На правах рукописи

Мисуна Никита Георгиевич

Развернутый подход в теории высших спинов и суперсимметричных моделях

Специальность 01.04.02 — Теоретическая физика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте им. П.Н. Лебедева Российской академии наук

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Васильев Михаил Андреевич**
Официальные оппоненты:	**Зиновьев Юрий Михайлович**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», главный научный сотрудник
	Иванов Евгений Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, Международная межправительственная организация Объединенный институт ядерных исследований, начальник сектора
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Томский государственный педагогический университет»

Защита состоится «26» ноября 2018 г. в 12:00 на заседании диссертационного совета Д 002.023.02 на базе Физического института им. П.Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, Москва, Ленинский проспект, д.53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физического института им. П.Н. Лебедева РАН или на сайте www.lebedev.ru

Автореферат разослан «___» ___________ 2018 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук **Истомин Яков Николаевич**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одной из важнейших задач современной теоретической физики является построение квантовой теории гравитации и объединение ее с другими известными фундаментальными взаимодействиями: сильным, слабым и электромагнитным. Последние описываются Стандартной моделью, перенормируемость которой обеспечивается неабелевыми калибровочными симметриями Янга–Миллса. Таким образом, наличие симметрий исправляет ультрафиолетовое поведение теории. Возникает вопрос – какие вообще возможны симметрии в квантовой теории поля?

Известные «теоремы запрета», такие как теорема Коулмена–Мандулы[1], утверждают, что при достаточно общих предположениях максимальной алгеброй непрерывных симметрий квантовой теории поля с нетривиальной S-матрицей является прямая сумма алгебры Пуанкаре (симметрии пространства Минковского) и компактных алгебр Ли (янг–миллсовские симметрии). Преодолеть эти ограничения позволила *суперсимметрия* – расширение алгебры Пуанкаре антикоммутирующими генераторами, выходящее за рамки исходных предположений Коулмена–Мандулы. Суперсимметричные теории демонстрируют более мягкое квантовое поведение: лидирующие расходимости в них подавлены.

В случае гравитации, однако, квантовополевой подход не приводит к успеху. Общая теория относительности, как и ее суперсимметричное обобщение, супергравитация, при квантовании оказываются неперенормируемыми. По этой причине возникает интерес к альтернативным моделям.

Основным претендентом на роль единой теории фундаментальных взаимодействий считается теория струн. Как показал Гросс[2], в пределе нулевого натяжения струны (при энергиях много больше планковской) струнные амплитуды рассеяния порождают бесконечный набор тождеств Уорда. Это позволяет предположить, что сама теория струн является спонтанно-нарушенной фазой некоторой калибровочной теории безмассовых полей всех спинов – *теории высших спинов*. Эта теория может рассматриваться как обобщение

[1] Coleman S., Mandula J. All Possible Symmetries of the S Matrix // Phys. Rev. - 1967. - Vol. 159. - Pp. 1251-1256.

[2] Gross D.J. High-Energy Symmetries of String Theory // Phys. Rev. Lett. - 1988. - Vol. 60. - Pp. 1229-1238.

супергравитации.

Интерес к теории высших спинов значительно возрос после открытия голографической AdS/CFT-дуальности[3] между теориями гравитации в $(d+1)$-мерном пространстве анти-де Ситтера (AdS) и конформными теориями поля (CFT) на его границе (d-мерном пространстве Минковского). Исходная гипотеза связывала теорию IIB суперструн на $AdS_5 \times S^5$ с $4d$ $\mathcal{N}=4$ теорией супер-Янга–Миллса, причем режим сильной связи оказывался дуален слабой. Позднее Клебанов и Поляков выдвинули гипотезу[4], что теории высших спинов в AdS_4 дуальны различным $3d$ векторным моделям, причем на обеих сторонах дуальности реализуется режим слабой связи, что дает надежду на возможность прямой проверки гипотезы.

Таким образом, теория высших спинов представляет интерес и с точки зрения развития теории поля (в цепочке калибровочные теории $\rightarrow$ суперсимметричные теории $\rightarrow$ теории высших спинов), и с точки зрения квантовой гравитации и теории струн (как «кулоновская фаза» последней), и с точки зрения AdS/CFT-дуальности (возможность прямого доказательства).

Степень разработанности темы. Теоретико-полевое описание свободных безмассовых полей произвольных спинов впервые было дано Фронсдалом[5]. Безмассовое поле целого спина s в пространстве Минковского описывается дважды бесследовым симметричным тензором ранга s $\phi_{a(s)}(x)$, классические уравнения движения которого имеют вид

$$\Box\phi_{a(s)}(x) - s\partial_a\partial_b\phi^b{}_{a(s-1)}(x) + \frac{1}{2}s(s-1)\partial_a\partial_a\phi^b{}_{ba(s-2)}(x) = 0. \qquad (1)$$

Эти уравнения инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\delta\phi_{a(s)}(x) = \partial_a\xi_{a(s-1)}(x), \quad \xi^b{}_{ba(s-3)}(x) = 0. \qquad (2)$$

Попытки построить нелинейную теорию фронсдаловских полей натолкнулись на препятствие: хотя были найдены кубические вершины взаимодействия полей высших спинов друг с другом, не удавалось найти вершины

[3] Maldacena J.M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity // Adv. Theor. Math. Phys. - 1998. - Vol. 2. - Pp. 231-252.

[4] Klebanov I.R., Polyakov A.M. AdS dual of the critical O(N) vector model // Phys. Lett. - 2002. - Vol. B550. - Pp. 213-219.

[5] Fronsdal C. Massless Fields with Integer Spin // Phys. Rev. - 1978. - Vol. D18. - P. 3624.

их взаимодействия с гравитацией. К тому же теорема Коулмена–Мандулы, казалось бы, заранее обрекала на неудачу любые попытки построить нелинейную теорию с симметриями высших спинов. Решение было найдено в работах Фрадкина и Васильева, где были построены вершины взаимодействия полей высших спинов с гравитацией: оказалось, задача решается, если рассматривать пертурбативное разложение не над пространством Минковского, а над пространством–временем постоянной ненулевой кривизны, пространством (анти-)де Ситтера. Одновременно при этом снимается ограничение теоремы Коулмена–Мандулы, т.к. в таком пространстве отсутствует S-матрица (невозможно определить асимптотические состояния).

Развивая эту идею, удалось найти полные нелинейные уравнения теории высших спинов[6], известные также как *уравнения Васильева*. В отличие от лагранжевых уравнений движения теории поля они являются *развернутыми*, представляя собой бесконечный набор дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в терминах дифференциальных форм. Бесконечное множество вершин взаимодействия между полями закодированы в них через эволюцию по вспомогательным твисторным переменным.

Характерными свойствами теории Васильева являются: присутствие в спектре безмассовых полей всех спинов $0 \leqslant s < \infty$ (возможна редукция на бозонные поля и, далее, на поля четных спинов); бесконечномерная неабелева калибровочная симметрия высших спинов (при этом имеются конечномерные подалгебры в секторе низших спинов $s \leqslant 2$); ненулевое значение космологической постоянной (теория не имеет плоского предела при ненарушенных симметриях); координатно-независимая формулировка (использование языка дифференциальных форм). Действие теории неизвестно.

Развернутые уравнения высших спинов можно воспринимать как нетривиальное обобщение тетрадной формулировки гравитации Картана. Именно она позволяет ввести взаимодействие фермионов с гравитационным полем, поэтому тетрадный формализм неизбежно возникает при рассмотрении теорий супергравитации. Возникает вопрос – могут ли методы развернутого подхода оказаться полезными для изучения суперсимметричных теорий? Разумно начать исследование с разбора простейшей теории, такой как

[6]Vasiliev M.A. Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions // Phys. Lett. - 1990. - Vol. B243. - Pp. 378-382.

модель Весса–Зумино – суперсимметричная теория скалярного и спинорного полей. Первый шаг в этом направлении был сделан в [7], где была найдена развернутая версия уравнений движения свободной модели Весса–Зумино. Следующим шагом является построение развернутой off-shell формулировки теории и классификация всех ее инвариантных функционалов. Это является одной из целей диссертации.

Развернутые уравнения имеют существенно иной вид по сравнению с лагранжевыми уравнениями движения. В первую очередь это связано с тем, что релятивистские поля в развернутом подходе описываются бесконечными наборами тензоров, параметризующими все степени свободы, так что развернутых уравнений обычно бесконечно много, а развернутые функционалы зависят от этих тензоров и не содержат производных. Таким образом, извлечение стандартных лагранжевых структур из развернутых систем является нетривиальной задачей. Более того, она не просто техническая.

В частности, в последнее время в литературе активно обсуждается проблема локальности в теории высших спинов. Формально она состоит в фиксации допустимого функционального класса полей, что позволило бы отличать физические вершины от нелинейных слагаемых, убираемых переопределением полей. Технически задача сводится к построению правильной резольвенты по вспомогательным твисторным переменным. Локальная резольвента для квадратичных уравнений была построена в [8]. С ее помощью можно извлекать из уравнений Васильева лагранжевы уравнения движения до второго порядка по полям. Извлечение лагранжевых кубических вершин высших спинов является одной из целей диссертации.

Главной проблемой, связанной с AdS/CFT-соответствием теорий высших спинов, является отсутствие действия теории Васильева, из-за чего стандартная схема AdS/CFT-вычислений неприменима. Одно из решений, предложенное в [9], состоит в расширении $4d$ уравнений Васильева путем включения в них полей, являющихся формами старших рангов. Это позволя-

[7] Ponomarev D.S., Vasiliev M.A. Unfolded Scalar Supermultiplet // JHEP. - 2012. - Vol. 1201. - P. 152.

[8] Gelfond O.A., Vasiliev M.A. Current Interactions from the One-Form Sector of Nonlinear Higher-Spin Equations // Nucl. Phys. - 2018. - Vol. B931. - Pp. 383-417.

[9] Vasiliev M.A. Invariant Functionals in Higher-Spin Theory // Nucl. Phys. - 2017. - Vol. B916. - Pp. 219-253.

ет определить на таких расширенных уравнениях замкнутые 2- и 4-формы, являющиеся функционалами полей высших спинов. Интеграл от этих форм будет являться сохраняющейся величиной. В той же работе аргументируется, что 2-форма должна воспроизводить сохраняющиеся заряды для решений теории высших спинов, обобщающих черные дыры эйнштейновской гравитации, а 4-форма может рассматриваться как древесный производящий функционал AdS/CFT.

Однако, вычисление 4-формы даже в низших порядках по полям оказывается технически весьма сложной задачей. Это связано с тем, что обычный метод решения развернутых уравнений основывается на использовании стягивающих гомотопий, обращающих дифференциал де Рама по вспомогательным твисторным переменным. С ростом ранга форм число стягивающих гомотопий растет комбинаторно, что требует многократного повторения однотипных вычислений, приводящего в итоге к громоздким и неудобным в обращении выражениям. По этой причине встает вопрос разработки более эффективной техники решения развернутых уравнений высших спинов. Это также является одной из задач диссертации.

С другой стороны, упомянутая 2-форма, отвечающая зарядам черных дыр, может быть определена и без добавления старших форм, что делает ее вычисление относительно простой задачей (по крайней мере, в младших порядках). Известно, что методы теории высших спинов являются эффективным инструментом изучения черных дыр. Так, в [10] с помощью развернутого подхода удалось построить координатно-независимое описание черной дыры в AdS_4 в терминах параметра глобальной симметрии AdS_4, а в [11] было получено точное нелинейное решение уравнений Васильева, обобщающее $4d$ статическую черную дыру. Вычисление с помощью 2-формы сохраняющихся зарядов в теории высших спинов, являющееся одной из целей диссертации, открывает новые возможности в исследовании физики черных дыр.

Поскольку теория высших спинов обобщает ОТО, она должна содержать в себе принцип эквивалентности, который лежит в основе теории гра-

[10] Didenko V.E., Matveev A.S., Vasiliev M.A. Unfolded Dynamics and Parameter Flow of Generic AdS(4) Black Hole. - 2009. - arXiv:0901.2172 [hep-th].

[11] Didenko V.E., Vasiliev M.A. Static BPS black hole in 4d higher-spin gauge theory // Phys. Lett. - 2009. - Vol. B682. - Pp. 305-315, Erratum: Phys. Lett. - 2013. - Vol. B722. - P. 389.

витации. В тетрадном формализме он включает в себя локальную лоренц-ковариантность. Лоренц-ковариантность исходных уравнений Васильева была доказана в [12], однако для расширенных уравнений высших спинов этот вопрос в литературе не обсуждался. Одной из целей диссертации является установление лоренц-ковариантности расширенных уравнений высших спинов и изучение структуры их явно лоренц-ковариантной формы.

Цели работы. Таким образом, целями диссертации являются:

1. Анализ модели Весса–Зумино методами развернутой динамики.
2. Изучение кубических вершин взаимодействия высших спинов с точки зрения уравнений Васильева.
3. Развитие пертурбативных методов теории высших спинов.
4. Установление лоренц-ковариантности расширенных уравнений высших спинов.
5. Анализ сохраняющихся зарядов высших спинов в рамках уравнений Васильева.

Задачи. Для достижения целей были поставлены следующие задачи:

1. Найти развернутую off-shell формулировку безмассового скалярного супермультиплета.
2. Классифицировать все нетривиальные развернутые суперполевые лагранжианы модели Весса–Зумино.
3. Извлечь из уравнений Васильева квадратичные поправки к уравнениям Фронсдала, соответствующие токовым взаимодействиям высших спинов.
4. Найти разложение единицы для расширенных уравнений высших спинов, полностью разрешающее эволюцию по твисторным переменым.
5. Найти явно лоренц-ковариантную форму расширенных уравнений высших спинов.
6. Вычислить сохраняющиеся заряды в младших порядках для черной дыры Керра с высшими спинами.

[12] Vasiliev M.A. Properties of equations of motion of interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions // Class. Quant. Grav. - 1991. - Vol. 8. - Pp. 1387-1417.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Классификация всех развернутых суперполевых лагранжианов модели Весса–Зумино в классах суперформ, интегральных форм и киральных интегральных форм.

2. Найденные в явном виде квадратичные поправки к уравнениям Фронсдала, порождаемые токовыми взаимодействиями в теории Васильева с произвольной фазой.

3. Теория возмущений для расширенных уравнений высших спинов, полностью разрешающая эволюцию по вспомогательным твисторным переменным.

4. Явно лоренц-ковариантная форма расширенных уравнений высших спинов.

5. Конструкция для сохраняющихся зарядов высших спинов в теориях с топологическими полями.

6. Выражения для сохраняющихся зарядов черной дыры Керра с высшими спинами в младших порядках по полям.

Научная новизна и личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены лично автором либо при его непосредственном участии. Их научная новизна позволила продвинуться в понимании структуры теории высших спинов, в анализе нелинейных уравнений высших спинов и в приложении развернутого подхода к суперсимметричным теориям.

Методология и методы исследования. Основным методом исследования в диссертации является развернутый подход, ранее уже многократно доказавший свою эффективность и плодотворность в применении к теории высших спинов.

Степень достоверности. Достоверность полученных результатов обеспечивается надежностью применяемого математического аппарата теоретической физики (включающего теорию дифференциальных уравнений, дифференциальную геометрию, теорию представлений алгебр Ли и ассоциативных алгебр, теорию дифференциальных форм и когомологий и пр.)

Теоретическая значимость работы. Изучаемые проблемы представляют конкретный научный интерес в области теоретической физики фундаментальных взаимодействий. Полученные в работе результаты могут быть использованы для исследований в области теории высших спинов и суперсимметричных теорий поля. Предложенная конструкция развернутых суперполевых действий открывает возможности для исследования суперсимметричных теорий методами развернутой динамики, а ее эффективность доказывается разобранным в работе примером модели Весса–Зумино, для которой получены все суперполевые развернутые действия. Полученные в диссертации квадратичные поправки токов высших спинов к уравнениям Фронсдала доказывают правильность предложенной в [13] локальной квадратичной резольвенты для уравнений Васильева. Разработанная в диссертации теория возмущений для расширенных уравнений высших спинов значительно упрощает их пертурбативный анализ, автоматически учитывая многократные гомотопические интегрирования, возникающие при применении стандартной пертурбативной техники. Найденная в работе лоренц-ковариантная форма расширенных уравнений высших спинов, во-первых, доказывает, что эти уравнения находятся в согласии с принципом эквивалентности, а, во-вторых, ведет к дальнейшему упрощению теории возмущений. Наконец, предложенная конструкция для зарядов высших спинов с топологическими полями открывает новые возможности как для анализа структуры теории высших спинов, так и для исследования проблем физики черных дыр.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях в рекомендованных ВАК журналах (см. стр. 26) и докладывались на различных международных конференциях, совещаниях и семинарах: «Quarks-2014» (Суздаль, 2014), «Higher Spin Theory and Holography-1» (Москва, 2014), «Higher Spin Theory and Holography-2» (Москва, 2015), международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий» (Дубна, 2016), «Quarks-2016» (Пушкин, 2016), «Higher Spin Theory and Holography-4» (Москва, 2016), «Ginzburg Centennial Conference on Physics» (Москва, 2017), «Higher Spin Theory and Holography-6» (Москва, 2017), «XXVth International Conference on Integrable

[13] Gelfond O.A., Vasiliev M.A. Current Interactions from the One-Form Sector of Nonlinear Higher-Spin Equations // Nucl. Phys. - 2018. - Vol. B931. - Pp. 383-417.

Systems and Quantum Symmetries (ISQS-25)» (Прага, Чешская республика, 2017), «Supersymmetries and Quantum Symmetries – SQS'2017» (Дубна, 2017), «Quarks-2018» (Валдай, 2018), «Higher Spin Theory and Holography-7» (Москва, 2018), «Quantum Field Theory and Gravity» (Томск, 2018), а также на семинарах по квантовой теории поля ФИАН.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из Введения, 5 глав основной части, Заключения, Списка литературы и 2 приложений. В Приложении А собраны различные соглашения и обозначения, применяемые в диссертации. В Приложении Б выписаны уравнения Q-замкнутости суперформы лагранжиана из Главы 1. Полный объем диссертации составляет 174 страницы. Список литературы включает 226 наименований. Диссертация не содержит рисунков и таблиц.

Основное содержание работы

Первая глава основана на публикации [1] и посвящена анализу модели Весса–Зумино методами развернутого подхода.

Разворачивание уравнений подразумевает их переформулировку в виде обобщенных уравнений нулевой кривизны

$$\mathrm{d}W^{\Omega}(x) + G^{\Omega}\left(W\left(x\right)\right) = 0, \tag{3}$$

где $\mathrm{d} = \mathrm{d}x^{\underline{n}}\dfrac{\partial}{\partial x^{\underline{n}}}$ – дифференциал де Рама в пространстве–времени M^d, $W^{\Omega}(x)$ – дифференциальные формы и G^{Ω} построена из внешних произведений форм W^{Υ}. Ω и Υ обозначают все индексы форм.

Тождество $\mathrm{d}^2 \equiv 0$ влечет за собой условие совместности

$$Q^2 \equiv 0, \quad Q := G^{\Upsilon}\frac{\delta}{\delta W^{\Upsilon}}. \tag{4}$$

Уравнения (3) инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\delta W^{\Omega} = \mathrm{d}\varepsilon^{\Omega} - \varepsilon^{\Upsilon}\frac{\partial G^{\Omega}\left(W\right)}{\partial W^{\Upsilon}}. \tag{5}$$

Поля, которые не могут быть ни выражены через производные других полей, ни откалиброваны в ноль, называются динамическими. Все остальные носят название вспомогательных. Дифференциальные условия, налагаемые развернутой системой на динамические поля, называются динамическими уравнениями. Остальные уравнения являются либо их следствиями, либо связями, выражающими вспомогательные поля через динамические.

Инварианты развернутой системы классифицируются когомологиями соответствующего оператора Q[14]. Система (3) считается off-shell, если она не содержит динамических уравнений. Ее развернутое действие определяется как интеграл по M^d

$$S = \int\limits_{M^d} \mathcal{L} \tag{6}$$

от некоторой d-формы $\mathcal{L}(W)$ (лагранжиана). Если $\mathcal{L}$ является Q-замкнутой функцией полей W^Ω (т.е. $Q\mathcal{L} = 0$), то (6) калибровочно-инвариантно. Если лагранжиан Q-точен, т.е. $\mathcal{L} = G^\Omega \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial W^\Omega}$, то действие (6) тривиально. Таким образом, действия off-shell системы (3) определяются ее Q-когомологиями.

Поскольку суперформы непосредственно не интегрируемы на супермногобразиях, для суперпространства необходимо уточнить определение развернутого действия. Рассмотрим четную n-мерную поверхность в $M^{p|q}$: $\left\{z^M(t^a) = (x^m(t^a), \theta^\mu(t^a)),\ a = \overline{1,n}\right\}$, где t^a – координаты поверхности. Определим интеграл от n-суперформы $\omega = \omega_{M_1 \dots M_n} dz^{M_1} \dots dz^{M_n}$ по $\mathcal{S}^n$ как

$$\int\limits_{\mathcal{S}^n} \omega = \int \omega_{M_1 \dots M_n} \left(\frac{\partial z^{M_1}}{\partial t^{a_1}} \mathrm{d}t^{a_1}\right) \dots \left(\frac{\partial z^{M_n}}{\partial t^{a_n}} \mathrm{d}t^{a_n}\right) = \int \omega'_{1 \dots n} \mathrm{d}t^1 \dots \mathrm{d}t^n. \tag{7}$$

Суперполевое действие тогда можно определить как такой интеграл (независящий от локальных вариаций $\mathcal{S}^n$) от замкнутой p-суперформы лагранжиана.

Развернутая система, эквивалентная свободным суперполевым уравнениям движения $4d$ $\mathcal{N} = 1$ безмассовой модели Весса–Зумино, имеет вид[15]

$$D^L C^{a(n)}(z) + E_b C^{a(n)b}(z) - \sqrt{2} E^\alpha \chi_\alpha^{a(n)}(z) = 0, \tag{8}$$

$$D^L \chi_\alpha^{a(n)}(z) + E_b \chi_\alpha^{a(n)b}(z) - \sqrt{2} i \bar{E}^{\dot\alpha} (\sigma_b)_{\alpha\dot\alpha} C^{a(n)b}(z) = 0, \tag{9}$$

где множества $\left\{C^{a(n)}(z)\right\}$ и $\left\{\chi_\alpha^{a(n)}(z)\right\}$ состоят из комплексных симметричных

[14]Vasiliev M.A. Actions, charges and off-shell fields in the unfolded dynamics approach // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. - 2006. - Vol. 3. - Pp. 37-80.

[15]Ponomarev D.S., Vasiliev M.A. Unfolded Scalar Supermultiplet // JHEP. - 2012. - Vol. 1201. - P. 152.

бесследовых (спинор)-тензоров всех рангов n, и на $\chi_\alpha^{a(n)}(z)$ наложено условие σ-поперечности

$$(\bar\sigma_b)^{\dot\alpha\beta}\chi_\beta^{a(n-1)b} = 0, \tag{10}$$

а суперполевые 1-формы E^a, E^α, $\bar E^{\dot\alpha}$и $\Omega^{a,b}$ являются компонентами 1-формы Ω^{SUSY}, принимающей значения в $\mathcal{N}=1$ супералгебре Пуанкаре

$$\Omega^{SUSY} = iE^a P_a + \frac{i}{2}\Omega^{a,b}M_{ab} + iE^\alpha Q_\alpha + i\bar E^{\dot\alpha}\bar Q_{\dot\alpha}, \quad \mathrm{d}\Omega^{SUSY} + \Omega^{SUSY}\Omega^{SUSY} = 0. \tag{11}$$

D^L – это лоренц-ковариантная производная в суперпространстве.

Чтобы найти развернутые действия модели Весса–Зумино, необходимо построить ее off-shell модификацию, которая не содержала бы динамических уравнений. Как показано в диссертации, для этого оказывается необходимым снять условия бесследовости и σ-поперечности на $\left\{C^{a(n)}\right\}$ и $\left\{\chi_\alpha^{a(n)}\right\}$, а также ввести множество новых вспомогательных полей $\left\{F^{a(n)}(z)\right\}$. В итоге, искомая суперсимметричная off-shell система уравнений приобретает вид

$$D^L C^{a(n)} + E_b C^{a(n)b} - \sqrt{2}E^\alpha\chi_\alpha^{a(n)} = 0, \tag{12}$$
$$D^L\chi_\alpha^{a(n)} + E_b\chi_\alpha^{a(n)b} - \sqrt{2}i\bar E^{\dot\alpha}(\sigma_b)_{\alpha\dot\alpha}C^{a(n)b} - \sqrt{2}E_\alpha F^{a(n)} = 0, \tag{13}$$
$$D^L F^{a(n)} + E_b F^{a(n)b} - \sqrt{2}i\bar E_{\dot\alpha}(\bar\sigma_b)^{\dot\alpha\alpha}\chi_\alpha^{a(n)b} = 0. \tag{14}$$

Все действия системы (12)-(14) определяются ее Q-когомологиями. Соответствующий оператор Q можно разложить по фоновым 1-формам

$$Q = Q_\Omega + 2iE^\alpha(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}\bar E^{\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial E^a} + E_a\hat q^a + \sqrt{2}E_\alpha\hat q^\alpha + \sqrt{2}\bar E_{\dot\alpha}\hat{\bar q}^{\dot\alpha}, \tag{15}$$

где Q_Ω содержит все слагаемые с лоренцевой связностью $\Omega^{a,b}$. Решая уравнения Q-замкнутости в классе 4-суперформ, находим выражение для общего суперполевого лагранжиана

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & E_aE_b\left(\bar\sigma^{ab}\right)^{\dot\alpha\dot\beta}\bar E_{\dot\alpha}\bar E_{\dot\beta}W + E_aE_b\left(\sigma^{ab}\right)^{\alpha\beta}E_\alpha E_\beta\bar W + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{6}\epsilon^{abcd}E_aE_bE_c\bar E_{\dot\alpha}(\bar\sigma_d)^{\dot\alpha\alpha}\hat q_\alpha W + \frac{\sqrt{2}}{6}\epsilon^{abcd}E_aE_bE_cE^\alpha(\sigma_d)_{\alpha\dot\alpha}\hat{\bar q}^{\dot\alpha}\bar W + \\ & + \frac{i\sqrt{2}}{16}E_aE_bE_cE_d\epsilon^{abcd}\left(\hat q_\alpha\hat q^\alpha W + \hat{\bar q}_{\dot\alpha}\hat{\bar q}^{\dot\alpha}\bar W\right),\end{aligned} \tag{16}$$

где 0-формы W и $\bar W$ являются произвольными лоренц-инвариантными функциями $C^{a(n)}$, $\bar{F}^{a(n)}$ и $\bar{C}^{a(n)}$, $F^{a(n)}$, соответственно. Функции вида $W = \hat{q}^a f_a$ соответствуют тривиальным лагранжианам. По построению лагранжиан (16) явно суперсимметричен, а соответствующее действие инвариантно относительно вариаций поверхности интегрирования.

Развернутые суперлагранжианы можно также искать в классе интегральных форм. Решение уравнений Q-замкнутости дает следующий ответ

$$\mathcal{L} = \epsilon^{abcd} E_a E_b E_c E_d \delta^2 \left(E^\alpha\right) \delta^2 \left(\bar{E}^{\dot{\alpha}}\right) \ell, \tag{17}$$

где ℓ – это лоренц-инвариантная 0-форма, построенная из полей супермультиплета. Условие нетривиальности – $\ell \neq \hat{q}^\alpha f_\alpha + c.c.$ ни для какого f_α.

Наконец, в диссертации введены промежуточные объекты – киральные интегральные формы, которые можно интегрировать по киральному подпространству $\mathbb{C}^{m+n|2}$. Общий нетривиальный лагранжиан в этом классе есть

$$\mathcal{L} = \epsilon^{abcd} E_a E_b E_c E_d \delta^2 \left(E_\alpha\right) W, \tag{18}$$

где лоренц-инвариантная 0-форма W построена из $C^{a(k)}$ и $\bar{F}^{a(k)}$ и $W \neq \hat{q}^a f_a$.

Итак, в первой главе построена развернутая off-shell формулировка модели Весса–Зумино, а также выведена и проанализирована система уравнений, определяющая все ее суперполевые лагранжианы. Получены ее общие решения в различных функциональных классах: 4-суперформ, интегральных форм и киральных интегральных форм, и установлены явные соответствия между ними. Представлены частные решения, воспроизводящие стандартные выражения. Предложены способы интегрирования суперформ и киральных суперформ. В итоге, на примере простейшей модели продемонстрирована эффективность развернутого подхода к суперсимметричным теориям.

Вторая глава, основанная на публикации [4], посвящена изучению кубических вершин высших спинов в $4d$ теории Васильева. В развернутых уравнениях Васильева вершины закодированы в эволюцию по вспомогательным твисторным переменным. Выбор резольвенты для этой эволюции определяет выбор переменных в динамических уравнениях. В частности, неправильный выбор может приводить к уравнениям в нелокальной форме. Твисторная резольвента, ведущая к локальным квадратичным уравнениям, была предложена в [16]. С ее помощью в диссертации получен явный вид квадратичных поправок к бозонным уравнениям Фронсдала, порождаемых калибровочно-инвариантными токами высших спинов, поскольку именно эти поправки становятся нелокальными при неправильном выборе твисторной резольвенты.

$4d$ уравнения Васильева можно представить в виде

$$\mathrm{d}\mathbb{W} + \mathbb{W} * \mathbb{W} = i\theta^A\theta_A + iF_*(B) * \gamma + i\bar{F}_*(B) * \bar{\gamma}\,, \tag{19}$$

$$\mathrm{d}B + [\mathbb{W}, B]_* = 0\,. \tag{20}$$

Здесь $\mathbb{W}$ и B – мастер-поля теории, зависящие от пространственно-временных координат и твисторных переменных $Y^A = (y^\alpha, \bar{y}^{\dot\alpha})$, $Z^A = (z^\alpha, \bar{z}^{\dot\alpha})$ со спинорными индексами α и $\dot\alpha$, принимающими два значения. Y и Z реализуют алгебру высших спинов через звездочное произведение

$$(f * g)(Z, Y) = \int \mathrm{d}^4U \mathrm{d}^4V f(Z + U, Y + U)\, g(Z - V, Y + V)\, e^{iU_A V^A}. \tag{21}$$

Мастер-поле B является 0-формой, а $\mathbb{W}$ – 1-формой, либо по $\mathrm{d}x$, либо по вспомогательному спинорному дифференциалу θ^A, дуальному Z^A. $F_*(B)$ – это произвольная звездочная функция B. Здесь полагается

$$F_*(B) = \eta B, \tag{22}$$

где η – комплексный унимодулярный параметр. Теория сохраняет четность в двух случаях: $\eta = 1$ (A-модель) и $\eta = i$ (B-модель)[17]. Мастер-поля зависят также от пары внешних операторов Клейна $K = \left(k, \bar{k}\right)$ со свойствами

$$kk = 1, \quad kf(z^\alpha; y^\alpha; \theta^\alpha) = f(-z^\alpha; -y^\alpha; -\theta^\alpha)\, k \tag{23}$$

(аналогично для $\bar{k}$). γ и $\bar\gamma$ в (19) – это центральные элементы теории вида

$$\gamma := 2\exp(iz_\alpha y^\alpha)\, \delta^2(\theta)\, k, \quad \bar\gamma := 2\exp\left(i\bar{z}_{\dot\alpha}\bar{y}^{\dot\alpha}\right) \delta^2\left(\bar\theta\right) \bar{k}. \tag{24}$$

В диссертации рассматриваются развернутые квадратичные уравнения, возникающие после разрешения (Z, θ)-зависимости с помощью локальной ре-

[16]Gelfond O.A., Vasiliev M.A. Current Interactions from the One-Form Sector of Nonlinear Higher-Spin Equations // Nucl. Phys. - 2018. - Vol. B931. - Pp. 383-417.

[17]Sezgin E., Sundell P. Holography in 4D (super) higher spin theories and a test via cubic scalar couplings // JHEP. - 2005. - Vol. 0507. - P. 044.

зольвенты[18]. Путем выражения вспомогательных полей через динамические и преобразований спинорных выражений удается получить следующее выражение для квадратичных поправок к уравнениям Фронсдала, генерируемых токовыми взаимодействиями высших спинов,

$$\begin{aligned}
&\Box\phi_{a(s)} + ... = \sum_{s_1+s_2\leq s}\left(1+(-1)^{s+s_1+s_2}\right)2^{\frac{s+s_1+s_2}{2}} \times \\
&\times\left\{\cos(2\varphi)\frac{(-1)^{s_2}}{2\cdot\Gamma(s+s_1+s_2)}(D_a)^s(D_b)^{s_2}\phi^{c(s_1)}\cdot(D_c)^{s_1}\phi^{b(s_2)} - \right. \\
&-\sin(2\varphi)\frac{(-1)^{s_2}}{2\cdot\Gamma(s+s_1+s_2)}\epsilon_{afcg}D^f(D_a)^{s-1}(D_b)^{s_2}\phi^{c(s_1)}\cdot D^g(D_c)^{s_1-1}\phi^{b(s_2)} + \\
&\left.+\frac{(-1)^s}{\Gamma(s+s_1-s_2)}\sum_{n=0}^{s_2}k_n(D_a)^{s-n}\phi^{b(s_1)}\cdot(D_b)^{s_1-s_2+n}\phi_{b(s_2-n)a(n)}\right\} + ..., \qquad (25)
\end{aligned}$$

где

$$k_n := \frac{1}{2^{s_2}}\binom{s_2}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{s_2}k_n = 1 \qquad (26)$$

и введен «фазовый угол» $\eta = \exp(i\varphi)$. Многоточие в левой части (25) обозначает все другие слагаемые фронсдаловского кинетического оператора помимо даламбертиана, а многоточие справа – все другие квадратичные поправки, а также вклад вне поперечно-бесследового сектора. Последний полностью фиксируется выписанным в (25) поперечно-бесследовым вкладом.

В случае четно-инвариантных A- и B-моделей ($\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$) вершины (25) с точностью до нормировки совпадают с известными в литературе выражениями [19,20], полученными вне рамок теории Васильева. Это доказывает правильность использованной локальной твисторной резольвенты. Помимо этого, (25) описывает и случай произвольной фазы φ, обобщая ранее известные результаты. В частности, обнаружено интересное свойство $\varphi = \frac{\pi}{4}$ модели, где первое слагаемое с $\cos(2\varphi)$ отсутствует, так что лидирующая по производным вершина целиком пропорциональна символу Леви-Чивиты, являясь «максимально нарушающей» четность. Этот факт может иметь интересное отражение в дуальной граничной теории.

[18] Gelfond O.A., Vasiliev M.A. Current Interactions from the One-Form Sector of Nonlinear Higher-Spin Equations // Nucl. Phys. - 2018. - Vol. B931. - Pp. 383-417.

[19] Metsaev R.R. Poincare invariant dynamics of massless higher spins: Fourth order analysis on mass shell // Mod. Phys. Lett. - 1991. - Vol. A6. - Pp. 359-367.

[20] Sleight C., Taronna M. Higher Spin Interactions from Conformal Field Theory: The Complete Cubic Couplings // Phys. Rev. Lett. - 2016. - Vol. 116, no.18. - P. 181602.

Третья глава основана на публикации [2] и посвящена развитию пертурбативных методов теории высших спинов.

В работе [21] было предложено обобщение уравнений Васильева, которое вовлекает формы старших рангов и имеет вид

$$\mathrm{d}\mathcal{W} + \mathcal{W} * \mathcal{W} = -i\theta_A\theta^A - i\eta\mathcal{B} * \gamma - i\bar{\eta}\mathcal{B} * \bar{\gamma} + g\gamma * \bar{\gamma} + \mathcal{L}, \tag{27}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{B} + [\mathcal{W}, \mathcal{B}]_* = 0, \tag{28}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{L} = 0. \tag{29}$$

Здесь $\mathcal{W}$ содержит формы нечетных рангов, т.е. кроме 1-формы в нее входит 3-форма с аналогичными свойствами, а $\mathcal{B}$ состоит из 0-формы и 2-формы. g – произвольная константа связи. d-замкнутая $\mathcal{L}(x)$ не зависит от переменных Y, Z, K и θ. Это сумма пространственно-временных 2-формы $\mathcal{L}_2$ и 4-формы $\mathcal{L}_4$. Добавленные старшие формы не несут собственных степеней свободы, выражаясь через физические поля. $\mathcal{L}_2$ порождает поверхностные заряды, что является предметом исследования в Главе 5. $\mathcal{L}_4$ предположительно является AdS/CFT-производящим функционалом. Появление старших форм значительно усложняет пертурбативный анализ, необходимый для вычисления $\mathcal{L}_4$. Целью третьей главы является развитие пертурбативной техники, позволяющей эффективно обрабатывать уравнения (27)-(29).

Решение (27)-(29), описывающее AdS_4-вакуум, в секторе 0- и 1-форм имеет вид

$$B = 0, \quad \mathbb{W} = \phi_{AdS} + Z_A\theta^A, \tag{30}$$

где

$$\phi_{AdS} = -\frac{i}{4}\phi^{AB}Y_AY_B = -\frac{i}{4}\left(\omega^{AB} + e^{AB}\right)Y_AY_B, \tag{31}$$

$$\mathrm{d}\phi_{AdS} + \phi_{AdS} * \phi_{AdS} = 0, \tag{32}$$

т.е. e^{AB} и ω^{AB} – это тетрада и лоренцева связность AdS_4.

На всех последующих шагах пертурбативного разложения будут встречаться только два типа уравнений

$$\Delta_{ad}f := \mathcal{D}_{ad}f - 2i\mathrm{d}_Zf = J, \quad \mathcal{D}_{ad} := \mathrm{d} + [\phi_{AdS}, \bullet]_*\,, \tag{33}$$

[21] Vasiliev M.A. Invariant Functionals in Higher-Spin Theory // Nucl. Phys. - 2017. - Vol. B916. - Pp. 219–253.

$$\Delta_{tw} f := \mathcal{D}_{tw} f - 2i\mathrm{d}_Z f = J, \quad \mathcal{D}_{tw} := \mathrm{d} - \frac{i}{4}\left[\omega^{AB} Y_A Y_B, \bullet\right]_* - \frac{i}{4}\left\{e^{AB} Y_A Y_B, \bullet\right\}_*, \tag{34}$$

где $\mathrm{d}_Z := \theta^A \frac{\partial}{\partial Z^A}$. Эти уравнения появляются в результате разложения (27) и (28), соответственно, вокруг вакуума (30) и определяют искомую функцию f через некоторый источник J, который выражается порядок за порядком через поля низших порядков и/или форм низших рангов.

Стандартный способ решения этих уравнений основан на применении стягивающей гомотопии для разрешения (Z, θ)-зависимости

$$\mathrm{d}_Z^* J(Z; Y; \theta) = Z^A \frac{\partial}{\partial \theta^A} \int_0^1 dt \frac{1}{t} J(tZ; Y; t\theta), \tag{35}$$

которая вместе с проектором на когомологии

$$\hat{h} J(Z; Y; \theta) = J(0; Y; 0) \tag{36}$$

реализует разложение единицы

$$\{\mathrm{d}_Z, \mathrm{d}_Z^*\} + \hat{h} = Id. \tag{37}$$

Оно позволяет решить уравнение

$$\mathrm{d}_Z f = J \tag{38}$$

с d_Z-точной формой J в виде

$$f = \mathrm{d}_Z^* J + \mathrm{d}_Z \epsilon + g, \tag{39}$$

где $\mathrm{d}_Z \epsilon$ и $g \in H(\mathrm{d})$ образуют общее решение однородного уравнения.

В третьей главе данный анализ обобщен на случай полной производной Δ, содержащей одновременно и x-, и Z-зависимые компоненты, что позволяет найти решение уравнений (33), (34) в замкнутом виде. Конкретно, искалось разложение единицы

$$\{\Delta, \Delta^*\} + \hat{\mathscr{H}} = Id, \tag{40}$$

которое позволяло бы решать уравнение

$$\Delta f := -2i\mathrm{d}_Z f + \mathcal{D} f = J, \tag{41}$$

в виде

$$f = \Delta^* J + \Delta\epsilon + g, \tag{42}$$

где g является решением уравнения в (Z, θ)-независимом секторе

$$\mathcal{D} g = \hat{\mathscr{H}} J. \tag{43}$$

В итоге, были получены следующие выражения

$$\Delta^*_{ad} J = \; -\frac{1}{2i} Z^A \frac{\partial}{\partial\theta^A} \int\limits_0^1 \frac{dt}{t} \exp\left(-\frac{1-t}{2t}\phi^{BC}\frac{\partial^2}{\partial Y^B \partial\theta^C}\right) J\left(tZ; Y; t\theta\right), \tag{44}$$

$$\hat{\mathscr{H}}_{ad} J = \; \hat{h} \exp\left(-\frac{1}{2}\phi^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial\theta^B}\right) J\left(Z; Y; \theta\right), \tag{45}$$

$$\begin{aligned} \Delta^*_{tw} J = \; & -\tfrac{1}{2i} Z^C \frac{\partial}{\partial\theta^C} \int\limits_0^1 \frac{dt}{t} \exp\left\{-\tfrac{i}{8}\left(\tfrac{1-t}{t}\right)^2 \omega^{AB} e_A{}^C \frac{\partial^2}{\partial\theta^B \partial\theta^C} + i\tfrac{1-t}{2t} e^{AB} Y_A \frac{\partial}{\partial\theta^B}\right\} \\ & \times \exp\left\{-\frac{1-t}{2t}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial\theta^B} + \frac{1-t^2}{4t^2} e^{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^A \partial\theta^B}\right\} J\left(tZ; Y; t\theta\right), \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{H}}_{tw} J = \; & \hat{h} \exp\left\{-\frac{i}{8}\omega^{AB} e_A{}^C \frac{\partial^2}{\partial\theta^B \partial\theta^C} + \frac{i}{2} e^{AB} Y_A \frac{\partial}{\partial\theta^B}\right\} \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\omega^{AB}\frac{\partial^2}{\partial Y^A \partial\theta^B} + \frac{1}{4} e^{AB} \frac{\partial^2}{\partial Z^A \partial\theta^B}\right\} J\left(Z; Y; \theta\right). \end{aligned} \tag{47}$$

Методы, развитые в третьей главе, значительно упрощают пертурбативный анализ уравнений высших спинов. Вместо повторяющегося применения стягивающих гомотопий по Z получены замкнутые формулы для применения этой процедуры к любой функции. Они включают в себя взятие многократных гомотопических интегралов. В обычном подходе, не использующем развитую технику, приходится применять стягивающие гомотопии отдельно для каждого вычисления, что приводит к большим техническим трудностям.

Четвертая глава, основанная на публикации [5], посвящена исследованию вопроса о локальной лоренц-ковариантности расширенных уравнений высших спинов.

Развернутые уравнения высших спинов, имеющие схематический вид

$$\mathrm{d}W = F\left(W\right), \tag{48}$$

можно воспринимать как обобщение картановской формулировки гравитации

Эйнштейна. Связь развернутой формулировки с метрическим языком вовлекает локальную лоренцеву симметрию, которая позволяет переписывать поля из развернутого подхода в метрический и наоборот. Явная локальная лоренц-ковариантность подразумевает, что уравнения имеют вид

$$D^L W = F^L(W)\,, \tag{49}$$

где $D^L = \mathrm{d} + \omega^L$ – лоренц-ковариантная производная. Локальная лоренц-симметрия требует, чтобы лоренцева связность ω^L не входила в правую часть (49). На практике более удобно работать с (48), чем с (49), так как $(D^L)^2 \neq 0$ в пространстве анти-де Ситтера. Но при этом необходимо проверять, допускают ли развернутые уравнения (48) переопределение полей к виду (49).

Лоренц-ковариантность нерасширенных уравнений Васильева следует из свойств алгебры деформированных осцилляторов, поскольку последняя порождает представление алгебры $sp(2)$, а $4d$ алгебра Лоренца изоморфна $s\ell_2(\mathbb{C}) \approx sp(2) \oplus sp(2)$. Как показывается в диссертации, расширенные уравнения в $\mathrm{d}x$-независимом (т.е. θ-зависимом) секторе допускают реализацию лоренц-симметрии в виде развернутых калибровочных преобразований (5) при специальном выборе значений калибровочных параметров. При этом развернутые уравнения в этом секторе образуют нетривиальное обобщение алгебры деформированных осцилляторов. Все это указывает на то, что расширенные уравнения действительно обладают лоренцевой симметрией.

Проведенный в диссертации анализ позволил получить явно лоренц-ковариантную формулировку расширенных уравнений высших спинов

$$\begin{aligned}
&D^L\mathcal{W} + \mathcal{W} * \mathcal{W} + R^{AB}\left(L_{AB} - \frac{i}{4}\nabla_A\mathcal{W} * \nabla_B\mathcal{W}\right) = i\theta^A\theta_A + i\eta\mathcal{B} * \gamma + i\bar{\eta}\mathcal{B} * \bar{\gamma} + \\
&+ ig\gamma\bar{\gamma} + \mathcal{L} - \frac{\eta}{4}R^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\mathcal{B} * \nabla_\beta\gamma - \frac{\bar{\eta}}{4}\bar{R}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\nabla_{\dot{\alpha}}\mathcal{B} * \nabla_{\dot{\beta}}\bar{\gamma} + \\
&+ \frac{i\eta}{32}R^{\alpha\alpha}R^{\beta\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\mathcal{B} * \nabla_\alpha\nabla_\beta\gamma + \frac{i\bar{\eta}}{32}\bar{R}^{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}\bar{R}^{\dot{\beta}\dot{\beta}}\nabla_{\dot{\alpha}}\nabla_{\dot{\beta}}\mathcal{B} * \nabla_{\dot{\alpha}}\nabla_{\dot{\beta}}\bar{\gamma}\,,
\end{aligned} \tag{50}$$

$$D^L\mathcal{B} + [\mathcal{W}, \mathcal{B}]_* - \frac{i}{4}R^{AB}\left\{\nabla_A\mathcal{B}, \nabla_B\mathcal{W}\right\}_* = 0\,. \tag{51}$$

Здесь

$$\nabla_\alpha := \rho\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} := \bar{\rho}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}, \tag{52}$$

где введен оператор ρ $(\bar{\rho})$ со свойствами $\rho^2 = 1$, $\rho k + k\rho = 0$ и коммутирующий со всем остальным (аналогично для $\bar{\rho}$).

Уравнения (50), (51) воспроизводят (27), (28) при $\omega^{AB} = 0$, причем в этом случае лоренцева связность содержится в $\mathcal{W}$. При $\omega^{AB} \neq 0$ две системы связаны между собой переопределением полей, которое инфинитезимально может быть реализовано как преобразование Штюкельберга и для которого в диссертации получено явное выражение.

Замечательной особенностью лоренц-ковариантной формулировки является существенное упрощение разложений единицы, описанных в Главе 3. Оказывается, что соответствующие операторы в лоренц-ковариантной схеме буквально воспроизводят формулы (44)-(47) с приравненной нулю лоренцевой связностью $\omega^{AB} = 0$.

Итак, в четвертой главе показано, что расширенные уравнения высших спинов обладают локальной лоренцевой симметрией. Эта симметрия становится явной после переопределения полей, ведущего к явно лоренц-ковариантной форме уравнений высших спинов. Ключевым элементом конструкции, отвечающим за лоренцеву симметрию, является твисторный ($\mathrm{d}x$-независимый) сектор расширенных уравнений. Обеспечивая лоренцеву симметрию, он представляет собой обобщение алгебры деформированных осцилляторов. Другим результатом полученной лоренцевой формулировки является значительное упрощение теории возмущений.

Пятая глава основана на публикации [3] и посвящена анализу сохраняющихся зарядов высших спинов в рамках уравнений Васильева.

В ней рассматривается замкнутая 2-форма $\mathcal{L}_2$, определенная на расширенных уравнениях Васильева. $\mathcal{L}_2$ при интегрировании по 2-циклу Σ порождает калибровочно-инвариантный поверхностный заряд

$$Q = \int\limits_{\Sigma} \mathcal{L}_2(x). \tag{53}$$

Этот заряд сохраняется точно и вне зависимости от наличия каких-либо глобальных симметрий частного решения теории.

В силу (23) зависимость $\mathbb{W}$ и B в уравнениях Васильева от внешних операторов Клейна K не более чем билинейна

$$\mathbb{W} = \sum_{i,j=0,1} \mathbb{W}_{i,j} k^i \bar{k}^j, \quad B = \sum_{i,j=0,1} B_{i,j} k^i \bar{k}^j, \tag{54}$$

причем при разложении над AdS_4-вакуумом поля $\mathbb{W}_{i,i}$ и $B_{i,1-i}$ являются физическими, а $\mathbb{W}_{i,1-i}$ и $B_{i,i}$ – топологическими. Это утверждение следует из анализа 0-форм на свободном уровне, поскольку все физические (калибровочно-инвариантные) степени свободы содержатся в них. Линейные уравнения над AdS_4 в топологическом и физическом секторах, соответственно, имеют вид (здесь введено стандартное обозначение $C\,(Y|x) := B\,(Z = 0, Y|x)$)

$$\mathcal{D}_{ad}C_{i,i}(Y|x) = D^L C_{i,i} + \lambda e^{\alpha\dot\beta}\left(y_\alpha \bar\partial_{\dot\beta} + \partial_\alpha \bar y_{\dot\beta}\right) C_{i,i} = 0, \tag{55}$$

$$\mathcal{D}_{tw}C_{i,1-i}\,(Y|K|x) = D^L C_{i,1-i} + i\lambda e^{\alpha\dot\beta}\left(\partial_\alpha \bar\partial_{\dot\beta} - y_\alpha \bar y_{\dot\beta}\right) C_{i,1-i} = 0 \tag{56}$$

(здесь $\partial_\alpha := \dfrac{\partial}{\partial y^\alpha}$, $\bar\partial_{\dot\alpha} := \dfrac{\partial}{\partial \bar y^{\dot\alpha}}$). Присоединенно-ковариантная производная $\mathcal{D}_{ad}$ действует в конечномерных пространствах однородных полиномов по Y, поэтому (55) описывают бесконечное множество топологических систем, каждая из которых содержит не более конечного числа степеней свободы. Напротив, уравнение (56) смешивает функции всех степеней по Y (данной четности), и поэтому описывает системы с бесконечным числом степеней свободы (релятивистские поля).

В диссертации предложено обобщение конструкции инвариантного функционала $\mathcal{L}_2$, включающее различные химические потенциалы ξ, которые связаны с топологическими полями. Соответствующая статсумма

$$Z = \exp\{-\int_{\Sigma} \mathcal{L}_2\,(\xi)\} \tag{57}$$

инвариантна относительно вариаций 2-цикла интегрирования Σ, имея одинаковое значение при интегрировании на бесконечности, где она должна сводиться к асимптотическим зарядам, и по любому другому циклу в том же гомотопическом классе (включая, например, горизонт событий черной дыры). В пределе, когда Σ стремится к пространственной бесконечности и теория становится почти свободной, эта конструкция представляет собой обобщение асимптотических зарядов в AdS-гравитации Аштекара–Даса[22] на высшие спины. На нелинейном уровне секторы перепутываются и топологические поля начинают возбуждать физические (и наоборот).

В конструкции Аштекара–Даса 2-форма, порождающая сохраняющий-

[22] Ashtekar A., Das S. Asymptotically Anti-de Sitter Space-times: Conserved Quantities // Class. Quant. Grav. – 2000. – Vol. 17. – L17–L30.

ся заряд ОТО, выражается через тензор Вейля, свернутый с конформными векторами Киллинга, описывающими асимптотические симметрии. Ключевое наблюдение состоит в том, что вид линеаризованных уравнений в топологическом секторе (55) в точности совпадает с уравнением на параметр асимптотической симметрии. Это наводит на мысль, что топологические поля C^{top} могут отождествляться с обобщенными химическими потенциалами ξ, сопряженными зарядам высших спинов.

Обобщенные тензоры Вейля высших спинов, входящие в предлагаемую конструкцию, построены из старших производных полей высших спинов. С другой стороны, известны канонические асимптотические заряды Фронсдала первого порядка по производным[23]. В диссертации получена формула, позволяющая выразить сконструированные заряды через поля Фронсдала и их первые производные.

В наиболее общем виде расширенные уравнения (27)-(29) содержат вместо $\eta\mathcal{B}$ некоторую произвольную комплексную функцию

$$F_*(\mathcal{B}) = \eta\mathcal{B} + \mu\mathcal{B} * \mathcal{B} + \dots \tag{58}$$

Тогда вклад в $\mathcal{L}_2$, билинейный по физическим C и топологическим C^{top} полям, имеет простой вид

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{i}{4}\left(\mu e_\gamma{}^{\dot\alpha} e^{\gamma\dot\beta}\bar\partial_{\dot\alpha}\bar\partial_{\dot\beta}\left(C^{top} * C + Ck * C^{top}k\right) + c.c.\right)|_{Y=0}, \tag{59}$$

приходящий из квадратичной части $F_*(B)$. Этот пертурбативный вклад может рассматриваться как асимптотическая 2-форма, порождаемая параметрами Киллинга ξ, собранными в C^{top}, в теории высших спинов без отклика топологического сектора. Действительно, (59), по сути, утверждает, что для свободных (эквивалентно, асимптотических) уравнений высших спинов существует 2-форма, которая d-замкнута на свободных уравнениях движения.

В качестве иллюстрации в диссертации получены явные выражения для сохраняющихся зарядов (53) черной дыры Керра с высшими спинами в рамках развернутого бескоординатного описания черных дыр в AdS_4[24].

[23]Barnich G., Bouatta N., Grigoriev M. Surface charges and dynamical Killing tensors for higher spin gauge fields in constant curvature spaces // JHEP. - 2005. - Vol. 0510. - P. 010.

[24]Didenko V.E., Matveev A.S., Vasiliev M.A. Unfolded Dynamics and Parameter Flow of Generic AdS(4) Black Hole. - 2009. - arXiv:0901.2172 [hep-th].

Вначале найден вакуумный (т.е. без топологических полей) вклад на свободном уровне. Для этого вычислено соответствующее выражение $\mathcal{L}_2$, которое затем проинтегрировано по поверхности $t = const$, $r \to \infty$, что дает

$$Q = 4\pi \frac{m_1\bar{\eta} - \bar{m}_1\eta}{1 + \Lambda a^2}. \tag{60}$$

Здесь a – параметр вращения черной дыры, Λ – космологическая постоянная, m_s – произвольный комплексный коэффициент, стоящий перед обобщенным тензором Вейля поля спина s в чернодырном решении теории высших спинов. Полученное выражение для Q согласуется, с точностью до числового множителя, со стандартным $s = 1$ зарядом AdS-черной дыры Керра–Ньюмена.

Также вычислен первый нетривиальный топологический вклад в заряд спина 2. Для этого зафиксирован вектор Киллинга $\dfrac{\partial}{\partial t}$ и вычислен соответствующий параметр глобальной симметрии AdS_4, который затем отождествлен с топологическим полем теории. Далее вычислена соответствующая 2-форма $\mathcal{L}_2$, которая после интегрирования по $t = const$, $r \to \infty$ дает

$$Q_{s=2} = 3\pi\Lambda \frac{m_2\bar{\mu} - \bar{m}_2\mu}{1 + \Lambda a^2}. \tag{61}$$

Итак, в пятой главе выдвинута и обоснована гипотеза, что статсуммы теории высших спинов определяются замкнутой 2-формой, связанной с уравнениями высших спинов с топологическим сектором, который с термодинамической точки зрения представляет собой химические потенциалы, сопряженные различным зарядам всех спинов. В качестве примера получены выражения для зарядов черной дыры Керра с высшими спинами, вакуумный и линейным по химическим потенциалам. Предложенная конструкция не только правильно воспроизводит асимптотические заряды, но также допускает нелинейную деформацию в AdS_4.

Заключение

Кратко перечислим основные результаты диссертационной работы:

1. Найдена развернутая off-shell система уравнений, описывающая $4d$ $\mathcal{N} = 1$ модель Весса–Зумино. Путем изучения соответствующих Q-когомологий найдены все ее развернутые суперполевые лагранжианы в классах супер-

форм, интегральных форм и киральных интегральных форм, установлены явные соответствия между ними. Предложен способ интегрирования суперформ, соответствующих развернутым лагранжианам, что позволяет определить развернутые суперполевые действия.

2. Исходя из квадратичных членов в уравнениях Васильева в локальной формулировке[25], получены квадратичные поправки к уравнениям Фронсдала, описывающие токовые взаимодействия полей высших спинов. Для случая P-четных теорий результаты совпадают с известными в литературе выражениями, что, таким образом, доказывает правильность указанной локальной формулировки. Для случая P-нечетных теорий найдена зависимость квадратичных поправок от фазового множителя в уравнениях Васильева. Обнаружено, что $\varphi = \frac{\pi}{4}$ модель нарушает четность максимальным образом (ведущая по производным вершина пропорциональна символу Леви-Чивиты).

3. Разработана пертурбативная техника для (расширенных) уравнений высших спинов: построены операторы, полностью разрешающие всю зависимость по вспомогательным (Z, θ)-переменным для двух типов уравнений (в присоединенном и твистованном секторах), возникающих в теории возмущений для (расширенных) уравнений Васильева; найдены порождаемые ими разложения единицы.

4. Найдена явно лоренц-ковариантная форма расширенных уравнений высших спинов. Показано, что пертурбативная техника для лоренц-ковариантных уравнений имеет более простой вид по сравнению с нековариантным случаем: операторы ковариантной теории возмущений могут быть получены из нековариантных путем простого приравнивания нулю лоренцевой связности. Установлено, что лоренцева симметрия, в нерасширенных уравнениях реализуемая алгеброй деформированных осцилляторов, после расширения реализуется в виде некоторого нетривиального обобщения этой алгебры.

5. Предложена конструкция для сохраняющихся зарядов в нелинейной теории высших спинов с топологическими полями. В этом контексте топо-

[25] Gelfond O.A., Vasiliev M.A. Current Interactions from the One-Form Sector of Nonlinear Higher-Spin Equations // Nucl. Phys. - 2018. - Vol. B931. - Pp. 383-417.

логические поля могут быть интерпретированы как химические потенциалы, сопряженные различным зарядам. В качестве примера вычислены в низших порядках по полям заряды черной дыры Керра с высшими спинами. В линейном приближении предлагаемая конструкция согласуется с каноническими асимптотическими зарядами высших спинов: найдена явная формула, связывающая асимптотические заряды, выраженные через обобщенные тензоры Вейля, с зарядами, выраженными через фронсдаловские поля.

Список публикаций автора по теме диссертации

1. *Misuna N.G., Vasiliev M.A.* Off-shell scalar supermultiplet in the unfolded dynamics approach // *JHEP*. – 2014. – Vol. 1405. – P. 140.

2. *Didenko V.E., Misuna N.G., Vasiliev M.A.* Perturbative analysis in higher-spin theories // *JHEP*. – 2016. – Vol. 1607. – P. 146.

3. *Didenko V.E., Misuna N.G., Vasiliev M.A.* Charges in nonlinear higher-spin theory // *JHEP*. – 2017. – Vol. 1703. – P. 164.

4. *Misuna N.G.* On current contribution to Fronsdal equations // *Phys. Lett.* – 2018. – Vol. B778. – Pp. 71–78.

5. *Didenko V.E., Misuna N.G., Vasiliev M.A.* Lorentz covariant form of extended higher-spin equations // *JHEP*. – 2018. – Vol. 1807. – P. 133.