/4)$  // Class. Quant. Grav. — 1985. — Vol. 2. — P. L11.
248. Shaynkman O. V., Tipunin I. Y., Vasiliev M. A. Unfolded form of conformal equations in  $M$  dimensions and  $o(M + 2)$  modules // Rev. Math. Phys. — 2006. — Vol. 18. — P. 823–886. — hep-th/0401086.
249. Dobrev V. K., Petkova V. B. Elementary Representations and Intertwining Operators for the Group  $SU^*(4)$  // Rept. Math. Phys. — 1978. — Vol. 13. — P. 233–277.
250. Dobrev V. K., et al. Conformal covariant operator product expansion (OPE) of two spin  $1/2$  fields // Bulg. J. Phys. — 1974. — Vol. 1. — P. 42–57.
251. Dobrev V. K., Ganchev A. K., Jordanov O. I. Conformal Operators From Spinor Fields. 1. Symmetric Tensor Case // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 119. — P. 372.

252. Osborn H., Petkou A. C. Implications of conformal invariance in field theories for general dimensions // *Annals Phys.* — 1994. — Vol. 231. — P. 311–362. — hep-th/9307010.
253. Mack G., Salam A. Finite component field representations of the conformal group // *Annals Phys.* — 1969. — Vol. 53. — P. 174–202.
254. Berends F. A., Burgers G. J. H., van Dam H. Explicit Construction of Conserved Currents for Massless Fields of Arbitrary Spin // *Nucl. Phys. B.* — 1986. — Vol. 271. — P. 429–441.
255. Anselmi D. Higher spin current multiplets in operator product expansions // *Class. Quant. Grav.* — 2000. — Vol. 17. — P. 1383–1400. — hep-th/9906167.
256. Prokushkin S. F., Vasiliev M. A. Cohomology of arbitrary spin currents in AdS(3) // *Theor. Math. Phys.* — 2000. — Vol. 123. — P. 415–435. — hep-th/9907020.
257. Gelfond O. A., Vasiliev M. A. Higher rank conformal fields in the Sp(2M) symmetric generalized space-time // *Theor. Math. Phys.* — 2005. — Vol. 145. — P. 1400–1424. — hep-th/0304020.
258. Manvelyan R., Ruhl W. Conformal coupling of higher spin gauge fields to a scalar field in AdS(4) and generalized Weyl invariance // *Phys. Lett. B.* — 2004. — Vol. 593. — P. 253–261. — hep-th/0403241.
259. Dobrev V. K., Ganchev A. K. Conformal operators from spinor fields: antisymmetric tensor case. — 1982. — 12.
260. Konstein S. E., Vasiliev M. A., Zaikin V. N. Conformal higher spin currents in any dimension and AdS / CFT correspondence // *JHEP.* — 2000. — Vol. 12. — P. 018. — hep-th/0010239.
261. Liu H., Tseytlin A. A. D = 4 superYang-Mills, D = 5 gauged supergravity, and D = 4 conformal supergravity // *Nucl.Phys.* — 1998. — Vol. B533. — P. 88–108. — hep-th/9804083.

262. Arutyunov G., Frolov S. On the origin of supergravity boundary terms in the AdS / CFT correspondence // Nucl.Phys. — 1999. — Vol. B544. — P. 576–589. — hep-th/9806216.
263. Mueck W., Viswanathan K. S. Conformal field theory correlators from classical field theory on anti-de Sitter space. II: Vector and spinor fields // Phys. Rev. — 1998. — Vol. D58. — P. 106006. — hep-th/9805145.
264. Mueck W., Viswanathan K. The Graviton in the AdS-CFT correspondence: Solution via the Dirichlet boundary value problem. — 1998. — hep-th/9810151.
265. Polishchuk A. Massive symmetric tensor field on AdS // JHEP. — 1999. — Vol. 07. — P. 007. — hep-th/9905048.
266. Curtright T. Generalized gauge fields // Phys.Lett. — 1985. — Vol. B165. — P. 304.
267. Bianchi M., Freedman D. Z., Skenderis K. Holographic Renormalization // Nucl. Phys. — 2002. — Vol. B631. — P. 159–194. — hep-th/0112119.
268. Metsaev R. R. Gauge invariant two-point vertices of shadow fields, AdS/CFT, and conformal fields // Phys. Rev. — 2010. — Vol. D81. — P. 106002. — 0907.4678.
269. Vasiliev M. A. Bosonic conformal higher-spin fields of any symmetry // Nucl. Phys. — 2010. — Vol. B829. — P. 176–224. — 0909.5226.
270. Gelfand I., Shilov G. Generalized functions, vol.I, (in russian). — 1959.
271. Feigin B. L. Lie algebras  $gl(\lambda)$  and cohomologies of Lie algebras of differential operators // Russian Math. Surv. — 1988. — Vol. 43. — P. 169–170.
272. Vasiliev M. A. Higher Spin Algebras and Quantization on the Sphere and Hyperboloid // Int. J. Mod. Phys. — 1991. — Vol. A6. — P. 1115–1135.
273. Bekaert X. Singletons and their maximal symmetry algebras // Modern Mathematical Physics. Proceedings, 6th Summer School: Belgrade, Serbia, September 14-23, 2010. — 2011. — P. 71–89. — 1111.4554.

274. Angelopoulos E., et al. Massless particles, conformal group and de sitter universe // Phys. Rev. — 1981. — Vol. D23. — P. 1278.
275. Breitenlohner P., Freedman D. Z. Stability in Gauged Extended Supergravity // Ann. Phys. — 1982. — Vol. 144. — P. 249.
276. Klebanov I. R., Witten E. AdS / CFT correspondence and symmetry breaking // Nucl. Phys. — 1999. — Vol. B556. — P. 89–114. — hep-th/9905104.
277. Sezgin E., Sundell P. Holography in 4D (super) higher spin theories and a test via cubic scalar couplings // JHEP. — 2005. — Vol. 07. — P. 044. — hep-th/0305040.
278. Basile T., Bekaert X., Joung E. Twisted Flato-Fronsdal Theorem for Higher-Spin Algebras // JHEP. — 2018. — Vol. 07. — P. 009. — 1802.03232.
279. Grigoriev M., Lovrekovic I., Skvortsov E. New Conformal Higher Spin Gravities in  $3d$  // JHEP. — 2020. — Vol. 01. — P. 059. — 1909.13305.
280. Metsaev R. R. Massive fields in AdS(3) and compactification in AdS space-time // Nucl. Phys. Proc. Suppl. — 2001. — Vol. 102. — P. 100–106. — hep-th/0103088.
281. Artsukevich A. Y., Vasiliev M. A. On Dimensional Degression in AdS(d) // Phys. Rev. — 2009. — Vol. D79. — P. 045007. — 0810.2065.
282. Gross D. J., Rosenhaus V. All point correlation functions in SYK // JHEP. — 2017. — Vol. 12. — P. 148. — 1710.08113.
283. Konstein S. E., Vasiliev M. A. Extended Higher Spin Superalgebras and Their Massless Representations // Nucl. Phys. B. — 1990. — Vol. 331. — P. 475–499.
284. Fradkin E. S., Linetsky V. Ya. Infinite dimensional generalizations of finite dimensional symmetries // J. Math. Phys. — 1991. — Vol. 32. — P. 1218–1226.

285. Fradkin E. S., Linetsky V. Ya. Infinite dimensional generalizations of simple Lie algebras // *Mod. Phys. Lett.* — 1990. — Vol. A5. — P. 1967–1977.
286. Boulanger N., et al. On the uniqueness of higher-spin symmetries in AdS and CFT // *Int. J. Mod. Phys.* — 2013. — Vol. A28. — P. 1350162. — 1305.5180.
287. Joung E., Mkrtchyan K. Notes on higher-spin algebras: minimal representations and structure constants // *JHEP.* — 2014. — Vol. 05. — P. 103. — 1401.7977.
288. Fernando S., Gunaydin M. Massless conformal fields,  $AdS_{d+1}/CFT_d$  higher spin algebras and their deformations // *Nucl. Phys.* — 2016. — Vol. B904. — P. 494–526. — 1511.02167.
289. Arnaudon D., Bauer M., Frappat L. On Casimir's Ghost // *Commun.Math.Phys.* — 1997. — Vol. 187. — P. 429. — q-alg/9605021.
290. Iazeolla C., Sundell P. A Fiber Approach to Harmonic Analysis of Unfolded Higher-Spin Field Equations // *JHEP.* — 2008. — Vol. 10. — P. 022. — 0806.1942.
291. Vasiliev M. A. Unfolded representation for relativistic equations in (2+1) anti-De Sitter space // *Class. Quant. Grav.* — 1994. — Vol. 11. — P. 649–664.
292. Shaynkman O. V., Vasiliev M. A. Scalar field in any dimension from the higher spin gauge theory perspective // *Theor. Math. Phys.* — 2000. — Vol. 123. — P. 683–700. — hep-th/0003123.
293. Kessel P., Mkrtchyan K. Cubic interactions of massless bosonic fields in three dimensions II: Parity-odd and Chern-Simons vertices // *Phys. Rev. D.* — 2018. — Vol. 97, no. 10. — P. 106021. — 1803.02737.
294. Grumiller D., Kummer W., Vassilevich D. Dilaton gravity in two-dimensions // *Phys. Rept.* — 2002. — Vol. 369. — P. 327–430. — hep-th/0204253.

295. Labastida J. M. F., Pernici M., Witten E. Topological Gravity in Two-Dimensions // Nucl. Phys. B. — 1988. — Vol. 310. — P. 611–624.
296. Deser S., Nepomechie R. I. Anomalous Propagation of Gauge Fields in Conformally Flat Spaces // Phys.Lett. — 1983. — Vol. B132. — P. 321.
297. Zinoviev Y. M. On massive spin 2 interactions // Nucl. Phys. B. — 2007. — Vol. 770. — P. 83–106. — hep-th/0609170.
298. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V. Algebras, rings, and modules : Lie algebras and Hopf algebras. — American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.
299. Vasiliev M. A. Extended Higher Spin Superalgebras and Their Realizations in Terms of Quantum Operators // Fortsch. Phys. — 1988. — Vol. 36. — P. 33–62.
300. Sharapov A., Skvortsov E.  $A_\infty$  algebras from slightly broken higher spin symmetries // JHEP. — 2019. — Vol. 09. — P. 024. — 1809.10027.
301. Sharapov A., Skvortsov E. Formal Higher Spin Gravities // Nucl. Phys. — 2019. — Vol. B941. — P. 838–860. — 1901.01426.
302. Barabanshchikov A. V., Prokushkin S. F., Vasiliev M. A. Free equations for massive matter fields in (2+1)-dimensional anti-de Sitter space from deformed oscillator algebra // Teor. Mat. Fiz. — 1997. — Vol. 110N3. — P. 372–384. — [Theor. Math. Phys.110,295(1997)]. hep-th/9609034.
303. Caputa P., et al. Quantum Entanglement of Localized Excited States at Finite Temperature // JHEP. — 2015. — Vol. 01. — P. 102. — 1410.2287.
304. de Boer J., et al. Higher spin entanglement and  $\mathcal{W}_N$  conformal blocks // JHEP. — 2015. — Vol. 07. — P. 168. — 1412.7520.
305. Chen B., Wu J.-q., Zhang J.-j. Holographic Description of 2D Conformal Block in Semi-classical Limit // JHEP. — 2016. — Vol. 10. — P. 110. — 1609.00801.



306. Balasubramanian V., Ross S. F. Holographic particle detection // Phys. Rev. — 2000. — Vol. D61. — P. 044007. — hep-th/9906226.
307. Louko J., Marolf D., Ross S. F. On geodesic propagators and black hole holography // Phys. Rev. — 2000. — Vol. D62. — P. 044041. — hep-th/0002111.
308. Local bulk operators in AdS/CFT: A Holographic description of the black hole interior / Hamilton A., Kabat D. N., Lifschytz G., and Lowe D. A. // Phys. Rev. D. — 2007. — Vol. 75. — P. 106001. — [Erratum: Phys.Rev.D 75, 129902 (2007)]. hep-th/0612053.
309. Aparicio J., Lopez E. Evolution of Two-Point Functions from Holography // JHEP. — 2011. — Vol. 12. — P. 082. — 1109.3571.
310. Arefeva I. Y., Bagrov A. A. Holographic dual of a conical defect // Theor. Math. Phys. — 2015. — Vol. 182, no. 1. — P. 1–22.
311. Aref'eva I. Y., Khramtsov M. A., Tikhanovskaya M. D. Improved image method for a holographic description of conical defects // Theor. Math. Phys. — 2016. — Vol. 189, no. 2. — P. 1660–1672. — 1604.08905.
312. Aref'eva I. Ya., Khramtsov M. A. AdS/CFT prescription for angle-deficit space and winding geodesics // JHEP. — 2016. — Vol. 04. — P. 121. — 1601.02008.
313. Ageev D. S., Aref'eva I. Y., Tikhanovskaya M. D.  $(1 + 1)$ -Correlators and moving massive defects // Theor. Math. Phys. — 2016. — Vol. 188, no. 1. — P. 85–120.
314. Litvinov A., et al. Classical Conformal Blocks and Painleve VI // JHEP. — 2014. — Vol. 1407. — P. 144. — 1309.4700.
315. Kashani-Poor A.-K., Troost J. Transformations of Spherical Blocks // JHEP. — 2013. — Vol. 10. — P. 009. — 1305.7408.
316. Cantini L., Menotti P., Seminara D. Liouville theory, accessory parameters and  $(2+1)$ -dimensional gravity // Nucl. Phys. — 2002. — Vol. B638. — P. 351–377. — hep-th/0203103.

317. Penrose R. Angular momentum; an approach to combinatorial space time. *Quantum Theory and Beyond*. — Cambridge : Cambridge University Press, 1971.
318. Hadasz L., Jaskolski Z., Piatek M. Classical geometry from the quantum Liouville theory // *Nucl. Phys.* — 2005. — Vol. B724. — P. 529–554. — hep-th/0504204.
319. Belavin V. A., Geiko R. V. Geodesic description of Heavy-Light Virasoro blocks // *JHEP*. — 2017. — Vol. 08. — P. 125. — 1705.10950.
320. Alkalaev K., Pavlov M. Perturbative classical conformal blocks as Steiner trees on the hyperbolic disk // *JHEP*. — 2019. — Vol. 02. — P. 023. — 1810.07741.
321. Alkalaev K. B., Pavlov M. Four-point conformal blocks with three heavy background operators // *JHEP*. — 2019. — Vol. 08. — P. 038. — 1905.03195.
322. Alkalaev K., Pavlov M. Holographic variables for  $\text{CFT}_2$  conformal blocks with heavy operators // *Nucl. Phys. B*. — 2020. — Vol. 956. — P. 115018. — 2001.02604.
323. Nishida M., Tamaoka K. Geodesic Witten diagrams with an external spinning field // *PTEP*. — 2017. — Vol. 2017, no. 5. — P. 053B06. — 1609.04563.
324. Harlow D., Maltz J., Witten E. Analytic Continuation of Liouville Theory // *JHEP*. — 2011. — Vol. 1112. — P. 071. — 1108.4417.
325. Seiberg N. Notes on quantum Liouville theory and quantum gravity // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* — 1990. — Vol. 102. — P. 319–349.
326. Banados M. Three-dimensional quantum geometry and black holes. — 1998. — hep-th/9901148.
327. Zamolodchikov A., Zamolodchikov A. *Lectures on Liouville Theory and Matrix Models*.
328. Pavlov M. Large- $c$  conformal ( $n \leq 6$ )-point blocks with superlight weights and holographic Steiner trees. — 2021. — 1. — 2101.04513.

329. Banados M. Global charges in Chern-Simons field theory and the (2+1) black hole // Phys. Rev. — 1996. — Vol. D52. — P. 5816. — hep-th/9405171.
330. Holman W. J., Biedenharn L. C. Complex angular momenta and the groups  $SU(1, 1)$  and  $SU(2)$  // Annals of Physics. — 1966. — Vol. 39, no. 1. — P. 1 – 42.
331. Ponsot B., Teschner J. Liouville bootstrap via harmonic analysis on a noncompact quantum group. — 1999. — 11. — hep-th/9911110.
332. Gadde A. In search of conformal theories. — 2017. — 2. — 1702.07362.
333. Liu J., et al.  $d$ -dimensional SYK, AdS Loops, and  $6j$  Symbols // JHEP. — 2019. — Vol. 03. — P. 052. — 1808.00612.
334. Meltzer D., Perlmutter E., Sivaramakrishnan A. Unitarity Methods in AdS/CFT // JHEP. — 2020. — Vol. 03. — P. 061. — 1912.09521.
335. Sleight C., Taronna M. Spinning Mellin Bootstrap: Conformal Partial Waves, Crossing Kernels and Applications // Fortsch. Phys. — 2018. — Vol. 66, no. 8-9. — P. 1800038. — 1804.09334.
336. Albayrak S., Meltzer D., Poland D. The Inversion Formula and  $6j$  Symbol for 3d Fermions // JHEP. — 2020. — Vol. 09. — P. 148. — 2006.07374.
337. Di Francesco P., Mathieu P., Senechal D. Conformal Field Theory. Graduate Texts in Contemporary Physics. — New York : Springer-Verlag, 1997.
338. Gaberdiel M. R., Gopakumar R. Triality in Minimal Model Holography // JHEP. — 2012. — Vol. 07. — P. 127. — 1205.2472.
339. Perlmutter E., Prochazka T., Raeymaekers J. The semiclassical limit of  $W_N$  CFTs and Vasiliev theory // JHEP. — 2013. — Vol. 05. — P. 007. — 1210.8452.
340. Besken M., Hegde A., Kraus P. Anomalous dimensions from quantum Wilson lines. — 2017. — 1702.06640.

341. Hikida Y., Uetoko T. Correlators in higher-spin  $\text{AdS}_3$  holography from Wilson lines with loop corrections // PTEP. — 2017. — Vol. 2017, no. 11. — P. 113B03. — 1708.08657.
342. Hikida Y., Uetoko T. Superconformal blocks from Wilson lines with loop corrections // JHEP. — 2018. — Vol. 08. — P. 101. — 1806.05836.
343. Hikida Y., Uetoko T. Conformal blocks from Wilson lines with loop corrections // Phys. Rev. D. — 2018. — Vol. 97, no. 8. — P. 086014. — 1801.08549.
344. Fitzpatrick A. L., et al. On information loss in  $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$  // JHEP. — 2016. — Vol. 05. — P. 109. — 1603.08925.
345. Cardy J. L. Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories // Nucl. Phys. — 1986. — Vol. B270. — P. 186–204.
346. Fateev V. A., et al. Differential equation for four-point correlation function in Liouville field theory and elliptic four-point conformal blocks // J. Phys. — 2009. — Vol. A42. — P. 304011. — 0902.1331.
347. Poghossian R. Recursion relations in CFT and  $\text{N}=2$  SYM theory // JHEP. — 2009. — Vol. 12. — P. 038. — 0909.3412.
348. Hadasz L., Jaskolski Z., Suchanek P. Recursive representation of the torus 1-point conformal block // JHEP. — 2010. — Vol. 01. — P. 063. — 0911.2353.
349. Fateev V. A., Litvinov A. V. On AGT conjecture // JHEP. — 2010. — Vol. 02. — P. 014. — 0912.0504.
350. Menotti P. Riemann-Hilbert treatment of Liouville theory on the torus // J. Phys. — 2011. — Vol. A44. — P. 115403. — 1010.4946.
351. Marshakov A., Mironov A., Morozov A. On AGT Relations with Surface Operator Insertion and Stationary Limit of Beta-Ensembles // J. Geom. Phys. — 2011. — Vol. 61. — P. 1203–1222. — 1011.4491.
352. Kashani-Poor A.-K., Troost J. The toroidal block and the genus expansion // JHEP. — 2013. — Vol. 03. — P. 133. — 1212.0722.

353. Piatek M. Classical torus conformal block,  $N = 2^*$  twisted superpotential and the accessory parameter of Lamé equation // JHEP. — 2014. — Vol. 03. — P. 124. — 1309.7672.
354. Datta S., David J. R., Kumar S. P. Conformal perturbation theory and higher spin entanglement entropy on the torus // JHEP. — 2015. — Vol. 04. — P. 041. — 1412.3946.
355. Dolan F., Osborn H. Conformal Partial Waves: Further Mathematical Results. — 2011. — 1108.6194.
356. Rosenhaus V. Multipoint Conformal Blocks in the Comb Channel // JHEP. — 2019. — Vol. 02. — P. 142. — 1810.03244.
357. Fateev V., Ribault S. The Large central charge limit of conformal blocks // JHEP. — 2012. — Vol. 02. — P. 001. — 1109.6764.
358. Poghosyan H., Poghossian R., Sarkissian G. The light asymptotic limit of conformal blocks in Toda field theory // JHEP. — 2016. — Vol. 05. — P. 087. — 1602.04829.
359. Inonu E., Wigner E. P. On the Contraction of groups and their representations // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1953. — Vol. 39. — P. 510–524.
360. Barut A. O., Girardello L. New 'coherent' states associated with noncompact groups // Commun. Math. Phys. — 1971. — Vol. 21. — P. 41–55.
361. Alekseev S., Gorsky A., Litvinov M. Toward the Pole // JHEP. — 2020. — Vol. 03. — P. 157. — 1911.01334.
362. Ramos Cabezas J. Semiclassical torus blocks in the t-channel // JHEP. — 2020. — Vol. 08. — P. 151. — 2005.04128.
363. Bonelli G., Maruyoshi K., Tanzini A. Wild Quiver Gauge Theories // JHEP. — 2012. — Vol. 02. — P. 031. — 1112.1691.
364. Gaiotto D., Teschner J. Irregular singularities in Liouville theory and Argyres-Douglas type gauge theories, I // JHEP. — 2012. — Vol. 12. — P. 050. — 1203.1052.

365. Piatek M., Pietrykowski A. R. Classical irregular block,  $\mathcal{N} = 2$  pure gauge theory and Mathieu equation // JHEP. — 2014. — Vol. 12. — P. 032. — 1407.0305.
366. Rim C., Zhang H. Classical Virasoro irregular conformal block // JHEP. — 2015. — Vol. 07. — P. 163. — 1504.07910.
367. Carlip S., Teitelboim C. Aspects of black hole quantum mechanics and thermodynamics in (2+1)-dimensions // Phys. Rev. — 1995. — Vol. D51. — P. 622–631. — gr-qc/9405070.
368. Maloney A., Witten E. Quantum Gravity Partition Functions in Three Dimensions // JHEP. — 2010. — Vol. 02. — P. 029. — 0712.0155.
369. Maldacena J. M., Strominger A. AdS(3) black holes and a stringy exclusion principle // JHEP. — 1998. — Vol. 12. — P. 005. — hep-th/9804085.
370. Kraus P. Lectures on black holes and the AdS(3) / CFT(2) correspondence // Lect. Notes Phys. — 2008. — Vol. 755. — P. 193–247. — hep-th/0609074.
371. Black Holes and Singularity Resolution in Higher Spin Gravity / Castro A., Hijano E., LePage-Jutier A., and Maloney A. // JHEP. — 2012. — Vol. 01. — P. 031. — 1110.4117.
372. Varshalovich D., Moskalev A., Khersonskii V. Quantum theory of angular momentum. — World Scientific, 1987.
373. Integrals and Series: Special functions / Prudnikov A., Brychkov I., Brychkov I., and Marichev O. Integrals and Series. — Gordon and Breach Science Publishers, 1986.
374. Henneaux M. Elimination of the Auxiliary Fields in the Antifield Formalism // Phys. Lett. B. — 1990. — Vol. 238. — P. 299–304.
375. Mueck W., Viswanathan K. A Regularization scheme for the AdS / CFT correspondence // JHEP. — 1999. — Vol. 9907. — P. 018. — hep-th/9904039.

376. Freedman D. Z., Johnson K., Latorre J. I. Differential regularization and renormalization: A New method of calculation in quantum field theory // Nucl.Phys. — 1992. — Vol. B371. — P. 353–414.
377. Gradshteyn I., Ryzhik I. Table of Integrals, Series, and Products. — 1963.
378. Balasubramanian V., et al. Entwinement and the emergence of space-time // JHEP. — 2015. — Vol. 01. — P. 048. — 1406.5859.

# Приложение А

## А.1 Калибровочные (супер)преобразования

**Коэффициентные функции.** Спин- $(s, 0)$ , см. [76]:

$$\Phi(X) = -X(\alpha(X, -X) - 2\gamma(X, -X)) . \quad (\text{A.1})$$

Спин- $(s, \frac{1}{2})$ , см. [77]:

$$\Phi(X) = X(\alpha(X, -X) + \zeta(X, -X)) . \quad (\text{A.2})$$

Спин- $(s, 1)$ , см. (1.145):

$$\Phi(X) = X(\alpha(X, -X) - \zeta(X, -X)) . \quad (\text{A.3})$$

Ниже мы приводим список явных выражений для калибровочных преобразований. Здесь используются коммутаторы  $[F, G]_\star = F \star G - G \star F$  и антикоммутаторы  $\{F, G\}_\star = F \star G + G \star F$ .

**Параметр  $\xi_{e_1}(a, b)$ .**

$$\begin{aligned} \delta R_{e_1} &= [R_{e_1}, \xi_{e_1}]_\star , & \delta R_{e_4} &= [R_{e_4}, \xi_{e_1}]_\star , \\ \delta R_{e_{21}} &= [R_{o_{21}}, \xi_{e_1}]_\star , & \delta R_{e_{22}} &= [R_{o_{22}}, \xi_{e_1}]_\star , \\ \delta R_{e_{31}} &= [R_{e_{31}}, \xi_{e_1}]_\star , & \delta R_{e_{32}^i} &= [R_{e_{32}^i}, \xi_{e_1}]_\star , \\ \delta R_{o_{11}^i} &= [R_{o_{11}^i}, \xi_{e_1}]_\star , & \delta R_{o_{12}i} &= [R_{o_{12}i}, \xi_{e_1}]_\star , \\ \delta R_{o_{21}^i} &= [R_{o_{21}^i}, \xi_{e_1}]_\star , & \delta R_{o_{22}i} &= [R_{o_{22}i}, \xi_{e_1}]_\star , \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

**Параметр  $\xi_{e_{21}}(a, b)$  в фермионном секторе.**

$$\delta R_{o_{11}^i} = -\epsilon^{ij} \{R_{o_{12}j}, \xi_{e_{21}}\}_\star - \frac{1}{2} \epsilon^{ij} [R_{o_{22}j}, \xi_{e_{21}}]_\star , \quad \delta R_{o_{12}i} = 0 , \quad (\text{A.5})$$



и

$$\delta R_{o_{21}}^i = 2\epsilon^{ij}[R_{o_{12j}}, \xi_{e_{21}}]_{\star} + \epsilon^{ij}\{R_{o_{22j}}, \xi_{e_{21}}\}_{\star}, \quad \delta R_{o_{22}i} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Аналогичные преобразования имеют место для сопряженного калибровочного параметра  $\xi_{e_{22}}$ .

**Параметр  $\xi_{e_{21}}(a, b)$  в бозонном секторе.**

$$\begin{aligned} \delta R_{e_1} &= -[R_{e_{22}}, \xi_{e_{21}}]_{\star}, \\ \delta R_{e_{21}} &= [R_{e_1}, \xi_{e_{21}}]_{\star} + \{R_{e_{31}}, \xi_{e_{21}}\}_{\star} + \frac{1}{2}[R_{e_4}, \xi_{e_{21}}]_{\star}, \\ \delta R_{e_{22}} &= 0, \quad \delta R_{e_{32}}{}^i{}_j = 0, \\ \delta R_{e_{31}} &= 2\{R_{e_{22}}, \xi_{e_{21}}\}_{\star}, \quad \delta R_{e_4} = -2[R_{e_{22}}, \xi_{e_{21}}]_{\star}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

**Параметр  $\xi_{e_{32}}(a, b)$  в фермионном секторе.** Калибровочная симметрия с параметром  $\xi_{e_{32}}(a, b, \psi) = \xi_{e_{32}j}{}^i(a, b)(\psi_i\bar{\psi}^j)$ , где мы предполагаем, что все  $su(2)$  следы равны нулю, имеет вид

$$\begin{aligned} \delta R_{o_{11}}^i &= -\frac{1}{2}\{R_{o_{11}}^j, \xi_j^i\}_{\star} - \frac{1}{4}[R_{o_{21}}^j, \xi_j^i]_{\star}, \\ \delta R_{o_{12}i} &= \frac{1}{2}\{R_{o_{12j}}, \xi_j^i\}_{\star} - \frac{1}{4}[R_{o_{22j}}, \xi_j^i]_{\star}, \\ \delta R_{o_{21}}^i &= -[R_{o_{11}}^j, \xi_j^i]_{\star} - \frac{1}{2}\{R_{o_{21}}^j, \xi_j^i\}_{\star}, \\ \delta R_{o_{22}i} &= -[R_{o_{12j}}, \xi_j^i]_{\star} + \frac{1}{2}\{R_{o_{22j}}, \xi_j^i\}_{\star}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

**Параметр  $\xi_{e_{32}}(a, b)$  в бозонном секторе.** Калибровочная симметрия с параметром  $\xi_{e_{32}}(a, b, \psi) = \xi_{e_{32}j}{}^i(a, b)(\psi_i\bar{\psi}^j)$ , где мы предполагаем, что все  $su(2)$  следы равны нулю, имеет вид

$$\begin{aligned} \delta R_{e_1} &= \frac{1}{4}[R_{e_{32}}{}^m{}_n, \xi_{e_{32}}{}^n{}_m]_{\star}, \quad \delta R_{e_{21}} = 0, \quad \delta R_{e_{31}} = 0, \\ \delta R_{e_{32}}{}^i{}_j &= [R_{e_1}, \xi_{e_{32}j}{}^i]_{\star} - \frac{1}{2}[R_{e_4}, \xi_{e_{32}}{}^i{}_j]_{\star} + \\ &+ \frac{1}{2}(\{R_{e_{32}}{}^i{}_n, \xi_{e_{32}}{}^n{}_j\}_{\star} - \frac{1}{2}\delta_j^i\{R_{e_{32}}{}^m{}_n, \xi_{e_{32}}{}^n{}_m\}_{\star}) - \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$-\frac{1}{2}(\{R_{e_{32}}{}^m{}_j, \xi_{e_{32}}{}^i{}_m\}_\star - \frac{1}{2}\delta_j^i \{R_{e_{32}}{}^m{}_n, \xi_{e_{32}}{}^n{}_m\}_\star),$$

$$\delta R_{e_4} = -\frac{1}{2}[R_{e_{32}}{}^m{}_n, \xi_{e_{32}}{}^n{}_m]_\star.$$

**Суперсимметричные преобразования.** Выберем суперсимметричный калибровочный параметр в виде  $\xi_{o_{12}} = \xi_i(a, b)\bar{\psi}^i$ :

$$\delta R_{e_1} = \frac{1}{2}[R_{o_{11}}^i, \xi_i]_\star, \quad \delta R_{e_4} = \frac{1}{2}\{R_{o_{21}}^i, \xi_i\}_\star,$$

$$\delta R_{o_{11}}^i = \epsilon^{ij}\{R_{e_{21}}, \xi_j\}_\star, \quad \delta R_{o_{12}i} = [R_{e_1}, \xi_i]_\star - \frac{1}{2}\{R_{e_{32}}{}^m{}_i, \xi_m\}_\star - \frac{1}{2}\{R_{e_{31}}, \xi_i\}_\star,$$

$$\delta R_{e_{21}} = 0, \quad \delta R_{e_{22}} = \frac{1}{2}\epsilon^{ij}\{R_{o_{12}i}, \xi_j\}_\star - \frac{1}{4}\epsilon^{ij}[R_{o_{22}i}, \xi_j]_\star,$$

$$\delta R_{e_{31}} = \frac{1}{4}[R_{o_{21}}^i, \xi_i]_\star + \frac{1}{2}\{R_{o_{11}}^m, \xi_m\}_\star,$$

$$\delta R_{e_{32}}{}^i{}_j = \{R_{o_{11}}^i, \xi_j\}_\star - \frac{1}{2}([R_{o_{21}}^i, \xi_j]_\star - \frac{1}{2}\delta_j^i [R_{o_{21}}^m, \xi_m]_\star),$$

$$\delta R_{o_{21}}^i = 2\epsilon^{ij}[R_{e_{21}}, \xi_j]_\star, \quad \delta R_{o_{22}i} = [R_{e_{31}}, \chi_i]_\star - [R_{e_{32}}{}^m{}_i, \xi_m]_\star - [R_{e_4}, \xi_i]_\star.$$

(A.10)

# Приложение Б

## Б.1 Алгебры симметрий

**Операторы Казимира алгебры Пуанкаре.** Рассмотрим операторы Казимира  $C_{2p}$ , где  $p = 1, 2, \dots$  и введем обобщённые тензоры Паули-Любанского

$$W_{m_1 \dots m_k} = \epsilon_{m_1 \dots m_k a_{k+1} \dots a_d} P^{a_{k+1}} M^{a_{k+2} a_{k+3}} \dots M^{a_{d-1} a_d}, \quad (\text{Б.1})$$

где  $\epsilon_{m_1 \dots m_d}$  – это  $o(d-1, 1)$  тензор Леви-Чивиты,  $k = 1, 3, \dots, d-3$  при четном  $d$  и  $k = 0, 2, \dots, d-3$  при нечетном  $d$ . Тензоры Паули-Любанского преобразуются ковариантно относительно алгебры Лоренца  $o(d-1, 1)$  и удовлетворяют  $[P_a, W_{m_1 \dots m_k}] = 0$ , что позволяет записать операторы Казимира как

$$C_{2p} = W_{m_1 \dots m_{p-1}} W^{m_1 \dots m_{p-1}}. \quad (\text{Б.2})$$

Базисные элементы малых алгебр Вигнера можно получить из тензоров  $W_{m_1 \dots m_{d-3}}$ , которые являются прямым аналогом исходного  $d = 4$  вектора Паули-Любанского. В массивном случае мы выбираем стандартного представителя импульса условия  $P^2 = m^2$  в виде  $P^m = (m, 0, \dots, 0)$ . Тогда  $W_{m_1 \dots m_{d-3}}$  можно разбить на компоненты  $W_{i_1 \dots i_{d-3}} = m \epsilon_{i_1 \dots i_{d-1}} M^{i_{d-2} i_{d-1}}$ , являющиеся дуализованными  $o(d-1)$  базисными элементами. В безмассовом случае стандартный представитель импульса имеет вид  $P^m = (\varkappa, 0, \dots, 0, \varkappa)$ , а  $W_{m_1 \dots m_{d-3}}$  аналогичным образом разбивается на  $o(d-2)$  вращения и  $(d-2)$  трансляций, которые вместе образуют  $iso(d-2)$  алгебру.

Для произвольных представлений операторы Казимира могут быть достаточно сложно устроены, однако в безмассовом случае  $P^2 = 0$  они существенным образом упрощаются. Во-первых, все операторы Казимира квадратичны по импульсам,  $C_{2p} \sim F^{mn}(M) P_m P_n$ , где  $F$  – это некий полином лоренцевых

генераторов. Более того, можно видеть, что в безмассовом случае импульсы  $P_m$  всегда входят через комбинацию  $M_{ab}P^b$ . Вводя обозначение  $\pi_a = M_{ab}P^b$ , находим общее выражение

$$C_{2p} \approx [a_{p,0} + a_{p,2} M^2 + \dots + a_{p,2p-4} M^{2p-4}] \pi_a \pi^a, \quad (\text{Б.3})$$

где  $\alpha_{p,i}$  – численные коэффициенты,  $M^{2k}$  – полиномы по  $M_{ab}$  порядка  $2k$ , слабое равенство означает, что при вычислении оператора Казимира используется условие  $P^2 = 0$ . Например, четвертичный оператор Казимира имеет вид  $C_4 = P^2 M^2 - 2\pi_a \pi^a \approx -2\pi_a \pi^a$  (см., например, [104]). Условие  $C_2 = 0$  определяет безмассовость,  $C_4$  задает значение непрерывного спина  $\mu^2$ , а число независимых спиновых весов равно числу операторов Казимира  $C_6, C_8, \dots$ . Другими словами, представление непрерывного спина характеризуется параметром  $\mu$  и (полу-)целыми числами  $s_1, \dots, s_r$ , где  $r \leq [\frac{d-2}{2}] - 1$ . Как видно, в противоположность случаю дискретного спина, здесь имеется на одно спиновое число меньше.

**Полиномы по духам и ассоциированные алгебры.** Прежде чем рассматривать систему с БРСТ оператором  $\Omega$ , обсудим фоковское подпространство, порожденное духовыми переменными  $c_i, b_i$  с более алгебраической точки зрения. Вводя для духовых переменных коллективное обозначение  $\chi_i^\alpha = (c_i, b_i)$ , где  $\alpha = 1, 2$ , удобно рассматривать  $\chi_i^\alpha$  как координаты на тензорном произведении двух суперпространств с базисами  $e^i$  и  $e_\alpha$ . Данное произведение наделено метрикой  $\epsilon_{\alpha\beta} \delta^{ij}$ . Именно эта метрика индуцирует скалярное произведение на фоковском пространстве духовых переменных (см. раздел **2.1.2**). Она факторизуется на суперевклидову метрику  $\epsilon_{\alpha\beta}$  и суперсимплектическую метрику  $\delta^{ij}$ . Использование фактора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  позволяет ввести осцилляторную реализацию алгебр  $sp(2)$  и  $sp(2n-2)$ , что удобно при анализе спектра.

Данные духовые переменные определяют еще одну Хау-дуальную пару алгебр:  $gl(n-1)$ – $gl(2)$ . Соответствующие генераторы имеют вид

$$Y_i^j = \frac{1}{2} \left( \chi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \chi_j^\alpha} - \frac{\partial}{\partial \chi_j^\alpha} \chi_i^\alpha \right), \quad Z^\alpha_\beta = \frac{1}{2} \left( \chi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial \chi_i^\beta} - \frac{\partial}{\partial \chi_i^\beta} \chi_i^\alpha \right). \quad (\text{Б.4})$$

С помощью фактора  $\epsilon^{\alpha\beta}$  алгебра  $gl(n-1)$  расширяется генераторами

$$Y_{ij} = \epsilon_{\alpha\beta} \chi_i^\alpha \chi_j^\beta, \quad Y^{ij} = \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \chi_i^\alpha} \frac{\partial}{\partial \chi_j^\beta}, \quad (\text{Б.5})$$

и поэтому по аналогии с выражениями (2.4) генераторы  $Y_{ij}$ ,  $Y_i^j$  и  $Y^{ij}$  образуют  $sp(2n - 2)$  алгебру. БРСТ-расширенные операторы (2.28) имеют вид

$$\mathcal{T}^{ij} = T^{ij} + Y^{ij}, \quad \mathcal{N}_i^j = N_i^j + Y_i^j + \delta_i^j. \quad (\text{Б.6})$$

Аналогичным образом вводится алгебра  $sp(2) \simeq sl(2)$  с генераторами  $Z_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\gamma} Z^\gamma_\beta + \epsilon_{\beta\gamma} Z^\gamma_\alpha$ . Стандартный базис  $sp(2)$  алгебры имеет вид

$$Z_+ \equiv Z^1_2 = c_i \frac{\partial}{\partial b_i}, \quad Z_- \equiv Z^2_1 = b_i \frac{\partial}{\partial c_i}, \quad Z_0 \equiv Z^1_1 - Z^2_2 = c_i \frac{\partial}{\partial c_i} - b_i \frac{\partial}{\partial b_i}. \quad (\text{Б.7})$$

## Б.2 Гомологическая редукция

Дадим краткий обзор метода гомологической редукции, который может быть применен к любой калибровочной системе, определенной БРСТ оператором [36]. В контексте развернутой формулировки динамики полей высших спинов гомологическая техника исключения вспомогательных и штукельберговых полей была предложена в работах [191, 292].

На формальном языке линейная калибровочная система может быть определена как пара  $(\mathcal{H}, \Omega)$ , где  $\mathcal{H}$  – это пространство представления БРСТ оператора первично-квантованной системы, а  $\Omega$  – БРСТ оператор. Предполагается, что  $\mathcal{H}$  градуировано по духовому числу таким образом, что  $\Omega$  имеет градуировку 1. Элементы духового числа ноль  $\Psi^{(0)}$  из  $\mathcal{H}$  отождествляются с полевыми конфигурациями, а элементы с отрицательным духовым числом с калибровочными параметрами (всех поколений приводимости). Уравнения движения имеют вид  $\Omega\Psi^{(0)} = 0$ , а калибровочные преобразования  $\delta\Psi^{(0)} = \Omega\Psi^{(-1)}$ , точно также определяются калибровочные преобразования следующих поколений приводимости.

Предположим, что  $\mathcal{H}$  разбивается на три подпространства:  $\mathcal{H} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ . Пусть  $\overset{\mathcal{G}\mathcal{F}}{\Omega}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  обозначает  $\Omega$  ограниченный на  $\mathcal{F}$  и спроецированный на  $\mathcal{G}$ , т.е.  $\overset{\mathcal{G}\mathcal{F}}{\Omega} f = (\Omega f)|_{\mathcal{G}}$ , где  $f \in \mathcal{F}$ . Если  $\overset{\mathcal{G}\mathcal{F}}{\Omega}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  обратим, то все поля, ассоциированные с  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{G}$  являются обобщёнными вспомогательными полями [374]. В частности, среди обобщённых вспомогательных полей присутствуют обычные вспомогательные поля, штукельберговы поля, а также ассоциированные

с ними духи и антиполя. Обобщённые вспомогательные поля можно исключить, в результате чего возникает другая формулировка той же самой калибровочной теории. Теории связанные исключением/добавлением обобщённых вспомогательных полей эквивалентны. Для локальных калибровочных теорий поля требуется, чтобы обобщённые вспомогательные поля исключались алгебраически. В нашем случае это соответствует требованию того, чтобы  $\overset{\mathcal{GF}}{\Omega}$  действовал алгебраически. Исключение ассоциированных с  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  вспомогательных полей приводит к редуцированной теории  $(\mathcal{E}, \tilde{\Omega})$ , где  $\mathcal{E}$  является пространством представления редуцированного БРСТ оператора  $\tilde{\Omega}$ :

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}\mathcal{E} & \mathcal{E}\mathcal{F} \\ \mathcal{E}\mathcal{F} & (\overset{\mathcal{GF}}{\Omega})^{-1} \mathcal{G}\mathcal{E} \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.8})$$

Полезно отождествлять  $\mathcal{E}$  как когомологию определённой части оператора  $\Omega$ . А именно, предположим, что  $\mathcal{H}$  допускает дополнительную (ограниченную, по крайней мере, с одной стороны) градуировку

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{-N}^{\infty} \mathcal{H}_i, \quad (\text{Б.9})$$

с  $N$  конечным целым, таким, что  $\Omega$  раскладывается на однородные компоненты следующим образом  $\Omega = \Omega_{-1} \oplus \Omega_0 \oplus \Omega_1 \oplus \dots$ . Отсюда следует, что вклад с наименьшей градуировкой  $\Omega_{-1}$  определяет введенное выше тройное разложение

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{G} = \text{Ker } \Omega_{-1}, \quad \mathcal{G} = \text{Im } \Omega_{-1}, \quad \mathcal{E} = \frac{\text{Ker } \Omega_{-1}}{\text{Im } \Omega_{-1}} \equiv H(\Omega_{-1}). \quad (\text{Б.10})$$

Отметим, что такой  $\overset{\mathcal{GF}}{\Omega}$  обратим по построению.

В таком виде техника гомологической редукции применяется в данной диссертации для нахождения и изучения эквивалентных форм динамики полей высших спинов: формулировка Лабастиды, триплетная формулировка, развернутая формулировка, конусная формулировка.

### Б.3 Детали вычислений

**Следовые разложения.** Опишем решение модифицированного следового условия в случае полностью симметричных тензоров. Пусть  $F = F(a) -$

это производящий ряд

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} F_{m_1 \dots m_n} a^{m_1} \dots a^{m_n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} F_{(n)} , \quad (\text{Б.11})$$

где  $NF_{(n)} = nF_{(n)}$ . Рассмотрим условия одинарной и двойной бесследовости:

$$(T + \nu)F = 0 , \quad (\text{Б.12})$$

$$(T + \nu)^2 F = 0 . \quad (\text{Б.13})$$

**Утверждение Б.1.** *Решения соотношений (Б.12) и (Б.13) имеют вид*

$$F = \sum_{n,m=0}^{\infty} \alpha_{m,n} (T^\dagger)^m f_{(n)} , \quad T f_{(n)} = 0 , \quad \alpha_{m,n} = \alpha_n \frac{4^{-m+1} \nu^{m-1}}{m! \left(\frac{d}{2} + n - 1\right)_{m-1}} , \quad (\text{Б.14})$$

$$F = \sum_{n,m=0}^{\infty} \beta_{m,n} (T^\dagger)^m f_{(n)} , \quad T^2 f_{(n)} = 0 , \quad \beta_{m,n} = \beta_n \frac{4^{-m+1} \nu^{m-1}}{m! \left(\frac{d}{2} + n\right)_{m-1}} , \quad (\text{Б.15})$$

где  $\alpha_n = \alpha_n(n, d)$  и  $\beta_n = \beta_n(n, d)$  – произвольные префакторы, зависящие от ранга и размерности,  $(a)_m$  – символ Похгаммера. С точностью до префакторов, коэффициенты связаны соотношением  $\alpha_{m,n} = \beta_{m,n+1}$ .

Для доказательства модифицированные следовые условия следует переформулировать в виде рекуррентных уравнений на коэффициенты  $\alpha_{m,n}$  и  $\beta_{m,n}$ . Общее решение параметризовано  $n$ -зависимыми константами.

**Воспроизведение уравнений Шустера–Торо.** Рассмотрим сначала модифицированные калибровочные преобразования (2.103). Во фронсдаловском базисе (Б.14), (Б.15) поле Фронсдала  $n$ -го ранга преобразуется как

$$\delta\varphi_{(n)} = D^\dagger \epsilon_{(n-1)} + \rho_n \epsilon_{(n)} + \gamma_n T^\dagger \epsilon_{(n-2)} , \quad (\text{Б.16})$$

где коэффициенты пропорциональны параметру непрерывного спина  $\mu$ . Для нахождения этих коэффициентов решим систему рекуррентных уравнений, возникающих из представления обеих частей выражения (2.103) во фронсда-

ловском базисе. Фиксируя число  $\#a_i^\mu = p$  находим, что

$$\begin{aligned} \beta_{0,p} \delta \varphi_{(p)} = & \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} \alpha_{k,p-2k-1} (T^\dagger)^k \epsilon_{(p-2k-1)} + \mu \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}} \alpha_{k,p-2k} (T^\dagger)^k D^\dagger \epsilon_{(p-2k)} - \\ & - \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} \alpha_{k,p-2k} (T^\dagger)^k D^\dagger \delta \varphi_{(p-2k)} . \end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

Подставляя (Б.16) в (Б.17) и используя свойство  $\alpha_{n,s} = \beta_{n,s+1}$  из Утверждения **Б.1** находим в  $p$ -ом порядке

$$\rho_p = \frac{\alpha_{0,p}}{\beta_{0,p}} , \quad \gamma_p = \frac{\alpha_{1,p-2} - \beta_{1,p-2} \rho_{p-2}}{\beta_{0,p}} , \quad (\text{Б.18})$$

в то время как в нижних порядках возникает система

$$\alpha_{k,p-2k} - \beta_{k,p-2k} \rho_{p-2k} - \beta_{k-1,p-2k+2} \gamma_{p-2k+2} = 0 , \quad k = 1, 2, \dots, \frac{p}{2} . \quad (\text{Б.19})$$

Фиксируя константы нормировки в (Б.15) в виде  $\beta_n = \frac{d}{d+2n-2}$  находим, что

$$\rho_n = \mu , \quad \gamma_n = - \frac{\mu \nu}{(d+2n-4)(d+2n-6)} , \quad (\text{Б.20})$$

ср. (2.111), и система уравнений (Б.19) удовлетворяется тождественно.

Уравнения движения (2.102) анализируются аналогичным образом. Подставляя разложение (2.105) в (2.102) находим, что уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} & \sum_{s,n=0}^{\infty} \beta_{n,s} (T^\dagger)^n F_{(s)} + \sum_{s,n=0}^{\infty} \zeta_{n,s} (T^\dagger)^n D \varphi_{(s)} + \sum_{s,n=0}^{\infty} \gamma_{n,s} (T^\dagger)^n D^\dagger \varphi_{(s)} + \\ & + \sum_{s,n=0}^{\infty} \rho_{n,s} (T^\dagger)^n D^\dagger T \varphi_{(s)} + \sum_{s,n=0}^{\infty} \tau_{n,s} (T^\dagger)^n \varphi_{(s)} + \sum_{s,n=0}^{\infty} \varkappa_{n,s} (T^\dagger)^n T \varphi_{(s)} = 0 , \end{aligned} \quad (\text{Б.21})$$

где

$$F_{(n)} = \left[ \square - D^\dagger D + \frac{1}{2} D^\dagger D^\dagger T \right] \varphi_{(n)} , \quad (\text{Б.22})$$

является кинетическим оператором Фронсдала, коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta_{n,s} = -\mu \beta_{n,s} , \quad \gamma_{n,s} = 2\mu(n+1)\beta_{n+1,s} , \quad \rho_{n,s} = \mu \beta_{n,s} , \\ \tau_{n,s} = 2\mu^2(n+1)\beta_{n+1,s} , \quad \varkappa_{n,s} = \frac{1}{2}\mu^2 \beta_{n,s} . \end{aligned} \quad (\text{Б.23})$$



Теперь перепишем (Б.21) в виде

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \beta_{m,n} (T^\dagger)^m [F_{(n)} + E_{(n)}] = 0, \quad (\text{Б.24})$$

так что уравнения для вклада ранга  $n$  принимают вид  $F_{(n)} + E_{(n)} = 0$ , где  $\mu$ -поправка является дважды бесследовой,  $T^2 E_{(n)} = 0$ . Вид (Б.21) указывает на следующее выражение общего вида

$$\begin{aligned} E_{(p)} = & a_p D \varphi_{(p+1)} + b_p D^\dagger T \varphi_{(p+1)} + c_p D^\dagger \varphi_{(p-1)} + d_p D^\dagger T^\dagger T \varphi_{(p-1)} + e_p T^\dagger D \varphi_{(p-1)} + \\ & + \bar{a}_p \varphi_{(p)} + \bar{b}_p T^\dagger \varphi_{(p-2)} + \bar{c}_p T \varphi_{(p+2)} + \bar{d}_p T^\dagger T \varphi_{(p)} + \bar{e}_p T^\dagger T^\dagger \varphi_{(p-4)}, \end{aligned} \quad (\text{Б.25})$$

где коэффициенты не являются независимыми и связаны условием дважды бесследовости, наложенным на  $\varphi_{(k)}$  и  $E_{(l)}$ . Далее, введем частные бесследовые комбинации, ср. (2.109),

$$A_{(n)} = D \varphi_{(n+1)} - \frac{1}{2} D^\dagger T \varphi_{(n+1)}, \quad B_{(n)} = \varphi_{(n)} + y_n T^\dagger T \varphi_{(n)} + z_n T \varphi_{(n+2)}, \quad (\text{Б.26})$$

где коэффициенты фиксированы условием нулевого следа в виде  $y_n = -(2d + 2n - 8)^{-1}$  и  $\forall z_n$ . Тогда (Б.25) можно представить в виде

$$E_{(p)} = \tilde{\chi}_p A_{(p)} + \tilde{\tau}_p T^\dagger A_{(p-2)} + \tilde{\rho}_p D^\dagger B_{(p-1)} + \bar{\rho}_p B_{(p)} + \bar{\chi}_p T^\dagger B_{(p-2)}, \quad (\text{Б.27})$$

в то время как оператор Фронсдала имеет вид  $F_{(n)} = \square \varphi_{(p)} - D^\dagger A_{(p-1)}$ . Коэффициенты  $\tilde{\chi}_p, \tilde{\tau}_p, \tilde{\rho}_p, \bar{\rho}_p, \bar{\chi}_p, z_n$  выражаются через  $a_p, b_p, c_p, d_p, e_p$  и  $\bar{a}_p, \bar{b}_p, \bar{c}_p, \bar{d}_p, \bar{e}_p, y_n$ . Подставляя (Б.27) в (Б.24) и проделывая такие же шаги как в случае калибровочных преобразований находим, что коэффициенты в (Б.27) фиксированы следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_p = -\mu, \quad \tilde{\tau}_p = \frac{\mu\nu}{(d+2p-4)(d+2p-6)}, \quad \tilde{\rho}_p = \frac{\mu\nu}{d+2p-4}, \\ \bar{\rho}_p = \frac{\mu^2\nu}{d+2p-2}, \quad \bar{\chi}_p = \frac{\mu^2\nu^2}{(d+2p-4)(d+2p-6)^2}, \quad z_p = \frac{d+2p-2}{2\nu}. \end{aligned} \quad (\text{Б.28})$$

Переписывая уравнение (Б.27) и оператор Фронсдала в терминах  $G_{(p)}$  (2.108), в конечном итоге получаем уравнения Шустера–Торо (2.107).

# Приложение В

## В.1 Компонентная форма уравнений поля

В этом приложении расписываются полевые уравнения (3.71), (3.72) и связи (3.70) согласно разделению индексов  $\mu, \nu, \dots$  на 0 и  $i, j, \dots$

**Сектор  $\mu = i, \nu = j, \rho = k$ .** Уравнения (3.71) принимают вид

$$\begin{aligned}
 E_{ij,k} &\equiv \\
 &\equiv \left[ \partial_z^2 - \frac{d-7}{z} \partial_z - k^2 \right] \varphi_{ij,k} + k_i k^m \varphi_{mj,k} + k_j k^m \varphi_{mi,k} + \frac{i}{2} (k_i \partial_z \varphi_{jk} + k_j \partial_z \varphi_{ik}) + \\
 &\quad - k_i k_j \varphi_k + i \frac{6-d}{2z} k_i \varphi_{jk} + i \frac{6-d}{2z} k_j \varphi_{ik} - \frac{2i}{z} k_k \varphi_{ij} - \frac{i}{z} \delta_{ij} k^m \varphi_{mk} + \frac{i}{z} \delta_{ik} k^m \varphi_{mj} \\
 &\quad + \frac{i}{z} \delta_{kj} k^m \varphi_{mi} - \frac{i}{z} \delta_{jk} k_i \varphi_0 - \frac{i}{z} \delta_{ik} k_j \varphi_0 - \frac{1}{z} \delta_{ij} \partial_z \varphi_k + \frac{(9-3d)}{z^2} \varphi_{ij,k} - \frac{3}{z^2} \delta_{ij} \varphi_k = 0.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Здесь  $k^2 = \delta_{ij} k^i k^j$  – оператор Д’Аламбера  $\nabla^2$  в импульсном представлении. Сворачивая это уравнение с  $\delta^{ij}$  получаем

$$\begin{aligned}
 E^i{}_{i,k} &\equiv \left[ \partial_z^2 + \frac{7-2d}{z} \partial_z - 2k^2 \right] \varphi_k + 2k^m k^n \varphi_{mn,k} + ik^m \partial_z \varphi_{mk} \\
 &\quad - \frac{4}{z} \partial_k \varphi_0 + i \frac{8-2d}{z} k^m \varphi_{mk} + \frac{9-6d}{z^2} \varphi_k = 0.
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

**Сектор  $\mu = i, \nu = j, \rho = 0$ .** Уравнения (3.71) принимают вид

$$\begin{aligned}
 E_{ij,0} &\equiv \left[ \partial_z^2 + \frac{8-d}{z} \partial_z - k^2 \right] \varphi_{ij} + k_j k^m \varphi_{mi} + k_i k^m \varphi_{mj} - k_i k_j \varphi_0 \\
 &\quad + \frac{3i}{z} k^m \varphi_{ij,m} + \frac{3i}{2z} (k_i \varphi_j + k_j \varphi_i) - \frac{1}{z} \delta_{ij} \partial_z \varphi_0 + \frac{16-5d}{z^2} \varphi_{ij} - \frac{5}{z^2} \delta_{ij} \varphi_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Сворачивая это уравнение с  $\delta^{ij}$  получаем

$$E^i_{i,0} \equiv \left[ \partial_z^2 + \frac{8-2d}{z} \partial_z - 2k^2 \right] \varphi_0 + \frac{6i}{z} k^m \varphi_m + 2k^m k^n \varphi_{mn} + \frac{16-10d}{z^2} \varphi_0 = 0 . \quad (\text{B.4})$$

**Сектор**  $\mu = 0, \nu = 0, \rho = i$ . Уравнения (3.71) принимают вид

$$E_{00,i} \equiv \partial_z^2 \varphi_i + \frac{5}{z} \partial_z \varphi_i + ik^m \partial_z \varphi_{mi} + \frac{2i}{z} k^m \varphi_{mi} + \frac{3}{z^2} \varphi_i = 0 . \quad (\text{B.5})$$

**Сектор**  $\mu = 0, \nu, \rho = [i, j]$ . В дальнейшем, антисимметризация происходит с единичным весом. Уравнения (3.71) принимают вид

$$\begin{aligned} E_{0[j,k]} \equiv & -\frac{1}{2} \left( k_j k^m \varphi_{mk} - k_k k^m \varphi_{mj} \right) + i \left( k^m \partial_z \varphi_{mk,j} - k^m \partial_z \varphi_{mj,k} \right) \\ & - \frac{3i}{z} \left( k^m \varphi_{mj,k} - k^m \varphi_{mk,j} \right) + \frac{3i}{z} \left( k_j \varphi_k - k_k \varphi_j \right) + i \left( k_j \partial_z \varphi_k - k_k \partial_z \varphi_j \right) = 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

**Сектор**  $\mu = 0, \nu = 0, \rho = 0$ . В этом случае уравнения (3.71) сводятся к

$$E_{00,0} \equiv \partial_z^2 \varphi_0 + \frac{6}{z} \partial_z \varphi_0 + \frac{6}{z^2} \varphi_0 = 0 , \quad (\text{B.7})$$

и левая часть этого соотношения равна нулю из-за связей, см. обсуждение после формулы (3.72).

**Следовые уравнения.** Скалярная и векторная компоненты уравнений на след (3.72) имеют вид

$$E_0 \equiv \left[ \partial_z^2 + \frac{7-d}{z} \partial_z - k^2 \right] \varphi_0 + \frac{3i}{z} k^m \varphi_m + k^m k^n \varphi_{mn} + \frac{11-5d}{z^2} \varphi_0 = 0 , \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned} E_i \equiv & \left[ \partial_z^2 + \frac{6-d}{z} \partial_z - k^2 \right] \varphi_i + k^m k^n \varphi_{mn,i} + ik^m \partial_z \varphi_{mi} - \\ & - \frac{2i}{z} k_i \varphi_0 + i \frac{5-d}{z} k^m \varphi_{mi} + \frac{6-3d}{z^2} \varphi_i = 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

В качестве проверки можно убедиться, что выписанные в  $o(d, 1)$  обозначениях соотношения на след переписываются в  $o(d)$  обозначениях как  $E^i_{i,0} + E^0_{0,0} = 2E_0$ , где  $E^i_{i,0}$  и  $E^0_{0,0}$  задаются (B.4) и (B.7), и  $E_0$  задается (B.8). Также,  $E^i_{i,k} + E^0_{0,k} = 2E_k$ , где  $E^i_{i,k}$  - след  $E^i_{j,k}$  из (B.2), и  $E_k$  задаётся (B.9).

**Дифференциальные связи.** Компонентная форма связей (3.70) имеет вид

$$\frac{1}{2} T_{00} \equiv \left( \partial_z + \frac{2}{z} \right) \varphi_0 = 0 , \quad (\text{B.10})$$

$$T_{0i} \equiv \left( -ik^m \varphi_{mi} + \partial_z \varphi_i + ik_i \varphi_0 + \frac{3}{z} \varphi_i \right) = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{1}{2} T_{ij} \equiv \partial_z \varphi_{ij} + ik^m \varphi_{ij,m} + \frac{i}{2} (k_i \varphi_j + k_j \varphi_i) - \frac{1}{z} \delta_{ij} \varphi_0 - \frac{d-4}{z} \varphi_{ij} = 0, \quad (\text{B.12})$$

$$T \equiv \partial_z \varphi_0 + ik^m \varphi_m - \frac{d-3}{z} \varphi_0 = 0. \quad (\text{B.13})$$

Очевидно, что сложение следов даёт  $T^0_0 + T^i_i = 4T$ .

## В.2 Явное решение уравнений и связей

**Неполное решение уравнений и связей.** Решения связей (В.10) и (В.13) можно представить в виде

$$\varphi_0(z, \mathbf{k}) = \frac{C(\epsilon, \mathbf{k})}{z^2}, \quad ik^m \varphi_m(z, \mathbf{k}) = \frac{d-1}{z} \varphi_0(z, \mathbf{k}), \quad (\text{B.14})$$

где  $C(\epsilon, \mathbf{k})$  – произвольная функция импульса. Вспоминая, что граница смещена внутрь объема, видим, что функция  $C(\epsilon, \mathbf{k})$  зависит также от параметра обрезания  $\epsilon$ . Из выражений (В.14) следует, что  $k^m \varphi_m$  – однородная функция:  $(z\partial_z + 3)k^m \varphi_m = 0$ . Используя связь (В.11) можно найти соотношение

$$ik^m \varphi_{mi} = \frac{z\partial_z + 3}{z} \varphi_i + ik_i \varphi_0. \quad (\text{B.15})$$

Вычисляя дивергенцию  $\partial^i T_{0i} = 0$  и используя однородность  $\partial^m \varphi_m$  можно найти, что симметричная часть  $\varphi_j$  удовлетворяет соотношению

$$k^m k^n \varphi_{mn} = k^2 \varphi_0. \quad (\text{B.16})$$

Учитывая (В.16) показывается, что дивергенция  $k^m E_{00,m}$  уравнения (В.5) тождественно равна нулю. Далее, подставляя (В.14) и (В.15) в уравнение (В.5) находим

$$\partial_z^2 \varphi_i + \frac{5}{z} \partial_z \varphi_i + \frac{3}{z^2} \varphi_i = 0. \quad (\text{B.17})$$

Рассмотрим анзац общего решения вида  $\sim z^\alpha$ , где  $\alpha$  – показатель степени. Соответствующее квадратичное уравнение имеет корни  $\alpha = \{-1, -3\}$ , поэтому

$$\varphi_i(z, \mathbf{k}) = \frac{A_i(\epsilon, \mathbf{k})}{z} + \frac{B_i(\epsilon, \mathbf{k})}{z^3}, \quad (\text{B.18})$$

где  $A_i(\epsilon, \mathbf{k})$  и  $B_i(\epsilon, \mathbf{k})$  – произвольные функции.

Полезно сравнить зависимость от  $z$  поля  $\varphi_\rho(z, \mathbf{k})$  (вспомним, что ее  $o(d)$  компоненты это  $\varphi_i(z, \mathbf{k})$  и  $\varphi_0(z, \mathbf{k})$ ) с поведением других полей, рассмотренных ранее. Так, авторы [261] заявляют, что след безмассового гравитонного поля  $h_{\mu\nu}$  расходится на границе и просто кладут его равным нулю. Однако, в [262] было замечено, что поведение следа сложнее и требует дальнейшего анализа. Действительно, в [264] было явно показано, что след зависит от  $z$  квадратично. С другой стороны, в случае массивного гравитонного поля, рассмотренном в [265], след пропорционален нетривиальному отношению модифицированных функций Бесселя, что похоже на решение уравнения скалярного поля в  $AdS_{d+1}$ .

Приведем несколько выражений, полезных для дальнейшего анализа. Используя (В.15) и вычисляя дивергенцию  $\partial^i T_{ij} = 0$  связи (В.12) получим

$$k^m k^n \varphi_{mn,i} = k^2 \varphi_i + k_i (k^m \varphi_m) + \frac{2i}{z} k_i \varphi_0 + i \frac{2(d-2)}{z} k^m \varphi_{mi}. \quad (\text{В.19})$$

В частности, правая часть этого отношения удовлетворяет условию симметрии Юнга  $k^m k^n k^i \varphi_{mn,i}(z, \mathbf{k}) = 0$ . Подставляя (В.19) и ранее полученные соотношения в уравнение (В.9) получим тождество. Связь (В.12) даёт

$$i k^m \varphi_{ij,m} = -\partial_z \varphi_{ij} - \frac{i}{2} (k_i \varphi_j + k_j \varphi_i) + \frac{1}{z} \delta_{ij} \varphi_0 + \frac{d-4}{z} \varphi_{ij}. \quad (\text{В.20})$$

**Симметричная компонента.** Изучим зависимость от  $z$  симметричной компоненты  $\varphi_{ij}(z, \mathbf{k})$ . Для этого, учтём следовые решения и перепишем уравнение (В.3) в виде

$$\hat{E}_s \varphi_{ij} = Y_{ij}, \quad (\text{В.21})$$

где (не)однородные части определяются

$$\hat{E}_s = \left[ \partial_z^2 + \frac{5-d}{z} \partial_z + \frac{4-2d}{z^2} - k^2 \right], \quad Y_{ij} = -k_j k^m \varphi_{im} - k_i k^m \varphi_{mj} + k_i k_j \varphi_0. \quad (\text{В.22})$$

Для заданного тензорного поля найдём бесследовое и ТТ-разложение [262]

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} = \bar{\varphi}_{ij} + \frac{k_i k^m}{k^2} \varphi_{mj} + \frac{k_j k^m}{k^2} \varphi_{mi} - \frac{k_i k_j k^m k^n}{k^4} \varphi_{mn} + \\ + \frac{1}{d-1} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left( \varphi_0 - \frac{k^m k^n}{k^2} \varphi_{mn} \right), \end{aligned} \quad (\text{В.23})$$

где  $\bar{\varphi}_{ij}$  – это ТТ-тензор. Имеется следующее утверждение: бесследовый, трансверсальный, симметричный тензор  $\bar{\varphi}_{ij}$ , определяемый (В.23), удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\hat{E}_s \bar{\varphi}_{ij}(z, \mathbf{k}) = 0, \quad (\text{В.24})$$

где оператор  $\hat{E}_s$  задаётся (В.22). Доказывается прямой подстановкой. Комбинация  $\varphi_{ij} - \bar{\varphi}_{ij}$ , взятая из ТТ-разложения, является частным интегралом (В.21), а общий интеграл однородного уравнения имеет вид<sup>81</sup>

$$\bar{\varphi}_{ij}(z, \mathbf{k}) = z^{\nu-2} K_\nu(zk) F_{ij}(\epsilon, \mathbf{k}), \quad \nu = \frac{d}{2}, \quad (\text{В.25})$$

где  $F_{ij}(\epsilon, \mathbf{k})$  – некоторый ТТ-тензор на границе и  $K_\nu(y)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода (см. Приложение В.3). Используя соотношения (В.15) и (В.16) вместе с ТТ-разложением (В.23) можно найти  $z$ -зависимость симметричной компоненты

$$\varphi_{ij}(z, \mathbf{k}) = z^{\nu-2} K_\nu(zk) F_{ij}(\epsilon, \mathbf{k}) - i \frac{z \partial_z + 3}{z} \frac{k_i \varphi_j(z, \mathbf{k}) + k_j \varphi_i(z, \mathbf{k})}{k^2} + \frac{k_i k_j}{k^2} \varphi_0(z, \mathbf{k}). \quad (\text{В.26})$$

**Соотношения на дивергенцию.** Для нахождения  $z$ -зависимости «крюковой» компоненты будем следовать тем же путём, что и в случае симметричной компоненты. Для этого нужно найти выражение для дивергенции  $k^m \varphi_{mi,j}(z, \mathbf{k})$ , которая входит в неоднородную часть уравнения (В.1). Чтобы работать с несимметричным тензором с двумя индексами, нужно разложить его на симметричную и антисимметричную части стандартным образом

$$k^m \varphi_{mi,j} = \frac{1}{2} (k^m \varphi_{mi,j} + k^m \varphi_{mi,j}) + \frac{1}{2} (k^m \varphi_{mi,j} - k^m \varphi_{mj,i}) \equiv \frac{1}{2} S_{ij} + \frac{1}{2} A_{ij}. \quad (\text{В.27})$$

Для вычисления антисимметричной части, воспользуемся (В.15) и приведём уравнение (В.6) к следующему виду

$$(z \partial_z + 3) \tilde{A}_{kj} = 0, \quad \tilde{A}_{ij} \equiv A_{ij} - \frac{3}{2} H_{ij}, \quad H_{ij} \equiv k_i \varphi_j - k_j \varphi_i. \quad (\text{В.28})$$

---

<sup>81</sup>Уравнение второго порядка (В.24) имеет два линейно-независимых решения – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода. Причиной для выбора модифицированной функции второго порядка  $K_\nu(z)$  служит экспоненциальное убывание при  $z \rightarrow 0$ , в то время как другая ветвь экспоненциально растёт при  $z \rightarrow 0$  и потому отбрасывается.

Это уравнение решается функцией вида  $\tilde{A}_{ij}(z, \mathbf{k}) = z^{-3}a_{ij}(\epsilon, \mathbf{k})$ , где  $a_{ij}(\epsilon, \mathbf{k})$  – произвольный антисимметричный граничный тензор. Таким образом, имеем

$$A_{ij}(z, \mathbf{k}) = \frac{a_{ij}(\epsilon, \mathbf{k})}{z^3} + \frac{3}{2}(k_i\varphi_j(z, \mathbf{k}) - k_j\varphi_i(z, \mathbf{k})) . \quad (\text{B.29})$$

Для нахождения симметричной части  $S_{ij}$  заметим, что благодаря свойствам симметрии Юнга  $\varphi_{ij,k}$ , она равна  $S_{ij}(z, \mathbf{k}) = -k^m\varphi_{ij,m}(z, \mathbf{k})$ . Эта комбинация следует из (B.20)

$$iS_{ij}(z, \mathbf{k}) = -\partial_z\varphi_{ij}(z, \mathbf{k}) - \frac{i}{2}(k_i\varphi_j(z, \mathbf{k}) + k_j\varphi_i(z, \mathbf{k})) + \frac{1}{z}\delta_{ij}\varphi_0(z, \mathbf{k}) + \frac{d-4}{z}\varphi_{ij}(z, \mathbf{k}) . \quad (\text{B.30})$$

Собирая всё вместе, получим конечное уравнение для дивергенции (B.27)

$$\begin{aligned} k^m\varphi_{mi,j}(z, \mathbf{k}) &= \frac{1}{2}\frac{a_{ij}(\epsilon, \mathbf{k})}{z^3} + \frac{3}{4}(k_i\varphi_j(z, \mathbf{k}) - k_j\varphi_i(z, \mathbf{k})) \\ &+ \frac{i}{2}\partial_z\varphi_{ij}(z, \mathbf{k}) - \frac{1}{4}(k_i\varphi_j(z, \mathbf{k}) + k_j\varphi_i(z, \mathbf{k})) - \frac{i}{2z}\delta_{ij}\varphi_0(z, \mathbf{k}) - i\frac{d-4}{2z}\varphi_{ij}(z, \mathbf{k}) . \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

**«Крюковая» компонента.** Рассмотрим ТТ-разложение для «крюковой» компоненты и подставим его в уравнение (B.1). Представим (B.1) в виде

$$\hat{E}_h\varphi_{ij,k} = Y_{ij|k} , \quad (\text{B.32})$$

где однородная часть это

$$\hat{E}_h = \left[ \partial_z^2 - \frac{d-7}{z}\partial_z + \square + \frac{(9-3d)}{z^2} \right] , \quad (\text{B.33})$$

а неоднородная часть  $Y_{ij|k}$  может быть легко получена из исходного уравнения (B.1). Заметим, что аналогично случаю симметричной компоненты,  $Y_{ij|k}$  получается использованием следовых решений. Далее, находим ТТ-разложение для «крюкового» тензора

$$\begin{aligned} \varphi_{ij,k} &= \bar{\varphi}_{ij,k} + \frac{1}{k^2} \left( k_i k^m \varphi_{mj,k} + k_j k^m \varphi_{im,k} + k_k k^m \varphi_{ij,m} \right) \\ &- \frac{1}{k^4} \left( k_i k_j k^m k^n \varphi_{mn,k} - \frac{1}{2} k_i k_k k^m k^n \varphi_{mn,j} - \frac{1}{2} k_j k_k k^m k^n \varphi_{mn,i} \right) \\ &+ \frac{1}{d-2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \left( \varphi_k - \frac{1}{k^2} k^m k^n \varphi_{mn,k} - \frac{k_k}{k^2} k^m \varphi_m \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2(d-2)}\left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2}\right)\left(\varphi_j - \frac{1}{k^2}k^m k^n \varphi_{mn,j} - \frac{k_j}{k^2}k^m \varphi_m\right) \\
& -\frac{1}{2(d-2)}\left(\delta_{jk} - \frac{k_j k_k}{k^2}\right)\left(\varphi_i - \frac{1}{k^2}k^m k^n \varphi_{mn,i} - \frac{k_i}{k^2}k^m \varphi_m\right),
\end{aligned} \tag{B.34}$$

где  $\bar{\varphi}_{ij,k}$  – это ТТ-тензор.

Имеем следующее утверждение: бесследовый, трансверсальный «крюковый» тензор  $\bar{\varphi}_{ij,k}$ , определяемый (B.34), удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению

$$\hat{E}_h \bar{\varphi}_{ij,k}(z, \mathbf{k}) = 0, \tag{B.35}$$

где оператор  $\hat{E}_h$  задаётся (B.33). Доказательство прямой подстановкой. Комбинация  $\varphi_{ij,k} - \bar{\varphi}_{ij,k}$  из ТТ-разложения является частным интегралом (B.32), а общий интеграл однородного уравнения имеет вид

$$\bar{\varphi}_{ij,k}(z, \mathbf{k}) = z^{\nu-3} K_\nu(zk) G_{ij,k}(\epsilon, \mathbf{k}), \quad \nu = \frac{d}{2}, \tag{B.36}$$

где  $G_{ij,k}(\epsilon, \mathbf{k})$  – некоторый «крюковый» ТТ-тензор на границе и  $K_\nu(y)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода.

Используя различные полученные ранее соотношения, найдем версию ТТ-разложения крюковой компоненты на массовой поверхности

$$\begin{aligned}
\varphi_{ij,k} \approx & \bar{\varphi}_{ij,k} + \frac{1}{k^2} \left( k_i k_m \varphi^m_{j,k} + k_j k^m \varphi_{im,k} + k_k k^m \varphi_{ij,m} \right. \\
& \left. - k_i k_j \varphi_k + \frac{1}{2} k_i k_k \varphi_j + \frac{1}{2} k_j k_k \varphi_i \right) + \\
& -2(d-2) \frac{k_i k_j}{k^4} Z_k + (d-2) \frac{k_k k_j}{k^4} Z_i + (d-2) \frac{k_k k_i}{k^4} Z_j \\
& - \frac{2}{k^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) Z_k + \frac{1}{k^2} \left( \delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right) Z_j + \frac{1}{k^2} \left( \delta_{jk} - \frac{k_j k_k}{k^2} \right) Z_i,
\end{aligned} \tag{B.37}$$

где введено обозначение  $Z_i = z^{-2}(z\partial_z + 3)\varphi_i$ , а  $\approx$  означает равенство на массовой поверхности. ТТ-тензор  $\bar{\varphi}_{ij,k}(z, \mathbf{k})$  задаётся (B.36), след  $\varphi_k(z, \mathbf{k})$  задаётся (B.18) и дивергенции задаются (B.20), (B.31).

**Полные решения уравнений и связей.** Мы используем несколько комбинаций из главного граничного тензора (3.86), который определяет гранич-



ную тензорную структуру различных компонент и их дивергенции

$$\begin{aligned}
L_{ij}(\mathbf{k}) &= k^m \pi_{ij,m}(\mathbf{k}) , & L_i(\mathbf{k}) &= k^m k^n \pi_{mn,i}(\mathbf{k}) , \\
Y_{ij}(\mathbf{k}) &= k_i L_j(\mathbf{k}) - k_j L_i(\mathbf{k}) , & S_{ij}(\mathbf{k}) &= k_i L_j(\mathbf{k}) + k_j L_i(\mathbf{k}) , \\
T_{ij}(\mathbf{k}) &= k^m \pi_{mi,j}(\mathbf{k}) - k^m \pi_{mj,i}(\mathbf{k}) , & M_{ij}(\mathbf{k}) &= 2L_{ij}(\mathbf{k}) + \frac{1}{k^2} S_{ij}(\mathbf{k}) , \\
M_{ij,k}(\mathbf{k}) &= 2k_i k_j L_k(\mathbf{k}) - k_i k_k L_j(\mathbf{k}) - k_j k_k L_i(\mathbf{k}) ,
\end{aligned} \tag{B.38}$$

$$Z_{ij,k}(\mathbf{k}) = 2\delta_{ij} L_k(\mathbf{k}) - \delta_{ik} L_j(\mathbf{k}) - \delta_{jk} L_i(\mathbf{k}) .$$

Эти тензоры имеют следующие свойства: они либо симметричны  $S_{[mn]=0}$ ,  $M_{[mn]=0}$ , либо антисимметричны  $Y_{(mn)} = 0$ ,  $T_{(mn)} = 0$ , либо имеют «крюковую» симметрию  $M_{(mn,k)} = 0$ ,  $Z_{(mn,k)} = 0$ . Также есть несколько очевидных свёрток:  $k^m L_m = 0$ ,  $2k^m L_{mn} = -L_n$ ,  $2k^m T_{mn} = 3L_n$ ,  $k^m S_{mk} = k^2 L_k$ ,  $\delta^{mn} S_{mn} = 0$ ,  $\delta^{mn} M_{mn} = 0$ , и  $k^m M_{mn} = 0$

Поскольку главный граничный тензор бесследов (3.86), можно видеть, что произвольные функции, определяющие следы, выражаются в терминах граничного тензора (B.38) следующим образом

$$A_i(\epsilon, \mathbf{k}) = a(\epsilon, \mathbf{k}) L_i(\mathbf{k}) , \quad B_i(\epsilon, \mathbf{k}) = b(\epsilon, \mathbf{k}) L_i(\mathbf{k}) , \quad C(\epsilon, \mathbf{k}) = 0 , \tag{B.39}$$

где  $L_i(\mathbf{k})$  задаётся (B.38), а  $a(\epsilon, \mathbf{k})$ ,  $b(\epsilon, \mathbf{k})$  – новые неизвестные функции. Заметим, что посредством симметрии Юнга главного граничного тензора можно вывести ограничения  $k^m A_m = k^m B_m \equiv 0$ , которые, однако, допускают локальные решения (B.39). Функция  $C$  зануляется, поскольку невозможно построить скаляр из бесследового  $\pi_{ij,k}$  свёрткой с импульсом. Таким образом, скалярная компонента следа равна нулю

$$\varphi_0(z, \mathbf{k}) = 0 . \tag{B.40}$$

Рассмотрим теперь симметричную компоненту (B.26). Используя (B.38) можно представить ГТ-тензор  $F_{ij}(\epsilon, \mathbf{k})$  как пропорциональный ГТ части  $L_{ij}(\mathbf{k}) = k^m \pi_{ij,m}(\mathbf{k})$  следующим образом  $F_{ij}(\epsilon, \mathbf{k}) = F(\epsilon, \mathbf{k}) \bar{\varphi}_{ij}(\mathbf{k})$ , где  $F(\epsilon, \mathbf{k})$  – новая неизвестная функция, а комбинация

$$\bar{\varphi}_{ij}(\mathbf{k}) = L_{ij}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2k^2} S_{ij}(\mathbf{k}) , \tag{B.41}$$

бесследова и трансверсальна. Тогда решение (В.26) может быть приведено к виду

$$\varphi_{ij}(z, \mathbf{k}) = \frac{1}{z^2} \mathcal{K}_\nu(zk) F(\epsilon, \mathbf{k}) \bar{\varphi}_{ij}(\mathbf{k}) - 2i \frac{a(\epsilon, \mathbf{k})}{z^2 k^2} S_{ij}(\mathbf{k}), \quad (\text{В.42})$$

где новые модифицированные функции Бесселя  $\mathcal{K}_\nu$  определяются (В.56). Используя (В.40) можно найти, что симметричное соотношение на дивергенции (В.30) принимает вид

$$\begin{aligned} ik^m \varphi_{ij,m}(z, \mathbf{k}) = & - \frac{W(zk) \mathcal{K}_\nu(zk)}{z^3} F(\epsilon, \mathbf{k}) \bar{\varphi}_{ij}(\mathbf{k}) \\ & - \frac{2i(d-2)a(\epsilon, \mathbf{k})}{z^3 k^2} S_{ij}(\mathbf{k}) - \frac{ia(\epsilon, \mathbf{k})}{2z} S_{ij}(\mathbf{k}) - \frac{ib(\epsilon, \mathbf{k})}{2z^3} S_{ij}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (\text{В.43})$$

где функция  $W(zk)$  даётся (В.56). Соотношение на дивергенции (В.43) должно быть хорошо определено при устремлении  $z$  к границе. Для малых  $\epsilon \rightarrow 0$  левая часть этого соотношения конечна и равна  $iL_{ij}(\mathbf{k})$ , а конечность правой части требует  $F(\epsilon, \mathbf{k}) = \epsilon^3 \tilde{F}(\mathbf{k}) + \dots$  и  $a(\epsilon, \mathbf{k}) = \epsilon^3 \tilde{a}(\mathbf{k}) + \dots$ , где тильдами обозначены некоторые независимые от  $\epsilon$  фиксированные тензоры на границе, а многоточия обозначают члены старших порядков по параметру обрезания, ср. с формулой (В.59). В частности, такое граничное поведение означает, что симметричная компонента стремится к нулю при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Требование равенства тензорных структур в обеих частях (В.43) в точке  $z = \epsilon$  даёт следующие ограничения

$$F(\epsilon, \mathbf{k}) = - \frac{i\epsilon^3}{W(\epsilon k) \mathcal{K}_\nu(\epsilon k)}, \quad (\text{В.44})$$

$$\frac{k^2}{\epsilon^3} b(\epsilon, \mathbf{k}) + \left( \frac{k^2}{\epsilon} + \frac{4(d-2)}{\epsilon^3} \right) a(\epsilon, \mathbf{k}) - 1 = 0, \quad a(\epsilon, \mathbf{k}) = \frac{\epsilon^3 - b(\epsilon, \mathbf{k})k^2}{\epsilon^2 k^2 + 4(d-2)}. \quad (\text{В.45})$$

Действительно, используя разложение (В.41) можно показать, что подстройка граничных значений обеих частей в (В.43) даёт коэффициент (В.44) перед  $L_{ij}(\mathbf{k})$ , а группа членов, пропорциональных  $S_{ij}(\mathbf{k})$  должна занулиться, что приводит к (В.45). Мы видим, что эти функции укладываются в рамки поведения при малых  $\epsilon$ . Записывая получающееся выражение для симметричной компоненты

$$\varphi_{ij}(z, \mathbf{k}) = -i \left( \frac{\epsilon}{z} \right)^2 \frac{\epsilon}{W(\epsilon k)} \frac{\mathcal{K}_\nu(zk)}{\mathcal{K}_\nu(\epsilon k)} \bar{\varphi}_{ij}(\mathbf{k}) - \frac{2i}{z^2} \frac{a(\epsilon, \mathbf{k})}{k^2} S_{ij}(\mathbf{k}), \quad (\text{В.46})$$

и используя (В.41) находим граничное значение

$$\varphi_{ij}(\epsilon, \mathbf{k}) = -\frac{i}{2} \frac{\epsilon}{W(\epsilon k)} \left( 2k^m \pi_{ij,m} + \frac{k_i k^m k^n \pi_{mn,j} + k_j k^m k^n \pi_{mn,i}}{k^2} \right) - \frac{2i}{\epsilon^2} \left( \frac{k_i k^m k^n \pi_{mn,j} + k_j k^m k^n \pi_{mn,i}}{k^2} \right) a(\epsilon, \mathbf{k}) . \quad (\text{В.47})$$

Предполагается, что функция  $a(\epsilon, \mathbf{k})$  аналитична по  $k$ , так что идея состоит в нахождении таких  $a(\epsilon, \mathbf{k})$ , чтобы все полюса по импульсам взаимно сокращались. Поскольку главный вклад в разложении по малым  $\epsilon$  функции  $W$  (В.56) имеет вид  $W(\epsilon k) = -(d-2) + \dots$ , то все полюса в (В.47) пропадают, если

$$a(\epsilon, \mathbf{k}) = \frac{\epsilon^3}{4(d-2)} , \quad b(\epsilon, \mathbf{k}) = -\frac{\epsilon^5}{4(d-2)} . \quad (\text{В.48})$$

Эта процедура фиксирует функцию  $a(\epsilon, \mathbf{k})$ , а функция  $b(\epsilon, \mathbf{k})$  определяется уравнением (В.45).

Далее, подставляя (В.48) в (В.18) и (В.39), находим конечное решение для векторной составляющей следа

$$\varphi_i(z, \mathbf{k}) = \frac{\epsilon^3}{4(d-2)} \left[ \frac{1}{z} - \frac{\epsilon^2}{z^3} \right] L_i(\mathbf{k}) . \quad (\text{В.49})$$

Вспомним, что скалярная компонента следа равна нулю, (В.40).

**Крюковая компонента.** Используя граничное условие (3.86), можно найти, что граничное значение ТТ-составляющей  $\bar{\varphi}_{ij,k} = \bar{\varphi}_{ij,k}(\mathbf{k})$ , взятое из (В.34), имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{ij,k} = & \pi_{ij,k} - \frac{1}{k^2} (k_i k^m \pi_{mj,k} + k_j k^m \pi_{mi,k} + k_k k^m \pi_{ij,m}) + \\ & + \frac{1}{k^4} (k_i k_j \pi_k - \frac{1}{2} k_i k_k \pi_j - \frac{1}{2} k_j k_k \pi_i) + \frac{1}{2(d-2)} \frac{1}{k^2} (2\Pi_{ij} \pi_k - \Pi_{ik} \pi_j - \Pi_{jk} \pi_i) , \end{aligned} \quad (\text{В.50})$$

где проектор  $\Pi_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ . Вид крюковой компоненты (с некоторыми членами, записанными в неявном виде), взятый из ТТ-разложения на массо-

вой поверхности (B.37), (B.36),

$$\begin{aligned} \varphi_{ij,k}(z, \mathbf{k}) = & \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^3 \frac{\mathcal{K}_\nu(zk)}{\mathcal{K}_\nu(\epsilon k)} \bar{\varphi}_{ij,k}(\mathbf{k}) + \frac{1}{k^2} (k_i k^m \varphi_{mj,k} + k_j k^m \varphi_{mi,k} + k_k k^m \varphi_{ij,m})(z, \mathbf{k}) \\ & - \frac{a(\epsilon, \mathbf{k})}{2k^2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} \left(\frac{4(d-3)}{k^2} - \epsilon^2\right)\right) M_{ij,k}(\mathbf{k}) - \frac{2}{z^3} \frac{a(\epsilon, \mathbf{k})}{k^2} Z_{ij,k}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

где  $L_i(\mathbf{k})$ ,  $M_{ij,k}(\mathbf{k})$ , и  $Z_{ij,k}(\mathbf{k})$  даны в (B.38). Явные выражения для дивергенций в правой части имеют вид

$$\begin{aligned} k^m \varphi_{ij,m}(z, \mathbf{k}) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^3 \frac{W(zk)}{W(\epsilon k)} \frac{\mathcal{K}_\nu(zk)}{\mathcal{K}_\nu(\epsilon k)} M_{ij}(\mathbf{k}) \\ & - \left[ \frac{2(d-2)}{z^3} \frac{a(\epsilon, \mathbf{k})}{k^2} + \frac{b(\epsilon, \mathbf{k})}{2z^3} + \frac{a(\epsilon, \mathbf{k})}{2z} \right] S_{ij}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

$$k^m \varphi_{m[i,j]}(z, \mathbf{k}) = \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^3 T_{ij}(\mathbf{k}) + \frac{3}{2} \left(\frac{a(\epsilon, \mathbf{k})}{z} - \frac{\epsilon^2 a(\epsilon, \mathbf{k})}{z^3}\right) Y_{ij}(\mathbf{k}), \quad (\text{B.53})$$

так что полная несимметричная комбинация дивергенций имеет вид

$$\begin{aligned} k^m \varphi_{mi,j}(z, \mathbf{k}) = & \frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^3 \frac{W(zk)}{W(\epsilon k)} \frac{\mathcal{K}_\nu(zk)}{\mathcal{K}_\nu(\epsilon k)} M_{ij}(\mathbf{k}) - \\ & - \frac{1}{2} \left[ \frac{2(d-2)}{z^3} \frac{a(\epsilon, \mathbf{k})}{k^2} + \frac{b(\epsilon, \mathbf{k})}{2z^3} + \frac{a(\epsilon, \mathbf{k})}{2z} \right] S_{ij}(\mathbf{k}) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^3 T_{ij}(\mathbf{k}) + \frac{3}{4} \left(\frac{a(\epsilon, \mathbf{k})}{z} - \frac{\epsilon^2 a(\epsilon, \mathbf{k})}{z^3}\right) Y_{ij}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Функции  $a(\epsilon, \mathbf{k})$  и  $b(\epsilon, \mathbf{k})$  определяются (B.48). Подставляя эти дивергенции в выражение (B.51), получим конечный ответ для «крюковой» компоненты. Однако, не будем собирать все подстановки вместе, поскольку получающиеся выражения крайне громоздки. К счастью, чтобы вычислить граничное эффективное действие, достаточно иметь неявное выражение (B.51) вместе с формулой дивергенций (B.54).

### В.3 Модифицированные функции Бесселя

Используем следующее определение модифицированной функции Бесселя

$$K_\nu(u) = \frac{\pi}{2 \sin(\pi\nu)} (I_{-\nu}(u) - I_\nu(u)), \quad (\text{B.55})$$

где множитель может быть выражен через  $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \pi/\sin(\pi\alpha)$ , и  $I_\nu(u)$  – это функция Бесселя произвольного порядка  $\nu \in \mathbb{R}$ . В нашем случае  $\nu = d/2$ , т.е. (полу)целое, так что эти два случая надо рассматривать отдельно. Вообще говоря, разложенные на две группы (не)аналитических членов, модифицированные функции Бесселя целого порядка содержат дополнительный логарифм  $\ln u$  перед аналитической частью.

Введем следующие комбинации модифицированных функций Бесселя

$$\mathcal{K}_\nu(u) = u^\nu K_\nu(u), \quad W(u) = \frac{2\mathcal{K}_\nu(z) - \mathcal{K}_{\nu+1}(u)}{\mathcal{K}_\nu(u)}. \quad (\text{B.56})$$

**Нецелый параметр  $\nu$ .** Нецелый  $\nu$  отвечают нечетным размерностям границы  $d$ . Из определения (B.55) и (B.56) находим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\nu(u) = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) & \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{u}{2}\right)^{2n} \right. \\ & \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{u}{2}\right)^{2\nu+2n} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

В нашей задаче переменная  $u$  отождествляется с квадратным корнем  $d$ -мерного Д’Аламбертиана  $\sqrt{\square}$ , так что локальная часть  $\mathcal{K}_\nu(\epsilon\sqrt{\square})$  даётся членами с чётной степенью по  $u$  (первая сумма в (B.57)), а нечётные степени дают нелокальный вклад (вторая сумма в (B.57)). Первые несколько членов имеют вид

$$\mathcal{K}_\nu(u) = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) \left[ 1 + \frac{u^2}{4(1-\nu)} - \frac{1}{2^{2\nu}} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} u^{2\nu} + \dots \right]. \quad (\text{B.58})$$

Также, имеем разложение

$$\begin{aligned} W(u)\mathcal{K}_\nu(u) = 2\mathcal{K}_\nu(u) - \mathcal{K}_{\nu+1}(u) = \\ = 2^\nu(1-\nu)\Gamma(\nu) \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{2-\nu}{(1-\nu)^2} u^2 - \frac{1}{2^{2\nu}(1-\nu)} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} u^{2\nu} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

**Целый параметр  $\nu$ .** Целый  $\nu$  отвечает четным размерностям границы

*d.* В этом случае  $\mathcal{K}_\nu(u)$  (В.56) может быть представлена как ряд

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\nu(u) = & 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu) \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{1}{n!\Gamma(1-\nu+n)} \left(\frac{u}{2}\right)^{2n} + \\ & + (-)^{\nu+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\nu-1}}{n!\Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{u}{2}\right)^{2\nu+2n} \left(2 \ln \frac{u}{2} - \psi(n+1) - \psi(\nu+n+1)\right), \end{aligned} \quad (\text{В.60})$$

где  $\psi(k)$  – логарифмическая производная  $\psi(k) = \Gamma'(k)/\Gamma(k)$ . Все члены в этом ряду имеют чётные степени по  $u$ , кроме тех, что пропорциональны логарифму, которые, таким образом, определяют нелокальную часть  $\mathcal{K}_\nu(\epsilon\sqrt{\square})$ . Разложения, аналогичные (В.58) и (В.59), имеют вид

$$\mathcal{K}_\nu(u) = 2^{\nu-1}\Gamma(\nu) \left[ 1 + \frac{u^2}{4(1-\nu)} + \frac{(-)^{\nu+1}}{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1)} u^{2\nu} \ln \frac{u}{2} + \dots \right], \quad (\text{В.61})$$

и

$$\begin{aligned} W(u)\mathcal{K}_\nu(u) = & 2\mathcal{K}_\nu(u) - \mathcal{K}_{\nu+1}(u) = \\ = & 2^\nu(1-\nu)\Gamma(\nu) \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{2-\nu}{(1-\nu)^2} u^2 + \frac{(-)^{\nu+1}}{2^{2\nu-1}(1-\nu)} \frac{u^{2\nu} \ln \frac{u}{2}}{\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+1)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{В.62})$$

## В.4 Детали вычисления эффективного действия

Для упрощения вычислений воспользуемся очевидным равенством

$$\partial_z \left[ \left( \frac{z}{\epsilon} \right)^\gamma \frac{F(zk)}{F(\epsilon k)} \right] \Big|_{z=\epsilon} = \epsilon^{-1} \left( \gamma + (k\epsilon) \frac{d}{d(\epsilon k)} \ln F(\epsilon k) \right), \quad (\text{В.63})$$

где  $F(u)$  – произвольная функция, а  $\gamma$  – вещественная постоянная. Выражение в левой части обусловлено видом решения для «крюковой» компоненты (В.51). Представим нормальную производную «крюковой» компоненты в виде суммы шести членов

$$\partial_z \varphi_{ij,k} \Big|_{z=\epsilon} = \sum_{n=1}^3 A_n + B + C + D, \quad (\text{В.64})$$

где, используя решение (В.51) и опуская явные индексы, получим следующие производные

$$D = \partial_z \left[ \left( \frac{z}{\epsilon} \right)^{-3} \frac{\mathcal{K}_\nu(zk)}{\mathcal{K}_\nu(\epsilon k)} \bar{\varphi}_{ij,k} \right] \Big|_{z=\epsilon}, \quad (\text{В.65})$$

$$A_1 = \frac{k_i}{k^2} \partial_z (k^m \varphi_{mj,k}) \Big|_{z=\epsilon}, \quad A_2 = \frac{k_j}{k^2} \partial_z (k^m \varphi_{mi,k}) \Big|_{z=\epsilon}, \quad A_3 = \frac{k_k}{k^2} \partial_z (k^m \varphi_{ij,m}) \Big|_{z=\epsilon}, \quad (\text{В.66})$$

$$B = \partial_z \left[ -\frac{a}{2k^2} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} \left( \frac{4(d-3)}{k^2} - \epsilon^2 \right) \right) M_{ij,k} \right] \Big|_{z=\epsilon}, \quad C = \partial_z \left[ -\frac{2a}{k^2} \frac{1}{z^3} Z_{ij,k} \right] \Big|_{z=\epsilon}. \quad (\text{В.67})$$

Вычисляя  $z$ -производные от величин  $A_{1,2,3}$  и  $B, C, D$  из (В.65)-(В.67), получим следующие выражения

$$D = \left[ -\frac{3}{\epsilon} + \frac{\epsilon k^2}{2(1-\nu)} - \frac{2\nu}{2^{2\nu}} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \epsilon^{2\nu-1} k^{2\nu} + \dots \right] \bar{\varphi}_{ij,k}, \quad (\text{В.68})$$

$$A_1 = \frac{3}{4\epsilon} \frac{k_i}{k^2} M_{jk} - \frac{1}{2} \left[ \frac{6(d-2)}{\epsilon^4} \frac{a}{k^2} + \frac{3}{2} \frac{b}{\epsilon^4} + \frac{a}{2\epsilon^2} \right] \frac{k_i}{k^2} S_{jk} - \frac{3}{2\epsilon} \frac{k_i}{k^2} T_{jk} - \frac{3}{4} \left( \frac{a}{\epsilon^2} + \frac{3b}{\epsilon^4} \right) \frac{k_i}{k^2} Y_{jk} - \frac{1}{2} \Theta(\epsilon, k) \frac{k_i}{k^2} M_{jk}, \quad (\text{В.69})$$

$$A_2 = \frac{3}{4\epsilon} \frac{k_j}{k^2} M_{ik} - \frac{1}{2} \left[ \frac{6(d-2)}{\epsilon^4} \frac{a}{k^2} + \frac{3}{2} \frac{b}{\epsilon^4} + \frac{a}{2\epsilon^2} \right] \frac{k_j}{k^2} S_{ik} - \frac{3}{2\epsilon} \frac{k_j}{k^2} T_{ik} - \frac{3}{4} \left( \frac{a}{\epsilon^2} + \frac{3b}{\epsilon^4} \right) \frac{k_j}{k^2} Y_{ik} - \frac{1}{2} \Theta(\epsilon, k) \frac{k_j}{k^2} M_{ik}, \quad (\text{В.70})$$

$$A_3 = -\frac{3}{2\epsilon} \frac{k_k}{k^2} M_{ij} + \left[ \frac{6(d-2)}{\epsilon^4} \frac{a}{k^2} + \frac{3}{2} \frac{b}{\epsilon^4} + \frac{a}{2\epsilon^2} \right] \frac{k_k}{k^2} S_{ij} + \Theta(\epsilon, k) \frac{k_k}{k^2} M_{ij}, \quad (\text{В.71})$$

$$B = \frac{a}{2k^2} \left( \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon^4} \left( \frac{4(d-3)}{k^2} - \epsilon^2 \right) \right) M_{ij,k}, \quad C = \frac{6a}{\epsilon^4 k^2} Z_{ij,k}, \quad (\text{В.72})$$

где величины  $a$  и  $b$  задаются (В.48), и

$$\Theta(\epsilon, k) = \left( \frac{1}{4} \frac{2-\nu}{(1-\nu)^2} \epsilon k^2 - \frac{\nu}{2^{2\nu}} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \epsilon^{2\nu-1} k^{2\nu} + \dots \right). \quad (\text{В.73})$$

Величины  $A_2$  и  $A_3$  совпадают при перестановке индексов  $i$  и  $j$ .

## В.5 Фурье-преобразования и дифференциальная регуляризация

**Нецелые  $d/2$ .** Для Фурье-преобразования 2-точечной корреляционной функции из импульсного в координатное представление необходимо вычислить интегралы следующего типа [270]<sup>82</sup>

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} k^\alpha = \frac{2^\alpha}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \frac{1}{x^{d+\alpha}}. \quad (\text{В.74})$$

При целых  $\alpha/2$  гамма-функция в знаменателе имеет нули, так что преобразование Фурье плохо определено, см. далее. После взятия производных по  $x$  получаем

$$(-i)^\beta \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} k^\alpha k_{m_1} \cdots k_{m_\beta} = \frac{2^\alpha}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \partial_{m_1} \cdots \partial_{m_\beta} \frac{1}{x^{d+\alpha}}. \quad (\text{В.75})$$

**Целые  $d/2$ .** Для нахождения Фурье-преобразования логарифмических функций, обобщим схему дифференциальной регуляризации для  $4d$  теории  $\varphi^4$ , предложенную в [376] на любые чётные размерности  $d$ . Изложение ниже имеет самостоятельное значение вне контекста рассматриваемой задачи. Идея состоит в тождественном переписывании функции  $1/x^{2\rho}$ , где  $x \in \mathbb{R}^d/\{0\}$  и  $\rho \in \mathbb{Z}_+$ , следующим образом

$$\frac{1}{x^{2\rho}} = \square G(x^2), \quad (\text{В.76})$$

где  $\square = \partial^i \partial_i$  и  $x^2 = x^i x_i$  вычисляются при помощи евклидовой метрики  $\delta_{ij}$ . Удобно произвести замену  $w = x^2$ . Тогда уравнение (В.76) принимает вид

$$4w^{\rho-\frac{d}{2}+1} \frac{d}{dw} \left[ w^{\frac{d}{2}} \frac{d}{dw} G(w) \right] = 1. \quad (\text{В.77})$$

Решение этого ОДУ второго порядка при  $\rho = d/2$  для чётных  $d$  имеет вид

$$G(x^2) = -\frac{1}{2d-4} \frac{\ln(xM)^2}{x^{d-2}} + C, \quad x \neq 0, \quad (\text{В.78})$$

<sup>82</sup>См. также [375], где данные интегралы вычисляются добавлением тестовой функции  $e^{-\mu k^2}$  и взятием предела  $\mu \rightarrow 0$ .



где  $M$  и  $C$  – размерные константы интегрирования. В дальнейшем считаем  $C = 0$ . Для  $d = 4$  полученная формула воспроизводит результат из работы [376]. Таким образом, вне сингулярности, функция  $1/x^{2\rho}$  допускает эквивалентное представление с логарифмом и размерной константой, по причине чего регуляризация называется дифференциальной. Стоит отметить, что  $1/x^{2\rho}$  – это однородная функция, а  $G(x^2)$  нет. Тем не менее, равенство (В.76) верно для любых значений постоянной  $M$ , так что масштабное преобразование  $x^m \rightarrow tx^m$  определяет эквивалентность между функциями  $G(x^2)$  с  $M$  и  $tM$ .

Другие функции  $1/x^{d+2m}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , могут быть получены дифференцированием посредством  $\square$ , например,  $\square x^{-d} = 2d x^{-d-2}$ . В частности,

$$\frac{1}{x^{d+2m}} = \tau_m \square^m \frac{1}{x^d}, \quad \tau_m = \frac{\Gamma(d/2)}{4^m \Gamma(m+1) \Gamma(d/2+m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{В.79})$$

так что функции  $x^{-2d}$  приводятся к виду

$$\frac{1}{x^{2d}} = \frac{2^{-d+1}}{\Gamma(d+1)} \square^{\frac{d}{2}+1} \frac{\ln(xM)^2}{x^{d-2}}. \quad (\text{В.80})$$

По построению,  $d/2 + 1$  – целое положительное число, так что размерности  $d$  должны быть чётными. В нечётных размерностях  $d$  вышеприведённое представление не работает; в частности, оно становится нелокальным. Приведённый выше регуляризованный вид  $x^{-2d}$  удобен для преобразования Фурье. Чтобы получить эту формулу, нужно заметить, что, во-первых, преобразование Фурье степенных функций легко получить, и во-вторых, степенные функции можно представить в виде логарифмического ряда

$$(Mx)^{2a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \ln^n(xM)^2 = 1 + 2a \ln(xM) + \dots, \quad (\text{В.81})$$

где  $a$  формальная переменная, а затем найти его Фурье-образ

$$\int d^d x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{(Mx)^{2a}}{x^{d-2}} = \frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{k^2} \left(\frac{2M}{k}\right)^{2a} \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(d/2-a-1)}. \quad (\text{В.82})$$

Представляя гамма-функции по формуле 8.342.2 из [377]

$$\ln \Gamma(1+a) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi a}{\sin \pi a} - \mathbb{C}a - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{2n+1} \zeta(2n+1), \quad (\text{В.83})$$

где  $\mathbb{C}$  – постоянная Эйлера-Маскерони, а  $\zeta(n)$  – дзета-функция Римана, и раскладывая по малым  $a$ , можно найти

$$\frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(d/2-a-1)} = \frac{(1+aH_{d/2-2})(1-2\mathbb{C}a)}{\Gamma(d/2-1)} + \mathcal{O}(a^2), \quad (\text{B.84})$$

где  $H_{d/2-2}$  – гармонические числа ( $H_0 = 0, H_1 = 1, H_2 = 3/2, \dots$ ). Члены, линейные по  $a$ , содержащиеся в правой части (B.82), тогда равны

$$(\text{B.82}) = \frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} \frac{1}{k^2} \left[ 1 - 2a \ln \left( \frac{k \bar{H}_{d/2-2}}{2M} \right) \right] + \mathcal{O}(a^2), \quad (\text{B.85})$$

где  $\ln \bar{H}_{d/2-2} = \mathbb{C} - H_{d/2-2}/2$ . Следовательно,

$$\int d^d x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{1}{x^{d-2}} = \frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} \frac{1}{k^2}, \quad (\text{B.86})$$

$$\int d^d x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \frac{\ln(Mx)}{x^{d-2}} = -\frac{4\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}-1)} \frac{1}{k^2} \ln \frac{k}{\widetilde{M}}, \quad (\text{B.87})$$

где  $\widetilde{M} = 2M/\bar{H}_{d/2-2}$ . Заметим, что (B.86) совпадает с (B.74), вычисленным при  $\alpha = -2$ . Высшие порядки по  $a$  в (B.82) дают разные степени логарифма.

Теперь, используя Фурье-преобразование, обратное к (B.87), и дифференцируя оператором  $\square$ , получим

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} k^{2\alpha-2} \ln \frac{k}{\widetilde{M}} = (-)^{\alpha+1} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \square^\alpha \frac{\ln(Mx)}{x^{d-2}}, \quad (\text{B.88})$$

где  $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ . Воспользовавшись формулой (B.79) при  $n = \alpha - 1$ , можно представить этот интеграл в виде, аналогичном (B.74),

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} k^{2\alpha-2} \ln \frac{k}{\widetilde{M}} = (-)^\alpha \frac{2^{2\alpha-3}}{\pi^{\frac{d}{2}}} \Gamma(\alpha) \Gamma(d/2 + \alpha - 1) \frac{1}{x^{d+2\alpha-2}}, \quad (\text{B.89})$$

где  $\alpha = 1, 2, \dots$ . Взятие производных по  $x$  в интеграле (B.88) спускает степени  $k_m$ , в результате чего получается формула, аналогичная (B.75)

$$\begin{aligned} i^\beta \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} k_{m_1} \cdots k_{m_\beta} k^{2\alpha-2} \ln \frac{k}{\widetilde{M}} = \\ = (-)^{\alpha+\beta} \frac{2^{2\alpha-3}}{\pi^{\frac{d}{2}}} \Gamma(\alpha) \Gamma(d/2 + \alpha - 1) \partial_{m_1} \cdots \partial_{m_\beta} \frac{1}{x^{d+2\alpha-2}}, \end{aligned} \quad (\text{B.90})$$

где  $\alpha = 1, 2, \dots$  и  $\beta = 0, 1, 2, \dots$ .

# Приложение Г

## Г.1 Основные выражения для \*-произведения

Произведения  $T_{AB} * F$  (или  $F * T_{AB}$ ) определяют левое (или правое) действие алгебры  $o(2, 1)$ . Ниже приведены явные выражения в исходной дуплетной переменной  $Y_\alpha^A$  и в синглетной переменной  $Z^A$ . В дуплетной переменной имеем

$$T_{AB} * F(Y) = \frac{1}{8} \left[ 4\epsilon^{\alpha\beta} Y_{\alpha A} Y_{\beta B} - 2L_{AB} + \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial Y^{\alpha A} \partial Y^{\beta B}} \right] F(Y), \quad (\text{Г.1})$$

$$F(Y) * T_{AB} = \frac{1}{8} \left[ 4\epsilon^{\alpha\beta} Y_{\alpha A} Y_{\beta B} + 2L_{AB} + \epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial Y^{\alpha A} \partial Y^{\beta B}} \right] F(Y), \quad (\text{Г.2})$$

где

$$L_{AB} = Y_{\alpha A} \frac{\partial}{\partial Y_\alpha^B} - Y_{\alpha B} \frac{\partial}{\partial Y_\alpha^A}. \quad (\text{Г.3})$$

В качестве примера перехода от  $Y_\alpha^A$  к  $Z^A$ , выпишем последний член (Г.1) и (Г.2)

$$\epsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial Y^{\alpha A} \partial Y^{\beta B}} F(Y) = 2\epsilon_{ABC} \left( 2 + Z^K \frac{\partial}{\partial Z^K} \right) \frac{\partial}{\partial Z^C} F(Z), \quad (\text{Г.4})$$

или, второй член,

$$L_{AB} = Z_A \frac{\partial}{\partial Z^B} - Z_B \frac{\partial}{\partial Z^A}. \quad (\text{Г.5})$$

Вводя дуализованные по Ходжу  $o(2, 1)$  базисные элементы

$$T_A = \epsilon_{ABC} T^{BC}, \quad (\text{Г.6})$$

соотношения (Г.1) и (Г.2) можно эквивалентным образом представить в терминах синглетной переменной

$$\begin{aligned} T^A * F(Z) &= \frac{1}{2} \left[ Z^A - \left( 2 + Z^B \frac{\partial}{\partial Z^B} \right) \partial^A - \epsilon^{ABC} Z_B \frac{\partial}{\partial Z^C} \right] F(Z) , \\ F(Z) * T^A &= \frac{1}{2} \left[ Z^A - \left( 2 + Z^B \frac{\partial}{\partial Z^B} \right) \partial^A + \epsilon^{ABC} Z_B \frac{\partial}{\partial Z^C} \right] F(Z) . \end{aligned} \quad (\text{Г.7})$$

## Г.2 Канонический базис

**Доказательство Утверждения 4.1.** Пусть  $G_n \in \mathcal{S}_3$  – это элемент максимальной степени  $n$  по переменной  $Z^A$ . Его можно разложить как

$$G_n = F_n + H_{n-1} , \quad (\text{Г.8})$$

где  $F_n$  однородный элемент степени  $n$ , т.е.  $NF_n = nF_n$ , а степень  $H_{n-1}$  не выше  $n - 1$ . Коэффициенты разложения в однородной части,

$$F_n = F_{A_1 \dots A_n} Z^{A_1} \dots Z^{A_n} , \quad (\text{Г.9})$$

образуют полностью симметричный  $gl(3, \mathbb{R})$  тензор ранга  $n$ , ср. (4.26). Раскладывая  $F_n$  на  $o(2, 1) \subset gl(3, \mathbb{R})$  неприводимые компоненты находим

$$F_n = T_n + Z^2 F_{n-2} , \quad (\text{Г.10})$$

где

$$\square T_n = 0 , \quad NT_n = nT_n , \quad NF_{n-2} = (n - 2)F_{n-2} . \quad (\text{Г.11})$$

Здесь,  $\square$ ,  $Z^2$ , и  $N$  – это операторы (4.31). Далее, используя явный вид оператора, задающего отношение эквивалентности  $\hat{\mathcal{D}}_\lambda$  (4.33), получаем

$$G_n = T_n - 16 \hat{\mathcal{D}}_\lambda F_{n-2} + G_{n-1} . \quad (\text{Г.12})$$

Здесь, член  $G_{n-1}$  степени не выше  $n - 1$  и поэтому к нему можно применить предыдущие рассуждения для  $G_n$  в (Г.8), и т.д. В итоге, для любого элемента  $G \in \mathcal{S}_3$  произвольной степени получаем следовое разложение

$$G = T - 16 \hat{\mathcal{D}}_\lambda F , \quad \square T = 0 , \quad (\text{Г.13})$$

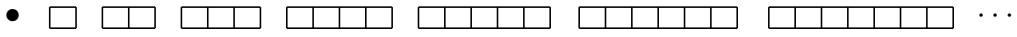


Рис. 18. Канонический базис в алгебре высших спинов  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ . Базисные элементы организованы в бесконечные серии бесследовых, симметричных  $o(2, 1)$  тензоров ранга  $n = 0, 1, 2, \dots$ , изображаемых диаграммами Юнга длины  $n$ .

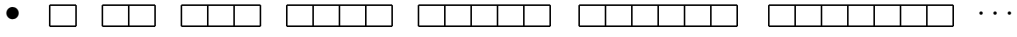


Рис. 19.  $gl(3, \mathbb{R})$ -ковариантный базис в универсальной обертывающей алгебре  $U(o(2, 1))$ . Здесь диаграммы Юнга длины  $\ell$  обозначают ранг- $\ell$  симметричные  $gl(3, \mathbb{R})$  тензоры ( $\ell = 0, 1, 2, \dots$ ).

с некоторым  $F \in \mathcal{S}_3$ . Вспоминая, что оператор отношения эквивалентности имеет вид  $\hat{D}_\lambda F = (C_2 - \mu_\lambda) * F$  и последовательно применяя соотношение (Г.13) можно прийти к звездочному разложению (4.36).

Итак, фактор-алгебра (4.15), определяемая отношением эквивалентности (4.28), изоморфна пространству бесследовых элементов, согласно Утверждению 4.1. Вспоминая, что следовый и считающий операторы образуют алгебру, т.е. удовлетворяют  $[\square, N] = 2\square$  (4.32), приходим к выводу, что пространство бесследовых элементов  $\mathcal{H}$  градуировано по отношению с собственным значениям  $n$  считающего оператора  $N$ . Таким образом, получаем разложение (4.34), рис. 18.

**Доказательство Утверждения 4.2.** Во-первых, перепишем разложение (4.26) следующим образом

$$\forall F \in \mathcal{S}_3 : \quad F = \sum_{\ell \geq 0} F_\ell, \quad NF_\ell = \ell F_\ell. \quad (\text{Г.14})$$

Каждый член  $F_\ell = F_{A_1 \dots A_\ell} Z^{A_1} \dots Z^{A_\ell}$  кодирует симметричный  $gl(3, \mathbb{R})$  тензор  $F_{A_1 \dots A_\ell}$  ранга  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ . Это обусловлено тем, что линейное пространство  $\mathcal{S}_3$  универсальной обертывающей  $U(o(2, 1))$  изоморфно симметризованному тензорному произведению  $o(2, 1)$  векторов, откуда следует, что это  $gl(3, \mathbb{R})$ -модуль. Разложение (Г.14) можно изобразить как на рис. 19. Комбинируя односледовое разложение (Г.10) и разложение по рангу (Г.14), получаем общее

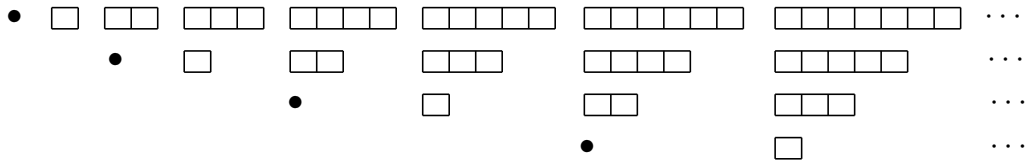


Рис. 20.  $o(2, 1)$ -ковариантный базис в универсальной обертывающей алгебре  $U(o(2, 1))$ . Базисные элементы организованы в горизонтальные цепочки бесследовых элементов (ранга от нуля до бесконечности) при фиксированном  $m$ . При комбинировании в вертикальные цепочки (фиксированной суммы  $\ell = 2m + n$ ), соответствующие симметричные, бесследовые  $o(2, 1)$ -тензоры образуют один ранг- $\ell$  симметричный  $gl(3, \mathbb{R})$  тензор, расположенный на  $\ell$ -месте на рис. 19. Отметим, что диаграммы Юнга в каждой вертикальной цепочке отличаются на две клетки, что соответствует вычитанию следов  $gl(3, \mathbb{R})$  тензоров.

следовое разложение

$$\forall F \in \mathcal{S}_3 : F = \sum_{m, n \geq 0} (Z^2)^m T_n^{(m)}, \quad \square T_n^{(m)} = 0, \quad NT_n^{(m)} = nT_n^{(m)}, \quad (\Gamma.15)$$

где индекс  $n = 0, 1, 2, \dots$  задает ранг  $T_n^{(m)}$ , а дополнительный индекс  $m = 0, 1, 2, \dots$  нумерует копии ранг- $n$  элементов. Каждый член в (Г.15) содержит ранг- $n$  бесследовый симметричный  $o(2, 1)$  тензор в виде коэффициента разложения

$$T_n^{(m)} = T_{A_1 \dots A_n}^{(m)} Z^{A_1} \dots Z^{A_n}, \quad \eta^{A_1 A_2} T_{A_1 A_2 A_3 \dots A_n}^{(m)} = 0. \quad (\Gamma.16)$$

Таким образом, находим, что универсальная обертывающая алгебра  $U(o(2, 1))$  может быть записана в  $o(2, 1)$ -ковариантном базисе, как показано на рис. 20. Согласно Утверждению 4.1 линейное пространство фактор-алгебры (4.15) можно визуализировать как первую горизонтальную цепочку на рис. 20 (ср. рис. 18), в то время как все последующие образуют идеал.

Покажем, что каждая копия  $\mathcal{D}_n^{(m)}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) конечномерного модуля  $\mathcal{D}_n$ , возникающая в разложении (4.39), действительно является присоединенным представлением алгебры  $o(2, 1)$ , образованным ранг- $n$  симметричными, бесследовыми  $o(2, 1)$  тензорами. Для этого, во-первых, заметим, что  $\mathcal{D}_n^{(m)}$ , выраженный в терминах следового разложения (Г.15), образован бесследо-

выми элементами  $T_n^{(m)}$ . Во-вторых, присоединенное действие (4.38)  $o(2, 1)$ -генераторов  $T_A$  преобразует каждый индекс как  $o(2, 1)$  вектор и коммутирует со считающим и следовым операторами (4.31):

$$[\mathcal{T}^A, \square] = 0, \quad [\mathcal{T}^A, Z^2] = 0, \quad [\mathcal{T}^A, N] = 0. \quad (\Gamma.17)$$

Это показывает, что векторные пространства  $\mathcal{D}_n^{(m)}$  являются конечномерными  $o(2, 1)$ -модулями, образованными ранг- $n$  бесследовыми, симметричными  $o(2, 1)$  тензорами, и поэтому изоморфны  $\mathcal{D}_n$ . Подтвердим это вычислением собственных значений  $o(2, 1)$  оператора Казимира. В присоединенном представлении (4.115),

$$\mathcal{C}_2[o(2, 1)] = \frac{1}{2} \mathcal{T}_A \mathcal{T}^A \equiv \frac{1}{2} [T_A, [T^A, \cdot]_*]_* = -Z^2 \square + N(N + 1), \quad (\Gamma.18)$$

где точка обозначает  $\forall F \in U(o(2, 1))$ . Тогда вычисляя (Г.18) на бесследовых элементах  $T_n^{(m)}$  (Г.16) находим  $\mathcal{C}_2[o(2, 1)]T_n^{(m)} = n(n + 1)T_n^{(m)}$ .

### Г.3 Твистованный базис

Для доказательства Утверждения 4.3 сначала разовьем осцилляторную технику вычислений, объединяющую исходные переменные  $Z^A$  и вектор компенсатора  $V^A$  в единый формализм, позволяющий работать с лоренцевыми  $o(1, 1)$  тензорами явно  $o(2, 1)$ -ковариантным образом.

**Параллельные/поперечные переменные.** Обозначая скалярное произведение произвольных  $o(2, 1)$  векторами как  $Q \cdot P = \eta_{AB} Q^A P^B$  можно разложить исходную переменную  $Z^A$  на две составляющие, параллельную и поперечную вектору компенсатора,

$$Z^A = Z_{\parallel}^A + Z_{\perp}^A, \quad \text{где} \quad \begin{cases} Z_{\parallel}^A = (Z \cdot V) V^A, \\ Z_{\perp}^A = Z^A - (Z \cdot V) V^A. \end{cases} \quad (\Gamma.19)$$

Как следствие, получаем соотношения поперечности

$$Z_{\perp} \cdot V = 0, \quad Z_{\perp} \cdot Z_{\parallel} = 0. \quad (\Gamma.20)$$

Вводя проектор  $\Pi_A^B = \delta_A^B - V^A V_B$  определим производные по направлениям

$$\partial_A^{\perp} \equiv \frac{\partial}{\partial Z_{\perp}^A} = \Pi_A^B \frac{\partial}{\partial Z^B}, \quad \partial_A^{\parallel} \equiv \frac{\partial}{\partial Z_{\parallel}^A} = V_A \left( V \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right). \quad (\Gamma.21)$$

Они удовлетворяют следующим соотношениям

$$\partial_A = \partial_A^\perp + \partial_A^\parallel, \quad \frac{\partial Z_\perp^B}{\partial Z_\perp^A} = \Pi_A^B, \quad \frac{\partial Z_\parallel^B}{\partial Z_\parallel^A} = V_A V^B, \quad \frac{\partial Z_\parallel^B}{\partial Z_\perp^A} = 0. \quad (\Gamma.22)$$

**Тензорное исчисление.** Любой неприводимый  $o(1, 1)$ -тензор  $F_{a_1 \dots a_n}$  ( $a_i = 0, 1$ ) можно представить  $o(2, 1)$ -ковариантным образом как

$$F_n(Z_\perp) = F_{A_1 \dots A_n} Z_\perp^{A_1} \dots Z_\perp^{A_n} : \quad \square_\perp F_n = 0, \quad N_\perp F_n = n F_n. \quad (\Gamma.23)$$

По построению, в силу (Г.20), коэффициенты разложения можно выбрать  $V^A$ -поперечными т.к.  $V^A$ -продольная составляющая дает нулевой вклад. Выбирая компенсатор стандартным образом  $V^A = (0, 0, 1)$  можно видеть, что исходный ранг- $n$  симметричный  $gl(3, \mathbb{R})$  тензор  $F_{A_1 \dots A_n}$  переходит в  $F_{a_1 \dots a_n}$ , являющийся ранг- $n$  симметричным, бесследовым  $o(1, 1)$  тензором. С другой стороны, любой элемент, зависящий только от параллельных переменных

$$F_n(Z_\parallel) = F_{A_1 \dots A_n} Z_\parallel^{A_1} \dots Z_\parallel^{A_n} \quad (\Gamma.24)$$

является  $o(1, 1)$  скаляром. Действительно, вводя обозначение

$$Z_0 \equiv Z \cdot V \quad \text{так что} \quad Z_\parallel^A = V^A Z_0, \quad (\Gamma.25)$$

находим

$$F_n(Z_\parallel) = F_n(V) Z_0^n, \quad \text{где} \quad F_n(V) = F_{A_1 \dots A_n} V^{A_1} \dots V^{A_n}. \quad (\Gamma.26)$$

Далее, разложим элемент степени  $n$  как

$$F_n(Z) = F_{A_1 \dots A_n} Z^{A_1} \dots Z^{A_n} \equiv \sum_{p+q=n} F_{B_1 \dots B_p | C_1 \dots C_q} Z_\perp^{B_1} \dots Z_\perp^{B_p} Z_\parallel^{C_1} \dots Z_\parallel^{C_q}. \quad (\Gamma.27)$$

Переходя от первого равенства ко второму, разложим коэффициенты  $F_{A_1 \dots A_n}$  на  $V^A$ -поперечную и  $V^A$ -продольную составляющие. Возникающие коэффициенты  $F_{B_1 \dots B_p | C_1 \dots C_q}$  являются  $V^A$ -поперечными тензорами по отношению к первой группе индексов и  $V^A$ -продольными по второй группе индексов (т.е. эти тензоры пропорциональны  $V_{C_1} \dots V_{C_q}$ ). С помощью введенной ранее переменной  $Z_0$ , разложение можно представить в виде

$$F_n(Z) = \sum_{p+q=n} f_{B_1 \dots B_p}^{(q)} Z_\perp^{B_1} \dots Z_\perp^{B_p} Z_0^q, \quad (\Gamma.28)$$



где  $f_{B_1 \dots B_p}^{(q)}$  удовлетворяют условию  $V^A$ -поперечности при любом  $q = 0, 1, 2, \dots$

**Правила ветвления.** Накладывая следовое условие  $\square F_n = 0$ , можно видеть, что коэффициенты разложения (Г.28) оказываются связаны друг с другом в силу того, что  $o(2, 1)$ -следовый оператор раскладывается как  $\square = \square_{\perp} + \square_{\parallel}$ . Решая возникающую зацепленную систему следовых уравнений находим все неприводимые  $o(1, 1)$  тензоры ранга  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  воспроизводя, тем самым, правило ветвления

$$\mathcal{D}_n = d_0 \oplus d_1 \oplus \dots \oplus d_n, \quad (\text{Г.29})$$

где  $d_k$  обозначает неприводимый  $o(1, 1)$ -модуль, образованный ранг- $k$  бесследовыми, симметричными лоренцевыми тензорами. Отметим, что  $d_0$  имеет размерность 1 (тривиальное представление), а  $o(1, 1)$ -модули  $d_k$  при  $k > 0$  имеют размерности 2.  $o(1, 1)$ -модули  $d_k$  неприводимы над вещественными числами, но становятся приводимыми на комплексными числами и тогда распадаются на Фурье-моды с собственными значениями  $\pm k$ . Таким способом, получаем, что  $o(1, 1) \subset o(2, 1)$  правило ветвления (Г.29) является суммой по Фурье-модам  $k = -n, -n + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n - 1, n$ . Это очевидный аналог стандартного  $o(2) \subset o(3)$  правила ветвления, когда сферические гармоники раскладываются в терминах собственных векторов углового момента вдоль  $z$ -оси. Подробные примеры применения осцилляторной техники для изучения тензорных разложений можно найти в работе [170].

**Доказательство Утверждения 4.3.** Определим два коммутирующих оператора

$$\square_{\perp} - 1 \quad \text{и} \quad N_{\parallel} : \quad [N_{\parallel}, \square_{\perp} - 1] = 0, \quad (\text{Г.30})$$

и рассмотрим подпространство  $\tilde{\mathcal{H}} \subset \tilde{\mathcal{S}}_3$ , выделяемое модифицированным следовым условием,

$$(\square_{\perp} - 1)F(Z) = 0. \quad (\text{Г.31})$$

Фактически, это двумерное уравнение Клейна-Гордона, решение которого известно. Опишем пространство решений с помощью осцилляторной техники  $\perp$  и  $\parallel$  переменных. С этой целью разложим  $F(Z)$  по степеням параллельной переменной  $Z_0$  как в (Г.28),

$$F(Z) = \sum_{n \geq 0} f_n(Z_{\perp}) Z_0^n, \quad (\text{Г.32})$$

где  $f_n(Z_\perp)$  – это произвольные степенные ряды по переменной  $\perp$ , а разложение по  $Z_0$  можно считать конечным, т.е.  $F$  является полиномом по  $Z_0$ , но по  $Z_\perp$  это степенной ряд. Представление (Г.32) удобно по причине естественного разделения переменных  $\perp$  и  $\parallel$ . Более того, решения  $F(Z)$  градуированы по отношению к собственным значениям считающего оператора  $N_\parallel$ , который теперь задается выражением

$$N_\parallel = Z_0 \frac{\partial}{\partial Z_0} . \quad (\text{Г.33})$$

Теперь наложим модифицированное следовое условие (Г.31) и заметим, что  $[\square_\perp, Z_0] = 0$ . Это позволяет представить решение (Г.32) с коэффициентами вида [164]

$$f_n(Z_\perp) = \sum_{k \geq 0} g_k(Z_\perp^2) f_{n|k}(Z_\perp) , \quad (\text{Г.34})$$

где условия неприводимости

$$\square_\perp f_{n|k} = 0 , \quad N_\perp f_{n|k} = k f_{n|k} , \quad (\text{Г.35})$$

кодируют ранг- $k$  бесследовые симметричные  $o(1, 1)$  тензоры, и

$$g_k(Z_\perp^2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4^{-m+1}}{m!(k + \frac{1}{2})_m} (Z_\perp^2)^m = {}_4F_1(k + \frac{1}{2}; \frac{Z_\perp^2}{2}) \quad (\text{Г.36})$$

обозначают бесконечный ряд от оператора рождения следа  $Z_\perp^2$  (здесь  $(x)_m$  – это символ Похгаммера). Такие коллективные следовые операторы действуют на бесследовые элементы  $f_k(Z_\perp)$ , где  $k$  обозначает собственное значение  $N_\perp$ , с целью получения элементов  $g_k(Z_\perp^2) f_k(Z_\perp)$  без определенной степени  $\perp$ , которые, тем не менее, все ограничены снизу значением  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Итак, пространство решений можно организовать в виде бесконечного числа цепочек бесследовых, симметричных  $o(1, 1)$  тензоров ранга  $k = 0, 1, 2, \dots$ , закодированных в полиномах  $f_{n|k}(Z_\perp)$ . Каждая такая цепочка нумеруется собственным значением  $n = 0, 1, 2, \dots$  считающего оператора  $N_\parallel$ .

**Канонически/твистованный базис.** Напомним, что согласно Утверждению 4.1, линейное пространство алгебры высших спинов  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  в каноническом базисе задается  $o(2, 1)$ -модулями  $\mathcal{D}_n$ , показанными на рис. 18. Т.к.

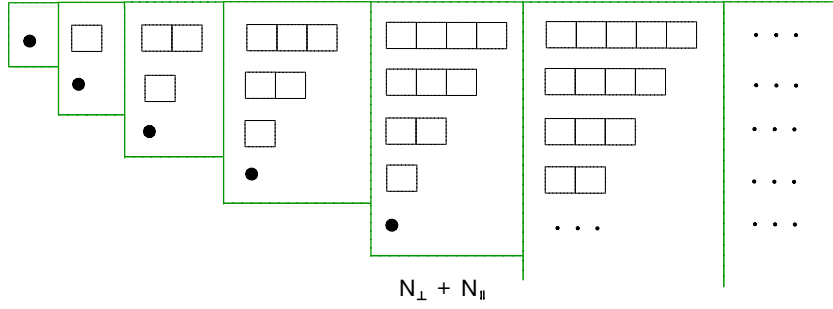


Рис. 21.  $o(1, 1)$ -ковариантный базис в  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  в каноническом виде. Каждая диаграмма Юнга длины  $k$  обозначает неприводимый  $o(1, 1)$ -модуль  $d_k$ .  $o(2, 1)$ -модули  $\mathcal{D}_n$  показаны внутри зеленых контуров. Считаемый оператор  $N = N_{\perp} + N_{\parallel}$  имеет фиксированное значение для всех элементов внутри заданного контура.

каждый  $\mathcal{D}_n$  можно разложить как (Г.29) в терминах неприводимых  $o(1, 1)$ -модулей  $d_k$ , то  $o(1, 1)$ -ковариантный базис в  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  задается как

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n = (d_0) \oplus (d_0 \oplus d_1) \oplus (d_0 \oplus d_1 \oplus d_2) \oplus (d_0 \oplus d_1 \oplus d_2 \oplus d_3) \oplus \dots \quad (\text{Г.37})$$

Члены в скобках образуют подпространства  $\mathcal{D}_n$ , см. рис. 21. Однако, лоренцевы модули можно реорганизовать введением бесконечного набора подпространств

$$\mathcal{W}_n \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty} d_k, \quad (\text{Г.38})$$

где каждое пространство  $\mathcal{W}_n$  содержит все бесследовые  $o(1, 1)$  тензоры  $f_{n|k}(Z_{\perp})$ , содержащиеся внутри производящей функции  $f_n(Z_{\perp})$ , ср. (Г.34)-(Г.35). Таким образом, получаем другое описание  $o(1, 1)$ -ковариантного базиса в  $\mathfrak{hs}[\lambda]$ , в том виде как это сформулировано в Утверждении 4.3,

$$\tilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n, \quad (\text{Г.39})$$

где каждое подпространство  $\mathcal{W}_n$  является решением модифицированного следового и весового условий (Г.30). Это – твистованный базис, рис. 22.

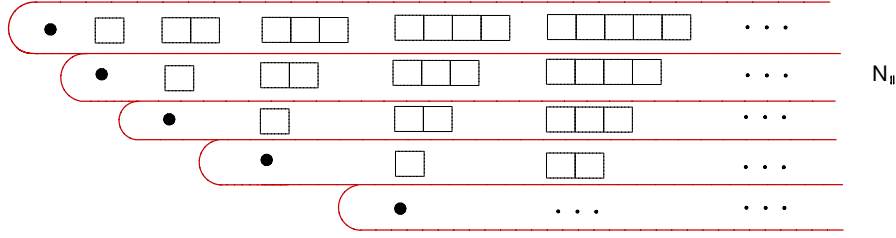


Рис. 22.  $o(1, 1)$ -ковариантный базис в  $\mathfrak{hs}[\lambda]$  в твистованном виде. Каждая диаграмма Юнга длины  $k$  является ранг- $k$  неприводимым  $o(1, 1)$ -модулем  $d_k$ . Подпространства  $\mathcal{W}_n$  выделены красными контурами. Считающий оператор  $N_{\parallel}$  имеет фиксированное значение на всех элементах внутри заданного контура.

## Г.4 (Обобщённые) твистованные представления

Будем предполагать, что генератор лоренцева вращения единственным образом реализуется однородным оператором

$$\mathbb{L} = -\epsilon_{ABC} V^C Z_{\perp}^A \partial_{\perp}^B, \quad (\text{Г.40})$$

а трансляции

$$\mathbb{P}^A = g Z_{\perp}^A + f \partial_{\perp}^A \quad (\text{Г.41})$$

определены некоторыми функциями  $g = g(N_{\parallel}, N_{\perp})$  и  $f = f(N_{\parallel}, N_{\perp})$  считающих операторов (4.54). Коэффициентные функции фиксируются требованием того, чтобы

- (А) Генераторы  $\mathbb{L}$  и  $\mathbb{P}_A$  удовлетворяли коммутационным соотношениям алгебры  $o(2, 1)$  (4.58).

Оказывается, что выполнение последнего условия заставляет генераторы иметь следующие два свойства

- (В) Генераторы  $\mathbb{L}$  и  $\mathbb{P}_A$  сохраняют два условия неприводимости: они слабо коммутируют с весовым оператором  $N_{\parallel} - n$  и модифицированным следовым оператором  $\square_{\perp} - h$ , где  $n \in \mathbb{N}$  и  $h = h(N_{\parallel}, N_{\perp})$  это некоторый

считающий оператор, т.е.

$$(N_{\parallel} - n)F = 0 \quad \text{и} \quad (\square_{\perp} - h)F = 0. \quad (\Gamma.42)$$

Обозначая генераторы  $\mathbb{T}_A = (\mathbb{L}, \mathbb{P}_A)$  и операторы  $\mathbb{G} = (N_{\parallel} - n, \square_{\perp} - h)$ , получаем, что условие слабой коммутативности принимает вид

$$[\mathbb{T}_A, \mathbb{G}] \sim \mathbb{G}. \quad (\Gamma.43)$$

(С) Оператор Казимира  $\mathbb{C}_2 = \mathbb{L}^2 + \mathbb{P}_A \mathbb{P}^A$  диагонализуется на подпространстве, выделенном условиями неприводимости (Г.42).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} [Z_{\perp}^A, g] &= g' Z_{\perp}^A, \\ [\partial_{\perp}^A, g] &= \dot{g} \partial_{\perp}^A, \end{aligned} \quad (\Gamma.44)$$

где функции с точками и штрихами обозначают итоги коммутирования считающих функций соответственно с  $\partial_{\perp}$  и  $Z_{\perp}$ :

$$g'(N_{\parallel}, N_{\perp}) = g(N_{\parallel}, N_{\perp} - 1) - g(N_{\parallel}, N_{\perp}), \quad \dot{g}(N_{\parallel}, N_{\perp}) = g(N_{\parallel}, N_{\perp} + 1) - g(N_{\parallel}, N_{\perp}) \quad (\Gamma.45)$$

Далее, рассмотрим три условия, сформулированные выше.

- Требование (А) удовлетворяется при<sup>83</sup>

$$gf' - f\dot{g} = 1. \quad (\Gamma.46)$$

• Свойство (В) считающих операторов  $N_{\parallel} - n \approx 0$  (слабое равенство  $\approx$  означает, что наложены связи (Г.42)) удовлетворяется автоматически, т.к.  $N_{\parallel}$  коммутирует с любой  $Z_{\perp}^A$ -зависимой функцией, а  $Z_{\perp}^A$  входят в генераторы лишь через сам оператор  $N_{\parallel}$ . Для модифицированной следовой связи  $\square_{\perp} - h$  получаем  $[\mathbb{L}, \square_{\perp} - h] = 0$  и

$$\begin{aligned} [\mathbb{P}^A, \square_{\perp} - h] &= -2(g + \dot{g} + \ddot{g}) \partial_{\perp}^A - 2(\dot{g} + \ddot{g}) Z_{\perp}^A \square_{\perp} - (2\dot{f} + \ddot{f}) \partial_{\perp}^A \square_{\perp} \\ &\quad - gh' Z_{\perp}^A - f\dot{h} \partial_{\perp}^A. \end{aligned} \quad (\Gamma.47)$$

<sup>83</sup>В частности, данное условие демонстрирует почему коэффициентные функции выбраны независимыми от следовых операторов (4.54). В противном случае, первое условие накладывает связь, требующую чтобы частная комбинация следовых операторов действовала на произвольный элемент  $F(Z)$  тривиально. Такая связь выделяет некоторое подпространство, в котором коммутационные соотношения алгебры  $\mathfrak{o}(2, 1)$  замыкаются. С другой стороны, это противоречит требованию того, что генераторы (Г.41) замыкают  $\mathfrak{o}(2, 1)$  алгебру на произвольных элементах универсальной обертывающей  $U(\mathfrak{o}(2, 1))$ .

Для конкретных  $f, g$  правую часть этого соотношения можно сделать пропорциональной  $\square_{\perp} - h$ .

- Свойство (С) приводит к выражению

$$\mathbb{C}_2 = -[Z_{\perp}^2 - (f^2 + f\dot{f})] [\square_{\perp} - (g^2 + gg')] + \mathbb{E}, \quad (\text{Г.48})$$

где

$$\mathbb{E} = (f^2 + f\dot{f})(g^2 + gg') + (gf + gf')N_{\perp} + (fg + f\dot{g})(N_{\perp} + 2) + N_{\perp}^2 \quad (\text{Г.49})$$

зависит только от считающих операторов. Первая группа слагаемых в правой части (Г.48) должна слабо зануляться. Вид оператора Казимира (Г.48) подсказывает, что следовая связь должна быть вида  $\square_{\perp} - (g^2 + gg') \approx 0$ , а считающий член  $\mathbb{E}$  не должен зависеть от  $N_{\perp}$  (иначе,  $\mathbb{C}_2$  не диагонализуется после наложения следовых и весовых условий).

Предполагая, что коэффициентные функции являются степенными рядами по считающим операторам, их можно представить в виде

$$\begin{aligned} g &= g_0 + g_1 N_{\perp} + g_2 N_{\perp}^2 + \dots, \\ f &= f_0 + f_1 N_{\perp} + f_2 N_{\perp}^2 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{Г.50})$$

где коэффициенты разложения  $f_i = f_i(N_{\parallel})$  и  $g_j = g_j(N_{\parallel})$  зависят только от поперечного считающего оператора  $N_{\parallel}$ .

Далее, условие (Г.46) в каждом порядке по переменной  $N_{\perp}$  дает уравнение на  $g_i$  и  $f_k$ . Другими словами, есть одно алгебраическое соотношение на две функции. Частное решение фиксирует половину коэффициентов разложения  $f_i$  и  $g_j$ . Другая половина параметризует эквивалентные реализации  $o(2, 1)$  генераторов, т.к. такой произвол можно убрать линейной заменой базиса. Таким образом, одна из функций может быть выбрана произвольным образом, а другая фиксируется соотношением (Г.46). Удобным выбором является постоянная функция  $g$ , т.е.

$$g(N_{\parallel}, N_{\perp}) = \zeta, \quad \text{где } \forall \zeta \in \mathbb{C}. \quad (\text{Г.51})$$

Из (Г.45) следует, что все производные функции равны нулю:  $g' = 0$ ,  $\dot{g} = 0$ , и т.д. Следовательно, (Г.46) сводится к соотношению  $f' = \zeta^{-1}$ , которое может быть разрешено в виде

$$f = -\zeta^{-1} N_{\perp} + f_0, \quad (\text{Г.52})$$

где  $f_0 = f_0(N_{\parallel})$  произвольна, как следует из определения штриха ' в (Г.45). Также, из (Г.52) напрямую следует, что  $\dot{f} = -\zeta^{-1}$ ,  $f' = 0$ , и т.д.

Вид решения (Г.51) и оператора Казимира (Г.48) указывают на то, что следовое условие должно задаваться в виде

$$\square_{\perp} - \zeta^2 \approx 0, \quad (\text{Г.53})$$

т.е.  $h = \zeta^2$  это произвольная константа.<sup>84</sup> Тогда коммутатор (Г.47) кардинальным образом упрощается и приводит к требуемому соотношению

$$[\mathbb{P}^A, \square_{\perp} - \zeta^2] = -2g\partial_{\perp}^A - 2\dot{f}\partial_{\perp}^A\square_{\perp} = \frac{2}{\zeta}\partial_{\perp}^A(\square_{\perp} - \zeta^2) \approx 0, \quad (\text{Г.54})$$

означающему, что трансляции обладают хорошо определенным действием на подпространстве, выделяемом модифицированным следовым условием (Г.53).

Наконец, рассмотрим оператор Казимира (Г.48). Воспользовавшись следовым условием мы видим, что первый член зануляется. Тогда второй член  $\mathbb{E}$  (Г.49) должен давать требуемое собственное значение. Действительно, посредством (Г.51) и (Г.52) получаем  $\mathbb{E} = \zeta f_0 (\zeta f_0 + 1)$ . В итоге, находим, что собственное значение оператора Казимира на каждом подпространстве, выделяемом следовым условием  $\square_{\perp} \approx \zeta^2$  и считающим условием  $N_{\parallel} \approx n$ , запараметризованным  $n \in \mathbb{N}$ , имеет следующий вид

$$[\mathbb{C}_2]_n \approx \zeta f_0(n) (\zeta f_0(n) + 1). \quad (\text{Г.55})$$

Т.к. единственная инвариантная комбинация параметров это  $\zeta f_0$ , постоянную  $\zeta$  можно выбрать 1 или переопределением втянуть в  $f_0$  (выберем  $\zeta = 1$ ). Вспоминая, что значения оператора Казимира  $o(2, 1)$  запараметризованы как  $\Delta(\Delta - 1)$  и вводя для конформного веса обозначение  $\Delta(n)$ , находим

$$\Delta(n) = -f_0(n), \quad (\text{Г.56})$$

где  $f_0(n) = \alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \dots$  с произвольными коэффициентами  $\alpha_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Дуальный (теневого) вес равен  $\Delta(n) = f_0(n) + 1$ . Финальные выражения для твистованных  $o(2, 1)$  генераторов задаются (4.66).

<sup>84</sup>Таким способом мы приходим к модифицированному следовому условию (Г.53) того же вида, что в теории полей непрерывного спина (см. Главу 2).

# Приложение Д

## Д.1 Формализм мировых линий с угловым дефицитом

Здесь собраны основные формулы формализма мировых линий на пространстве с угловым дефицитом [137, 140]. Действие, построенное по метрике (5.26), имеет вид

$$S = \epsilon \int_{\lambda'}^{\lambda''} d\lambda \sqrt{\alpha^2 \sec^2 \rho \dot{t}^2 + \alpha^2 \tan^2 \rho \dot{\phi}^2 + \sec^2 \rho \dot{\rho}^2} . \quad (\text{Д.1})$$

Оно является репараметризационно-инвариантным и поэтому параметр эволюции может быть удобным образом выбран, чтобы собственная скорость была единична (условие нормировки). Отсюда следует, что лагранжева функция (Д.1) также единична,  $\alpha^2 \sec^2 \rho \dot{t}^2 + \alpha^2 \tan^2 \rho \dot{\phi}^2 + \sec^2 \rho \dot{\rho}^2 = 1$ , и действие является геодезической длиной сегмента с концевыми точками  $\lambda'$  и  $\lambda''$ . Выбирая сечение постоянного времени  $t = 0$  находим, что условие нормировки приводится к виду

$$\frac{p_\phi^2}{\alpha^2} \cot^2 \rho + \sec^2 \rho \dot{\rho}^2 = 1 , \quad (\text{Д.2})$$

где  $p_\phi$  – сохраняющийся угловой импульс, ассоциированный с циклической координатой  $\phi$ . Трюк состоит в том, что можно избежать явного решения геодезических уравнений движения, потому что условие нормировки (Д.2) достаточно для нахождения собственного параметра  $\lambda$  как функции радиуса и углового импульса. Из (Д.2) находим радиальную скорость

$$\dot{\rho} = \pm \cos \rho \sqrt{1 - \frac{p_\phi^2}{\alpha^2} \cot^2 \rho} . \quad (\text{Д.3})$$



Т.к.  $\dot{\rho} = d\rho/d\lambda$ , находим, что уравнение (Д.3) можно проинтегрировать и получить оншельное значение действия  $S$  на гиперболическом диске

$$S = \ln \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{1+\eta} + \sqrt{1-s^2\eta}} \Big|_{\eta'}^{\eta''}, \quad (\text{Д.4})$$

где  $\eta' = \cot^2 \rho'$  и  $\eta'' = \cot^2 \rho''$  – начальные/конечные радиальные положения. Здесь использован параметр  $s = |p_\phi|/\alpha$ , являющийся константой интегрирования, которая описывает форму геодезического сегмента, ср. (5.30).

Пользуясь определением  $p_\phi = g_{\phi\phi}\dot{\phi}$  и вспоминая, что угловые импульсы являются константами интегрирования, находим выражение для углового приращения геодезического сегмента

$$\Delta\phi = \pm \frac{p_\phi}{\alpha^2} \int_{\rho'}^{\rho''} \frac{d\rho \cos \rho}{\sin^2 \rho (1 - \frac{p_\phi^2}{\alpha^2} \cot^2 \rho)^{1/2}}. \quad (\text{Д.5})$$

Вычисление данного интеграла дает логарифмическое представление (5.59).

В качестве примера рассмотрим геодезическую между двумя граничными точками 0 и  $\phi$ . Воспользовавшись (Д.4) находим, что с точностью до граничного обрезания, геодезическая длина задается известным выражением  $S(\phi) = \ln \sin(\alpha\phi/2)$ . Угловая координата  $\phi$  изменяется от 0 до  $2\pi$  и геодезическая задается дугой, протянутой между граничными точками. Отметим, что функция  $S(\phi)$  периодична с периодом  $4\pi/\alpha$ , что больше периода угловой переменной  $\phi$ . Это приводит к интересному феномену т.н. «длинных геодезических», являющихся кривыми с двумя концевыми точками, наматывающихся на коническую сингулярность. В случае конифолда  $AdS_3/\mathbb{Z}_n$  они являются образами настоящих геодезических линий в  $AdS_3$  и вычисляют т.н. характеристику «вовлечения» (entwinement) [378].

## Д.2 Случай $n = 5$ : функций блока и длины

Приведенные ниже результаты для явных выражений функции 5-точечного блока и длины дуального геодезического графа взяты из работы [142]. Полученные выражения 5-точечного классического блока были также посчитаны в работе [140], в рамках AGT комбинаторного представления [159].

Разложение 5-точечного классического блока  $f(z)$  имеет вид

$$f(z) = f^{(0)}(z) + \epsilon_3 f^{(1)}(z) + \epsilon_3^2 f^{(2)}(z) + \epsilon_3^3 f^{(3)}(z) + \dots \quad (\text{Д.6})$$

Решая в рамках суперлегкого разложения акцессорные уравнения (5.25) (в данном случае 5-точечный классический блок рассматривается как слабая деформация 4-точечного классического блока, для которого известны точные выражения), можно найти коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= -2\epsilon_1 \ln \left[ \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \right] + \tilde{\epsilon}_1 \ln \left[ \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right] - \frac{\epsilon_1}{\alpha} \ln a, \quad f^{(1)} = -\ln \left[ \frac{a-b^2}{2\sqrt{ab}} \right] - \frac{1}{\alpha} \ln b, \\ f^{(2)} &= -\frac{(a+b^2)(a+a^2-4ab+b^2+ab^2)}{4\tilde{\epsilon}_1\sqrt{a}(a-b^2)^2}, \\ f^{(3)} &= \frac{(b-1)b(a-b)(a+b^2)(a+a^2-4ab+b^2+ab^2)}{2\tilde{\epsilon}_1^2(a-b^2)^4}, \end{aligned} \quad (\text{Д.7})$$

где  $a = (1-z_2)^\alpha$  и  $b = (1-z_3)^\alpha$ . Ведущий вклад  $f^{(0)}$  это 4-точечный классический блок в НЛ приближении [135, 137].

Аналогичное разложение имеет место для длины  $S(w)$  дуальной геодезической сети,

$$S(w) = S^{(0)}(w) + \epsilon_3 S^{(1)}(w) + \epsilon_3^2 S^{(2)}(w) + \epsilon_3^3 S^{(3)}(w) + \dots \quad (\text{Д.8})$$

Решая в рамках суперлегкого разложения импульсные уравнения (5.51), (5.54), (5.60), можно найти коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} S_0(\theta) &= -2\epsilon_1 \ln \sin \theta_2 + \tilde{\epsilon}_1 \ln \tan \frac{\theta_2}{2}, \quad S_1(\theta) = -\ln \sin(2\theta_3 - \theta_2), \\ S_2(\theta) &= -\frac{\cos \theta_2 + 2 \csc^2(\theta_2 - 2\theta_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) \sin \theta_3}{2\tilde{\epsilon}_1}, \\ S_3(\theta) &= -\frac{\cos \theta_2 + 2 \csc^2(\theta_2 - 2\theta_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) \sin \theta_3}{2\tilde{\epsilon}_1} \\ &\quad \times \frac{4 \csc^2(\theta_2 - 2\theta_3) \sin(\theta_2 - \theta_3) \sin \theta_3}{2\tilde{\epsilon}_1}, \end{aligned} \quad (\text{Д.9})$$

где параметризация  $\theta_2$  и  $\theta_3$  связана экспоненциальным отображением (5.63) с параметризацией точек конформного блока  $a$  и  $b$  как

$$a = \exp(-2i\theta_2), \quad b = \exp(-2i\theta_3). \quad (\text{Д.10})$$

Коэффициенты разложения длины (Д.9) связаны с коэффициентами разложения блока (Д.7) посредством общей формулы дуальности (5.65).

### Д.3 $sl(2, \mathbb{R})$ конечномерные модули

Коммутационные соотношения алгебры  $sl(2, \mathbb{R})$  имеют стандартный вид  $[J_m, J_n] = (m - n)J_{m+n}$ , где  $m, n = 0, \pm 1$ . Пусть  $\mathcal{V}_\Delta$  – модуль Верма веса  $\Delta$  (конформная размерность). Его реализация в терминах лестничных операторов

$$\begin{aligned} J_0|\Delta, n\rangle &= (\Delta + n)|\Delta, n\rangle, \\ J_1|\Delta, n\rangle &= \sqrt{n(2\Delta + n - 1)}|\Delta, n - 1\rangle, \\ J_{-1}|\Delta, n\rangle &= \sqrt{(n + 1)(2\Delta + n)}|\Delta, n + 1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{Д.11})$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  нумерует базисные векторы  $|\Delta, n\rangle$  и  $|\Delta, 0\rangle$  – вектор младшего веса в  $\mathcal{V}_\Delta$ . При отрицательных целых весах  $\Delta = -j$ , где  $j \in \mathbb{Z}_+/2$ , существует сингулярный вектор при  $n = -2\Delta + 1 \equiv 2j + 1$ . Соответствующий фактор-модуль  $\mathcal{D}_j = \mathcal{V}_\Delta/\mathcal{V}_{-\Delta+1}$  является неунитарным спин- $j$  представлением размерности  $2j + 1$ . Он образован векторами  $|\Delta, n\rangle$  с  $n = 0, 1, \dots, -2\Delta = 2j$ . Имея ввиду соотношение  $\Delta = -j$  будем называть  $j$  спином в противоположность (конформному) весу  $\Delta$ .

Стандартный базис в  $\mathcal{D}_j$  получается из (Д.11) переопределением базисных элементов и введением нового, «магнитного» параметра  $m = n - j$ , пробегающего значения  $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$ , так что соответствующие лестничные операторы теперь имеют вид

$$\begin{aligned} J_0|j, m\rangle &= m|j, m\rangle, \\ J_1|j, m\rangle &= i\sqrt{(m + j)(m - j - 1)}|j, m - 1\rangle \equiv M_-(j, m)|j, m - 1\rangle, \\ J_{-1}|j, m\rangle &= -i\sqrt{(m - j)(m + j + 1)}|j, m + 1\rangle \equiv M_+(j, m)|j, m + 1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{Д.12})$$

где также определены коэффициентные функции  $M_{\pm}(j, m)$ .

Скалярное произведение в  $\mathcal{D}_j$  определяется стандартным образом как  $\langle j, m | = |j, m\rangle^\dagger$ ,  $J_0^\dagger = J_0$ ,  $J_{\pm 1}^\dagger = J_{\mp 1}$ . Базис ортонормирован,  $\langle j_1, m_1 | j_2, m_2 \rangle = \delta_{j_1, j_2} \delta_{m_1, m_2}$ . Представление  $\mathcal{D}_j$  содержит вектора как младшего, так и старшего весов. Соответствующие условия имеют вид

$$\begin{aligned} \text{HW} : \quad & J_{-1}|j, j\rangle = 0, \quad J_0|j, j\rangle = j|j, j\rangle, \\ \text{LW} : \quad & J_1|j, -j\rangle = 0, \quad J_0|j, -j\rangle = -j|j, -j\rangle. \end{aligned} \tag{Д.13}$$

# Приложение Е

## Е.1 Доказательство Утверждения 6.2

**Низшие уровни.** Проанализируем зависимость от центрального заряда  $c$  первых двух коэффициентов блока (6.3). Коэффициент первого уровня не зависит от  $c$ , так что  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{L}_1 = \mathcal{F}_1$ , ср. (6.17). Явно вычислим коэффициент второго уровня

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 = \frac{1}{\langle \tilde{\Delta} | \mathcal{O}_\Delta | \tilde{\Delta} \rangle} & \left[ \langle \tilde{\Delta}, 0, 2 | \mathcal{O}_\Delta | 0, 2, \tilde{\Delta} \rangle B^{0,2|0,2} + \langle \tilde{\Delta}, 0, 2 | \mathcal{O}_\Delta | 1, 1, \tilde{\Delta} \rangle B^{1,1|0,2} \right. \\ & \left. + \langle \tilde{\Delta}, 1, 1 | \mathcal{O}_\Delta | 0, 2, \tilde{\Delta} \rangle B^{0,2|1,1} + \langle \tilde{\Delta}, 1, 1 | \mathcal{O}_\Delta | 1, 1, \tilde{\Delta} \rangle B^{1,1|1,1} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

где  $B^{M|N}$  – элементы обратной матрицы Грама, и  $|0, 2, \tilde{\Delta}\rangle = L_{-2}|\tilde{\Delta}\rangle$  и  $|1, 1, \tilde{\Delta}\rangle = L_{-1}^2|\tilde{\Delta}\rangle$ . Матрица Грама  $B$  и её обратная  $B^{-1}$  имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} + 4\tilde{\Delta} & 6\tilde{\Delta} \\ 6\tilde{\Delta} & 4\tilde{\Delta}(2\tilde{\Delta} + 1) \end{pmatrix}, \quad (\text{E.2})$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4\tilde{\Delta} + 2}{2\tilde{\Delta}c + c + 2\tilde{\Delta}(8\tilde{\Delta} - 5)} & -\frac{3}{2\tilde{\Delta}c + c + 2\tilde{\Delta}(8\tilde{\Delta} - 5)} \\ -\frac{3}{2\tilde{\Delta}c + c + 2\tilde{\Delta}(8\tilde{\Delta} - 5)} & \frac{c + 8\tilde{\Delta}}{4\tilde{\Delta}(2\tilde{\Delta}c + c + 2\tilde{\Delta}(8\tilde{\Delta} - 5))} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

Матричные элементы

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Delta}, 0, 2 | \mathcal{O}_\Delta | 0, 2, \tilde{\Delta} \rangle &= \left( 4\Delta(\Delta - 1) + (4\tilde{\Delta} + c/2) \right) \langle \tilde{\Delta} | \mathcal{O}_\Delta | \tilde{\Delta} \rangle, \\ \langle \tilde{\Delta}, 0, 2 | \mathcal{O}_\Delta | 1, 1, \tilde{\Delta} \rangle &= \left( 2(\Delta - 1)\Delta(\Delta + 1) + 6\tilde{\Delta} \right) \langle \tilde{\Delta} | \mathcal{O}_\Delta | \tilde{\Delta} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

$$\langle \tilde{\Delta}, 1, 1 | \mathcal{O}_\Delta | 1, 1, \tilde{\Delta} \rangle = 4\tilde{\Delta}(2\tilde{\Delta} + 1) \left[ 1 + \frac{(\Delta - 1)\Delta}{2\tilde{\Delta}} + \right. \quad (\text{E.5})$$

$$\left. + \frac{(\Delta - 1)\Delta(\Delta^2 - \Delta + 4\tilde{\Delta})}{4\tilde{\Delta}(2\tilde{\Delta} + 1)} \right] \langle \tilde{\Delta} | \mathcal{O}_\Delta | \tilde{\Delta} \rangle . \quad (\text{E.6})$$

Заметим, что последний матричный элемент пропорционален второму коэффициенту глобального блока (6.6). Т.к. любой коэффициент блока (6.3) может быть представлен как след матричного произведения, находим, что коэффициент второго уровня может быть представлен в виде

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{\langle \tilde{\Delta} | \mathcal{O}_\Delta | \tilde{\Delta} \rangle} \text{Tr} \begin{pmatrix} \mathcal{O}(c^1) & \mathcal{O}(c^0) \\ \mathcal{O}(c^0) & \mathcal{O}(c^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{O}(c^{-1}) & \mathcal{O}(c^{-1}) \\ \mathcal{O}(c^{-1}) & \mathcal{O}(c^0) \end{pmatrix} \quad (\text{E.7})$$

$$= \langle \tilde{\Delta}, 0, 2 | \mathcal{O}_\Delta | 0, 2, \tilde{\Delta} \rangle B^{0,2|0,2} + \langle \tilde{\Delta}, 1, 1 | \mathcal{O}_\Delta | 1, 1, \tilde{\Delta} \rangle B^{1,1|1,1} + \mathcal{O}(c^{-1}) .$$

В пределе  $c \rightarrow \infty$  коэффициент блока даётся суммой диагональных членов, а внедиагональные убывают как  $1/c$ . Получаем  $\lim_{c \rightarrow \infty} \mathcal{V}_2 \equiv \mathcal{L}_2 = 1 + \mathcal{F}_2$ . Таким образом, мы воспроизвели соотношение (6.19) при  $n = 0, 1, 2$ . Действительно,  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{F}_0 = 1$ ,  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{F}_1$ , и  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_0$ .

**Старшие уровни.** Теперь проанализируем общее поведение матрицы Грама и обратной к ней в пределе  $c \rightarrow \infty$ . Покажем, что ведущий вклад в определитель матрицы Грама (определитель Каца) и ведущий вклад в произведение диагональных элементов совпадают.

**Лемма Е.1.** Пусть  $B_{M|N}$  – элементы матрицы Грама  $B$ . Тогда

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\prod_M B_{M|M}}{\det B} = 1 , \quad (\text{E.8})$$

где  $\det B$  – определитель Каца.

Доказательство приведено в работе [175].

Пользуясь Леммой **Е.1** докажем, что коэффициенты разложения (6.3) имеют порядок  $\mathcal{O}(1/c^\alpha)$ , где  $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ , а члены порядка  $\mathcal{O}(c^0)$  появляются только из диагональных элементов обратной матрицы Грама  $B^{M|N}$  и матричного элемента примарного оператора  $\langle \tilde{\Delta}, M | \mathcal{O}_\Delta(z) | N, \tilde{\Delta} \rangle$ , т.е. когда  $M = N$ . Любые внедиагональные вклады спадают по меньшей мере как

$\mathcal{O}(1/c)$ . Следовательно, в пределе  $c \rightarrow \infty$  весь вклад идёт от диагональных элементов. См. обсуждение второго уровня (E.7).

Заметим, что элементы матрицы Грама и матричного элемента примарного оператора ведут себя одинаково по отношению к центральному заряду. Под этим подразумевается, что коммутационные соотношения примарных операторов с любыми генераторами Вирасоро не зависят от  $c$ , так что степенной закон  $c^\beta$ ,  $\beta = 0, 1, 2, \dots$  может появиться только при коммутации двух или более генераторов Вирасоро, ср. (6.20) и (6.21). Отсюда можно заключить, что оценка степеней центрального заряда в коэффициентах блока позволяет заменить матричные элементы примарного оператора на элементы матрицы Грама (ср. (E.2) и (E.4)).

Далее, рассмотрим элементы обратной матрицы Грама

$$B^{M|N} = \frac{A_{M|N}}{\det B}, \quad \det B = \sum_{|M|=|N|=n} (-)^{M+N} B_{M|N} A_{M|N}, \quad (\text{E.9})$$

где  $A$  – минор  $B$ . Пусть  $\mathcal{O}_{M|N}$  – краткое обозначение для нормализованного матричного элемента примарного оператора  $\frac{\langle \tilde{\Delta}, M | \mathcal{O}_\Delta(z) | N, \tilde{\Delta} \rangle}{\langle \tilde{\Delta} | \mathcal{O}_\Delta(z) | \tilde{\Delta} \rangle}$ . Тогда коэффициент блока (6.3) имеет вид

$$\mathcal{V}_n = \sum_M \frac{\mathcal{O}_{M|M} A_{M|M}}{\det B} + \sum_{M \neq N} \frac{\mathcal{O}_{M|N} A_{M|N}}{\det B}, \quad (\text{E.10})$$

где мы отделили диагональный вклад от внедиагональных. Похожим образом представим формулу для определителя (E.9) как  $\det B = \sum_M B_{M|M} A_{M|M} + \sum_{M \neq N} (-)^{M+N} B_{M|N} A_{M|N}$ . Пользуясь (E.8), приходим к выводу, что внедиагональный вклад в разложение определителя имеет меньший порядок по  $c$  чем диагональный вклад, в пределе  $c \rightarrow \infty$  равный  $\prod_M B_{M|M}$ .

Теперь мы можем показать, что внедиагональный вклад в (E.10) имеет порядок  $\mathcal{O}(1/c^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Сравнивая  $\mathcal{O}_{M|N} A_{M|N}$  в (E.10) с разложением определителя, вспоминая, что  $\mathcal{O}_{M|N}$  зависит от  $c$  так же, как  $B_{M|N}$ , и пользуясь Леммой **E.1**, заключаем, что  $\mathcal{O}_{M|N} A_{M|N}$  имеет меньший порядок по  $c$ , чем  $\det B$  и, таким образом, внедиагональный вклад всегда имеет порядок  $\mathcal{O}(c^0)$ , поскольку  $\mathcal{O}_{M|M} A_{M|M}$  имеет ту же степень по  $c$ , что и  $\prod_M B_{M|M}$ .

Наконец, можно явно вычислить диагональный вклад в (E.10). Действительно, из вышесказанного следует, что в пределе  $c \rightarrow \infty$  матрицу Грама можно взять диагональной и таким образом можно легко найти её обратную, которая также диагональна. В частности, находим, что  $B_{M|M} = \langle \tilde{\Delta}, M|M, \tilde{\Delta} \rangle = \gamma_M(c, s) \langle \tilde{\Delta} | L_1^s L_{-1}^s | \tilde{\Delta} \rangle$ , где  $\gamma_M(c, s)$  – некоторые ненулевые коэффициенты. Т.к.  $[\mathcal{O}_\Delta, L_m] = \mathcal{O}(c^0)$ , аналогично находим, что  $\mathcal{O}_{M|M} = \gamma_M(c, s) \langle \tilde{\Delta} | L_1^s \mathcal{O}_\Delta L_{-1}^s | \tilde{\Delta} \rangle$ . Подставляя эти выражения в (6.3) получаем коэффициент лёгкого блока на  $n$ -м уровне

$$\mathcal{L}_n(\Delta, \tilde{\Delta}) = \sum_{k=0}^n p_1(n-k) \mathcal{F}_k(\Delta, \tilde{\Delta}), \quad (\text{E.11})$$

где  $p_1(n-k)$  обозначает число разбиений  $n-k$ , не содержащих 1, при условии  $p_1(0) = 1$ , ср. (6.19). Коэффициенты  $p_1(n-k)$  указывают на число кет-векторов на уровне  $n$ , которые содержат  $k$  генераторов Вирасоро  $L_{-1}$ . Вспоминая, что глобальный блок задается выражением (6.4), и воспользовавшись соотношением (E.11), окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{1-q}{\varphi(q)} \mathcal{F}(\Delta, \tilde{\Delta} | q) &= p_1(0) + p_1(0) \mathcal{F}_1(\Delta, \tilde{\Delta}) q + \\ &+ (p_1(0) \mathcal{F}_2(\Delta, \tilde{\Delta}) + p_1(2) \mathcal{F}_0(\Delta, \tilde{\Delta})) q^2 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

что доказывает соотношение между лёгким и глобальным торическими блоками (6.18).