

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской
академии наук

На правах рукописи

Куприянова Екатерина Александровна

ГРАВИТАЦИОННЫЕ СОСТОЯНИЯ В УЛЬТРАХОЛОДНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

Специальность 01.04.16 —

«Физика атомного ядра и элементарных частиц»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Далькаров Олег Дмитриевич

Москва — 2018

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Долгоживущие квантовые гравитационные состояния атома антиводорода	11
Глава 2. Возбуждение квантовых переходов и возможности наблюдения гравитационных состояний	19
2.1 Возбуждение резонансных переходов неоднородным переменным магнитным полем	19
2.2 Возбуждение резонансных переходов с помощью вибрации (колебаний) поверхности	27
2.3 Прецизионный эксперимент и определение гравитационной массы антиводорода	30
Глава 3. Определение точности наблюдения квантовых гравитационных состояний атома антиводорода . .	33
3.1 Сдвиг резонансной частоты и динамический эффект Штарка	33
3.1.1 Численные значения сдвига	34
3.1.2 Формализм теории квазиэнергий	36
3.2 Оценка вклада сдвига резонансной частоты за счет динамического эффекта Штарка в точность определения гравитационной массы	49
Глава 4. Рассеяние антиводорода на проводящей поверхности и выбор оптимальной поверхности . .	51
4.1 Заряды на поверхности. Разрушение гравитационных квантовых состояний под действием остаточных электрических полей от электрических зарядов, случайно распределенных по поверхности	51

4.2	Шероховатости поверхности. Вариации электростатического потенциала поверхности	62
4.3	Зависимость сдвигов уровней и ширин состояний от энергии (номера) квантовых состояний	69
4.4	Рассеяние антиводорода на проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия определенной толщины . .	75
	Заключение	82
	Список литературы	84
	Список рисунков	93
	Список таблиц	95
	Приложение А. Соотношение биортогональности для функций Эйри комплексного аргумента . .	96
	Приложение Б. Явные выражения для матричных элементов оператора возмущения с помощью магнитного поля	98
	Приложение В. Явные выражения для матричных элементов оператора возмущения с помощью вибрации поверхности	101

Введение

Настоящая работа посвящена исследованиям гравитационных квантовых состояний в ультрахолодных квантовых системах, а именно, исследованию гравитационных свойств ультрахолодных атомов антиводорода (антиатомов) над материальной поверхностью в гравитационном поле Земли.

Основные задачи работы включают в себя развитие теоретической модели поведения антиатомов в гравитационном поле, нахождение способов исследования гравитационных свойств антиматерии (в том числе гравитационных состояний атома антиводорода над материальной поверхностью), которые позволят определить величину гравитационной массы антиводорода с высокой точностью. Прикладной аспект работы связан с возможностью использования полученных результатов для исследования взаимодействия антиатомов с поверхностью.

Серия экспериментов по изучению гравитационных свойств различных объектов была начата Галилеем четыреста лет назад, изучение поведения антиатомов в гравитационном поле — это новый, современный шаг в исследованиях. Гравитационные свойства антиматерии являются неизученной областью и, несмотря на косвенные наблюдения, основанные на положениях Стандартной модели и принципе эквивалентности, они до сих пор не исследованы непосредственно. Сложность заключается в слабости гравитационного взаимодействия и малом количестве атомов антиводорода, синтезируемом в лаборатории.

В контексте общей теории относительности принцип эквивалентности Галилея часто называют слабым принципом эквивалентности. Слабый принцип эквивалентности неоднократно проверялся для макроскопических тел [1–3]. Ввиду сложности объединения квантовой механики с теорией гравитации, огромный интерес представляет исследование гравитационных свойств квантомеханических объектов, таких как элементарные частицы и атомы: проверка принципа проводилась для нейтронов, а именно, с помощью интерференционных методов измерялось ускорение свободного падения [4; 5], и для атомов [6–9]. Для антиатомов подобные эксперименты

являются новыми, и они представляют особый интерес, так как позволят проверить гравитационную эквивалентность частиц и античастиц.

Задача исследования гравитационных свойств антивещества на теоретическом уровне, как и любое исследование, затрагивающее самые фундаментальные законы природы — в данном случае речь идёт о проверке справедливости слабого принципа эквивалентности для антивещества, — является актуальной сама по себе, но, кроме того, сейчас работы в этом направлении представляются весьма перспективными в связи с недавними успехами в получении и стабилизации атомов антиводорода [10;11] (ЦЕРН, эксперимент ALPHA). В настоящее время в ЦЕРНе реализуются проекты, в программу которых входит изучение гравитационных свойств антивещества и проверка выполнения принципа СРТ-инвариантности с высокой точностью — ATHENA-ALPHA, ATRAP и AEGIS [12–18].

Проект ЦЕРНа GBAR (Gravitational Behaviour of Antihydrogen at Rest, «Гравитационное поведение антиводорода в покое») посвящен одному из наиболее актуальных фундаментальных вопросов физики низких энергий — экспериментальному изучению гравитационных свойств антиматерии [19]. Целью проекта GBAR является проведение проверки принципа эквивалентности для антиматерии с помощью измерения ускорения свободного падения ультрахолодных атомов антиводорода. На первом этапе планируется достижение точности измерения выше, чем один процент, в долгосрочной перспективе предполагается достижение более высокой точности с помощью использования гравитационных квантовых состояний антиводорода.

Предметом настоящего исследования является поведение атомов антиводорода в гравитационных квантовых состояниях над материальной поверхностью в гравитационном поле Земли. Существование подобных гравитационных состояний для нейтронов было доказано экспериментально [20–22]. Что касается атомов антиводорода, то существование гравитационных состояний для них кажется на первый взгляд невозможным из-за аннигиляции на материальной поверхности. Проведение исследования, описанного в работе, становится возможным благодаря явлению квантового отражения, которое препятствует аннигиляции ультрахолодных атомов

антиводорода на материальной поверхности и позволяет атомам антиводорода находиться в гравитационных состояниях в течение конечных времен. Квантовое отражение возникает, когда квантовая волна попадает в область, где потенциал (в нашем случае — потенциал притяжения, описывающий взаимодействие антиатома с поверхностью) резко и быстро меняется. Это явление исследовалось теоретически для потенциала Ван-дер-Ваальса [23–26], экспериментально оно впервые наблюдалось для атомов водорода и гелия [27–29], а позже и для ультрахолодных атомов и молекул над поверхностями [30–33]. В последние годы квантовое отражение изучалось также для антивещества [12; 34; 35], так как оно должно сыграть ключевую роль в экспериментах с атомами антиводорода [36–38]. Относительно большое время жизни атомов антиводорода в гравитационных состояниях, обеспечиваемое явлением квантового отражения, открывает новые перспективы в высокоточной спектроскопии этих состояний и в возможности проверки слабого принципа эквивалентности для антиводорода.

Целями данной работы являются:

1. Теоретическое исследование методов изучения гравитационных свойств антиматерии. В том числе изучение возможности наблюдения гравитационных квантовых состояний атомов антиводорода при помощи резонансного индуцирования переходов между ними различными способами.
2. Предложение эксперимента по прецизионному определению величины гравитационной массы антиводорода.
3. Исследование особенностей рассеяния антиводорода на проводящей поверхности, а также на других различных поверхностях. Поиск оптимальной отражающей поверхности для исследования гравитационных свойств антиводорода.

Научная новизна:

1. В работе предложен новый подход к исследованию гравитационных свойств антиводорода. Подход основан на резонансной спектроскопии гравитационных состояний атома антиводорода в гравитационном поле Земли над проводящей поверхностью.

2. В работе изучается целый ряд эффектов, приводящих к погрешностям в определении гравитационной массы антиводорода в планируемых прецизионных экспериментах ЦЕРНа, которые до этого не были исследованы. А именно, новыми являются:
- (а) исследование сдвига резонансной частоты за счет динамического эффекта Штарка, то есть частоты, при которой наблюдается максимум вероятности перехода из одного гравитационного состояния в другое. Сдвиг частоты обусловлен предложенным методом спектроскопии (влиянием переменного неоднородного магнитного поля или влиянием вибрации поверхности).
 - (б) исследование механизма возможного «разрушения» гравитационных квантовых состояний антиводорода под действием остаточных электрических полей от электрических зарядов, случайно распределенных по поверхности зеркала.
 - (с) изучение эффекта зависимости сдвигов гравитационных уровней и ширин гравитационных состояний от энергии (номера) квантовых состояний для атома антиводорода. Впервые получено численное значение эффективного радиуса рассеяния антиводорода на проводящей поверхности.
3. Впервые проведено детальное исследование явления рассеяния антиводорода на проводящей и других поверхностях. В частности, проведено исследование рассеяния на проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия, наличие которой приводит к существенному увеличению времени жизни антиатома над поверхностью и повышает точность эксперимента по измерению гравитационной массы.

Теоретическая и практическая значимость

1. Полученные в работе результаты служат основой для прецизионного эксперимента по наблюдению квантовых состояний антиводорода в гравитационном поле Земли, получению величины гра-

витационной массы с высокой точностью (эксперимент GBAR в ЦЕРНе). На основе этих результатов может быть осуществлена проверка слабого принципа эквивалентности, состоящего в том, что гравитационная и инертная массы совпадают. Прецизионный тест принципа эквивалентности представляет фундаментальный интерес. Извлечение как можно более точного значения гравитационной массы антиводорода с помощью данных резонансной спектроскопии состояний антиатома в гравитационном поле Земли позволит провести этот тест. Необходимо отметить, что подобные опыты крайне сложно ставить с антипротонами, поскольку силы, вызванные случайными электрическими полями, намного превосходят гравитационную силу. Это обстоятельство повышает научную ценность опытов с антиводородом.

2. Исследования антиводорода могут быть интересны с точки зрения возможности объединения квантовой механики с теорией гравитации при создании единой теории взаимодействий, а также в решении проблемы барионной асимметрии Вселенной.
3. Наблюдение гравитационных состояний антиводорода открывает перспективы для исследования дополнительных (кроме ньютоновских) сил взаимодействия между антиатомами и поверхностью (из-за малости энергий состояний $\sim 10^{-12}$ эВ) на масштабах расстояний от нескольких до 100 микрон (т.н. пятой силы, порождаемой обменом гипотетическими лёгкими бозонами).

Личный вклад. Все представленные в диссертации оригинальные результаты получены лично автором или при его непосредственном участии.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Развитие теоретической модели поведения атома антиводорода в гравитационном поле Земли вблизи проводящей поверхности.
2. Метод наблюдения квантовых гравитационных состояний антиводорода при помощи индуцирования резонансных переходов между ними.

3. Принципиальная схема эксперимента для прецизионного определения гравитационной массы антиводорода.
4. Рассмотрение возможных эффектов, учет которых необходим для оценки точности прецизионного эксперимента ЦЕРНа (GBAR/AD-7) по определению гравитационной массы антиводорода и для возможности наблюдения гравитационных квантовых состояний антиводорода.

Высокая степень достоверности полученных результатов обеспечивается детальностью проведенного исследования и сравнением результатов, полученных различными способами. Проведенные вычисления вклада динамического эффекта Штарка в сдвиг резонансной частоты и соответственно в извлекаемую из неё гравитационную массу антиводорода, а также другие результаты, проверялись сравнением аналитических и численных расчетов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях [39–42]: Международная сессия-конференция секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий» (Москва, Россия, 2012 г.), V Всероссийская молодежная конференция по фундаментальным и инновационным вопросам современной физики (Москва, Россия, 2013 г.), 2nd International Workshop on Antimatter and Gravity (WAG 2013, г. Берн, Швейцария, 2013 г.), The 34th International Cosmic Ray Conference (ICRC 2015, г. Гаага, Нидерланды, 2015 г.). Полученные результаты непосредственно учитываются при постановке эксперимента GBAR/AD-7 (ЦЕРН) по определению гравитационной силы, действующей на антиводород, и проверке слабого принципа эквивалентности.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях [43–48], 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и проиндексированных в базах данных Web of Science и SCOPUS [43–46].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и трех приложений. Полный объём диссертации

составляет 102 страницы с 16 рисунками и 6 таблицами. Список литературы содержит 76 наименований.

В Главе 1 рассматриваются долгоживущие квантовые состояния антиводорода над проводящей поверхностью в гравитационном поле Земли.

Глава 2 посвящена способу индуцирования резонансных переходов между квантовыми гравитационными состояниями антиводорода. Индуцирование переходов происходит под действием градиента магнитного поля, осциллирующего с частотой, равной частоте перехода между гравитационными состояниями, или под действием вибрации поверхности. Изучаются возможные эксперименты по определению частот переходов между гравитационными уровнями антиводорода. Показано, как знание частоты перехода между гравитационными уровнями позволит получить гравитационную массу антиводорода с высокой точностью.

В Главе 3 исследуется эффект сдвига резонансной частоты (динамический эффект Штарка), обусловленный используемым спектроскопическим методом, и его влияние на определение гравитационной массы антиводорода. Величина описанного эффекта оценена численно с помощью точного решения временного уравнения Шредингера и аналитически с помощью формализма квазиэнергий.

В Главе 4 подробно рассматривается явление квантового отражения, которое препятствует аннигиляции ультрахолодных атомов антиводорода на материальной поверхности и позволяет хранить атомы антиводорода в гравитационных состояниях в течение конечных времен. Изучаются различные ложные эффекты, которые необходимо учесть для правильного анализа результатов эксперимента по определению гравитационной массы. Проводится теоретическая оценка точности измерения гравитационной массы в эксперименте с учетом различных источников ошибок.

Глава 1. Долгоживущие квантовые гравитационные состояния атома антиводорода

Атом антиводорода в гравитационном поле Земли. Спектральные свойства и время жизни гравитационных состояний антиводорода

Будем рассматривать атомы антиводорода (антиатомы) в гравитационном поле Земли над идеально проводящей поверхностью. Предметом исследования являются ультрахолодные антиатомы с температурами ниже, чем 10^{-5} К. Гравитационное поле Земли описывается линейным потенциалом $W(z) = Mgz$, где z — высота антиводорода над поверхностью.

Сначала рассмотрим идеальную модельную систему, в которой антиатом движется вдоль идеально отражающей поверхности (зеркала) в гравитационном поле Земли.

Уравнение Шредингера, описывающее антиводород в гравитационном поле Земли над зеркалом, с граничным условием полного отражения на зеркале имеет вид [12]:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dz^2} + Mgz\phi &= E\phi, \\ \phi(0) &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где m — инертная масса антиатома, M — гравитационная масса. Решение приведенного уравнения известно — оно представляет собой линейную комбинацию функций Эйри [12; 49] вида:

$$\phi(z) = C_1 \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \frac{E}{\epsilon_g} \right) + C_2 \text{Bi} \left(\frac{z}{l_g} - \frac{E}{\epsilon_g} \right), \tag{1.2}$$

где введены характерная энергия и длина в гравитационном поле:

$$\begin{aligned}\epsilon_g &= \left(\frac{M^2 g^2 \hbar^2}{2m} \right)^{1/3}, \\ l_g &= \left(\frac{\hbar^2}{2Mmg} \right)^{1/3}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Отбрасывая расходящееся на бесконечности решение, из граничного условия $\phi(0) = 0$ получаем спектр антиводорода в гравитационном поле Земли над зеркалом — спектр гравитационных квантовых состояний [12]:

$$E_n = \epsilon_g \lambda_n,\tag{1.4}$$

где λ_n — нули функции Эйри с обратным знаком $\text{Ai}(-\lambda_n) = 0$.

С учетом условия нормировки собственные функции атома антиводорода в такой системе примут вид [12]:

$$\phi_n(z) = \frac{\text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \lambda_n\right)}{\sqrt{l_g \text{Ai}'(-\lambda_n)}}.\tag{1.5}$$

Классические точки поворота для антиводорода над зеркалом в гравитационных состояниях определяются как:

$$z_n = l_g \lambda_n.\tag{1.6}$$

Соответствующие численные значения характерной гравитационной энергии и длины составляют $\epsilon_g = 0.602 \cdot 10^{-12}$ эВ и $l_g = 5.87$ мкм. Характерные высоты состояний антиводорода в гравитационном поле составляют десятки микрон, что позволяет легко идентифицировать эти состояния экспериментально посредством установки детектора на нужную высоту.

В Таблице 1.1 приведены собственные значения (нули функции Эйри с обратным знаком), энергии гравитационных состояний и классические точки поворота для антиводорода в гравитационном поле Земли над зеркалом для первых шести состояний.

Собственные значения, энергии гравитационных состояний и классические точки поворота для атома антиводорода в гравитационном поле Земли над зеркалом

n	λ_n	E_n , пэВ	z_n , МКМ
1	2.338	1.406	13.73
2	4.088	2.459	24.00
3	5.521	3.320	32.42
4	6.787	4.082	39.85
5	7.944	4.778	46.65
6	9.023	5.427	52.98

Перейдем от модельной идеально отражающей к реальной проводящей поверхности.

На расстояниях меньше нескольких атомных единиц потенциал взаимодействия антиводорода с проводящей поверхностью принципиально отличается от аналогичного потенциала для водорода. Для антиводорода потенциал является потенциалом притяжения даже на расстояниях меньше 1 а.е. от поверхности и переходит в потенциал поглощения на самой поверхности из-за высокой вероятности аннигиляции. На расстояниях во много раз больших 1 а.е. потенциал для антиатома оказывается тождественным потенциалу для обычного атома водорода и определяется индуцированным диполь-дипольным взаимодействием. Для (анти)водорода потенциал на больших расстояниях от поверхности имеет вид потенциала Ван-дер-Ваальса $-C_3/z^3$ и переходит по мере увеличения расстояния в $-C_4/z^4$ за счет эффектов запаздывания [12; 50; 51].

На Рис. 1.1 представлен вид потенциала, в котором оказывается локализован атом антиводорода, движущийся над проводящей поверхностью в гравитационном поле Земли. На малых расстояниях над поверхностью ключевую роль играет потенциал взаимодействия с поверхностью Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера $V_{CP}(z)$ [50; 51], на больших расстояниях доминирует линейный гравитационный потенциал Земли.

Быстроменяющийся характер притягивательного потенциала Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера $V_{CP}(z)$ приводит к явлению надбарьерно-

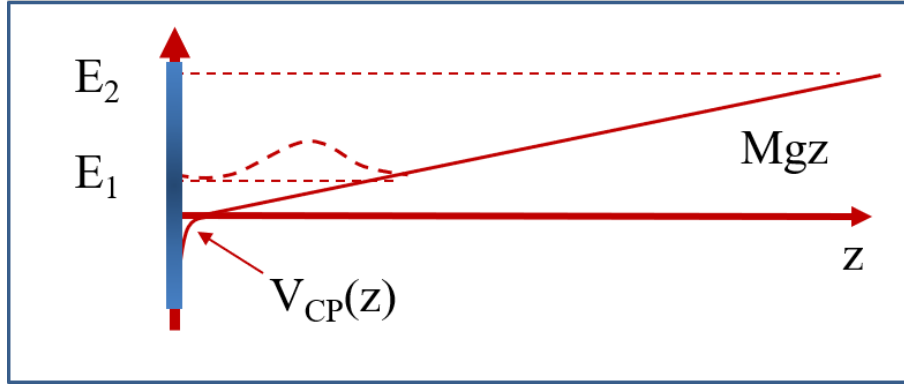


Рисунок 1.1 — Составной потенциал для атома антиводорода: на малых расстояниях z от проводящей поверхности доминирует потенциал взаимодействия с поверхностью $V_{CP}(z)$, на больших расстояниях доминирует гравитационный потенциал Земли Mgz .

го квантового отражения [36; 37; 52], которое препятствует аннигиляции ультрахолодных атомов антиводорода на поверхности [12; 53]. Квантовое отражение возникает в том случае, когда атом попадет в область, где потенциал быстро меняется по сравнению с длиной волны атома. В результате вероятность упругого отражения антиводорода в пределе нулевых энергий стремится к единице [12]. Надбарьерное отражение известно в различных проблемах квантовой механики [54], а его прямое лабораторное наблюдение обусловлено прогрессом в получении и детектировании холодных атомов. Поэтому работы по исследованию квантового отражения ультрахолодных атомов появились сравнительно недавно [29; 30; 32].

Атомы антиводорода оказываются в долгоживущих гравитационных квантовых состояниях, аналогичных состояниям нейтронов [12; 20–22; 50; 55; 56], благодаря эффекту квантового отражения на потенциале $V_{CP}(z)$ со стороны поверхности и удержанию гравитационным полем. Возможности получения долгоживущих состояний антиатомов, находящихся над проводящей поверхностью, описаны в работах [12; 34].

Уравнение Шредингера для антиатома в гравитационном поле Земли над проводящей поверхностью имеет вид [34]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} + (Mgz + V_{CP}(z)) \psi = E\psi. \quad (1.7)$$

На поверхности ($z = 0$) решение уравнения должно удовлетворять условию полного поглощения, отсутствию отраженной волны (за счет аннигиляции).

Из-за различия в характерной длине волны антиатома в гравитационном поле $l_g = 5.87$ мкм и масштабе действия потенциала Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера $l_{CP} = \sqrt{2mC_4/\hbar} = 0.003$ мкм гравитационное поле слабо влияет на взаимодействие антиатома с поверхностью [34].

На больших расстояниях от поверхности $z \gg l_{CP}$ решение уравнения (1.7) можно записать в виде [34]:

$$\psi(z) \sim \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \frac{E}{\epsilon_g}\right) + K(E)\text{Bi}\left(\frac{z}{l_g} - \frac{E}{\epsilon_g}\right), \quad (1.8)$$

где коэффициент $K(E)$ характеризует смешивание двух независимых решений.

Из условия квадратичной интегрируемости решения на бесконечности можно получить условие на собственные значения энергии:

$$K(E_n) = 0. \quad (1.9)$$

На расстояниях от поверхности $l_{CP} \ll z \ll l_g$ можно пренебречь влиянием гравитационного потенциала и записать решение в виде [34]:

$$\psi(z) \sim \sin(kz + \delta(E)), \quad (1.10)$$

где волновой вектор $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, а $\delta(E)$ — фазовый сдвиг для антиводорода, отраженного от поверхности, в отсутствии гравитационного поля.

Сшивая решения (1.8) и (1.10), можно получить соотношение между фазовым сдвигом и функцией $K(E)$:

$$K(E) = -\frac{\text{tg}(\delta(E))\text{Ai}'(-E/\epsilon_g) - kl_g\text{Ai}(-E/\epsilon_g)}{\text{tg}(\delta(E))\text{Bi}'(-E/\epsilon_g) - kl_g\text{Bi}(-E/\epsilon_g)}, \quad (1.11)$$

где была принята во внимание независимость соотношения от точки сшивки и в качестве точки сшивки использовано значение $z = 0$.

Подставляя (1.11) в (1.9), можно получить уравнение для модифицированных гравитационных уровней:

$$\frac{\operatorname{tg}(\delta(E_n))}{kl_g} = \frac{\operatorname{Ai}(-E_n/\epsilon_g)}{\operatorname{Ai}'(-E_n/\epsilon_g)}. \quad (1.12)$$

Данное уравнение эквивалентно граничному условию вида [34]:

$$\frac{\phi(0)}{\phi'(0)} = \frac{\operatorname{tg}(\delta(E_n))}{k}. \quad (1.13)$$

Таким образом, атом антиводорода, локализованный в гравитационном поле Земли вблизи проводящей поверхности, может быть описан уравнением с граничным условием вида:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi_n}{dz^2} + Mgz\phi_n = E_n\phi_n, \quad (1.14)$$

$$\frac{\phi_n(0)}{\phi_n'(0)} = \frac{\operatorname{tg}(\delta(E_n))}{k}.$$

Так как для нижних гравитационных состояний выполнено условие $kl_{CP} \ll 1$, то для фазового сдвига можно воспользоваться приближением длины рассеяния $\delta(E) \approx -ka_{CP}$, где a_{CP} — постоянная комплексная длина рассеяния антиводорода на потенциале Казимира-Полдера, вычисленная для идеально приводящей поверхности с условием полного поглощения на самой поверхности [12].

Тогда уравнение для гравитационных состояний с учетом взаимодействия с проводящей поверхностью (1.12) приобретает вид [34]:

$$\frac{\operatorname{Ai}(-E_n/\epsilon_g)}{\operatorname{Ai}'(-E_n/\epsilon_g)} = -\frac{a_{CP}}{l_g}. \quad (1.15)$$

Приведенное уравнение эквивалентно граничному условию для волновой функции частицы в гравитационном поле [34]:

$$\phi(z \rightarrow 0) \rightarrow z - a_{CP}. \quad (1.16)$$

За счет комплексности длины рассеяния на потенциале Казимира-Полдера a_{CP} (в результате поглощения) гравитационные состояния антиводорода над проводящей поверхностью становятся квазистационарными.

Для малых квантовых чисел n легко связать уровни энергии гравитационных состояний над проводящей поверхностью E_n с гравитационными уровнями энергии атома антиводорода над зеркалом. Осуществив замену координат $z = \tilde{z} + a_{CP}$, можно получить из (1.14) и (1.16) уравнение с граничным условием, совпадающие по виду с уравнением для атома антиводорода над зеркалом в гравитационном поле Земли (1.1):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi_n(\tilde{z})}{d\tilde{z}^2} + Mg\tilde{z}\phi_n(\tilde{z}) = (E_n - Mga_{CP})\phi_n(\tilde{z}), \quad (1.17)$$

$$\phi_n(\tilde{z} \rightarrow 0) \rightarrow 0.$$

Отсюда видно, что под влиянием взаимодействия с проводящей поверхностью все уровни антиатома в гравитационном потенциале испытают одинаковый малый сдвиг, линейный по $\frac{a_{CP}}{l_g}$, и станут равными [34]:

$$E_n = \epsilon_g \left(\lambda_n + \frac{a_{CP}}{l_g} \right). \quad (1.18)$$

Волновая функция антиводорода с учетом взаимодействия с поверхностью приобретает вид [34]:

$$\phi_n(z) = \frac{\text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \frac{a_{CP}}{l_g} - \lambda_n \right)}{\sqrt{l_g} \text{Ai}'(-\lambda_n)}. \quad (1.19)$$

Так как действие поверхности на антиатом в пределе низких энергий можно характеризовать с помощью длины рассеяния на потенциале Казимира-Полдера — константы a_{CP} [12], то в потенциале Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера в первом порядке теории возмущений все состояния приобретают одинаковый сдвиг энергий, и таким образом, потенциал Казимира-Полдера не будет влиять на частоты переходов между гравитационными состояниями.

У всех состояний появляется конечная ширина. Выделив мнимую часть энергии, получим ширину Γ и время жизни τ состояний атома антиводорода, обусловленные взаимодействием с поверхностью [34]:

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\epsilon_g \left| \operatorname{Im} \frac{a_{CP}}{l_g} \right| = \frac{Mgb}{2} = 5.98 \cdot 10^{-3} \text{ пэВ}, \\ b &= 4 |\operatorname{Im} a_{CP}|, \\ \tau &= \frac{2\hbar}{Mgb} = 0.1 \text{ с}.\end{aligned}\tag{1.20}$$

Ширина состояний является одинаковой и малой для всех нижних гравитационных уровней и не зависит от номера состояния n .

Таким образом, относительно большое время жизни атомов антиводорода в гравитационных состояниях, обеспечиваемое явлением квантового отражения, открывает новые перспективы в высокоточной спектроскопии этих состояний. Гравитационные состояния антиводорода обладают малыми энергиями «связи» и при этом мезоскопическими характерными пространственными размерами, что позволяет использовать их как инструмент для высокоточных измерений. На основе изучения спектра гравитационных состояний антиводорода можно развить новый подход к прецизионным исследованиям гравитационных свойств антиатомов. Измерение частоты переходов между гравитационными уровнями антиводорода позволит получить значение гравитационной массы атома антиводорода и провести тест слабого принципа эквивалентности для антиатомов с высокой точностью.

Глава 2. Возбуждение квантовых переходов и возможности наблюдения гравитационных состояний

2.1 Возбуждение резонансных переходов неоднородным переменным магнитным полем

Магнитное поле можно использовать в качестве инструмента по наблюдению квантовых гравитационных состояний атома антиводорода. Будет показано, что под действием переменного неоднородного магнитного поля будут происходить переходы между гравитационными состояниями с ненулевой вероятностью. Подбрав частоту осцилляций магнитного поля таким образом, чтобы она совпала с частотой перехода между гравитационными уровнями, можно будет зарегистрировать резонансный переход. Соответствующее резонансное изменение в пространственной плотности атомов антиводорода может быть измерено как функция частоты внешнего магнитного поля. Такой подход позволит получить значение разности энергии между гравитационными уровнями и, соответственно, гравитационную массу антиводорода.

Необходимо подобрать значения постоянного магнитного поля и его градиента, чтобы обеспечить максимальную вероятность перехода между двумя выбранными гравитационными состояниями в нужный момент времени. Ведущее постоянное магнитное поле \vec{B}_0 позволит исключить спиновые переходы в системе (фиксирует направление магнитного момента антиатома). При соответствующем значении градиента магнитного поля β можно добиться максимума вероятности перехода антиатома из основного гравитационного состояния в возбужденные за время жизни гравитационного состояния при совпадении частоты внешнего поля с частотой перехода.

Рассмотрим действие магнитного поля на атом антиводорода, движущийся в гравитационном поле Земли над проводящей поверхностью. Неоднородное магнитное поле связывает спиновые и пространственные степени

свободы антиатома. Оператор, описывающий действие магнитного поля \vec{B} на антиатом имеет вид: $\hat{V}_{field} = -\hat{\vec{\mu}}_{atom}\vec{B}$, где μ_{atom} — магнитный момент антиатома [57].

Предположим, что антиатом находится в состоянии $1S$, состоянии с возможным значением полного спина $S = 0, 1$ и возможными значениями проекции полного спина $S_z = -1, 0, 1$.

Гамильтониан \hat{H}_0 , описывавший атом антиводорода в постоянном магнитном поле \vec{B}_0 до включения в рассмотрение неоднородного переменного магнитного поля, имел слагаемые, отвечавшие за относительное движение позитрона и ядра \hat{H}_{rel} и за движение центра масс \hat{H}_{cm} :

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \hat{H}_{cm} + \hat{H}_{rel}, \\ \hat{H}_{cm} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + Mgz + V_{CP}(z), \\ \hat{H}_{rel} &= \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 - \frac{1}{2\mu c^2} \left(\hat{p}^2 \right)^2 - \frac{e^2}{r} + U_{sl} - \vec{\mu}_e \vec{B}_p - \mu_B \vec{B}_0 \left(\vec{l}_e + 2\vec{s}_e \right),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где слагаемое U_{sl} описывает спин-орбитальное взаимодействие, $\vec{\mu}_e \vec{B}_p$ — позволяет учесть сверхтонкую структуру атомных уровней, $\mu_B \vec{B}_0 \left(\vec{l}_e + 2\vec{s}_e \right)$ — описывает действие однородного магнитного поля \vec{B}_0 , направленного вдоль оси z в нашей постановке задачи, на антиатом, $\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_p$, \vec{r}_e — радиус-вектор позитрона в антиатоме, \vec{r}_p — радиус-вектор ядра, z — координата центра масс, μ — приведенная масса, а $\vec{p} = \vec{p}_e - \vec{p}_p$.

Полная волновая функция антиатома Ψ представлялась в виде произведения волновых функций:

$$\Psi = \psi(z)\phi(r)\chi,\tag{2.2}$$

где волновая функция $\psi(z)$, отвечающая за взаимодействие антиатома с гравитационным полем, имела вид (1.19), и волновая функция, описывающая основное состояние атома антиводорода, имела вид:

$$\phi(r) = \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{\sqrt{\pi a^3}},\tag{2.3}$$

где a — боровский радиус. Спиновые волновые функции антиатома χ в магнитном поле зависят от значений полного спина S и его проекции S_z на ось z .

Уровни энергии антиводорода в постоянном магнитном поле \vec{B}_0 с учетом всех взаимодействий до включения переменного неоднородного поля имели вид:

$$E_{S,S_z,n} = E_{S,S_z} + \epsilon_g \left(\lambda_n + \frac{a_{CP}}{l_g} \right), \quad (2.4)$$

где:

$$\begin{aligned} E_{S=1,S_z=1} &= E_{S=1} - \mu_B B_0, \\ E_{S=1,S_z=-1} &= E_{S=1} + \mu_B B_0, \\ E_{S=0,S_z=0} &= \frac{1}{2} \left(E_{S=1} + E_{S=0} - \sqrt{(E_{S=1} - E_{S=0})^2 + 4\mu_B^2 B_0^2} \right), \\ E_{S=1,S_z=0} &= \frac{1}{2} \left(E_{S=1} + E_{S=0} + \sqrt{(E_{S=1} - E_{S=0})^2 + 4\mu_B^2 B_0^2} \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

E_S — значения энергии атома антиводорода в состоянии с данным значением полного спина S в отсутствии всех внешних полей.

Действие градиента магнитного поля будем рассматривать как возмущение, которое приведет к возбуждению переходов между гравитационными и спиновыми состояниями антиатома. Полное магнитное поле \vec{B} с добавкой градиента β , подходящее для наблюдения переходов между гравитационными состояниями антиводорода, в выбранной системе координат, где x — направление вдоль поверхности, z — направление, перпендикулярное к поверхности, имеет вид:

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z + \beta \cos(\omega t) (x \vec{e}_x - z \vec{e}_z) \quad (2.6)$$

с дополнительным условием для градиента: $B_0 \gg \beta L$, где L — размер установки ($L \sim 30$ см).

Зависящее от времени магнитное поле порождает электрическое поле ($[\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\frac{1}{c} d\vec{B}/dt$), вклад которого для ультрахолодных атомов антиводорода будет мал.

Удобно рассматривать антиводород в системе отсчета, движущейся со скоростью v , скоростью движения антиатома в горизонтальном направлении вдоль поверхности ($v \sim 1$ м/с). Тогда изменение координаты x будет описываться классически.

Окончательный вид оператора возмущения, описывающего действие неоднородного переменного магнитного поля, при выбранной конфигурации поля примет вид:

$$\hat{U} = 2\mu_B\beta \cos(\omega t)(z\hat{s}_z^e - x\hat{s}_x^e). \quad (2.7)$$

Условие $\mu_B B_0 \gg \epsilon_g$ позволит исключить спиновые переходы в системе под действием переменного неоднородного магнитного поля. С другой стороны считаем постоянное магнитное поле B_0 достаточно слабым: эффект Зеемана мал по сравнению со сверхтонким расщеплением $\mu_B B_0 \ll |E_{S=1} - E_{S=0}|$.

В связи со слабостью постоянного магнитного поля переходы под действием градиента магнитного поля между состояниями с проекцией полного спина равной нулю будут отсутствовать. Это связано с тем фактом, что уровни энергии антиатомов с проекцией полного спина равной нулю зависят от поля B_0 квадратично, в то время как состояния с проекцией полного спина не равной нулю зависят от поля линейно. В результате индуцированных переходов в возбужденное гравитационное состояние последнее оказывается поляризованным (переход осуществляется только для спина с проекцией вдоль или против поля). Т.о. при условии слабости постоянного магнитного поля, можно рассматривать переходы между гравитационными состояниями только для антиатомов с проекцией спина $S_z = 1, -1$.

Оценим возможность индуцировать переходы между гравитационными уровнями антиатома n_0 и n_1 , находящегося в переменном магнитном поле, и подберем величину градиента поля, обеспечивающую максимальную вероятность перехода. Для этого запишем соответствующее временное

уравнение Шредингера с добавкой периодического по времени возмущения:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(z, r, t) = \left(\hat{H}_{rel} + \hat{H}_{cm} + 2\mu_B \beta (z \hat{s}_z^e - x \hat{s}_x^e) \cos(\omega t) \right) \Psi(z, r, t) \quad (2.8)$$

или то же самое в более кратких обозначениях:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi = (\hat{H}_0 + \hat{V} \cos(\omega t)) \Psi. \quad (2.9)$$

Найдем решения данного уравнения и вычислим вероятность перехода между гравитационными состояниями под действием возмущения, показав, что метод спектроскопии с помощью магнитного поля осуществим.

Рассмотрим простейший приближенный случай переходов между гравитационными состояниями. Будем считать такие состояния квазистационарными и предположим, что спиновое состояние остается фиксированным ($S_z = 1$) при действии переменного неоднородного магнитного поля.

Для решения временного уравнения Шредингера (2.9) воспользуемся теорией возмущений. Решение уравнения будем искать в виде разложения по невозмущенным состояниям с коэффициентами $C(t)$, зависящими от времени:

$$\Psi = C_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} |1\rangle + C_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} |2\rangle + \dots + C_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} |n\rangle + \dots, \quad (2.10)$$

где невозмущенные состояния имеют вид:

$$|n\rangle = \frac{\text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \frac{a_{CP}}{l_g} - \lambda_n\right)}{\sqrt{l_g} \text{Ai}'(-\lambda_n)} \phi(r). \quad (2.11)$$

Из условия того, что в начальный момент времени антиатом находился в n_0 гравитационном состоянии, получим начальные условия на коэффициенты $C_{n_0}(t=0) = 1$; $C_{n \neq n_0}(t=0) = 0$.

Подставив вид решения (2.10) в уравнение (2.9), с учетом соотношения биортогональности для гравитационных состояний (Приложение А),

получим бесконечную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
i\hbar\dot{C}_1 &= \cos(\omega t) (V_{11}C_1 + V_{12}C_2e^{-i\omega_{12}t} + V_{13}C_3e^{-i\omega_{13}t} + \dots), \\
i\hbar\dot{C}_2 &= \cos(\omega t) (V_{21}C_1e^{i\omega_{12}t} + V_{22}C_2 + V_{23}C_3e^{-i\omega_{23}t} + \dots), \\
\dots & \\
i\hbar\dot{C}_n &= \cos(\omega t) \left(\sum_{i=1}^{\infty} V_{ni}C_i e^{i\omega_{in}t} \right), \\
\dots &
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где матричные элементы возмущений V_{kl} определены по формулам (Приложение Б):

$$\begin{aligned}
V_{kl} &= \langle k | \hat{V} | l \rangle = \mu_B \beta z_{kl} = \\
&= \mu_B \beta \frac{\int_0^{\infty} \text{Ai}^* \left(\frac{z}{l_g} - \frac{a_{CP}}{l_g} - \lambda_k \right) z \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \frac{a_{CP}}{l_g} - \lambda_l \right) dz}{l_g \text{Ai}^{*'}(-\lambda_k) \text{Ai}'(-\lambda_l)},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

а частоты переходов между гравитационными состояниями $\omega_{kl} = (E_l - E_k)/\hbar$.

Далее задача сводится к решению системы уравнений (2.12) с начальными условиями, которое может быть осуществлено численно при ограничении полного числа гравитационных уровней некоторым конечным числом.

Задача нахождения вероятности перехода может быть решена точно, если считать, что в системе присутствуют только два гравитационных состояния n_0 и n_1 , между которыми будет осуществляться переход. Тогда решение (2.10) приобретет вид:

$$\Psi = C_{n_0}(t)e^{-i\omega_{n_0}t}|n_0\rangle + C_{n_1}(t)e^{-i\omega_{n_1}t}|n_1\rangle \tag{2.14}$$

с начальными условиями: $C_{n_0}(0) = 1$; $C_{n_1}(0) = 0$.

Система уравнений (2.12) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{C}_{n_0} &= \frac{1}{2} \left\{ V_{n_0n_0}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})C_{n_0} + V_{n_1n_0}(e^{i\Delta\omega t} + e^{-i(\omega+\omega_{n_0n_1})t})C_{n_1} \right\}, \\ i\hbar\dot{C}_{n_1} &= \frac{1}{2} \left\{ V_{n_1n_1}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})C_{n_1} + V_{n_1n_0}(e^{-i\Delta\omega t} + e^{i(\omega+\omega_{n_0n_1})t})C_{n_0} \right\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где введено обозначение $\Delta\omega = \omega - \omega_{n_0n_1}$.

В полученных формулах можно выделить высокочастотные ω и низкочастотные $\Delta\omega$ члены. Усредним по высокочастотным членам и таким образом избавимся от них. Получаем окончательно систему уравнений:

$$\begin{aligned} i\dot{C}_{n_0} &= \frac{1}{2\hbar} V_{n_1n_0} e^{i\Delta\omega t} C_{n_1}, \\ i\dot{C}_{n_1} &= \frac{1}{2\hbar} V_{n_1n_0} e^{-i\Delta\omega t} C_{n_0}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Решения полученной системы имеют вид:

$$\begin{aligned} C_{n_1} &= -e^{-\frac{i\Delta\omega t}{2}} \frac{iV_{n_1n_0}}{\sqrt{V_{n_1n_0}^2 + \hbar^2\Delta\omega^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{V_{n_1n_0}^2 + \hbar^2\Delta\omega^2}t}{2\hbar}\right), \\ C_{n_0} &= e^{\frac{i\Delta\omega t}{2}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{V_{n_1n_0}^2 + \hbar^2\Delta\omega^2}t}{2\hbar}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i\hbar\Delta\omega}{\sqrt{V_{n_1n_0}^2 + \hbar^2\Delta\omega^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{V_{n_1n_0}^2 + \hbar^2\Delta\omega^2}t}{2\hbar}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Вероятность перехода $P_{n_0n_1}$ из гравитационного состояния n_0 в гравитационное состояние n_1 определяется по формуле:

$$P_{n_0n_1} = |\langle n_1 | \Psi \rangle|^2 = e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}} |C_{n_1}(t)|^2. \quad (2.18)$$

Подставив в нее найденные значения коэффициентов, получим формулу Раби для вероятности переходов:

$$P_{n_0 n_1}^R = \frac{V_{n_0 n_1}^2}{(E_{n_1} - E_{n_0} - \hbar\omega)^2 + V_{n_0 n_1}^2} \times \times \sin^2 \left(\frac{\sqrt{(E_{n_1} - E_{n_0} - \hbar\omega)^2 + V_{n_0 n_1}^2} t}{2\hbar} \right) e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}}. \quad (2.19)$$

Видно, что при определенном выборе значения градиента магнитного поля β в случае резонанса ($\omega = \omega_{n_0 n_1}$), величина вероятности перехода $P_{n_0 n_1}^R$ станет максимальной. Частоты переходов $\omega_{n_0 n_1}$ не зависят от ширины состояний (одинакова для всех уровней), соответственно исключен сдвиг резонанса из-за взаимодействия с поверхностью.

Значение величины градиента, которое обеспечивает максимум вероятности перехода при резонансе в момент времени $t_f = 0.1$ с (время жизни антиатома), составляет:

$$\beta = \frac{\pi \hbar}{t_f \mu_B z_{n_0 n_1}}. \quad (2.20)$$

По порядку величины для нижних гравитационных состояний оптимальное значение градиента магнитного поля составляет:

$$\beta \sim (1 - 10) \text{ Гс/м}. \quad (2.21)$$

Т.о. найденное значение градиента магнитного поля можно использовать в эксперименте для возбуждения переходов между гравитационными уровнями n_0 и n_1 с наибольшей вероятностью. Соответствующее постоянное магнитное поле, гарантирующее адиабатичность изменения магнитного момента, должно иметь величину порядка:

$$B_0 \sim 10 \text{ Гс}. \quad (2.22)$$

Для иллюстрации полученных результатов на Рис.2.1 приведем график вероятности перехода P_{16}^R между гравитационными состояниями $1 \rightarrow 6$ как функции частоты внешнего магнитного поля ω при значении градиен-

та поля $\beta = \frac{\pi\hbar}{t_f\mu_B z_{16}} = 13.59$ Гс/м. При совпадении частоты внешнего переменного магнитного поля с частотой перехода между гравитационными состояниями наблюдается резонанс.

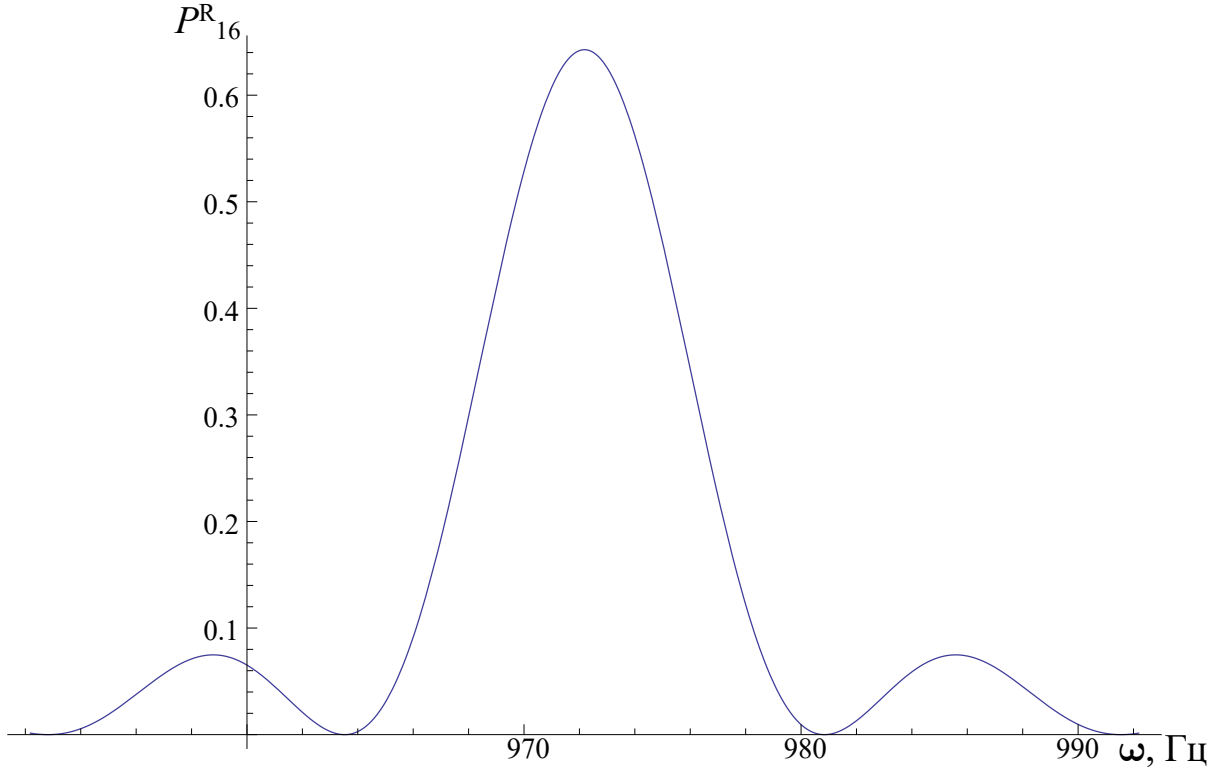


Рисунок 2.1 — Вероятность перехода P_{16}^R из основного в шестое гравитационное состояние для атома антиводорода под действием переменного неоднородного магнитного поля с градиентом $\beta = 13.59$ Гс/м как функция частоты магнитного поля ω в момент времени $t_f = 0.1$ с.

2.2 Возбуждение резонансных переходов с помощью вибрации (колебаний) поверхности

Наряду с магнитным полем, наблюдения квантовых гравитационных состояний антиводорода можно осуществить, возбуждая резонансные переходы между ними при помощи периодических колебаний поверхности, над которой расположен антиатом. Амплитуда колебаний поверхности, обес-

печивающая максимальную вероятность переходов, подбиралась в данном разделе.

Уравнение Шредингера, описывающее поведение антиатома над поверхностью в гравитационном поле Земли, можно записать в виде:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} + Mgz\psi + U_0\eta(-z)\psi = E\psi, \quad (2.23)$$

где $U_0\eta(-z)$ — потенциал поверхности, переходящий в полностью отражающую поверхность (зеркало) в пределе $U_0 \rightarrow \infty$.

Для атома антиводорода над зеркалом волновые функции были получены в виде (1.5), а собственные значения энергии описывались формулой (1.4).

Для поверхности, совершающей механические колебания с частотой ω по закону $z = A \sin(\omega t)$, изменится граничное условие и уравнение Шредингера примет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dz^2} + Mgz\psi + U_0\eta(-z + A \sin(\omega t))\psi = i\hbar \frac{d\psi}{dt}. \quad (2.24)$$

Граничное условие для решения уравнения Шредингера в пределе поверхности-зеркала запишется в виде:

$$\psi(z = A \sin(\omega t)) = 0. \quad (2.25)$$

Для решения уравнения (2.24) можно перейти в систему покоя поверхности с помощью замены координат:

$$\begin{cases} \tilde{z} = z - A \sin(\omega t), \\ \tilde{t} = t. \end{cases} \quad (2.26)$$

В новой системе отсчета уравнение Шредингера будет иметь вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{d\tilde{z}^2} + Mg\tilde{z}\psi + U_0\eta(-\tilde{z})\psi + \left(MgA \sin(\omega t) + i\hbar\omega A \cos(\omega t) \frac{d}{d\tilde{z}} \right) \psi = i\hbar \frac{d\psi}{dt} \quad (2.27)$$

с новым граничным условием для поверхности-зеркала:

$$\psi(\tilde{z} = 0) = 0. \quad (2.28)$$

Для решения уравнения (2.27) воспользуемся теорией возмущений. Оператор возмущения рассмотрим в виде $\hat{W} = MgA \sin(\omega t) + i\hbar\omega A \cos(\omega t) \frac{d}{d\tilde{z}}$. Невозмущенный спектр для поверхности-зеркала известен и описывается формулами (1.4), (1.5).

Для оценки вероятности переходов между состояниями невозмущенного спектра под действием оператора возмущения \hat{W} используем разложение волновой функции по невозмущенным состояниям и соотношение биортогональности для невозмущенных состояний (Приложение А):

$$\begin{aligned} \psi = C_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar} + \frac{iMgA}{\hbar\omega} \cos(\omega t)} |1\rangle + C_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar} + \frac{iMgA}{\hbar\omega} \cos(\omega t)} |2\rangle + \dots + \\ + C_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar} + \frac{iMgA}{\hbar\omega} \cos(\omega t)} |n\rangle + \dots, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где состояния невозмущенной системы имеют вид:

$$|n\rangle = \frac{\text{Ai}\left(\frac{\tilde{z}}{l_g} - \lambda_n\right)}{\sqrt{l_g} \text{Ai}'(-\lambda_n)}. \quad (2.30)$$

Для двухуровневой системы с двумя гравитационными состояниями n_0, n_1 можно получить вероятность перехода в виде, аналогичном (2.19):

$$\begin{aligned} P_{n_0 n_1}^{R} = \frac{|V_{n_0 n_1}|^2}{(E_{n_1} - E_{n_0} - \hbar\omega)^2 + |V_{n_0 n_1}|^2} \times \\ \times \sin^2\left(\frac{\sqrt{(E_{n_1} - E_{n_0} - \hbar\omega)^2 + |V_{n_0 n_1}|^2} t}{2\hbar}\right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $\hat{V} = i\hbar\omega A \frac{d}{d\tilde{z}}$. Матричные элементы оператора \hat{V} (Приложение В):

$$\begin{aligned} V_{nn} &= 0, \\ V_{n \neq k} &= \frac{i\hbar\omega A}{l_g(\lambda_n - \lambda_k)}. \end{aligned}$$

Из условия максимума вероятности перехода $P_{n_0 n_1}^R$ в момент t_f получаем оценку величины амплитуды колебаний A :

$$|A| = \frac{\pi \hbar l_g}{t_f \epsilon_g}. \quad (2.32)$$

Вероятность перехода между двумя состояниями становится максимальной при совпадении частоты колебаний поверхности с частотой перехода между гравитационными состояниями при соответствующем выборе значения амплитуды колебаний A .

2.3 Прецизионный эксперимент и определение гравитационной массы антиводорода

Изучаются возможные эксперименты по определению разности энергий между гравитационными уровнями антиводорода. Показано, как знание частоты перехода между гравитационными уровнями позволит получить гравитационную массу антиводорода с высокой точностью.

Опишем эксперименты, которые позволят определить разность энергий между гравитационными уровнями антиводорода.

Можно предложить такую принципиальную схему измерения, аналогичную предложенной для спектроскопии гравитационных состояний нейтронов [58]: в начальный момент времени атом антиводорода помещается в основное гравитационное состояние над зеркалом. Это достигается установкой поглотителя на высоте $H_a \sim z_1 \sim 13.73$ мкм. Зеркало и поглотитель формируют подобие волновода [34; 50].

Далее на антиатом, движущийся вдоль зеркала, действуют переменным неоднородным магнитным полем. При этом возбужденное гравитационное состояние резонансно заселяется.

Затем антиатомы в возбужденном состоянии регистрируют по числу аннигиляционных событий на высоте H_d (например, 19 мкм) над зеркалом с помощью установленного детектора. Если H_d выше классической точки

поворота для основного гравитационного состояния z_1 , но меньше точки поворота для конечного состояния z_f , то при резонансной частоте внешнего магнитного поля детектор будет регистрировать максимум событий, т.е. максимальное количество антиатомов, перешедших в возбужденное состояние. Отсюда может быть определена частота перехода между гравитационными состояниями 1 и f .

На Рис.2.2 представлена принципиальная схема описанного эксперимента [38], где: 1 — источник ультрахолодных атомов антиводорода, 2 — поверхность (зеркало), 3 — поглотитель, 4 — магнитное поле, 5 — детектор.

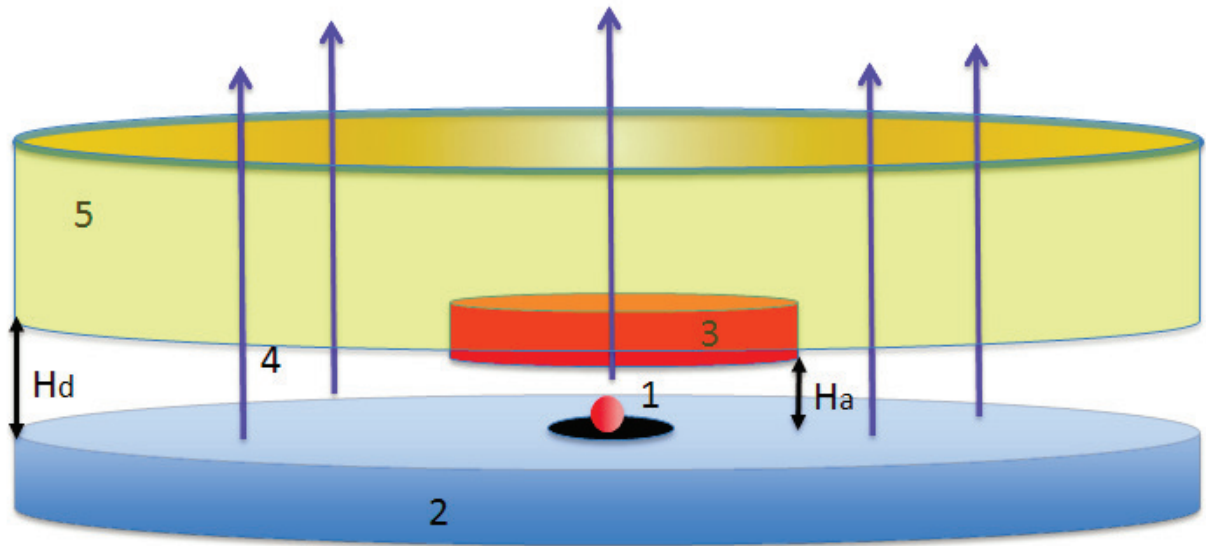


Рисунок 2.2 — Принципиальная схема эксперимента по наблюдению резонансного перехода между гравитационными состояниями атома антиводорода под действием переменного неоднородного магнитного поля, где: 1 — источник ультрахолодных атомов антиводорода, 2 — поверхность (зеркало), 3 — поглотитель, 4 — магнитное поле, 5 — детектор.

Другой вариант эксперимента состоит в следующем: регистрируется число аннигиляционных событий на нижнем зеркале с течением времени, таким образом отслеживается уменьшение полного числа частиц как функции времени. Переменное неоднородное магнитное поле приводит к возможности перехода во второе состояние для антиатома и осцилляций в полном числе частиц с частотой перехода. Частоту переходов определяют по частоте аннигиляционных событий.

Получив в эксперименте частоту переходов $\omega_{n_0 n_1}$, можно найти гравитационную массу антиводорода M :

$$M = \sqrt{\frac{2m\hbar\omega_{n_0 n_1}^3}{g^2(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^3}}. \quad (2.33)$$

При условии равенства гравитационной M и инертной m массы антиводорода, следующего из слабого принципа эквивалентности, окончательно получим выражение:

$$M = \frac{2\hbar\omega_{n_0 n_1}^3}{g^2(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^3}. \quad (2.34)$$

Полагая, что ширина спектрального состояния определяется его временем жизни $\tau = 0.1$ с, оценим относительную погрешность определения гравитационной массы для антиводорода над идеально проводящей поверхностью. При данной статистике, т.е. при данном числе зарегистрированных аннигиляционных событий N получим относительную погрешность:

$$\delta M \sim \frac{\Gamma}{\sqrt{N}\epsilon_g}. \quad (2.35)$$

Для $N = 100$ зарегистрированных переходов $1 \rightarrow 6$ относительная погрешность составит:

$$\delta M \sim 10^{-3}. \quad (2.36)$$

Глава 3. Определение точности наблюдения квантовых гравитационных состояний атома антиводорода

3.1 Сдвиг резонансной частоты и динамический эффект Штарка

Исследуется явление сдвига резонансной частоты в результате динамического эффекта Штарка [59], то есть частоты внешнего поля, при которой наблюдается максимум вероятности перехода из одного гравитационного состояния в другое, и его влияние на определение гравитационной массы антиводорода. Показывается, что резонансная частота не совпадает с разностью частот невозмущенных состояний. Сдвиг частоты обусловлен самим методом спектроскопии (влиянием переменного неоднородного магнитного поля или вибрации поверхности) и должен быть учтен для получения правильного значения разности частот в эксперименте. Величина описанного эффекта оценена численно с помощью точного решения временного уравнения Шредингера и аналитически с помощью формализма квазиэнергий.

Причина сдвига кроется в том, что магнитное поле возбуждает переходы не только между двумя резонансными состояниями, а также и между состояниями с другими энергиями. В магнитном поле понятие стационарных гравитационных состояний как таковых теряет смысл, в определенном приближении спектр можно рассматривать как спектр состояний, «одетых полем», спектр квазиэнергий [59], в котором и будут осуществляться переходы.

3.1.1 Численные значения сдвига

При точном решении временного уравнения Шредингера (2.9) для атома антиводорода, находящегося над материальной поверхностью в гравитационном поле Земли и магнитном поле, с учетом более чем двух гравитационных состояний в системе и вычислении вероятности перехода можно наблюдать сдвиг резонансной частоты, т.е. несовпадение частоты внешнего поля, дающей максимум вероятности перехода, с частотой перехода между невозмущенными гравитационными уровнями.

Проведена оценка величины сдвига резонансной частоты, возникающего при численном решении системы уравнений (2.12) с учетом более чем двух гравитационных уровней в системе.

Для численного решения системы из n_{levels} уравнений (2.12) с соответствующими граничными условиями вероятность перехода $P_{n_0 n_1}$ определим по новой формуле:

$$P_{n_0 n_1} = 1 - |\langle n_0 | \Psi \rangle|^2 = 1 - e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}} |C_{n_0}(t)|^2 = 1 - e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}} |C_1(t)|^2. \quad (3.1)$$

Эта вероятность — вероятность перехода во все возможные состояния из начального гравитационного состояния $|n_0 \rangle = |1 \rangle$, т.е. вероятность депопуляции основного состояния. Выбор конечного состояния n_1 влияет на используемую величину градиента магнитного поля β .

При учете больше чем двух гравитационных уровней в системе у резонансной частоты ω_{res} , т.е. частоты внешнего магнитного поля, обеспечивающей максимум вероятности перехода $P_{n_0 n_1}$ в момент времени $t_f = 0.1s$, появится добавка $\Delta\omega$, отличающая эту частоту от частоты перехода между невозмущенными уровнями $\omega_{n_0 n_1}$, предсказанной по формуле Раби.

$$\begin{aligned} \omega_{res} &\neq \omega_{n_0 n_1} = \frac{E_{n_1} - E_{n_0}}{\hbar}, \\ \omega_{res} &= \omega_{n_0 n_1} + \Delta\omega. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Результаты программы, точно решающей систему (2.12) из n_{levels} дифференциальных уравнений и ищущей максимум вероятности $P_{n_0 n_1}$ в момент времени $t_f = 0.1$ с как функции частоты магнитного поля сравниваются с резонансными частотами переходов $\omega_{n_0 n_1}$, вычисленными по формуле Раби, в Таблице 3.1. В Таблице 3.1 также приводятся значения сдвига резонансной частоты $\Delta\omega$.

Таблица 3.1

Численные значения резонансных частот переходов ω_{res} между гравитационными состояниями n_0 и n_1 под действием магнитного поля, частоты переходов между невозмущенными гравитационными уровнями $\omega_{n_0 n_1}$, численные значения сдвигов резонансных частот $\Delta\omega$.

Переход $n_0 \rightarrow n_1$	n_{levels}	ω_{res} , Гц	$\omega_{n_0 n_1}$, Гц	$\Delta\omega$, Гц
1 \rightarrow 2	11	254.732	254.493	0.239 ± 0.006
1 \rightarrow 3	15	462.810	462.848	-0.038 ± 0.006
1 \rightarrow 4	16	647.162	646.994	0.168 ± 0.006
1 \rightarrow 5	18	815.028	815.327	-0.298 ± 0.006
1 \rightarrow 6	22	972.159	972.184	-0.025 ± 0.006

В Таблице 3.2 приводятся аналогичные численные результаты для переходов между гравитационными состояниями n_0 и n_1 под действием вибрации поверхности.

Таблица 3.2

Численные значения резонансных частот переходов ω_{res} между гравитационными состояниями n_0 и n_1 под действием вибрации поверхности, частоты переходов между невозмущенными гравитационными уровнями $\omega_{n_0 n_1}$, численные значения сдвигов резонансных частот $\Delta\omega$.

Переход $n_0 \rightarrow n_1$	n_{levels}	ω_{res} , Гц	$\omega_{n_0 n_1}$, Гц	$\Delta\omega$, Гц
1 \rightarrow 2	11	254.636	254.493	0.143 ± 0.008
1 \rightarrow 3	15	462.759	462.848	-0.089 ± 0.008
1 \rightarrow 4	16	647.124	646.994	0.130 ± 0.008
1 \rightarrow 5	18	815.021	815.327	-0.306 ± 0.008
1 \rightarrow 6	22	972.147	972.184	-0.037 ± 0.008

3.1.2 Формализм теории квазиэнергий

С помощью теории Флоке возможно получить аналитическое выражение для величины сдвига резонансной частоты $\Delta\omega$, обусловленного динамическим эффектом Штарка. Применяя теорию Флоке, получим решение временного уравнения Шредингера (2.9).

Периодичность действия возмущения по времени позволяет вводить квазиэнергии и квазигармоники и свести нестационарное уравнение (2.9) к системе стационарных уравнений [60; 61].

Сначала приводится описание общего квазиэнергетического подхода, затем вычисляются квазиэнергии, квазигармоники и вероятности перехода между гравитационными состояниями. Этот подход позволяет находить точные промежуточные состояния системы в переменном поле.

Вернемся к уравнению Шредингера вида (2.9). В том случае, когда гамильтониан является периодической функцией времени, его собственные функции можно выбрать в виде:

$$\begin{aligned}\psi_\epsilon(z,t) &= e^{-\frac{i\epsilon t}{\hbar}} u_\epsilon(z,t), \\ u_\epsilon(z,t) &= u_\epsilon(z,t+T),\end{aligned}\tag{3.3}$$

где $u_\epsilon(z,t)$ называется состоянием Флоке, ϵ — это квазиэнергия, зависящая от времени. Период T связан с частотой поля:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Функцию $u_\epsilon(z,t)$, ввиду ее периодичности, можно разложить по квазигармоникам $\phi_{\epsilon,k}(z)$ в ряд Фурье:

$$u_\epsilon(z,t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-ik\omega t} \phi_{\epsilon,k}(z).\tag{3.4}$$

В целом собственная функция ψ примет вид:

$$\psi_\epsilon(z, t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-ik\omega t - \frac{i\epsilon t}{\hbar}} \phi_{\epsilon, k}(z). \quad (3.5)$$

Согласно теореме Флоке, точное решение уравнения Шредингера (2.9) можно представить в виде разложения по полному набору функций Флоке:

$$\psi(z, t) = A_1 \psi_{\epsilon_1}(z, t) + A_2 \psi_{\epsilon_2}(z, t) + \dots, \quad (3.6)$$

коэффициенты которого не зависят от времени и могут быть определены из начальных условий.

Т.о. квазиэнергетические функции ψ_ϵ играют ту же роль для антиатома в периодическом поле, как и стационарные состояния в случае, когда гамильтониан не зависит от времени.

После подстановки функции $\psi_\epsilon(z, t)$ в уравнение Шредингера (2.9) и приравнивания к нулю выражения при одинаковой степени $e^{-ik\omega t - \frac{i\epsilon t}{\hbar}}$ можно получить уравнение на квазигармоники:

$$\left(\hbar\omega k + \epsilon - \hat{H}_0 \right) \phi_{\epsilon, k}(z) = \frac{\hat{V}}{2} (\phi_{\epsilon, k-1}(z) + \phi_{\epsilon, k+1}(z)). \quad (3.7)$$

Везде далее будем использовать более краткое обозначение $\phi_{\epsilon, k}(z) = \phi_k(z)$.

Для решения уравнения (3.7) необходимо использовать аппарат функции Грина. Сама функция Грина G_k в рассматриваемом случае будет иметь вид:

$$G_k = \left(\hbar\omega k + \epsilon - \hat{H}_0 \right)^{-1}, \quad (3.8)$$

$$G_k = \frac{|1 \rangle \langle 1|}{\hbar\omega k + \epsilon - E_1} + \frac{|2 \rangle \langle 2|}{\hbar\omega k + \epsilon - E_2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n \rangle \langle n|}{\hbar\omega k + \epsilon - E_n},$$

где функции $|n \rangle$ определяются по формуле (2.11).

Функции $\phi_k(z)$ можно искать в виде разложения по состояниям невозмущенного гамильтониана \hat{H}_0 :

$$\phi_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^k |n\rangle. \quad (3.9)$$

После подстановки функций вида (3.9) в уравнение (3.7) получается уравнение:

$$\left(\hbar\omega k + \epsilon - \hat{H}_0\right) \sum_{n=1}^{\infty} C_n^k |n\rangle = \frac{\hat{V}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n^{k-1} + C_n^{k+1}) |n\rangle. \quad (3.10)$$

Для его решения подействуем на уравнение функцией Грина G_k слева:

$$\sum_n C_n^k |n\rangle = \sum_n \sum_l \frac{\langle l|V|n\rangle}{2(\hbar\omega k + \epsilon - E_l)} (C_n^{k-1} + C_n^{k+1}) |l\rangle. \quad (3.11)$$

Домножив уравнение (3.11) на $\langle m|$ слева, получим линейное соотношение для постоянных коэффициентов C_m^k :

$$\begin{aligned} C_m^k &= \sum_n \frac{V_{mn}}{2(\hbar\omega k + \epsilon - E_m)} (C_n^{k-1} + C_n^{k+1}), \\ (\hbar\omega k + \epsilon - E_m) C_m^k &= \sum_n \frac{V_{mn}}{2} (C_n^{k-1} + C_n^{k+1}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Аналогично можно использовать другой вид выражения для постоянных коэффициентов C_m^k :

$$C_m^k = \sum_n \langle m|G_k \frac{\hat{V}}{2} (C_n^{k-1} + C_n^{k+1}) |n\rangle. \quad (3.13)$$

Используя данные соотношения для коэффициентов, можно получать различные результаты.

«Квазиэнергетическое» выражение для вероятности перехода в двухуровневой системе. Сравнение с формулой Раби

Используем полученные в предыдущем разделе соотношения для коэффициентов (3.12), (3.13) для вычисления вероятности переходов между гравитационными состояниями под действием переменного неоднородного магнитного поля.

Пусть до включения возмущения система находилась в гравитационном состоянии $|n_0\rangle$, т.е. $\epsilon \rightarrow E_{n_0}$ при $V \rightarrow 0$. Вблизи резонанса $(E_{n_1} - E_{n_0}) \rightarrow \hbar\omega$, соответственно в выражении для функции Грина G_k (3.8) целесообразно оставить два слагаемых, дающих основной вклад: $G_0 \rightarrow \frac{|n_0\rangle\langle n_0|}{\epsilon - E_{n_0}}$ и $G_1 \rightarrow \frac{|n_1\rangle\langle n_1|}{\epsilon - (E_{n_1} - \hbar\omega)}$.

При выполнении условия $|E_{n_1} - E_{n_0} - \hbar\omega| \ll \hbar\omega$ в уравнениях можно оставить только медленно меняющиеся члены.

Рассмотрим приближение, в котором остаются только коэффициенты $C_{n_1}^1, C_{n_0}^0$, т.е. ищем решения нулевого порядка. В таком приближении система уравнений (3.12) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} (\epsilon - E_{n_0}) C_{n_0}^0 &= \frac{V_{n_0 n_1}}{2} C_{n_1}^1, \\ (\hbar\omega + \epsilon - E_{n_1}) C_{n_1}^1 &= \frac{V_{n_0 n_1}}{2} C_{n_0}^0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Уравнение на квазиэнергии ϵ будет иметь вид:

$$\epsilon^2 + \epsilon(\hbar\omega - E_{n_0} - E_{n_1}) + E_{n_0}(E_{n_1} - \hbar\omega) - \frac{V_{n_0 n_1}^2}{4} = 0, \quad (3.15)$$

корни которого:

$$\epsilon^{(+,-)} = \frac{E_{n_0} + E_{n_1} - \hbar\omega}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(E_{n_1} - E_{n_0} - \hbar\omega)^2 + V_{n_0 n_1}^2}. \quad (3.16)$$

При выключении взаимодействия $V_{n_0 n_1} \rightarrow 0$: $\epsilon^{(+)} \rightarrow (E_{n_1} - \hbar\omega)$, $\epsilon^{(-)} \rightarrow E_{n_0}$.
В случае точного резонанса квазиэнергии перейдут:

$$\begin{aligned}\epsilon^{(+)} &\rightarrow E_{n_0} + \frac{V_{n_0 n_1}}{2}, \\ \epsilon^{(-)} &\rightarrow E_{n_0} - \frac{V_{n_0 n_1}}{2}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

В целом решение уравнения Шредингера (2.9) можно записать в виде разложения по функциям Флоке:

$$\begin{aligned}\psi(z, t) &= A_1 \psi_{\epsilon^{(-)}}(z, t) + A_2 \psi_{\epsilon^{(+)}}(z, t) = \\ &= A_1 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-ik\omega t - \frac{i\epsilon^{(-)}t}{\hbar}} \left(C_{n_0, \epsilon^{(-)}}^k |n_0 \rangle + C_{n_1, \epsilon^{(-)}}^k |n_1 \rangle \right) + \\ &+ A_2 \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} e^{-ik\omega t - \frac{i\epsilon^{(+)}t}{\hbar}} \left(C_{n_0, \epsilon^{(+)}}^k |n_0 \rangle + C_{n_1, \epsilon^{(+)}}^k |n_1 \rangle \right).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Из уравнений на коэффициенты (3.14) получаем связь между коэффициентами с учетом найденных квазиэнергий:

$$\begin{aligned}C_{n_0, \epsilon^{(+)}}^0 &= \frac{V_{n_0 n_1}}{2(\epsilon^{(+)} - E_{n_0})} C_{n_1, \epsilon^{(+)}}^1 = X C_{n_1, \epsilon^{(+)}}^1, \\ C_{n_0, \epsilon^{(-)}}^0 &= \frac{V_{n_0 n_1}}{2(\epsilon^{(-)} - E_{n_0})} C_{n_1, \epsilon^{(-)}}^1 = Y C_{n_1, \epsilon^{(-)}}^1,\end{aligned}\tag{3.19}$$

где ввели обозначения:

$$X = \frac{V_{n_0 n_1}}{2(\epsilon^{(+)} - E_{n_0})}, \quad Y = \frac{V_{n_0 n_1}}{2(\epsilon^{(-)} - E_{n_0})}.$$

Поставим дополнительное условие нормировки состояний Флоке. В общем случае оно имеет вид:

$$\sum_k (|C_{1, \epsilon}^k|^2 + |C_{2, \epsilon}^k|^2 + |C_{3, \epsilon}^k|^2 + \dots) = 1.\tag{3.20}$$

Используя начальное условие $\psi(z, t = 0) = |n_0 \rangle$, найдем коэффициенты A_1, A_2 , и окончательно получим соотношения:

$$\begin{aligned} \left| C_{n_0, (+/-)}^0 \right|^2 &= \frac{|X/Y|^2}{1 + |X/Y|^2}, \\ \left| C_{n_1, (+/-)}^1 \right|^2 &= \frac{1}{1 + |X/Y|^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Используя найденные квазиэнергии и коэффициенты, можно вычислять вероятности переходов между гравитационными состояниями.

Чтобы определить амплитуду перехода подействуем на начальное гравитационное состояние $|n_0 \rangle$ оператором Флоке $F(t, t_0)$, который имеет вид:

$$F(t, t_0) = \sum_{\epsilon} |u_{\epsilon}(t) \rangle e^{-\frac{i\epsilon t}{\hbar}} e^{\frac{i\epsilon t_0}{\hbar}} \langle u_{\epsilon}(t_0) |, \quad (3.22)$$

где функции $|u(t) \rangle = \sum_k \sum_n C_n^k e^{-i\omega_k t} |n \rangle$ — состояния Флоке.

Вероятность перехода $P_{n_0 n_1}$ из состояния n_0 в n_1 можно определить таким образом:

$$P_{n_0 n_1} = |\langle n_1 | F(t, t_0) | n_0 \rangle|^2. \quad (3.23)$$

Можно определить вероятность $P_{n_0 n_1}$ по-другому, вычтя из полной вероятности вероятность остаться в первоначальном состоянии (получив вероятность покинуть первоначальное состояние):

$$P_{n_0 n_1} = 1 - |\langle n_0 | F(t, t_0) | n_0 \rangle|^2. \quad (3.24)$$

Выражение для вероятности (3.24) в рассмотренном приближении приобретает вид:

$$P_{n_0 n_1} = 4 \left| C_{n_0(+)}^0 \right|^2 \left| C_{n_0(-)}^0 \right|^2 \sin^2 \left(\frac{(\epsilon^{(+)} - \epsilon^{(-)}) t}{2\hbar} \right). \quad (3.25)$$

После аккуратной подстановки вычисленных коэффициентов вероятность перехода из состояния n_0 в состояние n_1 приобретает окончательный вид:

$$P_{n_0 n_1} = \frac{V_{n_0 n_1}^2}{(E_{n_1} - E_{n_0} - \hbar\omega)^2 + V_{n_0 n_1}^2} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{(E_{n_1} - E_{n_0} - \hbar\omega)^2 + V_{n_0 n_1}^2} t}{2\hbar} \right). \quad (3.26)$$

Выражения для $P_{n_0 n_1}$ совпадает с формулой Раби (2.19). Частота внешнего поля, обеспечивающая максимум вероятности перехода между гравитационными состояниями в момент времени $t_f = 0.1$ с при величине градиента магнитного поля $\beta = \frac{\pi\hbar}{t_f \mu_B z_{n_0 n_1}}$, совпадает с разностью частот невозмущенных уровней и равняется $\omega_{n_0 n_1}$. В рассмотренном приближении сдвиг резонанса отсутствует.

Аналитическое выражение для сдвига резонансной частоты

Покажем, что учет дополнительных гармоник приведет к сдвигу резонанса. Рассмотрим новое приближение в описанной в предыдущем разделе теории Флоке для вычисления аналитически сдвига резонанса $\Delta\omega$, обусловленного динамическим эффектом Штарка. В вычислениях ограничимся вторым порядком по возмущению: V^2 .

Используем общую формулу для нахождения коэффициентов (3.12) и учтем вклад многих уровней в системе в вероятность перехода между гравитационными состояниями $n_0 \rightarrow n_1$. Будем считать, что все коэффициенты, кроме $C_{n_0}^0$, $C_{n_1}^1$, малы. Выразим произвольный коэффициент C_n через $C_{n_0}^0$, $C_{n_1}^1$.

Для коэффициентов $C_{n_0}^0$, $C_{n_1}^1$ в соответствии с (3.12) верны уравнения:

$$\begin{aligned} (\epsilon - E_{n_0})C_{n_0}^0 &= \sum_n \frac{V_{n_0 n}}{2} (C_n^{-1} + C_n^1), \\ (\epsilon - E_{n_1} + \hbar\omega)C_{n_1}^1 &= \sum_n \frac{V_{n_1 n}}{2} (C_n^0 + C_n^2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Выделим в суммах в правой части уравнений (3.27) слагаемые, дающие основной вклад.

$$\begin{aligned}
(\epsilon - E_{n_0})C_{n_0}^0 &= \frac{V_{n_0n_1}}{2}C_{n_1}^1 + \sum_n \frac{V_{n_0n}}{2}C_n^{-1} + \sum_{n \neq n_1} \frac{V_{n_0n}}{2}C_n^1, \\
(\epsilon - E_{n_1} + \hbar\omega)C_{n_1}^1 &= \frac{V_{n_0n_1}}{2}C_{n_0}^0 + \sum_n \frac{V_{n_1n}}{2}C_n^2 + \sum_{n \neq n_0} \frac{V_{n_1n}}{2}C_n^0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Воспользуемся соотношением (3.12) для коэффициентов C_n и подставим их в уравнения:

$$\begin{aligned}
(\epsilon - E_{n_0})C_{n_0}^0 &= \frac{V_{n_0n_1}}{2}C_{n_1}^1 + \sum_n \sum_l \frac{V_{n_0n}V_{nl}}{4} \frac{1}{-\hbar\omega + \epsilon - E_n} (C_l^0 + C_l^{-2}) + \\
&\quad + \sum_{n \neq n_1} \sum_l \frac{V_{n_0n}V_{nl}}{4} \frac{1}{\hbar\omega + \epsilon - E_n} (C_l^0 + C_l^2), \\
(\epsilon - E_{n_1} + \hbar\omega)C_{n_1}^1 &= \frac{V_{n_0n_1}}{2}C_{n_0}^0 + \sum_n \sum_l \frac{V_{n_1n}V_{nl}}{4} \frac{1}{2\hbar\omega + \epsilon - E_n} (C_l^3 + C_l^1) + \\
&\quad + \sum_{n \neq n_0} \sum_l \frac{V_{n_1n}V_{nl}}{4} \frac{1}{\epsilon - E_n} (C_l^{-1} + C_l^1).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Оставив в уравнениях (3.29) справа коэффициенты $C_{n_0}^0$, $C_{n_1}^1$, с точностью до V^2 получим:

$$\begin{aligned}
(\epsilon - E_{n_0})C_{n_0}^0 &= \frac{V_{n_0n_1}}{2}C_{n_1}^1 + \sum_n \frac{V_{n_0n}V_{nn_0}}{4} \frac{1}{-\hbar\omega + \epsilon - E_n} C_{n_0}^0 + \\
&\quad + \sum_{n \neq n_1} \frac{V_{n_0n}V_{nn_0}}{4} \frac{1}{\hbar\omega + \epsilon - E_n} C_{n_0}^0, \\
(\epsilon - E_{n_1} + \hbar\omega)C_{n_1}^1 &= \frac{V_{n_0n_1}}{2}C_{n_0}^0 + \sum_n \frac{V_{n_1n}V_{nn_1}}{4} \frac{1}{2\hbar\omega + \epsilon - E_n} C_{n_1}^1 + \\
&\quad + \sum_{n \neq n_0} \frac{V_{n_1n}V_{nn_1}}{4} \frac{1}{\epsilon - E_n} C_{n_1}^1.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Положим в поправках к энергии (в правой части уравнений (3.30)) в нулевом приближении $\epsilon = E_{n_0}$ и $\hbar\omega = E_{n_1} - E_{n_0}$, тогда уравнения (3.30) примут

ВИД:

$$\begin{aligned}(\epsilon - \tilde{E}_{n_0})C_{n_0}^0 &= \frac{V_{n_0 n_1}}{2}C_{n_1}^1, \\(\epsilon - \tilde{E}_{n_1} + \hbar\omega)C_{n_1}^1 &= \frac{V_{n_0 n_1}}{2}C_{n_0}^0,\end{aligned}\tag{3.31}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{n_0} &= E_{n_0} + \sum_{n=1} \frac{V_{n_0 n} V_{n n_0}}{4} \frac{1}{2E_{n_0} - E_{n_1} - E_n} + \sum_{n \neq n_1} \frac{V_{n_0 n} V_{n n_0}}{4} \frac{1}{E_{n_1} - E_n}, \\ \tilde{E}_{n_1} &= E_{n_1} + \sum_{n=1} \frac{V_{n_1 n} V_{n n_1}}{4} \frac{1}{2E_{n_1} - E_{n_0} - E_n} + \sum_{n \neq n_0} \frac{V_{n_1 n} V_{n n_1}}{4} \frac{1}{E_{n_0} - E_n}.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Можно заметить, что полученная система уравнений ничем не отличается от системы (3.14) с точностью до замены $E_{n_0} \rightarrow \tilde{E}_{n_0}$, $E_{n_1} \rightarrow \tilde{E}_{n_1}$.

Новая вероятность перехода между состояниями n_0 и n_1 будет соответственно иметь вид:

$$P_{n_0 n_1} = \frac{V_{n_0 n_1}^2}{(\tilde{E}_{n_1} - \tilde{E}_{n_0} - \hbar\omega)^2 + V_{n_0 n_1}^2} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{(\tilde{E}_{n_1} - \tilde{E}_{n_0} - \hbar\omega)^2 + V_{n_0 n_1}^2} t}{2\hbar} \right).\tag{3.33}$$

Частота перехода, обеспечивающая максимум вероятности перехода между гравитационными состояниями в момент времени $t_f = 0.1s$ при величине градиента магнитного поля $\beta = \frac{\pi\hbar}{t_f \mu_B z_{n_0 n_1}}$, равняется:

$$\omega_{res} = \frac{\tilde{E}_{n_1} - \tilde{E}_{n_0}}{\hbar} = \omega_{n_0 n_1} + \Delta\omega,\tag{3.34}$$

где величина сдвига резонанса:

$$\begin{aligned}\hbar\Delta\omega &= \sum_{n \neq n_0} \frac{V_{n_1 n} V_{n n_1}}{4} \frac{1}{E_{n_0} - E_n} + \sum_{n=1} \frac{V_{n_1 n} V_{n n_1}}{4} \frac{1}{2E_{n_1} - E_{n_0} - E_n} - \\ &- \sum_{n=1} \frac{V_{n_0 n} V_{n n_0}}{4} \frac{1}{2E_{n_0} - E_{n_1} - E_n} - \sum_{n \neq n_1} \frac{V_{n_0 n} V_{n n_0}}{4} \frac{1}{E_{n_1} - E_n}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

Результаты программы, точно решающей систему дифференциальных уравнений (2.12) и ищущей максимум вероятности перехода $P_{n_0 n_1}$ в момент времени $t_f = 0.1$ с как функции частоты магнитного поля, сравниваются с полученной аналитической оценкой для сдвига резонанса (3.35) с учетом n_{levels} уровней в системе в Таблице 3.3.

Таблица 3.3

Аналитические значения сдвигов резонансной частоты $\Delta\omega$ и численные значения сдвигов резонансной частоты для переходов между гравитационными состояниями n_0 и n_1 под действием магнитного поля.

Переход $n_0 \rightarrow n_1$	Аналитический расчет		Численный расчет	
	n_{levels}	$\Delta\omega$, Гц	n_{levels}	$\Delta\omega$, Гц
1 \rightarrow 2	40	0.289	11	0.239 ± 0.006
1 \rightarrow 3	40	-0.031	15	-0.038 ± 0.006
1 \rightarrow 4	40	0.162	16	0.168 ± 0.006
1 \rightarrow 5	40	-0.295	18	-0.298 ± 0.006
1 \rightarrow 6	40	-0.019	22	-0.025 ± 0.006

Аналогичные результаты для возбуждения переходов при помощи вибрации поверхности приведены в Таблице 3.4.

Таблица 3.4

Аналитические значения сдвигов резонансной частоты $\Delta\omega$ и численные значения сдвигов резонансной частоты для переходов между гравитационными состояниями n_0 и n_1 под действием вибрации поверхности.

Переход $n_0 \rightarrow n_1$	Аналитический расчет		Численный расчет	
	n_{levels}	$\Delta\omega$, Гц	n_{levels}	$\Delta\omega$, Гц
1 \rightarrow 2	40	0.191	11	0.143 ± 0.008
1 \rightarrow 3	40	-0.085	15	-0.089 ± 0.008
1 \rightarrow 4	40	0.124	16	0.130 ± 0.008
1 \rightarrow 5	40	-0.324	18	-0.306 ± 0.008
1 \rightarrow 6	40	-0.042	22	-0.037 ± 0.008

В пределах погрешности результаты для сдвигов резонансной частоты очень близки.

В аналитическом выражении для сдвига резонансной частоты (3.35) удобно ограничить бесконечные суммы конечным числом слагаемых и оце-

нить вклад оставшихся малых слагаемых. Предлагается оценка вклада высоковозбужденных гравитационных уровней в аналитическом выражении для сдвига резонанса (3.35).

Матричные элементы и энергии, входящие в формулу (3.35) имеют явный вид (Приложение Б):

$$\begin{aligned} E_l &= \epsilon_g \lambda_l, \\ V_{lk} &= \mu_B \beta z_{lk}, \\ z_{lk} &= \frac{2l_g (-1)^{k+l+1}}{(\lambda_k - \lambda_l)^2}, \\ z_{ll} &= \frac{2}{3} l_g \lambda_l. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Градиент магнитного поля β должен обеспечивать максимальную вероятность перехода в момент времени t_f из гравитационного состояния $n_0 \rightarrow n_1$. Градиент магнитного поля в соответствии с формулой Раби определяется соотношением (2.20).

Матричные элементы потенциала с учетом выражения для градиента магнитного поля примут вид:

$$\begin{aligned} V_{n_1 n}^2 &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{t_f^2} \frac{z_{n_1 n}^2}{z_{n_0 n_1}^2}, \\ V_{n_0 n}^2 &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{t_f^2} \frac{z_{n_0 n}^2}{z_{n_0 n_1}^2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

После подстановки этих величин в выражения для сдвига (3.35), получим:

$$\begin{aligned} \hbar \Delta \omega &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{4t_f^2 \epsilon_g} \left\{ \frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})} + \right. \\ &+ \sum_{n \neq n_0, n_1} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^4 \left(\frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_n)^4 (\lambda_{n_0} - \lambda_n)} - \frac{1}{(\lambda_{n_0} - \lambda_n)^4 (\lambda_{n_1} - \lambda_n)} \right) + \\ &+ \sum_{n \neq n_0, n_1} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^4 \left(\frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_n)^4 (2\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0} - \lambda_n)} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{(\lambda_{n_0} - \lambda_n)^4 (2\lambda_{n_0} - \lambda_{n_1} - \lambda_n)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

В квазиклассическом приближении нули функции Эйри можно найти по формуле:

$$\lambda_n = \left(\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(n - \frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.39)$$

При достаточно больших n величина λ_n превышает λ_{n_0} и λ_{n_1} в формуле (3.38) и можно выделить область достаточно больших n в суммах:

$$\begin{aligned} \hbar\Delta\omega = & \frac{\pi^2\hbar^2}{4t_f^2\epsilon_g} \left\{ \frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})} + \right. \\ & + \sum_{n \neq n_0, n_1}^{n_k} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^4 \left(\frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_n)^4(\lambda_{n_0} - \lambda_n)} - \frac{1}{(\lambda_{n_0} - \lambda_n)^4(\lambda_{n_1} - \lambda_n)} \right) + \\ & + \sum_{n \neq n_0, n_1}^{n_k} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^4 \left(\frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_n)^4(2\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0} - \lambda_n)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{(\lambda_{n_0} - \lambda_n)^4(2\lambda_{n_0} - \lambda_{n_1} - \lambda_n)} \right) - \\ & - \sum_{n=n_k}^{\infty} \frac{(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^4}{\lambda_n^5} \left(\frac{1}{(1 - \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_n})^4(1 - \frac{\lambda_{n_0}}{\lambda_n})} - \frac{1}{(1 - \frac{\lambda_{n_0}}{\lambda_n})^4(1 - \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_n})} \right) - \\ & \left. - \sum_{n=n_k}^{\infty} \frac{(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^4}{\lambda_n^5} \left(\frac{1}{(1 - \frac{\lambda_{n_1}}{\lambda_n})^4(1 - \frac{2\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0}}{\lambda_n})} - \frac{1}{(1 - \frac{\lambda_{n_0}}{\lambda_n})^4(1 - \frac{2\lambda_{n_0} - \lambda_{n_1}}{\lambda_n})} \right) \right\}. \quad (3.40) \end{aligned}$$

В последней сумме в выражении (3.40) при больших n сделаем разложение по степеням $\frac{1}{\lambda_n}$:

$$\begin{aligned} \hbar\Delta\omega = & \frac{\pi^2\hbar^2}{4t_f^2\epsilon_g} \left\{ \frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})} + \right. \\ & + \sum_{n \neq n_0, n_1}^{n_k} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^4 \left(\frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_n)^4(\lambda_{n_0} - \lambda_n)} - \frac{1}{(\lambda_{n_0} - \lambda_n)^4(\lambda_{n_1} - \lambda_n)} \right) + \\ & + \sum_{n \neq n_0, n_1}^{n_k} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^4 \left(\frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_n)^4(2\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0} - \lambda_n)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{(\lambda_{n_0} - \lambda_n)^4(2\lambda_{n_0} - \lambda_{n_1} - \lambda_n)} \right) - \\ & \left. - \sum_{n=n_k}^{\infty} \frac{10(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^5}{\lambda_n^6} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^7}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Последнюю сумму в выражении (3.41) заменим на интеграл:

$$\int_{n_k}^{\infty} \frac{dn}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^4 \left(n - \frac{1}{4}\right)^4} = \frac{1}{3 \left(\frac{3\pi}{2}\right)^4 \left(n_k - \frac{1}{4}\right)^3}. \quad (3.42)$$

Окончательное выражение для сдвига резонанса с конечным числом слагаемых в суммах и с оценкой вклада высоковозбужденных состояний примет вид:

$$\begin{aligned} \hbar\Delta\omega = & \frac{\pi^2\hbar^2}{4t_f^2\epsilon_g} \left\{ \frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})} + \right. \\ & + \sum_{n \neq n_0, n_1}^{n_k} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^4 \left(\frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_n)^4(\lambda_{n_0} - \lambda_n)} - \frac{1}{(\lambda_{n_0} - \lambda_n)^4(\lambda_{n_1} - \lambda_n)} \right) + \\ & + \sum_{n \neq n_0, n_1}^{n_k} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^4 \left(\frac{1}{(\lambda_{n_1} - \lambda_n)^4(2\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0} - \lambda_n)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{(\lambda_{n_0} - \lambda_n)^4(2\lambda_{n_0} - \lambda_{n_1} - \lambda_n)} \right) - \\ & \left. - \frac{10(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})^5}{3 \left(\frac{3\pi}{2}\right)^4 \left(n_k - \frac{1}{4}\right)^3} + O\left(\frac{1}{\lambda_n^7}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.2 Оценка вклада сдвига резонансной частоты за счет динамического эффекта Штарка в точность определения гравитационной массы

Получив резонансную частоту перехода ω_{res} экспериментально и учтя вклад динамического эффекта Штарка $\omega_{n_0n_1} = \omega_{res} - \Delta\omega$, можно найти гравитационную массу антиводорода M (2.34).

Проведем оценку влияния сдвига резонансной частоты за счет динамического эффекта Штарка на точность измерения гравитационной массы в эксперименте.

Так как гравитационная масса определяется по формуле (2.34), то относительная погрешность определения гравитационной массы δM связана с относительной погрешностью определения частоты перехода $\delta\omega_{n_0n_1}$ в эксперименте соотношением:

$$\delta M_{n_0n_1} = 3\delta\omega_{n_0n_1}. \quad (3.44)$$

Относительная погрешность частоты перехода за счет динамического эффекта Штарка составляет для переходов $1 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 6$, например:

$$\begin{aligned} \delta\omega_{12} &\sim 10^{-3}, \\ \delta\omega_{16} &\sim 2 \cdot 10^{-5}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

что приводит к появлению у гравитационной массы погрешности:

$$\begin{aligned} \delta M_{12} &\sim 3 \cdot 10^{-3}, \\ \delta M_{16} &\sim 6 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Рассмотрение перехода $1 \rightarrow 6$ в эксперименте является более предпочтительным, так как погрешность в определении гравитационной массы для перехода $1 \rightarrow 2$ сравнима с ожидаемой погрешностью эксперимента. Вклад динамического эффекта Штарка в точность определения гравитационной массы наиболее существенен по сравнению со всеми эффектами,

исследованными в работе, и данный эффект необходимо внимательно учитывать при постановке эксперимента.

Глава 4. Рассеяние антиводорода на проводящей поверхности и выбор оптимальной поверхности

Подробно рассматривается явление квантового отражения, которое препятствует аннигиляции ультрахолодных атомов антиводорода на материальной поверхности и позволяет хранить атомы антиводорода в гравитационных состояниях в течение конечных времен. Квантовое отражение возникает, когда квантовая волна попадает в область, где потенциал притяжения резко и быстро меняется. Квантовое отражение играет ключевую роль в экспериментах с антиатомами. Было показано, что гравитационная масса и ускорение свободного падения для антиводорода могут быть получены с хорошей точностью с помощью спектроскопии квантовых гравитационных состояний. Точность таких спектроскопических измерений существенно повышается для больших времен жизни гравитационных состояний антиводорода.

4.1 Заряды на поверхности. Разрушение гравитационных квантовых состояний под действием остаточных электрических полей от электрических зарядов, случайно распределенных по поверхности

Исследуется важнейший механизм «разрушения» гравитационных квантовых состояний антиводорода под действием остаточных электрических полей от электрических зарядов, случайно распределенных по поверхности зеркала. Рассматривается «разрушение» квантовых состояний как за счет индуцированной аннигиляции, так и за счет индуцированных переходов в возбужденные состояния. Учет данного механизма необходим для планируемых прецизионных экспериментов по определению гравитационной массы антиводорода, так как взаимодействие антиатома с зарядами на поверхности уменьшает вероятность квантового отражения от поверхности

и соответственно подавляет переходы в возбужденные гравитационные состояния. Оценка механизма принципиальна для возможности наблюдения гравитационных состояний.

Для экспериментов с ультрахолодными антиатомами учет электрических полей вблизи материальных поверхностей имеет большое значение. Существует несколько известных источников электрических полей вблизи поверхности. Так называемые патч-поля возникают вблизи поликристаллических металлических поверхностей [62–65]. Интенсивность патч-поля вблизи поверхности золота была измерена экспериментально [66; 67] и его влияние на атом антиводорода в основном гравитационном состоянии во много раз уступает взаимодействию Казимира-Полдера.

Другой источник электрических зарядов появляется за счет аннигиляции атомов антиводорода на поверхности зеркала. Избытка энергии, выделяющейся при аннигиляции, может оказаться достаточно для ионизации окружающих атомов. Т.о. данный механизм является возможным источником зарядов, локализованных на поверхности. Такие остаточные заряды могут изменить среднюю интенсивность взаимодействия между антиатомом и поверхностью и «разрушить» гравитационное состояние.

Будем рассматривать заряды, локализованные на поверхности зеркала в области с характерным размером l_c во много раз меньшим, чем длина рассеяния на потенциале Казимира-Полдера a_{CP} [12; 34; 56]. Т.о. на расстояниях порядка a_{CP} от поверхности (там, где формируется отраженная волна) поле от зарядов можно рассматривать как поле точечного заряда Q . Взаимодействие с точечным зарядом описывается потенциалом вида:

$$V_{pol}(z, \rho) = -\frac{\alpha_p Q^2}{2(z^2 + \rho^2)^2}, \quad (4.1)$$

где z — высота антиатома над поверхностью, ρ — расстояние от антиатома до заряда Q в плоскости поверхности, α_p — поляризуемость атома антиводорода.

Уравнение Шредингера, описывающее движение антиводорода в гравитационном поле Земли над зеркалом с зарядами на нем имеет вид:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + Mgz + V_{CP}(z) + V_{pol}(z,\rho) - E \right) \Phi(z,\vec{\rho}) = 0. \quad (4.2)$$

Граничным условием для данного уравнения является условие полного поглощения на поверхности ($z = 0$), которое представляет из себя условие отсутствия волны, отраженной от поверхности [12]:

$$\Phi(z \rightarrow 0, \vec{\rho}) = \frac{1}{\sqrt{p(z,\rho)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int p(z',\rho) dz'\right) \chi(\vec{\rho}), \quad (4.3)$$

где $p(z,\rho) = \sqrt{2m(E - V_{CP}(z) - V_{pol}(z,\rho) - Mgz)}$ — импульс антиатома, $\chi(\vec{\rho})$ — волновая функция, описывающая движение антиатома в плоскости, параллельной поверхности.

Данное граничное условие обусловлено тем фактом, что квазиклассическое приближение выполняется с большой точностью при стремлении z к нулю. Граничное условие обеспечивает независимость рассеяния от деталей взаимодействия на тех расстояниях, где выполняется квазиклассическое приближение.

Амплитуда рассеяния определяется теми частями потенциала, где нарушается квазиклассическое приближение [52;68] и где формируется отраженная волна [12;56]. Для потенциала Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера это расстояние составляет порядка $l_{CP} = \sqrt{2mC_4}/\hbar$, где C_4 это константа, связанная с асимптотическим поведением потенциала $V_{CP}(z) = -C_4/z^4$ при больших z .

Появление потенциала $V_{pol}(z)$ не только изменяет особенности взаимодействия антиводорода с поверхностью в той области, которая определяет квантовое отражение, но также «связывает» поперечное и продольное движения антиатома.

Интерес представляет исследование времени жизни и заселенности гравитационных состояний при движении антиводорода над зеркалом. Т.к. характерный масштаб действия потенциала Казимира-Полдера $l_{CP} = 0.003$ мкм [34] во много раз меньше, чем характерная длина волны антиво-

дородо в гравитационном поле $l_g = 5.87$ мкм, а также мы рассматриваем такие величины зарядов на поверхности ($Q \ll 10^4 e$), что характерная длина рассеяния на потенциале взаимодействия с зарядом $V_{pol}(z,0)$ во много раз меньше, чем характерная длина волны антиводорода в гравитационном поле $l_{pol} = \sqrt{m\alpha_p Q^2}/\hbar \ll l_g$, то сдвиг гравитационных уровней и их ширина за счет взаимодействия с поверхностью с зарядами могут быть описаны при помощи новой комплексной длины рассеяния на составном потенциале $a(\rho)$ [34], вычисляемой при фиксированном значении параметра ρ .

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + Mgz - E \right] \Phi(z, \vec{\rho}) = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dz} \ln(\Phi(z \rightarrow 0, \vec{\rho})) = -\frac{1}{a(\rho)}. \quad (4.5)$$

Комплексная длина рассеяния $a(\rho)$ может быть получена из асимптотического вида решения уравнения Шредингера при нулевой энергии:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V_{CP}(z) + V_{pol}(z, \rho) \right) \phi(z, \vec{\rho}) = 0 \quad (4.6)$$

с граничным условием (4.3). Упомянутая выше асимптотика такого решения имеет вид:

$$\phi(z \rightarrow \infty, \rho) = z - a(\rho). \quad (4.7)$$

Т.о. с помощью граничного условия, зависящего от ρ , можно учесть влияние потенциала Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера и поляризационного потенциала на поведение антиатома.

Для решения полученных уравнений возможно использовать приближение, основанное на классическом рассмотрении движения антиатома в плоскости, параллельной поверхности.

Движение атома антиводорода в плоскости, параллельной поверхности, можно рассматривать как классическое движение вдоль прямой траектории:

$$\vec{\rho}(t) = \vec{\rho}_0 + \vec{v}t, \quad (4.8)$$

где $\vec{\rho}_0$ задает начальное положение антиатома в плоскости, параллельной поверхности.

При этом уравнение Шредингера (4.4) будет заменено зависящим от времени уравнением Шредингера:

$$i\hbar \frac{d\Phi(z,t)}{dt} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + Mgz \right] \Phi(z,t), \quad (4.9)$$

$$\Phi(z \rightarrow 0, t) = z - a(t). \quad (4.10)$$

Зависимость комплексной длины рассеяния от времени задается через зависимость от времени расстояния между зарядом и антиатомом $\rho_i(t)$ в плоскости, параллельной поверхности.

$$\rho_i(t) = |\vec{\rho}_i^c - \vec{\rho}_0 - \vec{v}t|, \quad (4.11)$$

где $\vec{\rho}_i^c$ описывает положение i -го заряда на плоскости.

Уравнение (4.9) может быть преобразовано к новому виду, более удобному для рассмотрения по теории возмущений. Соответствующие преобразования координаты и волновой функции:

$$z'(t) = z - a(t), \quad (4.12)$$

$$\Phi(z,t) = \Psi(z',t) \exp \left(-i \frac{Mg}{\hbar} \int a(t) dt \right). \quad (4.13)$$

После замены координат уравнения (4.9), (4.10) преобразуются к виду:

$$i\hbar \frac{d\Psi(z',t)}{dt} = i \frac{da(t)}{dt} \frac{d\Psi(z',t)}{dz'} + \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz'^2} + Mgz' \right] \Psi(z',t), \quad (4.14)$$

$$\Psi(z' \rightarrow 0, t) = 0. \quad (4.15)$$

Разложение зависящей от времени волновой функции по базису гравитационных состояний и использование явного вида матричных элементов оператора импульса дает систему уравнений для зависящих от времени амплитуд в разложении по гравитационным состояниям $C(t)$:

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{1}{l_g} \frac{da(t)}{dt} \sum_k \frac{1}{\lambda_i - \lambda_k} \exp(-i\omega_{ki}t) C_k(t), \quad (4.16)$$

где $\omega_{ki} = \omega_k - \omega_i$ — частота перехода между гравитационными уровнями.

Характерное время пролета антиатома вблизи заряда определяется:

$$\tau = \frac{\sqrt{m\alpha_p Q^2}}{v\hbar} \quad (4.17)$$

и предполагается, что оно мало по сравнению с характерным гравитационным временем:

$$\tau_g = \frac{\hbar}{\epsilon_g} = 0.001\text{с}. \quad (4.18)$$

(Можно отметить, что время пролета вблизи заряда составляет порядка микросекунды даже для зарядов $Q = 10^4 e$).

Решение уравнения (4.16) для амплитуды перехода, полученное по теории возмущений, с начальным условием $C_k(0) = \delta_{1k}$ для одного заряда на поверхности:

$$C_k(\infty) = -\frac{iMg}{\hbar} \left(\int_{-\tau/2}^{\tau/2} a(t) \exp(-i\omega_{1k}t) dt - 2a_{CP} \frac{\sin(\omega_{1k}\tau/2)}{\omega_{1k}} \right) \times \\ \times \exp(-i\omega_{1k}t_0), \quad (4.19)$$

где t_0 — момент времени, в который антиатом приближается к заряду на поверхности на минимальное расстояние в плоскости.

В пределе $\omega_{1k}\tau \ll 1$ выражение упрощается:

$$C_k(\infty) = -\frac{iMg}{\hbar} \left(\int_{-\tau/2}^{\tau/2} a(t) dt - a_{CP}\tau \right) \exp(-i\omega_{1k}t_0). \quad (4.20)$$

В случае множества зарядов, распределенных по поверхности и разделенных большими расстояниями по сравнению с $\sqrt{2m\alpha_p Q^2}/\hbar$, выражение приобретает вид:

$$C_k(\infty) = -\frac{iMg}{\hbar} \left(\int_{-\tau/2}^{\tau/2} a(t) dt - a_{CP}\tau \right) \sum_n \exp(-i\omega_{1k}t_n), \quad (4.21)$$

где t_n — это момент времени, когда антиатом приближается на минимальное расстояние к n -му заряду.

В рамках теории возмущений соответствующая вероятность перехода приобретает вид:

$$P = \exp\left(-2\frac{Mg}{\hbar} \int |\text{Im}a(t)|dt\right) \times \left| \frac{Mg}{\hbar} \left(\int_{-\tau/2}^{\tau/2} a(t) \exp(-i\omega_{1k}t)dt - 2a_{CP} \frac{\sin(\omega_{1k}\tau/2)}{\omega_{1k}} \right) \sum_n \exp(-i\omega_{1k}t_n) \right|^2. \quad (4.22)$$

Вероятность перехода в нижние возбужденные гравитационные состояния в рассмотренном приближении одинакова для всех этих состояний и составляет:

$$P = \left| \frac{Mg}{\hbar} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (a(t) - a_{CP})dt \right) \sum_n \exp(-i\omega_{1k}t_n) \right|^2 \times \exp\left(-2\frac{Mg}{\hbar} \int |\text{Im}a(t)|dt\right). \quad (4.23)$$

Выше был проведен формальный переход к бесконечным пределам интегрирования, так как $a(t) \rightarrow \infty$ при $|t| \gg \tau$.

Интерес представляет вероятность перехода во все возбужденные состояния, которую можно получить из (4.22), просуммировав по всем состояниям. Заменяя суммирование интегрированием по частоте перехода и используя четность $a(t)$ как функции t , получается окончательное выражение:

$$P = \frac{M^2 g^2 N \tau_g^{3/2}}{\pi \hbar^2} \int_0^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (a(t) - a_{CP}) \exp(-i\omega t) dt \right|^2 \times \sqrt{\omega} d\omega \exp\left(-2\frac{Mg}{\hbar} \int |\text{Im}a(t)|dt\right), \quad (4.24)$$

где N — число рассеивающих центров вдоль траектории антиатома (во внимание принята случайность распределения таких центров), множитель τ_g появился при замене суммирования по гравитационным состояниям на интегрирование по частоте перехода $dn \rightarrow \sqrt{\omega} d\omega \tau_g^{3/2} / \pi$.

Можно отметить, что зависимость длины рассеяния от времени проявляется через зависимость от времени расстояния между антиатомом и рассеивающим центром (4.11). Вводя понятие минимального расстояния d между рассеивающим центром и прямолинейной траекторией антиатома, можно получить для вероятности перехода для одного рассеивающего центра:

$$P(d) \sim \frac{M^2 g^2 \tau_g^{3/2}}{\pi \sqrt{v} \hbar^2} \int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty (a(d^2 + x^2) - a_{CP}) \exp(-ikx) dx \right|^2 \sqrt{k} dk. \quad (4.25)$$

В выражении выше полагали $\exp(-2\frac{Mg}{\hbar} \int |\text{Im}a(t)| dt) \sim 1$, оставляя только выражения первого порядка в вероятности перехода.

Для наглядности имеет смысл введение понятия эффективного радиуса перехода (аналога сечения рассеяния в трехмерном случае):

$$d_{tr} = \int_{-\infty}^\infty P(\rho) d\rho, \quad (4.26)$$

где $P(\rho)$ определяется выражением (4.25).

Используя определение эффективного радиуса перехода, можно переписать выражение для вероятности перехода (4.24):

$$P_t \sim d_{tr} L \sigma, \quad (4.27)$$

где σ — поверхностная плотность зарядов, L — характерный размер зеркала. Соответствующая эффективная ширина Γ_t , которая появляется у основного гравитационного состояния за счет индуцированных переходов в возбужденные состояния, задается выражением:

$$\Gamma_t = \hbar d_{tr} \sigma v. \quad (4.28)$$

С учетом соотношения (4.25) можно получить для Γ_t :

$$\Gamma_t = \sigma \frac{2M^2 g^2 \sqrt{v} \tau_g^{3/2}}{\pi \hbar} \int_0^\infty \int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty (a(\rho^2 + x^2) - a_{CP}) \exp(-ikx) dx \right|^2 \times \sqrt{k} dk d\rho. \quad (4.29)$$

Гравитационное состояние является квазистационарным и без учета зарядов на поверхности, т.к. длина рассеяния на проводящей идеальной поверхности a_{CP} имеет мнимую часть, которая приводит к появлению у состояния ширины. Пролетая область вблизи каждого заряда на поверхности, антиатом приобретает дополнительную ширину состояния. Вероятность распада каждого гравитационного состояния в рамках рассматриваемого приближения:

$$P_{in}(d) = 1 - \exp\left(\frac{2Mg}{\hbar v} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty (a(d^2 + x^2) - a_{CP}) dx\right). \quad (4.30)$$

Принимая во внимание малость такой вероятности, можно записать:

$$P_{in}(d) \sim \frac{2Mg}{\hbar v} \left| \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty (a(d^2 + x^2) - a_{CP}) dx \right|. \quad (4.31)$$

Вводя эффективный радиус индуцированной аннигиляции:

$$d_{in} = \int_{-\infty}^\infty P_{in}(\rho) d\rho, \quad (4.32)$$

можно получить выражение для полной вероятности распада гравитационного состояния за время пролета антиатома над зеркалом:

$$R = 1 - \exp\left(-d_{in} L \sigma - 2Mg \left| \operatorname{Im} a_{CP} \right| \frac{L}{\hbar v}\right). \quad (4.33)$$

Полная эффективная ширина распада гравитационного состояния антиатома задается выражением:

$$\Gamma_{in} = \hbar d_{in} \sigma v + 2Mg \left| \operatorname{Im} a_{CP} \right|. \quad (4.34)$$

Представив ширину Γ_{in} в виде суммы $\Gamma_{in} = \Gamma_d + \Gamma_{CP}$ и учитывая выражение (4.31):

$$\Gamma_d = 4Mg\pi\sigma \left| \text{Im} \int_0^\infty (a(\rho^2) - a_{CP})\rho d\rho \right|, \quad (4.35)$$

$$\Gamma_{CP} = 2Mg|\text{Im}a_{CP}|. \quad (4.36)$$

Из вышеизложенного следует, что существуют два основных механизма разрушения гравитационных состояний. Для антиатома в основном гравитационном состоянии это индуцированные переходы в возбужденные состояния и индуцированная аннигиляция за счет взаимодействия антиатома с зарядами на поверхности. Эти два механизма имеют разный порядок величины. Из (4.26) и (4.32) следует, что отношение этих величин:

$$\frac{d_{tr}}{d_{in}} = \frac{\sqrt{v\tau_g} \int_0^\infty \int_0^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty (a(\rho^2 + x^2) - a_{CP}) \exp(-ikx) dx \right|^2 \sqrt{k} dk d\rho}{2\pi^2 l_g |\text{Im} \int_0^\infty (a(\rho^2) - a_{CP})\rho d\rho|}. \quad (4.37)$$

Динамика разрушения гравитационных состояний определяется зависящей от времени длиной рассеяния на потенциалах Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера и поляризационном. Интерес представляет численное вычисление $a(t)$.

Комплексную длину рассеяния можно получить, численно решая уравнение (4.6) с граничным условием (4.3). Действительная и мнимая часть длины рассеяния $\text{Re} a(\rho)$, $\text{Im} a(\rho)$ как функция расстояния между антиатомом и рассеивающим центром в плоскости, параллельной поверхности ρ , представлены на Рис. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4.

Интересно отметить быстрые осцилляции $\text{Re} a(\rho)$ и резкий максимум у $|\text{Im} a(\rho)|$. Причина таких осцилляций заключается в том, что суперпозиция потенциала Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера и поляризационного потенциала приводит к появлению двух областей надбарьерного отражения. Расстояние между этими областями зависит от ρ при заданном значении Q . Надбарьерное отражение от двух отдельных областей приводит к появлению вблизипорогового надбарьерного резонанса при условии, что

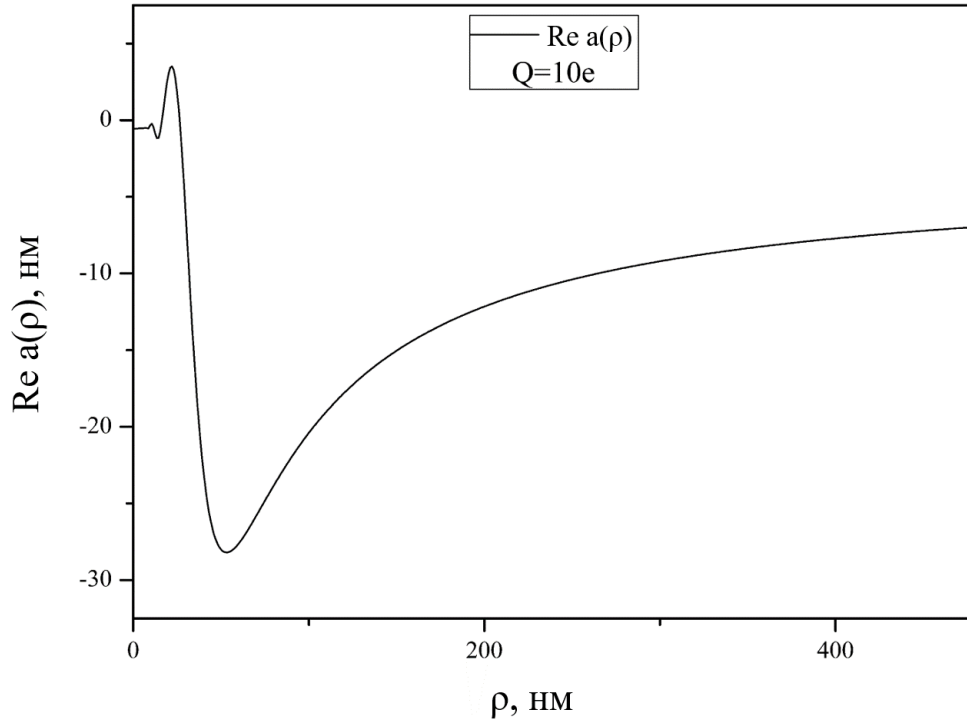


Рисунок 4.1 — Действительная часть длины рассеяния $\text{Re } a(\rho)$ как функция расстояния между антиатомом и зарядом в плоскости, параллельной поверхности. $Q = 10 e$.

расстояние между областями отражения подчиняется условию образования стоячей волны. Появление вблизипорогового резонанса находит отражение в быстром изменении длины рассеяния как функции ρ .

Значения $d_{in}v$ и $d_{tr}v$ как функции заряда Q представлены на Рис.4.5. В частности $d_{in} = 6.06 \cdot 10^{-12}$ м и $d_{tr} = 1.7 \cdot 10^{-12}$ м при $v = 1$ м/с и значении заряда $Q = 30 e$.

Из численных оценок критических плотностей остаточных зарядов на поверхности следует, что эффективная ширина гравитационного состояния антиатома за счет взаимодействия антиатома с идеальной проводящей поверхностью Γ_{CP} становится сравнимой с эффективной шириной состояния, приобретаемой за счет взаимодействия с зарядом Γ_d , при зарядах $Q = 30e$, распределенных с поверхностной плотностью $\sigma_c = 10^{12}$ м⁻². До тех пор, пока $\sigma < \sigma_c$, заряды фактически не будут влиять на время жизни гравитационных состояний. На основании этих оценок можно с уверенностью

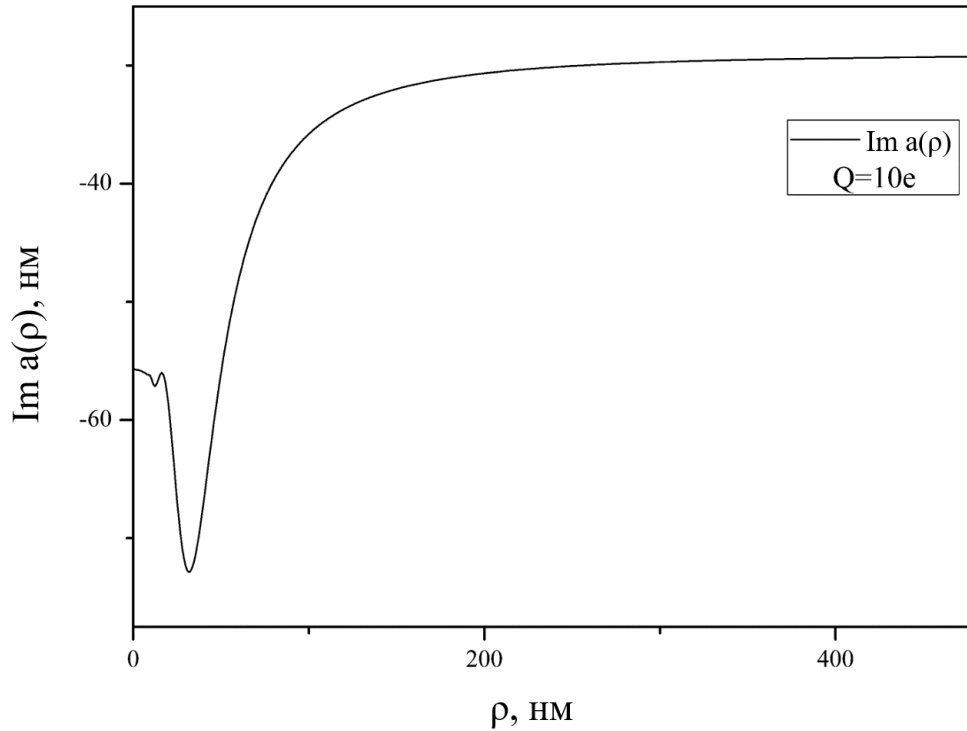


Рисунок 4.2 — Мнимая часть длины рассеяния $\text{Im } a(\rho)$ как функция расстояния между антиатомом и зарядом в плоскости, параллельной поверхности. $Q = 10 e$.

сказать, что «опасные» для эксперимента остаточные заряды на поверхности могут быть легко контролируемы и ложные эффекты будут легко исключены.

4.2 Шероховатости поверхности. Вариации электростатического потенциала поверхности

Наличие шероховатостей у реальной поверхности приводит к появлению вариаций электростатического потенциала проводящей поверхности. Такие вариации электростатического потенциала будут оказывать влияние на положение и ширину гравитационных уровней антиводорода, нахо-

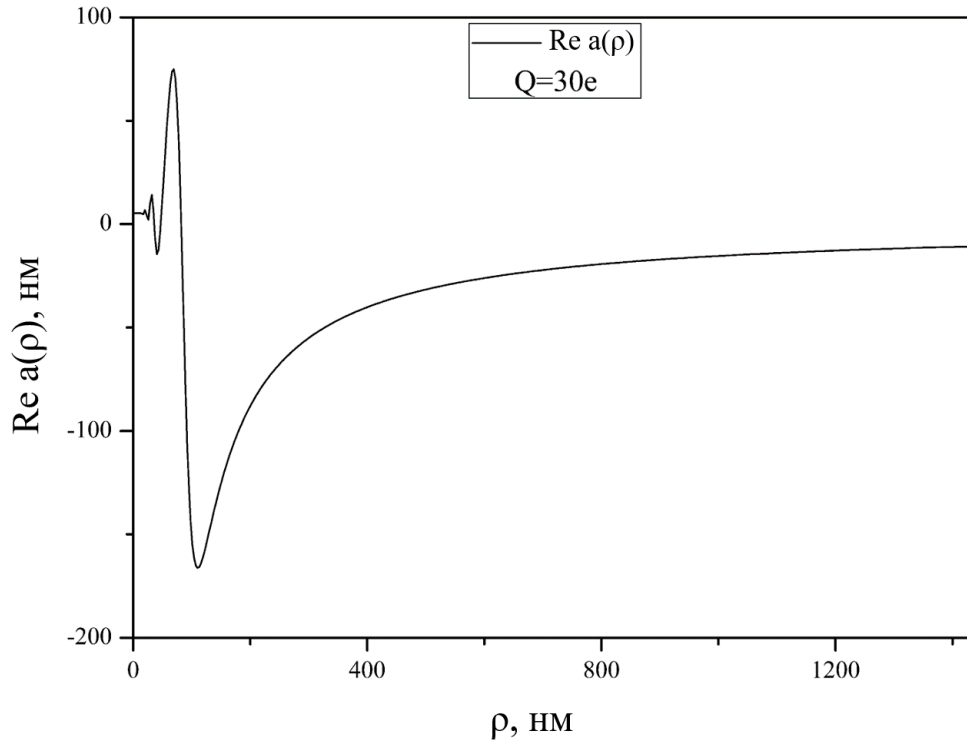


Рисунок 4.3 — Действительная часть длины рассеяния $\text{Re } a(\rho)$ как функция расстояния между антиатомом и зарядом в плоскости, параллельной поверхности. $Q = 30 e$.

дющегося над реальной проводящей поверхностью в гравитационном поле Земли.

С помощью компьютерного моделирования была воссоздана типичная реальная случайная шероховатая поверхность, подобная экспериментальным поверхностям. Для ее воссоздания использовался набор статистических параметров [69]. Рассматривалась область поверхности размером $L \times L$ ($L = 1$ мкм). Электростатический потенциал вычислялся в наборе точек $n \times n$ ($n = 512$), равномерно распределенных по области поверхности. Наиболее распространенным типом функции автоковариации для моделирования распределения потенциала по поверхности является функция Гаусса вида $G(r) = w^2 e^{-r^2/\chi^2}$, где w^2 — это среднееквадратичное значение потенциала, χ — длина корреляции [69]. Для численного моделирования значений потенциала в точках поверхности, наиболее похожей на экспериментальную, использовались параметры $w = 23$ мВ, $\chi = 60$ нм.

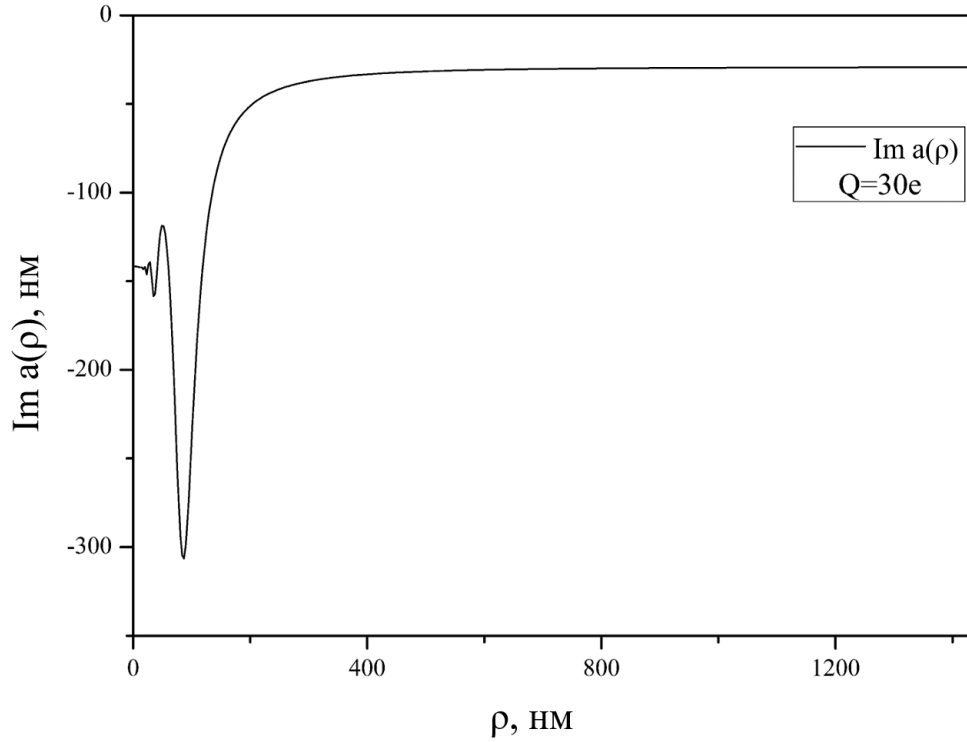


Рисунок 4.4 — Мнимая часть длины рассеяния $\text{Im } a(\rho)$ как функция расстояния между антиатомом и зарядом в плоскости, параллельной поверхности. $Q = 30 e$.

На Рис. 4.6 представлен результат моделирования распределения электростатического потенциала на реальной случайной шероховатой поверхности. Вариации потенциала на поверхности колеблются в пределах $(-80, 80)$ мВ.

Полученное численно модельное распределение электростатического потенциала на поверхности служит граничным условием для уравнения Лапласа для нахождения электростатического потенциала $\phi(x, y, z)$, действующего на атом антиводорода на высоте z над поверхностью [66]:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \frac{d^2 \phi}{dz^2} = 0. \quad (4.38)$$

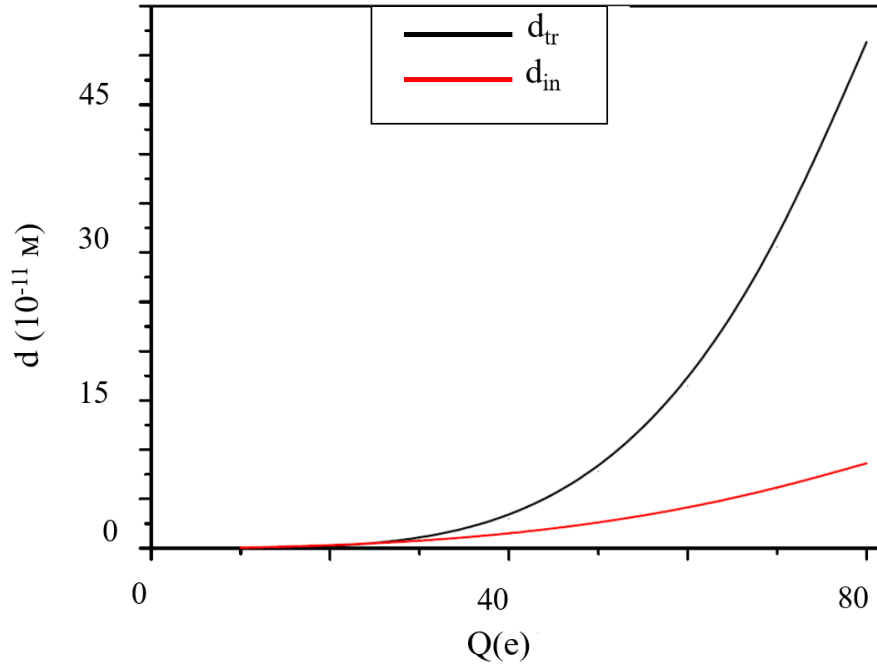


Рисунок 4.5 — Черная линия d_{tr} и красная линия d_{in} как функции величины заряда на поверхности Q . $v = 1$ м/с.

Решение данного уравнения можно искать в виде [66; 70]:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-k_z(i,j)z} (A_{ij} \cos(k_{xi}x + k_{yj}y) + B_{ij} \sin(k_{xi}x + k_{yj}y) + \\ & + C_{ij} \cos(k_{xi}x - k_{yj}y) + D_{ij} \sin(k_{xi}x - k_{yj}y)), \end{aligned} \quad (4.39)$$

где $k_z(i, j) = \sqrt{k_{xi}^2 + k_{yj}^2}$.

Для функции $\phi(x, y, z)$ ставятся периодические граничные условия. Предполагается, что функция $\phi(x, y, z)$ является периодической с периодом $L = 1$ мкм, что связано со сходством между вариациями потенциала поверхности, наблюдаемыми в различных областях вдоль поверхности. Таким образом $\phi(x, y, z)$ может использоваться для воспроизведения распределения потенциала по всей поверхности.

$$\begin{aligned} \phi(0, y, z) &= \phi(L, y, z), \\ \phi(x, 0, z) &= \phi(x, L, z), \end{aligned} \quad (4.40)$$

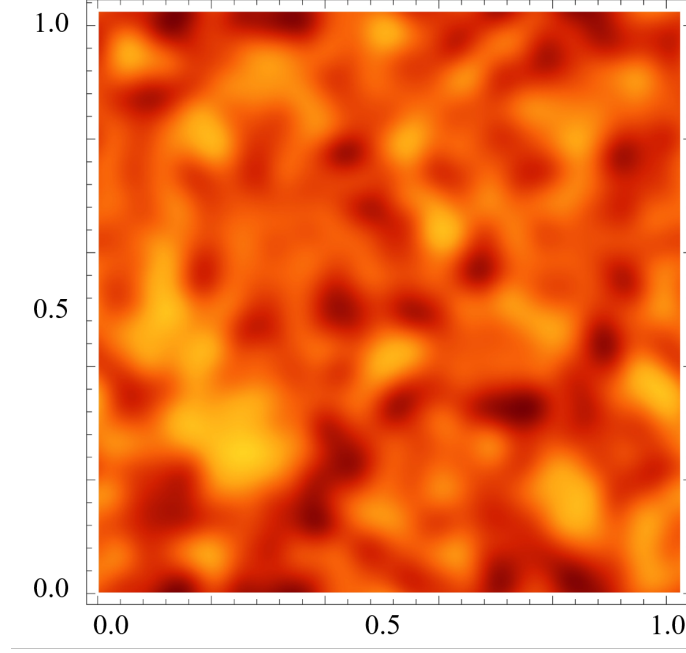


Рисунок 4.6 — Моделирование распределения вариаций электростатического потенциала на области размером 1×1 мкм реальной случайной шероховатой поверхности.

откуда следует $k_{xi} = \frac{2\pi i}{L}$, $k_{yj} = \frac{2\pi j}{L}$.

Коэффициенты A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} находятся из распределения электростатического потенциала на поверхности, показанного на Рис.4.6. Потенциал на поверхности описывается с помощью дискретного ряда Фурье, дающего для коэффициентов [66]:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \frac{2}{n^2} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi \left(\frac{l-1}{n-1}L, \frac{m-1}{n-1}L, 0 \right) \cos \left(k_{xi} \frac{l-1}{n-1}L + k_{yj} \frac{m-1}{n-1}L \right), \\
 B_{ij} &= \frac{2}{n^2} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi \left(\frac{l-1}{n-1}L, \frac{m-1}{n-1}L, 0 \right) \sin \left(k_{xi} \frac{l-1}{n-1}L + k_{yj} \frac{m-1}{n-1}L \right), \\
 C_{ij} &= \frac{2}{n^2} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi \left(\frac{l-1}{n-1}L, \frac{m-1}{n-1}L, 0 \right) \cos \left(k_{xi} \frac{l-1}{n-1}L - k_{yj} \frac{m-1}{n-1}L \right), \\
 D_{ij} &= \frac{2}{n^2} \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \phi \left(\frac{l-1}{n-1}L, \frac{m-1}{n-1}L, 0 \right) \sin \left(k_{xi} \frac{l-1}{n-1}L - k_{yj} \frac{m-1}{n-1}L \right).
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

На практике необходимо ограничить бесконечные суммы в выражении (4.39) для $\phi(x,y,z)$ N слагаемыми. Полагая $N = 20$, что соответствует рассмотрению длин волн в пределах $(L/20, L) = (50 \text{ нм}, 1 \text{ мкм})$, можно получить хорошие результаты.

С помощью найденного электростатического потенциала поверхности $\phi(x,y,z)$ может быть определена потенциальная энергия атома антиводорода над шероховатой поверхностью $V_{sur}(x,y,z)$.

$$V_{sur}(x,y,z) = -\frac{1}{2}\alpha_p (\nabla\phi)^2. \quad (4.42)$$

На Рис. 4.7 приведен график среднего значения потенциальной энергии $\langle V_{sur}(z) \rangle_{xy}$ вдоль поверхности и график потенциала Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера $V_{CP}(z)$, действующих на атом антиводорода.

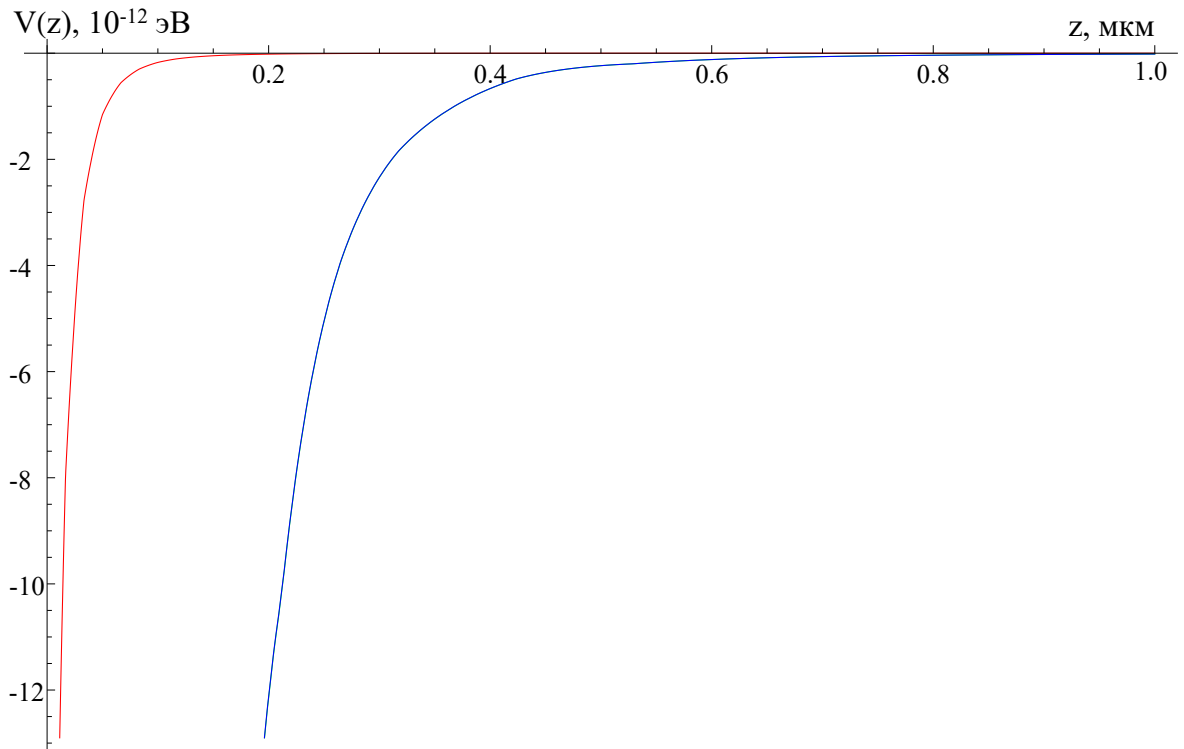


Рисунок 4.7 — Среднее значение потенциальной энергии атома антиводорода над шероховатой поверхностью $\langle V_{sur}(z) \rangle_{xy}$ как функция высоты над поверхностью z (красный) и потенциал Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера $V_{CP}(z)$ как функция z (синий).

Взаимодействие атома антиводорода с идеальной проводящей поверхностью характеризовалось длиной рассеяния a_{CP} на потенциале $V_{CP}(z)$

(длина рассеяния определяла сдвиг гравитационных уровней и время жизни гравитационных состояний). При ее вычислении использовалось условие полного поглощения на поверхности, утверждающее, что вблизи поверхности присутствует только квазиклассическая падающая волна.

Потенциальная энергия антиатома над реальной шероховатой поверхностью $\langle V_{sur}(z) \rangle_{xy}$, усредненная по направлениям x и y , должна быть добавлена к потенциалу Казимира-Полдера $V_{CP}(z)$, действующему на антиатом над идеальной поверхностью, при решении уравнения Шредингера.

Добавка потенциала $\langle V_{sur}(z) \rangle_{xy}$ изменяет как само уравнение Шредингера, так и граничное условие к нему:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + V_{CP}(z) + \langle V_{sur}(z) \rangle_{xy} \right) \Phi(z) = 0, \quad (4.43)$$

$$\Phi(z \rightarrow 0) \sim \frac{1}{\sqrt{p(z)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx},$$

где $p(z) = \sqrt{-2m(V_{CP}(z) + \langle V_{sur}(z) \rangle_{xy})}$.

Такая добавка приводит к изменению длины рассеяния антиатома на поверхности $a_{CP} = -0.00405 - 0.0292i$ мкм, которая становится равной $a_{sur} = -0.00406 - 0.0292i$ мкм. Изменение длины рассеяния приводит к сдвигу гравитационных уровней энергии антиводорода и изменению их ширины по сравнению с уровнями энергии антиатома над идеальной поверхностью, что необходимо учесть при проведении эксперимента с реальными шероховатыми поверхностями.

Величина сдвига уровней энергии и изменения их ширины по сравнению с идеальной проводящей поверхностью для рассмотренной модели составила:

$$\Delta E_n = -1.2 \cdot 10^{-6} \text{ пэВ}, \quad (4.44)$$

$$\Delta \Gamma = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ пэВ}.$$

Таким образом, относительная погрешность частоты перехода за счет взаимодействия атома антиводорода с шероховатой поверхностью может иметь величину не более, чем $\delta\omega_{surf} < 10^{-6}$, и, соответственно, погрешность гравитационной массы не превышает $\delta M_{surf} < 3 \cdot 10^{-6}$. Влияние

шероховатостей реальной поверхности на точность определения гравитационной массы невелико, этот эффект дает наименьший вклад по сравнению со всеми, исследованными в работе.

4.3 Зависимость сдвигов уровней и ширин состояний от энергии (номера) квантовых состояний

Освещен эффект зависимости сдвигов гравитационных уровней и ширин гравитационных состояний от энергии (номера) квантовых состояний для атома антиводорода.

В главе 1 действие поверхности на антиатом в пределе низких энергий описывалось с помощью введения длины рассеяния на потенциале Казимира-Полдера. При таком способе описания все состояния испытывали одинаковый сдвиг энергий за счет взаимодействия с поверхностью в первом порядке теории возмущений, под действием поверхности у состояний появлялась конечная ширина, одинаковая для всех состояний. Таким образом, взаимодействие с поверхностью не проявлялось при определении частот переходов и гравитационной массы антиводорода.

Тем не менее, более точный учет взаимодействия антиатома с поверхностью приведет к появлению зависимости величины сдвига энергии (за счет взаимодействия с поверхностью) от номера гравитационного состояния. Используя известное разложение фазы рассеяния $\delta_0(k)$ при низких энергиях для потенциала $\sim 1/z^4$ [71], можно ввести модифицированную длину рассеяния $a(k)$, зависящую от волнового вектора k :

$$a(k) = -\frac{\delta_0(k)}{k} = a_{CP} + \frac{\pi}{3}l_{CP}(l_{CP}k) + \frac{4}{3}a_{CP}\ln\left(\frac{l_{CP}k}{4}\right)(l_{CP}k)^2 + \left(\frac{\pi a_{CP}^2}{3l_{CP}} + \frac{20a_{CP}}{9} - \frac{\pi l_{CP}}{3} + \frac{a_{CP}^2 r_e}{2l_{CP}^2} - \frac{8a_{CP}\psi(3/2)}{3}\right)(l_{CP}k)^2, \quad (4.45)$$

где r_e — константа, называемая эффективным радиусом, $l_{CP} = \sqrt{2mC_4/\hbar^2}$ — характерный масштаб действия потенциала Казимира-Полдера.

Коэффициенты перед степенями волнового вектора k в разложении можно установить из спектроскопического эксперимента, и исключить вклад поверхности в более высоких порядках по a_{CP}/l_g , а значит точность определения гравитационной массы в эксперименте может быть существенно повышена.

Интерес представляет численная оценка величины эффективного радиуса r_e . Она может быть осуществлена двумя способами. Первый состоит в нахождении эффективного радиуса через интеграл вида [72]:

$$r_e = 2 \int_0^\infty (v_0^2(z) - u_0^2(z)) dz, \quad (4.46)$$

где функция $u_0(z)$ является численным решением уравнения Шредингера с точным потенциалом взаимодействия с поверхностью $V_{CP}(z)$ в пределе нулевой энергии:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_0}{dz^2} + V_{CP}(z) u_0 = 0. \quad (4.47)$$

Для нахождения длины рассеяния на потенциале $V_{CP}(z)$ использовалось граничное условие полного поглощения на поверхности. В пределе малых z условие полного поглощения утверждает о наличии только квазиклассической падающей волны в решении уравнения Шредингера [12]:

$$u(z \rightarrow 0) \sim \frac{1}{\sqrt{p(z)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx}, \quad (4.48)$$

где $p(z) = \sqrt{-2mV_{CP}(z)}$.

Длина рассеяния находится из соотношения:

$$a_{CP} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z - \frac{u(z)}{u'(z)} \right). \quad (4.49)$$

Зная длину рассеяния a_{CP} , можно решать уравнение Шредингера (4.47) с граничным условием $u_0(z \rightarrow \infty) \rightarrow 1 - z/a_{CP}$, определяющим правильное асимптотическое поведение решения $u_0(z)$.

Функция $v_0(z)$ является численным решением уравнения Шредингера с потенциалом $-C_4/z^4$ в пределе нулевой энергии вида:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 v_0}{dz^2} - \frac{C_4}{z^4} v_0 = 0 \quad (4.50)$$

и с тем же самым граничным условием на бесконечности $v_0(z \rightarrow \infty) = 1 - z/a_{CP}$.

Эффективный радиус определяется разницей между функциями $u_0(z)$ и $v_0(z)$ и, соответственно, разницей между точным потенциалом $V_{CP}(z)$ и модельным потенциалом $-C_4/z^4$.

В результате вычисления интеграла (4.46) численное значение эффективного радиуса равняется:

$$r_e = -451.5 - 354.5i \text{ а.е.} \quad (4.51)$$

На Рис. 4.8, 4.9 представлены графики действительной и мнимой части $a(k)$, полученные по формуле (4.45) с эффективным радиусом, определенным (4.51).

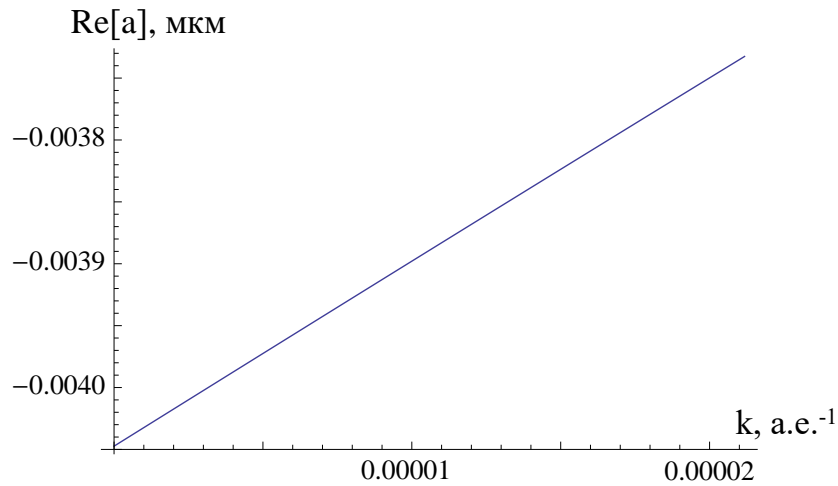


Рисунок 4.8 — Действительная часть модифицированной длины рассеяния $\text{Re } a(k)$ как функция волнового вектора k .

С учетом разложения (4.45), используя значение эффективного радиуса (4.51), частоту перехода между двумя гравитационными состояниями

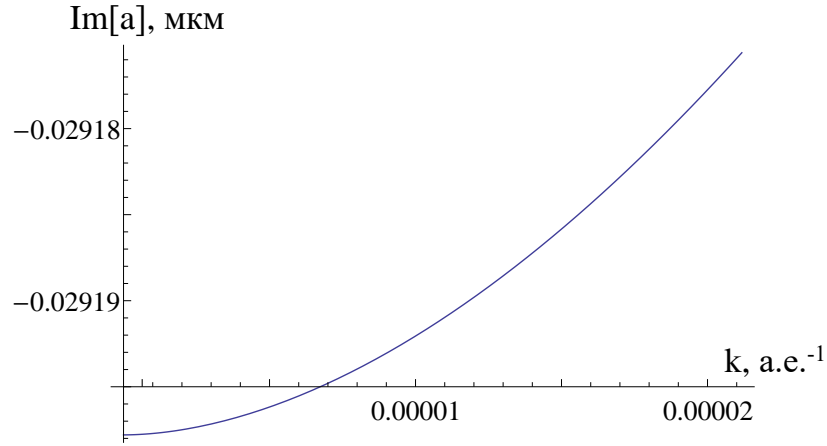


Рисунок 4.9 — Мнимая часть модифицированной длины рассеяния $\text{Im } a(k)$ как функция волнового вектора k .

можно представить в виде:

$$\omega_{n_0 n_1}^{mod} = \omega_{n_0 n_1} + \Delta\omega_{n_0 n_1}^{mod}, \quad (4.52)$$

где $\omega_{n_0 n_1} = \epsilon_g(\lambda_{n_1} - \lambda_{n_0})/(2\pi\hbar)$ и $\Delta\omega_{n_0 n_1}^{mod} = Mg(a(k_{n_1}) - a(k_{n_0}))/(2\pi\hbar)$, $k_n = \sqrt{2m\epsilon_g\lambda_n}/\hbar$. Тогда относительная погрешность частоты перехода за счет более точного учета взаимодействия антиводорода с поверхностью составит, например, для перехода $1 \rightarrow 2$: $\delta\omega_{12}^{mod} \sim 6 \cdot 10^{-6}$, а для перехода $1 \rightarrow 6$: $\delta\omega_{16}^{mod} \sim 5 \cdot 10^{-6}$. Соответственно, относительная погрешность гравитационной массы составит $\delta M \sim 2 \cdot 10^{-5}$. Данный эффект точного учета взаимодействия антиводорода с поверхностью дает относительно малый вклад при постановке эксперимента по измерению гравитационной массы антиводорода.

Второй способ получения величины эффективного радиуса состоит в использовании метода наименьших квадратов [73] для численного нахождения эффективного радиуса r_e как константы в разложении $\text{tg } \delta_0(k)/k$. Решая численно уравнение Шредингера с точным потенциалом $V_{CP}(z)$, который при больших z имеет вид $-C_4/z^4$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dz^2} + V_{CP}(z)u = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} u \quad (4.53)$$

с граничным условием полного поглощения на поверхности:

$$u(z \rightarrow 0) \sim \frac{1}{\sqrt{p(z)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx} \quad (4.54)$$

и $p(z) = \sqrt{2m(\hbar^2 k^2 / 2m - V_{CP}(z))}$, можно получить волновую функцию $u(k, z)$.

Асимптотическое поведение волновой функции $u(k, z)$ должно подчиняться закону:

$$u(k, z \rightarrow \infty) \sim \sin(kz + \delta_0(k)). \quad (4.55)$$

Сшивая волновую функцию $u(k, z)$ с асимптотикой на бесконечности, получаем:

$$\frac{\operatorname{tg}(\delta_0(k))}{k} = \frac{X - \frac{\operatorname{tg}(kz)}{k}}{1 + kX \operatorname{tg}(kz)}, \quad (4.56)$$

где $X = \frac{u(k, z \rightarrow \infty)}{u'_z(k, z \rightarrow \infty)}$.

Используя известное разложение (4.45) [71]:

$$\begin{aligned} -\frac{\operatorname{tg} \delta_0(k)}{k} &= a_{CP} + \frac{\pi}{3} l_{CP} (l_{CP} k) + \frac{4}{3} a_{CP} \ln \left(\frac{l_{CP} k}{4} \right) (l_{CP} k)^2 + \\ &+ \left(\frac{\pi a_{CP}^2}{3 l_{CP}} + \frac{20 a_{CP}}{9} - \frac{\pi l_{CP}}{3} + \frac{a_{CP}^2 r_e}{2 l_{CP}^2} - \frac{8 a_{CP} \psi(3/2)}{3} \right) (l_{CP} k)^2 - \\ &- \left(\frac{\pi a_{CP}^2}{3 l_{CP}} + \frac{\pi l_{CP}}{135} \right) (l_{CP} k)^3, \end{aligned} \quad (4.57)$$

можно аппроксимировать функцию $-\operatorname{tg}(\delta_0(k))/k$ из (4.56) по методу наименьших квадратов для нахождения коэффициентов разложения.

Функция аппроксимации $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = a + bx + c \ln x^2 + dx^2 + ex^3, \quad (4.58)$$

где $x = kl_{CP}$, a, b, c, d, e — константы разложения.

Метод наименьших квадратов требует, чтобы сумма S квадратов отклонений была минимальной:

$$S = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\operatorname{tg}(\delta_0(k_i))}{k_i} - f(x_i, a, b, c, d, e) \right)^2. \quad (4.59)$$

При численных расчетах использовались значения $n = 500$ слагаемых в сумме и интервал $x \in (0.0005, 0.005)$ при нахождении коэффициентов a, b, c, d, e по методу наименьших квадратов. В результате для коэффициентов были получены значения (приводятся с большой точностью для сравнения с аналитическими значениями):

$$\begin{aligned} a &= -76.4840 - 551.7555i \text{ а.е.}, \\ b &= 544.654 + 0.0008i \text{ а.е.}, \\ c &= -100.95 - 735.08i \text{ а.е.}, \\ d &= -856.11 + 146.32i \text{ а.е.}, \\ e &= 266.78 - 392.54i \text{ а.е.} \end{aligned} \tag{4.60}$$

Для сравнения приводятся коэффициенты в разложении (4.57), полученные не с помощью метода наименьших квадратов, а при численном решении уравнения Шредингера и аналитически:

$$\begin{aligned} a &= a_{CP} = -76.4837 - 551.7555i \text{ а.е.}, \\ b &= \frac{\pi}{3} l_{CP} = 544.653 \text{ а.е.}, \\ c &= \frac{4}{3} a_{CP} = -101.98 - 735.67i \text{ а.е.}, \\ d &= \left(\frac{\pi a_{CP}^2}{3l_{CP}} + \frac{20a_{CP}}{9} - \frac{\pi l_{CP}}{3} + \frac{a_{CP}^2 r_e}{2l_{CP}^2} - \frac{8a_{CP}\psi(3/2)}{3} \right), \\ e &= - \left(\frac{\pi a_{CP}^2}{3l_{CP}} + \frac{\pi l_{CP}}{135} \right) = 589.08 - 169.94i \text{ а.е.} \end{aligned} \tag{4.61}$$

Используя полученное численно по методу наименьших квадратов значение коэффициента d (4.60) и связь коэффициента с эффективным радиусом (4.61), получаем значение эффективного радиуса:

$$r_e = -460 - 360i \text{ а.е.} \tag{4.62}$$

Метод наименьших квадратов дает менее устойчивое и точное значение эффективного радиуса по сравнению с первым методом.

4.4 Рассеяние антиводорода на проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия определенной толщины

Подбирается оптимальный материал поверхности, который будет отражать атомы антиводорода наиболее эффективно, существенно увеличивая времена жизни гравитационных состояний антиводорода. Таким материалом оказывается жидкий гелий, помещенный на подложку.

Интересные явления также возникают при рассеянии антиводорода на пленке гелия конечной небольшой толщины, помещенной на подложку. Изменение толщины пленки гелия приводит к изменению длины рассеяния антиводорода и возникновению интерференционной картины.

Рассматривается рассеяние антиводорода на идеальной проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия. Наличие пленки жидкого гелия существенно увеличивает время жизни антиатома над поверхностью. Увеличение времени жизни гравитационных состояний открывает возможности для эффективной спектроскопии гравитационных состояний антиводорода и высокоточного измерения гравитационной массы антиводорода.

Получим зависимость длины рассеяния антиводорода на поверхности с пленкой гелия как функции толщины пленки d . Длина рассеяния для атома антиводорода $a(d)$ на проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия толщины d , определяется с помощью решения уравнения Шредингера с потенциалом $V(z, d) = V_{CP}(z + d) + U(z) - U(z + d)$ и граничным условием полного поглощения на поверхности:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi}{dz^2} + V(z, d) \phi &= 0, \\
 \phi(z \rightarrow 0) &\sim \frac{1}{\sqrt{p(z)}} e^{-\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx},
 \end{aligned}
 \tag{4.63}$$

где $p(z) = \sqrt{-2m(V_{CP}(z) + U(z) - U(z + d))}$, $U(z)$ — это потенциал взаимодействия атома антиводорода с полубесконечным объемом жидкого ге-

лия [74]:

$$U(z) = \frac{\hbar}{c^2 \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{d\xi}{2\pi} \xi^2 \alpha(i\xi) \int \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-2\kappa z}}{2\kappa} \left[r_{TE}(i\xi, \mathbf{q}) - \left(1 + \frac{2c^2 \mathbf{q}^2}{\xi^2} \right) r_{TM}(i\xi, \mathbf{q}) \right]. \quad (4.64)$$

Здесь ξ — это комплексная частота ($\omega = i\xi$), \mathbf{q} — это поперечная составляющая волнового вектора, $\kappa = \sqrt{\xi^2/c^2 + \mathbf{q}^2}$, α — это динамическая поляризуемость атома (анти)водорода, r_{TE} и r_{TM} — коэффициенты отражения для TE и TM мод. В случае идеально плоской поверхности коэффициенты отражения просто представляют из себя коэффициенты Френеля:

$$\begin{aligned} r_{TE}(i\xi, \mathbf{q}) &= \frac{\kappa - \tilde{\kappa}}{\kappa + \tilde{\kappa}}, \\ r_{TM}(i\xi, \mathbf{q}) &= \frac{\epsilon(i\xi)\kappa - \tilde{\kappa}}{\epsilon(i\xi)\kappa + \tilde{\kappa}}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

где $\tilde{\kappa} = \sqrt{\epsilon(i\xi)\xi^2/c^2 + \mathbf{q}^2}$. Для описания оптических свойств жидкого гелия ⁴Не используется модельная диэлектрическая проницаемость $\epsilon(i\xi)$, которая хорошо аппроксимируется функцией с тремя резонансами вида [75]:

$$\epsilon(i\xi) = 1 + \sum_{k=1,2,3} \frac{a_k}{1 + (\xi/\omega_k)^2}, \quad (4.66)$$

где $\omega_1 = 3.22 \cdot 10^{16}$, $\omega_2 = 3.74 \cdot 10^{16}$ и $\omega_3 = 12 \cdot 10^{16}$ рад/с, $a_1 = 0.016$, $a_2 = 0.036$, $a_3 = 0.0047$. Такая же оптическая модель применялась для ³Не, с тем отличием, что все амплитуды a_k умножались на некоторую модельную постоянную. Параметры модели подбирались таким образом, чтобы для статического значения диэлектрической проницаемости получались значения, совпадающие с экспериментальными для гелия ³Не и ⁴Не [76]: $\epsilon_{\text{He}}(0) - 1 = 0.043$, $\epsilon_{\text{He}}(0) - 1 = 0.0567$.

Для ультрахолодных антиатомов рассеяние характеризовалось с помощью комплексной константы — длины рассеяния, которая вычислялась

через волновую функцию по формуле:

$$a(d) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z - \frac{\phi(z,d)}{\phi'_z(z,d)} \right). \quad (4.67)$$

Полученная зависимость длины рассеяния от толщины пленки жидкого гелия, помещенной на металлическую подложку, представлена на Рис. 4.10, 4.11.

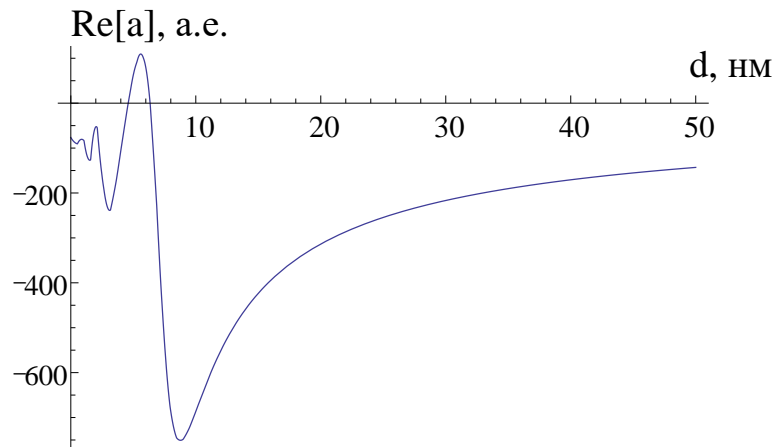


Рисунок 4.10 — Действительная часть длины рассеяния атома антиводорода $a(d)$ на проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия ${}^4\text{He}$, как функция толщины пленки гелия d .

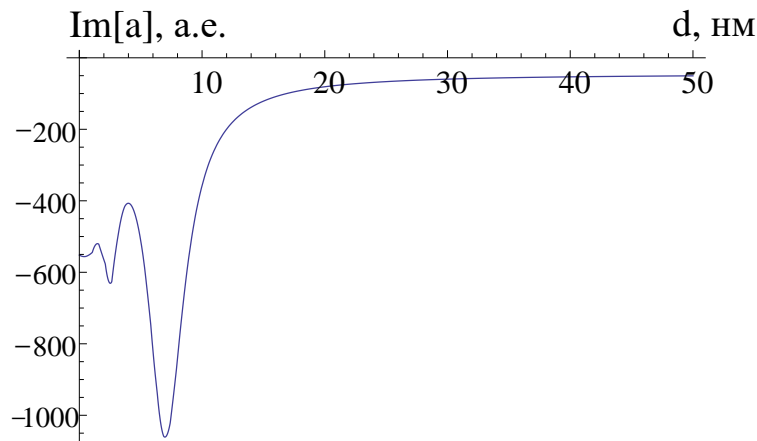


Рисунок 4.11 — Мнимая часть длины рассеяния атома антиводорода $a(d)$ на проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия ${}^4\text{He}$, как функция толщины пленки гелия d .

Для толщины пленки больше нескольких десятков нанометров длина рассеяния выходит на константу, она стремится к своему значению для

объема гелия. По данным графикам можно оценить, какой должна быть толщина пленки гелия, чтобы время жизни антиатома над такой пленкой стало почти столь же продолжительным, как в предельном случае для объема гелия.

Для малых толщин пленки гелия (порядка нескольких нанометров) действительная и мнимая части длины рассеяния испытывают сильные осцилляции как функции толщины пленки. Осцилляции длины рассеяния как функции толщины пленки могут быть объяснены с помощью исследования положения полюсов матрицы рассеяния в комплексной плоскости.

Длина рассеяния как функция толщины пленки демонстрирует интересную интерференционную картину, которую можно объяснить возникновением резонансов. Для иллюстрации осцилляций на Рис. 4.12 приведем график поведения длины рассеяния в комплексной плоскости как функции толщины пленки.

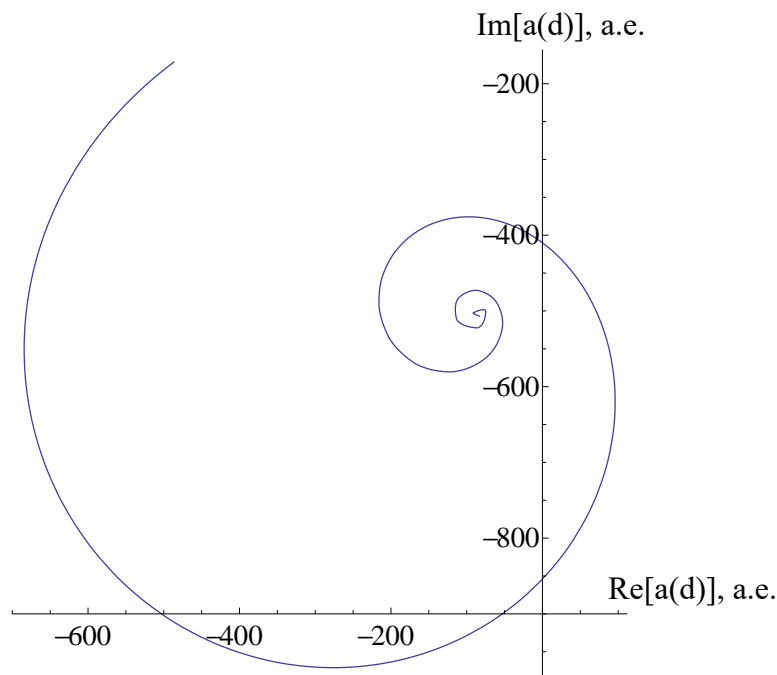


Рисунок 4.12 — Длина рассеяния атома антиводорода $a(d)$ на проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия ${}^4\text{He}$, как функция толщины пленки гелия d , в комплексной плоскости. Толщина пленки изменяется в пределах от 1 нм до 11 нм.

Предложим интерпретацию осцилляций длины рассеяния как функции толщины пленки жидкого гелия d . Осцилляции в длине рассеяния

возникают как результат интерференции отраженных волн. Существование двух отдельных областей, где квантовое отражение сильно, приводит к тому, что в зоне между областями может возникнуть резонанс, в ней наблюдается интерференция отраженных волн, которая и проявляется в виде осцилляции длины рассеяния как функции толщины пленки.

При некоторых значениях толщины пленки d появляются состояния, несколько подобные связным состояниям. Наличие такой области приводит к усилению аннигиляции и, соответственно, к сокращению времени жизни гравитационного состояния антиводорода.

Для более наглядной иллюстрации возникающих резонансов можно исследовать движение вблизипороговых резонансов — полюсов матрицы рассеяния S в комплексной плоскости при изменении толщины пленки гелия d .

Из Рис. 4.13 видно, что при толщине пленки меньше 6 нм положение полюса в комплексной плоскости соответствует квазисвязному состоянию. Изменение знака вещественной части длины рассеяния связано с изменением знака мнимой части полюса при $d = 6$ нм. Для толщины пленки больше, чем 6 нм, квазисвязное состояние превращается в резонанс.

Использование полубесконечного объема жидкого гелия (бесконечной толщины пленки $d \rightarrow \infty$) в качестве отражающей поверхности приводит к существенному увеличению времени жизни гравитационных состояний по сравнению с металлической поверхностью. Из расчетов потенциала для атома антиводорода над полубесконечным объемом жидкого гелия следует, что такой потенциал гораздо слабее потенциала для антиводорода над металлической поверхностью. (Это объясняется тем фактом, что жидкий гелий почти прозрачен для электромагнитного поля). Это приводит к гораздо более сильному квантовому отражению антиатома от поверхности гелия.

В пределе бесконечной толщины пленки $d \rightarrow \infty$ длина рассеяния составляет:

$$a(d \rightarrow \infty) = -34. - 45.i \text{ a.e.} \quad (4.68)$$

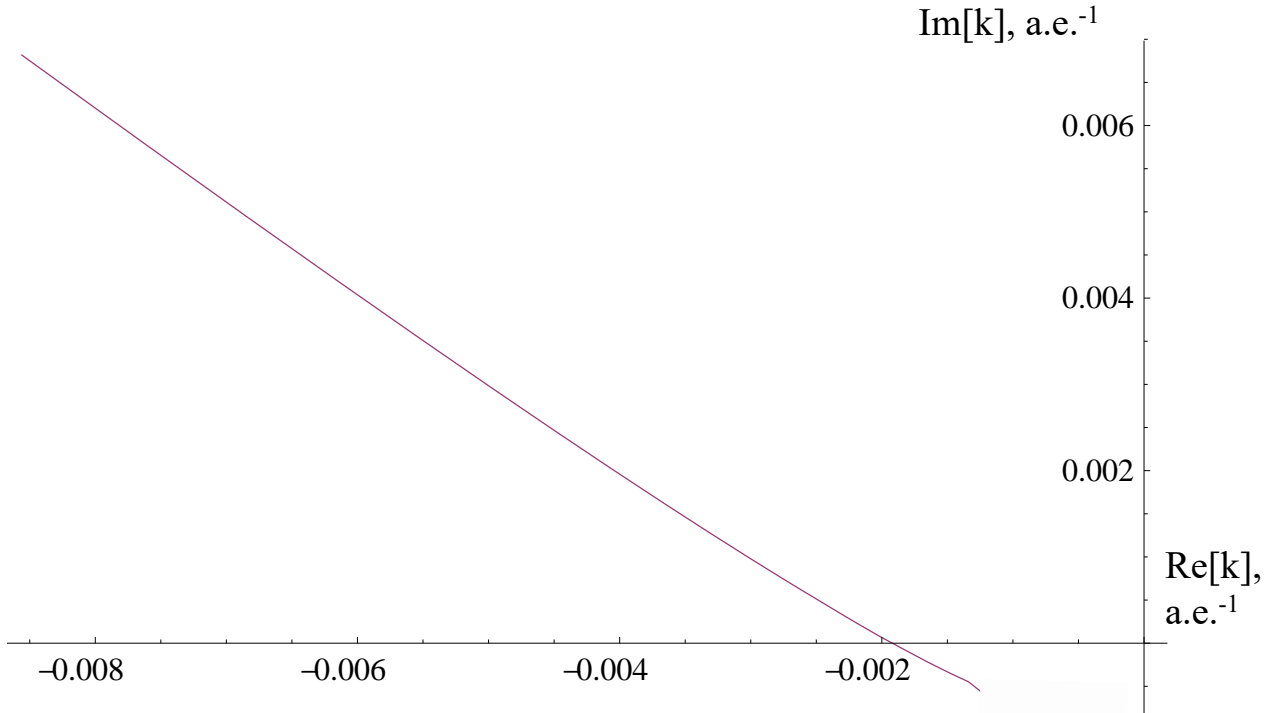


Рисунок 4.13 — Движение полюса матрицы рассеяния в комплексной плоскости волнового вектора при изменении толщины пленки жидкого гелия $d = 3 - 7$ нм. Полюс пересекает вещественную ось при $d = 6$ нм.

Мнимая часть длины рассеяния определяет среднее время жизни τ антиводорода в гравитационном состоянии над полубесконечным объемом жидкого гелия ${}^4\text{He}$:

$$b = 4\text{Im } a(d \rightarrow \infty),$$

$$\tau = \frac{2\hbar}{Mgb} = 1.35 \text{ с.} \quad (4.69)$$

Полученное время жизни существенно (на порядок) превышает время жизни антиводорода над проводящей поверхностью, что делает использование жидкого гелия в экспериментах более предпочтительными.

В Таблице 4.1 приведены для сравнения времена жизни антиатомов над различными поверхностями. Можно видеть, что время жизни над объемом гелия максимально. Таким образом, жидкий гелий является лучшей отражающей поверхностью для антиводорода по сравнению со всеми исследованными на данный момент поверхностями. Существенное увеличение времени жизни (и существенное увеличение числа соударений с поверх-

ностью антиводорода перед аннигиляцией), которое обеспечивает жидкий гелий, способствует значительному повышению точности спектроскопических измерений гравитационных состояний и открывает новые перспективы для проверки слабого принципа эквивалентности для антиводорода.

Таблица 4.1

Средние времена жизни атомов антиводорода в основном гравитационном состоянии над различными поверхностями и число соударений антиводорода с поверхностью перед аннигиляцией.

Материал поверхности	Время жизни τ , с	Число соударений с поверхностью
Проводящая поверхность	0.1	33
Диоксид кремния	0.2	66
Жидкий ${}^4\text{He}$	1.4	405
Жидкий ${}^3\text{He}$	1.7	514

Предполагаемая относительная погрешность измерения гравитационной массы антиводорода в эксперименте определялась по формуле (2.35). Для антиводорода над проводящей поверхностью она составила (2.36) $\delta M \sim 10^{-3}$. Увеличение на порядок времени жизни антиводорода над жидким гелием на порядок уменьшит погрешность определения гравитационной массы $\delta M \sim 10^{-4}$ в эксперименте, что является значимым результатом.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Предложен новый подход к исследованию гравитационных свойств антиводорода, основанный на спектроскопии гравитационных квантовых состояний атомов антиводорода в гравитационном поле Земли над проводящей поверхностью с помощью индуцирования резонансных переходов между состояниями под действием переменного неоднородного магнитного поля или под действием вибрации поверхности.
2. Проведена теоретическая оценка точности измерения гравитационной массы антиводорода в планируемом эксперименте ЦЕРНа по исследованию поведения атомов антиводорода над материальной поверхностью в гравитационном поле Земли и оценка точности проверки слабого принципа эквивалентности.
3. Изучен наиболее существенный эффект, приводящий к ошибке в получении гравитационной массы — эффект сдвига резонансной частоты (динамический эффект Штарка), обусловленный выбранным спектроскопическим методом, и его влияние на определение гравитационной массы антиводорода в эксперименте. Величина описанного эффекта оценена численно с помощью точного решения временного уравнения Шредингера и аналитически с помощью формализма квазиэнергий.
4. Проведена оценка принципиальной для возможности наблюдения гравитационных состояний эффекта возможного «разрушения» гравитационных квантовых состояний антиводорода под действием остаточных электрических полей от электрических зарядов, случайно распределенных по поверхности зеркала. Рассмотрено «разрушение» квантовых состояний как за счет индуцированной аннигиляции, так и за счет индуцированных переходов в возбужденные состояния. Показан относительно малый вклад опи-

санных эффектов, не влияющий на предполагаемую точность измерения гравитационной массы антиводорода.

5. Исследовано влияние вариаций электростатического потенциала проводящей поверхности, возникающих из-за шероховатостей реальной поверхности, на положение и ширину гравитационных уровней антиводорода над проводящей поверхностью. Показано, что вклад рассматриваемого эффекта мал, что позволит измерить гравитационную массу в эксперименте с предполагаемой точностью.
6. Описан эффект влияния взаимодействия с поверхностью на частоты переходов между квантовыми гравитационными состояниями антиводорода. Впервые получено численное значение эффективного радиуса рассеяния антиводорода на проводящей поверхности.
7. Исследовано рассеяние антиводорода на различных поверхностях с целью поиска наилучшей поверхности для проведения экспериментов с антиводородом. Выбрана оптимальная отражающая поверхность — жидкий гелий, которая на порядок увеличивает время жизни антиводорода, по сравнению с идеально проводящей поверхностью. Изучено рассеяние на идеальной проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия конечной толщины.

Список литературы

1. Test of the Equivalence Principle Using a Rotating Torsion Balance / S. Schlamminger, K.-Y. Choi, T. A. Wagner et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 041101.
2. Reasenberg Robert D, Phillips James D. A weak equivalence principle test on a suborbital rocket // *Classical and Quantum Gravity.* — 2010. — Vol. 27, no. 9. — P. 095005.
3. The Science Case for STEP / J. Overduin, F. Everitt, J. Mester, P. Worden // *Advances in Space Research.* — 2009. — Vol. 43, no. 10. — Pp. 1532—1537.
4. Colella R., Overhauser A. W., Werner S. A. Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference // *Phys. Rev. Lett.* — 1975. — Vol. 34. — Pp. 1472—1474.
5. Measurement of a confinement induced neutron phase / H. Rauch, H. Lemmel, M. Baron, R. Loidl // *Nature.* — 2002. — Vol. 417. — Pp. 630—632.
6. Kasevich M., Chu S. Measurement of the gravitational acceleration of an atom with a light-pulse atom interferometer // *Applied Physics B.* — 1992. — Vol. 54, no. 5. — Pp. 321—332.
7. Peters A., Chung K. Y., Chu S. Measurement of gravitational acceleration by dropping atoms // *Nature.* — 1999. — Vol. 400. — P. 849.
8. Atomic Interferometer with Amplitude Gratings of Light and Its Applications to Atom Based Tests of the Equivalence Principle / Sebastian Fray, Cristina Alvarez Diez, Theodor W. Hänsch, Martin Weitz // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93. — P. 240404.
9. A promising method for the measurement of the local acceleration of gravity using Bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical standing wave /

- P. Cladé, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob et al. // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2005. — Vol. 71, no. 5. — P. 730.
10. *Amoretti M. et al.* Production and detection of cold antihydrogen atoms // *Nature*. — 2002. — Vol. 419. — Pp. 456–459.
 11. *Gabrielse G. et al.* Background-Free Observation of Cold Antihydrogen with Field-Ionization Analysis of Its States // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 213401.
 12. *Voronin A. Yu., Froelich P., Zygelman B.* Interaction of ultracold antihydrogen with a conducting wall // *Phys. Rev. A*. — 2005. — Vol. 72. — P. 062903.
 13. *Andresen G. B. et al.* Trapped antihydrogen // *Nature*. — 2010. — Vol. 468. — Pp. 673–676.
 14. *Collaboration The Alpha, Charman A. E.* Description and first application of a new technique to measure the gravitational mass of antihydrogen // *Nature Communications*. — 2013. — Vol. 4. — P. 1785.
 15. *Perez P. et al.* Proposal to measure the gravitational behaviour of antihydrogen at rest. — 2011. <http://cds.cern.ch/record/1386684/files/SPSC-P-342.pdf>.
 16. *Gabrielse G. et al.* // *CERN-SPSC-2010-006 / SPSC-SR-057*. — 2010.
 17. *Cesar C. L. et al.* Cold Antihydrogen at ATHENA: Experimental Observation and Beyond // *AIP Conference Proceedings*. — 2005. — Vol. 770. — P. 33.
 18. *Kellerbauer A. et al.* Proposed antimatter gravity measurement with an antihydrogen beam // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*. — 2008. — Vol. 266, no. 3. — Pp. 351–356.

19. Pérez P., Banerjee D., Biraben F. et al. The GBAR antimatter gravity experiment // *Hyperfine Interactions*. — 2015. — Vol. 233, no. 1. — Pp. 21—27.
20. Quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field / V. V. Nesvizhevsky, H. G. Boerner, A. K. Petoukhov et al. // *Nature*. — 2002. — Vol. 415. — Pp. 297—299.
21. Measurement of quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field / V. V. Nesvizhevsky, H. G. Börner, A. M. Gagarski et al. // *Phys. Rev. D*. — 2003. — Vol. 67. — P. 102002.
22. Nesvizhevsky V. V. et al. Study of the neutron quantum states in the gravity field // *The European Physical Journal C - Particles and Fields*. — 2005. — Vol. 40. — Pp. 479—491.
23. Lennard-Jones J. E., Devonshire A. F. The interaction of atoms and molecules with solid surfaces III—The condensation and evaporation of atoms and molecules // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1936. — Vol. 156, no. 887. — Pp. 6—28.
24. Lennard-Jones J. E., Devonshire A. F. The interaction of atoms and molecules with solid surfaces IV—The condensation and evaporation of atoms and molecules // *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1936. — Vol. 156, no. 887. — Pp. 29—36.
25. Berry M. V., Mount K. E. Semiclassical approximations in wave mechanics // *Reports on Progress in Physics*. — 1972. — Vol. 35, no. 1. — P. 315.
26. Friedrich H., Trost J. Working with WKB waves far from the semiclassical limit // *Physics Reports*. — 2004. — Vol. 397, no. 6. — Pp. 359—449.
27. Nayak V. U., Edwards D. O., Masuhara N. Scattering of ^4He Atoms Grazing the Liquid- ^4He Surface // *Phys. Rev. Lett.* — 1983. — Vol. 50. — Pp. 990—992.

28. Quantum reflection: Focusing of hydrogen atoms with a concave mirror / J. J. Berkhout, O. J. Luiten, I. D. Setija et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1989. — Vol. 63. — Pp. 1689—1692.
29. Evidence for universal quantum reflection of hydrogen from liquid ^4He / Ite A. Yu, John M. Doyle, Jon C. Sandberg et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 71. — Pp. 1589—1592.
30. *Shimizu Fujio*. Specular Reflection of Very Slow Metastable Neon Atoms from a Solid Surface // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — Pp. 987—990.
31. *Druzhinina V., DeKieviet M.* Experimental Observation of Quantum Reflection far from Threshold // *Phys. Rev. Lett.* — 2003. — Vol. 91. — P. 193202.
32. Quantum Reflection from a Solid Surface at Normal Incidence / T. A. Pasquini, Y. Shin, C. Sanner et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93. — P. 223201.
33. Low Velocity Quantum Reflection of Bose-Einstein Condensates / T. A. Pasquini, M. Saba, G.-B. Jo et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 97. — P. 093201.
34. *Voronin A. Yu., Froelich P., Nesvizhevsky V. V.* Gravitational quantum states of Antihydrogen // *Phys. Rev. A.* — 2011. — Vol. 83. — P. 032903.
35. *Voronin A. Yu., Nesvizhevsky V. V., Reynaud S.* Whispering-gallery states of antihydrogen near a curved surface // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Vol. 85. — P. 014902.
36. *Dufour G. et al.* Quantum reflection of antihydrogen from nanoporous media // *Phys. Rev. A.* — 2013. — Vol. 87. — P. 022506.
37. *Dufour G. et al.* Quantum reflection of antihydrogen from the Casimir potential above matter slabs // *Phys. Rev. A.* — 2013. — Vol. 87. — P. 012901.

38. Shaping the distribution of vertical velocities of antihydrogen in GBAR / G. Dufour, P. Debu, A. Lambrecht et al. // *The European Physical Journal C*. — 2014. — Vol. 74, no. 1. — P. 2731.
39. *Куприянова Е. А., Далькаров О. Д., Воронин А. Ю.* Гравитационные состояния ультрахолодного атома антиводорода над материальной поверхностью // Международная сессия-конференция секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий», Москва, Россия, 12-16 ноября. — 2012.
40. *Куприянова Е. А., Далькаров О. Д., Воронин А. Ю.* Поведение ультрахолодных атомов в гравитационном поле Земли вблизи материальной поверхности // V Всероссийская молодежная конференция по фундаментальным и инновационным вопросам современной физики, Москва, Россия, 10-15 ноября. — 2013.
41. *Voronin A. Yu., Nesvizhevsky V. V., Froelich P., Dalkarov O. D., Kupriyanova E. A.* Gravitational quantum states of antihydrogen // 2nd International Workshop on Antimatter and Gravity (WAG 2013), Bern, Switzerland, 13-15 November. — 2013.
42. *Dalkarov O. D., Kupriyanova E. A.* On the gravitational quantum states of helium atoms in the gravitational field of a cold neutron star // The 34th International Cosmic Ray Conference (ICRC 2015), The Hague, The Netherlands, July 30 to August 6. — 2015.
43. *Voronin A. Yu., Nesvizhevsky V. V., Dalkarov O. D., Kupriyanova E. A., Froelich P.* Resonance spectroscopy of gravitational states of antihydrogen // *Hyperfine Interactions*. — 2014. — Vol. 228. — Pp. 133–139.
44. *Baeßler S., Nesvizhevsky V. V., Pignol G., Protasov K. V., Rebreyend D., Kupriyanova E. A., Voronin A. Yu.* Frequency shifts in gravitational resonance spectroscopy // *Phys. Rev. D*. — 2015. — Vol. 91. — P. 042006.
45. *Voronin A. Yu., Kupriyanova E. A., Lambrecht A., Nesvizhevsky V. V., Reynaud S.* Quenching of antihydrogen gravitational states by surface

- charges // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. — 2016. — Vol. 49, no. 20. — P. 205003.
46. Crépin P.-P., Kupriyanova E. A., Guérout R., Lambrecht A., Nesvizhevsky V. V., Reynaud S., Vasiliev S., Voronin A. Yu. Quantum reflection of antihydrogen from a liquid helium film // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2017. — Vol. 119, no. 3. — P. 33001.
47. Voronin A. Yu., Nesvizhevsky V. V., Dufour G., Debu P., Lambrecht A., Reynaud S., Dalkarov O. D., Kupriyanova E. A., Froelich P. A spectroscopy approach to measure the gravitational mass of antihydrogen // *International Journal of Modern Physics: Conference Series*. — 2014. — Vol. 30. — P. 1460266.
48. Dalkarov O. D., Kupriyanova E. A. On the gravitational quantum states of helium atoms in the gravitational field of a cold neutron star // *in proceedings of «The 34th International Cosmic Ray Conference (ICRC2015) - Cosmic Ray Physics: Theory, Models and Simulations» PoS(ICRC2015)487*. — 2015.
49. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions 10th edn. — New York: Dover Publications, 1972.
50. Voronin A. Yu., Abele H. et al. Quantum motion of a neutron in a waveguide in the gravitational field // *Phys. Rev. D*. — 2006. — Vol. 73. — P. 044029.
51. Marinescu M., Dalgarno A., Babb J. F. Retarded long-range potentials for the alkali-metal atoms and a perfectly conducting wall // *Phys. Rev. A*. — 1997. — Vol. 55. — Pp. 1530—1532.
52. Friedrich H. et al. Quantum reflection by Casimir–van der Waals potential tails // *Phys. Rev. A*. — 2002. — Vol. 65. — P. 032902.
53. Casimir H. B., Polder D. The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces // *Phys. Rev.* — 1948. — Vol. 73. — Pp. 360—372.

54. *Lennard-Jones J. E.* Processes of adsorption and diffusion on solid surfaces // *Trans. Faraday Soc.* — 1932. — Vol. 28. — Pp. 333—359.
55. *Nesvizhevsky V. V. et al.* Search for quantum states of the neutron in a gravitational field: gravitational levels // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment.* — 2000. — Vol. 440. — Pp. 754—759.
56. *Voronin A. Yu. et al.* Quantum reflection of ultracold antihydrogen from a solid surface // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 2005. — Vol. 38, no. 18. — P. L301.
57. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory. — London: Pergamon, 1965.
58. *Kreuz M. et al.* A method to measure the resonance transitions between the gravitationally bound quantum states of neutrons in the GRANIT spectrometer // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment.* — 2009. — Vol. 611, no. 2. — Pp. 326—330.
59. *Делоне Н. Б., Крайнов В. П.* Динамический штарковский сдвиг атомных уровней // *Успехи физических наук.* — 1999. — Т. 169, № 7. — С. 753—772.
60. *Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. — Москва: Наука, 1971.
61. *Shirley J. H.* Solution of the Schrödinger Equation with a Hamiltonian Periodic in Time // *Phys. Rev.* — 1965. — Vol. 138. — Pp. B979—B987.
62. *Herring Conyers, Nichols M. H.* Thermionic Emission // *Rev. Mod. Phys.* — 1949. — Vol. 21. — Pp. 185—270.
63. *Rzchowski M. S. et al.* Properties of random fields outside a metal surface and their effect on time-of-flight spectroscopy // *Phys. Rev. A.* — 1988. — Vol. 38. — Pp. 4622—4632.

64. Ionization of xenon Rydberg atoms at Au(111) surfaces: Effect of stray fields / D. D. Neufeld, H. R. Dunham, S. Wethekam et al. // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 78. — P. 115423.
65. Modeling electrostatic patch effects in Casimir force measurements / R. O. Behunin, F. Intravaia, D. A. R. Dalvit et al. // *Phys. Rev. A.* — 2012. — Vol. 85. — P. 012504.
66. *Pu Y., Neufeld D. D., Dunning F. B.* Ionization of Rydberg atoms at metallic surfaces: Influence of stray fields // *Phys. Rev. A.* — 2010. — Vol. 81. — P. 042904.
67. Kelvin probe force microscopy of metallic surfaces used in Casimir force measurements / R. O. Behunin, D. A. R. Dalvit, R. S. Decca et al. // *Phys. Rev. A.* — 2014. — Vol. 90. — P. 062115.
68. *Dufour G. et al.* Quantum reflection and Liouville transformations from wells to walls // *EPL (Europhysics Letters).* — 2015. — Vol. 110, no. 3. — P. 30007.
69. *Zhao Yiping, Wang Gwo-Ching, Lu Toh-Ming.* Characterization of Amorphous and Crystalline Rough Surface: Principles and Applications. — London, New York: Academic Press, 2001.
70. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics, 3rd ed. — New York: Wiley, 1998.
71. *Macri P. A., Barrachina R. O.* Threshold behavior of the Jost function for the atomic polarization potential // *Phys. Rev. A.* — 2002. — Vol. 65. — P. 062718.
72. *O'Malley T. F., Spruch L., Rosenberg L.* Modification of Effective-Range Theory in the Presence of a Long-Range (r^{-4}) Potential // *Journal of Mathematical Physics.* — 1961. — Vol. 2. — P. 491.
73. *Лунник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. — Москва: Государственное издательство Физико-математической литературы, 1958.

74. Dispersive interactions between atoms and nonplanar surfaces / Riccardo Messina, Diego A. R. Dalvit, Paulo A. Maia Neto et al. // *Phys. Rev. A.* — 2009. — Vol. 80. — P. 022119.
75. *Sabisky E. S., Anderson C. H.* Verification of the Lifshitz Theory of the van der Waals Potential Using Liquid-Helium Films // *Phys. Rev. A.* — 1972. — Vol. 7. — Pp. 790—806.
76. *Kierstead Henry A.* Dielectric constant and molar volume of saturated liquid ^3He and ^4He // *Journal of Low Temperature Physics.* — 1976. — Vol. 23, no. 5. — Pp. 791—805.

Список рисунков

- 1.1 Составной потенциал для атома антиводорода: на малых расстояниях z от проводящей поверхности доминирует потенциал взаимодействия с поверхностью $V_{CP}(z)$, на больших расстояниях доминирует гравитационный потенциал Земли Mgz 14
- 2.1 Вероятность перехода P_{16}^R из основного в шестое гравитационное состояние для атома антиводорода под действием переменного неоднородного магнитного поля с градиентом $\beta = 13.59$ Гс/м как функция частоты магнитного поля ω в момент времени $t_f = 0.1$ с. 27
- 2.2 Принципиальная схема эксперимента по наблюдению резонансного перехода между гравитационными состояниями атома антиводорода под действием переменного неоднородного магнитного поля, где: 1 — источник ультрахолодных атомов антиводорода, 2 — поверхность (зеркало), 3 — поглотитель, 4 — магнитное поле, 5 — детектор. 31
- 4.1 Действительная часть длины рассеяния $\text{Re } a(\rho)$ как функция расстояния между антиатомом и зарядом в плоскости, параллельной поверхности. $Q = 10$ е. 61
- 4.2 Мнимая часть длины рассеяния $\text{Im } a(\rho)$ как функция расстояния между антиатомом и зарядом в плоскости, параллельной поверхности. $Q = 10$ е. 62
- 4.3 Действительная часть длины рассеяния $\text{Re } a(\rho)$ как функция расстояния между антиатомом и зарядом в плоскости, параллельной поверхности. $Q = 30$ е. 63
- 4.4 Мнимая часть длины рассеяния $\text{Im } a(\rho)$ как функция расстояния между антиатомом и зарядом в плоскости, параллельной поверхности. $Q = 30$ е. 64

- 4.5 Черная линия d_{tr} и красная линия d_{in} как функции величины заряда на поверхности Q . $v = 1$ м/с. 65
- 4.6 Моделирование распределения вариаций электростатического потенциала на области размером 1×1 мкм реальной случайной шероховатой поверхности. 66
- 4.7 Среднее значение потенциальной энергии атома антиводорода над шероховатой поверхностью $\langle V_{sur}(z) \rangle_{xy}$ как функция высоты над поверхностью z (красный) и потенциал Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера $V_{CP}(z)$ как функция z (синий). 67
- 4.8 Действительная часть модифицированной длины рассеяния $\text{Re } a(k)$ как функция волнового вектора k 71
- 4.9 Мнимая часть модифицированной длины рассеяния $\text{Im } a(k)$ как функция волнового вектора k 72
- 4.10 Действительная часть длины рассеяния атома антиводорода $a(d)$ на проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия ${}^4\text{He}$, как функция толщины пленки гелия d 77
- 4.11 Мнимая часть длины рассеяния атома антиводорода $a(d)$ на проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия ${}^4\text{He}$, как функция толщины пленки гелия d 77
- 4.12 Длина рассеяния атома антиводорода $a(d)$ на проводящей поверхности, покрытой пленкой жидкого гелия ${}^4\text{He}$, как функция толщины пленки гелия d , в комплексной плоскости. Толщина пленки изменяется в пределах от 1 нм до 11 нм. 78
- 4.13 Движение полюса матрицы рассеяния в комплексной плоскости волнового вектора при изменении толщины пленки жидкого гелия $d = 3 - 7$ нм. Полюс пересекает вещественную ось при $d = 6$ нм. 80

Список таблиц

1.1	Собственные значения, энергии гравитационных состояний и классические точки поворота для атома антиводорода в гравитационном поле Земли над зеркалом	13
3.1	Численные значения резонансных частот переходов ω_{res} между гравитационными состояниями n_0 и n_1 под действием магнитного поля, частоты переходов между невозмущенными гравитационными уровнями $\omega_{n_0 n_1}$, численные значения сдвигов резонансных частот $\Delta\omega$	35
3.2	Численные значения резонансных частот переходов ω_{res} между гравитационными состояниями n_0 и n_1 под действием вибрации поверхности, частоты переходов между невозмущенными гравитационными уровнями $\omega_{n_0 n_1}$, численные значения сдвигов резонансных частот $\Delta\omega$	35
3.3	Аналитические значения сдвигов резонансной частоты $\Delta\omega$ и численные значения сдвигов резонансной частоты для переходов между гравитационными состояниями n_0 и n_1 под действием магнитного поля.	45
3.4	Аналитические значения сдвигов резонансной частоты $\Delta\omega$ и численные значения сдвигов резонансной частоты для переходов между гравитационными состояниями n_0 и n_1 под действием вибрации поверхности.	45
4.1	Средние времена жизни атомов антиводорода в основном гравитационном состоянии над различными поверхностями и число соударений антиводорода с поверхностью перед аннигиляцией.	81

Приложение А

Соотношение биортогональности для функций Эйри комплексного аргумента

Докажем, что величина β_{ij} , определенная по формуле:

$$\beta_{i \neq j} = \frac{1}{N_i N_j} \int_0^\infty \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_j \right) \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_i \right) dz \quad (\text{A.1})$$

равняется нулю. В данной формуле $N_i \approx l_g^{1/2} \text{Ai}'(-\lambda_i)$ и под $\tilde{\lambda}_i$ подразумеваются комплексные собственные значения $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + a_{CP}/l_g$, а не нули функции Эйри, для которых введено обозначение λ_i .

Запишем пару уравнений на функцию Эйри:

$$\begin{aligned} -\text{Ai}'' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_i \right) + \frac{z}{l_g} \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_i \right) &= \tilde{\lambda}_i \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_i \right), \\ -\text{Ai}'' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_j \right) + \frac{z}{l_g} \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_j \right) &= \tilde{\lambda}_j \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_j \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Домножим уравнения на $\text{Ai}(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_j)$ и $\text{Ai}(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_i)$ соответственно и выполним интегрирование по z , затем вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{aligned} \text{Ai}'(-\tilde{\lambda}_j) \text{Ai}(-\tilde{\lambda}_i) - \text{Ai}'(-\tilde{\lambda}_i) \text{Ai}(-\tilde{\lambda}_j) &= \\ = (\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_i) \int_0^\infty \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_j \right) \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_i \right) dz. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Разделим полученное уравнение на $\text{Ai}(-\tilde{\lambda}_j) \text{Ai}'(-\tilde{\lambda}_i)$ и воспользуемся условием сшивки в нуле:

$$\frac{\text{Ai}(-\tilde{\lambda}_i)}{\text{Ai}'(-\tilde{\lambda}_i)} = -\frac{a_{CP}}{l_g}. \quad (\text{A.4})$$

Замечаем, что:

$$\frac{(\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_i)}{\text{Ai}(-\tilde{\lambda}_j) \text{Ai}'(-\tilde{\lambda}_i)} \int_0^\infty \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_j \right) \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_i \right) dz = 0, \quad (\text{A.5})$$

тогда:

$$\beta_{i \neq j} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Приложение Б

Явные выражения для матричных элементов оператора возмущения с помощью магнитного поля

Вычислим матричный элемент оператора \hat{z} по собственным волновым функциям (2.11) гамильтониана \hat{H}_0 (2.1):

$$z_{nk} = \frac{1}{N_n N_k} \int_0^\infty \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \lambda_n \right) z \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \lambda_k \right) dz \quad (\text{Б.1})$$

с помощью уравнений движения. Пренебрегаем членами порядка a_{CP}/l_g .

Для этого рассмотрим невозмущенную систему (отсутствует переменное неоднородное магнитное поле) из атома в гравитационном потенциале и зеркала в начале координат, гамильтониан которой имеет вид (не учитываем потенциал Казимира-Полдера):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + Mg\hat{z} + U_0\eta(-z), \quad (\text{Б.2})$$

где $U_0\eta(-z)$ — потенциал, переходящий в полностью отражающую поверхность (зеркало) в пределе $U_0 \rightarrow \infty$. В пределе с зеркалом собственные волновые функции такой системы имеют вид:

$$\psi_n(z) = \frac{1}{N_n} \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \lambda_n \right), \quad (\text{Б.3})$$

где $N_n \approx l_g^{1/2} \text{Ai}'(-\lambda_n)$. А значения энергии:

$$E_n = \epsilon_g \lambda_n. \quad (\text{Б.4})$$

Применим гейзенберговское уравнение движения к системе:

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = -\nabla U(z). \quad (\text{Б.5})$$

Получаем:

$$\ddot{z}(t) + g - e^{\frac{i\hbar t}{\hbar}} \frac{U_0}{m} \delta(z) e^{-\frac{i\hbar t}{\hbar}} = 0, \quad (\text{Б.6})$$

где:

$$z(t) = e^{\frac{i\hbar t}{\hbar}} z e^{-\frac{i\hbar t}{\hbar}}. \quad (\text{Б.7})$$

Используем тот факт, что $\bar{\dot{z}} = \dot{\bar{z}}$. По определению среднего $\bar{z} = \int \psi^*(z) \hat{z} \psi(z) dz$, где $\psi(z) = \sum_n C_n \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \lambda_n\right) / N_n$ — разложение по волновым функциям стационарных состояний.

Перепишем полученное уравнение движения для средних в пределе $U_0 \rightarrow \infty$, когда собственные значения гамильтониана становятся равными энергиям E_n :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int \sum_n \sum_m C_n^* C_m \frac{\text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \lambda_n\right) z(t) \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \lambda_m\right)}{N_n N_m} dz + \\ & + g \int \sum_n \sum_m C_n^* C_m \frac{\text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \lambda_n\right) \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \lambda_m\right)}{N_n N_m} e^{\frac{i(E_n - E_m)t}{\hbar}} dz - \\ & - \lim_{U_0 \rightarrow \infty} \sum_n \sum_m \frac{U_0}{m} C_n^* C_m \frac{\text{Ai}(-\lambda_n) \text{Ai}(-\lambda_m)}{N_n N_m} e^{\frac{i(E_n - E_m)t}{\hbar}} = 0, \quad \text{т.о.} \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \sum_m -\frac{(E_n - E_m)^2}{\hbar^2} C_n^* C_m e^{\frac{i(E_n - E_m)t}{\hbar}} z_{nm} + g \sum_n |C_n|^2 - \\ & - \lim_{U_0 \rightarrow \infty} \sum_n \sum_m \frac{U_0}{m} C_n^* C_m \frac{\text{Ai}(-\lambda_n) \text{Ai}(-\lambda_m)}{N_n N_m} e^{\frac{i(E_n - E_m)t}{\hbar}} = 0. \end{aligned}$$

В выражении присутствует неопределенность $(0 \cdot \infty)$, которую необходимо раскрыть.

Используем уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} \psi + Mgz\psi + U_0 \eta(-z)\psi = E\psi. \quad (\text{Б.9})$$

Продифференцируем уравнение по z еще раз и домножим на ψ^* . Проинтегрировав полученное соотношение в области вблизи $z = 0$, можно полу-

ЧИТЬ:

$$\lim_{U_0 \rightarrow \infty} U_0 \frac{\text{Ai}(-\lambda_n)\text{Ai}(-\lambda_m)}{|\text{Ai}'(-\lambda_n)\text{Ai}'(-\lambda_m)|} = \frac{\hbar^2}{2ml_g^2} \frac{\text{Ai}'(-\lambda_n)\text{Ai}'(-\lambda_m)}{|\text{Ai}'(-\lambda_n)\text{Ai}'(-\lambda_m)|}. \quad (\text{Б.10})$$

Использував определение l_g и полученное предельное соотношение, находим:

$$\sum_n \sum_m C_n^* C_m e^{\frac{i(E_n - E_m)t}{\hbar}} \left(-w_{mn}^2 z_{nm} + g\delta_{nm} - g \frac{\text{Ai}'(-\lambda_n)\text{Ai}'(-\lambda_m)}{|\text{Ai}'(-\lambda_n)\text{Ai}'(-\lambda_m)|} \right) = 0, \quad (\text{Б.11})$$

откуда:

$$z_{nm} = \frac{\hbar^2}{m^2 g l_g^2} \frac{\delta_{mn} - (-1)^{n+m}}{(\lambda_m - \lambda_n)^2}, \quad (\text{Б.12})$$

$$\frac{z_{n \neq m}}{l_g} = 2 \frac{(-1)^{n+m+1}}{(\lambda_m - \lambda_n)^2}.$$

Приложение В

Явные выражения для матричных элементов оператора возмущения с помощью вибрации поверхности

Найдем явное выражение для матричных элементов оператора $\hat{X} = l_g \frac{d}{dz}$ по собственным волновым функциям (2.11) гамильтониана (2.1):

$$X_{n \neq k} = \frac{\tilde{X}_{nk}}{N_n N_k} = \frac{1}{N_n N_k} \int_0^\infty \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n \right) \text{Ai}' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k \right) dz. \quad (\text{B.1})$$

Запишем уравнение на функцию Эйри:

$$- \text{Ai}'' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k \right) + \frac{z}{l_g} \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k \right) = \tilde{\lambda}_k \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k \right). \quad (\text{B.2})$$

Домножим уравнения на $\text{Ai}' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n \right)$ и выполним интегрирование по z . Первое слагаемое уравнения дает:

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty \text{Ai}'' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k \right) \text{Ai}' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n \right) dz = \\ & = -l_g \text{Ai}' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n \right) \text{Ai}' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k \right) \Big|_0^\infty + \\ & + \frac{1}{l_g} \int_0^\infty \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n \right) z \text{Ai}' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k \right) dz - \tilde{\lambda}_n \tilde{X}_{nk}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

второе слагаемое дает:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l_g} \int_0^\infty \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k \right) z \text{Ai}' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n \right) dz = \\ & = -\frac{1}{l_g} \int_0^\infty \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n \right) z \text{Ai}' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k \right) dz, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

правая часть уравнения принимает вид:

$$\tilde{\lambda}_k \int_0^\infty \text{Ai} \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k \right) \text{Ai}' \left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n \right) dz = \tilde{\lambda}_k \tilde{X}_{kn}. \quad (\text{B.5})$$

Установим связь между \tilde{X}_{nk} и \tilde{X}_{kn} :

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{nk} &= \int_0^\infty \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n\right) \text{Ai}'\left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k\right) dz = \\ &= l_g \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n\right) \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k\right) \Big|_0^\infty - \tilde{X}_{kn},\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

где $\text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_n\right) \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k\right) \Big|_0^\infty \approx -a_{CP}^2/l_g^2 \text{Ai}'(-\lambda_k)\text{Ai}'(-\lambda_n)$.

Из всех частей уравнения получаем окончательно:

$$l_g \text{Ai}'(-\tilde{\lambda}_n)\text{Ai}'(-\tilde{\lambda}_k) - \tilde{\lambda}_n \tilde{X}_{nk} = -\tilde{\lambda}_k \left(\frac{a_{CP}^2}{l_g} \text{Ai}'(-\lambda_n)\text{Ai}'(-\lambda_k) + \tilde{X}_{nk} \right). \quad (\text{B.7})$$

В результате выражение для матричного элемента:

$$\tilde{X}_{nk} = l_g \frac{\text{Ai}'(-\tilde{\lambda}_n)\text{Ai}'(-\tilde{\lambda}_k) + \tilde{\lambda}_k \frac{a_{CP}^2}{l_g^2} \text{Ai}'(-\lambda_n)\text{Ai}'(-\lambda_k)}{\tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda}_k}. \quad (\text{B.8})$$

С точностью до $(a_{CP}/l_g)^2$ выражение для \tilde{X}_{nk} имеет вид:

$$\tilde{X}_{nk} = l_g \frac{\text{Ai}'(-\lambda_n)\text{Ai}'(-\lambda_k)}{\lambda_n - \lambda_k}. \quad (\text{B.9})$$

С учетом того, что $N_n \approx l_g^{1/2} \text{Ai}'(-\lambda_n)$, получаем для X_{nk} :

$$X_{nk} = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k}. \quad (\text{B.10})$$

Найдем диагональные матричные элементы:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_{kk} &= \int_0^\infty \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k\right) \text{Ai}'\left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k\right) dz = \\ &= l_g \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k\right) \text{Ai}\left(\frac{z}{l_g} - \tilde{\lambda}_k\right) \Big|_0^\infty - \tilde{X}_{kk},\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

что с точностью до $(a_{CP}/l_g)^2$ равняется нулю, т.е.:

$$X_{kk} = 0. \quad (\text{B.12})$$