

На правах рукописи

Копьев Алексей Викторович

**Исследование статистических свойств тензора
градиентов скорости в изотропном несжимаемом
турбулентном потоке**

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН
Зыбин Кирилл Петрович

Официальные оппоненты: **Петросян Аракел Саркисович**,
доктор физ.-мат. наук, профессор,
Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт космических
исследований Российской академии наук,
заведующий сектора

Агафонцев Дмитрий Сергеевич,
кандидат физ.-мат. наук,
Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт океанологии им.
П.П. Ширшова Российской академии наук,
старший научный сотрудник

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего об-
разования «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова», На-
учно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

Защита состоится 18 февраля 2019 г. в 12 часов на заседании диссертаци-
онного совета Д 002.023.02 при Физическом институте им. П.Н. Лебедева
РАН по адресу: 119991, Москва, Ленинский проспект, д.53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического института
им. П.Н. Лебедева РАН или на сайте www.lebedev.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учрежде-
ния, просьба направлять по адресу: 119991, Москва, Ленинский проспект,
д.53, ученому секретарю диссертационного совета Д 002.023.02.

Автореферат разослан «__» _____ года.

Телефон для справок: +7 (499) 135-42-64.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.023.02,
доктор физ.-мат. наук

Истомин Яков Николаевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория изотропной турбулентности представляет значительный интерес и с точки зрения фундаментальной теории (исследование бесконечной цепочки уравнений Фрийдмана-Келлера, обоснование феноменологии из уравнений движения), и с точки зрения многочисленных приложений (моделирование подсеточной турбулентности в LES, решение астрофизических задач и др.). Получение результатов на каждом из этих направлений представляет значительный интерес. Исследованию части из перечисленных вопросов посвящена настоящая работа.

Целью данной работы является

1. Исследование особенностей статистики тензора скоростей деформации в изотропной турбулентности.
2. Развитие идеи линейного механизма вытягивания в теории турбулентности в рамках построения линейной стохастической модели для жидких частиц из инерционного интервала.
3. Вычисление смешанных корреляторов поля скорости и его градиентов необходимых для учета статистической асимметрии в задачах турбулентного транспорта.

Для достижения поставленной цели были решены следующие

задачи:

1. Аналитически исследована статистика тензора скоростей деформации в изотропном потоке с гауссовой статистикой скорости.
2. Исследована статистика тензора скоростей деформации в изотропном турбулентном потоке путем статистического анализа данных численных расчетов изотропной турбулентности.
3. Детально разработана модель, пригодная для описания раскручивания жидких частиц из инерционного интервала.
4. Произведено сравнение результатов существующих экспериментов и расчетов с предсказаниями разработанной модели.
5. Разработан метод вычисления членов разложения трехточечного коррелятора скорости в изотропной турбулентности.
6. Точно вычислены нетривиальные смешанные корреляторы в локально изотропной турбулентности.
7. Дополнены результаты аналитических расчетов смешанных корреляторов с помощью численных симуляций изотропной турбулентности.

Научная новизна:

1. Впервые обнаружено вырождение функции распределения тензора скоростей деформации и предложена ее двухпараметрическая аппроксимация.
2. Дано теоретическое объяснение эффекта раскручивания жидких частиц из инерционного интервала.

3. Впервые получены аналитические выражения для смешанных корреляторов скорости и градиента скорости.

Практическая значимость Поскольку в произвольном развитом турбулентном потоке вдали от стенок мелкомасштабные возмущения имеют универсальную локально изотропную структуру, результаты диссертации могут быть использованы для формулировки моделей подсеточной турбулентности в вычислительной гидродинамике и для решения астрофизических задач с турбулентной средой, в том числе для исследования генерации (динамо) магнитного поля.

Методология и методы исследования. Применялись аналитические и символьные расчеты, опирающиеся на уравнения динамики сплошной среды (Навье–Стокса). Исследовались методы работы с базами данных, позволивших проводить статистическую обработку данных симуляций изотропной турбулентности.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Обнаружено вырождение статистики тензора скоростей деформации в изотропном турбулентном потоке. Аналитически показано, что наличие вырождения означает универсальность функции распределения отношения собственных значений тензора скоростей деформации.
2. Найдена логнормальная двухпараметрическая аппроксимация статистики тензора скоростей деформации. Численно определены параметры аппроксимации и найдена их зависимость от числа Рейнольдса.
3. Разработана и аналитически проанализирована стохастическая модель возникновения вихревых структур в изотропном турбулентном потоке. В рамках разработанной модели показано, что линейные эффекты играют главную роль на начальной стадии образования интенсивных вихревых структур в мелкомасштабной турбулентности.
4. Предложен пертурбативный метод «кинематического» продолжения закона четырех пятых Колмогорова на трехточечную статистику. Посредством этого метода удалось ограничить количество неизвестных скалярных функций, от которых могут зависеть члены разложения трехточечного тензора скорости по расстоянию между двумя точками — до одной функции в первом члене и до четырех во втором члене. Неизвестные скалярные функции найдены численно.
5. Обнаружено, что для изотропного турбулентного потока, одна из введенных скалярных функций хорошо аппроксимируется константой, универсально зависящей только от плотности потока энергии ϵ .

Достоверность полученных теоретических результатов обеспечивается их сравнением с экспериментальными и численными данными. Результаты получены путем решения основополагающих уравнений Навье-Стокса, часть из которых находится в соответствии с результатами, полученными другими авторами. Численные результаты получались с использованием современных симуляций и согласуются с полученными ранее результатами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на астрофизических семинарах ОТФ ФИАН, на семинаре по механике многофазных сред НИИ механики МГУ, на различных сессиях и конференциях:

1. XXVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике (Москва, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 18-19 декабря 2017 г.)
2. XXIII Международная конференция «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Звенигород, 25 февраля – 4 марта 2018 г.)
3. Всероссийская конференция молодых учёных-механиков (Сочи, 4-14 сентября 2018 г.)
4. Пятая открытая всероссийская конференция по аэроакустике (Звенигород, 25-29 сентября 2017 г.)
5. 60-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 20-25 ноября 2017 г.)
6. 59-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 21-26 ноября 2016 г.)
7. 55-я научная конференция МФТИ (Долгопрудный, 19-25 ноября 2012 г.)

Личный вклад. Автор принимал активное участие в решении поставленных ему задач. Проводил аналитические выкладки, формулировал промежуточные модели и выполнял статистическую обработку данных численных симуляций.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 печатных изданиях [1–7], 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–3], 4 – в тезисах докладов [4–7].

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обзор научной литературы по тематике диссертационной работы, формулируются цели работы, ставятся задачи диссертации. Показаны научная новизна и практическая значимость работы.

Первая глава основана на публикации [1] и посвящена исследованию статистики тензора скоростей деформации в изотропной турбулентности. В данной главе обнаружены и проанализированы некоторые особенности распределения тензора скоростей деформации и его инвариантов для различных статистически изотропных несжимаемых течений.

В несжимаемом потоке тензор скоростей деформации является не только симметричным, но и бесследовым, поэтому он имеет 5 независимых элементов из 9. Для него имеется всего два независимых инварианта вращения, поскольку выбором трех элементов фиксируется система координат. В изотропном случае статистика тензора полностью определяется статистикой системы независимых инвариантов вращения. В главе рассматриваются три системы инвариантов: максимальное и минимальное собственные значения тензора λ_1 и λ_3 (они действительные, поскольку тензор скоростей деформации симметричен), след квадрата и след куба тензора, нормированные числовыми коэффициентами:

$$Q_S = -\frac{1}{2}\text{Tr}\mathbf{S}^2, \quad R_S = -\frac{1}{3}\text{Tr}\mathbf{S}^3,$$

а также их алгебраические комбинации ξ_+ и ξ_- , введенные в [1], в которых исследуемые особенности распределения тензора видны особенно явно:

$$\xi_+ = (-Q_S)^{3/2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S, \quad (1)$$

$$\xi_- = (-Q_S)^{3/2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}R_S. \quad (2)$$

Кроме того, исследуются нормированные собственные значения β и s :

$$s = \frac{-3\sqrt{6}\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}R_S}{2(-Q_S)^{3/2}}, \quad \beta = \frac{\sqrt{6}\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}.$$

В разделе 1.2 выведены аналитические соотношения, связывающие функции распределения компонент тензора и его различных инвариантов вращения в произвольном статистически изотропном потоке. Они составляют математическую основу главы. Ключевым в выводе соотношений является нахождение якобиана преобразования от компонент тензора скоростей деформации к его собственным значениям. Результат для этого якобиана имеется в литературе¹, однако, по-видимому, его роль при исследовании изотропной турбулентности была не замечена. Остальные якобианы считаются сравнительно просто. Наиболее интересным является соотношение, выражающее функцию распределения компонент тензора

¹Мета, М. Л. Случайные матрицы / М. Л. Мета. — Москва : МЦНМО, 2012. — 648 с.

скоростей деформации f_S (пяти переменных) через функцию распределения $f_{Q_S R_S}$ инвариантов Q_S и R_S (двух переменных):

$$f_S(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}) = \frac{1}{2\pi^2} f_{Q_S R_S} \left(-\frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji}, -\frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \right), \quad (3)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование с учетом симметричности $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и бесследовости $\sigma_{33} = -\sigma_{11} - \sigma_{22}$. Несмотря на нелинейность зависимости инвариантов Q_S и R_S от компонент тензора, их функции распределения связаны простой заменой переменных и домножением на нормировочный постоянный множитель.

В **разделе 1.3** производится аналитическое исследование статистики тензора скоростей деформации в случае обратимой статистики поля скорости. Показана вырожденность (или квазиодномерность) обратимой статистики в инвариантах ξ_+ и ξ_- : функция распределения этих инвариантов зависит только от их полусуммы. На основании этого доказано, что для любых статистически обратимых распределений поля скорости распределения нормированных собственных значений β и s универсальны, причем распределение s однородно. Последнее обобщает предыдущие численные расчеты для частного случая гауссового поля скорости². Наконец, найдены распределения инвариантов тензора скоростей деформации в случае гауссового поля скорости. Например на рисунке 1а изображена функция распределения ξ_+ и ξ_- и тем самым проиллюстрирована квазиодномерность распределения инвариантов ξ_+ и ξ_- для обратимой статистики поля скорости.

В центральном в главе **разделе 1.4** произведен численный анализ турбулентной статистики тензора скоростей деформации с использованием двух численных расчетов, представленных в открытом доступе в форме базы данных университетом Джона Хопкинса^{3,4}. В диссертации для краткости первый расчет называется **ЖТДВ_1**, а посчитанные с его помощью распределения инвариантов «ЖТДВ»-распределениями; второй расчет называется **ЖТДВ_2**. Параметры расчета **ЖТДВ_1**: $Re_\lambda \simeq 430$, $\eta/L \simeq 2 \times 10^{-3}$, а **ЖТДВ_2**: $Re_\lambda \simeq 610$, $\eta/L \simeq 10^{-3}$, где Re_λ — число Рейнольдса на масштабе Тейлора, η — колмогоровский масштаб диссипации, а L — интегральный масштаб накачки.

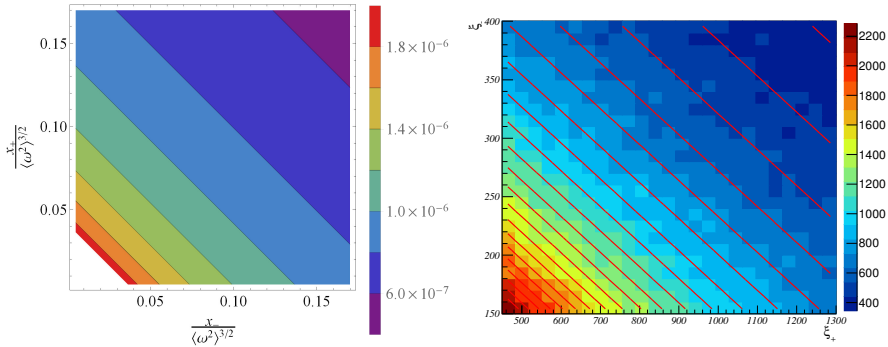
В **разделе 1.4.2** обнаружена квазиодномерность функции распределения инвариантов ξ_+ и ξ_- также как и в гауссовом случае (см. рис. 1б). Однако ввиду необратимости турбулентной статистики, функция распределения зависит не от полусуммы этих инвариантов, а от другой линейной комбинации. Рассмотрена линейная комбинация общего вида:

$$\xi_a = \frac{1+a}{2} \xi_+ + \frac{1-a}{2} \xi_-, \quad (4)$$

²Lund, T. S. An improved measure of strain state probability in turbulent flows / T. S. Lund, M. M. Rogers // Phys. Fluids. — 1994. — Vol. 6, no. 5. — P. 1839.

³<https://doi.org/10.7281/T1KK98XB> — ЖТДВ_1, «ЖТДВ»-распределение

⁴<https://doi.org/10.7281/T1DN4363> — ЖТДВ_2



- а) Функция распределения ξ_+ и ξ_- в гауссовом поле скорости (аналитический расчет)
- б) Гистограмма ξ_+ и ξ_- в «JHTDB»-распределении (статистический анализ)

Рис. 1 — Линии уровня инвариантов ξ_+ и ξ_- в гауссовом (рис. 1а) и турбулентном (рис. 1б) полях скорости, отражающие квазиодномерность функций распределения в этих инвариантах. Белая область на рис. 1а соответствует особенности функции распределения в нуле в гауссовом поле скорости. Оси на рис. 1а обезразмерены делением на $\langle \omega^2 \rangle^{3/2}$

Красные линии на рис. 1б отражают симметрию. Масштабы горизонтальной и вертикальной осей на рис. 1б различные, то есть линии симметрии скошены к горизонтали.

где параметр $a \in (-1; 1)$ назван параметром симметрии. В гауссовом случае параметр симметрии равен нулю. В разделе 1.4.3 показано, что при наличии симметрии распределения инвариантов ξ_+ и ξ_- нормированные собственные значения β и s распределены универсально: их форма зависит только от параметра симметрии a , то есть не зависит явно от распределения ξ_a . Это позволяет предложить метод определения параметра симметрии с высокой точностью. Для «JHTDB»-распределения имеем

$$a \simeq -0.53. \quad (5)$$

Более того, поскольку функции распределения нормированных собственных значений, посчитанные и измеренные ранее в ряде различных турбулентных течений^{напр., 2, 5, 6} количественно повторяют друг друга, выдвинуто предположение о возможной универсальности параметра симметрии.

⁵She, Z.-S. Structure and dynamics of homogeneous turbulence: models and simulations / Z.-S. She, E. Jackson, S. A. Orszag // Proc. R. Soc. Lond.A. — 1991. — Vol. 434. — P. 101.

⁶Buxton, O. R. H. The effects of resolution and noise on kinematic features of fine-scale turbulence / O. R. H. Buxton, S. Laizet, B. Ganapathisubramani // Exp. Fluids. — 2011. — Vol. 51, no. 5. — P. 1417.

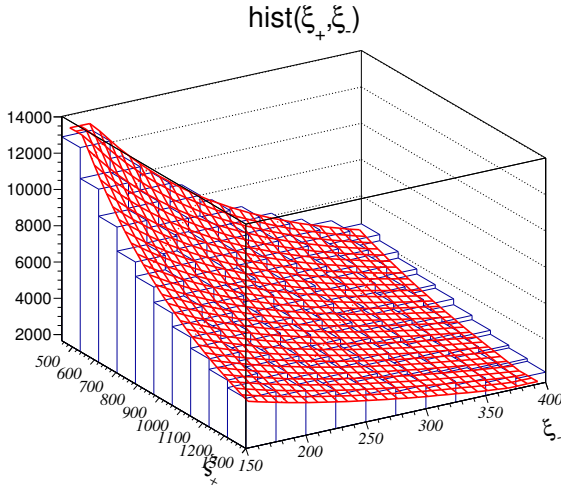


Рис. 2 — Сравнение гистограммы ξ_+ и ξ_- «ЖНТДВ-распределения» (синие колонки) и найденной аппроксимации с параметрами соответствующими «ЖНТДВ-распределению» (красная поверхность).

В **разделе 1.4.6** найдена двухпараметрическая логнормальная аппроксимация распределения тензора скоростей деформации и, исходя из мультифрактальной модели⁷, на основании расчета⁸ исследована зависимость параметров аппроксимации от числа Рейнольдса. В результате найденная аппроксимация зависит только от мощности диссипации ϵ , кинематической вязкости ν и числа Рейнольдса на масштабе Тейлора Re_λ . Для «ЖНТДВ»-распределения сравнение реальной статистики с ее аппроксимацией в инвариантах ξ_+ и ξ_- представлено на рисунке 2. В инвариантах Q_S и R_S (наиболее просто связанных с функцией распределения компонент тензора) найденная аппроксимация записывается следующим образом:

$$f_{Q_S R_S}(q, r) \simeq \frac{0.36 \sqrt{\epsilon/\nu}}{Re_\lambda^{1/12} \sqrt{\ln Re_\lambda}} (-q)^{1/2} \left((-q)^{3/2} - 1.43r \right)^{-7/3} \times \exp \left[-\frac{1}{\ln Re_\lambda} \left(\ln \frac{(-q)^{3/2} - 1.43r}{0.2\epsilon/\nu} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Наконец, в **разделе 1.4.7** обнаружено, что для небольшой области малоинтенсивных пульсаций параметр симметрии начинает зависеть

⁷ Фриш, У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова / У. Фриш. — Москва : ФАЗИС, 1998. — 343 с.

⁸ Ishihara, T. Study of high-Reynolds number isotropic turbulence by direct numerical simulation / T. Ishihara, T. Gotoh, Y. Kaneda // Annu. Rev. Fluid Mech. — 2009. — Vol. 41. — P. 165–80.

от интенсивности пульсаций и для совсем малоинтенсивных пульсаций становится равным нулю. Это явление связывается со статистической обратимостью крупномасштабной накачки, увлекающей за собой малоинтенсивные пульсации.

В **разделе 1.5** кратко сформулированы основные результаты и выводы первой главы.

Вторая глава основана на публикации [2], в ней линейный механизм модели вытягивающихся вихрей⁹ используется для формулировки стохастической модели турбулентного раскручивания жидких частиц (макроскопических объемов жидкости), размер которых лежит в инерционном интервале масштабов. Экспериментально и численно явление раскручивания (пируэт-эффект) было исследовано в работе¹⁰. В этой работе показано, что на малых временах в типичной реализации эксперимента наблюдается уменьшение угла между векторами крупномасштабной (осредненной по объему) завихренности жидкой частицы и собственным вектором (с максимальным собственным числом) крупномасштабного тензора скоростей деформации жидкой частицы. При этом векторы рассматриваются в разные моменты времени: $\mathbf{\Omega}(t)$ — текущий вектор крупномасштабной завихренности, $\mathbf{e}_1(0)$ — собственный вектор крупномасштабного тензора скоростей деформации в начале измерения. Таким образом, усредненный по ансамблю реализаций квадрат косинуса угла между векторами $\mathbf{\Omega}(t)$ и $\mathbf{e}_1(0)$:

$$\alpha_t^2 = \left\langle \left(\frac{\mathbf{\Omega}(t)}{|\mathbf{\Omega}(t)|}, \mathbf{e}_1(0) \right)^2 \right\rangle$$

нарастает со временем. Следует отметить, что качественно этот эффект является следствием теоремы Гельмгольца, однако для количественных оценок α_t^2 , полученных в главе, требуется более детальное рассмотрение динамики системы. Описанное выравнивание $\mathbf{\Omega}(t)$ и $\mathbf{e}_1(0)$ выполняется вплоть до времени порядка времени оборота наиболее крупных вихрей в потоке, после чего наблюдается ожидаемый спад α_t^2 до изотропного значения $1/3$.

Также можно исследовать два других угла в собственном базисе, для которых вводятся аналогичные величины¹¹:

$$\beta_t^2 = \left\langle \left(\frac{\mathbf{\Omega}(t)}{|\mathbf{\Omega}(t)|}, \mathbf{e}_2(0) \right)^2 \right\rangle, \quad \gamma_t^2 = \left\langle \left(\frac{\mathbf{\Omega}(t)}{|\mathbf{\Omega}(t)|}, \mathbf{e}_3(0) \right)^2 \right\rangle,$$

⁹Зыбин, К. П. Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности / К. П. Зыбин, В. А. Сирота // УФН. — 2015. — Т. 185, No 6. — С. 593—612.

¹⁰Xu, H. The pirouette effect in turbulent flows / H. Xu, A. Pumir, E. Bodenschatz // Nat. Phys. — 2011. — No. 7. — P. 709—12.

¹¹Pumir, A. Tetrahedron deformation and alignment of perceived vorticity and strain in a turbulent flow / A. Pumir, E. Bodenschatz, H. Xu // Phys. Fluids. — 2013. — Vol. 25. — P. 035101.

где $\mathbf{e}_3(0)$ — собственный вектор с минимальным собственным значением, а $\mathbf{e}_2(0)$ — с промежуточным.

В главе посчитаны дальняя и ближняя асимптотика α_t^2 , β_t^2 и γ_t^2 в рамках линейной стохастической модели, в которой динамика крупномасштабной завихренности определяется обычным уравнением Гельмгольца:

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \Sigma(t)\Omega(t), \quad (7)$$

где $\Sigma(t)$ — крупномасштабный тензор скоростей деформации, который более того считается статистически независимым с $\Omega(t)$. Основаниями для этих предположений являются следующие результаты:

1. В работе Зыбина и др.¹² показано отсутствие самодействия вихря, то есть несущественность влияния мелкомасштабных пульсаций, создаваемых самим вихрем, на динамику его завихренности.
2. В работах Гамлингтона и др.^{13,14} численно показано, что крупномасштабные пульсации воздействуют на вихревую структуру линейно, то есть не испытывая обратного влияния. Физически это можно объяснить наличием потока энергии с больших масштабов в меньшие. Таким образом динамика больших масштабов определяет динамику меньших и, напротив, динамика малых масштабов незначительно сказывается на динамике больших.
3. Как показывают расчеты Хименеца и др.¹⁵, для относительно малых жидких частиц крупномасштабная завихренность $\Omega(t)$ определяется наиболее интенсивной вихревой структурой внутри жидкой частицы. Поэтому мелкомасштабные пульсации, создаваемые этой вихревой структурой внутри жидкой частицы, не влияют и на крупномасштабную завихренность $\Omega(t)$ всей частицы, а крупномасштабные пульсации воздействуют на нее линейно.

Таким образом, в уравнении (7) на динамику крупномасштабной завихренности, выведенного в **разделе 2.2**, $\Sigma(t)$ является внешним источником. Это уравнение играет роль уравнения Ланжевена в рассматриваемой системе. Источник считается гауссовым, что является упрощением, так как турбулентное движение известно своей негауссовостью. Однако это позволяет, применяя математический аппарат теории случайных процессов,

¹²Генерация мелкомасштабных структур в развитой турбулентности / К. П. Зыбин [и др.] // ЖЭТФ. — 2007. — Т. 132, 2 (8). — С. 510–23.

¹³Hamlington, P. E. Local and nonlocal strain rate fields and vorticity alignment in turbulent flows / P. E. Hamlington, J. Schumacher, W. J. A. Dahm // Phys. Rev. E. — 2008. — Vol. 77. — P. 026303.

¹⁴Hamlington, P. E. Direct assessment of vorticity alignment with local and nonlocal strain rates in turbulent flows / P. E. Hamlington, J. Schumacher, W. J. A. Dahm // Phys. Fluids. — 2008. — Vol. 20. — P. 111703.

¹⁵The structure of intense vorticity in isotropic turbulence / J. Jimenez [et al.] // J. Fluid Mech. — 1993. — Vol. 255. — P. 65–90.

оценить количественные характеристики пирует-эффекта в линейной стохастической модели. Поскольку найденная асимптотика зависимости от времени коррелятора α_t^2 согласуется с экспериментальными и численными результатами, то это дает основание полагать, что негауссовость не играет существенной роли в рассматриваемом эффекте.

В разделе 2.3 исследуется поведение корреляторов α_t^2 , β_t^2 и γ_t^2 в изотропной дельта-коррелированной гауссовой модели на больших временах и получено их экспоненциальное затухание в согласии с^{10,11}. В разделе 2.4 разрабатывается естественная гауссова дельта-коррелированная стохастическая модель тензора скоростей деформации для рассмотрения эффекта не только в пределе больших времен. В разделе 2.5 приведен анализ поведения корреляторов α_t^2 , β_t^2 и γ_t^2 в построенной стохастической модели тензора скоростей деформации на малых временах и получены выражения для линейной асимптотики поведения корреляторов от времени. Показывается, что в построенной теоретической модели нарастание коррелятора α_t^2 (пирует-эффект) определяется только средним значением квадрата завихренности в потоке, что означает универсальный рост коррелятора, наблюдаемый в¹⁰:

$$\alpha_t^2 \simeq 0.350 + 0.36t/t_0. \quad (8)$$

Наконец, в разделе 2.6 сформулированы основные результаты и выводы главы.

Третья глава основана на публикации [3] и посвящена выводу новых нетривиальных корреляторов в изотропной турбулентности разработанным методом кинематического продолжения законов Колмогорова¹⁶:

$$\begin{aligned} \langle \delta v_L^3 \rangle &= -\frac{4}{5}\epsilon b + 6\nu \langle \delta v_L^2 \rangle' \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} -\frac{4}{5}\epsilon b, \\ \langle \delta v_L \delta v_T^2 \rangle &= -\frac{4}{15}\epsilon b + \nu (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \langle \delta v_L^2 \rangle'') \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} -\frac{4}{15}\epsilon b, \end{aligned}$$

где δv_L и δv_T — составляющие вектора разницы скоростей $\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{b}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ вдоль и поперек вектора \mathbf{b} соответственно. Предел $\nu \rightarrow 0$ соответствует большим числам Рейнольдса, которые согласно колмогоровской теории¹⁷ достигаются в инерционном интервале масштабов. Разработанный метод является кинематическим в том смысле, что в нем не используются какие-либо другие следствия уравнений движения, кроме самих законов Колмогорова. Полученные нетривиальные соотношения проверены с использованием баз данных Джона Хопкинса^{3,4} методом

¹⁶ Колмогоров, А. Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности / А. Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 32, № 1. — С. 19—21.

¹⁷ Колмогоров, А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса / А. Н. Колмогоров // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 30, № 4. — С. 299—303.

обработки, рассмотренным в **разделе 3.2**. Результаты обработки для колмогоровских законов представлены на рисунках 3а и 3б.

В **разделах 3.3 и 3.4** представлен метод кинематического продолжения, основанный на разложении трехточечного тензора скорости по малому вектору и применении к членам разложения условий несжимаемости и изотропии. Оказывается, что третьи смешанные корреляторы скорости и тензора градиентов скорости $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ выражаются через эти члены разложения.

В **разделе 3.5** метод кинематического продолжения применен к первому порядку разложения тензора, который уменьшает произвол в выборе возможных тензорных поправок до одной скалярной функции. Тем не менее, два независимых смешанных коррелятора от нее не зависят и для них получены новые точные законы «восьми пятнадцатых»:

$$\langle \delta v_L^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle = -\frac{8}{15} \epsilon + 4\nu \langle \delta v_L^2 \rangle'' , \quad (9)$$

$$\langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle = -\frac{8}{15} \epsilon + \frac{2\nu}{b} (\langle \delta v_L^2 \rangle' + b \langle \delta v_L^2 \rangle'') , \quad (10)$$

где $\bar{\delta} \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{b}, t) + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Выполнение этих законов проиллюстрировано на рисунках 3в и 3г. Остальные смешанные корреляторы первого порядка выражаются дополнительно через скалярную функцию, которая обозначена $d(b)$. В **разделе 3.5.2** показано, что функция $d(b)$ не может быть определена из динамики парных корреляторов. Поэтому она выражена через корреляторы и определена численно. Для $d(b)$ и ее производной выведены независимые соотношения:

$$d(b) = \frac{1}{4} \langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{LL} \rangle + \frac{1}{8} \langle \delta v_T^2 \bar{\delta} A_{TT} \rangle , \quad (11)$$

$$d'(b) = -\frac{1}{4} \Delta_{\langle T(L,L)(T,L) \rangle} - \frac{1}{32} \Delta_{\langle L(L,T)(L,T) \rangle} - \frac{1}{16} \Delta_{\langle L(L,L)(L,L) \rangle} , \quad (12)$$

где введены новые обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta_{\langle i(j,l)(k,m) \rangle} &= \langle \delta v_i \delta A_{jl} \delta A_{km} \rangle - \langle \delta v_i \bar{\delta} A_{jl} \bar{\delta} A_{km} \rangle = \\ &= 4(\langle A_{jl}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) v_i(\mathbf{r}) A_{km}(\mathbf{r}) \rangle + \langle A_{km}(\mathbf{r} + \mathbf{b}) v_i(\mathbf{r}) A_{jl}(\mathbf{r}) \rangle) . \end{aligned}$$

Из рисунков 3д и 3е видно, что $d(b)$ хорошо аппроксимируется в инерционном интервале постоянным значением $-\frac{2}{15} \epsilon$.

$$d(b) \simeq -\frac{2}{15} \epsilon . \quad (13)$$

Показательно, что $d'(b)$ с хорошей точностью зануляется в инерционном интервале. Множитель $-2/15$ в аппроксимации (13) выбран в духе точных законов Колмогорова, а также выведенных соотношений (9) и (10),

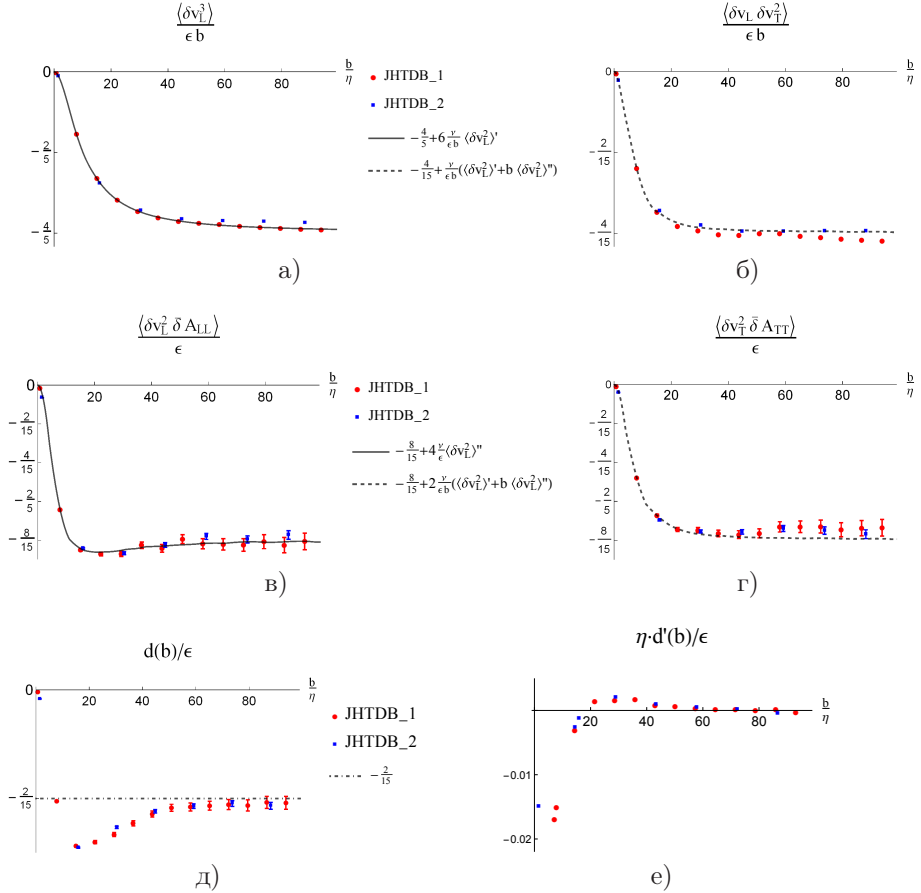


Рис. 3 — Численные расчеты зависимостей различных корреляторов от расстояния между точками из баз данных университета Джона Хопкинса. Над каждой картинкой указано какая величина рассчитывалась и отмечалась на графике (красными кружками или синими квадратиками в зависимости от базы данных). Метод вычисления погрешностей для рисунков 3в, 3г, 3д, 3е изложен в приложении А.

в которых множители содержат целое число пятнадцатых долей. Таким образом, удастся предложить универсальный теоретический предел для этой функции при больших числа Рейнольдса и выразить все смешанные корреляторы первого порядка в инерционном интервале через ϵ :

$$\langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{b}) A_{jl}(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r}) \rangle \simeq \frac{\epsilon}{30} (8\delta_{ij}\delta_{kl} - 5\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} - 4n_i n_j \delta_{kl} + 4n_i n_k \delta_{jl} + 8n_j n_l \delta_{ik} - 8n_k n_l \delta_{ij}), \quad (14)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{b}/b$, а δ_{ij} — символ Кронекера. Полученный коррелятор в перспективе позволит рассчитать влияние статистической асимметрии поля скорости в задачах турбулентного транспорта. В значительной части работ, посвященных данной проблеме, вычисления выполняются в гауссовом случае, причем считается, что качественно результаты от статистики не зависят¹⁸. Однако поскольку асимметрия гауссового поля равна нулю, негауссовость реального поля скорости может оказаться существенной в этих вопросах¹⁹. Например, в гауссовой модели кинематического динамо Казанцева-Крайчнана^{20,21} крупномасштабное динамо отсутствует, что может быть проявлением отсутствия асимметрии у гауссового поля скорости.

В **разделе 3.6** произведен довольно громоздкий анализ второго члена разложения трехточечного тензора скорости по малому вектору. Показано, что он дополнительно выражается через четыре скалярные функции, которые определены численно аналогично тому, как определена $d(b)$.

Основные результаты и выводы главы сформулированы в **разделе 3.7**.

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Выведены общие аналитические соотношения между функциями распределения различных инвариантов вращения тензора справедливые для любых несжимаемых изотропных стохастических потоков. Обнаружены инварианты, для которых распределение является квази-одномерным в случае статистически обратимого поля скорости (аналитический результат) и в случае турбулентного поля скорости (численный результат). Аналитически исследована статистика тензора скоростей деформации в изотропном потоке с гауссовой статистикой поля скорости. Найдена логнормальная двухпараметрическая аппроксимация статистики тензора в изотропном турбулентном потоке. Определена зависимость параметров аппроксимации от числа Рейнольдса. Обнаружено, что для малоинтенсивных турбулентных пульсаций (менее 1% от общего распределения) присутствует сторонняя обратимая статистика, связанная с крупномасштабной накачкой энергии.

¹⁸ Falkovich, G. Particles and fields in fluid turbulence / G. Falkovich, K. Gawedski, M. Vergassola // Rev. Mod. Phys. — 2001. — Vol. 73. — P. 913–975.

¹⁹ Vyn, A. S. Small-scale turbulent magnetic field: Growth vs. decay / A. S. Vyn, V. A. Sirota, K. P. Zybin // Europhysics Letters. — 2018. — Vol. 121. — P. 34002.

²⁰ Казанцев, А. П. Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью / А. П. Казанцев // Ж. экп. теор. физ. — 1967. — Т. 53, No 5. — С. 1806–13.

²¹ Kraichnan, R. H. Growth of turbulent magnetic fields / R. H. Kraichnan, S. Nagarajan // Phys. Fluids. — 1967. — Vol. 10. — P. 859.

2. Разработана и аналитически проанализирована стохастическая модель возникновения вихревых структур в изотропном турбулентном потоке. Показано, что крупномасштабный тензор скоростей деформации жидкой частицы можно считать внешним источником для динамики крупномасштабной завихренности. С применением такой модели в дельта-коррелированном гауссовом приближении аналитически исследовано поведение направления завихренности в лагранжевой системе отсчета. Произведено сравнение результатов существующих экспериментов и расчетов с предсказаниями модели и получено их удовлетворительное согласие. Показано, что линейные эффекты, возможно, играют главную роль на начальной стадии образования интенсивных вихревых структур в мелкомасштабной турбулентности.
3. Предложен пертурбативный метод «кинематического» продолжения закона четырех пятых Колмогорова на трехточечную статистику. Посредством этого метода сильно ограничено количество неизвестных скалярных функций, от которых могут зависеть первые два члена разложения трехточечного тензора по расстоянию между двумя точками — до одной функции в первом члене и до четырех во втором члене. Неизвестные скалярные функции определяются численно. На основании сравнения численных данных двух различных симуляций изотропного турбулентного потока обнаружено, что скалярная функция из первого члена разложения является универсальной константой, зависящей только от плотности потока энергии ϵ . Найдено выражение в инерционном интервале изотропной турбулентности для одномоментного третьего смешанного коррелятора скорости, взятой в одной точке, и скорости и градиента скорости, взятых в другой точке.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях, удовлетворяющих требованиям ВАК

1. *Копьев, А. В.* Degeneracy of velocity strain-rate tensor statistics in random isotropic incompressible flows / А. В. Копьев // Phys. Rev. Fluids. — 2018. — Vol. 3. — P. 024603.
2. *Зыбин, К. П.* К вопросу о модели возникновения вихревых структур в изотропном турбулентном потоке / К. П. Зыбин, А. В. Копьев // Изв. РАН. МЖГ. — 2018. — Т. 4. — С. 39–56.
3. *Копьев, А. В.* Exact result for mixed triple two-point correlations of velocity and velocity gradients in isotropic turbulence / А. В. Копьев, К. Р. Зыбин // Journal of Turbulence. — 2018. — Vol. 19, no. 9. — P. 717—730.

В сборниках трудов конференций

4. *Копьев, А. В.* XXVI Научная сессия Совета РАН по нелинейной динамике / А. В. Копьев // Краткие аннотации выступлений. — 2017.
5. *Копьев, А. В.* Материалы XXIII Международной конференции «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» / А. В. Копьев, К. П. Зыбин // Тезисы докладов. — 2018.
6. *Копьев, А. В.* Всероссийская конференция молодых ученых-механиков / А. В. Копьев, К. П. Зыбин // Тезисы докладов. — 2018.
7. *Копьев, А. В.* Пятая открытая всероссийская конференция по аэроакустике / А. В. Копьев // Тезисы докладов. — 2018.

Копьев Алексей Викторович

Исследование статистических свойств тензора градиентов скорости в
изотропном несжимаемом турбулентном потоке

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 04.12.2018. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____