

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Физический институт им. П. Н. Лебедева

Российской академии наук

На правах рукописи

Грудцын Яков Викторович

**САМОСОКРАЩЕНИЕ ФЕМТОСЕКУНДНЫХ ИМПУЛЬСОВ В ТОНКОМ  
КВАРЦЕ В РЕЖИМЕ МНОЖЕСТВЕННОЙ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ  
САМОФОКУСИРОВКИ**

Специальность: 01.04.21 – Лазерная физика

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

кандидат физико-математических наук

Михеев Леонид Дмитриевич

Научный консультант

доктор физико-математических наук

Трофимов Вячеслав Анатольевич

Москва – 2018

# Содержание

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Описание численной модели.....</b>	<b>14</b>
1.1 Теоретическая модель.....	14
1.2 Реализация алгоритма.....	19
1.3 Выбор материальных констант.....	20
1.4 Основные результаты главы 1 .....	24
<b>Глава 2. Экспериментальная установка .....</b>	<b>25</b>
2.1 Твердотельный комплекс .....	25
2.2 Приборы .....	27
2.3 Основные результаты главы 2 .....	32
<b>Глава 3. Измерение нелинейного коэффициента преломления и четырёхфотонного коэффициента поглощения.....</b>	<b>33</b>
3.1 Измерение нелинейного показателя преломления в кварце марки КУ 1.....	33
3.2 Измерение четырёхфотонного поглощения в кварце марки КУ 1 .....	38
3.3 Основные результаты главы 3 .....	47
<b>Глава 4. Сокращение длительности импульсов .....</b>	<b>48</b>
4.1 Измерения длительности, спектра и профиля при взаимодействии отрицательно chirпированного излучения с пластинками кварца КУ.....	48
4.2 Расчёты взаимодействия отрицательно chirпированного импульса.....	53
4.3 Взаимодействие спектрально-ограниченного излучения с пластинками кварца КУ и формирование мелкомасштабной неустойчивости.....	55
4.3.1 Экспериментальная схема.....	55
4.3.2 Результаты .....	58
4.3.3 Обсуждение формирования мелкомасштабной неустойчивости и сокращения длительности.....	61
4.4 Расчёты эволюции одиночного возмущения при высоких значениях В интеграла. Формирование спектра рассеянного излучения. ....	67
4.5 Основные результаты главы 4 .....	76
<b>Заключение .....</b>	<b>77</b>

<b>Приложение А .....</b>	<b>80</b>
<b>Приложение В.....</b>	<b>94</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>97</b>

## Введение

### Актуальность проблемы

В настоящее время поиск новых методов сокращения длительности оптических импульсов является важным направлением в нелинейной оптике. Импульсы с длительностью вплоть до нескольких колебаний световой волны представляют интерес для применений в различных областях фундаментальных и прикладных исследований, включая спектроскопию высокого временного разрешения [1], ускорение протонов до энергии порядка ГэВ [2], генерацию терагерцовых импульсов гигаваттного уровня мощности [3] и аттосекундных импульсов в ультрафиолете и мягком рентгене [4]. Двухпериодные импульсы перспективны для получения изолированных аттосекундных импульсов [5].

С момента появления первых лазеров в 1960 г. [6] достигнут существенный прогресс как в сокращении длительности, так и в увеличении их мощности. Сейчас метод усиления чирпированных импульсов (Chirped pulse amplification, CPA [7]) позволил достигнуть в твердотельных фемтосекундных системах петаваттный ( $10^{15}$  Вт) уровень мощности [8, 9]. Как правило, в таких системах сложно получить импульсы короче 20-30 фс из-за сужения спектра при усилении. Для дальнейшего сокращения длительности необходима разработка масштабируемых по энергии методов компрессии на выходе лазерных систем сверхвысокой мощности.

К настоящему моменту развит целый ряд методов временной компрессии, большинство из которых используют уширение спектра за счет фазовой самомодуляции (ФСМ) при нелинейном взаимодействии с оптическими материалами и газами. В 1981 году в работе [10] компрессия впервые была осуществлена в классической схеме – уширение спектра за счёт нелинейного взаимодействия с последующей компенсацией фазы дисперсионными элементами. В качестве нелинейного взаимодействия выступало уширение спектра за счёт ФСМ в волокне с нормальной дисперсией, а в качестве

дисперсионного элемента, компенсирующего фазу - пары натрия вблизи резонанса с аномальной дисперсией. Развитие данного принципа сокращения длительности импульсов - уширение спектра в волокне с последующей компенсацией дисперсии – позволило значительно сократить длительность импульсов: в 1987 году был поставлен рекорд – за счёт минимизации третьей дисперсии была достигнута длительность 6 фс [11] (современные рекорды находятся в аттосекундном диапазоне).

Наличие волокна позволило увеличить длину нелинейного взаимодействия, однако ограничивало энергию сжатого импульса величиной в несколько десятков нДж. Лимитирующим фактором являлась возможность разрушения волокна. Использование капилляров, заполненных благородным газом, позволило увеличить энергию до миллиджоулевого уровня [12, 13]. Однако дальнейшее увеличение энергии в такой схеме невозможно из-за повреждения капилляра, особенно при большой частоте повторения, кроме того, использование керровской нелинейности для уширения спектра также накладывало ограничения на пропускаемую мощность. Были предложены различные решения этой проблемы – в качестве нелинейности, необходимой для уширения спектра, использовать ионизационную [14], перейти от капилляра к плоскому волноводу [15], заполненным газом, что дало бы по идее возможность масштабирования по энергии. Однако оказалось, что такие устройства неустойчивы к поперечным возмущениям [16], хотя при аккуратном подборе длины волновода и давления газа обсуждается возможность компрессии данным методом 100 мДж импульсов [17]. Другой альтернативой капилляру является использование филаментации в газе [18-20]. Однако здесь масштабирование по энергии ограничивает переход к режиму множественной филаментации, кроме того, сокращается только часть импульса и существуют технические проблемы с селективированием излучения с короткой длительностью.

Другим подходом к сокращению длительности импульса является уширение спектра импульса в объёмных материалах за счёт керровской

нелинейности с последующим сжатием дисперсионными элементами [21,22]. Так как степень уширения спектра зависит от интенсивности, то максимальная эффективность компрессии данного типа будет достигаться для супергауссовых пучков. Основной проблемой здесь является развитие мелкомасштабной самофокусировки, что ограничивает степень уширения спектра и фактически ограничивает степень сокращения длительности при однократном использовании метода величиной 2- 3. Кроме того, для достижения минимальной длительности необходима компенсация высоких порядков нелинейной фазы, возникающих в результате нелинейного взаимодействия. С помощью данного метода была сокращена длительность рекордного уровня энергии [23], а предложение использовать тонкие плёнки в качестве среды для уширения открывает возможность создания масштабируемого по энергии метода сокращения длительности импульсов [24].

Другими возможными способами сокращения длительности являются солитонный режим компрессии в средах с квадратичной нелинейностью [25], сжатие в плазме [26, 27] и в объёмных материалах с аномальной дисперсией в ближнем ИК [28].

Среди способов сокращения длительности можно выделить методы, где требуется компенсация фазы, внесённой во время нелинейного взаимодействия (такие способы сокращения длительности мы будем называть в дальнейшем посткомпрессией), и методы самокомпрессии, где такой компенсации не требуется. Разработка систем компенсации фазы для высокоэнергетичных импульсов с широким спектром является нетривиальной задачей, поэтому использование режима самокомпрессии для сокращения длительности обладает рядом преимуществ. Таким образом, перспективен поиск масштабируемого по энергии метода сокращения длительности, свободного от необходимости последующей компенсации фазы, в области видимого излучения и ближнего ИК, где достигнуты рекордные мощности фемтосекундных лазеров.

Режим самосокращения возможен при филаментации в газах [18-20], в средах с квадратичной нелинейностью [25], в плазме [26, 27] и в объёмных материалах в области среднего ИК [28]. Однако методы филаментации в газах, как упоминалось ранее, имеют ограничение по энергии, связанное с возникновением мелкомасштабной самофокусировки в средах с квадратичной нелинейностью экспериментально полученные результаты ограничены мДж уровнем, а компрессия в объёмных материалах с аномальной дисперсией подходит для области среднего ИК, но не подходит для ближнего ИК и видимого диапазона. Относительно режима самосокращения в плазме [27], дальнейшие работы [29] показали сильную неоднородность этого процесса по сечению, а также энергетические ограничения компрессии из-за возникновения пространственно-временных эффектов. Таким образом, вопрос создания метода сокращения длительности, масштабируемого по энергии и не требующего использования дополнительных дисперсионных элементов, для видимого диапазона и ближнего ИК остаётся открытым.

В настоящей работе развит новый подход к сокращению длительности фемтосекундных импульсов, который не требует использования какой-либо дисперсионной системы для сжатия импульса во времени после нелинейного взаимодействия. Предлагаемый подход основан на возникновении множественной мелкомасштабной самофокусировки излучения, в результате чего излучение с центрального и заднего фронтов импульса приобретает сильную угловую расходимость, в то время как излучение переднего фронта сохраняет расходимость близкую к начальной и формирует в дальней зоне короткий импульс. Физические принципы, которые приводят к сокращению длительности, дают основание предполагать масштабируемость данного процесса по энергии. Начало развития метода было положено работами [30-32]. В цитируемых работах при нелинейном взаимодействии с кварцевой пластинкой толщиной 1 мм наблюдалось сокращение 70 фс импульса, предварительно отрицательно chirпированного до 120 фс. Полученные данные свидетельствовали о

несимметричном самовоздействии фемтосекундного импульса на переднем и заднем фронтах импульса, что приводило к выделению в приосевой области пучка излучения только с переднего фронта. Метод развит в [33], где была сокращена длительность спектрально ограниченного импульса с 87 фс до 19 фс.

Следует отметить, что данный механизм не предполагает увеличения мощности при сокращении длительности, поэтому в наших исследованиях мы используем термин “самосокращение”, а не “самокомпрессия”. Принцип отсечения задней части импульса использовался ранее в ряде работ по самосокращению длительности. Так, в [34] наблюдалось самосокращение длительности 100 нс лазерного импульса CO<sub>2</sub> лазера из-за поглощения заднего фронта в плазме, возникшей при фокусировке в газе. В другой работе [35] на основании численного счёта предлагалось реализовать филаментацию в газе с перепадом давления. В этой схеме задняя часть пучка испытывает сильную рефракцию на возникающей плазме, а уменьшение давления делает невозможным дальнейшую рефокусировку.

Подобные явления вырезания центральной части импульса наблюдались при усилении наносекундных импульсов в активной среде из неодимового стекла [36,37], в этих работах указано решающее влияние мелкомасштабной самофокусировки на процесс изменения временной формы импульса. Тем не менее, полное исчезновение заднего фронта не происходило, возможно, из-за доминирующего влияния лавинообразной ионизации для импульсов таких длительностей, что приводило к разрушению материала при дальнейшем повышении мощности.

Обычно множественная самофокусировка рассматривается как нежелательное явление и её возникновение в мощных системах стремятся предупредить [38]. В нашем подходе мы предлагаем использовать её в качестве нелинейного оптического затвора для отсечения заднего фронта. Это позволяет уменьшить требования к качеству лазерного излучения, что позволяет не применять пространственную фильтрацию.

## **Цели и задачи**

Целью работы являлась разработка метода самосокращения длительности фемтосекундных импульсов, не требующего использования дополнительных дисперсионных элементов с перспективой масштабируемости по энергии, а также исследование режима множественной самофокусировки как основного явления, обеспечивающего сокращение длительности. При этом решались следующие задачи:

- 1 Проведение экспериментов по сокращению длительности фемтосекундных импульсов без использования посткомпрессии на основе дополнительных дисперсионных элементов.
- 2 Экспериментально и численное исследование режима множественной самофокусировки как основного фактора сокращения длительности.
- 3 Измерение материальных констант, необходимых для корректного моделирования взаимодействия фемтосекундного излучения с кварцем.

## **Научная новизна**

Разработан новый метод самосокращения длительности импульсов, который не требует использования дисперсионных элементов для посткомпрессии. Физические механизмы, которые лежат в основе этого метода, дают основание рассчитывать на его масштабирование по энергии и на возможность получения импульсов с длительностью короче 10 фс. В ходе исследования явления сокращения длительности впервые была получена величина сечения четырёхфотонного поглощения в кварце.

## **Практическая ценность**

Преимуществами разрабатываемого метода сокращения длительности импульсов являются отсутствие необходимости использовать дополнительные дисперсионные элементы после нелинейного взаимодействия и простота реализации пространственной селекции сокращенного импульса, а также ожидаемая масштабируемость по энергии. Разрабатываемый метод может быть

использован в практике для генерации лазерных импульсов в несколько периодов световой волны. Такие лазерные источники могут быть использованы для решения задач в самых разных областях взаимодействия излучения с материалами и плазмой (генерация гармоник высоких порядков, изолированных аттосекундных импульсов, аттосекундной спектроскопии и исследования движения электронов на атомных масштабах).

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Взаимодействие фемтосекундного излучения с образцами из керровских оптических материалов толщиной меньше дисперсионной длины позволяет реализовать самосокращение фемтосекундного импульса, наблюдаемое в дальней зоне распространения пучка за образцом.
2. В основе механизма самосокращения фемтосекундных импульсов лежит формирование множественной мелкомасштабной самофокусировки излучения в центральной части импульса, оставляющей в задней части импульса плазменные каналы. Возникающие при этом оптические неоднородности приводят к резкому возрастанию рефракционных потерь за передним невозмущенным фронтом импульса, на котором за счет фазовой самомодуляции формируется более короткий спектрально-ограниченный импульс, наблюдаемый в дальней зоне.
3. В кварце марки КУ-I на длине волны 473 нм сечение четырехфотонного поглощения равно  $\sigma_4=(1.0\pm 0.5)\times 10^{-115} \text{ см}^8\text{с}^3$

### **Апробация работы и публикации**

Результаты работы доложены на 7 международных конференциях и опубликованы в их материалах:

- 1 A.I. Aristov, Ya.V. Grudtsyn, O.N. Krokhin, L.D. Mikheev, A.V. Polivin, S.G. Stepanov, V.A. Trofimov, V.I. Yalovoi. "New method for fs pulse self-compression relying on spectral broadening of down-chirped pulses in fused silica", XI

- International Conference Atomic and Molecular Pulsed Lasers - AMPL, September 16-20, 2013, Tomsk, Russia. Book of Abstracts, p.74
- 2 Ya.V. Grudtsyn, S.B. Mamaev, L.D. Mikheev, S.G. Stepanov, V.A. Trofimov, V.I. Yalovoy. "Spectral Broadening and Self-compression of Down-chirped Fs Pulses in Transparent Bulk Kerr Media". International Conference on Ultrahigh Intensity Lasers (ICUIL2014), October 12 - 17, 2014, Goa, India. Book of Abstracts, p.87.
  - 3 Ya.V. Grudtsyn, I. G. Zubarev, A.V. Koribut, I.E. Kuchik, S.B. Mamaev, L.D. Mikheev, V.I. Yalovoi. "Spectrum broadening and selfcompression of negatively chirped fs pulses in thin fused silica plate", XII International Conference Atomic and Molecular Pulsed Lasers - AMPL, September 13-18, 2015, Tomsk, Russia. Book of Abstracts, p.73
  - 4 Ya.V. Grudtsyn, A.V. Koribut, L.D. Mikheev, V.A. Trofimov. "Plasma-shutter Self-compression in Thin Plastic Films". International Committee on Ultrahigh Intensity Lasers (ICUIL2016 Conference), 11-16 September 2016, Montebello, Québec, Canada, Book of Abstracts, p.110.
  - 5 V.A. Trofimov, I.E. Kuchik, Leonid D. Mikheev, Ya.V. Grudtsyn. "Explicit solution of FWM problem under the interaction of copropagating laser beams in medium with cubic nonlinear response". SPIE Photonics Europe, 2016, Brussels, Belgium, Nonlinear Optics and its Applications IV. Proceedings of SPIE Vol. 9894 (2016) 989412.
  - 6 Ya.V. Grudtsyn, A.V. Koribut, L.D. Mikheev, V.A. Trofimov. International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight-2017), October 03-05, 2017, Moscow, Russia. Book of Abstracts, p.140.
  - 7 Ya.V. Grudtsyn, A.V. Koribut, L.D. Mikheev, V.A. Trofimov. International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight-2018), October 01-05, 2018, Moscow, Russia. Book of Abstracts, p.156.

Полученные результаты также были представлены на XV школе молодых учёных "Актуальные проблемы физики" и на семинарах ОКРФ ФИАН в 2016, 2017 и 2018 годах. Работа "Временная самокомпрессия при взаимодействии

сходящихся пучков чирпированного излучения с тонким кварцем” авторов Грудцына Я.В. и Корибута А.В. получила диплом за высокий уровень проводимых исследований на Конкурсе молодёжных работ УНК ФИАН 2015 года.

Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 статьях в журналах

1. А. И. Аристов, Я. В. Грудцын, Л. Д. Михеев, А. В. Поливин, С. Г. Степанов, В. А. Трофимов, В. И. Яловой, Явление уширения спектра и самокомпрессии отрицательно чирпированных фемтосекундных импульсов видимого диапазона в кварце //Квантовая электроника. – 2012. – Т. 42. – №. 12. – С. 1097-1099.
2. С. В. Алексеев, А. И. Аристов, Я. В. Грудцын, Н. Г. Иванов, Б. М. Ковальчук, В. Ф. Лосев, С. Б. Мамаев, Г. А. Месяц, Л. Д. Михеев, Ю. Н. Панченко, А. В. Поливин, С. Г. Степанов, Н. А. Ратахин, В. И. Яловой, А. Г. Ястремский, Гибридные фемтосекундные системы видимого диапазона на основе ХеF(C-A)-усилителя: состояние и перспективы //Квантовая электроника. – 2013. – Т. 43. – №. 3. – С. 190-200.
3. Я. В. Грудцын, И. Г. Зубарев, А. В. Корибут, И. Е. Кучик, С. Б. Мамаев, Л. Д. Михеев, С. Л. Семёнов, С. Г. Степанов, В. А. Трофимов, В. И. Яловой, Фазовая самомодуляция в тонком кварце в сходящемся пучке отрицательно чирпированного фемтосекундного излучения //Квантовая электроника. – 2015. – Т. 45. – №. 5. – С. 415-420.
4. Ya. V. Grudtsyn, A. V. Koribut, V. A. Trofimov, and L. D. Mikheev, Femtosecond pulse self-shortening in Kerr media due to transient regime of multiple filamentation // Journal of the Optical Society of America B. – 2018. – Т. 35. – №. 5. – С. 1054-1058.
5. Я. В. Грудцын, А. В. Корибут, Л. Д. Михеев, В. А. Трофимов, Самосопряжение фемтосекундных импульсов в керровских средах: роль

модуляционной неустойчивости в формировании спектра // Квантовая электроника. – 2018. – Т. 48. – №. 4. – С. 306-312.

### **Личный вклад автора**

Все изложенные в диссертации результаты получены либо автором, либо при его решающем участии.

### **Структура диссертации**

Диссертация состоит из четырёх глав. В первой главе кратко рассмотрено нелинейное уравнение Шрёдингера, на котором основана численная модель, кратко обсуждается программная реализация и обсуждение значений материальных констант. Во второй главе описана экспериментальная установка. Третья глава посвящена измерению материальных констант, необходимых для численного моделирования. В четвёртой главе представлены экспериментальные результаты по сокращению длительности отрицательно chirпированного и спектрально-ограниченного импульсов, также содержатся результаты численного моделирования. Также диссертация включает в себя ряд приложений.

## Глава 1. Описание численной модели

### 1.1 Теоретическая модель

В этом разделе мы кратко обсудим нелинейное уравнение Шрёдингера. Вначале перечислим основные математические формы представления в нелинейной оптике. Поле волны разделим на быстро осциллирующую часть и медленную

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0 cn}} A(z,t) \exp(ik_0 z - i\omega_0 t + i\psi) + c.c.$$

где  $A$  называется огибающей. Она связана с интенсивностью  $I$  следующим соотношением

$$A(t) = \sqrt{I(t)} \exp(i\phi(t))$$

где  $\phi(t)$  - временная фаза.

Разделение поля на быстро осциллирующую часть и огибающую справедливо, если фаза электромагнитного поля не влияет на среднюю частоту

$$\omega_0 = \int_0^\infty \omega |E(\omega)|^2 d\omega / \int_0^\infty |E(\omega)|^2 d\omega.$$

Как было показано в [39] для импульсов различной

формы это верно вплоть до длительности в период световой волны. Подставив

$$\text{поле } E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0 cn}} A(z,t) \exp(ik_0 z - i\omega_0 t + i\psi) + c.c. \text{ в волновое уравнение, можно путём}$$

преобразований и упрощений получить соотношение для огибающей  $A(z,t)$ , нелинейное уравнение Шрёдингера. Исторически для этого использовался метод медленно меняющихся амплитуд (ММА) [40]. Недостатком данного подхода является требование к тому, чтобы длительность импульса значительно превосходила период световой волны. В настоящее время для преобразования волнового уравнения используют другой метод, предложенный в [39] - медленно меняющейся волны (ММВ). Метод медленно меняющейся волны может применяться к импульсам вплоть до одного колебания поля, однако накладывает

определённые требования к среде распространения. Вывод нелинейного волнового уравнения с учётом этого приближения приведён в приложении А. В приложении В будет затронут вопрос о разнице в применении этих двух методов и возможность применения метода ММВ для моделирования взаимодействия излучения с веществом в такой среде как плавленый кварц на длине волны 480 нм. В данном разделе будет приведено качественное пояснение каждого члена нелинейного уравнения (нелинейное уравнение Шрёдингера в приближении ММВ), численное решение которого реализовано в численной модели.

При значительном уровне интенсивности начинает проявляться нелинейность показателя преломления среды – зависимость показателя преломления от интенсивности  $I$  (эффект Керра):

$$n(I) = n_0 + n_2 I,$$

Здесь  $n_0$  – показатель преломления, а  $n_2$  – нелинейный показатель преломления, в случае керровской нелинейности  $n_2 > 0$ . Зависимость показателя преломления от интенсивности, а, следовательно, от времени согласно

$$\varphi(z, t) = \frac{2\pi z}{\lambda} (n_0 + n_2 I(t))$$

ведёт к зависимости фазы от времени – явлению

фазовой самомодуляции (ФСМ). Это приводит к генерации новых частот

$$\Delta\omega(t) = -\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}$$

и формированию частотно-модулированного (чирпированного)

импульса. При  $n_2 > 0$  на переднем фронте импульса, где интенсивность растёт, спектр смещается в длинноволновую область, а на заднем – в коротковолновую.

Импульс, для которого частота со временем растёт, называется положительно чирпированным, а если частота падает, такой импульс называется отрицательно чирпированным. При этом непосредственно сама ФСМ не приводит к увеличению длительности, она только обогащает спектр излучения.

К формированию чирпированного импульса также может приводить другое явление – дисперсия среды. В области нормальной дисперсии коэффициент

преломления падает с ростом длины волны, что приводит к запаздыванию коротковолновых компонент спектра относительно длинноволновых. В результате импульс растягивается во времени, приобретая положительный чирп. Спектр излучения при этом сохраняется. С другой стороны, если в среду с положительной дисперсией попадает отрицательно чирпированный импульс, то его длительность сначала будет сокращаться, пока он не станет спектрально-ограниченным.

В большинстве случаев для описания материальной дисперсии достаточно учитывать второй порядок в разложении

$$k(\omega) = k_0 + k'(\omega - \omega_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{(n)}(\omega - \omega_0)^n$$

при условии малости  $\frac{T_0}{T_{1/2}}$ .

В принципе, рассмотренных явлений уже достаточно для записи нелинейного уравнения, описывающего распространение излучения в оптически прозрачной среде с нелинейностью

$$\frac{\partial}{\partial \xi} A = -\frac{ik^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A + \frac{ik_0^2 n_2}{n_0} |A|^2 A$$

Первое слагаемое в правой части описывает дисперсию среды, второе – керровскую нелинейность ( $n_2 > 0$ ). За своё внешнее сходство с уравнением для волновых функций оно получило название нелинейного уравнения Шрёдингера (Nonlinear Shrodinger Equation, NLSE).

Будем считать, что задача имеет осевую симметрию, это позволит нам использовать цилиндрическую систему координат. В трёхмерном пространстве необходимо добавить слагаемое, описывающее дифракцию

$$\frac{\partial}{\partial \xi} A = \frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} A - \frac{ik^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A + \frac{ik_0^2 n_2}{n_0} |A|^2 A$$

Разберёмся детальнее в последнем слагаемом - нелинейности. Показатель преломления в центре импульса больше, чем на его краях согласно  $n(I) = n_0 + n_2 I$ , что приводит к тому, что центральная часть импульса в нелинейной среде будет отставать от переднего фронта, импульс будет “заваливаться”. Такой эффект называется самоукручением и в уравнении учитывается введением оператора  $1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} A = \frac{i \Delta_{\perp}}{2k_0} A - \frac{ik^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A + \left( 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{ik_0^2 n_2}{n_0} |A|^2 A$$

Помимо “быстрой” электронной части необходимо учитывать вклад в нелинейность, обусловленный движением атомов в молекуле. Время их отклика велико относительно периода световой волны, и для правильного описания взаимодействия импульсов с длительностью менее 100 фс с веществом необходим учёт зависимости функции отклика от времени для этой части. Перепишем слагаемое, отвечающее за нелинейность с учётом запаздывания. Введём функцию

отклика в виде  $R(t) = (1 - f_R) \delta(t - t_e) + f_R h_R(t)$ , где  $h_R(t) = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2^2} \exp(-t/\tau_2) \sin(t/\tau_1)$  с

параметрами  $f_R = 0.18$ ,  $\tau_1 = 12.2$  фс и  $\tau_2 = 32$  фс для кварца согласно [41]. С физической точки зрения, это говорит о том, что нелинейность состоит из “мгновенной” электронной части (первое слагаемое в выражении для  $R(t)$ ) и медленной части, связанной с наличием молекулярных колебаний с резонансной частотой  $1/\tau_1$  и временем затухания  $\tau_2$  (второе слагаемое). Таким образом, появляется зависимость полного нелинейного отклика от длительности импульса, что даёт дополнительный разброс в экспериментально определяемых значениях нелинейного показателя преломления. Разумеется, и у электронной части нелинейности есть своё конечное время отклика, но так как это время (доли фемтосекунд) значительно меньше длительностей импульса в нашей нелинейной задаче (больше 20 фс), то функцию отклика для электронной части можно

заменить дельта функцией  $\delta(t)$ . Фактически ввод функции  $R(t)$  отвечает учёту вынужденного комбинационного рассеяния.

Теперь уравнение выглядит как

$$\frac{\partial}{\partial \xi} A = \frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} A - \frac{ik^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A + \frac{ik_0^2 n_2}{n_0} \left( 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(\tau - t')|^2 dt') \right) A$$

При интенсивностях порядка  $10 \text{ ТВт/см}^2$  [42] в кварце наблюдается интенсивное плазмообразование вследствие многофотонной и лавинообразной ионизаций. Многофотонной ионизации отвечает многофотонное поглощение  $\frac{1}{2} (\beta_K |A|^{2(K-1)} A)$ , а лавинообразной ионизации – обратно-тормозное поглощение  $\frac{1}{2} (\sigma \rho_e A)$ .

Наличие свободных электронов (плазмы) плотности  $\rho_e$  влияет на показатель преломления. Этот фактор учитывает слагаемое  $\frac{ik_0}{2n_0^2 \rho_c} \left( 1 - \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \rho_e A$ . Теперь уравнение выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} A = & \frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} A - \frac{ik^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A + \frac{ik_0^2 n_2}{n_0} \left( 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(\tau - t')|^2 dt') \right) A - \\ & - \frac{ik_0}{2n_0^2 \rho_c} \left( 1 - \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \rho_e A - \frac{1}{2} (\sigma \rho_e A + \beta_K |A|^{2(K-1)} A) \end{aligned} \quad (1)$$

Генерация плазмы описывается отдельным уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho_e = \sigma_K \rho_{nt} |A|^{2K} + \frac{\sigma}{U_i} \rho_e |A|^2 - \frac{1}{\tau_r} \rho_e \quad (2)$$

Здесь  $\sigma_K$  - сечение многофотонного поглощения,  $U_i$  - ширина запрещённой зоны,  $\tau_r$  - время рекомбинации свободных зарядов,  $\rho_{nt}$  концентрация вещества.

Сечение  $\sigma_K'$  связано с коэффициентом поглощения  $\beta_K = \sigma_K' K \omega_0 \rho_{nt}$ . Исходя из соотношения между шириной запрещённой зоны (9 Эв) [43] и энергией фотона на длине волны 475 нм (2.6 Эв), поглощение считаем четырёхфотонным  $K=4$ . Коэффициент четырёхфотонного поглощения в кварце был измерен нами в ходе отдельного эксперимента (рассмотрено в главе 3.4).  $\sigma$  - сечение обратнотормозного поглощения может быть найдено из  $\sigma = \frac{k_0 \omega_0 \tau_c}{n_0 \rho_c (1 + \omega_0^2 \tau_c^2)}$  [44]. Здесь  $\tau_c$  -

столкновительное время, характеризующее электрон-фононное взаимодействие,

критическая плотность  $\rho_c = \frac{m_e' \varepsilon_0 \omega^2}{e^2}$ ,  $m_e'$  - электрон-дырочная масса в кварце.

Подробный вывод уравнений (1) –(2) можно найти в приложении А.

## 1.2 Реализация алгоритма

Алгоритм для численного решения нелинейного уравнения был разработан в лаборатории математического моделирования в физике (МГУ) [45,46]. Данным коллективом для решения нелинейного уравнения Шрёдингера была предложена консервативная разностная схема со вторым порядком аппроксимации как по пространственной координате, так и по времени. Использование консервативных схем позволяет выделить пять инвариантов, которые можно использовать для проверки корректности численного счёта. Данный пакет программ реализован в среде FORTRAN и позволяет следить за интенсивностью, фазой и спектром при взаимодействии с веществом в каждой точке.

При работе с пакетом программ автором были внесены следующие изменения и дополнения: переработана функция молекулярного отклика, правильно учтён коэффициент при дисперсии нелинейного отклика, добавлена дисперсия плазменной нелинейности, введена возможность учёта зависимости сечения обратнотормозного поглощения от плотности плазмы. Также в программу добавлено моделирование диафрагмирования пучка.

В реальных условиях эксперимента регистрация спектра и других характеристик излучения происходит, как правило, в дальней зоне. Для

возможности сравнения спектров, рассчитанных в ближней зоне, с экспериментально полученными, в пакет программ был добавлен модуль, позволяющий моделировать распространение в свободном пространстве. Расчёт основан на использовании функции Грина с учётом цилиндрической симметрии.

### 1.3 Выбор материальных констант

Построение численной модели, помимо программной части, требует правильного выбора материальных констант. В данном разделе приведён краткий анализ выбора их значений из литературы.

Начнём со второго слагаемого в правой части уравнения (1). Коэффициент при этом слагаемом является дисперсией групповых скоростей (ДГС; англ. Group delay dispersion GDD). Этот коэффициент  $GDD = k_2$  связан с показателем преломления  $n[\lambda]$  соотношением

$$GDD = \frac{\lambda^3 L}{2\pi c^2} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}$$

Зависимость показателя преломления от длины волны можно взять из формулы Селмейера [47]

$$n[\lambda] = \sqrt{1 + \frac{0,6961663\lambda^2}{\lambda^2 - 0,0684043^2} + \frac{0,4079426\lambda^2}{\lambda^2 - 0,1162414^2} + \frac{0,8974794\lambda^2}{\lambda^2 - 9,896161^2}}$$

Для длины волны  $\lambda=480\text{нм}$  это даст  $n_{480} = 1,46$   $GDD_{480} = 76\text{fs}^2 / \text{mm}$

Теперь перейдём к третьему слагаемому в правой части уравнения (1). Как уже упоминалось, нелинейность можно разделить на две части, электронную (быструю) и молекулярную (медленную). Соответственно необходимо знать нелинейный показатель преломления  $n_2$ , долю молекулярной части и вид её функции отклика.

Выбор значения нелинейного показателя преломления  $n_2$  неоднозначен. Начиная с 70-х годов с помощью различных методик была для разных длин волн

была получена серия значений в диапазоне  $(1.7-7.8) \times 10^{-16}$  см<sup>2</sup>/Вт (см. Таблицу 1.1).

Таблица 1.1. Данные по нелинейному показателю преломления для кварца [64].

Значение нелинейного коэффициента, $\times 10^{-16}$ см <sup>2</sup> /Вт	Длина волны, нм	Ссылка
5.6±0,8	248	48
3.4±1,6	248	48
7.8±0,17	266	49
3.0±0,22	308	50
1.7±0,7	351	51
2.5±1,2	351	52
2.41±0,48	355	49
2.62±0,6	355	53
3.42±0,37	402	54
3.0±0,45	514	55
1.72±0,34	532	56
2.24±0,46	532	49
3.3±1,7	694	57
2.48±0,23	804	55
2.77±0,14	1053	58
2.83±0,14	1053	58
1.73±0,35	532	56
1.9±0,95	1064	59
2.73±0,27	1064	60
1.92±0,4	1064	53
3.3±1.0	1064	61
2.14±0,43	1064	49
2.66±0,13	1319	62
2.79±0,14	1550	63

Причины такого разброса могут быть следующие: дисперсия нелинейного показателя преломления, разное содержание примесей и вынужденное комбинационное рассеяние. Значения нелинейного коэффициента преломления, полученного в волокнах, следует умножить на 9/8 из-за вращения поляризации [65]. Для 10 нс импульсов вклад в нелинейность дают акустические волны.

Дисперсия нелинейного показателя преломления выражается зависимостью  $\frac{1}{(2\omega - \omega_0)^2}$  согласно [66]. Исходя из ширины запрещённой зоны ( $E_g=9$  эВ, [43]), этот фактор при изменении длины волны с 800 нм до 480 нм может дать 20 % от абсолютного значения величины.

Вынужденное комбинационное рассеяние, или другими словами, молекулярный отклик, приводит к зависимости нелинейного отклика от времени. Это вызывает различия в экспериментально получаемых значениях нелинейного показателя преломления при разной длительности импульсов, так как при длительности меньше 50 фс молекулярная часть отклика роли фактически не играет. Кроме того, существуют различные предложения на счёт самой формы функции  $h_r(t)$  и величины её доли  $f_r$ . В работе [67] была отдельно измерена электронная составляющая нелинейности, которая для длины волны 1064 нм составила  $n_2=1.81 \times 10^{-16}$  см<sup>2</sup>/Вт с точностью 5%. Доля молекулярного отклика была оценена в 18-20%. Соответственно для  $n_2$  для длины волны 480 нм можно считать допустимым диапазон  $(2-3) \times 10^{-16}$  см<sup>2</sup>/Вт. Из-за такой неопределённости в значениях нелинейного коэффициента преломления мы провели прямое измерение данной величины различными методами. Эти измерения описаны в разделе 3.1.

Теперь рассмотрим коэффициенты при членах уравнения, описывающих процесс плазмообразования. Здесь определяющим является сечение многофотонного поглощения  $\sigma_4$  (следует отличать от  $\sigma_4'$  -  $\sigma_4$  умноженное на энергию фотона). От его величины зависит основная часть поглощаемой энергии, также фактически она определяет максимальное значение концентрации плазмы при данной интенсивности. Обзору многофотонных поглощений посвящена работа [68]. В ней приведено утверждение о том, что для разных диэлектрических сред с одинаковым соотношением  $E_{gap} / \hbar\omega$  сечения многофотонных взаимодействий с показателем  $K \cong E_{gap} / \hbar\omega$  не должны сильно отличаться. Это даёт

возможность сравнивать измерения в разнообразных диэлектрических средах. Нам известны четыре работы [69-72] с измерениями сечений либо коэффициента четырёхфотонного поглощения. В работе [69] с помощью измерений проводимости были получены значения для KBr ( $\sigma_4=2\times 10^{-114}\text{см}^8\text{с}^3$ ) и KI ( $\sigma_4=(2\pm 0,8)\times 10^{-114}\text{см}^8\text{с}^3$ ), в [70] с помощью фотоакустических измерений была получена следующая оценка для NaCl:  $1\times 10^{-114}\text{см}^8\text{с}^3\leq\sigma_4\leq 20\times 10^{-114}\text{см}^8\text{с}^3$ . В [71] измерения с помощью фотолуминисценции дали значение для KBr  $\sigma_4=(2\pm 1)\times 10^{-112}\text{см}^8\text{сек}^3$ . Также известна работа по прямому измерению коэффициента четырёхфотонного поглощения в стёклах  $\text{TeO}_2$  и  $\text{GeS}_2$  на длинах волн 1300 нм и 1550 нм соответственно, и эти измерения дают при пересчёте сечение многофотонного поглощения  $0,8\times 10^{-112}\text{см}^8\text{с}^3$  для  $\text{TeO}_2$  и  $1,1\times 10^{-112}\text{см}^8\text{с}^3$  для  $\text{GeS}_2$  [70]. Как мы видим, существует значительный разброс в полученных значениях, что не даёт ясности в выборе величины сечения для использования в численной модели. Кроме того, нам неизвестны измерения сечения четырёхфотонного взаимодействия для такой важной среды, как кварц. Поэтому мы провели прямые измерения многофотонного поглощения для плавленого кварца марки КУ1, описанные в разделе 3.2.

Теперь разберёмся с остальными слагаемыми уравнения (1) и с коэффициентами в (2). Коэффициент при четвёртом слагаемом  $\frac{ik_0}{2n_0^2\rho_c}$  содержит критическую плотность  $\rho_c = \frac{m_e \varepsilon_0 \omega^2}{e^2} = 4\times 10^{21}\text{см}^{-3}$ , где  $m'_e = 0,86m_e$  [73] - электрон-дырочная масса в кварце.

Коэффициент при пятом слагаемом содержит сечение обратно-тормозного поглощения  $\sigma$ . Согласно модели Друде сечение обратно-тормозного поглощения можно найти из [44]

$$\sigma = \frac{k_0 \omega_0 \tau_c}{n_0 \rho_c (1 + \omega_0^2 \tau_c^2)}$$

Здесь  $\tau_c=23$  фс – столкновительное время согласно [74]. Подставив данные, получим  $\sigma=2,6 \times 10^{-19}$  см<sup>2</sup>.

Для времени рекомбинации носителей (уравнение (2)) мы использовали значение  $\tau_r=150$  фс [75].

### **1.3 Основные результаты главы 1**

Представлена численная модель, основанная на нелинейном уравнении Шрёдингера. Она учитывает дифракцию, дисперсию, керровскую нелинейность, ВКР, дисперсию нелинейного отклика, плазмообразование. Решение основано на консервативных разностных схемах со вторым порядком аппроксимации как по пространственной координате, так и по времени.

## Глава 2. Экспериментальная установка

Экспериментальная установка, на которой проводились исследования, структурно состоит из двух частей: задающий генератор  $\sim 50$  фс импульсов на длине волны  $\sim 950$  нм с удвоителем частоты (первая гармоника  $\sim 950$  нм, вторая  $\sim 475$  нм) и схемы для взаимодействия излучения с материалами с последующей регистрацией параметров излучения (спектр, энергия, автокорреляционная функция, профиль).

### 2.1 Титан-сапфировый комплекс

Исследования нелинейного взаимодействия, описанные в диссертации, проводились с помощью выходного излучения стартового Ti:сапфирового комплекса “СТАРТ-480М”, разработанного АВЕСТА-ПРОЕКТ, ООО. Данная установка способна к генерации  $\sim 50$  фс импульсов на длине волны 940-960нм, с энергией до 15 мДж, с частотой повторения 10 Гц. В своих исследованиях мы использовали вторую гармонику этого излучения, полученную преобразованием в 2-мм кристалле DKDP: 470-80нм, с энергией до 7 мДж и длительностью не менее 60 фс. Схема Ti:сапфирового комплекса представлена на рис. 2.1.

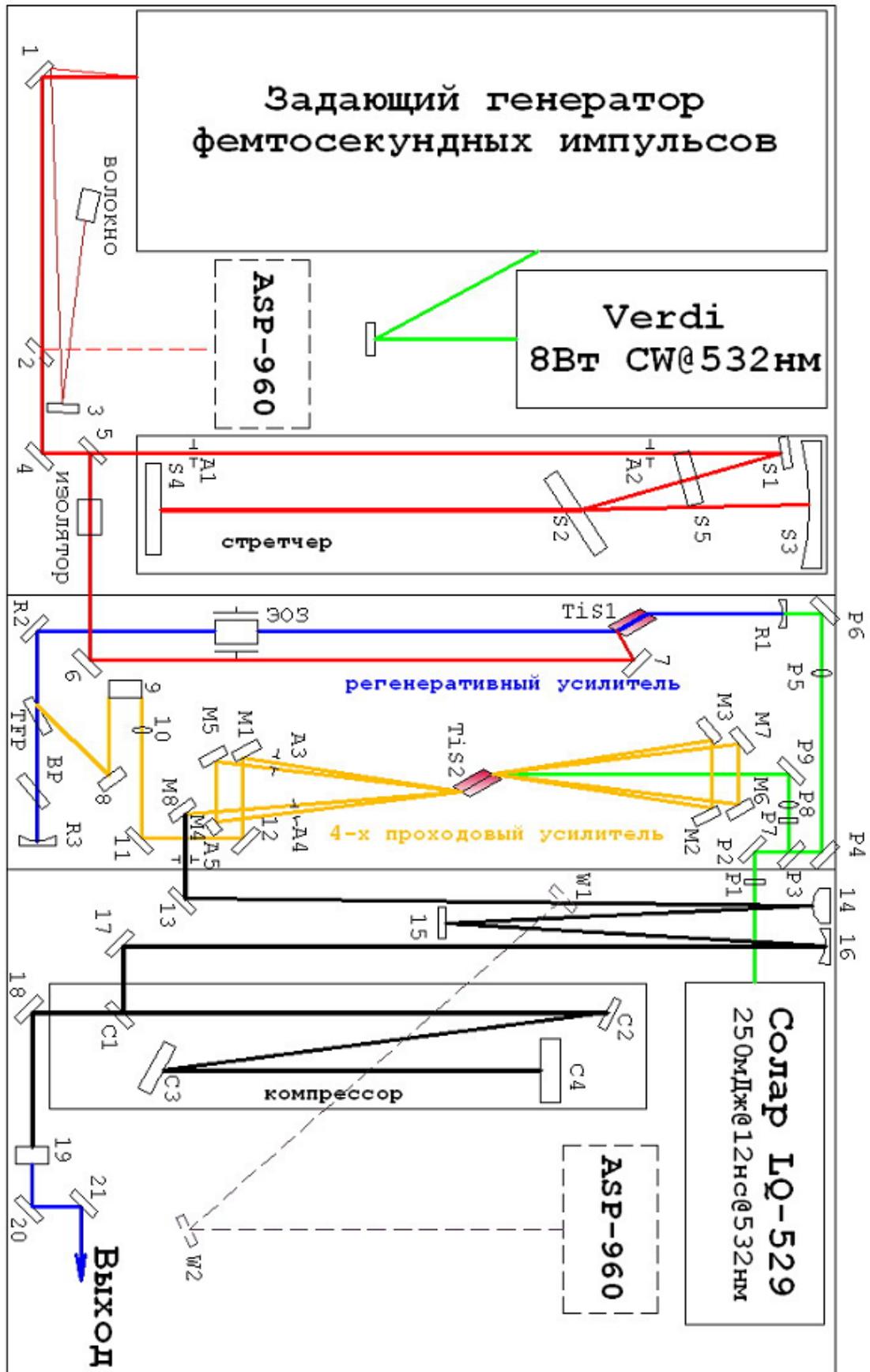


Рис. 2.1. Ti:сапфировый фемтосекундный комплекс.

Комплекс состоит из следующих частей: осциллятора (титан-сапфирового лазера), стретчера, регенеративного и многопроходного усилителей и компрессора. Цуг фемтосекундных импульсов малой мощности генерируется в титан-сапфировом лазере TiF-20. Накачкой служит лазер на кристалле Nd:YVO<sub>4</sub> с диодной накачкой и с внутриврезонаторным преобразованием во вторую гармонику (532 нм, VERDI V8).

Далее излучение попадает в регенеративный усилитель и затем в следующий каскад усиления - многопроходной. После 4-х проходов через активную среду энергия импульса может достигать 16 мДж. Накачка обоих каскадов усиления осуществляется с помощью второй гармоники лампового импульсного (с частотой 10 Гц) лазера на кристалле Nd:YAG производства фирмы "Solar" (г. Минск).

С помощью специальной настройки мы пропускали пучок только через регенеративный усилитель, либо через регенеративный усилитель и определённое число проходов в многопроходном (1, 2 или 3) что позволяет менять энергию на выходе системы в широком диапазоне от 1 до 16 мДж.

Полученный усиленный импульс является положительно chirпированным, и для его сжатия применяется компрессор из дифракционных решёток с золотым покрытием для обеспечения широкополосного отражения. При этом потери энергии при отражении составляют около трети. После этого сжатый импульс направляется на кристалл второй гармоники (1 мм DKDP, 2 мм DKDP или 200 мкм ВВО), где происходит преобразование во вторую гармонику. Однако нелинейное преобразование в кристалле вносит искажения в фазовый фронт излучения, что проявляется в ухудшении качества пучка на второй гармонике.

## **2.2 Измерительный комплекс**

Для измерений использовались: спектрометр ASP 480 (разрешающая способность 0.04 нм), одноимпульсный автокоррелятор модели ASF-20, пироэлектрическая головка PE 50 V2 фирмы OPHIR, ПЗС камера с USB

подключением Spricon SP620U (помимо измерения профиля излучения использовалась для измерения энергии после калибровки с помощью измерителя мощности) и одноимпульсный автокоррелятор модели ASF-20 (АВЕСТА-ПРОЕКТ).

Одноимпульсный автокоррелятор ASF-20 (рис. 2.2).



Рис. 2.2. Одноимпульсный автокоррелятор ASF-20.

Этот прибор разработан и произведён компанией АВЕСТА-ПРОЕКТ (Троицк). Измерение длительности одиночных импульсов лазерного излучения основано на регистрации поперечного распределения энергии второй гармоники, генерируемой в кристалле при неколлинеарном взаимодействии. Требования к входному импульсу приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1. Характеристики одноимпульсного автокоррелятора ASF-20

характеристика	величина
Спектральный диапазон	450-500нм
Диапазон длительностей входного импульса	20-200фс
Пространственная мода	TEM <sub>00</sub>
Диаметр входного пучка	>3мм для импульсов 20-100фс >6мм для импульсов 100-200фс
Входная поляризация	горизонтальная
Входная энергия	>10мкДж при частоте повторения > 1-10Hz.
Нелинейный кристалл	ВВО, толщина 0,15мм, тип I.

Вопрос точности измерений автокоррелятора вблизи нижней границы диапазона (20фс) хотелось бы рассмотреть подробнее. Основных ограничений тут два: разрешение матрицы (при малой длительности в отображении автокорреляционной функции участвует слишком малое число пикселей), и толщина кристалла второй гармоники. Ограничение на толщину кристалла вызвано необходимостью сохранения условий фазового синхронизма для всех компонент спектра импульса, а также разностью групповых скоростей первой и второй гармоники, что может вызвать запаздывание второй гармоники относительно первой при взаимодействии в кристалле, и, таким образом, исказить реальное значение длительности. Рассмотрим эти два явления подробнее.

Воспользуемся хорошо известной формулой зависимости интенсивности второй гармоники от длины и от фазовой отстройки  $\Delta k = k_2 - 2k_1 \cos(Y/2)$  (1- основная частота, 2 вторая гармоника,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $Y = 0.1$  рад – угол схождения импульсов на первой гармонике, рис. 2.3).

$$I_2(t, z) \propto \frac{\sin^2(\Delta k z / 2)}{(\Delta k / 2)^2}$$

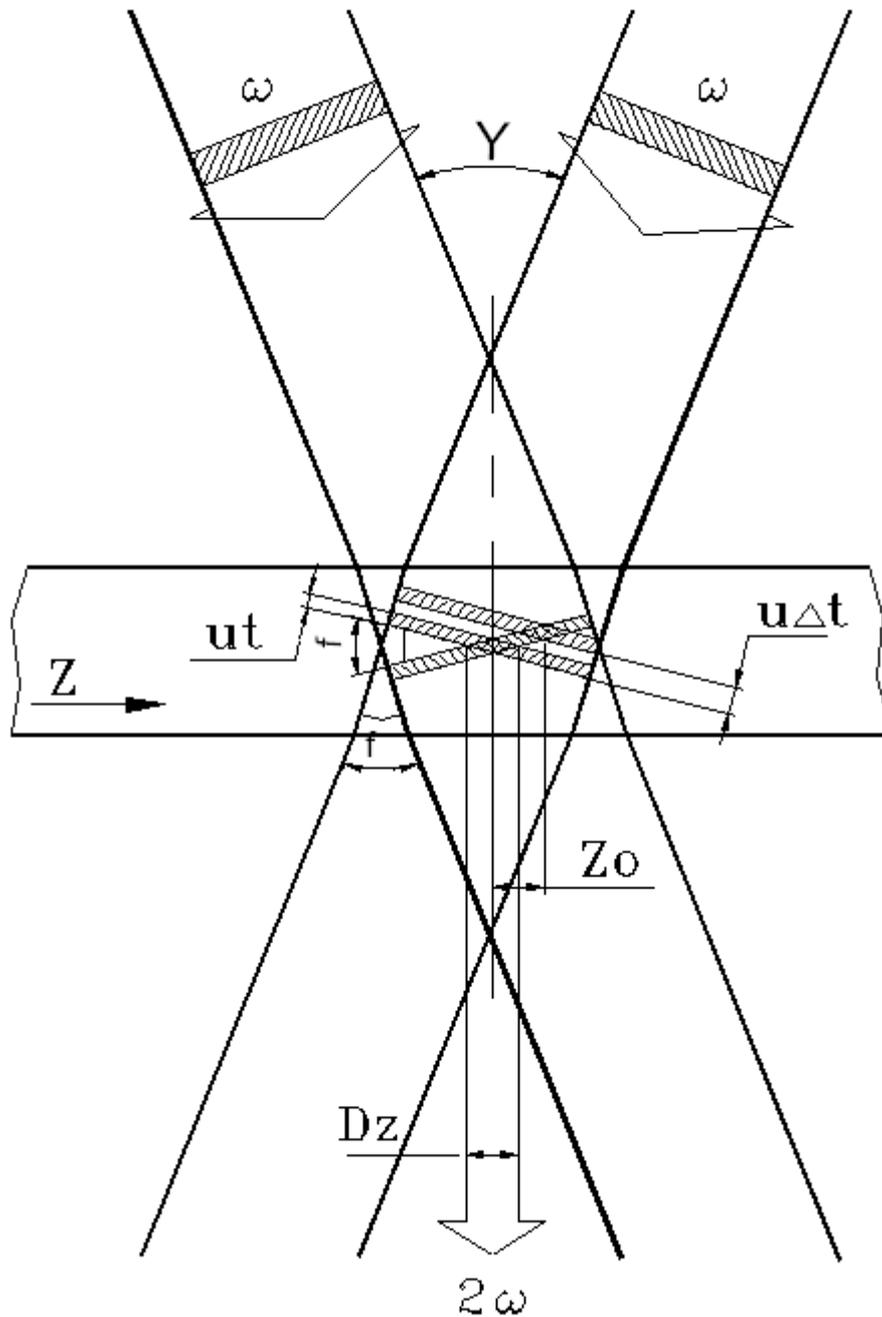


Рис. 2.3. Неколлинеарная генерация второй гармоники в одноимпульсном автокорреляторе ASF-20.

Для определения коэффициента преломления возьмём данные для формулы Селмейера из [74]

$$n_0 = \sqrt{2.7405 + \frac{0.0184}{\lambda^2 - 0.0179} - 0.0155 \lambda^2}$$

$$n_e = \sqrt{2.3730 + \frac{0.0128}{\lambda^2 - 0.0156} - 0.0044 \lambda^2}$$

Напомним, что показатель преломления для необыкновенной волны в случае одноосного кристалла записывается как

$$n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sin(\phi)}{n_e}\right)^2 + \left(\frac{\cos(\phi)}{n_0}\right)^2}}$$

где  $\phi$  - угол между оптической осью и волновой нормалью. Запишем условие фазового синхронизма

$$n_0(\lambda) \cos(Y/2) = n(\lambda/2, \phi)$$

Для  $\lambda=475$  нм это условие достигается при  $\phi=60.86^\circ$ . Синхронизм нарушится при условии  $\Delta kz/2 = \pi/2$ . В нашем случае это значит  $\Delta n = n_0(\lambda + \Delta\lambda) \cos(Y/2) - n(\lambda/2 + \Delta\lambda/2) = \frac{\lambda}{4L} = 0.0008$ , где  $L=150$  мкм, что

достигается при  $\Delta\lambda=1.8$  нм. Для другого возможного преобразования преобразование  $(\omega + \Delta\omega) + (\omega - \Delta\omega) \rightarrow 2\omega$  потеря синхронизма для этого отвечает  $\Delta\lambda=7$  нм. Таким образом, если ширина спектра импульса превышает 4 нм, его автокорреляционная функция будет построена по спектральным компонентам неравномерно. В принципе для спектрально-ограниченного импульса это не приведёт к ошибке, но измерения длительности чирпированных импульсов с широким спектром могут быть некорректными.

Разность групповых скоростей первой и второй гармоник может приводить к “размытию” второй гармоники во времени. Расстройка групповых скоростей

$$\Delta u^{-1} = \frac{1}{c} \left( n_2 - n_1 - \lambda_2 \frac{\partial n_2}{\partial \lambda_2} - \lambda_1 \frac{\partial n_1}{\partial \lambda_1} \right)$$

приводит к ошибке  $\tau \approx |\Delta u^{-1}|z = 3\text{фс}$ .

Как мы видим, параметры используемого автокоррелятора позволяют нам измерять длительность 20 фс спектрально ограниченных импульсов с точностью порядка 10%. С chirпированными импульсами сложнее, здесь необходимо следить за шириной спектра измеряемого импульса.

### 2.3 Основные результаты главы 2

Описана экспериментальная установка – твердотельный лазерный комплекс “СТАРТ-480М”, кратко перечислены приборы. Показано, что с помощью одноимпульсного автокоррелятора, который имелся в наличии, возможно корректное измерение длительности импульсов вплоть до 20 фс.

## Глава 3. Измерение нелинейного коэффициента преломления и четырёхфотонного коэффициента поглощения

### 3.1 Измерение нелинейного показателя преломления в кварце марки КУ-1

Ввиду широкого разброса в значениях нелинейного показателя преломления, известных в литературе (раздел 2.3), возникла необходимость измерений нелинейного показателя преломления. Для этого мы провели эксперименты по измерению нелинейного показателя преломления образца кварца толщиной 1 мм с помощью методики z-сканирования с ограниченной апертурой, детально описанной в [77]. Суть методики заключается в измерении энергии, проходящей через диафрагму в дальней зоне при перемещении образца в области перетяжки. По мере приближения к фокусу доля проходимой энергии через диафрагму меняется из-за возникновения поперечной нелинейной фазы, причём максимальный диапазон изменения пропускания пропорционален В-интегралу (фазе) в фокусе. Схема экспериментов представлена на рис. 3.1.

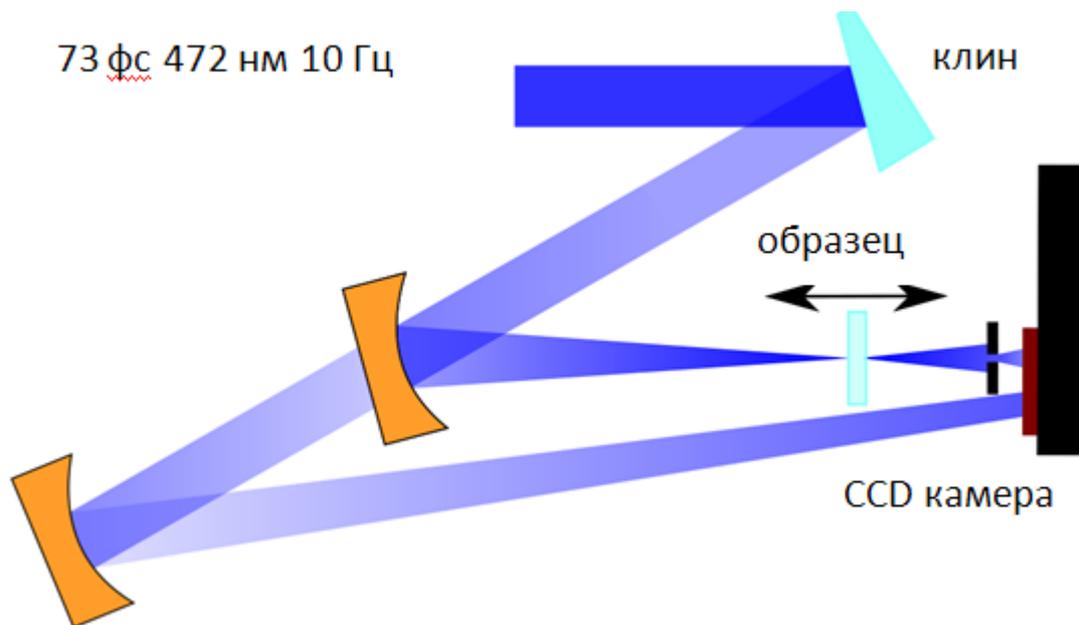


Рис. 3.1. Схема для измерения нелинейного показателя преломления

С помощью CCD камеры мы измеряли долю энергии, прошедшую через диафрагму в дальней зоне (диаметр диафрагмы 0.5 мм составлял десятую часть пучка в отсутствие нелинейного взаимодействия), при этом сам образец перемещался по перетяжке. Также на камеру падала часть начального пучка для контроля начальной энергии. Согласно [77], максимальное изменение в пропускании  $\Delta T$  (рис. 3.17) связано с фазой  $\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 I L$  ( $I=0.4$  ТВт/см<sup>2</sup> – интенсивность в максимуме,  $L=1$  мм-толщина образца) в фокусе для импульса с гауссовой формой по времени:

$$\Delta T \approx 0.286 |\Phi| \times (1 - S)^{0.25}$$

где  $S$ - пропускание апертуры. В нашем случае  $S < 2\%$  и множитель  $1-S$  можно заменить на 1. Из нормированной (на уровень проходящего излучения без нелинейного взаимодействия) разницы пропускания  $\Delta T = 42,5\%$  мы получим  $n_2 = 2,48 \times 10^{-16}$  см<sup>2</sup>/Вт. Ошибка измерения складывается из ошибки измерения энергии (7%) и длительности (6%). Суммарная ошибка составляет, таким образом, 13%.

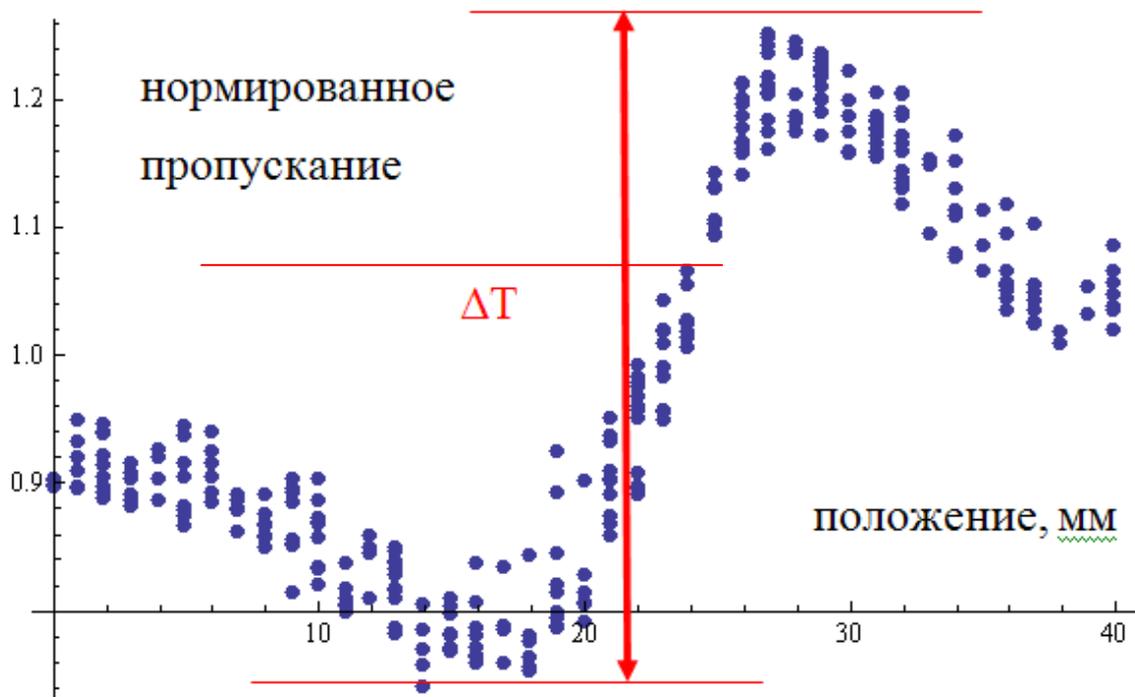


Рис. 3.2. Пропускание диафрагмы при разных положениях образца.

Мы также провели ряд экспериментов для измерения нелинейного показателя преломления другими способами. Ниже дано их описание (на рис. 3.18 приведена соответствующая схема измерений).

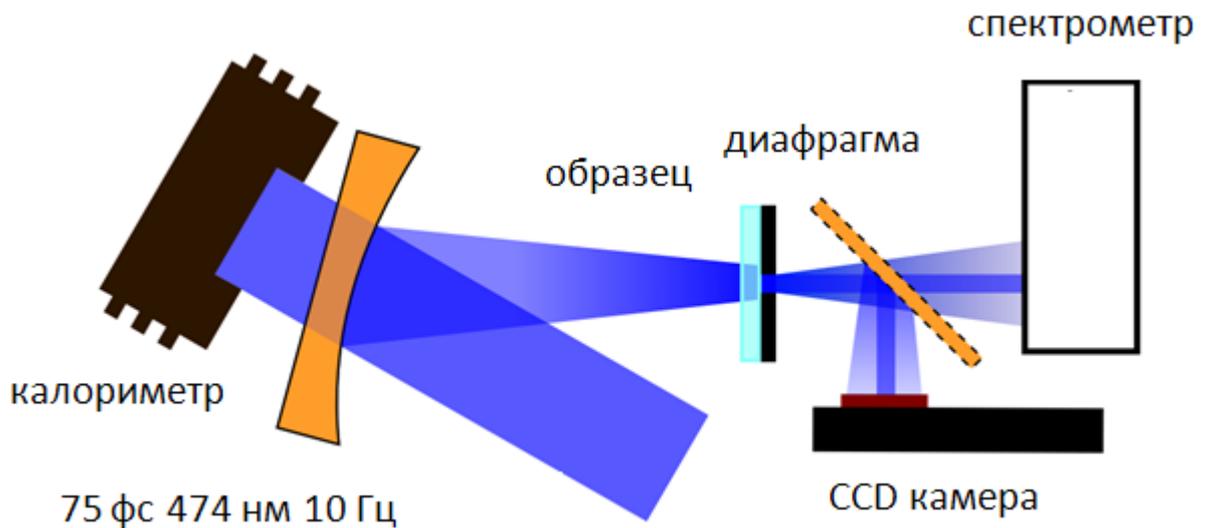


Рис. 3.3. Схема для измерения нелинейного показателя преломления

В схеме, приведённой на рис. 3.3, измерялся спектр центральной части пучка после взаимодействия с образцом. Центральную часть выделяла 30 мкм диафрагма, расположенная сразу за образцом. Контролировалась начальная энергия излучения, с помощью камеры производилась настройка диафрагмы на центральную часть пучка. Затем результаты экспериментов сопоставлялись с численными расчётами в рамках модели, описанной в разделе 1.

Проводилось две серии экспериментов. В одной серии интенсивность была сравнительно небольшая ( $<0.5 \text{ ТВт/см}^2$ ), величина  $\mathcal{W}$ -интеграла не превышала 2. В этих экспериментах нас интересовала величина относительного уширения спектра, он сохранял колоколообразную форму. В другой серии экспериментов величина  $\mathcal{W}$ -интеграла была больше, что приводило к значительному изменению формы спектра – появлению провала в результате нелинейного взаимодействия. Из сравнения экспериментально и численно полученных спектров мы находили величину  $n_2$ . Наконец, сравнивая экспериментально и численно полученные спектры при больших значениях  $\mathcal{W}$ -интеграла можно судить о степени влияния множественной самофокусировки на пучок.

Результаты первой серии экспериментов приведены в таблице 3.1. В ней даны отношения ширин по полувысоте для ряда измерений при интенсивности  $0.55 \text{ ТВт/см}^2$  и для расчётов, проведенных при значении нелинейного коэффициента преломления 2.7.

Таблица 3.1. Уширение спектров при интенсивности  $0.55 \text{ ТВт/см}^2$ .

эксперимент	расчёт
1,44	1,41
1.45	1,46
1,43	1,41
1,42	1,40

Перейдём ко второй части этих экспериментов. На рис. 3.4 изображены экспериментально измеренный и рассчитанный спектры при значении В-интеграла 2.6. Из результатов исследований развития мелкомасштабной неустойчивости (раздел 4) следует, что при таких значениях какого-либо коллапса пучка ещё не происходит. Спектры отлично согласуются при значении нелинейного показателя преломления  $2.7 \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$ .

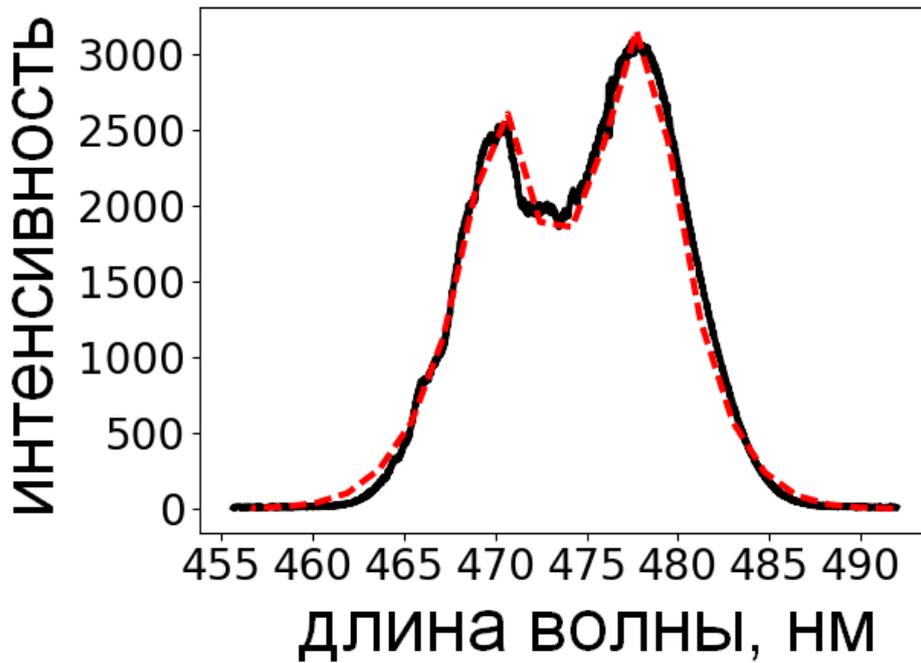


Рис. 3.4. Экспериментально измеренный (сплошная) и расчётный (красная штриховка) спектры при значении  $V$ -интеграла 2.6.

Далее приведены сравнения экспериментально измеренных и рассчитанных спектров при значении  $V$ -интегралов 4.2 и 12 (рис. 3.5). Здесь уже отчётливо видно исчезновение синей части пучка, но интересно, что красная область спектра по-прежнему хорошо описывается уравнениями, которые не учитывают возникновение множественной самофокусировки.

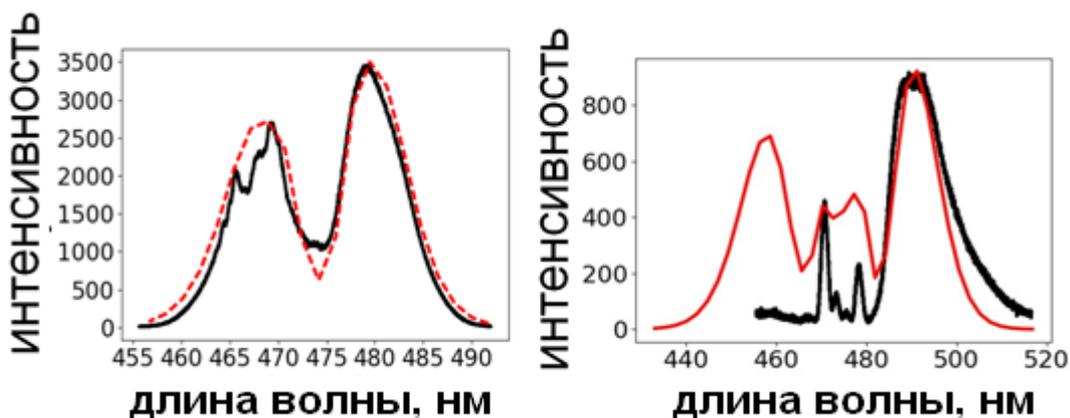


Рис 3.5. Экспериментально измеренный (сплошная) и расчётный (красная штриховка) спектры при значениях  $V$ -интегралов 4.2 (слева) и 12 (справа).

Величина нелинейного показателя преломления  $2.7 \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$ , полученная в этих сериях, согласуется с интервалом ожидаемых значений для нелинейного показателя  $(2-3) \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$  для длины волны 480 нм, полученного из анализа литературы, (раздел 1.3) и входит в интервал ошибки значения, полученного с помощью методики z-scan. В дальнейшем в расчётах мы использовали значение, измеренное z-scan методом  $n_2 = (2,5 \pm 0.3) \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$ .

### 3.2 Измерение четырёхфотонного поглощения в кварце марки КУ 1

Как упоминалось ранее в разделе 1.3, в литературе существует значительный разброс измеренных значений сечения четырёхфотонного поглощения. При этом нам не встречались работы по прямому измерению четырёхфотонного поглощения в кварце. В то же время эта величина является определяющей при расчётах концентрации плазмы.

Вначале проанализируем вопрос выбора толщины образца. Чтобы поглощение было заметным, его толщина должна быть порядка  $L = \frac{1}{\beta_4 I^3}$ .

Выразим интенсивность через длину и подставим в выражение для В-интеграла:

$$V = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 I L = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 \left( \frac{1}{\beta_4 L} \right)^{1/3} L$$

Что даст нам выражение для толщины образца

$$L = \sqrt{\frac{B^3 \lambda^3}{(2\pi n_2)^3} \beta_4} = \sqrt{\frac{B^3 \lambda^3}{(2\pi n_2)^3} (4\sigma_4 (\hbar\omega)^{-3} \rho_{nt})}$$

Где  $\lambda = 480 \text{ нм}$ ,  $\rho_{nt} = 2.1 \times 10^{22} \text{ см}^{-3}$  - концентрация вещества.

Выбрав для В-интеграла разумную величину порядка 3, для значения  $\sigma_4 = 2 \times 10^{-114} \text{ см}^8 \text{ sec}^3$ , известного из литературы [67], можно получить  $L = 300 \text{ мкм}$ .

При этом интенсивность составит  $\left( \frac{1}{(4\sigma_4 (\hbar\omega)^{-3} \rho_{nt}) L} \right)^{1/3} = 2.4 \text{ ТВт/см}^2$ . При этом

ограничение на длину образца сверху эквивалентно ограничению на интенсивность снизу.

Как мы видим, образец малой толщины позволяет наблюдать поглощение без угрозы развития мелкомасштабной самофокусировки пучка. Забегая вперёд, скажем, что измеренное нами значение сечения оказалось на порядок меньше, соответственно нам пришлось использовать образец толщиной 100 мкм. Вопрос возможного возникновения неустойчивости в наших экспериментах будет рассмотрен подробно чуть ниже. Далее изложены наши экспериментальные результаты по измерению пропускания на длине волны 476 нм в образце кварца марки КУ 1 толщиной 100 мкм в схеме с z-сканированием (образец перемещался по фокусу) и с I-сканированием (образец находился в фокусе, менялась начальная энергия). Из этих измерений мы получили значение сечения четырёхфотонного коэффициента поглощения.

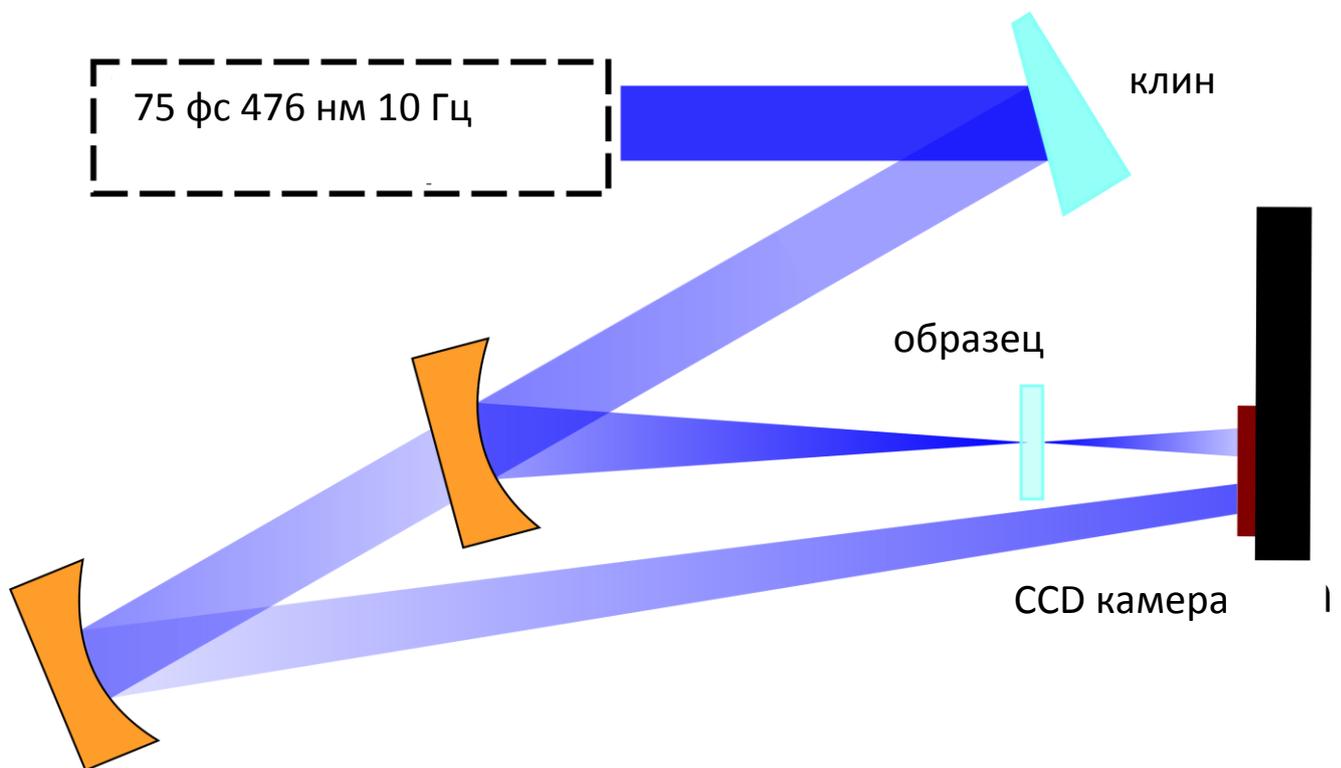


Рис. 3.6. Схема эксперимента по измерению коэффициента четырёхфотонного поглощения.

В эксперименте использовалось выходное излучение титан-сапфирового СРА комплекса “СТАРТ-480М” (АВЕСТА-ПРОЕКТ, ООО). Фундаментальное излучение комплекса на длине волны 952 нм преобразовывалось во вторую гармонику с центральной длиной волны 476 нм. Спектрально-ограниченные

импульсы второй гармоники длительностью 75 фс и энергией до 100 мкДж отражались от клина и фокусировались собирающим зеркалом на образец кварца марки КУ1 толщиной 100 мкм (рис. 3.6, образец находился в перетяжке).

Вначале опишем эксперименты, выполненные в схеме с I-сканированием. Проводились две серии экспериментов с собирающими зеркалами с различными фокусными расстояниями. В серии А использовалось собирающее зеркало с фокусным расстоянием 40 см, диаметр пучка на образце составлял 64 мкм по уровню  $1/e^2$ . В серии В использовалось собирающее зеркало с фокусным расстоянием 60 см, диаметр пучка на образце составлял 93 мкм по уровню  $1/e^2$ . При этом клин ослаблял начальное излучение пучка в 8.9 и в 4.0 раз соответственно (в сериях А и В угол падения на клин был разным), чтобы уровень интенсивности на подложке не превышал  $8 \text{ ГВт/см}^2$ . (В-интеграл при этой интенсивности составлял 3.3 исходя из измеренного нами в предыдущем разделе нелинейного коэффициента преломления  $n_2=2.5 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$ ). При выбранных значениях диаметров, с одной стороны, не возникало самофокусировки пучка как целого в образце. С другой стороны, мощность пучка ( $<0.3 \text{ ГВт}$ ) была меньше мощности самофокусировки в воздухе (1 ГВт) [78]. Нелинейный набег фазы в воздухе не превышал 1 из-за малости расстояния Реллея. Пучок, прошедший через образец, а также часть начального пучка направлялись на ПЗС камеру (SP 620U фирмы SPIRICON). Камера позволяла измерить отношение энергий этих двух пучков с высокой точностью (отклонение показаний матрицы от линейной зависимости составляет не более 1-2%). Затем в ходе отдельных измерений показания ПЗС камеры были сопоставлены с показаниями калориметра (пироэлектрическая головка PE 50 V2 фирмы OPHIR). Входная энергия изменялась с помощью перестройки твердотельного комплекса. В ходе отдельных экспериментов измерялись длительность и спектр начального пучка.

Эксперименты по z-сканированию проводились только с собирающим зеркалом с фокусным расстоянием 40 см. Отличие от схемы с I-сканированием заключалось в том, что образец перемещался вдоль перетяжки на

микрометрическом столике, в то время как начальная энергия оставалась примерно постоянной и составляла 10 мкДж.

Отдельно бы хотелось рассмотреть вопрос возможности развития множественной самофокусировки в наших экспериментах. В [79, 80] было показано, что начало мелкомасштабной самофокусировки, помимо очевидных изменений в изображении пучка, сопровождается формированием ореола. Увеличения потока излучения под углом  $\sqrt{2n(n_2I)} \approx 0.07$  (угол наибольшего усиления шумов согласно [81]) не наблюдалось, как и при наблюдениях с 1 мм образцом до В интеграла 4-5, когда никаких признаков мелкомасштабной самофокусировки обнаружено не было в аналогичных измерениях в разделе 4.3.3.

Для анализа экспериментальных данных необходимо построить расчётную кривую для пропускания образца при четырёхфотонном взаимодействии при заданном коэффициенте поглощения  $\beta_4 = 4\sigma_4 (\hbar\omega)^{-3} \rho_{nt}$ . Так как расстояние самофокусировки пучка как целого (1.5 мм для наименьшего диаметра 63 мкм) намного больше толщины образца 100 мкм, то поперечные эффекты можно не учитывать. Это даёт возможность использовать стандартную формулу зависимости интенсивности при четырёхфотонном поглощении от толщины  $z$

$$I(z) = \frac{I_0}{\sqrt[3]{1 + 3\beta_4 I_0^3 z}}$$

и проинтегрировать её по всему распределению  $I(r,t)$ . Его аппроксимируем гауссовой кривой, как по времени, так и по радиусу

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \text{Exp} \left[ -\frac{t^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right]$$

Этот вывод основан на хорошей аппроксимации начального спектра гауссовой кривой, а также на хорошем совпадении построенной по спектру импульса автокорреляционной функции с экспериментально измеренной (рис. 3.7).

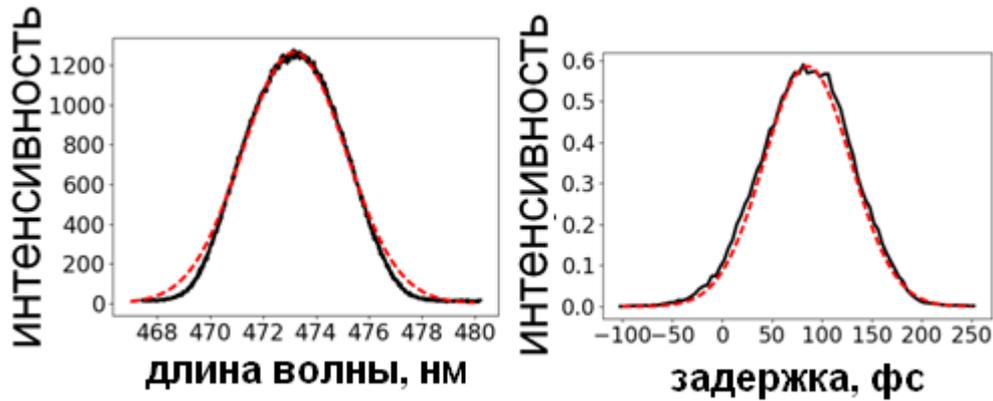


Рис. 3.7. Спектр (слева) и автокорреляционная функция (справа) начального излучения с их аппроксимацией гауссовыми кривыми. (штриховка).

Для проверки соответствия радиального распределения гауссовой зависимости мы провели отдельные исследования. В них мы измеряли диаметр пучка, в котором содержалось 86,5% энергии, а затем измеряли долю излучения, которая содержалась в области с вдвое меньшим диаметром (в случае с распределением  $\text{Exp}\left[-\frac{r^2}{2\sigma}\right]$  отвечает измерениям с диаметрами  $4\sigma$  и  $2\sigma$ ).

Результаты представлены в таблице 3.2, сам пучок представлен на рис. 3.8.

Таблица 3.2. Сравнение радиального распределения энергии пучка с различными распределениями

распределение	гаусс $\text{Exp}\left[-r^2\right]$	Экспериментальный пучок	Квадрат гиперболического секанса $\text{Sech}^2[-r]$
Доля энергии	39,4%	39,5%	47,1%

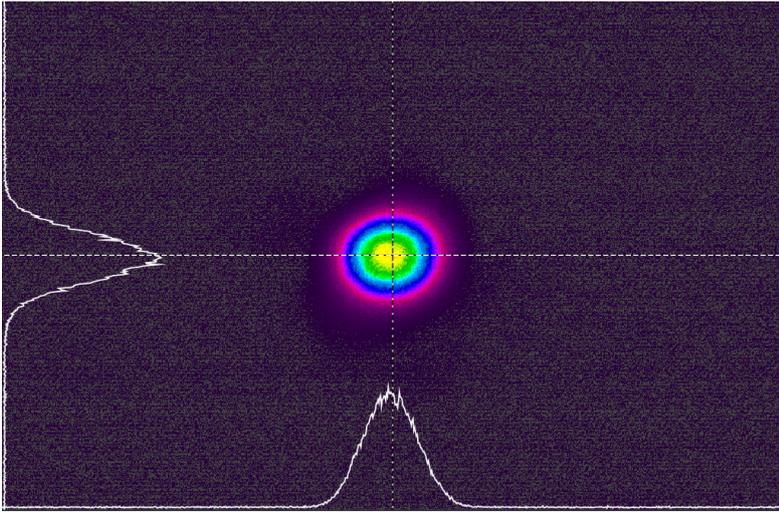


Рис. 3.8. Профиль пучка в точке взаимодействия

Видно, что и радиальное распределение энергии хорошо аппроксимируется гауссовой зависимостью. Это подтверждается близостью  $M^2=1.01$  (значение получено по методике, описанной в [82]) к единице. В этом случае итоговое выражение для пропускания образца можно записать как

$$T(\beta_4, I_0) = \iint \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 3\beta_4 I_0^3 \text{Exp}\left[-\frac{3t^2}{2} - \frac{3r^2}{2}\right]}} \left( \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \text{Exp}\left[-\frac{t^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right] \right) 2\pi r dr dt \quad (4)$$

На рис. 3.9 изображены отношения энергии двух пучков, измеренные с помощью ПЗС камеры - прошедшего через образец и части начального пучка при различной интенсивности. Они нормированы на отношение энергий для небольшой интенсивности, когда поглощения нет, для того, чтобы полученная кривая являлась кривой пропускания образца от интенсивности. Кроме того, здесь построена дополнительная кривая (коричневый цвет) – теоретически полученная зависимость пропускания от интенсивности при коэффициенте поглощения  $\beta_4=0.13 \text{ ТВт}^{-3}\text{см}^5$ , рассчитанная по формуле (4).

График показывает хорошее совпадение измерений в сериях А и В. Также на эту зависимость хорошо накладывается расчётная кривая для пропускания 100 мкм образца с коэффициентом многофотонного поглощения  $0.13 \text{ ТВт}^{-3}\text{см}^5$ .

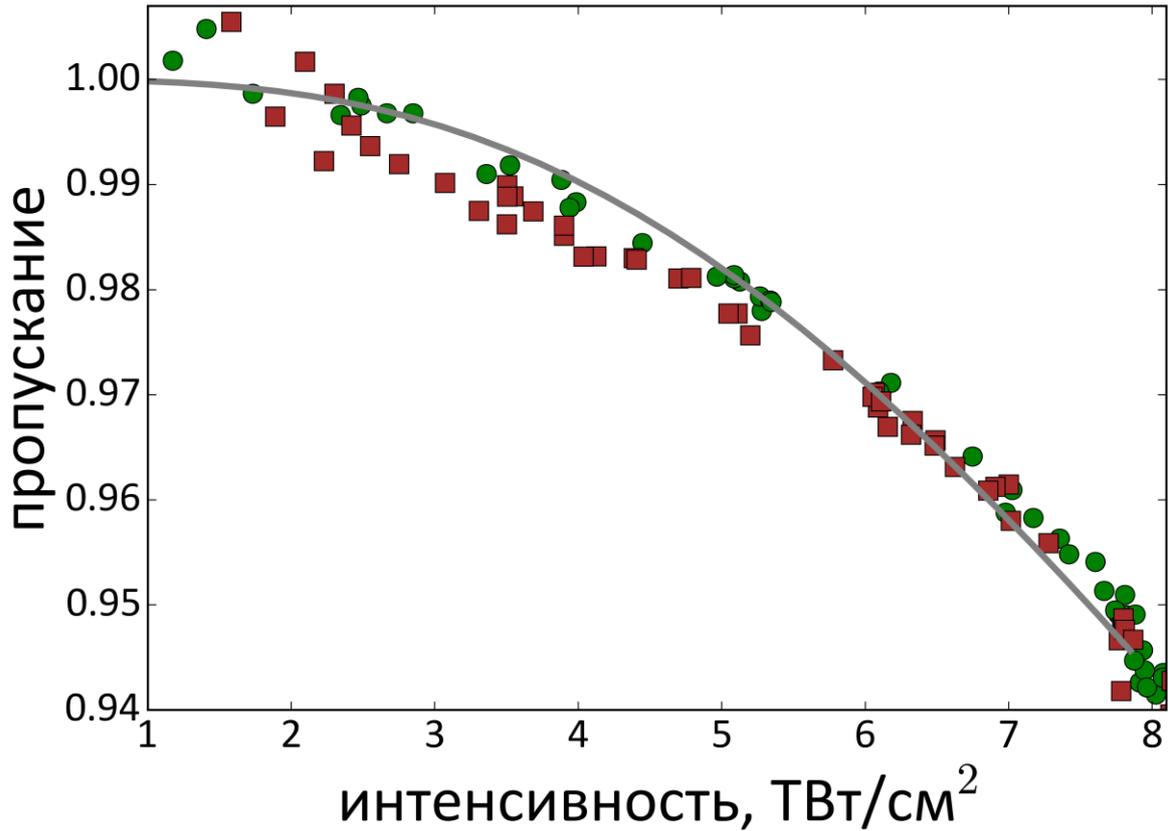


Рис. 3.9. Нормированное отношение энергии, прошедшей через образец, к начальной для случая А (красные квадраты) и В (зелёные кружки) в зависимости от интенсивности. Серая кривая - теоретически полученная зависимость для коэффициента поглощения  $0.13 \text{ ТВт}^{-3}\text{см}^5$ .

На рис. 3.10 приведены нормированные результаты z-сканирования. Фокусное расстояние собирающего зеркала составляло 40 см, диаметр в перетяжке составлял 64.5 мкм, энергия падающего излучения составляла 10 мкДж. Величина провала кривой пропускания 94% соответствует коэффициенту поглощения  $0.15 \text{ ТВт}^{-3}\text{см}^5$ . Несимметричность экспериментальной кривой относительно фокуса связана с различной формой прошедшего через образец пучка на камере. Когда образец находился до фокуса, пучок в дальней зоне из-за возникновения нелинейной поперечной фазы “размывался”, в фокусе и после него, наоборот, нелинейная фаза приводила к тому, что диаметр пучка на камере был меньше, чем без образца. Учитывая небольшую нелинейность отклика CCD камеры, это и привело к несимметричности кривой.

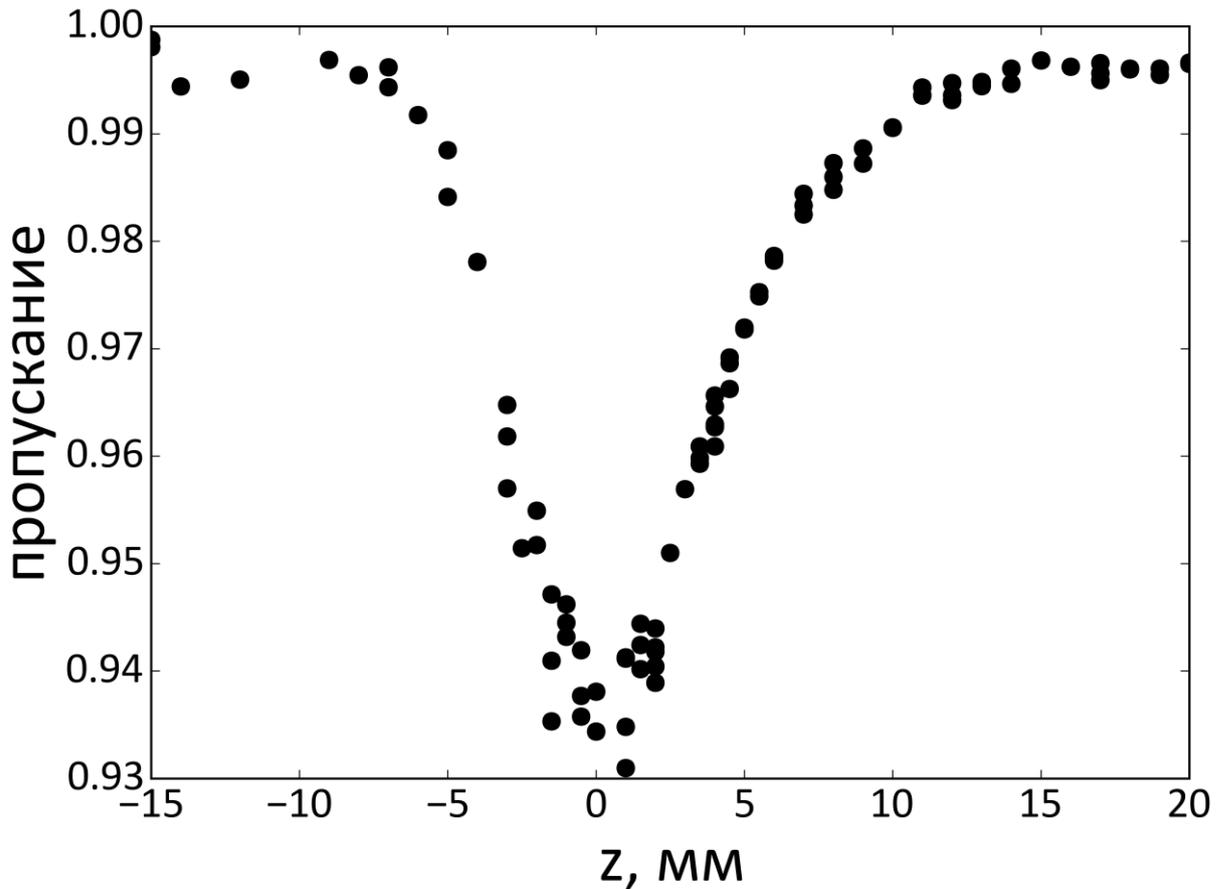


Рис. 3.10. Нормированная кривая пропускания, полученная методом Z-сканирования.

Основная погрешность в определении коэффициента поглощения связана с измерением интенсивности. Она складывается из относительной погрешности измерения диаметра, энергии и длительности

$$\varepsilon_{Intensity} = 2\varepsilon_{Diameter} + \varepsilon_{Energy} + \varepsilon_{Duration} = 2 \times 0.02 + 0.04 + 0.04 = 0.12$$

Соответственно относительная погрешность определения коэффициента поглощения, учитывая влияние нелинейности камеры, составила 50%. В этот интервал входят полученные двумя методами коэффициенты многофотонного поглощения -  $0.13 \text{ ТВт}^{-3} \text{ см}^5$  и  $0.15 \text{ ТВт}^{-3} \text{ см}^5$ . На основании этих измерений будем полагать многофотонный коэффициент поглощения равным  $(0.14 \pm 0.07) \text{ ТВт}^{-3} \text{ см}^5$ , что соответствует  $\sigma_4 = (1.0 \pm 0.5) \times 10^{-115} \text{ см}^8 \text{ с}^3$ . Отметим, что это значение на

порядок меньше известных из литературы [69-73] для различных кристаллических веществ.

Оценим влияние лавинообразной ионизации на величину поглощаемой энергии в нашем случае. Используем уравнение для эволюции плотности плазмы [83] (2)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho_e = \sigma_K (\hbar\omega)^{-K} \rho_{nt} I^K + \frac{\sigma}{E_{gap}} \rho_e I - \frac{1}{\tau_r} \rho_e$$

Показатель многофотонного поглощения  $K=4$ . Первое слагаемое в правой части отвечает за вклад многофотонного поглощения в генерацию свободных носителей, второе слагаемое - за вклад лавинообразной ионизации и третье за рекомбинацию носителей. На начальном этапе доминирующим процессом генерации является многофотонное поглощение, и в уравнении (2) можно учитывать только его. Тогда плотность свободных зарядов, которую создаст поглощение за время взаимодействия можно оценить как  $\rho_e = \sigma_4 (\hbar\omega)^{-4} I^4 \rho_{nt} T$ . Сделаем грубую оценку добавки, которую может дать лавинообразная ионизация. Её примерный вклад можно оценить, оставив в уравнении (2) в правой части только второе слагаемое.

Концентрация свободных зарядов увеличится за счёт лавинообразной как

$$\rho = \rho_e \text{Exp} \left[ \frac{\sigma}{E_{gap}} It \right]$$

Сечение обратного тормозного поглощения можно выразить через столкновительный параметр  $\tau_c$   $\sigma = \frac{1}{n_0 \rho_c \tau_c c}$  где  $\rho_c = \frac{\omega^2 m \epsilon_0}{e^2}$  критическая плотность. При небольших концентрациях свободных зарядов  $\tau_c$  определяется электрон-фононным взаимодействием и составляет 23 фс [74]. Тогда

$\left[ \frac{\sigma}{E_{gap}} It \right] \approx 0,06$  и вклад лавинообразной ионизации в генерацию новых носителей

составляет не более 10%, то есть его с учётом ошибок измерений можно не принимать во внимание.

Значит, концентрация свободных электронов примерно составляет  $\rho_e = \sigma_4 (\hbar\omega)^{-4} I^4 \rho_{in} T$ . Можно оценить вклад обратного тормозного излучения в поглощение

$\frac{\sigma \rho_e I}{\beta I^4} = \frac{\sigma IT}{4\hbar\omega} \approx 0.1$  Как видно, вклад обратного тормозного поглощения тоже можно не учитывать.

Мы можем заключить, что на результаты наших прямых измерений многофотонного поглощения существенного влияния множественная самофокусировка и поглощение в плазме не оказали. В любом случае, их влиянием нельзя объяснить расхождение в сторону уменьшения с известными в литературе значениями, так как эти факторы могут только увеличить наблюдаемое поглощение.

### 3.5 Основные результаты главы 3

Измерены значения нелинейного показателя преломления  $n_2 = (2.5 \pm 0.3) \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$  и четырёхфотонного коэффициента поглощения  $\sigma_4 = (1.0 \pm 0.5) \times 10^{-115} \text{ см}^8 \text{ сек}^3$  для УФ кварца марки КУ1.

## Глава 4. Сокращение длительности импульсов

### 4.1 Измерения длительности, спектра и профиля при взаимодействии отрицательно chirпированного излучения с пластинками кварца КУ

Первые исследования нелинейного взаимодействия с оптически прозрачными средами проводились с отрицательно chirпированным пучком [30-32]. Их схема показана на рис. 4.1. Она состояла из призматического стретчера (использовался для внесения отрицательного chirпа), пространственного фильтра, элементов, необходимых для фокусировки излучения на образец, вакуумной камеры, входное окно которой и являлось образцом, диафрагмы для селекции излучения и конечной схемы регистрации. Одно из зеркал этой схемы полупрозрачно, и по излучению, прошедшему сквозь него, с помощью калориметра измерялась начальная энергия в импульсе.

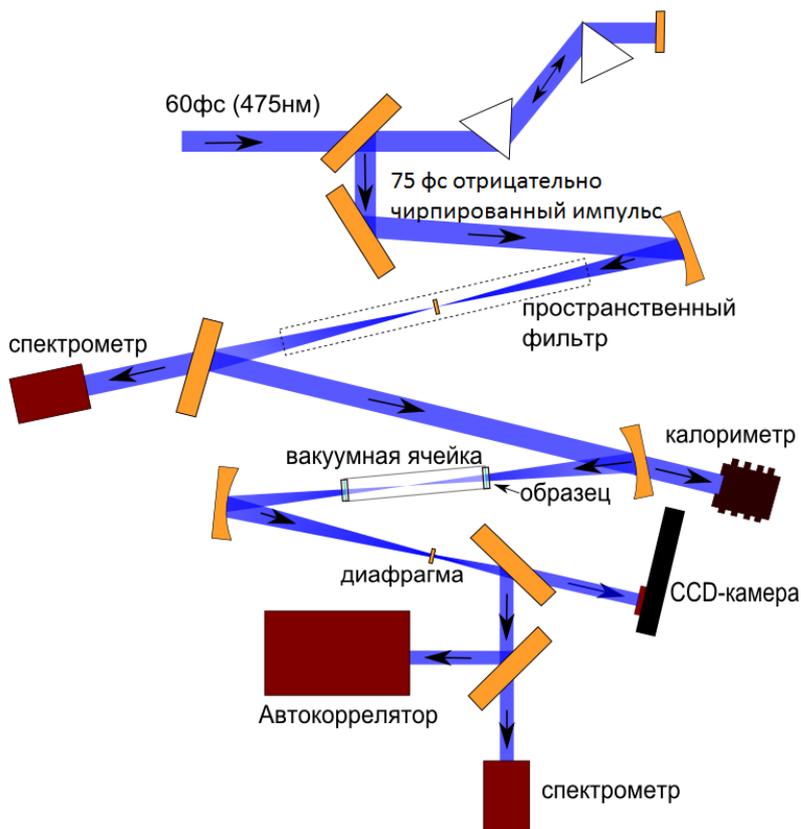


Рис. 4.1. Схема эксперимента по взаимодействию отрицательно chirпированного излучения с веществом.

Призменный стретчер состоял из двух призм (размеры – верхняя грань равнобедренный треугольник со сторонами 12, 12 и 13 см, высота призмы 12 см). Угол при вершине каждой призмы составлял  $66^{\circ}33'45''$  для соответствия угла наименьшего отклонения углу Брюстера. Это позволило уменьшить потери на отражение и облегчало настройку. Излучение проходило через призмы два раза для компенсации пространственного chirpa. Однако, несмотря на то, что для уменьшения нелинейности мы увеличили диаметр проходящего излучения через призмы до трёх сантиметров, возникали потери при отражении, вызванные нелинейным вращением поляризации, самофокусировка и связанный с ней астигматизм (дальняя зона пучка после призменного стретчера приведена на рис. 4.2). Кроме значительного ухудшения дальней зоны пучка, эти факторы ограничивали энергию импульса, прошедшего через стретчер величиной  $\sim 3$  мДж.

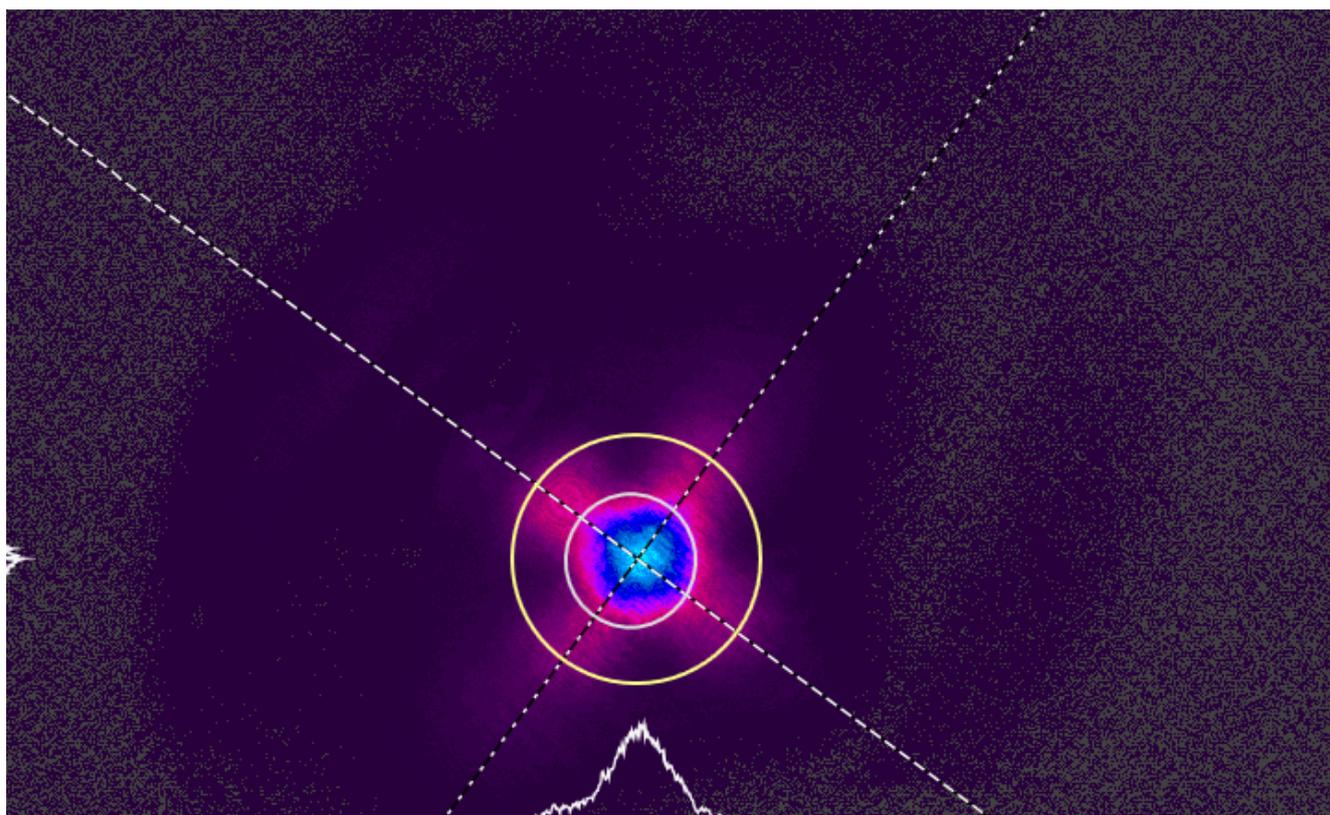


Рис. 4.2. Дальняя зона излучения после призменного стретчера.

Для формирования гауссова пучка излучения применялся пространственный фильтр. Он представлял собой вакуумную камеру с капилляром с диаметром 180-220 мкм. Окнами служили кварцевые пластинки

толщиной 1 мм. На выходе из пространственного фильтра формировался пучок гауссовой формы с энергией до 600 мкДж (рис. 4.3).

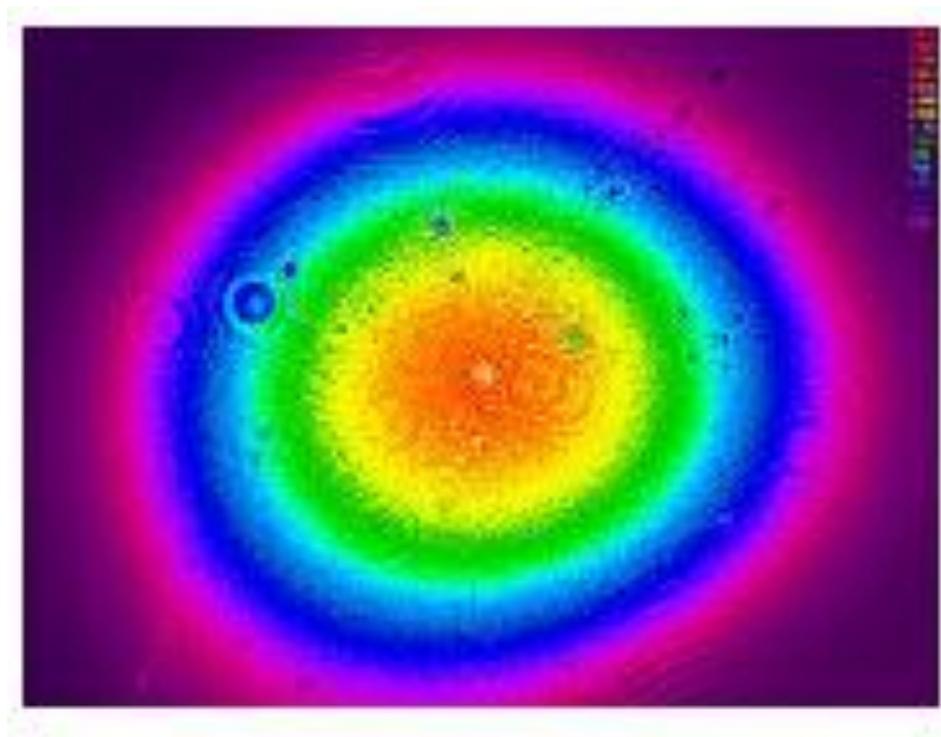


Рис. 4.3. Пучок на выходе пространственного фильтра.

Длительность излучения, прошедшего через пространственный фильтр, измерялась в отдельной серии экспериментов с помощью одноимпульсного автокорреллятора ASF-20. Его схема описана ранее в разделе 2.2.

Сфокусированное излучение падало на образец – 1мм кварцевую пластинку, которая являлась входным окном вакуумной камеры. Перетяжка находилась внутри вакуумной камеры, откачанной до давления в 2 мбар для уменьшения влияния воздуха. Интенсивность взаимодействия варьировалась перемещением камеры вдоль лазерного излучения.

Дальняя зона пучка, прошедшего через вакуумную камеру, приобретала кольцеобразную структуру. Как показывают измерения, на периферии пучка находилось излучение, испытавшее слабое взаимодействие с образцом и сохраняющее начальный спектр ( $\sim 3\text{нм}$ ) и длительность (рис. 4.4). Соответственно основное внимание в исследованиях уделялось центральной части пучка.

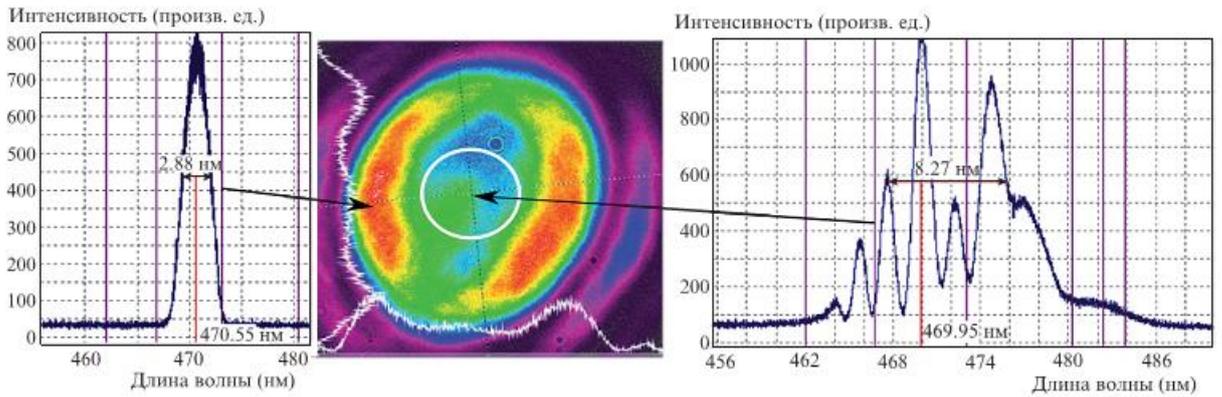


Рис. 4.4. Спектры после взаимодействия в дальней зоне: на краю пучка (справа) и в центре (слева).

Измерялись длительность для центральной части прошедшего излучения, спектр и профиль пучка. При увеличении интенсивности спектр уширялся, а ширина автокорреляционной функции уменьшалась. При этом можно было выделить два типа взаимодействия: случай условно низкой интенсивности (примерно до  $3 \text{ ТВт/см}^2$ ), когда наблюдалось расщепление импульса, а спектр уширялся почти симметрично относительно центральной длины волны излучения, и случай высокой интенсивности, когда происходило смещение спектра в синюю часть и формирование одиночного импульса. Эти результаты представлены на рис. 4.5.

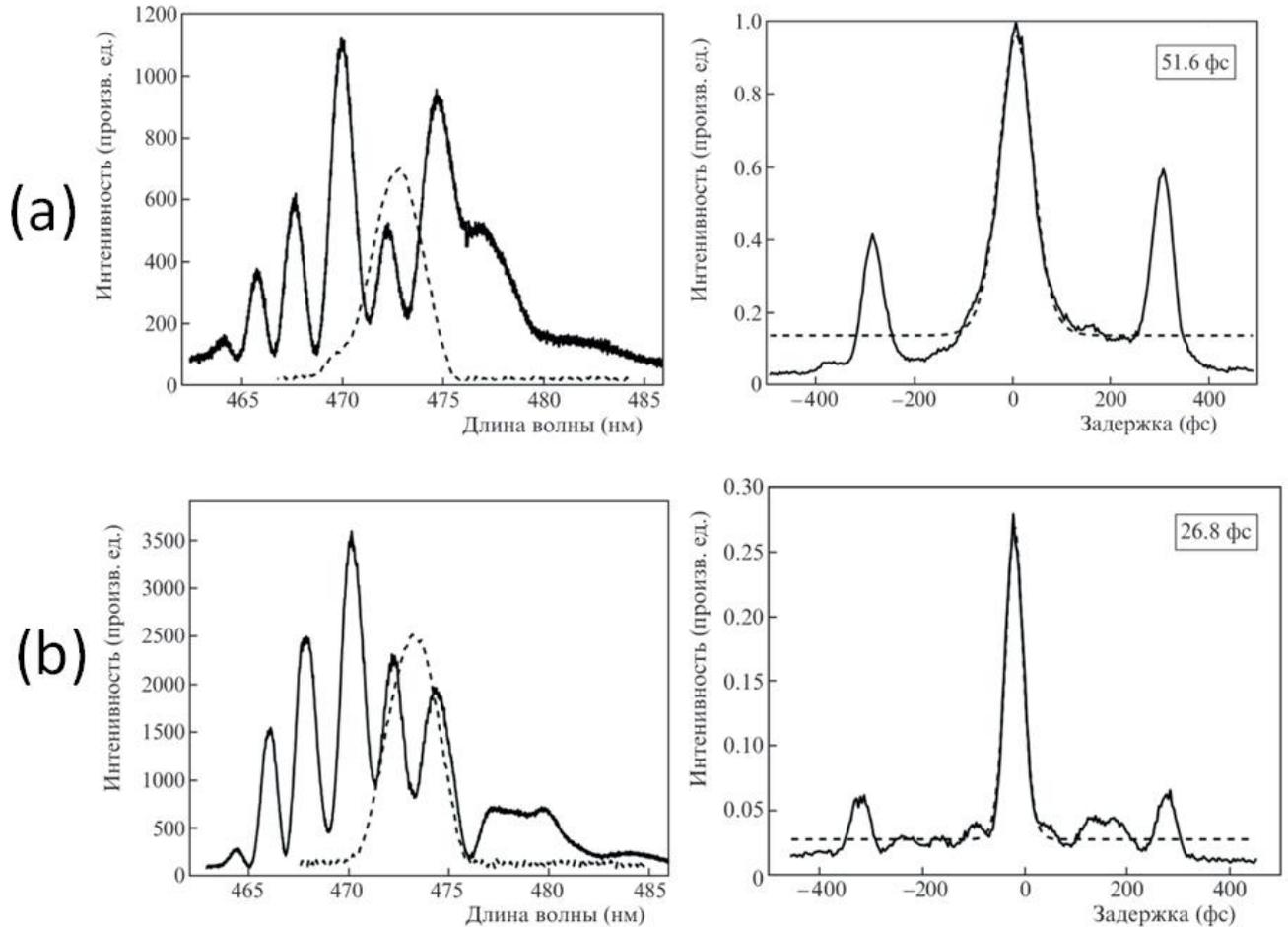


Рис. 4.5. Спектры и длительности после взаимодействия в дальней зоне в центре пучка: А) при интенсивности до  $3 \text{ ТВт/см}^2$  и В) при интенсивности более  $3 \text{ ТВт/см}^2$ .

Данные результаты интерпретируются следующим образом. При “малой” интенсивности во временном максимуме действует керровская линза, и в дальней зоне это излучение расходится с большим углом, чем излучение переднего и заднего фронтов, для которого эффекты керровского линзирования слабы. В итоге импульс на оси в дальней области состоит из излучения заднего и переднего фронтов, т. е. из двух импульсов, что и подтверждается автокорреляционной функцией. При “большой интенсивности” в дальней зоне на оси происходит селекция одного из импульсов, смещение спектра в синюю часть позволяет предположить, что излучение переднего фронта формирует одиночный импульс. В дальнейших экспериментах (описанных в разделе 4.3) мы установили, что излучение на заднем фронте рассеивается из-за развития процесса множественной мелкомасштабной самофокусировки.

Для этих экспериментов мы проводили численные расчёты (они приведены в следующем разделе). В них нам удалось описать поведение излучения, когда происходило относительно симметричное уширение спектра. Однако дальнейшее исследование механизма сокращения длительности импульсов, в частности, формирование одиночного импульса, мы проводили со спектрально-ограниченным импульсом, так как в случае начального отрицательно чирпированного импульса ширина спектра становится слишком большой и измерения автокоррелятора могут быть недостоверными. Данные исследования приведены в разделах 4.3 – 4.4.

## **4.2 Расчёты взаимодействия отрицательно чирпированного импульса**

Вначале мы моделировали взаимодействие излучения с образцом, а затем распространение пучка в свободном пространстве, так как все измерения спектра и длительности проводились на расстоянии более полуметра после взаимодействия.

Начальные условия: отрицательно чирпированный импульс с длительностью 120 фс (полученный из спектрально ограниченного импульса с длительностью 80 фс) с пиковой интенсивностью  $3 \text{ ТВт/см}^2$  и с диаметром по уровню  $1/e^2$  280 мкм взаимодействовал с образцом. Кроме того, пространственное распределение фазы излучения отвечало сходящемуся пучку с перетяжкой на расстоянии 5 см от точки взаимодействия. В качестве параметров среды мы использовали материальные константы кварца (выбор их значений описан в разделе 1.3). После взаимодействия с образцом происходил расчёт распространения излучения в свободном пространстве на расстоянии до 20 см. На рис. 4.6 приведены результаты этих расчётов – интенсивность, фаза и спектр излучения при взаимодействии с образцом толщиной 1 мм и при распространении в свободном пространстве на оси пучка. Расчёты интенсивности показывают расщепление, которое наблюдалось в экспериментах для случая “малой

интенсивности”, до  $3 \text{ ТВт/см}^2$ . Кроме того, результаты расчётов также дают в дальней зоне кольцеобразный поперечный профиль.

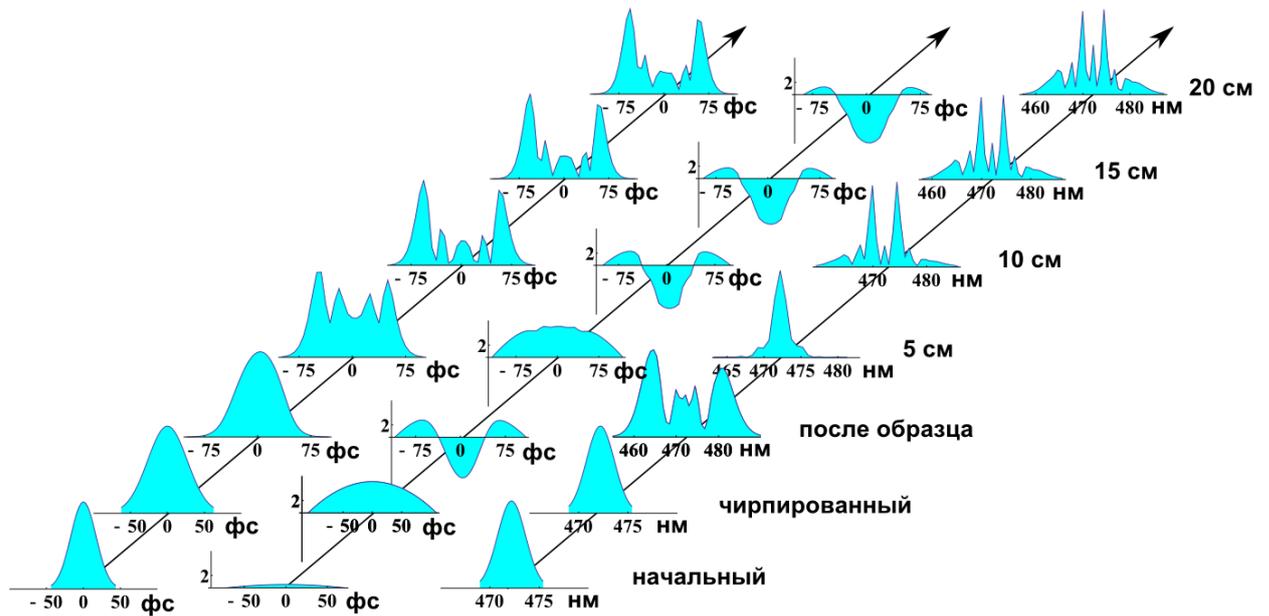


Рис. 4.6. Интенсивность, фаза и спектр излучения при взаимодействии с 1 мм образцом и при распространении в свободном пространстве на оси пучка.

Сравнение спектров в дальней зоне приведено на рис. 4.7.

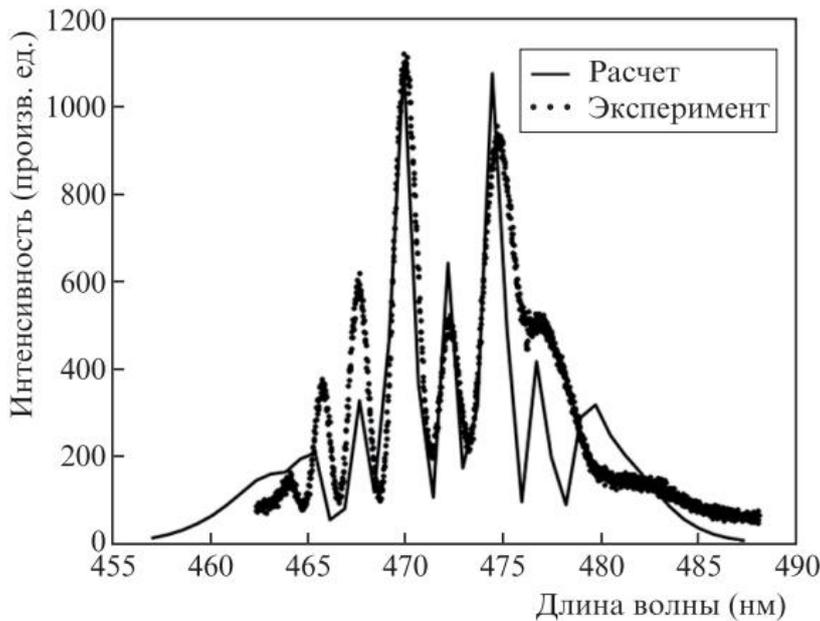


Рис. 4.7. Сравнение спектров в дальней зоне. Синий – экспериментальные данные, красный – расчёт для интенсивности  $3 \text{ ТВт/см}^2$ .

Хорошее согласие экспериментальных расчётов при малой интенсивности говорит о том, что основным механизмом формирования спектра в данных условиях является фазовая самомодуляция. Расщепление импульса в приосевой области пучка, также наблюдаемое экспериментально, вызвано пространственным перераспределением энергии, при котором излучение вблизи максимума временного профиля импульса испытывает сильную рефракцию за счёт образования керровской линзы и вытесняется на периферию пучка за фокальной плоскостью в дальней зоне. Эта часть не испытала сильного влияния фазовой самомодуляции и поэтому сохраняла спектр, близкий к начальному, что и наблюдается в эксперименте (рис. 4.4).

### 4.3 Взаимодействие спектрально-ограниченного излучения с пластинками кварца КУ и формирование мелкомасштабной неустойчивости

#### 4.3.1 Экспериментальная схема

Схема исследования приведена на рис. 4.8

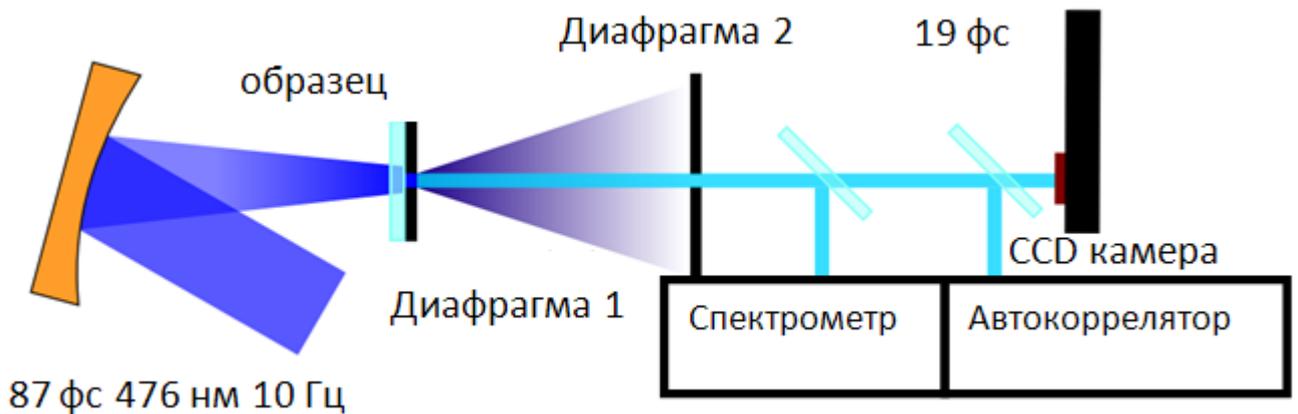


Рис. 4.8. Схема эксперимента по взаимодействию спектрально-ограниченного импульса с кварцем.

В экспериментах со спектрально-ограниченным импульсом исчезла необходимость в использовании призменного стретчера, необходимого для получения отрицательного чирпа. Это, а также исключение многопроходной

схемы усиления из твердотельного комплекса привело к значительному улучшению качества пучка, что позволило отказаться от пространственной фильтрации. Сама схема взаимодействия была также изменена – теперь сразу за образцом находилась диафрагма. Она использовалась для выделения области с примерно одинаковой интенсивностью, кроме того, она существенно уменьшала мощность проходящего излучения (до 0.2 ГВт при критической 1 ГВт [78]). Это избавило нас от необходимости использовать вакуумную ячейку, без образца спектр и длительность излучения сохранялись. Спектрально-ограниченные импульсы второй гармоники длительностью 87 фс с энергией до 450 мкДж фокусировались зеркалом с фокусным расстоянием 60 см на образец кварца марки КУ1 толщиной 1 мм (рис. 3.6, образец находился перед фокусом на расстоянии 7 см от последнего). Радиус пучка в точке взаимодействия составлял 0.63 мм по уровню  $1/e^2$ . Интенсивность излучения на образце изменялась в пределах (0.8–3 ТВт/см<sup>2</sup>) с помощью угловой отстройки кристалла KDP. Спектр и длительность импульса при этом практически не менялись. Как было сказано ранее, вплотную к выходной плоскости образца прилежала диафрагма 1 с диаметром отверстия 100 мкм, которая пропускала центральную часть пучка после взаимодействия. Излучение на выходе диафрагмы (рис. 4.9) состояло из центрального ядра, угловой размер которого не зависел от интенсивности в исходном пучке, и рассеянного излучения. Это излучение наблюдалось при интенсивности выше 1.5 ТВт/см<sup>2</sup>, а его угловой размер увеличивался с ростом интенсивности (при интенсивности взаимодействия 3 ТВт/см<sup>2</sup> угол составлял 0.1 рад, угол сходимости начального излучения <0.01 рад). Такое же излучение ранее наблюдалось при экспериментах с неодимовым лазером ([79, 80]). Излучение ядра, выделяемое с помощью диафрагмы 2, направлялось на автокоррелятор, спектрометр и профилометр.

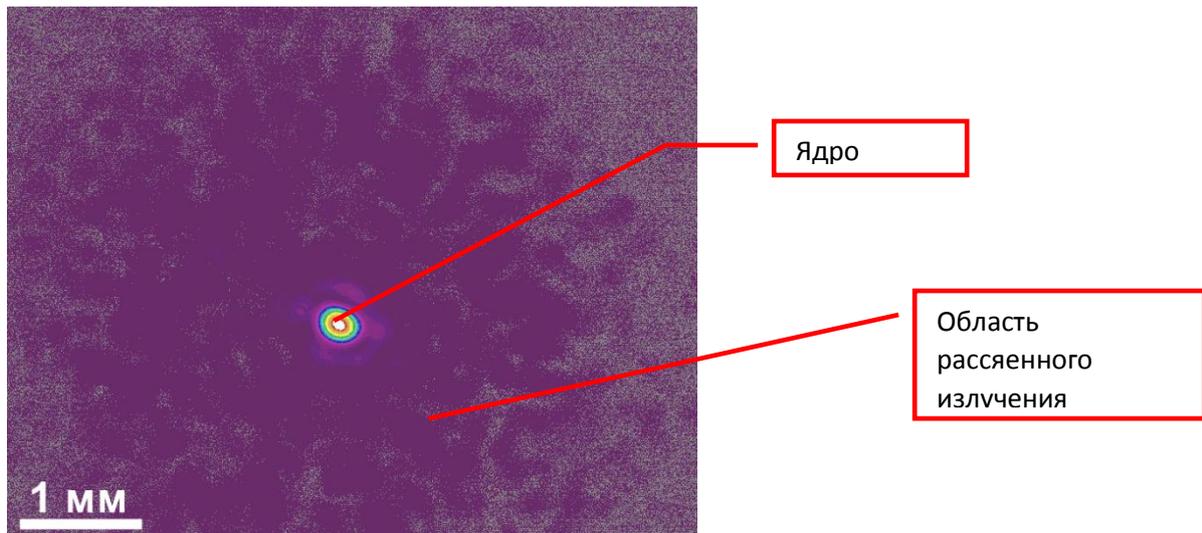


Рис. 4.9. Излучение на выходе из диафрагмы диаметром 100 мкм при интенсивности  $3 \text{ ТВт/см}^2$  на расстоянии 5 см.

В ходе другой серии экспериментов исследовался профиль излучения сразу за образцом с помощью переноса изображения (ближняя зона, рис. 4.10). В ряде измерений сразу за второй линзой с фокусным расстоянием 7 см ставилась диафрагма с диаметром отверстия 1 мм, равным диаметру ядра для отсечения рассеянного излучения. Для устранения возможного влияния нелинейности в воздухе и линзе в схему были введены клинья.

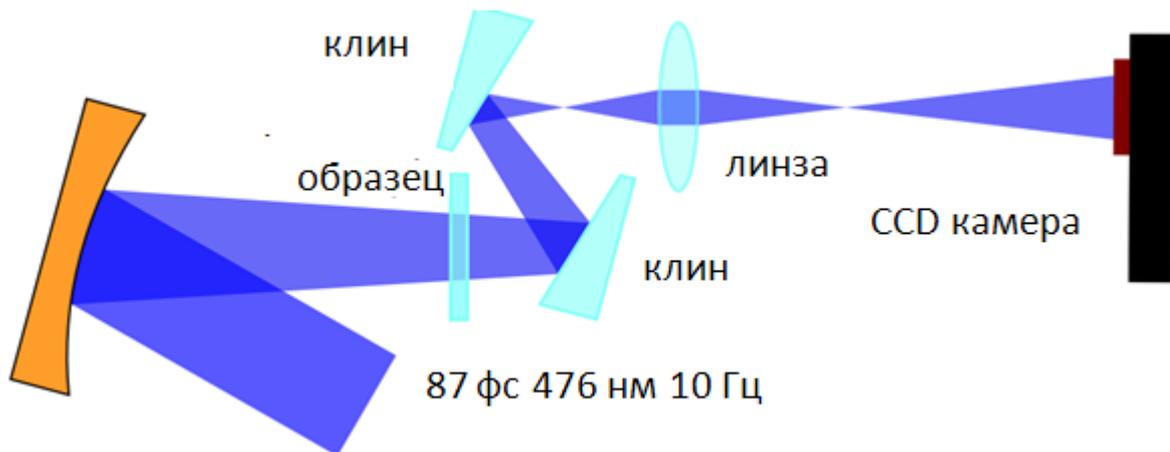


Рис. 4.10. Схема наблюдения изображения на выходе из образца.

### 4.3.2 Результаты

На рис. 4.11 приведены спектры излучения и изображение профилей пучка в плоскости, совпадающей с выходной плоскостью образца (ближняя зона), в отсутствие образца и с образцом для интенсивностей  $I_{in}$  1.1, 1.5, 2.2 и 3 ТВт/см<sup>2</sup> соответственно. Изображения получены в полном угле рассеянного излучения без диафрагмы. Также приведена величина параметра  $\eta$ , представляющего собой отношение энергии в ядре к энергии, которая проходит в таких же условиях через диафрагму 1 (рис. 4.8) без образца.

На рис. 4.12 приведены измеренные автокорреляционные функции для начального пучка и излучения, прошедшего через диафрагму при интенсивности 3 ТВт/см<sup>2</sup>. Пунктиром изображены автокорреляционные функции, полученные обратным преобразованием Фурье-спектров этих импульсов. Их совпадение говорит о том, что как начальный, так и прошедший через диафрагму импульсы близки к спектрально-ограниченным.

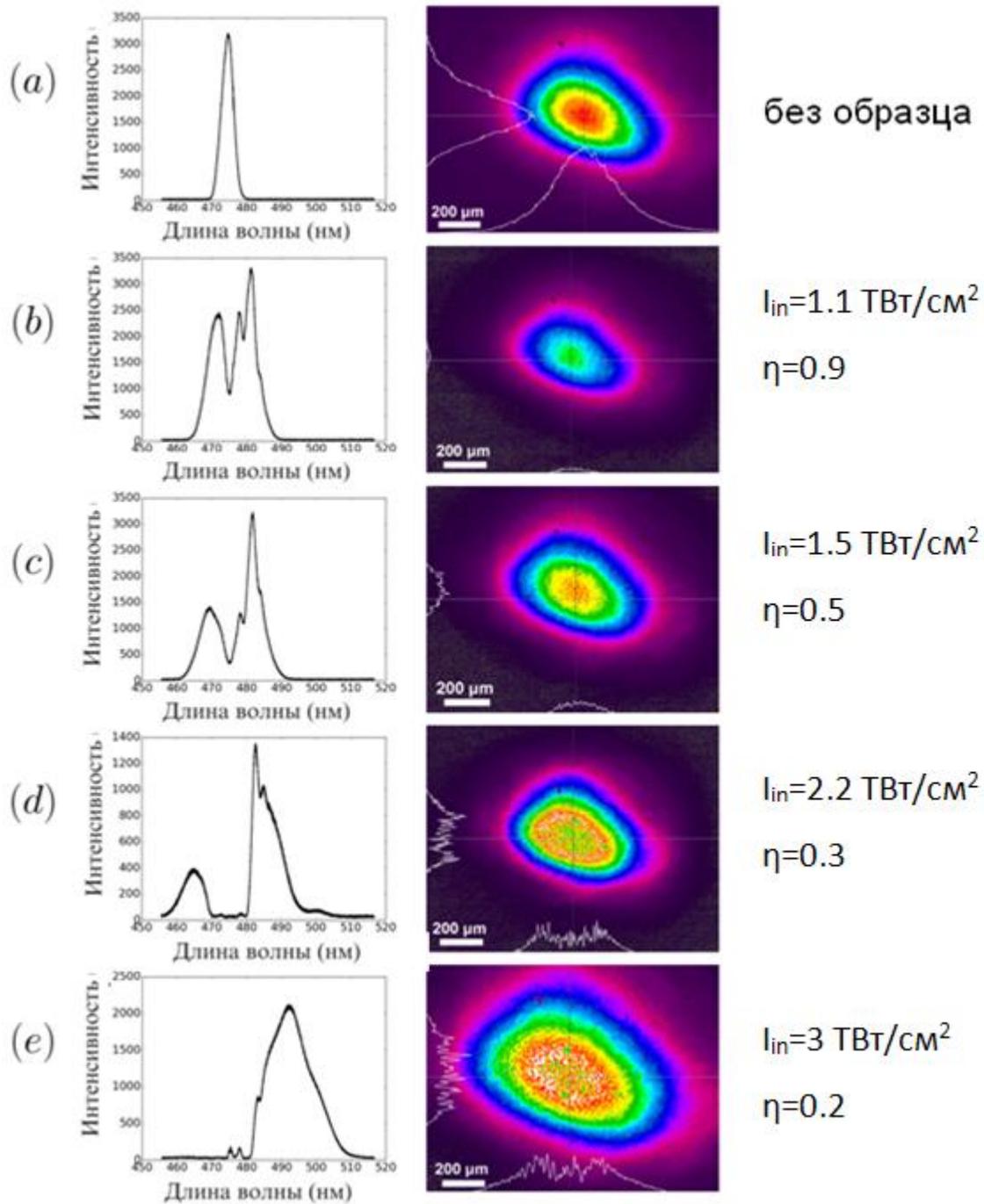


Рис. 4.11. Спектры излучения, прошедшего через диафрагму, изображения пучка сразу на выходе из образца, а также параметр  $\eta$  без образца (a) и с образцом при разной интенсивности (b-e).

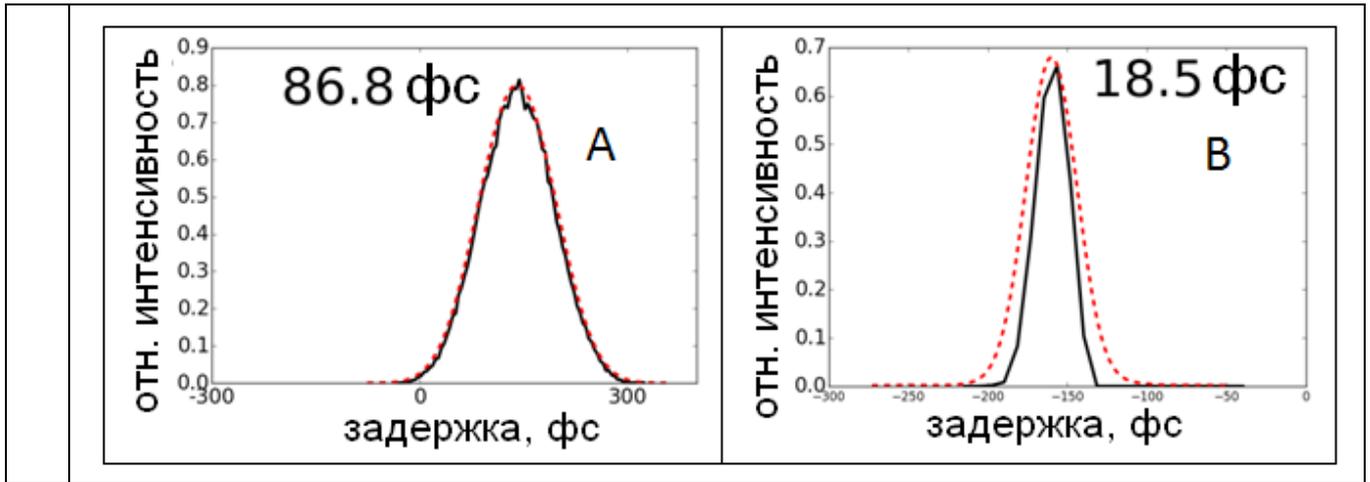


Рис. 4.12. Автокорреляционные функции (АФ): А) для начального импульса; В) для излучения ядра, прошедшего через диафрагму при интенсивности  $3 \text{ ТВт/см}^2$ . Сплошная – измеренные АФ, штриховка - АФ, полученные обратным Фурье-преобразованием спектров этих импульсов. 87фс и 19 фс – длительности, полученные из измеренных АФ в предположении гауссовой формы импульса. Небольшое несовпадение АФ на рис. В объясняется близостью к пределу временного разрешения измерений автокоррелятора.

Из рис. 4.11 хорошо видно, что при повышении интенсивности происходит смещение спектра в красную область, причём при  $3 \text{ ТВт/см}^2$  часть спектра, смещённая в фиолетовую область, полностью исчезает. Экспериментально наблюдался значительный рост рассеянного излучения при интенсивностях выше  $1.2 \text{ ТВт/см}^2$ . При  $3 \text{ ТВт/см}^2$  длительность сокращалась с 87 фс до 19 фс, формировался спектрально-ограниченный импульс, однако доля энергии  $\eta$  в ядре уменьшалась. Профили пучка в ближней зоне (рис. 4.11) показывают, что при интенсивности выше  $1.2 \text{ ТВт/см}^2$  одновременно со смещением спектра в красную область развивается мелкомасштабная структура с зерном  $<10 \text{ мкм}$ .

Для ядра был измерен параметр  $M^2$ . Его значение при интенсивности  $3 \text{ ТВт/см}^2$  составило 1.5. Однако важно упомянуть, что, так как диафрагма даже без нелинейного взаимодействия формирует пучок негауссовой формы, для которого  $M^2$  без образца составлял 1.2, то увеличение  $M^2$  составило 30%.

### 4.3.3 Обсуждение формирования мелкомасштабной неустойчивости и сокращения длительности

Наблюдаемые явления легко объяснить ростом мелкомасштабной неустойчивости на заднем фронте импульса в рамках теории Беспалова-Галанова [81]. Из неё следует, что пучок с интенсивностью  $I_0$  при прохождении среды с нелинейностью  $n_2$  неустойчив по отношению к поперечным возмущениям размера

$$a = \frac{\lambda}{n} \sqrt{\frac{1}{2n_2 I_0}}. \text{ Для интенсивности } I_0 = 3 \text{ ТВт/см}^2 \text{ это даёт размер неустойчивости}$$

$a = 7.5 \text{ мкм}$ , что согласуется с экспериментальными данными.

При увеличении интенсивности начало мелкомасштабной самофокусировки смещается из максимума интенсивности на передний фронт импульса. Формирование мелкомасштабной неустойчивости приводит к возникновению дифракционных и рефракционных потерь при регистрации излучения в приосевой области, излучение на заднем фронте рассеивается на уже сформированных плазменных каналах. Так, для поперечного размера области фокусировки  $a = 7.5 \text{ мкм}$  дифракционный угол расходимости излучения по порядку величины составляет  $\lambda/a = 6 \times 10^{-2}$ , что на порядок больше угла распространения содержащегося излучения в ядре ( $5 \times 10^{-3}$ ). Это приводит к практически полному подавлению излучения в центральной и задней частях импульса в приосевой области распространения пучка. На переднем фронте фазовая самомодуляция обогащает и сдвигает спектр в красную область.

На рис. 4.13 приведены изображения пучка после взаимодействия при интенсивности  $3 \text{ ТВт/см}^2$  с диафрагмой (схема наблюдения изображения приведена на рис. 4.10) и без нее. На изображении профиля, полученного с диафрагмой, видно возникновение провала в центре пучка. Это говорит о том, что наибольшие дифракционные и рефракционные потери, обусловленные мелкомасштабной самофокусировкой, возникают в центральной области с диаметром  $\sim 0.1 \text{ мм}$ .

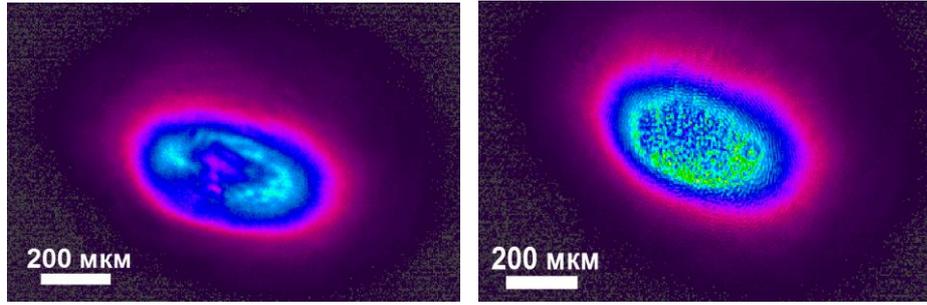


Рис. 4.13. Изображения на выходе из образца с диафрагмой (слева) и без нее (справа).

Поперечные возмущения с размером  $a = \frac{\lambda}{n} \sqrt{\frac{1}{2n_2 I_0}}$  усиливаются экспоненциально с показателем  $\frac{2\pi}{\lambda} n_2 I_0$ . Умножив его на длину взаимодействия  $L$ , мы получим В-интеграл распада ( $B = \frac{2\pi}{\lambda} n_2 I_0 L$ ). Фактически этот параметр характеризует усиление возмущений в пучке при прохождении его через материал. В условиях этих экспериментов мелкомасштабная самофокусировка пучка происходит в промежутке 1.2-1.5 ТВт/см<sup>2</sup>, как показывают полученные изображения профиля пучка на выходе из образца. В-интеграл при этом равен 4-5 (при нелинейном показателя преломления  $n_2 = 2.5 \times 10^{-16}$  см<sup>2</sup>/Вт, значение, измеренное для кварца марки КУ-1 с помощью метода z-scan в разделе 3.1), то есть неоднородности усиливаются в  $e^5 = 150$  раз. Если предположить, что мелкомасштабная структура формируется, когда амплитуда возмущений сравнивается со средним уровнем интенсивности, то, очевидно, уровень начального шума составляет менее 1%.

В отдельном эксперименте производилось измерение уровня шумов начального излучения исходя из распределения интенсивности по углу в фокальной плоскости. Его схема показана на рис 4.14.

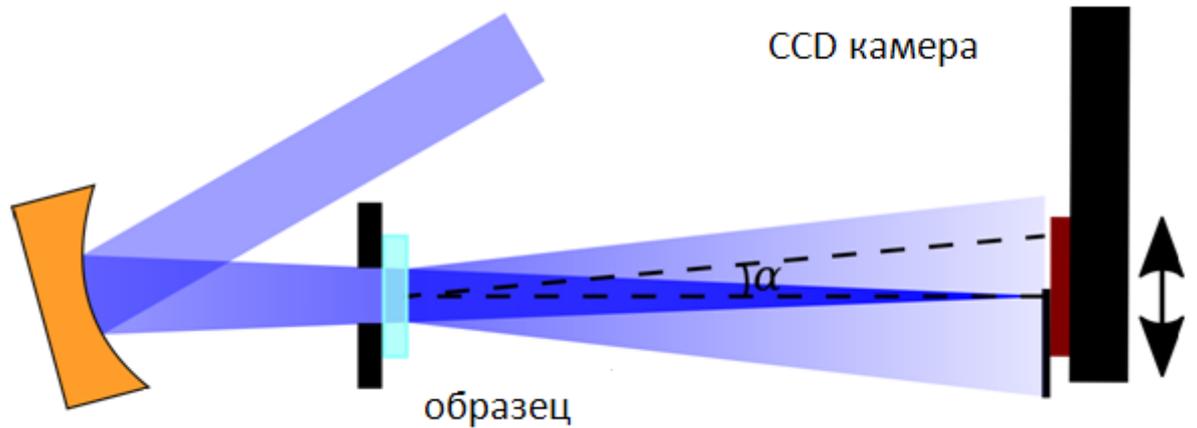


Рис. 4.14. Схема измерения уровня начальных шумов.

Диафрагма устраняет основную часть света, рассеянного собирающим зеркалом. На рис. 4.15 представлены характерные распределения интенсивности, измеренные профилометром в фокальной плоскости под большим углом с образцом и без.

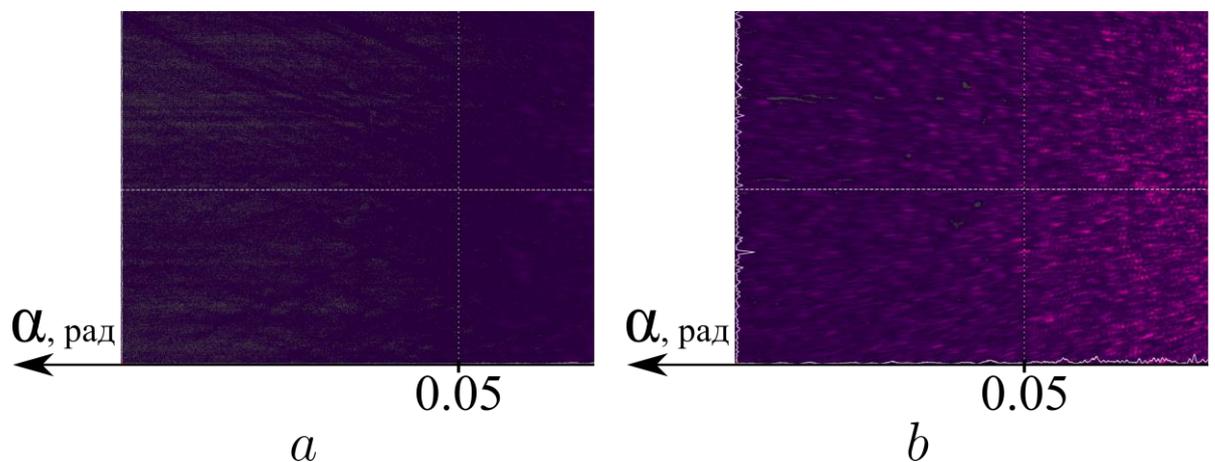


Рис. 4.15. Распределение интенсивности в дальней зоне. Слева - распределение, полученное без образца.

Из рисунка 4.15 видно, что образец вносит основной вклад в формирование мелкомасштабных шумов. С помощью системы прокалиброванных фильтров мы смогли сравнить всю энергию, которая содержалась в области излучения с углами распространения от 0.04 до 0.1 радиан, с приосевой энергией пучка. Их отношение составило 0.07%.

Был проведён подобный эксперимент по измерению энергии, которая содержится в рассеянном излучении после взаимодействия с 1 мм образцом при различных  $\mathcal{W}$  –интегралах в углах 0.01-0.04 рад. Результаты приведены в таблице 4.1 (энергия нормирована на энергию при  $\mathcal{W}$  интеграле 1.5).

Таблица 4.1. Зависимость доли энергии в рассеянном излучении от интенсивности.

$\mathcal{W}$ интеграл	энергия
1.5	1
2.3	1.15
3.1	1.3
4.1	2.2
6.0	8.7
9.4	427

Видно, что резкий рост начинается со значения  $\mathcal{W}$ -интеграла 4.1, что сходится с ранее обсуждёнными результатами.

Важно понимать, что теория Беспалова – Таланова верна лишь на начальной стадии развития возмущения, когда его амплитуда мала и возмущение можно описать гармонической волной. Для выяснения влияния величины начального возмущения на процесс мелкомасштабной самофокусировки были проведены численные расчёты, описанные в разделе 4.4.

Оценим влияние дисперсии материала на результаты эксперимента. Дисперсионная длина для 20 фс импульса составляет  $\frac{T_{1/2}^2}{4 \ln 2 \text{ GDD}} = 2 \text{ мм}$ , что превосходит толщину образца (дисперсия групповых скоростей  $\text{GDD}=75 \text{ фс}^2/\text{мм}$

[49] для кварца на 480 нм), таким образом, в экспериментах фактор материальной дисперсии имел второстепенное значение.

Материальная дисперсия является негативным фактором, который может помешать дальнейшему процессу сокращения длительности, вплоть до периода световой волны. Для уменьшения влияния этого фактора можно использовать образцы с малой дисперсией групповых скоростей и с большим нелинейным показателем преломления, так как при большем показателе нелинейного преломления режим самосокращения с прежним значением  $B$ -интеграла можно достичь при меньшей толщине образца. С этой точки зрения, перспективным для видимой области является  $\text{CaF}_2$  ( $n_2=4 \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$  [84],  $\text{GVD}=53 \text{ фс}^2/\text{мм}$  [85]). Для ближнего ИК таким материалом может быть  $\text{LiCl}$  ( $n_2=4 \times 10^{-16} \text{ см}^2/\text{Вт}$  [86],  $\text{GVD}=10 \text{ фс}^2/\text{мм}$  [87]).

Подведём итоги - передний фронт, где  $B$ -интеграл мал, остаётся невозмущённым, в то время как центральная и задняя часть распадается на нити диаметром порядка десятка микрон, которые формируют рассеянное излучение. Излучение центральной части импульса и заднего частей приобретает значительную расходимость, и в дальней зоне на оси остаётся только излучение с передней части. Это приводит к сокращению длительности излучения в дальней зоне на оси, к его самосокращению по времени. Дополнительным аргументом служит сравнение спектров излучения, распространяющегося под различными углами, при интенсивности взаимодействия  $3 \text{ ТВт}/\text{см}^2$  (Рис. 3.15). Из него видно, что синее крыло спектра импульса после взаимодействия обладает большей расходимостью, чем красное крыло. Мы считаем, что это связано с тем, что задний фронт импульса помимо дифракционного рассеяния и испытывает рефракционное на плазме, образованной центральной частью. Данный вопрос исследован с помощью численного моделирования в разделе 4.4. Объяснение структуры конического излучения от одиночных филаментов, в частности, расходимости синего крыла спектра, можно найти в работах [88,89].

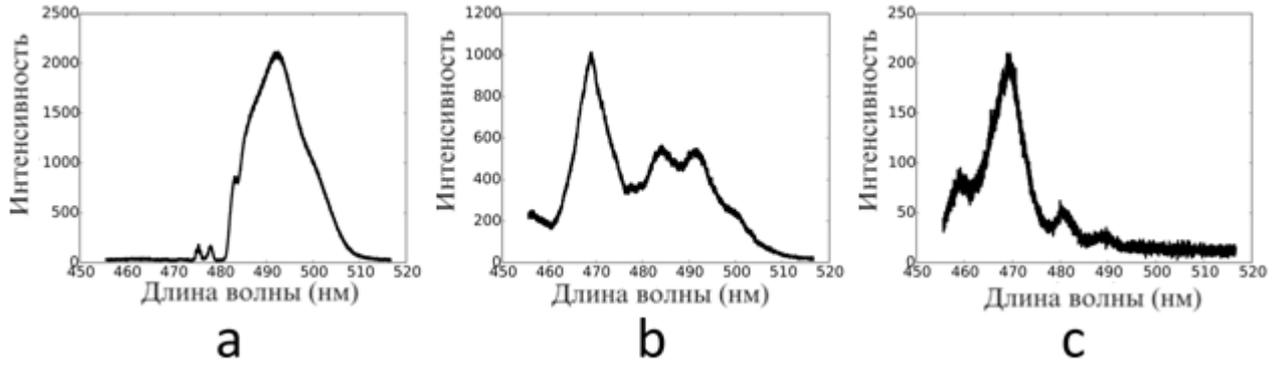


Рис. 4.16. Спектры: а) ядра, б) всего рассеянного излучения без ядра, с) рассеянного излучения под углом распространения 0.1 рад.

Отличительной особенностью рассматриваемого механизма сокращения фемтосекундных импульсов является то, что выходной импульс формируется на переднем фронте излучения. Здесь достигаются наиболее благоприятные условия для образования короткого спектрально-ограниченного импульса: первая производная нелинейной фазы  $\varphi_n$  электромагнитной волны, (обеспечивает уширение спектра), максимальна, а вторая производная  $\varphi_n$ , отвечающая за параметр чирпа, близка к нулю. В простейшем случае гауссовой формы во времени

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = \frac{2\pi}{\lambda} L n_2 \frac{dI}{dt} = -\frac{2\pi}{\lambda} L n_2 I_0 \frac{8 \ln 2}{\tau_{1/2}^2} t \exp[-4 \ln 2 (t/\tau_{1/2})^2] \quad (3)$$

$$\frac{d^2\varphi_n}{dt^2} = \frac{2\pi}{\lambda} L n_2 \frac{d^2I}{dt^2} = -\frac{2\pi}{\lambda} L n_2 \frac{8 \ln 2}{\tau_{1/2}^2} I_0 \exp[-4 \ln 2 (t/\tau_{1/2})^2] \times \left(1 - \frac{8t^2 \ln 2}{\tau_{1/2}^2}\right)$$

Максимальное значение относительного спектрального сдвига несущей частоты  $\frac{\Delta\omega_{\max}}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{d\varphi_n}{dt}\right)_{\max}$  достигается при  $t_{\max} = -\frac{\tau_{1/2}}{\sqrt{8 \ln 2}}$  ( $\frac{d^2\varphi_n}{dt^2}|_{t_{\max}} = 0$ ). Оценка

$\frac{\Delta\omega_{\max}}{\omega_0}$  на основании (3) при максимальной экспериментально реализованной интенсивности 3 ТВт/см<sup>2</sup> дает величину  $\sim 0.05$ , близкую к экспериментально полученному значению  $\sim 0.04$  (рис. 4.11).

Если же исходный импульс является отрицательно chirпированным, то формируемый на переднем фронте импульс, будет не спектрально-ограниченным, а chirпированным. Данные выводы подтверждают результаты раздела 4.1, где в спектрах коротких импульсов сохранялась модуляционная структура, которую можно связать с chirпом. Измерение длительности такого импульса с широким спектром с помощью автокоррелятора составляет определённую проблему, что явилось одной из причин провести основные эксперименты по выяснению природы явления со спектрально ограниченным импульсом. Кроме того, выбирать в качестве начального импульса для сокращения chirпированный не оптимально для достижения минимальной длительности сокращённого импульса, так как chirпированный сначала можно сжать в линейном режиме до спектрально-ограниченного, а затем уже провести нелинейное взаимодействие.

#### **4.4 Расчёты эволюции одиночного возмущения при высоких значениях $B$ интеграла. Формирование спектра рассеянного излучения.**

Для анализа полученных нами данных мы разработали численную модель взаимодействия излучения с оптически прозрачными средами (раздел 2). Однако в силу осевой симметрии модели в ней нет возможности описать развитие мелкомасштабной самофокусировки в целом пучке. Тем не менее, мы можем смоделировать возникновение и эволюцию отдельной неоднородности на фоне большого пучка. С помощью моделирования данного явления мы можем объяснить рассеяние заднего фронта импульса плазменных образованиях и объяснить спектрально-угловую зависимость спектра рассеянного излучения, в частности, значительную расходямость синего крыла спектра (рис. 4.16) [90]. В рамках этой задачи также можно узнать, как зависит пороговая величина  $B$ -интеграла, когда в образце происходит начало мелкомасштабной самофокусировки от качества излучения, то есть начальной амплитуды возмущений. Это даст нам ответ на вопрос, какие условия необходимы для

создания процесса самосокращения длительности импульса. Результаты численных расчётов для случая множественной филаментации, когда процесс захватывает весь пучок, а длина образца довольно значительна для того, чтобы появлялись циклы рефокусировки, можно найти, например, в [91].

Как обсуждалось в разделе 4.3, синее крыло спектра импульса обладает большей угловой расходимостью и наблюдается в основном в рассеянном излучении вне ядра в центре. Данное излучение обладает спектрально-угловой зависимостью, которую иллюстрирует рис. 4.16.

Как упоминалось ранее, мы считаем, что рассеянное излучение вызвано развитием мелкомасштабной неустойчивости и его источниками являются области фокусировки на задней и в центральной частях пучка. Для выяснения спектрально-угловой картины распределения излучения областей фокусировки, а также для исследования процесса усиления возмущений интенсивности мы провели численный расчёт эволюции одиночного возмущения.

Расчёты были выполнены для следующих условий: интенсивность взаимодействия  $3 \text{ ТВт/см}^2$ , ширина пучка  $500 \text{ мкм}$ , ширина возмущения  $7.5 \text{ мкм}$ , начальная амплитуда возмущения составляет  $0.1 \%$ . Согласно экспериментальным измерениям, описанным в 4.3.3, основным источником шумов является образец. Соответственно в расчётах мы положили разность фаз между основной волной и возмущением равной нулю. Как сам пучок, так и возмущение моделировались гауссовой зависимостью, так что начальное распределение амплитуды задавалось формулой

$$A(r, t) = A_0 \text{Exp} \left[ -\frac{8r^2}{d_1^2} \right] \left( 1 + 0.001 \text{Exp} \left[ -\frac{8r^2}{d_2^2} \right] \right) \text{Exp} \left[ -\frac{2 \ln 2}{T_{1/2}} t^2 \right]$$

где  $d_1=500 \text{ мкм}$ ,  $d_2=7.5 \text{ мкм}$ ,  $T_{1/2}=85 \text{ фс}$ .

Значение  $0.1\%$  ( $0.2\%$  по интенсивности) было получено из расчёта путём поиска минимальной амплитуды, при которой достигается самофокусировка

возмущения на толщине 1 мм. Отличие от измеренного значения 0.07% легко объяснить условностью выбора области шумов для интегрирования в измерениях 4.3.3.

Численное моделирование показало, что при распространении возмущение создаёт керровскую линзу, что приводит к образованию микрообласти с интенсивностью в 4-5 раз выше начальной интенсивности пучка. Результаты расчёта – возмущение на выходе из образца, спектр переднего фронта на выходе из образца, развитие возмущения и концентрация плазмы в зависимости от пройденного расстояния - приведены на рис. 4.17.

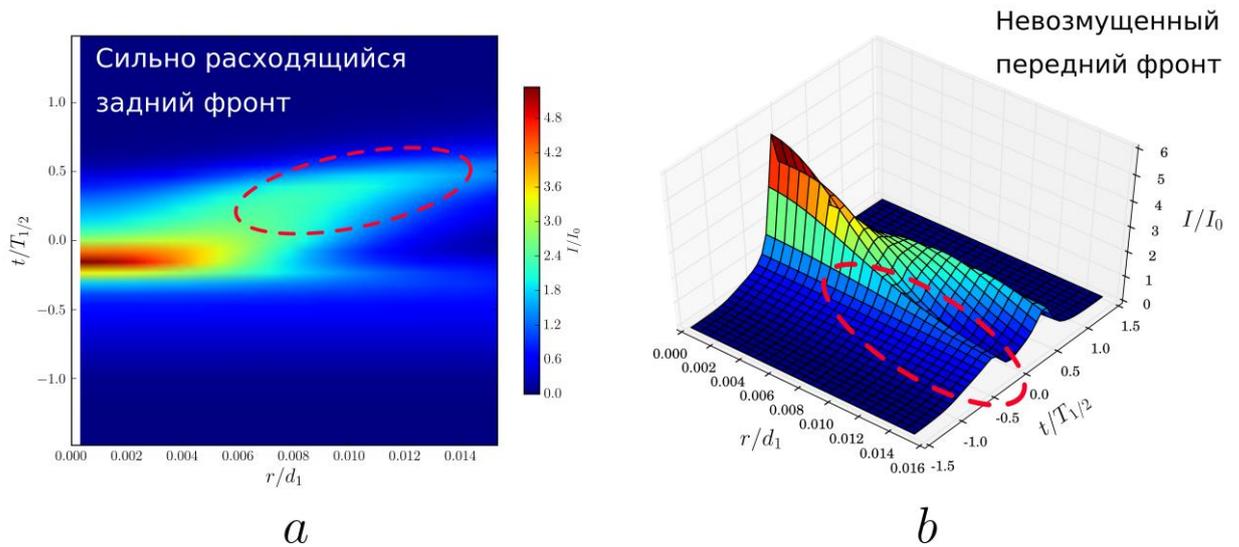


Рис. 4.17.1. Пространственно-временное распределение интенсивности в пределах диафрагмы 1 на выходе из образца а) вид сверху, б) вид со стороны переднего фронта. Значения интенсивностей нормированы на начальную максимальную интенсивность пучка, времени – на длительность по полувысоте, а радиуса – на диаметр пучка по полувысоте.

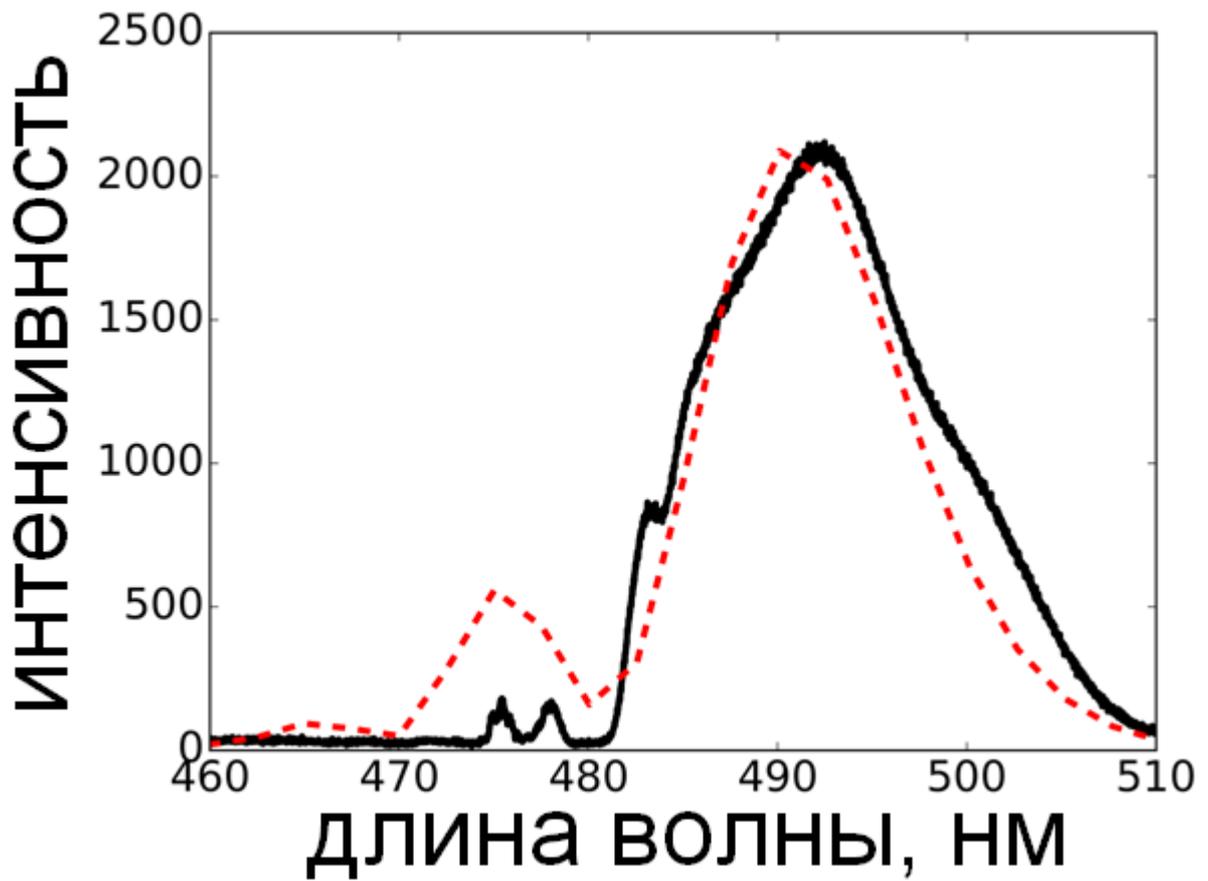


Рис 4.17.2. Сплошная кривая - экспериментально полученный спектр ядра, пунктирная кривая - спектр переднего фронта на выходе из образца для интенсивности  $3 \text{ ТВт/см}^2$ , полученный с помощью численного моделирования.

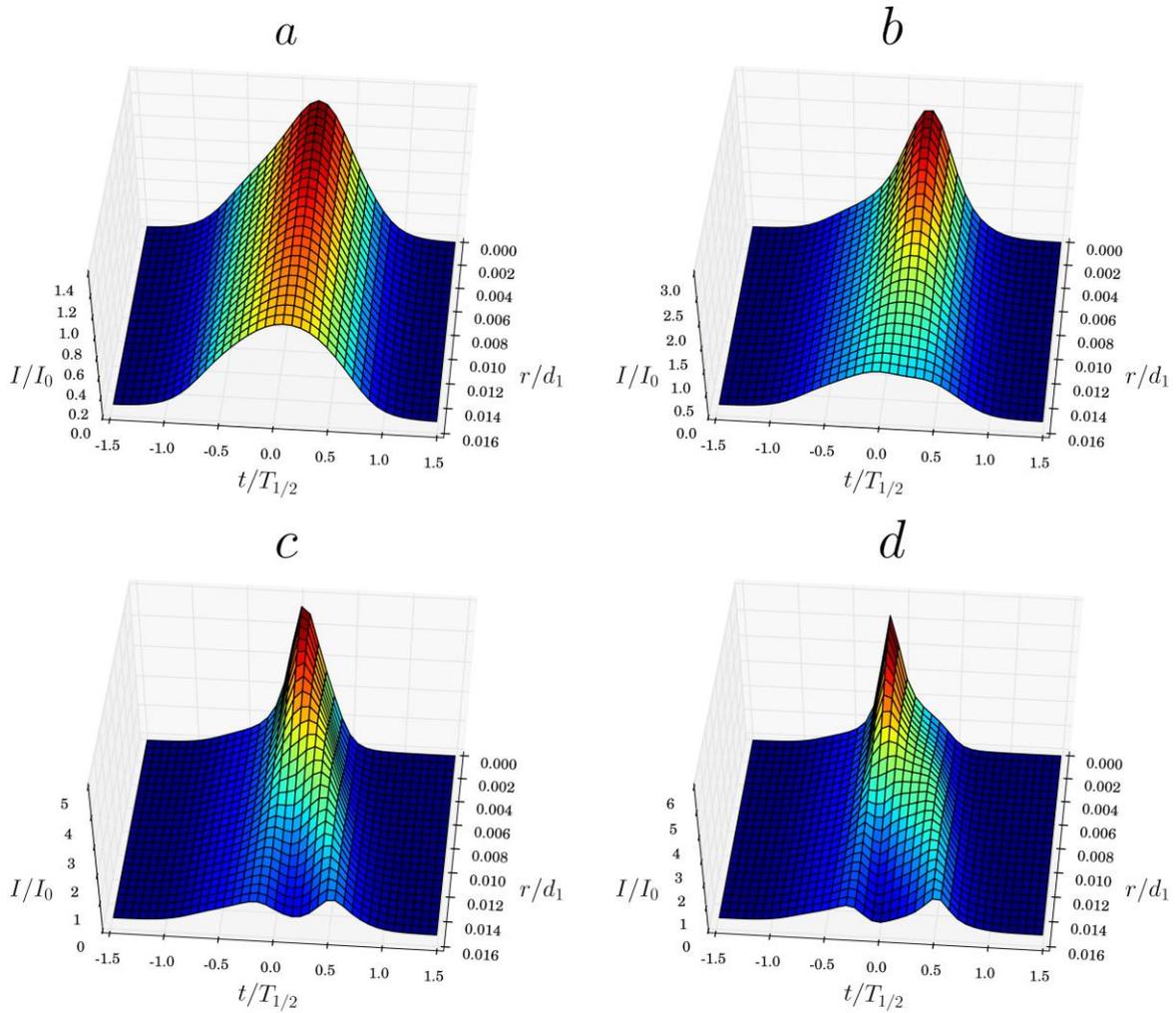


Рис. 4.17.3. Эволюция возмущения в образце в зависимости от пройденного расстояния: а) 0.7 мм, б) 0.8 мм, в) 0.9 мм, г) 1.0 мм. Значения интенсивностей нормированы на начальную максимальную интенсивность пучка, времени – на длительность по полувысоте, а радиуса – на диаметр пучка по полувысоте.

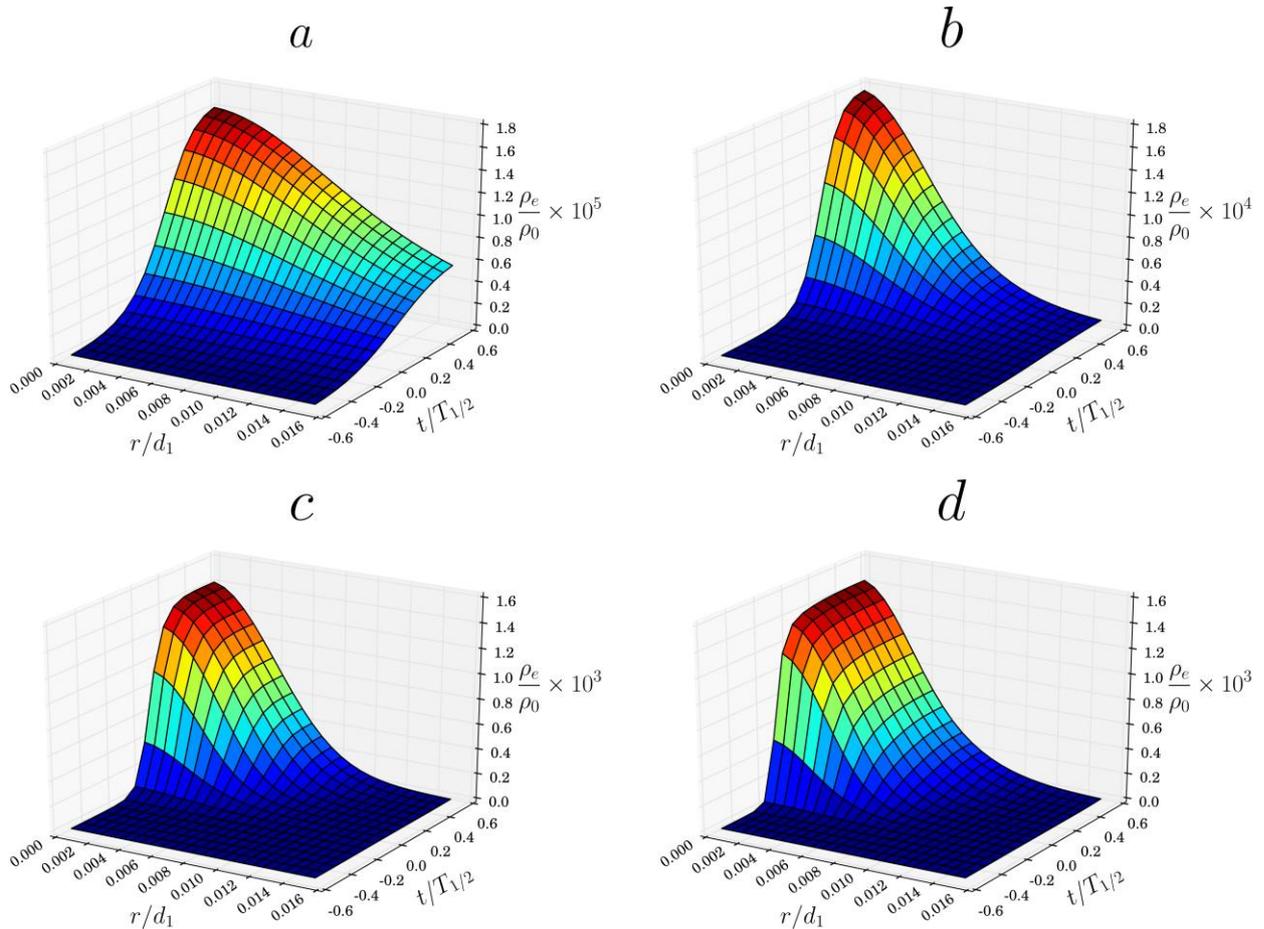


Рис. 4.17.4. Эволюция пространственно-временного профиля концентрации электронов в образце в зависимости от пройденного расстояния: а) 0.7 мм, б) 0.8 мм, в) 0.9 мм, г) 1.0 мм. Значения концентраций нормированы на концентрацию вещества  $\rho_0=2.1 \times 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , времени – на длительность по полувысоте, а радиуса – на диаметр пучка по полувысоте.

В пространственно-временном распределении интенсивности на выходе из образца (рис. 4.17.1) можно выделить следующие области: сильно расходящийся задний фронт (выделен на рис. 4.17.1а), область фокусировки излучения и невозмущённый передний фронт (рис. 4.17.1б). С невозмущённым передним фронтом мы связываем формирование ядра и сокращённого импульса в дальней зоне, что подтверждается совпадением экспериментально-полученного спектра ядра и численно рассчитанного спектра переднего фронта излучения на выходе из образца (рис. 4.17.2). Дополнительным аргументом является полученное в расчете сокращение в 2-3 раза длительности излучения на переднем фронте (рис. 4.17.1 б).

На рис. 4.17.3 продемонстрировано развитие неустойчивости в образце в зависимости от пройденного расстояния. Формирование области фокусировки начинается вблизи временного максимума импульса с небольшим смещением к задней части импульса (рис. 4.17.3(a-b)), что вызвано запаздыванием молекулярной части нелинейного отклика. Затем уровень интенсивности выходит на примерно постоянный уровень, превышающий начальный в 4-5 раз (рис. 4.17.3(c-d)). При этом пик интенсивности смещается ближе к переднему фронту, а излучение заднего фронта из-за рефракции в образующейся плазме переходит в расходящуюся волну.

Рисунок 4.17.4 иллюстрирует генерацию плазмы в образующейся области фокусировки с характерной для степенной зависимости скоростью нарастания концентрации электронов при увеличении интенсивности излучения. Как видно из рис. 4.3.4(c-d), рост концентрации электронов прекращается, когда интенсивность выходит на постоянный уровень (см. рис. 4.17.3(c-d)). При этом формируется плазменный канал с концентрацией электронов, достигающей  $2.9 \times 10^{19} \text{ см}^{-3}$ , что составляет 0.7% от критической. Рефракция, вызванная плазмой этого канала, приводит к дополнительному росту расходимости излучения по сравнению с дифракцией на переднем фронте возмущения. Это объясняет наблюдаемый экспериментально (см. рис. 4.16) большой угол распространения излучения в коротковолновом крыле спектра (отвечает заднему фронту возмущения) по сравнению с углом распространения длинноволнового крыла, генерацию которого естественно связать с передней частью возмущения.

Это легко показать из следующих соображений. Градиент показателя преломления в плазменном канале составляет

$$\text{grad}(n) = \left( -(2n_0)^{-1} \left( \rho^e / \rho_{crit}^e \right) \right) / (d_2 / 4) , \quad \text{где } \rho_{crit}^e \text{ - критическая плотность}$$

плазмы,  $d_2$  – диаметр области фокусировки, а угол отклонения луча

$$n_0 L \text{ grad}(n) = 2 \left( - \left( \rho^e / \rho_{crit}^e \right) \right) L / d_2$$

Здесь  $L$  – длина плазменного канала. Подставив диаметр области фокусировки  $d_2=7.5$  мкм, длину плазменного канала 100 мкм,  $\rho^e / \rho_{crit}^e = 0.007$ , получим полный угол расходимости 0.4. То есть рефракция в плазме приводит к более сильной расходимости, чем дифракция  $\frac{\lambda}{d_2} \approx 0.06$  и поэтому излучение задней части возмущения, связанное с коротковолновой частью спектра, расходится значительно сильнее, чем передней, где концентрация плазмы мала.

Попробуем оценить максимальную интенсивность, которая может быть достигнута в возмущении. Основным фактором, ограничивающим рост интенсивности, является рефракция на плазме. Оценим её влияние. Концентрацию свободных зарядов к моменту достижения пика интенсивности можно найти как

$$\rho_{\max} \approx \int_{-\infty}^0 \rho_0 \sigma_4 I^4(t) dt = \rho_0 \int_{-\infty}^0 \sigma_4 I_0^4 \text{Exp} \left[ -2 \text{Ln} 2 (t / T_{1/2})^2 \right] dt = \rho_0 \sigma_4 I_{\max}^4 \frac{\sqrt{\pi} T_{1/2}}{2\sqrt{2} \text{Ln} 2}$$

Рефракция на плазме возникает, когда градиент добавки показателя преломления, вызванного плазмой, сравнивается с керровским:

$$\frac{1}{2n_0^2 \rho_c} \rho_e / (r/2) = n_2 I_{\max} / r$$

Что даёт

$$I_{\max} = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{2} \text{Ln} 2 n_2 n_0^2 \rho_c}{\sqrt{\pi} \rho_0 \sigma_4 T_{1/2}}} = \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{2} \text{Ln} 2 \hbar \omega n_2 n_0^2 \rho_c}{\sqrt{\pi} \beta_4 T_{1/2}}}$$

Подстановка значений даёт величину 15 ТВт/см<sup>2</sup> (то есть отношение к начальному уровню 5), а максимальную концентрацию  $0.0008 \times 2.1 \times 10^{22} \text{см}^{-3} = 0.9 \times 10^{19} \text{см}^{-3}$ , что близко к значениям, получаемым в численном моделировании.

На рис. 4.18 приведено сопоставление расчётного спектра возмущения в дальней зоне с экспериментально измеренными спектрами рассеянного излучения

(рис. 3.15 b, c). Для расчета углового распределения спектра возмущения в дальней зоне выделялась область излучения на выходе из образца, содержащая начальное возмущение. Затем выполнялись прямые расчёты дальней зоны излучения с использованием функции Грина. Приведенный на рис. 4.18 а расчетный спектр представляет собой результат интегрирования в угле распространения 0.02-0.1 рад, что отвечает экспериментально наблюдаемому спектру всего рассеянного излучения. На рис. 4.18 б для сравнения приведены спектры, полученные расчетным и экспериментальным путем для рассеянного излучения, распространяющегося под углами соответственно 0.085 и 0.1 рад к оси пучка.

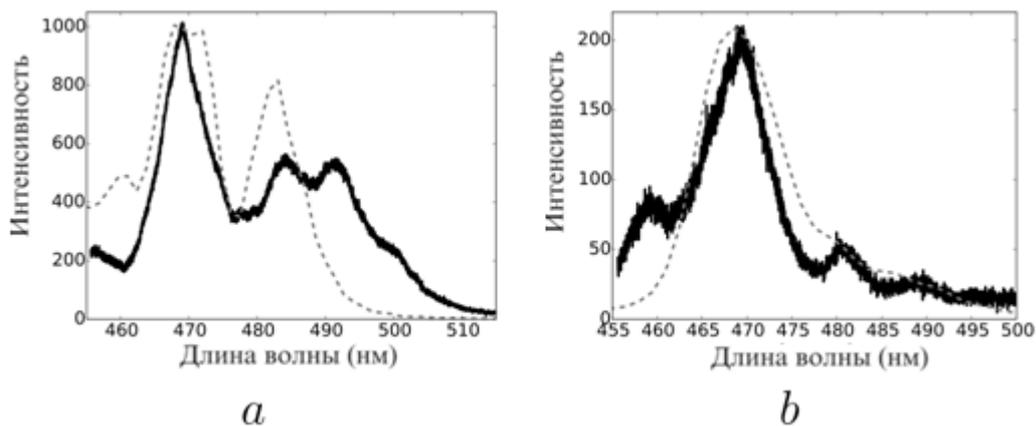


Рис. 4.18. Сравнение расчётного спектра возмущения в дальней зоне с экспериментально полученным спектром рассеянного излучения: а) экспериментальный спектр всего рассеянного излучения без ядра (сплошная кривая) и расчётный спектр возмущения, проинтегрированный по углу от 0.02 до 0.1 рад (штриховка); б) спектр рассеянного излучения, измеренный под углом 0.1 рад к оси пучка (сплошная кривая) и расчётный спектр возмущения для излучения, распространяющегося под углом 0.085 рад к оси пучка (штриховка).

Согласие расчетных и экспериментальных результатов, указывающих на общий характер доминирования коротковолнового крыла спектра на периферии рассеянного излучения (под углом 0.1 рад), подтверждает наши предположения относительно происхождения экспериментально наблюдаемой угловой

зависимости спектра рассеянного излучения и важной роли плазмы в ее формировании.

В ходе наших экспериментов с отрицательным чирпом (описаны в разделе 4.1) и со спектрально ограниченным импульсом (описаны в разделе 4.3) пороговые значения  $V$  интеграла, когда начинался процесс множественной мелкомасштабной фокусировки, отличались. Это связано с другой начальной величиной амплитуды поперечных колебаний, по отношению к которым пучок неустойчив (раздел 4.3.3). Определённую оценку расстояния, которое требуется для распада пучка при начальном уровне шумов, можно провести на основании теории Беспалова-Таланова. Однако важно помнить, что приведённые там рассуждения верны для начального этапа эволюции возмущения, когда его амплитуда мала. Поэтому для прояснения вопроса зависимости порогового значения  $V$ -интеграла от уровня начальных шумов мы провели численные расчёты начала распада пучка. Критерием служило возникновение горячих точек с уровнем интенсивности в 2 раза превосходящих начальный уровень. Результаты расчёта приведены в таблице 4.2.

Также в таблице приведены результаты моделирования и расчётов, выполненных по простой формуле, которая следует из теории Беспалова-Таланова

$$l = - \frac{\text{Ln}(2\Delta x)}{\frac{2\pi}{\lambda} n_2 I} \quad (\Delta x - \text{величина начального возмущения})$$

Таблица 4.2 - Расстояния на которых происходит коллапс для интенсивности излучения  $3 \text{ ТВт/см}^2$  и для различных начальных амплитуд возмущения.

Относительная начальная амплитуда	0.002	0.001	0.0005	0.0002	0.0001
Расчёт согласно теории Таланова Беспалова	0.562 мм	0.633 мм	0.703 мм	0.797 мм	0.867 мм
Результат численного моделирования	0.775 мм	0.875 мм	0.975 мм	1.125 мм	1.225 мм
отношение	1.38	1.38	1.39	1.41	1.41

Из данной таблицы видно, что хотя оценка полученная из теории Таланова-Беспалова верна для возмущений с небольшой амплитудой, данная теория может применяться для оценки возмущений с большей амплитудой с поправкой на некий постоянный коэффициент, определяемый начальной формой возмущения.

#### 4.4 Основные результаты главы 4

Осуществлено 4-х кратное самосохранение длительности отрицательно chirпированных и спектрально ограниченных импульсов без использования посткомпрессии на основе дополнительных дисперсионных элементов. С помощью численной модели, основанной на нелинейном уравнении Шредингера, решены следующие задачи: смоделировано взаимодействие и распространение отрицательно chirпированного импульса при интенсивностях до  $3 \text{ ТВт/см}^2$ , развитие одиночного возмущения, объяснено формирование спектрально-угловой зависимости рассеянного излучения.

## Заключение

По итогам работы были получены следующие результаты:

1. Продемонстрирована реализация нового способа сокращения длительности фемтосекундных импульсов, не требующего применения дополнительных дисперсионных элементов. Предлагаемый подход основан на переходном режиме возникновения множественной самофокусировки, в результате чего излучение из центральной части и заднего фронта импульса приобретает сильную угловую расходимость, в то время как излучение переднего фронта сохраняет расходимость близкую к начальной и формирует в дальней зоне короткий импульс. Физика процесса указывает на максимальную энергетическую эффективность метода для супергауссовых пучков, которые используются в наиболее мощных лазерных системах. На возможность масштабирования по энергии (при сохранении прежнего уровня интенсивности взаимодействия с образцом) указывают физические принципы, лежащие в основе процесса сокращения длительности. Минимальная длительность сокращённого импульса в данном методе определяется материальной дисперсией керровской среды.
2. Реализовано четырёх – пяти кратное сокращение 87 фс спектрально-ограниченных импульсов и 120 фс отрицательно chirпированных импульсов (длительность спектрально-ограниченного импульса 70 фс) в образце кварца толщиной 1 мм при интенсивности выше  $3 \text{ ТВт/см}^2$  без использования дополнительных дисперсионных элементов в режиме формирования множественной самофокусировки.
3. По распределению излучения в фокальной плоскости измерен уровень шумов, усреднённая амплитуда начальных флуктуаций составила пучка 0.07%.

4. Впервые в плавленом кварце марки КУ-1 на длине волны 473 нм в схеме с z и с I сканированием по измерению пропускания получено сечение четырёхфотонного поглощения, которое составило  $\sigma_4 = (1.0 \pm 0.5) \times 10^{-115} \text{ см}^8 \text{ с}^3$ . Подобные измерения для кварца выполнены впервые. Также измерен нелинейный показатель преломления:  $n_2 = (2.5 \pm 0.3) \times 10^{-16} \text{ см}^2 / \text{Вт}$ .
5. В численную модель для расчёта взаимодействия излучения с прозрачными материалами с керровской нелинейностью, разработанную в лаборатории математического моделирования в физике ВМК МГУ, внедрено приближение медленно меняющейся волны. С помощью данной модели проведён численный расчёт режима самофокусировки, проанализирована спектрально-угловая зависимость рассеянного излучения.

## **Благодарности**

В заключение хочу поблагодарить научного руководителя Михеева Леонида Дмитриевича за руководство моей работой. Огромную благодарность хочу также выразить своему коллеге Корибуту Андрею, научному консультанту Трофимову Вячеславу Анатольевичу и коллективу лаборатории фотохимических процессов: Аристову Андрею Игоревичу, Мамаеву Сергею Борисовичу, Москалеву Тимофею Юрьевичу, Орлову Евгению Прохоровичу, Позднееву Сергею Алексеевичу, Сизовой Ирине Михайловне, Ставровскому Дмитрию Борисовичу, Чиркову Владимиру Александровичу, Широких Александру Прохоровичу, Яловому Валерию Ильичу.

## Приложение А

В этом разделе будут получены уравнения, описывающие нелинейное взаимодействие кварца с веществом. В их выводе будем отталкиваться от уравнений Максвелла

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J}(\vec{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

где  $\vec{E}$  – напряжённость электрического поля,  $\vec{P}$  – вектор поляризации,  $\vec{H}$  – напряжённость магнитного поля,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции,  $\rho$  – плотность свободных зарядов,  $\vec{J}$  – плотность тока. Мы будем выводить модифицированное для нелинейной среды волновое уравнение, которое свяжет амплитуду электрического поля и плотность свободных зарядов с физическими параметрами среды.

Плавленый кварц – изотропная нелинейная среда, для которой спектральный диапазон интересующих нас полей находится вдали от резонанса. Компонента вектора поляризации такой среды в Фурье-пространстве

$$\hat{P}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int F(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \text{ может быть разложена в степенной ряд по } \hat{E}(\vec{r}, \omega):$$

$$\hat{P}(\vec{r}, \omega) = \hat{P}^{(1)}(\vec{r}, \omega) + \hat{P}^{(3)}(\vec{r}, \omega) + \hat{P}^{(5)}(\vec{r}, \omega) + \dots \quad (3), \text{ где}$$

$$\hat{P}^{(j)}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_j} \int \dots \int \chi_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_j}^{(j)}(\vec{r}, -\omega_\sigma; \omega_1, \dots, \omega_j) \times \hat{E}_{\alpha_1}(\vec{r}, \omega_1) \dots \hat{E}_{\alpha_j}(\vec{r}, \omega_j) \delta(\omega - \omega_\sigma) d\omega_1 \dots d\omega_j$$

$$\omega_\sigma = \omega_1 + \dots + \omega_j$$

Заметим, что в этом ряде все восприимчивости  $\vec{\chi}^{(j)}$  с чётным индексом  $j$  равны нулю для изотропной среды вследствие симметрии по отношению к инверсии. Будем также полагать  $|\vec{P}^{(3)}| \ll |\vec{P}^{(1)}|$  и поэтому в дальнейшем можно пренебречь слагаемыми более высоких порядков в этом (3) разложении.

Рассмотрим линейную часть поляризации  $\hat{P}^{(1)}$ . В однородной изотропной среде в тензоре  $\vec{\chi}^{(1)}$  остаётся один элемент  $\chi_{\mu\alpha}^{(1)} = \chi_{xx}^{(1)} \delta_{\mu\alpha}$ . Обозначив  $\chi^{(1)}(\omega) = \chi_{xx}^{(1)}(-\omega, \omega)$ , можно записать

$$\hat{P}^{(1)}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\omega) \hat{E}(\omega)$$

Также введём скалярную функцию  $\varepsilon(\omega) = 1 + \chi^{(1)}(\omega)$

Нелинейная поляризация  $\hat{P}^{(3)}$  определяется 81 компонентом тензора четвёртого ранга  $\vec{\chi}^{(3)}$ . Снова, учтя изотропность среды и положив  $\vec{E} = E_x \vec{e}_x$ , получим  $\chi_{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^{(3)} = \chi_{xyxy}^{(3)} \delta_{\mu\alpha_1} \delta_{\alpha_2\alpha_3} + \chi_{xyyx}^{(3)} \delta_{\mu\alpha_3} \delta_{\alpha_1\alpha_2} + \chi_{xxyx}^{(3)} \delta_{\mu\alpha_2} \delta_{\alpha_1\alpha_3}$

$$\chi^{(3)} = \chi_{xxxx}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)} + \chi_{xxyx}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)}$$

$$\hat{P}^{(3)}(\vec{r}, \omega) = \vec{e}_x \varepsilon_0 \iint \chi^{(3)}(-\omega; \omega_1, \omega_2, \omega - \omega_1 - \omega_2) \hat{E}_x(\vec{r}, \omega_1) \hat{E}_x(\vec{r}, \omega_2) \hat{E}_x(\vec{r}, \omega - \omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (4)$$

Определим  $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  и волновое число  $k(\omega) = \omega n(\omega) / c$ . Для импульса с центральной частотой  $\omega_0$  в окрестности этой точки мы можем разложить функцию  $k(\omega)$  в ряд Тейлора:

$$k(\omega) = k_0 + k'(\omega - \omega_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{(n)}(\omega - \omega_0)^n \quad k(\omega) = k_0 + k'(\omega - \omega_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{(n)}(\omega - \omega_0)^n \text{ и}$$

$$k^2(\omega) = k_0^2 + 2k_0 k'(\omega - \omega_0) + k'^2(\omega - \omega_0)^2 +$$

$$+ 2(k_0 + k'(\omega - \omega_0)) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{(n)}(\omega - \omega_0)^n + \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{(n)}(\omega - \omega_0)^n \right)^2 \quad (5)$$

Здесь  $k^{(n)} = \frac{\partial^n k}{\partial \omega^n}$

Для дальнейших упрощений мы будем использовать метод медленно меняющейся волны (ММВ) [39]. Представим электрическое поле в следующем

виде  $E(t) = E(t) \exp(-i\omega_0 t + i\psi) + c.c.$ , где  $\omega_0 = \frac{\int_0^\infty \omega |E(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |E(\omega)|^2 d\omega}$  - несущая частота,  $|E(\omega)|$  -

Фурье компонента электрического поля,  $\psi$  - фаза в момент  $t=0$ . Данное представление справедливо, если центральная частота  $\omega_0$  не слишком зависит от сдвига фазы  $\Delta\psi$  в электрическом поле  $E(t) = E'(t) \exp(i\Delta\psi)$ , что согласно [39] выполняется для импульсов различной формы вплоть до периода световой волны.

Итак,  $\vec{E}$  представим как  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} \vec{A}(x, y, z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c.$ , где  $A(x, y, z, t)$  - фактически функция амплитуды волны, нормированная на интенсивность -  $I(x, y, z, t) = |A(x, y, z, t)|^2$ .

Теперь выразим  $\vec{P}^3(\vec{r}, t)$  через  $A(x, y, z, t)$ , не учитывая зависимость нелинейной восприимчивости от частоты. Выражение (4) преобразуется в

$$\vec{P}^3(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \left( \frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0} \right)^{3/2} \left[ 3\chi^{(3)}(-\omega_0; \omega_0, -\omega_0, \omega_0) |A|^2 \vec{A} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + \right. \\ \left. + \chi^{(3)}(-3\omega_0; \omega_0, \omega_0, \omega_0) (\vec{A} * \vec{A}) \vec{A} e^{i(3k_0 z - 3\omega_0 t)} + c.c. \right]$$

Второе слагаемое отвечает за генерацию третьей гармоники ( $3\omega_0$ ) и из-за большого фазового рассогласования  $\Delta k = 3k_0 - k(3\omega_0)$  его влиянием на расстояниях больших, чем  $\pi/\Delta k$  можно пренебречь. Дополнительно определим нелинейный показатель преломления как

$$n_2(\omega_0) = \frac{3\chi^{(3)}(-\omega_0; \omega_0, -\omega_0, \omega_0)}{4\varepsilon_0 c n_0^2(\omega_0)}$$

Таким образом, нелинейный вектор поляризации может быть представлен в виде

$$\vec{P}^3(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \left( \frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0} \right)^{1/2} \left[ 2n_0 n_2 |A|^2 \vec{A} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \right] \quad (6)$$

Вообще говоря, следует учитывать частотную зависимость нелинейной восприимчивости. Для импульсов с большой шириной спектра это проявляется во влиянии ВКР, которое может перераспределять энергию между компонентами спектра. В этом случае выражение (6) для  $\vec{P}^3(\vec{r}, t)$  можно заменить на

$$\vec{P}^3(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \left( \frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0} \right)^{1/2} \left[ 2n_0 n_2 \left( \int_0^\infty (R(t') |A(t-t')|^2 dt' \right) \vec{A} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \right]$$

где  $R(t) = (1 - f_R) \delta(t - t_e) + f_R h_R(t)$ ,  $h_R(t) = \frac{\tau_1^2 + \tau_2^2}{\tau_1 \tau_2} \exp(-t/\tau_2) \sin(t/\tau_1)$  с параметрами  $f_R = 0.18$ ,  $\tau_1 = 12.2$  фс и  $\tau_2 = 32$  фс для кварца согласно [41].

Существует два механизма генерации свободных носителей: многофотонная ионизация и лавинная. Многофотонная ионизация является доминирующей при интенсивностях до порога разрушения материала порядка - нескольких десятков тераватт [42]. Вероятность этого процесса зависит от интенсивности в соответствующей степени и выражается соотношением:

$$W_{MPI}(|A|) = \sigma_K' |A|^{2K} = \sigma_K' I^K$$

$K$  - показатель многофотонного поглощения.  $\sigma_K'$  - сечение многофотонного поглощения, как мы увидим в дальнейшем, оно может быть связано с  $\beta_K = \sigma_K' K \hbar \omega_0 \rho_o$  ( $\rho_o$  - концентрация атомов) - величиной, которая, как мы увидим дальше, является коэффициентом многофотонного поглощения.

При увеличении интенсивности возрастает роль лавинной ионизации, так её вероятность  $W_{AI}(|A|)$  зависит от концентрации свободных электронов, которая

может стать значительной только при высокой плотности энергии. Её можно представить как  $W_{AI}(|A|) = \frac{\sigma}{E\rho_0} \rho_e |A|^2 = \frac{\sigma}{E\rho_0} \rho_e I$ , где  $\rho_e$  - концентрация свободных носителей,  $E$  – ширина запрещённой зоны кварца,  $\sigma$  - сечение обратно-тормозного излучения может быть найдено из  $\sigma = \frac{k_0 \omega_0 \tau_c}{n_0 \rho_c (1 + \omega_0^2 \tau_c^2)}$  [44]. Здесь  $\tau_c$  - столкновительное время, характеризующее электрон-фононное взаимодействие, критическая плотность  $\rho_c = \frac{m_e \varepsilon_0 \omega^2}{e^2}$ ,  $m_e$  - электрон-дырочная масса в кварце.

Кроме генерации свободных носителей, необходимо учесть их рекомбинацию за характерное время  $\tau_r$ . Теперь запишем уравнение, описывающее генерацию свободных зарядов

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_e(\vec{r}, t) = (W_{MPI} + W_{AI}) \rho_0 - \frac{\rho_e(\vec{r}, t)}{\tau_r}$$

После подстановки выражений для  $W_{MPI}$  и  $W_{AI}$  получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_e(\vec{r}, t) = \sigma_K I^K \rho_0 + \frac{\sigma}{E} \rho_e I - \frac{\rho_e(\vec{r}, t)}{\tau_r}$$

Плотности свободных зарядов  $\rho_e$  может быть поставлен в соответствие ток свободных зарядов  $\vec{J}_e(\vec{r}, t)$ . Выражение плотности тока нам понадобится в дальнейшем для вывода нелинейного уравнения для амплитуды поля. Для этого надо учесть два фактора, оказывающие влияние на ток – столкновения и ускорение свободных электронов в электрическом поле:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{J}_e(\vec{r}, t) + \frac{\vec{J}_e(\vec{r}, t)}{\tau_c} = \frac{e^2}{m_e} \rho_e(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (7)$$

Так как определяющими в движении зарядов являются осцилляции с частотой внешнего поля  $\omega_0$ , то для плотности тока  $\vec{J}_e(\vec{r}, t)$  можно таким же образом ввести функцию огибающей  $\vec{j}_e(\vec{r}, t)$ :

$$\vec{J}_e(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} \vec{j}_e(x, y, z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \quad (8)$$

Подставим в (7), учтя (8)

$$\sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}_e - i\omega_0 \vec{j}_e + \frac{\vec{j}_e}{\tau_c} \right) = \frac{e^2}{m_e} \rho_e \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} \vec{A}$$

Данное уравнение формально можно решить как  $\vec{j}_e = \frac{e^2}{m_e \omega_0} \left( -i\hat{T} + \frac{1}{\tau_c \omega_0} \right)^{-1} \rho_e \vec{A}$ ,

где  $\hat{T}$  - оператор  $\hat{T} = 1 + i \frac{\partial}{\partial t}$ . Так как  $|\partial_t \rho_e \vec{A}| / \omega_0 \ll |\rho_e \vec{A}|$  и  $1 / \tau_c \omega_0 \ll 1$ , выражение можно упростить как

$$\vec{j}_e = \frac{e^2}{m_e \omega_0} \left( i\hat{T}^{-1} + \frac{1}{\tau_c \omega_0} \right) \rho_e \vec{A}$$

Теперь добавим второй источник генерации свободных зарядов – многофотонное поглощение  $\vec{J}_{MPA}(\vec{r}, t)$ :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \vec{J}_e(\vec{r}, t) + \vec{J}_{MPA}(\vec{r}, t)$$

Аналогично введём обозначения для огибающих этих функций -  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  и  $\vec{j}_{MPA}(\vec{r}, t)$ .

Выражение для  $\vec{J}_{MPA}(\vec{r}, t)$  может быть получено из закона сохранения энергии. Производная по времени плотности энергии, которая идёт на генерацию свободных зарядов, определяется формулой

$$\frac{d}{dt} w_{MPA}(\vec{r}, t) = \vec{J}_{MPA}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

Энергия, переданная малому объёму  $\Delta V = (\Delta l)^3$  в точке  $\vec{r}$  после подстановки

$$\vec{J}_{MPA}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} \vec{j}_{MPA}(x, y, z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \text{ составляет}$$

$$W_{\Delta V}(\vec{r}) = \lambda_0^3 \int \frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0} [\vec{j}_{MPA}(\vec{r}, t) A^*(\vec{r}, t) + c.c.] dt$$

С другой стороны, потери на многофотонное поглощение

$$W_{\Delta V}(\vec{r}) = \lambda_0^3 \int \sigma_K |A(\vec{r}, t)|^{2K} \rho_0 K \hbar \omega_0 dt$$

Соотнося эти два выражения, мы можем получить

$$\vec{j}_{MPA} = \frac{k_0 \sigma_K K \hbar \rho_o}{\mu_0} |A|^{2(K-1)} \vec{A} = \frac{k_0 \beta_K}{\omega_0 \mu_0} |A|^{2(K-1)} \vec{A}$$

Для полного тока  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_{MPA}(\vec{r}, t) + \vec{j}_e(\vec{r}, t)$

$$\vec{j} = \frac{k_0 \beta_K}{\omega_0 \mu_0} |A|^{2(K-1)} \vec{A} + \frac{e^2}{m_e \omega_0} \left( i \hat{T}^{-1} + \frac{1}{\tau_o \omega_0} \right) \rho_e \vec{A}$$

Теперь для вывода волнового уравнения из уравнений Максвелла нам осталось показать, что величиной  $\nabla \cdot \vec{E}$  можно пренебречь и положить её равной нулю. Это – необходимое условие для построения скалярной модели.

Вернёмся к (1). Это уравнение может быть представлено в виде

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}^{(3)}}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad (9)$$

Тут в плотность носителей  $\rho$  входит как электронная, так ионная составляющие  $\rho = e(\rho_{ion} - \rho_e)$ . Однако вследствие большой массы влиянием ионов на ток  $\vec{J}$  можно пренебречь.

Так как  $|n_2 I| \ll n_0(\omega_0)$ , то  $\left| \frac{\nabla \cdot \vec{P}^{(3)}}{\varepsilon_0 \varepsilon} \right| \ll |\partial_x E_x|$  и уравнение (9) можно записать как

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon} \quad (8)$$

Отсюда можно выразить  $\rho$  и подставить в уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

$$\rho = \varepsilon_0 \varepsilon (\nabla \cdot \vec{E}) = \varepsilon_0 \varepsilon \left( \nabla \cdot \left[ \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} \vec{A}(x, y, z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \right] \right) \text{ и}$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} \vec{j}(x, y, z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c. = \left[ \left( \frac{e^2}{m_e \omega_0} \left( i \hat{T}^{-1} + \frac{1}{\tau_c \omega_0} \right) \rho_e + \frac{k_0 \beta_K}{\omega_0 \mu_0} |A|^{2(K-1)} \right) \vec{A} + c.c. \right] e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$$

Мы получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_0\right) \nabla \cdot [\vec{A}e^{ik_0z}] = -\frac{\nabla \cdot [\vec{j}e^{ik_0z}]}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

Подставим сюда выражения для  $\vec{j}$  и заменяя  $1 + i\frac{\partial}{\partial t}$  на  $\hat{T}$ , получим

$$\begin{aligned} \hat{T} \nabla \cdot [\vec{A}e^{ik_0z}] &= \frac{\nabla \cdot \left[ \frac{e^2}{m_e \omega_0} \left( i\hat{T}^{-1} + \frac{1}{\tau_c \omega_0} \right) \rho_e \vec{A} + \frac{k_0 \beta_K}{\omega_0 \mu_0} |A|^{2(K-1)} \vec{A} \right]}{\varepsilon_0 \varepsilon} e^{ik_0z} = \\ &= \left[ \hat{T}^{-1} \frac{\rho_e}{n_0^2 \rho_c} \vec{A} - i \frac{\sigma \rho_e}{k_0} \vec{A} - i \frac{\beta_K}{k_0} |A|^{2(K-1)} \vec{A} \right] e^{ik_0z} \end{aligned}$$

или

$$\nabla \cdot [\vec{A}e^{ik_0z}] = \hat{T}^{-1} \nabla \cdot \left[ \hat{T}^{-1} \frac{\rho_e}{n_0^2 \rho_c} \vec{A} - i \frac{\sigma \rho_e}{k_0} \vec{A} - i \frac{\beta_K}{k_0} |A|^{2(K-1)} \vec{A} \right] e^{ik_0z}$$

Для оценки можно положить  $T = 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \cong \hat{I}$

Перепишем

$$\nabla \cdot [\vec{A}e^{ik_0z}] = \nabla \cdot \left[ \frac{\rho_e}{n_0^2 \rho_c} \vec{A} - i \frac{\sigma \rho_e}{k_0} \vec{A} - i \frac{\beta_K}{k_0} |A|^{2(K-1)} \vec{A} \right] e^{ik_0z}$$

До порога разрушения должны выполняться условия  $\rho_e / \rho_c \ll n_0^2$ ,  $\sigma \rho_e \ll k_0$  и  $\beta_K |A|^{2K-2} \ll k_0$ , а учитывая то, что для небольших плотностей свободных зарядов  $\rho_e$

$$\left| A \frac{\partial}{\partial x} \rho_e \right| \cong 2K \left| \rho_e \frac{\partial}{\partial x} A \right|$$

$$\left| A \frac{\partial}{\partial x} |A|^{2(K-1)} \right| \cong 2(K-1) |A|^{2(K-1)} \left| \frac{\partial}{\partial x} A \right|$$

мы видим справедливость утверждения  $|\nabla \cdot [\vec{A}e^{ik_0z}]| \ll \left| \frac{\partial}{\partial x} A \right|$

Теперь мы можем вернуться к волновому уравнению

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \mu_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} \right)$$

Подставим  $\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{P}^{(3)}(\vec{r}, t)$  и заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}^{(1)} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \int \varepsilon(\bar{\omega}) \hat{E}(\vec{r}, \bar{\omega}) e^{-i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \right) = \frac{1}{c^2} \left( \int \varepsilon(\bar{\omega}) \bar{\omega}^2 \hat{E}(\vec{r}, \bar{\omega}) e^{-i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \right) = \\ &= \int k^2(\bar{\omega}) \hat{E}(\vec{r}, \bar{\omega}) e^{-i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} \vec{A}(x, y, z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c.$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}^{(1)} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial z} + ik_0 \right)^2 A + \Delta_{\perp} A + \left( \int k^2(\omega_0 + \bar{\omega}) \hat{A}(\vec{r}, \bar{\omega}) e^{-i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \right) \right] \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$$

( $\hat{A}(\vec{r}, \bar{\omega})$ -Фурье образ A)

Преобразуем оставшуюся правую часть  $\mu_0 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}^{(3)} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} \right)$ , подставив

$$\vec{P}^3(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \left( \frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0} \right)^{3/2} \left[ 2n_0 n_2 \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(t-t')|^2 dt' \right) \vec{A} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{P}^3(\vec{r}, t) &= 2n_0 n_2 \varepsilon_0 \left( \frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0} \right)^{3/2} \left( 1 + i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(t-t')|^2 dt' \right) \vec{A} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} = \\ &= T^2 2n_0 n_2 \varepsilon_0 \left( \frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0} \right)^{3/2} \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(t-t')|^2 dt' \right) \vec{A} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \vec{J}(\vec{r}, t) &= \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} (\vec{j}_e + \vec{j}_{MPA}) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c. = \\ &= \left[ \frac{e^2}{m_e \omega_0} \left( \frac{1}{\tau_0 \omega_0} + i\hat{T}^{-1} \right) \rho_e \vec{A} + \frac{k_0 \beta_K}{\omega_0 \mu_0} |A|^{2(K-1)} \right] \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} \vec{A} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} &= T \left[ \frac{e^2}{m_e \omega_0} \left( \frac{1}{\tau_0 \omega_0} + i\hat{T}^{-1} \right) \rho_e \vec{A} + \frac{k_0 \beta_K}{\omega_0 \mu_0} |A|^{2(K-1)} \right] \vec{A} \sqrt{\frac{\omega_0 \mu_0}{2k_0}} e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \end{aligned}$$

Соответственно наше волновое уравнение будет выглядеть как

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial z} + ik_0 \right)^2 A + \Delta_{\perp} A + \left( \int k^2(\omega_0 + \bar{\omega}) \hat{A}(\vec{r}, \bar{\omega}) e^{-i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \right) &= -\frac{2k_0^2 n_2}{n_0} T^2 \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(t-t')|^2 dt' \right) A + \\ + \frac{k_0^2}{n_0^2 \rho_c} \rho_e A - \frac{1}{2} T \left( \sigma \rho_e A + \beta_K |A|^{2(K-1)} A \right) \end{aligned}$$

Перейдём в сопутствующую для распространяющегося излучения систему отсчёта с помощью преобразований

$$\tau \rightarrow t - k'z$$

$$\xi \rightarrow z$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \xi} - k' \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Здесь  $k' = \frac{1}{v_{gr}}$  - величина, обратная групповой скорости

Преобразуем  $\left(\frac{\partial}{\partial z} + ik_0\right)^2$ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - k' \frac{\partial}{\partial \tau} + ik_0\right)^2 = -k_0^2 + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial \xi} - 2k' \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi} - 2k' k_0 \frac{\partial}{\partial \tau} + k'^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

Теперь преобразуем третье слагаемое в левой части, используя **(5)**:

$$\left(\int k^2 (\omega_0 + \bar{\omega}) \hat{A}(\vec{r}, \bar{\omega}) e^{-i\bar{\omega}\tau} d\bar{\omega}\right) = \int \left[ k_0^2 + 2k_0 k' \bar{\omega} + k'^2 \bar{\omega}^2 + \right. \\ \left. + 2(k_0 + k' \bar{\omega}) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{(n)} \bar{\omega}^n + \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} k^{(n)} \bar{\omega}^n\right)^2 \right] \hat{A}(\vec{r}, \bar{\omega}) e^{-i\bar{\omega}\tau} d\bar{\omega} = \\ = \left( k_0^2 + 2k_0 k' \frac{\partial}{\partial \tau} + k'^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2D \left( k_0 + k' \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + D^2 \right) A$$

тут  $D = \sum_{n=2}^{\infty} (k^{(n)} / n!) (i\partial_t)^n$  - оператор дисперсии

Теперь левую часть можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned}
& \left( -k_0^2 + 2ik_0 \frac{\partial}{\partial \xi} - 2k' \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi} - 2k' k_0 \frac{\partial}{\partial \tau} + k'^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) A + \Delta_{\perp} A + \\
& + \left( k_0^2 + 2k_0 k' \frac{\partial}{\partial \tau} + k'^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2D \left( k_0 + k' \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + D^2 \right) A = \\
& = \frac{1}{2ik_0} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( 1 + i \frac{k'}{k_0} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) A - \frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} A - iD \left( 1 + i \frac{k'}{k_0} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2k_0} D \right) A \right]
\end{aligned}$$

Заменим  $1 + i \frac{k'}{k_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \cong 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} = T$  из  $\left| (k_0 - \omega_0 k') / k_0 \right| \ll 1$ . Кроме того, зная, что

оператор  $D$  второго порядка по отношению к производной по времени, мы можем пренебречь  $D^2$ , отбросив при этом производные четвёртого порядка и выше. Приближение ММВ связано с выполнением условия (приложение В)

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} A \right| \ll k_0 |A|.$$

Выполнение условия  $\left| \frac{\partial}{\partial \tau} A \right| \ll \omega_0 |A|$  не требуется, если соблюдается

$$\left| (k_0 - \omega_0 k') / k_0 \right| \ll 1$$

Это позволяет нам упростить выражение.

Мы получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2ik_0} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( 1 + i \frac{k'}{k_0} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{i}{2k_0} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) A - \frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} A - iD \left( 1 + i \frac{k'}{k_0} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2k_0} D \right) A \right] \cong \\
& \cong \frac{1}{2ik_0} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} TA - \frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} A - iDTA \right]
\end{aligned}$$

Разделив и правую часть на  $\frac{1}{2ik_0}$ , мы получим

$$1 + i \frac{k'}{k_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \cong 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} = T$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} TA - \frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} A - iTDA = \\ & = \frac{ik_0^2 n_2}{n_0} T^2 \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(\tau - t')|^2 dt') \right) A - \frac{ik_0}{2n_0^2 \rho_c} \rho_e A - \frac{1}{2} T \left( \sigma \rho_e A + \beta_K |A|^{2(K-1)} A \right) \end{aligned}$$

После действия обратного оператора  $T^{-1}$  на обе части уравнения можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} A = & \frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} T^{-1} A + iDA + \frac{ik_0^2 n_2}{n_0} T \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(\tau - t')|^2 dt') \right) A - \\ & - \frac{ik_0}{2n_0^2 \rho_c} \rho_e T^{-1} A - \frac{1}{2} \left( \sigma \rho_e A + \beta_K |A|^{2(K-1)} A \right) \end{aligned} \quad (10)$$

В этом уравнении возможны дальнейшие упрощения. Прежде всего, отметим, что в наших задачах поперечное распространение играет важную, но не решающую роль, и поэтому возможна замена  $\frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} T^{-1} A \cong \frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} A$ , отбросив  $\frac{\Delta_{\perp}}{2k_0 \omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} A$  как следующий порядок малости. С физической точки зрения такое упрощения является игнорированием зависимости угла дифракции от длины волны, однако в нашей ситуации ( $\frac{\Delta \omega}{\omega} = 0.01$ ) представляется оправданным. В случае со слагаемым

$\frac{ik_0}{2n_0^2 \rho_c} \rho_e T^{-1} A$  такое преобразование выполнять некорректно, так как возможна

ситуация  $\left| \frac{k_0^2 n_2}{n_0} \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(\tau - t')|^2 dt') \right) A \right| \cong \left| \frac{k_0}{2n_0^2 \rho_c} \rho_e A \right|$ . Заменяем оператор  $T^{-1}$  на  $1 - \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau}$ ,

пренебрегая производными более высокого порядка. Далее, оператор дисперсии  $D = \sum_{n=2}^{\infty} (k^{(n)} / n!) (i\partial_{\tau})^n$  мы для большинства задач заменим на  $-\frac{k^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ , оставив только дисперсию второго порядка.

В итоге после всех преобразований волновое уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} A = & \frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} A - \frac{ik^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A + \frac{ik_0^2 n_2}{n_0} \left( 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(\tau - t')|^2 dt') \right) A - \\ & - \frac{ik_0}{2n_0^2 \rho_c} \left( 1 - \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \rho_e A - \frac{1}{2} \left( \sigma \rho_e A + \beta_K |A|^{2(K-1)} A \right) \end{aligned} \quad (11)$$

В правой части этого уравнения первое слагаемое  $\frac{i\Delta_{\perp}}{2k_0} A$ , как уже упоминалось, содержит все поперечные производные и отвечает за дифракцию. В

цилиндрической системе координат оператор имеет вид  $\Delta_{\perp} = \Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$ .

Второй член  $-\frac{ik^{(2)}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} A$  отвечает за дисперсию второго порядка и приводит к расползанию по времени импульса. Третье слагаемое -

$\frac{ik_0^2 n_2}{n_0} \left( 1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left( \int_0^{\infty} (R(t') |A(\tau - t')|^2 dt') \right)$  - содержит нелинейности показателя преломления, электронную и атомную, и описывает такие явления, как фазовая самомодуляция, вынужденное комбинационное рассеяние и дисперсия нелинейного отклика, или явление самоукручения волнового фронта.

Следующее слагаемое  $-\frac{ik_0}{2n_0^2 \rho_c} \left( 1 - \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \rho_e A$  описывает возникновение

дефокусировки вследствие генерации свободных носителей, и последний член

$-\frac{1}{2} \left( \sigma \rho_e A + \beta_K |A|^{2(K-1)} A \right)$  описывает поглощение - многофотонное и свободными носителями.

Это нелинейное уравнение необходимо решать в системе с полученным ранее для плотности свободных зарядов

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rho_e = \sigma_K \rho_m |A|^{2K} + \frac{\sigma}{U_i} \rho_e |A|^2 - \frac{1}{\tau_r} \rho_e \quad (12)$$

Впервые вывод нелинейного волнового уравнения без учёта плазмообразования с использованием метода ММВ был выполнен в работе [39]. В расширенном виде вывод уравнений с учётом генерации свободных зарядов система уравнений (11)-(12) можно найти в [83].

## Приложение В

Рассмотрим подробнее возможность применения метода медленно меняющейся волны (ММВ) [37] при выводе нелинейного уравнения Шрёдингера в приложении А и его отличие от приближения медленно меняющейся амплитуды (ММА)[38].

Согласно приближению ММВ электрическое поле представляется в виде

$$E(t) = E(t) \exp(-i\omega_0 t + i\psi) + c.c., \text{ где } \omega_0 = \frac{\int_0^\infty \omega |E(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |E(\omega)|^2 d\omega} - \text{ несущая частота, } |E(\omega)| - \text{ Фурье}$$

компонента электрического поля,  $\psi$  - фаза в момент  $t = 0$ . Применение данного приближения требует, чтобы центральная частота  $\omega_0$  не зависела от сдвига фазы  $\Delta\psi$  в электрическом поле  $E(t) = E'(t) \exp(i\Delta\psi)$ . Согласно [39], это эквивалентно выполнению следующих условий

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau} A \right| \ll \omega_0 |A|$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} A \right| \ll k_0 |A|.$$

либо условия

$$\left| (k_0 - \omega_0 k') / k_0 \right| \ll 1$$

то есть если в среде разница между групповой и фазовой скоростями небольшая,

то условие  $\left| \frac{\partial}{\partial \tau} A \right| \ll \omega_0 |A|$  можно опустить, что позволяет рассматривать импульсы

с предельно короткой длительностью. Проверим выполнение данного требования для кварца в видимом диапазоне. Заменяем

$$\left| (k_0 - \omega_0 k') / k_0 \right| = \left| \left( k_0 - \omega_0 \frac{dk}{d\omega} \right) / k_0 \right| = \frac{\frac{\omega_0 n}{c} - \omega_0 \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\omega_0 n}{c} \right)}{\frac{\omega_0 n}{c}} = \frac{\omega_0}{n} \frac{dn}{d\omega}$$

Величину производной можно найти, зная зависимость показателя преломления от длины волны из формул Селмейера [47]

$$n[\lambda] = \sqrt{1 + \frac{0,6961663\lambda^2}{\lambda^2 - 0,0684043^2} + \frac{0,4079426\lambda^2}{\lambda^2 - 0,1162414^2} + \frac{0,8974794\lambda^2}{\lambda^2 - 9,896161^2}}$$

На рис. В.1 представлена зависимость разницы  $\left| (k_0 - \omega_0 k') / k_0 \right| \ll 1$  от длины волны в мкм.

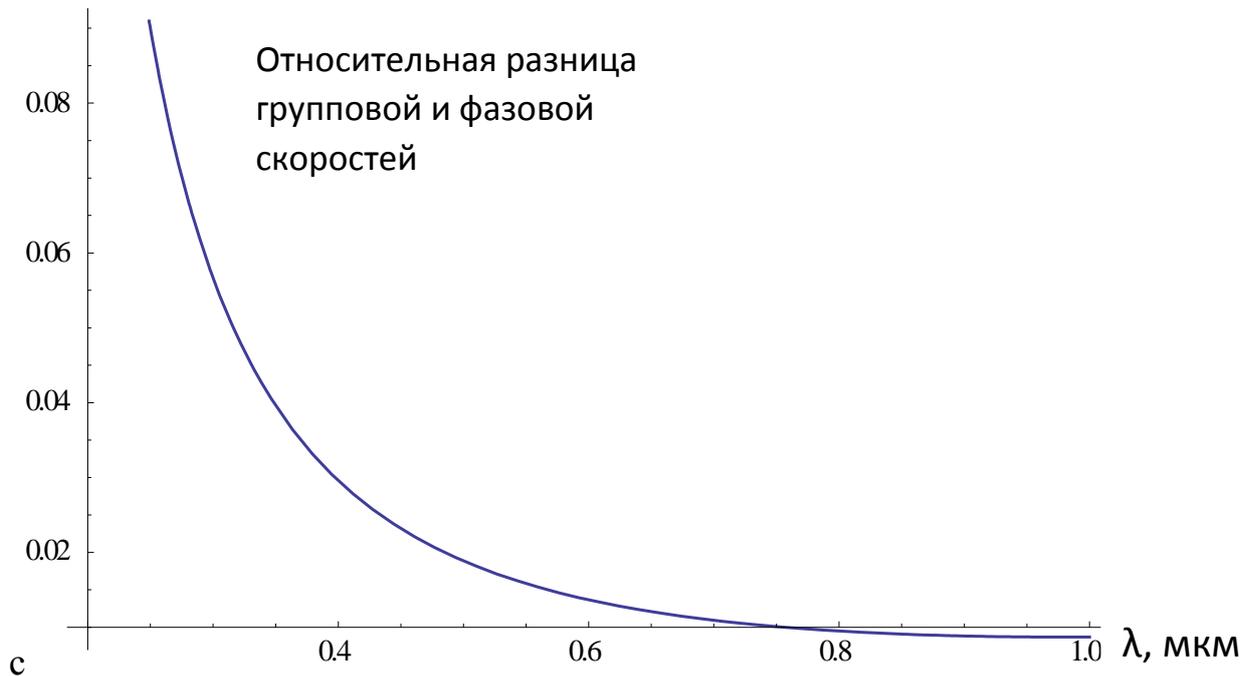


Рисунок В.1 - зависимость разницы  $\left| (k_0 - \omega_0 k') / k_0 \right| \ll 1$  от длины волны в мкм.

Как мы видим, для длины волны  $\lambda=480\text{нм}$  разница составляет 0.02, таким образом, условие приближения соблюдается.

Ранее при выводе нелинейного уравнения Шрёдингера широко использовалось приближение ММА. Отличие в применении этих двух подходов заключается в левой части – в случае ММВ производная огибающей по  $z$  умножается на оператор  $T = \left(1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau}\right)$ . Соответственно разделив обе части на этот оператор, мы получим отличия в правой части в ряде второстепенных коэффициентов. Например, коэффициенты при третьем слагаемом - керровской нелинейности  $\left(1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau}\right)$  и  $\left(1 + 2 \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau}\right)$  соответственно). Этим и объясняется разный вид нелинейных уравнений Шрёдингера в литературе до и после 1997 года. В настоящее время общепринятым является вывод с помощью ММВ, так как он позволяет точнее описать динамику эволюции огибающей при приближении длительности импульса к периоду колебаний световой волны. Приближение ММВ накладывает определённые ограничения на среду распространения, зато может быть применимо к импульсам с длительностью вплоть до периода световой волны.

## Список литературы

- [1] Kobayashi T. et al. Sub-5-fs transform-limited visible pulse source and its application to real-time spectroscopy //IEEE Journal of selected topics in quantum electronics. – 2001. – Т. 7. – №. 4. – С. 525-538.
- [2] Zhou M. L. et al. Proton acceleration by single-cycle laser pulses offers a novel monoenergetic and stable operating regime //Physics of Plasmas. – 2016. – Т. 23. – №. 4. – С. 043112.
- [3] Gildenburg V. B., Vvedenskii N. V. Optical-to-THz wave conversion via excitation of plasma oscillations in the tunneling-ionization process //Physical review letters. – 2007. – Т. 98. – №. 24. – С. 245002.
- [4] Kim A. V. et al. From femtosecond to attosecond pulses //Physics-Uspekhi. – 1999. – Т. 42. – №. 1. – С. 54-61.
- [5] Witte S. et al. Generation of few-cycle terawatt light pulses using optical parametric chirped pulse amplification //Optics Express. – 2005. – Т. 13. – №. 13. – С. 4903-4908.
- [6] Maiman T. H. Stimulated optical radiation in ruby //Nature. – 1960. – Т. 187. – №. 4736. – С. 493-494.
- [7] Strickland D., Mourou G. Compression of amplified chirped optical pulses //Optics communications. – 1985. – Т. 55. – №. 6. – С. 447-449.
- [8] Chu Y. et al. High-contrast 2.0 Petawatt Ti: sapphire laser system //Optics express. – 2013. – Т. 21. – №. 24. – С. 29231-29239.
- [9] Shiraga H. et al. Fast ignition integrated experiments with Gekko and LFEX lasers //Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2011. – Т. 53. – №. 12. – С. 124029.
- [10] Nakatsuka H. et al. Nonlinear picosecond-pulse propagation through optical fibers with positive group velocity dispersion //Physical Review Letters. – 1981. – Т. 47. – №. 13. – С. 910

- [11] Fork R. L. et al. Compression of optical pulses to six femtoseconds by using cubic phase compensation // *Optics letters*. – 1987. – Т. 12. – №. 7. – С. 483-485.
- [12] Nisoli M. et al. Generation of high energy 10 fs pulses by a new pulse compression technique // *Applied Physics Letters*. – 1996. – Т. 68. – №. 20. – С. 2793-2795.
- [13] Sartania S. et al. Generation of 0.1-TW 5-fs optical pulses at a 1-kHz repetition rate // *Optics letters*. – 1997. – Т. 22. – №. 20. – С. 1562-1564.
- [14] Dutin C. F. et al. Post-compression of high-energy femtosecond pulses using gas ionization // *Optics letters*. – 2010. – Т. 35. – №. 2. – С. 253-255.
- [15] Nurhuda M. et al. Optical pulse compression of ultrashort laser pulses in an argon-filled planar waveguide // *Physical review letters*. – 2006. – Т. 97. – №. 15. – С. 153902.
- [16] Chen J. et al. Compression of intense ultrashort laser pulses in a gas-filled planar waveguide // *Optics letters*. – 2008. – Т. 33. – №. 24. – С. 2992-2994.
- [17] Arnold C. L. et al. Compression of ultrashort laser pulses in planar hollow waveguides: a stability analysis // *Optics express*. – 2009. – Т. 17. – №. 13. – С. 11122-11129.
- [18] Stibenz G. et al. Self-compression of millijoule pulses to 7.8 fs duration in a white-light filament // *Optics letters*. – 2006. – Т. 31. – №. 2. – С. 274-276.
- [19] Zair A. et al. Spatio-temporal characterization of few-cycle pulses obtained by filamentation // *Optics express*. – 2007. – Т. 15. – №. 9. – С. 5394-5405
- [20] Курилова М. В. и др. Формирование оптических импульсов длительностью до 8 фс при филаментации коллимированного фемтосекундного лазерного излучения в аргоне // *Квантовая электроника*. – 2009. – Т. 39. – №. 10. – С. 879-881.
- [21] Rolland C., Corkum P. B. Compression of high-power optical pulses // *Journal of the Optical Society of America B*. – 1988. – Т. 5. – №. 3. – С. 641-647.

- [22] Mével E. et al. Extracavity compression technique for high-energy femtosecond pulses // Journal of the Optical Society of America B. – 2003. – Т. 20. – №. 1. – С. 105-108.
- [23] Lassonde P. et al. High energy femtosecond pulse compression // Laser Phys. Lett. – 2016. – Т. 13. – С. 075401.
- [24] Mourou G. et al. Single cycle thin film compressor opening the door to Zeptosecond-Exawatt physics // The European Physical Journal Special Topics. – 2014. – Т. 223. – №. 6. – С. 1181-1188.
- [25] Ashihara S. et al. Soliton compression of femtosecond pulses in quadratic media // Journal of the Optical Society of America B. – 2002. – Т. 19. – №. 10. – С. 2505-2510.
- [26] Faure J. et al. Observation of laser-pulse shortening in nonlinear plasma waves // Physical review letters. – 2005. – Т. 95. – №. 20. – С. 205003.
- [27] He Z. H. et al. Ionization-induced self-compression of tightly focused femtosecond laser pulses // Physical review letters. – 2014. – Т. 113. – №. 26. – С. 263904.
- [28] Shumakova V. et al. Multi-millijoule few-cycle mid-infrared pulses through nonlinear self-compression in bulk // Nature communications. – 2016. – Т. 7.- 12877
- [29] Beaurepaire B. et al. Limitations in ionization-induced compression of femtosecond laser pulses due to spatio-temporal couplings // Optics express. – 2016. – Т. 24. – №. 9. – С. 9693-9705.
- [30] Аристов А. И. и др. Явление уширения спектра и самокомпрессии отрицательно чирпированных фемтосекундных импульсов видимого диапазона в кварце // Квантовая электроника. – 2012. – Т. 42. – №. 12. – С. 1097-1099.
- [31] Алексеев С. В. и др. Гибридные фемтосекундные системы видимого диапазона на основе ХеF(C–А)-усилителя: состояние и перспективы // Квантовая электроника. – 2013. – Т. 43. – №. 3. – С. 190-200.

- [32]Грудцын Я. В. и др. Фазовая самомодуляция в тонком кварце в сходящемся пучке отрицательно chirпированного фемтосекундного излучения //Квантовая электроника. – 2015. – Т. 45. – №. 5. – С. 415-420.
- [33]Grudtsyn Y. V. et al. Femtosecond pulse self-shortening in Kerr media due to transient regime of multiple filamentation // Journal of the Optical Society of America B. – 2018. – Т. 35. – №. 5. – С. 1054.
- [34]Yablonovitch E. Self-phase modulation and short-pulse generation from laser-breakdown plasmas //Physical review A. – 1974. – Т. 10. – №. 5. – С. 1888
- [35]Couairon A. et al. Pulse self-compression to the single-cycle limit by filamentation in a gas with a pressure gradient //Optics letters. – 2005. – Т. 30. – №. 19. – С. 2657-2659.
- [36]Жерихин А. Н. и др. О происхождении временной структуры ультракоротких лазерных импульсов //Квантовая электроника. – 1974. – Т. 1. – №. 4. – С. 956-959.
- [37]Басов Н. Г. и др. Формирование мощных наносекундных импульсов в лазерной установке на неодимовом стекле //Квантовая электроника. – 1974. – Т. 1. – №. 6. – С. 1428-1434.
- [38]Mironov S. et al. Suppression of small-scale self-focusing of high-intensity femtosecond radiation //Applied Physics B. – 2013. – Т. 113. – №. 1. – С. 147-151.
- [39]Brabec T., Krausz F. Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime //Physical Review Letters. – 1997. – Т. 78. – №. 17. – С. 3282.
- [40]Ахманов В. и др. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. – Наука, 1988.
- [41]Blow K. J., Wood D. Theoretical description of transient stimulated Raman scattering in optical fibers //IEEE Journal of Quantum Electronics. – 1989. – Т. 25. – №. 12. – С. 2665-2673.

- [42]Rayner D. M. et al. Ultrashort pulse non-linear optical absorption in transparent media //Optics express. – 2005. – Т. 13. – №. 9. – С. 3208-3217.
- [43]Arnold D. et al. Acoustic-phonon runaway and impact ionization by hot electrons in silicon dioxide //Physical Review B. – 1992. – Т. 45. – №. 3. – С. 1477.
- [44]Stuart B. C. et al. Nanosecond-to-femtosecond laser-induced breakdown in dielectrics //Physical review B. – 1996. – Т. 53. – №. 4. – С. 1749.
- [45]Трофимов В. А. Инварианты нелинейного распространения фемтосекундных импульсов //Известия высших учебных заведений. Радиофизика. – 1999. – Т. 42. – №. 4. – С. 369-372.
- [46]Варенцова С. А. и др. Консервативная разностная схема для задачи распространения фемтосекундного лазерного импульса в кубично-нелинейной среде //Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43. – №. 11. – С. 1709-1721.
- [47]Malitson I. H. Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica // Journal of the Optical Society of America. – 1965. – Т. 55. – №. 10. – С. 1205-1209.
- [48]Adair R. et al. Dispersion of the nonlinear refractive index of optical crystals //Optical Materials. – 1992. – Т. 1. – №. 3. – С. 185-194.
- [49]DeSalvo R. et al. Infrared to ultraviolet measurements of two-photon absorption and  $n^2$  in wide bandgap solids //IEEE Journal of Quantum Electronics. – 1996. – Т. 32. – №. 8. – С. 1324-1333.
- [50]Kim Y. P., Hutchinson M. H. R. Intensity-induced nonlinear effects in UV window materials //Applied Physics B. – 1989. – Т. 49. – №. 5. – С. 469-478.
- [51]Smith W. L. et al. Dielectric-breakdown threshold and nonlinear-refractive-index measurements with picosecond laser pulses //Physical Review B. – 1975. – Т. 12. – №. 2. – С. 706.
- [52]White W. T. et al. Direct measurement of the nonlinear refractive-index coefficient  $\gamma$  at 355 nm in fused silica and in BK-10 glass //Optics letters. – 1984. – Т. 9. – №. 1. – С. 10-12.

- [53] Shimada T. et al. Measurement of nonlinear index by a relay-imaged top-hat Z-scan technique // *Laser-Induced Damage in Optical Materials: 1995. – 1996.* – T. 2714. – C. 52-60.
- [54] Taylor A. J. et al. Measurement of  $n_2$  for KDP and fused silica at 800 nm and 400 nm // Attachment 1 in *Effort in Support of Core Science and Technology Plan for Indirect-Drive Inertial Confinement (ICF) Fusion.* – 1996.
- [55] Stolen R. H., Ashkin A. Optical Kerr effect in glass waveguide // *Applied Physics Letters.* – 1973. – T. 22. – №. 6. – C. 294-296.
- [56] Williams W. E. et al. Simple direct measurements of  $n_2$  // *Laser Induced Damage In Optical Materials: 1983.* – ASTM International, 1985.
- [57] Veduta A. P., Kirsanov B. P. Variation of the refractive index of liquids and glasses in a high intensity field of a ruby laser // *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics.* – 1968. – T. 27. – C. 736.
- [58] Ditmire T. et al. Effects of cubic nonlinearity on frequency doubling of high-power laser pulses // *Journal of the Optical Society of America B.* – 1996. – T. 13. – №. 4. – C. 649-655.
- [59] Vasil'eva M. A. et al. Measurement of the nonlinear refractive index of laser active media doped with  $Nd^{3+}$  // *Quantum Electronics.* – 1985. – T. 15. – №. 5. – C. 656-659.
- [60] Milam D., Weber M. J. Measurement of nonlinear refractive-index coefficients using time-resolved interferometry: application to optical materials for high-power neodymium lasers // *Journal of Applied Physics.* – 1976. – T. 47. – №. 6. – C. 2497-2501.
- [61] Altshuler G. B. et al. Direct measurement of the tensor elements of the nonlinear optical susceptibility of optical materials // *Pisma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki.* – 1977. – T. 3. – C. 523-528.
- [62] Kim K. S. et al. Measurement of the nonlinear index of silica-core and dispersion-shifted fibers // *Optics Letters.* – 1994. – T. 19. – №. 4. – C. 257-259.

- [63] Kato T. et al. Measurement of the nonlinear refractive index in optical fiber by the cross-phase-modulation method with depolarized pump light // *Optics letters*. – 1995. – Т. 20. – №. 9. – С. 988-990.
- [64] Milam D. Review and assessment of measured values of the nonlinear refractive-index coefficient of fused silica // *Applied optics*. – 1998. – Т. 37. – №. 3. – С. 546-550.
- [65] Agrawal G. *Nonlinear Fiber Optics* (4<sup>th</sup> Edition). – 2007.
- [66] Козлов С. А., Самарский В. В. *Основы фемтосекундной оптики*. – 2009.
- [67] Oguama F. A. et al. Simultaneous measurement of the Raman gain coefficient and the nonlinear refractive index of optical fibers: theory and experiment // *Journal of the Optical Society of America B*. – 2005. – Т. 22. – №. 2. – С. 426-436.
- [68] Nathan V. et al. Review of multiphoton absorption in crystalline solids // *Journal of the Optical Society of America B*. – 1985. – Т. 2. – №. 2. – С. 294-316.
- [69] Catalano I. M. et al. Multiphoton transitions in ionic crystals // *Physical Review B*. – 1972. – Т. 5. – №. 4. – С. 1629.
- [70] Jones S. C. et al. Prebreakdown energy absorption from intense laser pulses at 532 nm in NaCl // *Physical Review B*. – 1988. – Т. 37. – №. 2. – С. 755.
- [71] Shen X. A. et al. Four-photon absorption cross section in potassium bromide at 532 nm // *Physical Review B*. – 1987. – Т. 36. – №. 5. – С. 2831.
- [72] Bindra K. S. et al. Nonlinear optical properties of chalcogenide glasses: Observation of multiphoton absorption // *Applied Physics Letters*. – 2001. – Т. 79. – №. 13. – С. 1939-1941.
- [73] Zafar S. et al. Thickness and effective electron mass measurements for thin silicon dioxide films using tunneling current oscillations // *Applied physics letters*. – 1995. – Т. 67. – №. 7. – С. 1031-1033.
- [74] Sudrie L. et al. Femtosecond laser-induced damage and filamentary propagation in fused silica // *Physical Review Letters*. – 2002. – Т. 89. – №. 18. – С. 186601.
- [75] Audebert P. et al. Space-time observation of an electron gas in SiO<sub>2</sub> // *Physical Review Letters*. – 1994. – Т. 73. – №. 14. – С. 1990.

- [76] Eimerl D. et al. Optical, mechanical, and thermal properties of barium borate // *Journal of applied physics*. – 1987. – Т. 62. – №. 5. – С. 1968-1983.
- [77] Sheik-Bahae M., Said A. A., Van Stryland E. W. High-sensitivity, single-beam  $n_2$  measurements // *Optics letters*. – 1989. – Т. 14. – №. 17. – С. 955-957.
- [78] Nibbering E. T. J. et al. Determination of the inertial contribution to the nonlinear refractive index of air,  $N_2$ , and  $O_2$  by use of unfocused high-intensity femtosecond laser pulses // *Journal of the Optical Society of America B*. – 1997. – Т. 14. – №. 3. – С. 650-660.
- [79] Басов Н.Г. и др. Нелинейные потери в оптических квантовых генераторах и усилителях ультракоротких импульсов // *ЖЭТФ*. 1971.Т. 60. С. 533.
- [80] Басов Н.Г. и др. Получение мощных ультракоротких импульсов света на неодимовом стекле // *ЖЭТФ*.-1969.- Т. 57. -С. 1175.
- [81] Беспалов В. И., Таланов В. И. О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях // *Письма в ЖЭТФ*. – 1966. – Т. 3. – №. 12. – С. 471-475.
- [82] А. К. Потёмкин, Е. А. Хазанов, “Вычисление параметра  $M_2$  лазерных пучков методом моментов”, *Квантовая электроника*. – 2005. – Т.35. – №. 11. – С. 1042-1044.
- [83] Skupin S., Bergé L. Self-guiding of femtosecond light pulses in condensed media: Plasma generation versus chromatic dispersion // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 2006. – Т. 220. – №. 1. – С. 14-30.
- [84] Levenson M. Feasibility of measuring the nonlinear index of refraction by third-order frequency mixing // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. – 1974. – Т. 10. – №. 2. – С. 110-115.
- [85] Malitson I. H. A redetermination of some optical properties of calcium fluoride // *Applied Optics*. – 1963. – Т. 2. – №. 11. – С. 1103-1107.
- [86] Penzkofer A. et al. Four-wave mixing in alkali halide crystals and aqueous solutions // *Applied Physics B*. – 1982. – Т. 29. – №. 1. – С. 37-42.

- [87]Li H. H. Refractive index of alkali halides and its wavelength and temperature derivatives //Journal of physical and chemical reference data. – 1976. – Т. 5. – №. 2. – С. 329-528.
- [88]Kandidov V. P. et al. Self-transformation of a powerful femtosecond laser pulse into a white-light laser pulse in bulk optical media (or supercontinuum generation) //Applied Physics B. – 2003. – Т. 77. – №. 2-3. – С. 149-165.
- [89]Kosareva O. G. et al. Conical emission from laser–plasma interactions in the filamentation of powerful ultrashort laser pulses in air //Optics letters. – 1997. – Т. 22. – №. 17. – С. 1332-1334.
- [90]Грудцын Я. В. и др. Самосокращение фемтосекундных импульсов в керровских средах: роль модуляционной неустойчивости в формировании спектра // Квантовая электроника. – 2018. – Т. 48. – №. 4. – С. 306.
- [91]Гейнц Ю. Э и др. “Микроструктура области множественной филаментации фемтосекундного лазерного излучения в твердом диэлектрике”//Квантовая электроника. – 2016. – Т. 46. – №. 2. – С. 133-141.