

Физический Институт им. П.Н.Лебедева Российской Академии Наук

На правах рукописи

Воронин Алексей Юрьевич

**Физика взаимодействия ультрахолодного антиводорода
с веществом**

Специальность 01.04.16

Физика атомного ядра и элементарных частиц

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2015

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Взаимодействие водорода и антиводорода при ультра низких энергиях	23
1.1 Кинематика реакции $H + \bar{H} \rightarrow Pn + Ps$	24
1.2 Качественная модель взаимодействия $H\bar{H}$ и характерные пространственные масштабы	26
1.3 Чувствительность модели взаимодействия $H\bar{H}$ к параметрам задачи	32
1.3.1 Роль неупругости	32
1.3.2 Вблизипороговые квантовые состояния	36
1.3.3 Влияние сильного взаимодействия	42
1.3.4 Изотопический эффект	45
1.3.5 Детали взаимодействия $H\bar{H}$ в различных моделях	46
1.4 Модель связанных каналов взаимодействия $H\bar{H}$ в пределе низких энергий	49
1.5 Передача спина в столкновениях ультра холодных $H\bar{H}$	56
Глава 2. Взаимодействие ультрахолодного антиводорода с материальной поверхностью	73
2.1 Квантовое отражение и поглощение	74
2.2 Вероятность квантового отражения как функция расстояния	82
2.3 Ультрахолодный \bar{H} в волноводе	86
2.4 Учет свойств реальных поверхностей и отражение от тонких пленок	92
Глава 3. Атом антиводорода в гравитационном поле	98
3.1 Гравитационные состояния \bar{H} вблизи материальной поверхности	98

3.2	Интерференция гравитационных состояний антиводорода . . .	108
3.2.1	Измерение гравитационной массы антиводорода	113
3.2.2	Пространственно-временные корреляции	115
3.2.3	Квантовый баллистический эксперимент	118
3.3	Резонансная спектроскопия гравитационных состояний	124
3.3.1	Динамический Штарк эффект	132
3.4	Реализуемость эксперимента по наблюдению гравитационных состояний антиводорода	138
3.4.1	Ширина распределения временных событий падения .	140
3.4.2	Формирование распределения по скоростям	141
Глава 4.	Состояния шепчущей галереи атомов антиводорода	143
4.1	Рассеяние антиводорода на цилиндрической поверхности. . .	144
4.1.1	Моды шепчущей галереи.	146
4.1.2	Наблюдение эффекта шепчущей галереи	151
4.2	Интерференция состояний шепчущей галереи	157
4.3	Замкнутый резонатор шепчущей галереи.	161
4.3.1	Учет гравитации	164
4.4	Полюса Редже в рассеянии на цилиндре.	164
4.4.1	Формальное решение	165
4.4.2	Уравнение для полюсов Редже	167
4.4.3	Асимптотическое выражение для полюсов Редже . . .	170
4.4.4	Вычеты	173
4.4.5	Физический смысл полюсов Редже	176
Закключение	178
	181
Приложение А.	191
А.1	Построение базиса	191
А.2	Симметрии волновой функции	193
А.3	Преобразования координат	194

А.4 Вклад различных конфигураций в базисные функции	196
А.5 Уравнения для амплитуд рассеяния	196
Приложение Б.	198
Приложение В.	200
Приложение Г.	202
Приложение Д.	204

Введение

Актуальность темы.

Интерес к атому антиводорода (\bar{H}) обусловлен тем, что это простейшее стабильное связанное состояние антивещества, для которого возможно наиболее полное и точное теоретическое описание. Атом антиводорода представляет собой фундаментальную систему, дополняющую атом водорода с точки зрения симметрии между частицами и античастицами. Синтез атомов антиводорода требует значительных плотностей антипротонов низких энергий, поэтому практический интерес к лабораторному синтезу антиводорода и активное обсуждение возможных методов реализации такой задачи [1–3] оказалось связанным с развитием экспериментальной техники создания высоких плотностей антипротонов в фазовом пространстве [5], и прежде всего с запуском в 1982 г. накопительного кольца антипротонов низких энергий LEAR в европейском центре ядерных исследований CERN. Первые лабораторные атомы антиводорода были получены в эксперименте коллаборации PS210 при столкновении антипротонов с атомами Хе [4]. Энергия таких столкновений была достаточной, чтобы в поле Хе породить электрон-позитронную пару. Позитрон с некоторой вероятностью вылетал коллинеарно налетающему антипротону и оказывался захваченным в основное связанное состояние атома антиводорода. Полученные таким образом несколько атомов (11 ± 2) антиводорода детектировались по одновременному появлению продуктов аннигиляции антипротона и позитрона в детекторах LEAR. Кинетическая энергия таких атомов была порядка 1 ГэВ, а время пролета через установку около 20 ns. К сожалению, указанного времени наблюдения явно недостаточно для достижения значительной точности при исследовании свойств изолированного атома антиводорода.

Синтез холодных атомов антиводорода в результате рекомбинации позитронов и антипротонов в специально сконструированной ловушке [6–8]

открывает гораздо большие возможности для прецизионных экспериментов. Целью таких экспериментов является возможно более точное сравнение свойств вещества и антивещества. Речь идет, прежде всего, о проверке СРТ теоремы, согласно которой структура уровней изолированных атомов антиводорода и водорода должна быть строго идентичной. Применение методов атомной спектроскопии к измерению частоты $1S-2S$ перехода в атоме антиводорода позволяет, во всяком случае в принципе, достигнуть рекордной точности, полученной для атома водорода [9].

Измерение гравитационной массы антиводорода является другим важным направлением сравнения свойств вещества и антивещества. Согласно принципу эквивалентности, ускорение свободного падения атомов в данной месте в гравитационном поле Земли должно быть одинако для атомов водорода и антиводорода (это утверждение с известными уточнениями может формулироваться как равенство инертной и гравитационной массы для любых тел). Из СРТ теоремы следует равенство инертной массы частицы и соответствующей античастицы, следовательно, должны быть равны и гравитационные массы последних. Стоит отметить, что измерение ускорения свободного падения заряженных античастиц чрезвычайно осложнено наличием неустранимых электромагнитных взаимодействий, многократно превышающих по интенсивности изучаемые гравитационные. Этим объясняется отсутствие среди измеренных фундаментальных физических величин гравитационной массы античастиц. Атом антиводорода, как стабильная электронейтральная система, представляется значительно более удобным объектом для таких измерений. Для целей исследования гравитационных свойств антиводорода необходимо достижение ультранизких температур, когда энергия вертикальной компоненты теплового движения антиатомов сопоставима с их потенциальной энергией в гравитационном поле внутри экспериментальной установки. Измерение гравитационных свойств антиводорода является целью экспериментов Gbar [10, 11] и Aegis [12, 13].

Однако исследование свойств изолированных атомов антиводорода не исчерпывает физически интересных задач, изучение которых становится возможным благодаря синтезу холодного антиводорода. Взаимодействие антиводорода с веществом при ультранизких энергиях обладает рядом уникальных свойств, ранее не исследованных в достаточной мере ни теоретически, ни экспериментально. Отметим некоторые из них.

Система, состоящая из атомов водорода и антиводорода, представляет собой фундаментальную молекулярную систему, свойства которой в значительной мере определяются симметрией между водородом и антиводородом. Очевидной особенностью молекулярных систем, состоящих из антиводорода и атомов вещества является отсутствие обменного взаимодействия в следствии отсутствия запрета Паули для пары электрон-позитрон. Это приводит к существенно иной роли лептонов в случае реакций взаимодействия H и \bar{H} по сравнению с молекулярными системами, состоящими только из атомов вещества. В частности, вероятность реакции обмена спином между водородом и антиводородом в пределе нулевых энергий, в отличие от случая двух атомов водорода, определяется в основном сильным короткодействующим взаимодействием между нуклоном и антинуклоном. Сечение таких реакций кардинальным образом зависит от тождества сверхтонкого расщепления в водороде и антиводороде. При этом эффекты сильного взаимодействия обнаруживаются на молекулярном уровне (т.е. на масштабах в несколько атомных боровских радиусов r_B) благодаря кулоновскому притяжению между нуклонами. Явление сдвига атомного уровня под действием сильного взаимодействия хорошо известно и находится в центре внимания физики экзотических атомов ($p\bar{p}$, $p\mu$, $p\pi^-$ и другие [14, 15]). Спектроскопия таких атомов дает ценную информацию о «сильных» длинах рассеяния в заданных квантовых состояниях. В молекулярной системе $H\bar{H}$ влияние сильного взаимодействия на молекулярные уровни и сечения реакций дополняется симметрией взаимодействующей системы относительно зарядово-

го сопряжения. При этом всякое нарушение C – и CP – симметрий проявляет себя на молекулярном уровне как качественное изменение порогового поведения сечений реакций. Точное теоретическое описание такой системы представляет несомненный интерес с точки зрения поиска новых способов исследования фундаментальных симметрий.

Уникальной особенностью физики взаимодействия атомов антиводорода с атомами вещества является притягивательное кулоновское взаимодействие между нуклоном и антинуклоном, что приводит к существованию большого числа открытых неупругих каналов с перестройкой типа $H + \bar{H} \rightarrow p\bar{p} + e\bar{e}$ даже в пределе нулевых энергий столкновения атомов и антиатомов. Это, с одной стороны, усложняет детальный расчет процессов с перестройкой, а с другой стороны позволяет построить модели с эффективным интегральным учетом неупругих процессов, пригодных для описания полных сечений. Впервые анализ системы, состоящей из тяжелого отрицательного нуклона (μ -мезона) и атома водорода был произведен в работах [16, 17]. Важной особенностью подобных систем является наличие так называемого критического радиуса, т.е. такого расстояния между разноименными кулоновскими центрами, при котором исчезает связанное состояние лептонов в поле двух центров. Для системы из водорода и антиводорода такое расстояние оказывается приблизительно равным $0.8r_B$. При сближении на такое расстояние система $H\bar{H}$ претерпевает перестройку. Полуклассический подход, развитый для рассмотрения системы $H\bar{H}$ в работах [18, 20], и для более общего случая адиабатической ионизации [19, 21], состоит в том, что движение нуклонов предполагается классическим, а лептонная подсистема описывается волновой функцией, зависящей от межнуклонного расстояния как от параметра. Ионизация (или перестройка) в таком подходе сводится к выяснению вопроса, достигается ли в процессе движения нуклонов критическое расстояние, при котором начинается перестройка. В случае, если такое расстояние достигается, вероятность пере-

стройки принимается равной единице, в противном случае перестройки не происходит. Потенциал, в котором движутся нуклоны, определяется, вплоть до критической точки, в рамках адиабатического подхода. Обоснование такого подхода хорошо известно и сводится, с одной стороны, к "медленности" движения нуклонов, по сравнению с лептонным движением в широкой области межнуклонных расстояний (вплоть до критического расстояния), и, с другой стороны, к применимости квазиклассического приближения к движению нуклонов в указанной области. Однако при сверхнизких энергиях существенным оказывается квантовый характер движения нуклонов как в области, где применимо адиабатическое приближение, так и на расстояниях порядка и меньше критического, где происходит процесс перестройки. Квантовый характер движения нуклонов приводит к появлению дискретного спектра конечных состояний протония (водородоподобного атома из протона и антипротона). Как будет показано в дальнейшем, в случае столкновений водорода и антиводорода в пределе нулевых энергий лишь несколько состояний протония образуются с заметной вероятностью. Соответственно и спектр вылетающих лептонов будет дискретным. Это означает, что картина полного распада лептонного состояния, локализованного вблизи нуклонов в процессе их классического сближения на малые расстояния должна быть скорректирована с учетом квантовых эффектов в движении нуклонов. Важным является выяснение вопроса о вероятности обратных переходов из конечных каналов $Pn + Ps$ в исходный канал $H + \bar{H}$. Квантовый характер движения нуклонов оказывается важным и при больших межнуклонных расстояниях, когда движение нуклонов происходит в адиабатическом потенциале, имеющем ван-дер-ваальсовскую асимптотику. Дело в том, что при ультранизких энергиях столкновения существенную роль играют вблизипороговые состояния системы $H\bar{H}$. Они отвечают вблизипороговым особенностям (метастабильные связанные, виртуальные состояния и резонансы) S-матрицы, которые возникают в притягивательном адиабати-

ческом потенциале. Вероятность неупругой реакции существенным образом зависит от положения таких особенностей. Это означает, что при рассмотрении столкновений при ультранизких энергиях квантовый характер движения нуклонов должен быть корректно учтен как в области применимости адиабатического приближения (расстояния больше критического), так и при описании процесса перестройки. Попытки такого учета делались при различных упрощающих предположениях [22, 23, 26–29, 31, 32, 34, 35, 38–40], однако для целей прецизионного исследования фундаментальных симметрий требуется подход, позволяющий выяснить роль различных физических эффектов и исчерпывающим образом учесть их при расчете сечений упругих и неупругих процессов, уровней и ширин метастабильных состояний $H\bar{H}$ молекулы.

Квантовые свойства движения ультрахолодного антиводорода проявляют себя нетривиальным образом в другом классе задач: при взаимодействии антиатома с материальной поверхностью. Оказывается, что в пределе нулевых энергий атом антиводорода с единичной вероятностью отражается от материальной поверхности. Причина этого явления состоит в квантовом эффекте надбарьерного отражения медленного атома (с большой де-бройлевской длиной волны) от сравнительно быстро убывающего потенциала Ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера между атомом и поверхностью (в асимптотике как четвертая степень расстояния между поверхностью и атомом). Эффект квантового или надбарьерного отражения хорошо известен [44, 45], его наблюдение для обычных атомов может осложняться интерференцией двух эффектов- собственно квантового отражения, которое происходит на расстояниях в десятки нанометров от поверхности и контактного отражения при взаимодействия атома с поверхностью на малых расстояниях (порядка боровского). Особенностью квантового отражения для антиатомов является отсутствие такой интерференции в силу полного поглощения той части волны, которая попадает внутрь материальной

поверхности. Это обстоятельство позволяет исключить из рассмотрения детали взаимодействия антиводорода с поверхностью на малых расстояниях и заменить его граничным условием полного поглощения. При этом коэффициент отражения определяется только взаимодействием ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера [46, 47]. Расчет такого взаимодействия представляет отдельную физическую проблему с хорошо разработанными методическими подходами, позволяющими получить надежные результаты для взаимодействия атома (анти)водорода с различными поверхностями [48–52]. Это означает, что свойства антиатома вблизи материальной поверхности могут быть предсказаны с прецизионной точностью.

С эффектом квантового отражения связано интересное явление - существование долгоживущих квантовых состояний антиводорода вблизи поверхности в гравитационном поле Земли [53]. Речь идет о квантовых состояниях, локализованных внутри потенциала, созданного суперпозицией гравитационного потенциала и потенциала ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера. Важным оказывается то обстоятельство, что характерная де-бройлевская длина волны антиводорода в гравитационном поле оказывается существенно больше, чем длина рассеяния на потенциале ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера, что и является необходимым условием квантового отражения. Время жизни антиводорода в нижних гравитационных состояниях оказывается порядка долей секунды (оно различно для поверхностей с различным потенциалом ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера).

Хотя существование квантовых состояний частиц в гравитационном поле вблизи материальной поверхности не вызывало особых сомнений, в течении длительного времени эта проблема казалась чисто академической; наблюдение такого экзотического явления представлялось невозможным в силу слабости гравитационного взаимодействия по сравнению с другими взаимодействиями, порождающими неустранимые ложные эффекты. Впервые квантовые состояния движения ультра-холодных нейтронов в гравитацион-

ном поле Земли над отражающей нейтроны поверхностью были открыты в эксперименте В.В. Несвижевского и соавторов в институте Лауэ-Ланжевена (ILL) в Гренобле [58]. Этот эксперимент породил целое направление исследований, связанных с приповерхностными квантовыми свойствами движения ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле [57, 59, 62, 63]. Интерес к таким исследованиям связан в том числе с новыми возможностями изучения фундаментальных взаимодействий [64]. Оказалось, что большое число результатов и принципиальных подходов к решению возникающих при исследовании нейтронов в гравитационном поле сопутствующих задач может быть перенесено на аналогичные явления с ультрахолодными атомами антиводорода. Это важное обстоятельство объясняется близостью масс нейтрона и антиводорода с одной стороны, и малостью отношения длины рассеяния на потенциале атом(нейтрон)-поверхность к характерному размеру состояний в гравитационном поле, с другой стороны. Такое сходство позволяет использовать результаты нейтронных экспериментов для прототипирования затратных экспериментов с ультрахолодным антиводородом.

Гравитационные состояния атомов антиводорода могут быть важным инструментом для прецизионного исследования гравитационных свойств антиводорода. Такое утверждение является, на первый взгляд, контринтуитивным, поскольку влияние поверхности на гравитационные состояния могло бы приводить к плохо контролируемым систематическим погрешностям. На самом деле оказывается, что малый сдвиг гравитационных уровней за счет взаимодействия с поверхностью одинаков для всех уровней в первом порядке теории возмущений по длине рассеяния. Это означает, что при измерении частот переходов эффекты, связанные с влиянием поверхности исчезают (в первом порядке). С другой стороны, как было указано выше, сдвиг уровней определяется хорошо известной асимптотической частью потенциала ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера, поэтому даже остаточный малый

эффект второго порядка в сдвиге частот переходов может быть учтен с высокой точностью.

Измерение частоты переходов между гравитационными уровнями антиводорода позволит извлечь значение гравитационной массы антиводорода и провести лабораторный тест принципа эквивалентности в секторе антиматерии. Такое измерение возможно методом возбуждения резонансных переходов между гравитационными уровнями внешним неоднородным переменным магнитным полем. Переходы между гравитационными состояниями атома антиводорода под действием переменного магнитного поля представляет собой точно решаемую задачу (решение может быть получено в виде быстро сходящегося ряда, для коэффициентов которого можно получить замкнутые аналитические выражения). Привлекательность такого подхода связана с тем, что точность спектроскопических экспериментов, основанных на измерении частоты перехода между квантовыми состояниями существенно превосходит (при оптимальной постановке эксперимента) точность классических баллистических методов по измерению ускорения свободного падения антиатомов.

Другим важным эффектом, связанным с явлением квантового отражения ультрахолодного антиводорода от материальной поверхности, оказывается эффект шепчущей галереи при движении антиатомов вдоль искривленной (цилиндрической или сферической) поверхности. Этот эффект состоит в локализации антиводорода в квантовых состояниях, отвечающих радиальному движению атома вблизи искривленной поверхности. Такая локализация оказывается возможной благодаря появлению эффективной ямы в суперпозиции центробежного потенциала и потенциала ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера. Поскольку размер таких квантовых состояний много меньше радиуса кривизны поверхности, то хорошим приближением является линейное разложение центробежного потенциала вблизи поверхности. Таким образом задача о состояниях шепчущей галереи оказывается в значи-

тельной мере эквивалентна задаче о гравитационных состояниях у поверхности, с той разницей, что вместо линейного гравитационного потенциала выступает линейный (вблизи поверхности) центробежный потенциал. Эффект шепчущей галереи антиводорода открывает возможности для создания особых инструментов для прецизионных измерений- резонаторов шепчущей галереи для антиатомов, представляющих собой по сути ловушки в виде замкнутой цилиндрической или сферической поверхности (открытый с торцов цилиндр или часть сферы, в виде полосы, вырезанной вблизи экватора). Атомы антиводорода, помещенные в такие резонаторы, оказываются локализованными в долгоживущих состояниях шепчущей галереи. Детальная информация о таких состояниях может быть получена по аннигиляционному сигналу, временная зависимость которого связана с частотами переходов между уровнями благодаря интерференции состояний при аннигиляции. Такой метод исследования состояний позволяет, наряду с описанным выше спектроскопическим методом, определить энергетический спектр приповерхностных состояний антиводорода и их ширину, а следовательно, извлечь гравитационную массу антиводорода. Важным достоинством такого подхода является возможность хранения антиводорода в течении макроскопических времен в компактном резонаторе-ловушке в заданном квантовом состоянии или их суперпозиции.

Впервые эффект шепчущей галереи для нейтронов был обнаружен в эксперименте В.В. Несвижевского и соавторов [65], в котором наблюдалось интерференция состояний шепчущей галереи нейтронов и впервые успешно был опробован метод исследования свойств взаимодействия нейтронов с материей на основе интерференции этих состояний. Как уже было указано, сходство квантовых свойств ультрахолодного антиводорода и нейтронов позволяет использовать результаты этих экспериментов для развития экспериментальных методик с атомарным антиводородом.

Таким образом, проблема взаимодействия ультрахолодного антиводорода с веществом порождает целый класс физически нетривиальных задач, решение которых важно как для развития новых методов тестирования фундаментальных симметрий, так и представляют самостоятельный интерес.

Цель работы

Цель работы состоит в 1) разработке и обосновании метода расчета упругих и неупругих сечений столкновений антиводорода и водорода при энергиях меньше $10^{-5} eV$; 2) вычислении энергий и ширин близипроговых состояний $H\bar{H}$; 3) расчете величин и анализ энергетического хода сечения передачи спина в столкновениях $H\bar{H}$ при энергиях меньше $10^{-5} eV$; 4) учете эффектов сильного взаимодействия при столкновениях ультрахолодных водорода и антиводорода; 5) определении коэффициента отражения ультрахолодного антиводорода от различных поверхностей (включая тонкие пленки и пористые структуры); 6) вычислении энергий и ширин близиповерхностных гравитационных состояний антиводорода; 7) расчете вероятности индуцированного резонансного перехода между гравитационными состояниями под действием переменного неоднородного магнитного поля и анализе точности измерения гравитационной массы антиводорода указанным методом; 8) анализе временного распределения событий падения антиатомов на детектор с заданной высоты из заданного квантового состояния и измерении гравитационной массы и ускорения свободного падения антиводорода по указанному распределению; 9) вычислении амплитуды рассеяния атомов антиводорода на цилиндрической поверхности, анализе особенностей амплитуды рассеяния в плоскости комплексного углового момента; 10) вычислении энергий и ширин состояний шепчущей галереи антиводорода; 11) расчете эффектов интерференции состояний шепчущей галереи и анализе интерференционного метода измерения коэффициента отражения ан-

тиводорода от поверхности, гравитационной массы антиводорода 12) расчет замкнутого резонатора шепчущей галереи для антиатомов.

Новые научные результаты, выносимые на защиту

1) расчет величин упругого и неупругого сечения ультрахолодного антиводорода на водороде при энергиях столкновений менее 10^{-5} eV, расчет комплексной длины рассеяния $H\bar{H}$, положение вблизипороговых особенностей S-матрицы и вычисление энергий и ширин метастабильных состояний $H\bar{H}$; расчет сечений передачи спина в столкновениях поляризованного атомарного антиводорода на атомарном водороде при энергиях столкновений менее 10^{-5} eV; выяснение роли сильных взаимодействий во взаимодействии ультрахолодного антиводорода и водорода;

2) расчет коэффициента отражения ультрахолодного антиводорода от материальных поверхностей, включая тонкие пленки и пористые структуры;

3) предсказание существования нового явления- локализации антиводорода в долгоживущих вблизиповерхностных состояниях в гравитационном поле Земли; расчет энергетического спектра и ширин гравитационных состояний антиводорода; разработка спектроскопического метода измерения гравитационной массы антиводорода, включающая расчет вероятностей переходов между гравитационными состояниями под действием периодического неоднородного магнитного поля, расчет сдвига уровней в следствии динамического Штарк-эффекта, оценка точности измерения гравитационной массы; разработка квантового баллистического метода измерения гравитационной массы антиводорода, включающая расчет вероятности временных событий падений антиатомов из заданного квантового состояния и определение по этим данным гравитационной массы антиводорода;

4) метод расчета рассеяния ультрахолодного антиводорода на искривленной поверхности, расчет энергий и ширин состояний шепчущей галереи антиводорода, исследование эффекта интерференции состояний шепчущей

галереи и использование этого метода для выяснения измерения гравитационной массы антиводорода; расчет замкнутого резонатора шепчущей галереи для ультрахолодного антиводорода.

Апробация.

Основные результаты работы докладывались на многочисленных международных конференциях, включая: Hydrogen II workshop, 2000 (Castiglione della Pescaia, Italy); Low Energy Antiproton Physics -LEAP 2003 (Yokohama, Japan); LEAP 2005 (Bonn, Germany); LEAP 2011 (Vancouver, Canada); LEAP 2013 (Uppsala, Sweden); Muon, positron and antiproton interactions with atoms and molecules (Posmol) 2009 (Toronto, Canada); Gravitational Ultracold Neutron Physics Workshop GRANIT 2010, GRANIT 2014 (Les Houches, France); 2 International Workshop on Antimatter and Gravity, 2013 (Bern, Switzerland); International Conference on Exotic Atoms, EXA2014 (Vienna, Austria); Международная сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий» 2013, (Москва, Россия) Черенковские чтения, ФИАН, Москва, Россия 2015; International Seminar on Interactions of neutrons and nuclei, ISINN 23- 2015 (Дубна, Россия). Результаты неоднократно обсуждались на регулярных семинарах в Физическом Институте РАН, на семинарах в ИТЭФ.

Публикации и личный вклад автора

Основные результаты диссертации представлены в 42 работах, которые опубликованы в международных научных журналах, входящих в список ВАК. Вклад автора в полученные теоретические результаты является определяющим.

Структура и содержание диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, пяти приложений, списка литературы.

В **Главе 1** рассматривается проблема взаимодействия ультрахолодного атомарного антиводорода с водородом, включая расчет сечений реакции

образования протония и позитрония в различных состояниях, упругого сечения, сечения передачи спина при столкновении поляризованных атомов и антиатомов, положение и ширины квазисвязанных и виртуальных состояний молекулярной системы $H\bar{H}$.

В параграфе 1.1 рассматривается кинематика основных каналов неупругой реакции $H\bar{H} \rightarrow Pn + Ps$. Выяснены энергетические пороги каналов с образованием протония и позитрония в различных состояниях, характерные энергетические и временные параметры реакции перестройки.

В параграфе 1.2 рассматриваются характерные пространственные размеры, играющие ключевую роль при построении модели неупругого взаимодействия ультрахолодного водорода и антиводорода. В частности выяснены размер области межнуклонных расстояний, в которой происходят неупругие переходы, критический радиус, при котором исчезает связанное состояние лептонов в поле неподвижного протона и антипротона, область применимости квазиклассического приближения к движению нуклонов в адиабатическом потенциале, характерный радиус ван-дер-ваальсовского взаимодействия между водородом и антиводородом.

В параграфе 1.3 обсуждается качественная квантовомеханическая модель неупругого рассеяния водорода на антиводороде, выясняется вопрос чувствительности модели к точному виду взаимодействия (в частности, к учету дополнительных закрытых каналов). Показано, что параметром, определяющим чувствительность всякого модельного расчета к погрешностям модельного описания, является величина неупругости, описываемая мнимой частью фазового сдвига в канале $H\bar{H}$. Физической причиной высокой чувствительности сечений упругого и неупругого рассеяния ультрахолодного водорода и антиводорода к деталям взаимодействия является существование богатого спектра вблизипороговых состояний $H\bar{H}$, порожденных адиабатическим взаимодействием с ван-дер-ваальсовской асимптотикой на больших расстояниях. Сравниваются результаты различных моделей расче-

та. С целью проведения сравнения детали неупругого перехода описываются на едином языке комплексной фазы, генерируемой в области межнуклонных расстояний менее боровского радиуса. Получены положения и ширины вблизипороговых состояний молекулярной системы $H\bar{H}$, положения и траектории соответствующих полюсов S-матрицы как функции модельных параметров взаимодействия $H\bar{H}$ на расстояниях, существенных для неупругих переходов (меньше боровского радиуса). Изучается вопрос об учете сильного взаимодействия между протоном и антипротоном на неупругое и упругое сечение.

В **параграфе 1.4** описывается модель связанных каналов, позволяющая в полной мере учесть квантовый характер движения нуклонов и динамику неупругой перестройки.

В **параграфе 1.5** рассматривается реакция передачи спина при столкновении поляризованного антиводорода на водороде, выяснен вблизипороговый характер поведения сечений реакций перехода между различными спиновыми состояниями. Показано, что эффект передачи спина определяется в основном сильным взаимодействием, а взаимодействие лептонов вносит пренебрежимо малый вклад. Этот механизм качественно отличается от механизма передачи спина между обычными атомами, где ключевую роль играет взаимодействие между электронами. Атомные величины сечений передачи спина в случае взаимодействия водород-антиводород объясняются фокусирующим действием адиабатического потенциала с асимптотикой ван-дер-ваальсовского типа. Наличие вблизипороговых состояний в таком потенциале объясняет усиление интенсивности реакции передачи спина на девять порядков по сравнению с сечением прямой ядерной реакции передачи спина. Вблизипороговая зависимость сечений от энергии существенным образом зависит от факта тождества сверхтонкой структуры водорода и антиводорода, в частности при гипотетическом нарушении СРТ

симметрии кардинально меняется вблизипороговый ход реакций передачи спина.

Глава 2 посвящена проблеме взаимодействия ультрахолодного антиводорода с материальной поверхностью, обусловленному эффектом квантового отражения.

В **параграфе 2.1** приводится анализ потенциала взаимодействия между атомом антиводорода и идеально проводящей поверхностью, выясняется характерная область асимптотик ван-дер-ваальсовского типа и асимптотика Казимира-Полдера. Выясняются области применимости квазиклассического приближения. Приводится обоснование возможности замены решения на малых расстояниях (мене боровского радиуса) условием полного поглощения антиводорода на границе материальной поверхности.

В **параграфе 2.2** приводится анализ эффекта надбарьерного квантового отражения, выясняются особенности генерации отраженной волны при столкновении ультрахолодного антиводорода с проводящей поверхностью методом фазовых функций. Получено качественные приближенные значения и точное численное значение комплексной длины рассеяния антиводорода на потенциале антиводород-проводящая поверхность.

В **параграфе 2.3** рассмотрен вопрос вблизипороговых (надбарьерных) состояний в потенциале ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера. Рассматривается вопрос о спектре состояний атома антиводорода в материальном прямоугольном и цилиндрическом волноводе (в отсутствии гравитации) и коэффициент прохождения через волновод в зависимости от его длины и поперечных размеров.

В **параграфе 2.4** рассмотрен вопрос об отражении антиводорода от тонких пленок и пористых структур.

Глава 3 посвящена исследованию гравитационных состояний антиводорода вблизи материальной поверхности в гравитационном поле Земли и методам измерения гравитационной массы антиводорода.

В **параграфе 3.1** рассматривается вопрос об уровнях и ширине состояний антиводорода в потенциале, образованном суперпозицией гравитационного потенциала Земли и потенциала ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера. Выяснены характерные пространственные и энергетические масштабы при движении атома антиводорода в гравитационном поле. Показано, что сдвиг и ширина нижних гравитационных уровней антиводорода (по отношению к уровням в гравитационном потенциале над идеально отражающей поверхностью) одинаков и определяется отношением длины рассеяния в потенциале ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера к характерной длине волны де Бройля в гравитационном потенциале. Установлено, что время жизни нижних гравитационных состояний антиводорода над идеально проводящей поверхностью составляет 0.1 с. Выяснен вопрос о поправках второго порядка малости к сдвигу и ширине уровней, учитывающих эффективный радиус потенциала взаимодействия антиводорода с поверхностью.

В **параграфе 3.2** рассматривается вопрос об интерференции суперпозиции нескольких гравитационных состояний, проявляющейся в осцилляциях количества аннигиляционных событий как функции времени. Показана, что такая зависимость содержит определяется частотами переходов между гравитационными уровнями и в простейшем случае двух состояний представляет собой гармоническую зависимость от частоты перехода между уровнями.

В **параграфе 3.3** рассматривается вопрос об измерении частоты перехода между уровнями методом резонансных индуцированных переходов. Установлены выражения для вероятности перехода под действием переменного неоднородного магнитного поля и в результате вибраций поверхности. Получены выражения для сдвига уровней в результате динамического Штарк-эффекта. Получены оценки для точности измерения гравитационной массы антиводорода методом резонансных переходов.

В **параграфе 3.4** рассматривается вопрос об измерении гравитационной массы антиводорода квантовым баллистическим методом, т.е. измерением распределения времен падения с заданной высоты приготовленного состояния атома антиводорода. Установлен вид такого временного распределения; показано, что оно определяется импульсным распределением исходного состояния. Рассмотрены способы измерения гравитационной массы антиводорода по временному распределению аннигиляционных событий, соответствующих моментам падения антиатомов на детектор.

Глава 4 посвящена исследованию эффекта шепчущей галереи при отражении ультрахолодного антиводорода от искривленной поверхности.

В **параграфе 4.1** решение уравнения Шредингера для атомов, локализованных в состояниях с высоким угловым моментом вблизи искривленной поверхности, представлено в виде суперпозиции метастабильных состояний в центробежном потенциале с граничным условием на поверхности, отвечающему надбарьерному отражению от потенциала ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера. Установлены положения уровней и ширин таких состояний как функции касательной скорости антиатомов и радиуса кривизны поверхности. В **параграфе 4.2** рассмотрен вопрос об интерференции состояний шепчущей галереи.

В **параграфе 4.3** выяснены особенности S -матрицы рассеяния антиводорода на цилиндрической поверхности в комплексной плоскости углового момента (полюса Редже), выяснена их связь с долгоживущими состояниями шепчущей галереи, получено выражение для амплитуды рассеяния.

В **Заключении** сформулированы основные полученные результаты диссертации.

Глава 1. Взаимодействие водорода и антиводорода при ультра низких энергиях

Проблема взаимодействия водорода и антиводорода при ультра низких энергиях (в дальнейшем мы будем рассматривать энергии столкновений в системе центра масс $E < 10^{-5}$ eV; как будет показано таким энергиям соответствует предельный квантовый характер движения нуклонов) отличается от типичных задач атомных столкновений наличием притягивательного взаимодействия между нуклонами во всем диапазоне межнуклонных расстояний. Этот факт определяет специфику взаимодействия с участием антипротонов- возможность реакций перестройки с образованием связанных (метастабильных по отношению к аннигиляции) состояний из протона и антипротона даже в пределе нулевых энергий столкновений. С другой стороны, в пределе низких энергий существенны квантовые эффекты в движении нуклонов. К числу таких эффектов относится эффект надбарьерного отражения, состоящий в отражении квантовой частицы с большой де-Бройлевской длиной волны от быстро меняющегося притягивательного потенциала. Проявлением такого эффекта оказывается наличие вблизипороговых узких состояний системы $H\bar{H}$, оказывающих существенное влияние на вблизипороговый ход сечений реакций. Положение соответствующих полюсов S-матрицы в комплексной плоскости импульса оказываются чувствительны к деталям взаимодействия на всех межнуклонных расстояния. Это объясняет, в частности, тот факт, что сильные взаимодействия, происходящие на расстояниях порядка $10^{-5}r_B$ (r_B -боровского радиуса атома водорода), тем не менее заметным образом проявляются на атомных масштабах.

Учет указанных особенностей системы $H\bar{H}$ возможен в рамках последовательного квантового формализма рассеяния $H\bar{H} \rightarrow Pn + Ps$, развитию которого посвящена настоящая глава.

1.1. Кинематика реакции $H + \bar{H} \rightarrow Pn + Ps$

Среди возможных каналов реакции взаимодействия $H\bar{H}$ нас будут в первую очередь интересовать упругий канал:

$$H + \bar{H} \longrightarrow H + \bar{H}, \quad (1.1)$$

а также каналы с образованием протония и позитрония

$$H + \bar{H} \longrightarrow Pn + Ps. \quad (1.2)$$

Разумно предположить, что эти реакции имеют наибольшее сечение и дают определяющий вклад в общее сечение упругих и неупругих процессов, поскольку должны иметь атомный порядок сечений. Дополнительными к этим каналам могут быть каналы прямой аннигиляции протона и антипротона и/или электрон-позитронной пары «налету». Анализ сечений таких реакций был проведен в работах [27, 35], где было показано, что они имеют существенно меньшую величину.

Рассмотрим энергетические соотношения, определяющие образование связанных состояний протония и позитрония при столкновении атомарного водорода и антиводорода.

$$-2\epsilon + E_c = -E_n - \epsilon_k - \frac{k^2}{2}\epsilon + T_{nk} \quad (1.3)$$

Здесь ϵ - энергия основного состояния атома водорода, E_c - энергия столкновения H и \bar{H} в системе центра масс, T_{nk} кинетическая энергия разлета Pn и Ps , $E_n = \frac{n^2 M_p}{2m}\epsilon$ - энергия связанного состояния протония с главным квантовым числом n , M_p - масса протона, m - масса электрона, ϵ_k - энергия позитрония, в случае связанного состояния $\epsilon_k = \frac{k^2}{2}\epsilon$, k - главное квантовое число позитрония.

Для дальнейшего важную роль будут играть квантовые числа открытых каналов. В пределе $E_c = 0$ наибольшим квантовым числом протония

оказывается $n_{max} = 24$, при этом позитроний находится в основном состоянии, а кинетическая энергия разлета $T_{24,1} = 1.28$ eV. Квантовое число протония, соответствующее возможности образования возбужденного состояния позитрония в состоянии с $k = 2$ оказывается $n = 22$; энергия разлета в этом канале $T_{22,2} = 0.30$ eV. Этот канал выделяется минимальной энергией разлета фрагментов. В канале с $n = 21$ энергетически возможно как образование возбужденного позитрония с любым k , так и несвязанной пары e^+e^- .

Т.о. энергетически разрешены состояния протония с главным квантовым числом $n \leq 24$. Средний радиус состояния протония $r_n = 3m_e/M_p n^2 r_B$ (здесь r_B - Боровский радиус атома водорода) при $n = 24$ оказывается равным $0.94 r_B$. Это означает, что область взаимодействия нуклонов, в которой происходит перестройка имеет радиус порядка пространственного размера состояния протония с максимальным энергетически допустимым квантовым числом $n = 24$, т.е. величину близкую к r_B .

Для качественного рассмотрения будут важны характерные временные параметры задачи. В частности, важным временным масштабом является классический период движения в протонии с $n = 24$. Этот масштаб задает время сближения и расхождения нуклонов внутри области, где происходит перестройка и оказывается равным $\tau_n \approx 3 \times 10^{-16}$ с. Это время следует сравнивать с характерным временем распада лептонного состояния. Простейшая нижняя оценка такого времени может быть получено как время пролета позитрония в пренебрежении взаимодействием с протоном и антипротоном расстояния порядка боровского радиуса с энергией вылета, характерной для каналов с главным квантовым числом протония $n = 24$, т.е. $\tau_l \approx r_B \sqrt{\frac{m}{T_{24,1}}}$. Несложно убедиться, что оцененное таким образом время распада лептонного состояния оказывается близким к времени пролета нуклонами области взаимодействия.

1.2. Качественная модель взаимодействия $H\bar{H}$ и характерные пространственные масштабы

Гамильтониан, описывающий динамику системы $H\bar{H}$ имеет следующий вид:

$$\widehat{H} = \widehat{T}_p + \widehat{T}_{\bar{p}} + \widehat{T}_e + \widehat{T}_{\bar{e}} - 1/r_{ep} - 1/r_{\bar{e}\bar{p}} - 1/R_{p\bar{p}} + 1/r_{e\bar{p}} + 1/r_{\bar{e}p} + 1/r_{\bar{e}\bar{e}} \quad (1.4)$$

Здесь \widehat{T} -оператор кинетической энергии каждой из частиц (протона, антипротона, электрона и позитрона), $r_{\alpha\beta}$ - расстояние между соответствующими частицами, где α, β обозначают одну из указанных частиц.

Соответствующее уравнение Шредингера для 4-частичного волнового вектора $|\Psi\rangle$:

$$(\widehat{H} - E_c)|\Psi\rangle = 0 \quad (1.5)$$

Указанное уравнение может быть записано в координатной форме в различных Якобиевских системах координат, позволяющих отделить движение центра масс.

Для описания асимптотики в упругом канале $H\bar{H}$ удобно использовать систему координат:

$$\vec{Y}_1 = \vec{r}_{ep} \times \vec{r}_{\bar{e}\bar{p}} \times \vec{R}_{H\bar{H}} \quad (1.6)$$

Здесь \vec{Y}_1 - 9-мерный вектор, составленный из векторов относительного положения частиц в парах ep , $\bar{e}\bar{p}$ и центров масс $H\bar{H}$:

$$\vec{r}_{ep} = \vec{r}_e - \vec{r}_p \quad (1.7)$$

$$\vec{r}_{\bar{e}\bar{p}} = \vec{r}_{\bar{e}} - \vec{r}_{\bar{p}} \quad (1.8)$$

$$\vec{R}_{H\bar{H}} = (m_e \vec{r}_e + M_p \vec{r}_p)/(m_e + M_p) - (m_{\bar{e}} \vec{r}_{\bar{e}} + M_{\bar{p}} \vec{r}_{\bar{p}})/(m_{\bar{e}} + M_{\bar{p}}) \quad (1.9)$$

Описание асимптотики в каналах с образованием протония и позитрония удобно производить в системе координат:

$$\vec{Y}_2 = \vec{R}_{p\bar{p}} \times \vec{r}_{\bar{e}\bar{e}} \times \vec{\rho} \quad (1.10)$$

Здесь \vec{Y}_2 - 9-мерный вектор, составленный из векторов относительного положения частиц в парах $p\bar{p}$, $e\bar{e}$ и центров масс P_n и P_s :

$$\vec{r}_{p\bar{p}} = \vec{r}_p - \vec{r}_{\bar{p}} \quad (1.11)$$

$$\vec{r}_{e\bar{e}} = \vec{r}_{\bar{e}} - \vec{r}_e \quad (1.12)$$

$$\vec{\rho} = (\vec{r}_e + \vec{r}_{\bar{e}})/2 - (\vec{r}_{\bar{p}} + \vec{r}_p)/2 \quad (1.13)$$

Целью дальнейшего рассмотрения является определение характерных пространственных масштабов задачи. Прежде всего нас будут интересовать возможность ввести расстояние между центрами масс H и \bar{H} , на котором начинаются процессы перестройки и образования P_n и P_s .

Для этого мы рассмотрим следующую модель взаимодействия $H\bar{H}$, применимость которой мы обоснуем в дальнейшем. Волновая функция системы $H\bar{H}$ будет представлена в виде двух компонент, каждая из которых корректно описывает соответствующую асимптотику в упругом и неупругом каналах. Кроме того, пользуясь малостью отношения массы электрона к массе протона мы не будем различать координату относительного движения центров масс H и \bar{H} и вектор относительного положения p и \bar{p} , т.е.

$$\vec{R}_{H\bar{H}} \approx \vec{r}_{p\bar{p}} \equiv \vec{R}$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \quad (1.14)$$

$$\Psi_1(\vec{R}, \vec{r}_{ep}, \vec{r}_{\bar{e}\bar{p}}) = \chi(\vec{R})\Phi(\vec{r}_{ep}, \vec{r}_{\bar{e}\bar{p}}, \vec{R}) \quad (1.15)$$

$$\Psi_2(\vec{R}, \vec{r}_{e\bar{e}}, \vec{\rho}) = \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha(\vec{R})\varphi_\beta(\vec{r}_{e\bar{e}})g_{\alpha,\beta}(\vec{\rho}) \quad (1.16)$$

Каждая из компонент волновой функции описывается в «своих» якобиевских координатах. При этом компонента Ψ_1 ищется в виде произведения лептонной волновой функции Φ , зависящей от межнуклонного расстояния как от параметра, и волновой функции нуклонного движения χ , которая

содержит амплитуду рассеяния в упругом канале. При низких энергиях, которые нас интересуют вклад будет давать только S-волна, поэтому мы ограничимся случаем полного углового момента равного нулю. Указанное представление Ψ_1 соответствует адиабатическому приближению. Компонента Ψ_2 представляет собой суперпозицию произведений волновых функций протония f_α с набором квантовых чисел α , волновых функций позитрония φ_β с набором квантовых чисел β и волновых функций относительного движения центров масс протония и позитрония $g_{\alpha,\beta}$, содержащих амплитуды перехода в соответствующие каналы.

Для целей качественного рассмотрения ограничим главное число протония сверху значением $n = 24$, т.е. рассмотрим только открытые каналы. Из структуры компоненты волновой функции Ψ_2 ясно, что

$$\Psi_2(\vec{R}, \vec{r}_{e\bar{e}}, \vec{\rho}) \rightarrow 0, \text{ при } |R| > r_B$$

Это означает, что перестройка происходит в области межнуклонных расстояний, определяемой размером конечных состояний протония, т.е. ограничена расстояниями меньше r_B .

С другой стороны, анализ применимости адиабатического приближения для описания системы $N\bar{N}$ показывает [33], что адиабатическое приближение оправдано при межнуклонных расстояниях $R > r_B$ и критическим образом нарушается вблизи $R_c = 0.8r_B$. Такое поведение объясняется наличием так называемого критического радиуса, т.е. такого расстояния сближения разноименных кулоновских центров, при котором пропадает связанное состояние лептонов в поле неподвижных протона и антипротона. На Рис.1.1 показано поведение лептонного терма, т.е. энергии связи электрона и позитрона в поле протона и антипротона как функция расстояния между ними, вблизи критической точки. Таким образом, нарушение адиабатического приближения связано с выходом терма в сплошной спектр при $R < r_B$.

Таким образом, при межнуклонных расстояниях $R > r_B$ отлична от нуля лишь компонента волновой функции Ψ_1 , а взаимодействие между центрами масс H и \bar{H} описывается адиабатическим потенциалом $V_{ad}(R)$. При $R < r_B$ происходит перестройка. Это означает, что для выяснения вопроса об амплитуде упругого рассеяния (и, следовательно, о сечении упругого и неупругого рассеяния) достаточно решить одноканальное уравнение Шредингера с адиабатическим потенциалом $V_{ad}(R)$ для функции $\chi(R)$ с граничным условием на логарифмическую производную, заданном на расстоянии $R = r_B$. Такое граничное условие, должно, конечно же, быть установлено в результате решения 4-частичной задачи на расстояниях $R < r_B$, т.е. в результате вычисления компоненты волновой функции Ψ_2 . Указанное граничное условие удобно задать в виде :

$$\frac{\chi'(r_B)}{\chi(r_B)} = p(r_B) \cot(\delta) \quad (1.17)$$

Здесь $\delta = \delta_R + i\delta_I$ - комплексная фаза, мнимая часть которой характеризует интенсивность перехода в неупругие каналы, $p(R) = \sqrt{MV_{ad}(R)}$ - классический импульс для движения нуклонов в адиабатическом потенциале $V_{ad}(R)$. Заметим, что в граничном условии можно пренебречь зависимостью от энергии столкновения E_c , поскольку величина взаимодействия между нуклонами, а также характерные энергии разлета фрагментов во всех открытых каналах существенно превышают энергии столкновений в рассматриваемом нами диапазоне $E_c < 10^{-4}$ eV.

В рассматриваемой задаче возникают характерные масштабы расстояний, связанные с асимптотическими свойствами адиабатического потенциала.

Асимптотически адиабатический потенциал переходит в так называемый поляризационный потенциал :

$$V_{ad}(R) \rightarrow -C_6/R^6 - C_8/R^8 + \dots$$

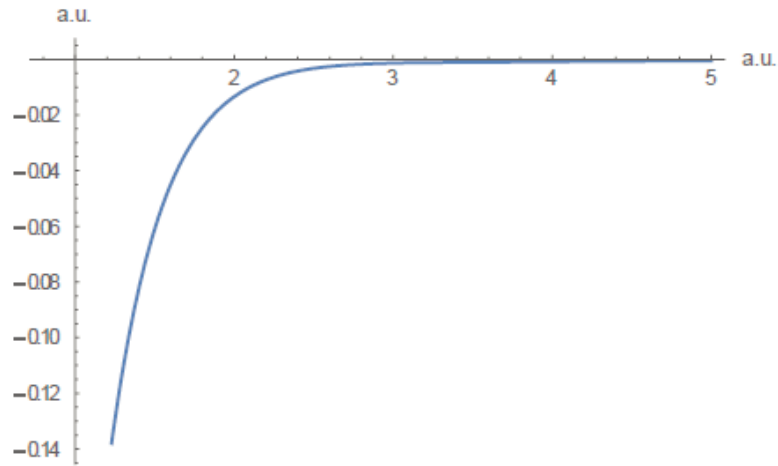


Рис. 1.1. Потенциал взаимодействия $\bar{H} - H$ в упругом канале как функция межатомного расстояния.

Значение констант при обратных степенях R для атомов водорода и антиводорода в основном состоянии хорошо известно, так $C_6 = 6.499027$, $C_8 = 124.399$ Ведущий член в разложении, отвечающий ван-дер-Ваальсовскому взаимодействию между нейтральными атомами $-C_6/R^6$, дает, как будет показано ниже, порядок величины длины рассеяния на потенциале с указанной асимптотикой :

$$R_{vdW} = \sqrt[4]{2MC_6} \simeq 10.5 \text{ a.u.} \quad (1.18)$$

Другой масштаб длины дается расстоянием R_a , начиная с которого адиабатический потенциал выходит на асимптотику $-C_6/R^6$; оценкой для такого расстояния может служить следующее выражение:

$$R_a = C_8/C_6 \sim 5 \text{ a.u.} \quad (1.19)$$

Для выяснения вопроса о роли асимптотического поведения адиабатического потенциала и связанном с ним характерном масштабе расстояний рассмотрим рассеяние на адиабатическом потенциале в квазиклассическом приближении.

Условие применения нижеследующих выражений состоит в том, что квазиклассическое приближение применимо в области межнуклонных расстояний $r_B < R < R_{vdW}$, в чем несложно убедиться непосредственной проверкой.

Выражение для волновой функции $\chi(R)$ в таком приближении принимает вид:

$$\chi(R) \sim \frac{1}{\sqrt{p(R)}} \sin\left(\delta + \int_{r_B}^R p(r') dr'\right) \quad (1.20)$$

В области применимости асимптотического представления $V_{ad}(R) \sim -C_6/R^6$ это выражение может быть записано следующим образом:

$$\chi(R) \sim \frac{R^{3/2}}{\sqrt[4]{2MC_6}} \sin\left(\delta + \Omega - \frac{\sqrt{2MC_6}}{2R^2}\right) \quad (1.21)$$

Здесь

$$\Omega = \int_{R_a}^{\infty} p(r) dr.$$

Указанная функция может быть сшита с точным решением в потенциале $-C_6/R^6$ при нулевой энергии вблизи R_a :

$$\chi_0(R) \sim \sqrt{R} \left(J_{1/4}\left(\frac{\sqrt{2MC_6}}{2R^2}\right) - CY_{1/4}\left(\frac{\sqrt{2MC_6}}{2R^2}\right) \right).$$

Здесь $J_{1/4}$ и $Y_{1/4}$ - регулярная и иррегулярная функции Бесселя [70]. В результате получим следующее выражение для волновой функции в асимптотической области

$$\chi(R > R_a) \sim \sqrt{R} \left(J_{1/4}\left(\frac{\sqrt{2MC_6}}{2R^2}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta\right) Y_{1/4}\left(\frac{\sqrt{2MC_6}}{2R^2}\right) \right). \quad (1.22)$$

Сравнивая полученное выражение с выражением для волновой функции при нулевой энергии на больших расстояниях через длину рассеяния:

$$\chi(R \rightarrow \infty) \sim 1 - R/a \quad (1.23)$$

получим следующее выражение для длины рассеяния [71]:

$$a = a_0 \left(1 + \cot\left(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta\right) \right), \quad (1.24)$$

где a_0 определено как:

$$a_0 = R_{vdW} \frac{\Gamma(3/4)}{2\sqrt{2}\Gamma(5/4)} \simeq 4.99 \text{ а.е.} \quad (1.25)$$

Как видно, введенный ранее радиус R_{vdW} определяет масштаб длины рассеяния на потенциале с асимптотикой $-C_6/R^6$. В дальнейшем будет показано, что указанный радиус связан с эффектом надбарьерного отражения и характеризует расстояние, на котором происходит эффективное отражение падающей волны от быстро меняющегося потенциала с асимптотикой $-C_6/R^6$.

Таким образом, существенной особенностью взаимодействия в системе $H\bar{H}$ является факторизация масштабов: на межнуклонных расстояниях $R < r_B$ происходит перестройка и неупругие переходы, на расстояниях $R > r_B$ применимо адиабатическое приближение и задача сводится к одноканальному рассеянию в адиабатическом потенциале при дополнительном граничном условии, устанавливаемом на волновую функцию нуклонов на расстоянии r_B и выражаемую через комплексную фазу. Длина рассеяния в такой задаче определяется выражением (1.24). Длина рассеяния представляется в виде произведения ван-дер-ваальсовского радиуса R_{vdW} и множителя, определяющего резонансный характер рассеяния.

1.3. Чувствительность модели взаимодействия $H\bar{H}$ к параметрам задачи

1.3.1. Роль неупругости

Для корректного учета тех физических явлений, которые определяют величины упругого и неупругого рассеяния, и эффективного построения приближений, необходимо проанализировать чувствительность задачи к различным параметрам. В частности, при проведении численных расчетов встает вопрос об ограничении базиса разложения (количества узлов, и

т.п.). Полезно заранее оценить, насколько чувствительны будут результаты вычислений к тому или иному упрощению модели, и выяснить физическую причину такой зависимости.

Ранее было установлено выражение для комплексной длины рассеяния $H\bar{H}$ (1.24). Указанное выражение содержит фазу $\Omega + \delta + \pi/8$, аккумулированную на всех межнуклонных расстояниях. При этом фаза Ω определяется лишь областью $R > r_B$, где движение нуклонов описывается движением в адиабатическом потенциале. Для адиабатического потенциала [33], используемого в нашей работе, значение Ω оказалось равным:

$$\Omega = 19.383$$

Комплексная фаза $\delta = \delta_R + i\delta_I$ определяется областью перестройки $R < r_B$, ее мнимая часть описывает процессы перехода в другие каналы. Наибольшие технические трудности представляет именно расчет фазы δ . Нашей задачей будет оценка чувствительности сечений к вариации фазы δ , рассматриваемой как свободный параметр.

Выражения для сечений упругого и неупругого рассеяния с учетом выражения (1.24) принимают вид:

$$\sigma_{el} = 4\pi a_0^2 \left[(1 + \operatorname{Re} \cot(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta))^2 + (\operatorname{Im} \cot(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta))^2 \right], \quad (1.26)$$

$$\sigma_{in} = 4\pi \frac{a_0}{k} \operatorname{Im} \cot(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta). \quad (1.27)$$

Их можно уточнить с учетом поправок эффективного радиуса:

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi |a|^2}{1 - 2k \operatorname{Im} a + k^2 (|a|^2 - \operatorname{Re}(r_e a))}, \quad (1.28)$$

$$\sigma_{in} = \frac{4\pi}{k} \frac{|\operatorname{Im} a|}{1 - 2k \operatorname{Im} a + k^2 (|a|^2 - \operatorname{Re}(r_e a))}. \quad (1.29)$$

где эффективный радиус связан с длиной рассеяния (1.24) согласно выражению [71]:

$$r_e = \frac{a_0}{3} \left[\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \right]^2 \left(1 - 2\frac{a_0}{a} + 2\frac{a_0^2}{a^2} \right).$$

Подставляя a из (1.24) окончательно получим:

$$r_e = \frac{a_0}{3} \left[\frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)} \right]^2 \frac{(\cot(\pi/8 + \Omega + \delta))^2 + 1}{(\cot(\pi/8 + \Omega + \delta) + 1)^2}. \quad (1.30)$$

Как видно из приведенных выше соотношений, сечения рассеяния содержат зависимость от котангенса фазы.

Острота такой зависимости определяется величиной мнимой части фазы δ_I .

Рассмотрим сначала случай сильного поглощения, когда $\delta_I \gg 1$.

В этом случае соответствующие сечения, длина рассеяния и эффективный радиус имеют вид:

$$a = a_0(1 - i), \quad (1.31)$$

$$r_e = 0, \quad (1.32)$$

$$\sigma_{el} = 8\pi a_0^2, \quad (1.33)$$

$$\sigma_{in} = 4\pi \frac{a_0}{k}. \quad (1.34)$$

Как видно из приведенных выражений, сечения рассеяния и длина рассеяния в случае сильного поглощения вообще не содержат никакой информации о деталях взаимодействия на расстояниях, меньше a_0 . Это легко понять, так как случай сильного поглощения означает отсутствие отраженной волны, « порожденной » малыми расстояниями и содержащей информацию о деталях взаимодействия на таких расстояниях. Отраженная волна в нашем случае возникает исключительно как эффект надбарьерного отражения от потенциала $-C_6/R^6$. Физика эффекта надбарьерного отражения будет детально рассмотрена в Главе 2. Здесь мы укажем, что характерной областью, где происходит такое отражение, оказываются такие расстояния, на которых нарушается квазиклассическое приближение при переходе

к асимптотической области. Это как раз область сшивки квазиклассического решения с асимптотическим выражением при нулевой энергии, т.е. расстояния порядка a_0 . Часть падающей волны, отраженная надбарьерно от этой области, определяет сечение рассеяния, а часть волны, прошедшая над барьером, полностью поглощается.

При наличии полного поглощения задача предельно упрощается, так как детали реакции перестройки фактически исключаются из рассмотрения.

Рассмотрим теперь обратный случай слабого поглощения, характеризующийся малой величиной мнимой части фазы $\delta_I \ll 1$. Длины рассеяния и сечения рассеяния оказываются:

$$a = a_0 \left(1 + \cot\left(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta_R\right) \right) - ia_0 \delta_I / \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta_R\right), \quad (1.35)$$

$$\sigma_{el} = 4\pi|a|^2 = 2\pi a_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8} + \Omega + \delta_R\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta_R\right)}, \quad (1.36)$$

$$\sigma_{in} = 4\pi|\operatorname{Im} a|/k = 4\pi \frac{a_0}{k} \frac{\delta_I}{\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta_R\right)}. \quad (1.37)$$

Наиболее примечательным свойством указанных выражений является ярко выраженный осцилляторный характер. Максимумы отвечают значениям вещественной части фазы:

$$\pi/8 + \Omega + \delta_R = \pi\nu, \text{ где } \nu\text{-целое} \quad (1.38)$$

На рисунке Рис.1.2 изображено упругое сечение как функция вещественной части фазы δ_R для разных значений мнимой части фазы. В одном случае $\delta_I = 0.3$, во втором $\delta_I = 0.7$. В первом случае изменение сечения при вариации вещественной фазы происходит в десятки раз, во втором не более чем в 2 раза. Аналогичный график для сечения аннигиляции представлен

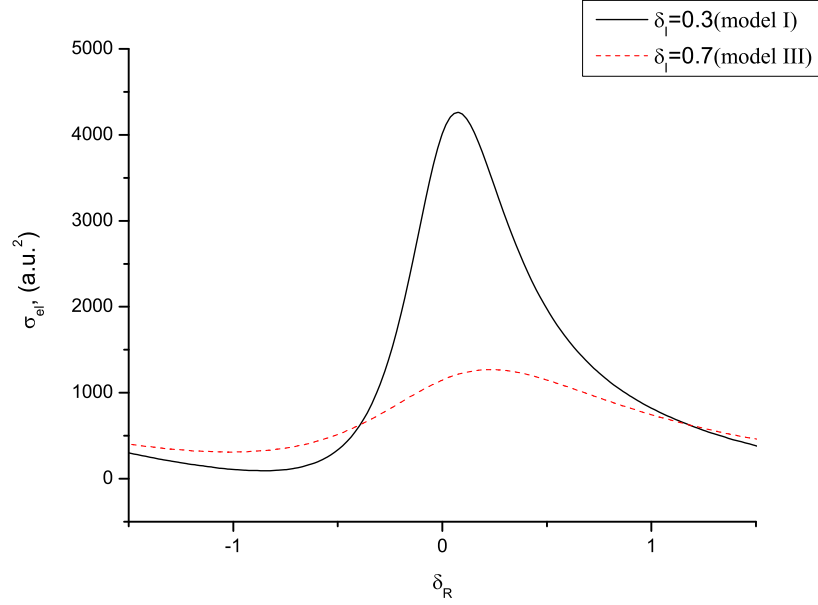


Рис. 1.2. Упругое сечение H^-H как функция фазы δ_R , при $E \rightarrow 0$.

на рисунке Рис.1.3. На рисунке Рис.1.4 представлено при тех же условиях отношения упругого к аннигиляционному сечению.

1.3.2. Вблизипороговые квантовые состояния

Выясним физическую причину указанного выше осцилляционного поведения. Для этого исследуем вблизипороговые особенности S -матрицы в упругом канале как функции комплексного импульса. Несложно догадаться, что резкое изменение в длине рассеяния и сечении реакций связано с появлением вблизипорогового полюса S -матрицы при определенном значении полной фазы $\pi/8 + \Omega + \delta_R$. Выражение для S -матрицы через вклад ее полюсов может быть в нашем случае представлено следующим образом:

$$S = \prod_k \frac{z_k + k}{z_k - k} \exp(-2ik\bar{a}) \quad (1.39)$$

Здесь z_k - k -ый полюс в комплексной плоскости импульса, а \bar{a} - параметр, имеющий размерность длины и не зависящий от импульса. При наличии вблизипорогового полюса, дающего доминирующий вклад, получим следу-

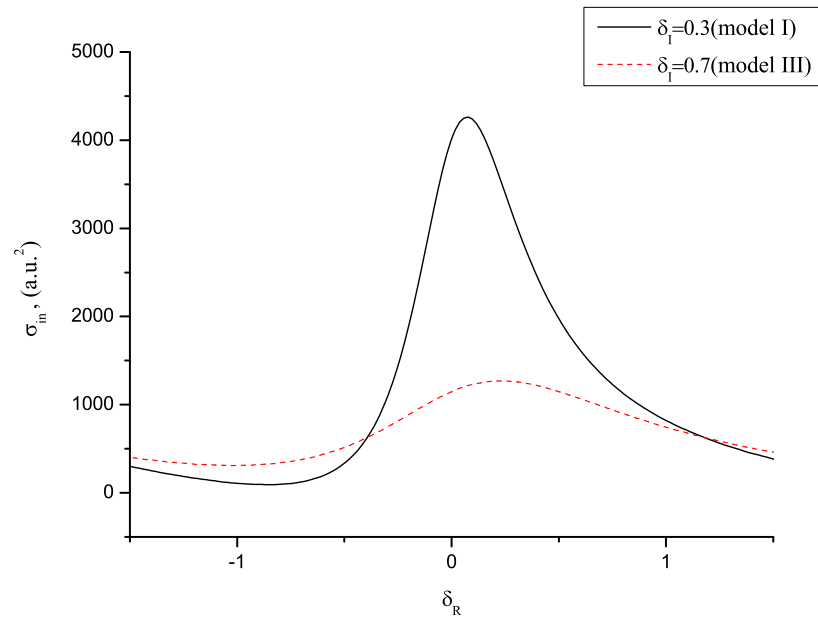


Рис. 1.3. Сечение аннигиляции $H - \bar{H}$ как функция фазы δ_R , при энергии $E=10^{-6}$ а.е. .

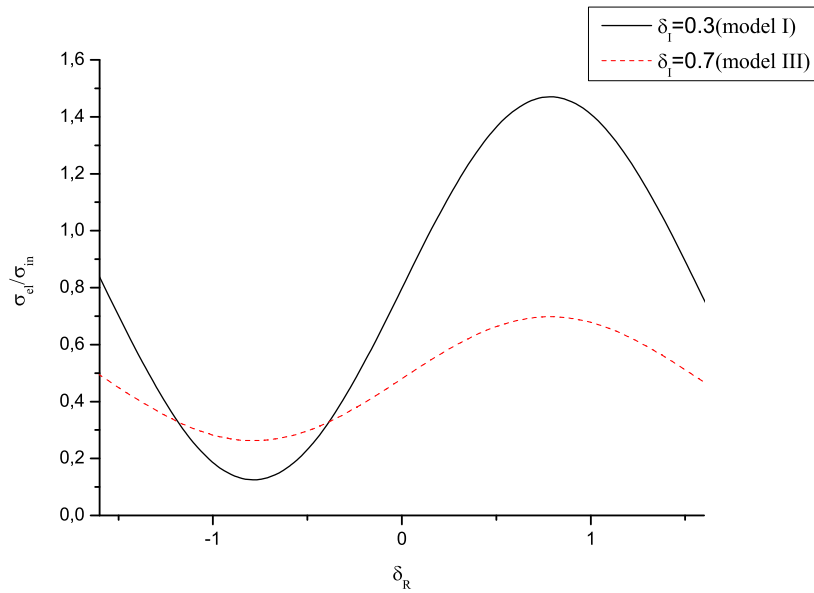


Рис. 1.4. Отношение упругого к аннигиляционному сечению как функция фазы δ_R , вычисленное при энергии $E=10^{-6}$ а.е..

ющее представление S-матрицы в однополюсном приближении:

$$S(k) \approx \frac{z+k}{z-k} \exp(-2ik\bar{a}). \quad (1.40)$$

В этом случае для длины рассеяния несложно получить следующее выражение:

$$a = i/z + \bar{a}. \quad (1.41)$$

Сравнивая указанное выражение с выражением для длины рассеяния (1.24), получим для положения вблизи порогового полюса в комплексной плоскости момента:

$$z = i/(a - a_0).$$

$$z = \frac{i}{a_0} \tan(\delta + \Omega + \pi/8). \quad (1.42)$$

Несложно видеть, что максимумам в сечении (1.38) отвечают положения полюса непосредственно у порога. Такие вблизи пороговые полюса, как это видно из (1.42), возможны только при условии слабого поглощения $\delta_I \ll 1$. Используя это условие малости, можно получить:

$$z = \frac{i}{a_0} \tan(\delta_R + \Omega + \pi/8) - \frac{\delta_I}{a_0 \cos^2(\delta_R + \Omega + \pi/8)}. \quad (1.43)$$

При прохождении полюса S-матрицы через вещественную (отрицательную) ось комплексного импульса вблизи порога длина рассеяния оказывается равной:

$$a_{res} = a_0 \left(1 - i \frac{\cosh(\delta_I)}{\sinh(\delta_I)} \right) \quad (1.44)$$

Мнимая часть длины рассеяния $H\bar{H}$ (описывающая поглощение) оказывается максимальной в этот момент:

$$\text{Im } a_{res} = -\frac{a_0}{\delta_I}. \quad (1.45)$$

Примечательно, что небольшие вариации вещественной части фазы δ_R приведут в этом случае к максимальной вариации длины рассеяния:

$$\Delta a = \frac{2a_0 \Delta \delta_R}{\cosh(\delta_I)}.$$

Это дает важное указание: при малой неупругости возможен резонансный случай, когда оказываются существенны даже малые поправки к фазе δ_R , обусловленные как учетом дополнительных физических эффектов (ниже речь пойдет об эффекте сильного взаимодействия), так и ограничениями модели, используемой для вычислений.

Выясним связь энергий вблизипороговых состояний с фазой. Для энергии вблизипороговых состояний E_b получим следующее выражение:

$$E_b = \frac{z^2}{M} = -\frac{\tan^2(\delta_R + \Omega + \pi/8)}{Ma_0^2} - 2\frac{i\delta_I \tan(\delta_R + \Omega + \pi/8)}{Ma_0^2 \cos^2(\delta_I + \Omega + \pi/8)}. \quad (1.46)$$

В случае, если полюс находится очень близко к вещественной оси, так что $\delta_R + \Omega + \pi/8 = \pi v + \varphi$ и $\varphi \ll \delta_I$, выражение (1.46) должно быть уточнено:

$$E_0 = \frac{(-\delta_I + i\varphi)^2}{Ma_0^2}. \quad (1.47)$$

Здесь φ мера отклонения от точного резонанса. Состояние на пороге имеет малую ширину и большой радиус:

$$\Gamma = \frac{2\varphi\delta_I}{Ma_0^2}.$$

Детальное исследование свойств состояний в потенциале $\ln 1/R^6$ приведено в (см. [72] и ссылки в этой работе), где приведены более высокие порядки разложения по $a_0/(a - a_0)$. С учетом упомянутых результатов энергия вблизипорогового состояния оказывается :

$$E_0 = -\frac{1}{M(a - a_0)^2} \left(1 + \frac{0.918a_0}{a - a_0} - \frac{0.947a_0^2}{(a - a_0)^2} \right)$$

$$E_0 = -\frac{\tan^2(\delta + \Omega + \pi/8)}{Ma_0^2} (1 + 0.918 \tan(\delta + \Omega + \pi/8) - 0.947 \tan^2(\delta + \Omega + \pi/8)) \quad (1.48)$$

Укажем физическую причину существования узких вблизипороговых S-состояний в потенциале с асимптотическим поведением $-C_6/R^6$. Энергия связанных состояний в адиабатическом потенциале (с учетом мнимой части фазы δ_I они приобретают неупругую ширину) при определенном значении фазы (эффективно описывающей интенсивность взаимодействия на расстояниях $R < r_B$) может оказаться близка к нулю. При дальнейшем изменении фазы δ_R эти состояния становятся виртуальными (в отличие от «истинно» виртуальных состояний в эрмитовом гамильтониане, наши состояния приобретают неупругую ширину за счет перехода в неупругие каналы и поэтому соответствующие полюса S-матрицы сдвигаются с отрицательной мнимой оси импульса в 3 квадрант). Существование таких состояний не вызывает удивления и является хорошо известным фактом, они существуют для большинства потенциалов, способных связать квантовую частицу. Дальнедействующий характер асимптотики $-C_6/R^6$ определяет плотность таких состояний.

При дальнейшем движении по плоскости комплексного импульса виртуальные состояния превращаются во вблизипороговые резонансы. Им отвечают надбарьерные квазистационарные состояния. Причина существования таких состояний состоит в эффекте надбарьерного отражения. Рассмотрим волну, отраженную от начала координат и достигшую точки надбарьерного отражения a_0 слева. Такая волна частично отразится назад, частично пройдет над барьером. Коэффициент прохождения дается выражением (см. Главу 2):

$$|T|^2 = 4\sqrt{ME_{rts}a_0}$$

Этот коэффициент определяет упругую ширину резонанса. Поэтому резонансы с малой энергией имеют наименьшую ширину.

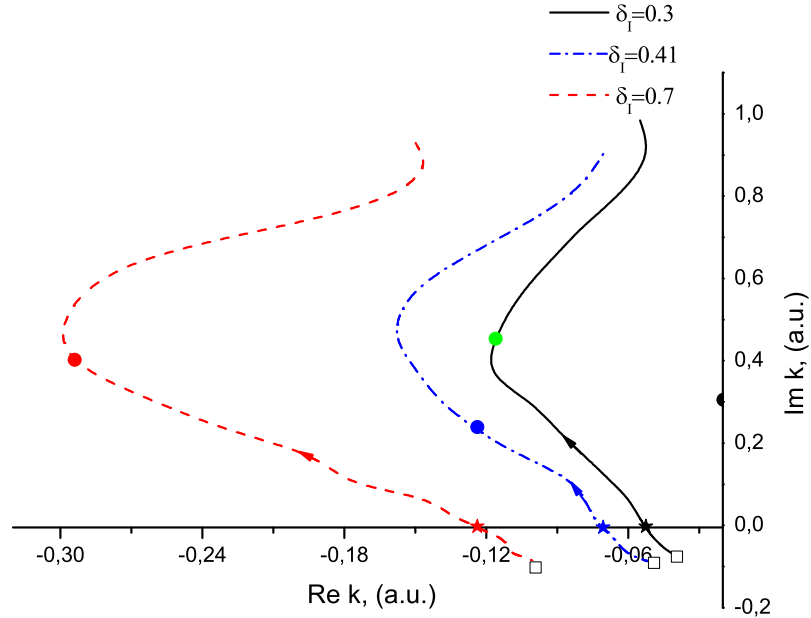


Рис. 1.5. Эволюция полюсов S -матрицы на плоскости комплексного импульса как функция вещественной части фазы δ_R при вариации в пределах $-\pi/2 \leq \delta_R \leq \pi/2$. Сплошная линия соответствует значению $\delta_I = 0.3$ (model I), штрих-пунктирная линия соответствует значению $\delta_I = 0.41$ (model II), штриховая- $\delta_I = 0.7$ (model III). Квадратами обозначены виртуальные состояния, звездами - точки пересечения полюсом вещественной оси, кругами - положения полюсов, соответствующих параметрам модели, применяемой для фактических расчетов сечений $H\bar{N}$. Стрелками указано направление движения полюсов при увеличении δ_R .

1.3.3. Влияние сильного взаимодействия

Развитый выше универсальный подход пригоден для количественной оценки эффекта сильных взаимодействий в системе $H\bar{H}$. Такой эффект проявляется только на межнуклонных расстояниях менее $10^{-5}r_B$. В отличие от «стандартных» ситуаций, когда между собой взаимодействуют атомы вещества, сближение на такие малые расстояния в пределе низких энергий не происходит из-за кулоновского отталкивания. В случае системы атом-антиатом притягивательное взаимодействие между нуклонами не только не препятствует, но и, как мы увидим далее, усиливает эффект сильного взаимодействия.

Учет эффектов сильного взаимодействия удобно производить на языке фазы, аккумулированной в той или иной области межнуклонных расстояний. В силу малости области действия ядерных сил соответствующую «сильную» фазу необходимо просто добавить к величинам δ_R и δ_I , вычисленным без учета ядерных сил.

Пользуясь известным результатом о ядерных фазовых сдвигах в присутствии кулоновского взаимодействия [74] можно извлечь ядерные сдвиги фаз:

$$k [C(\eta) \cot \tilde{\delta}_{sc} + 2\eta h(\eta)] = -1/\tilde{a}_{sc}$$

здесь \tilde{a}_{sc} ядерная длина рассеяния с учетом Кулоновского поля, $\eta = -M/(2k)$ (k - импульс относительного движения протон-антипротон), а функции $C(\eta)$, $h(\eta)$ даются следующими выражениями:

$$C(\eta) = \frac{2\pi\eta}{\exp(2\pi\eta) - 1},$$

$$h(\eta) = 1/2[\Psi(-i\eta) + \Psi(i\eta) - \ln(\eta^2)].$$

Мы использовали обозначение $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$, где $\Gamma(x)$ - стандартная Гамма-функция. В пределе нулевых импульсов получим:

$$\tilde{\delta}_{sc} \approx -2\pi M\tilde{a}_{sc}.$$

Значения сильных длин рассеяния \tilde{a}_{sc} в модели Коно-Вайзе [75, 76]:

$$\tilde{a}_{sc}(S = 0) = (1.07 - i1.45) \cdot 10^{-5} \text{ а.у.}, \quad (1.49)$$

$$\tilde{a}_{sc}(S = 1) = (1.68 - i1.06) \cdot 10^{-5} \text{ а.у.} \quad (1.50)$$

Соответствующие им фазовые сдвиги:

$$\tilde{\delta}_{sc}(S = 0) = -0.06 + i0.08, \quad (1.51)$$

$$\tilde{\delta}_{sc}(S = 1) = -0.1 + i0.06 \quad (1.52)$$

здесь $S = 0, 1$ значения полного ядерного спина.

В Таблице 1.1 приведены значения длин рассеяния, фазовых сдвигов и сечений с учетом и без учета ядерных сил. Эффект ядерных сил нужно сопоставлять с чрезвычайно малым масштабом этих сил по сравнению с характерным атомным.

В Таблице 1.2 приведены значения энергий вблизипороговых состояний и их расщепление благодаря учету сильного взаимодействия.

В дальнейшем мы рассмотрим эффект передачи спина от водорода к антиводороду и покажем, что такая реакция происходит исключительно под действием ядерных сил, но имеет атомный масштаб сечений.

	Model I	Model II	Model III	Model IV
$a, \text{a.u.}$	$5.2 - i1.8$	$8.2 - i2.8$	$5.6 - i3.7$	$7.7 - i0$
$a_{S=0}^{sc}, \text{a.u.}$	$5.6 - i2.2$	$8.3 - i3.4$	$5.8 - i4.0$	$8.4 - i0.4$
$a_{S=1}^{sc}, \text{a.u.}$	$5.8 - i2.1$	$8.6 - i3.4$	$6.0 - i3.9$	$8.1 - i0.6$
δ	$0.696 + i0.305$	$0.136 + i0.41$	$0.638 + i0.715$	$0.287 + i0$
$\sigma_{el}, \text{a.u.}^2$	380	943	566	745
$\sigma_{el,S=0}^{sc}, \text{a.u.}^2$	448	1018	623	889
$\sigma_{el,S=1}^{sc}, \text{a.u.}^2$	472	1077	640	829
$\sqrt{E}\sigma_{in}, \text{a.u.}$	0.53	0.8	1.08	0
$\sqrt{E}\sigma_{in,S=0}^{sc},$ a.u.	0.65	1.0	1.17	0.13
$\sqrt{E}\sigma_{in,S=1}^{sc},$ a.u.	0.62	1.0	1.15	0.18

Таблица 1.1

Значения длин рассеяния, фазовых сдвигов и сечений для моделей с различными значениями фазы δ вычисленных при энергии $E = 10^{-6}$ а.у.

	Model I	Model II	Model III	Model IV
$E, 10^{-5} \text{ а.у.}$	$-10.1 - i5.6$	$-2.2 - i3.2$	$-3.8 - i13.1$	$-4.9 - i0$
$E_{S=0}^{sc} 10^{-5} \text{ а.у.}$	$-8.4 - i6.7$	$-1.4 - i3.3$	$-0.7 - i12.8$	$-4.3 - i0.8$
$E_{S=1}^{sc} 10^{-5} \text{ а.у.}$	$-7.8 - i6.1$	$-1.3 - i2.9$	$-0.8 - i11.5$	$-3.9 - i0.6$

Таблица 1.2

Энергия ближайшего к порогу состояния в моделях, отличающихся различными значениями фазы δ . Первая строка- без учета сильного взаимодействия, вторая и третья строка с учетом спин-зависящего сильного взаимодействия в состояниях с полным спином $S=0$ и $S=1$.

1.3.4. Изотопический эффект

Развитый формализм позволяет предсказать сильный изотопический эффект при замене водорода на дейтерий $D + \bar{H}$. Причина состоит в том, что вещественная квазиклассическая фаза пропорциональна корню из приведенной массы нуклонов, поэтому замена приведенной массы $M/2$ на $2/3M$ приведет к замене фаз на следующие выражения:

$$\Omega_D = \sqrt{4/3}\Omega,$$

$$\delta_D = \sqrt{4/3}(\delta - \pi/4) + \pi/4.$$

Индекс D относится к дейтерию. В приведенных выше формулах была учтена кулоновская квантовая поправка к квазиклассической фазе $-\pi/4$.

Забегая вперед, укажем, что в модели связанных каналов, детали которой будут приведены позже, мнимая часть фазы в случае $H\bar{H}$ $\delta_I = 0.3$, а изотопический эффект приводит к изменению длины рассеяния:

$$a_{D\bar{H}} = 15.0 - i11.6 \text{ а.у.},$$

для системы $D\bar{H}$ вместо

$$a_{\bar{H}} = 5.2 - i1.8 \text{ а.у.},$$

для системы $H\bar{H}$.

Причина такого сильного эффекта была указана ранее: наличие вблизи пороговых состояний, положение которых существенно зависит от фазы. Изменение суммарной фазы, аккумулированной на межнуклонных расстояниях $0 < R < R_{vdW}$ приводит к изменению положения вблизи пороговых состояний и, соответственно, к значительной вариации сечений.

Заметим, что в случае сильного поглощения $\delta_I \gg 1$ вблизи пороговых состояний нет и длина рассеяния меняется с изменением приведенной массы μ как корень четвертой степени $a_0 \sim \sqrt[4]{2\mu C_6}$.

1.3.5. Детали взаимодействия $H\bar{H}$ в различных моделях

Предложенный подход может быть применен для анализа учета деталей описания взаимодействия $H\bar{H}$ в различных моделях.

Система $H\bar{H}$ исследовалась в рамках различных подходов [23–29, 31, 35, 36, 38, 39, 67]. Во всех моделях использовались практически тождественные адиабатические потенциалы V_{ad} на расстояниях $R > r_B$ [40]. В то же время совершенно различные приближения использовались для описания взаимодействия на меньших межнуклонных расстояниях. Так, в работе [28] при вычислении упругого сечения не учитывались ни эффекты перестройки, ни сильное взаимодействие. В работах [36, 68] учет перестройки проводился в рамках приближения искаженных волн; в работах [36, 39] сечение аннигиляции вычислялось без учета перестройки, но с учетом сильного взаимодействия; в работах [31, 67] проводились непертурбативные расчеты в модели оптического потенциала. Для сравнения моделей и чувствительности каждой из них по отношению к учету тех или иных эффектов мы вводим следующие обозначения. Модель I - настоящая работа, см. также [31], вычисленная в рамках данной модели длина рассеяния $a = 5.2 - i1.8$ а.у.; Модель II [26] - длина рассеяния - $a = 8.2 - i2.8$ а.у.; Модель III [67] - длина рассеяния $a = 5.6 - i3.7$ а.у., Модель IV [68] - длина рассеяния $a = 7.69$ а.у.. Указанные модели отличаются, прежде всего, учетом неупругих переходов и, соответственно, величиной δ . Физические наблюдаемые, рассчитанные в этих моделях, приведены в Таблицах 1.1 и 1.2.

На рисунке Рис.1.6 представлена универсальная зависимость комплексной длины рассеяния $H\bar{H}$ от фазы δ , описывающей процесс неупругой реакции, при фиксированном адиабатическом потенциале $V_{ad}(R)$. В виду того, что прецизионные вычисления реакции перестройки в системы 4 тел - весьма трудоемкая задача, оказывается полезным оценить чувстви-

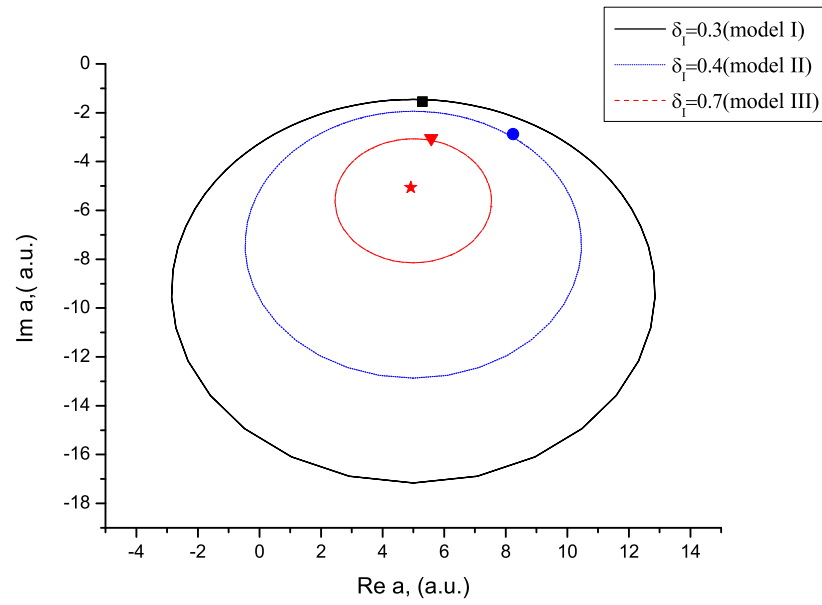


Рис. 1.6. Комплексная длина рассеяния как функция вещественной фазы δ_R , при фиксированном значении δ_I . Квадрат-значение длины рассеяния в модели I, круг - в модели II, треугольник - в модели III. Звезда отвечает значению $a \simeq 5 - i5$ а.у. в пределе $\delta_I \gg 1$.

тельность модели к учету тех или иных эффектов, с тем, чтобы заранее выяснить требуемую точность.

К числу таких эффектов следует отнести упругое взаимодействие между нуклонами и лептонами в процессе перестройки. Наиболее точно эта проблема может быть сформулирована на языке эффективного оптического потенциала. В таком подходе переход в неупругие каналы описывается нелокальным комплексным (вообще говоря зависящим от энергии) потенциалом. Действие такого потенциала локализовано в области межнуклонных расстояний $R < r_B$. Мнимая часть оптического потенциала описывает эффективное поглощение, т.е. переход в неупругие каналы, в то время как вещественная часть - упругое взаимодействие между нуклонами и лептонами. Рассмотрим вопрос о влиянии неопределенности в учете эффекта упругого взаимодействия нуклонов с лептонами в области $R < r_B$ на наблюдаемые.

Основной вклад в потенциал межнуклонного взаимодействия на расстояниях $R < r_B$ вносит [26, 36] потенциал кулоновского взаимодействия, сдвинутый на величину порога образования протония:

$$V_{loc}(r) = -1/r + 0.75. \quad (1.53)$$

Такой потенциал непрерывно переходит в адиабатический $V_{ad}(r)$ при $R \approx r_B$.

Однако эффекты взаимодействия нуклонов с лептонами приведут к дополнительному взаимодействию, которое может, для целей качественного анализа, быть моделировано локальным потенциалом вида:

$$V_{opt} = \frac{(v - iw)}{r_B} \exp(-2r). \quad (1.54)$$

Подчеркнем, что мы не предполагаем, что реальное взаимодействие сводится к указанному выше потенциалу. Нас будет интересовать лишь вопрос о том, насколько изменятся результаты расчета сечений с учетом дополнительного сдвига фазы за счет дополнительного взаимодействия, ло-

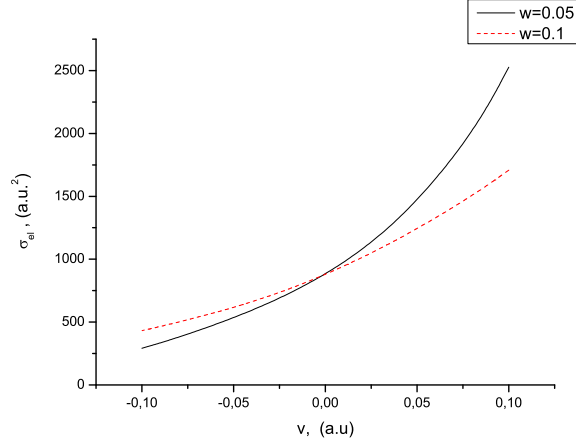


Рис. 1.7. Упругое сечение как функция вещественной части ν оптического потенциала (1.54), вычисленная при энергии $E=10^{-6}$ а.е.

кализованного на расстояниях $R < r_B$. Вещественная часть указанного потенциала эффективно описывает упругое взаимодействие нуклонов с лептонами.

В квазиклассическом приближении поправка к фазе δ оказывается равной:

$$\delta \approx \int_0^{R_s} \sqrt{-2M[V_{loc}(r) + V_{opt}(r)]} dr - \pi/4. \quad (1.55)$$

На рисунках Рис. 1.7 и Рис.1.8 представлены упругое и неупругое сечения реакции $H + \bar{H} \rightarrow Pn + Ps$, как функции вещественной части эффективного оптического потенциала.

1.4. Модель связанных каналов взаимодействия $H\bar{H}$ в пределе низких энергий

В предыдущих параграфах были выяснены ключевые особенности взаимодействия $H\bar{H}$ в пределе низких энергий. К таким особенностям относятся разделение пространственных масштабов задачи: неупругая перестройка происходит на расстояниях $R < r_B$, на больших расстояниях задача описывается в рамках адиабатического приближения. Учет квантовых эф-

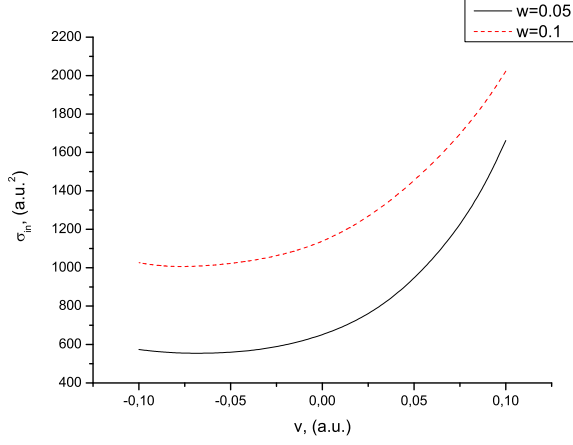


Рис. 1.8. Неупругое сечение как функция вещественной части v оптического потенциала (1.54), вычисленная при энергии $E=10^{-6}$ а.е.

эффектов сводится к вычислению фазы, аккумулированной на расстояниях от 0 до R_{vdW} , которая определяет положение вблизипороговых полюсов S-матрицы и сечения реакции.

Чувствительность модели к тем или иным физическим эффектам в основном определяется степенью неупругости реакции, которая характеризуется мнимой частью фазы δ_I .

При построении модели связанных каналов мы будем использовать разложение волновой функции на две компоненты, аналогичное 1.14, с той лишь разницей, что мы более не будем предполагать тождество между координатами $\vec{R}_{H\bar{H}}$ и \vec{R} .

$$\Psi^0 = \Psi_1 + \Psi_2 \quad (1.56)$$

$$\Psi_1(\vec{R}, \vec{r}_{ep}, \vec{r}_{e\bar{p}}) = \chi(\vec{R}_{H\bar{H}})\Phi(\vec{r}_{ep}, \vec{r}_{e\bar{p}}, \vec{R}_{H\bar{H}}) \quad (1.57)$$

$$\Psi_2(\vec{R}, \vec{r}_{e\bar{e}}, \vec{\rho}) = \sum_{\alpha,\beta} f_{\alpha}(\vec{R})\varphi_{\beta}(\vec{r}_{e\bar{e}})g_{\alpha,\beta}(\vec{\rho}) \quad (1.58)$$

В разложении по состояниям протония и позитрония мы ограничимся только открытыми каналами. Такая функция корректно описывает асимп-

тотическое поведение системы в каналах с перестройкой и точно описывает движение в канале $H\bar{H}$ при $R_{H\bar{H}} > r_B$.

Подстановка такой волновой функции в уравнение Шредингера позволяет стандартными методами получить интегро-дифференциальную систему уравнений конечного числа связанных каналов. Тем не менее такой анзац волновой функции может использоваться лишь как приближение, поскольку не приспособлен для последовательного уточнения вида волновой функции в зоне перестройки $R \sim r_B$, $r_{PnPs} \sim r_b$, $\rho \sim r_B$.

Последовательный учет корреляций в области реакции требует того или иного подхода к дискретизации состояний континуума [42, 43]. Для решения указанной проблемы в условиях нашей задачи мы поступим следующим образом.

Введем L_2 базис в 9-мерной, ограниченной области пространства Ω_9 ($R < R_0$, $r_{PnPs} < r_0$, $\rho < rho_0$), описывающей область реакции, таким образом, чтобы базисные функции обращались в 0 на границах области. Диагонализуем гамильтониан (1.4) по этому базису и найдем новые базисные функции собственных функций гамильтониана (1.4) в введенном пространстве L_2 :

$$(\widehat{H} - E_\alpha)\Phi_\alpha = 0 \quad (1.59)$$

Детали построения такого базиса приведены в Приложении 1.

Будем искать полную волновую функцию в виде:

$$\Psi = \Psi^0(\mathbf{S}, \mathbf{T}) + \sum_{\alpha} C_{\alpha} \Phi_{\alpha} \quad (1.60)$$

Такая запись позволяет учесть детали волновой функции в области перестройки, благодаря введению дополнительного члена, представленного в виде суммы по базисным функциям из 9-мерного пространства Ω_9 . Для вычисления S -матрицы в упругом канале \mathbf{S} и амплитуд перехода в неупругие каналы \mathbf{T} необходимо вычислить содержащие их функции $\chi(\vec{R}_{H\bar{H}})$ и $g_{\alpha,\beta}(\vec{\rho})$.

Поскольку функции Φ_α составляют полный базис, то поведение волновой функции внутри области Ω_9 может быть полностью описано одной только комбинацией базисных функций $\sum_\alpha C_\alpha \Phi_\alpha$. Важно, что компонента Ψ^0 при этом может быть по сути произвольной внутри области Ω_9 . Важно, чтобы функция Ψ^0 имела правильное поведение на границе и гладко переходила в асимптотическую форму, т.к. на границах области Ω_9 базисные функции Φ_α обращаются в ноль и не могут корректно воспроизводить вид искомой волновой функции рассеяния. Это означает, в частности, что $\chi(R_{H\bar{H}} = 0) = 0$, и аналогично, $g_{\alpha,\beta}(\rho = 0) = 0$, а на границах области Ω_9 указанные функции должны непрерывно переходить в соответствующие асимптотические функции, содержащие искомые величины \mathbf{S} и \mathbf{T} .

Подстановка в уравнение Шредингера дает следующее выражение для коэффициентов разложения:

$$C_\alpha(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \frac{\langle \Phi_\alpha | (\widehat{H} - E) | \Psi^0(\mathbf{S}, \mathbf{T}) \rangle}{E - E_\alpha} \quad (1.61)$$

Для нахождения искомых величин \mathbf{S}, \mathbf{T} воспользуемся условием непрерывности сшивки волновых функций на границе области Ω_9 :

$$\sum_\alpha \frac{\langle \Phi_\alpha | (\widehat{H} - E) | \Psi^0(\mathbf{S}, \mathbf{T}) \rangle}{E_\alpha - E} \frac{d\Phi_\alpha}{dR_{H\bar{H}}} \Big|_{R_0} = 0 \quad (1.62)$$

$$\sum_\alpha \frac{\langle \Phi_\alpha | (\widehat{H} - E) | \Psi^0(\mathbf{S}, \mathbf{T}) \rangle}{E_\alpha - E} \frac{d\Phi_\alpha}{d\rho} \Big|_{\rho_0} = 0 \quad (1.63)$$

$$(1.64)$$

Таким образом, используя некоторый анзац для функции Ψ_0 , содержащей в качестве неизвестных только набор искомых амплитуд (или их функций) \mathbf{S}, \mathbf{T} , мы получим систему уравнений (1.62) для указанных амплитуд. Действительно, условие непрерывности на границе области Ω_9 выполняется не для произвольных значений \mathbf{S}, \mathbf{T} , а лишь для тех, которые согласованы с решением уравнения Шредингера в указанной области.

Рассмотрим более подробно применение указанного подхода к рассеянию в пределе низких энергий. Мы ограничимся случаем S-рассеяния в упругом канале.

Несложно убедиться, зная порядок длины рассеяния $R_{vdW} \approx 10r_B$, что условие применимости S-волнового приближения ограничивается энергиями столкновений $E_c < 10^{-5}$ eV. Поскольку мы рассматриваем столкновения водорода и антиводорода в $1S$ состояниях, то полный угловой момент также равен 0. Несложно показать, что переход в состояния Pn с высоким угловым моментом требует соответствующего перехода в состояния с высоким углового лептонов, который сильно подавлен из-за малого перекрытия лептонных волновых функций с большой передачей углового момента [29]. Поэтому основной вклад в амплитуду неупругой реакции дадут состояния Pn и Ps с малыми угловыми моментами.

Как уже было указано, имеется значительный произвол в выборе компоненты волновой функции Ψ^0 ; «неточность» Ψ^0 в области Ω_9 всегда может быть скомпенсирована базисными функциями Φ_α . Выберем Ψ^0 для $R < r_B$ в следующем виде:

$$\Psi^0 = \chi(R_{H\bar{H}})\Phi(\vec{r}_{ep}, \vec{r}_{\bar{e}p}, r_B) + \sum_{L,M,l,m,l',m'} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N Y_{L,l,l'}^{0,0} f_{i,L}(R) \varphi_{k,l}(r) g_{k,i,l'}(\rho) \quad (1.65)$$

$$\chi(R_{H\bar{H}}) = \frac{1}{\sqrt{p(R_{H\bar{H}})}} \sin \left(\int_0^R p(R') dR' + \delta_0 (1 - \exp(-R_{H\bar{H}}/r_B)) \right) \quad (1.66)$$

$$p(R) = \sqrt{M(1/R - 0.75)} \quad (1.67)$$

$$g_{k,i,l'}(\rho) = T_{i,k,l'} \int_0^\infty G_{k,i,l'}(\rho, \rho') \exp(-\rho'/r_B) d\rho' \quad (1.68)$$

Здесь $\Phi(\vec{r}_{ep}, \vec{r}_{\bar{e}p}, r_B)$ - волновая функция лептонов при межнуклонном расстоянии равном r_B , $Y_{L,l,l'}^{0,0}$ - угловая часть канальной волновой функции, δ_0 -искомая комплексная фаза, определяющая S-матрицу в упругом канале, $N = 24$ - максимальное число открытых каналов, $G_{k,i,l'}$ - функция Грина свободного движения фрагментов в канале с квантовыми числами i, k, l ,

$T_{i,k,l}$ - искомые амплитуды переходов, k - главное квантовое число Ps ($k = 1, 2$), i -главное квантовое число Pn ($21 \leq i \leq 24$), L -угловой момент Pn ($L = 0, 1$), l -угловой момент Ps , $l = 0, 1$, l' -угловой момент относительного движения Pn и Ps , $l' = 0, 1$.

Функция $\chi(R_{H\bar{H}})$ описывает относительное движение нуклонов в упругом канале и выбрана в виде квазиклассического решения уравнения Шредингера с межнуклонным потенциалом $V(R) = -1/R + 0.75$ представляющем собой непрерывное продолжение адиабатического потенциала в область малых расстояний, а учет дополнительного взаимодействия с лептонами, приводящим к неупругим переходам и дополнительному фазовому сдвигу, эффективным образом описывается фазовой функцией $\delta_0(1 - \exp(-R/r_b))$. Такой вид волновой функции позволяет, с одной стороны, учесть в явном виде вклад кулоновского притяжения между нуклонами в фазу волновой функции, а с другой, обладает достаточной «степенью гибкости», чтобы описать эффект связи с неупругими каналами. Указанная волновая функция отвечает граничному условию при $R = 0$ и гладко переходит в решение для волновой функции центров масс $H\bar{H}$ в области $R > r_B$.

Волновые функции относительного движения Pn и Ps в открытых каналах $g_{i,k,l'}$ выбраны в форме, которая позволяет корректно описать асимптотики в открытых каналах при $\rho \gg r_B$ и удовлетворяет граничному условию при $\rho = 0$.

Выбор такого физического анзаца для функции Ψ_0 позволяет заметно уменьшить количество базисных функций, необходимых для получения решения в области Ω_9 .

Подставляя (3.71) в (1.62) с учетом явного вида $\chi(R_{H\bar{H}})$ и $g_{i,k,l'}(\rho)$ получим систему уравнений для искомых параметров δ_0 и $T_{i,k,l}$ (см. Приложение 1).

Несложно установить связь между введенной ранее фазой, аккумулярованной в зоне реакции, (4.13), и параметром δ_0 :

$$\delta = \delta_0(1 - e^{-1}) + \int_0^{r_B} p(r)dr$$

Детали численного расчета и особенности выбора базиса приведены в Приложении 1.

Результаты расчета комплексной длины рассеяния, упругого и неупругого сечений, энергий вблизипороговых состояний представлены в Таблицах (1.1, 1.2) в колонке Модель 1. Для сравнения представлены результаты расчетов в других моделях. Важным результатом численных расчетов является определение величины неупругости:

$$\exp(-\delta_2) = 0.74$$

Это означает, что в процессе движения нуклонов на расстояниях меньше r_B со значительной вероятностью происходит процесс обратного перехода в упругий канал. Как было показано ранее, это, в свою очередь, приводит к заметной чувствительности физических наблюдаемых к таким физическим эффектам, как короткодействующее ядерное взаимодействие между нуклонами, а также накладывает серьезные требования на точность расчета. В таблице(1.1) приведены значения сечений с учетом и без учета сильного взаимодействия, а также расщепление вблизипороговых уровней под действием сильного взаимодействия.

1.5. Передача спина в столкновениях ультра холодных $H\bar{H}$

В предыдущем параграфе мы обсуждали уникальную особенность систем с p и \bar{p} , связанную с проявлением сильных взаимодействий на атомных масштабах. Примером такой ситуации является реакция между поляризованными H и \bar{H} , в результате которой происходит изменение спинового состояния каждого из атомов. Эта реакция интересна тем, что энергетический ход сечений вблизи порога качественным образом зависит от тождества между уровнями сверхтонкой структуры в H и \bar{H}

Гамильтониан, описывающий динамику систем в этом случае, запишем в виде:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_{nr} + \sum_{\alpha} \widehat{W}_{\alpha}(\mathbf{s}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha}). \quad (1.69)$$

Здесь \widehat{H}_{nr} не зависящий от спина Гамильтониан (1.4). Индекс α означает здесь пары взаимодействующих частиц: $(p\bar{p})$, (pe) , $(p\bar{e})$, $(\bar{p}e)$, $(\bar{p}\bar{e})$ или $(e\bar{e})$. $\widehat{W}_{\alpha}(\mathbf{s}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha})$ парное зависящее от спина взаимодействие, возникающее при учете релятивистских поправок (в низших порядках) к нерелятивистскому Гамильтониану; оператор $\widehat{W}_{\alpha}(\mathbf{s}_{\alpha}, \mathbf{r}_{\alpha})$ действует на спиновые переменные \mathbf{s}_{α} и относительные координаты \mathbf{r}_{α} пар частиц α .

Анализ существенно упрощается при учете разделения пространственных масштабов взаимодействия $H - \bar{H}$. Как было установлено ранее, перестройка происходит на межнуклонных расстояниях $R \simeq 1$ а.е., в то время как на больших расстояниях применимо адиабатическое приближение и задача сводится к одноканальной. Это позволяет ввести эффективное описание всей реакции в терминах оптического потенциала, локализованного на межнуклонных расстояниях $R < r_B$:

$$\widehat{H}_{nr} \simeq \widehat{T}_{kin} + \widehat{V}_{opt} + V_{ad}(R). \quad (1.70)$$

Отметим, что принцип Паули не запрещает электрону и позитрону находиться в одном состоянии, адиабатический потенциал $V_{ad}(R)$ поэтому оказывается независимым от спина лептонов. Совершенно иная ситуация имеет место для обычных атомов HH , в следствии принципа Паули потенциал межатомного взаимодействия оказывается различным в синглетном и триплетном состоянии. Это различие крайне существенно. Действительно, реакции передачи спина в столкновениях $H - \bar{H}$ могут происходить только за счет (*релятивистских*) поправок к взаимодействию, зависящих от спина $\widehat{W}_\alpha(\mathbf{s}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha)$. В случае же HH основной вклад в амплитуду переходов дает эффективная зависимость от спина *нерелятивистского* адиабатического потенциала, в то время как явно зависящие от спина релятивистские поправки могут в нулевом порядке не учитываться. Как будет показано ниже, основной вклад в передачу спину в столкновениях $H - \bar{H}$ дают зависящие от спина эффекты сильного взаимодействия.

Общий вид зависящего от спина взаимодействия таков:

$$\widehat{W}_\alpha = W_\alpha^0(r_\alpha) + W_\alpha^1(r_\alpha)(\mathbf{L}_\alpha \mathbf{S}_\alpha) + W_\alpha^{2a}(r_\alpha)(\mathbf{r}_\alpha \mathbf{S}_\alpha)^2 + W_\alpha^{2b}(r_\alpha) \mathbf{S}_\alpha^2. \quad (1.71)$$

Здесь \mathbf{r}_α , \mathbf{L}_α , \mathbf{S}_α относительные координаты, операторы углового момента и спина для пары частиц α .

Точный вид такого лептон-лептонного и лептон-адронного взаимодействия может быть получен в рамках QED [78]. В случае пар (pe) и $(\bar{p}\bar{e})$ эти взаимодействия ответственны за сверхтонкое расщепление. Мы воспользуемся приближенным выражением для спин-зависящих взаимодействий в (pe) и $(\bar{p}\bar{e})$ [79]:

$$\widehat{W}_{(ep),(\bar{e}\bar{p})} = a_{HF}(\mathbf{s}_{e,\bar{e}} \mathbf{i}_{p,\bar{p}}) = \frac{a_{HF}}{2}(\mathbf{F}^2 - 3/2). \quad (1.72)$$

Здесь $a_{HF} = 2.157 \cdot 10^{-7}$ а.е. постоянная сверхтонкого расщепления, $\mathbf{s}_{e,\bar{e}}$ - спин электрона (позитрона), $\mathbf{i}_{p,\bar{p}}$ - спин протона (антипротона), а $\mathbf{F} = \mathbf{s} + \mathbf{i}$ полный спин пары (pe) или $(\bar{p}\bar{e})$. Указанный эффективный потенциал корректно описывает сверхтонкое расщепление атомов H and \bar{H} .

Влияние аналогичного взаимодействия в парах $(\bar{p}e)$ ($p\bar{e}$) предполагается пренебрежимо малым в следствии кулоновского отталкивания.

В случае пары $(e\bar{e})$ спин-зависящее взаимодействие определяет сверхтонкую структуру и аннигиляционную ширину позитрония [78]. В следствии CP инвариантности сохраняется спин изолированного атома позитрония. Учитывая этот, мы воспользуемся следующим приближенным выражением для искомого взаимодействия в позитронии:

$$\widehat{W}_{(e\bar{e})} = \alpha^0 \delta(\mathbf{r}_{P_s}) \widehat{P}_0 + \alpha^1 \delta(\mathbf{r}_{P_s}) \widehat{P}_1. \quad (1.73)$$

Здесь α^0 и α^1 константы, отвечающие синглетному и триплетному состояниям:

$$\alpha^0 = -4.3 \cdot 10^{-4} - i4.9 \cdot 10^{-6} \text{ а.у.}, \quad (1.74)$$

$$\alpha^1 = 3.3 \cdot 10^{-4} - i4.3 \cdot 10^{-9} \text{ а.у.}, \quad (1.75)$$

В этих формулах $\widehat{P}_0 = |S_{P_s} = 0, 0\rangle \langle S_{P_s} = 0, 0|$, $\widehat{P}_1 = \sum_M |S_{P_s} = 1, M\rangle \langle S_{P_s} = 1, M|$ - проекционные операторы на синглетное и триплетное состояния позитрония.

Такая форма эффективного взаимодействия сохраняет спин и корректно воспроизводит сдвиг и ширину уровней орто- и пара-позитрония.

Основной вклад в спин-зависящее взаимодействие пары $(p\bar{p})$ определяется сильным взаимодействием. Сильное взаимодействие CP инвариантно и сохраняет спин S_{P_n} протония. Кроме того, это взаимодействие притягивательное и локализовано на расстояниях $R < R_s$, где $R_s \sim 1 \text{ fm}$ ($1.88 \cdot 10^{-5}$ а.у.). Кроме того такое взаимодействие содержит компоненту, ответственное за аннигиляцию $(p\bar{p})$.

Существует несколько моделей взаимодействия $p\bar{p}$ при низких энергиях (см. [75] и ссылки) отличающихся деталями поведения на малых расстояниях. Все эти модели, тем не менее, дают близкие значения для синглетной и триплетной длин рассеяния $a_{sc}^{0,1}$. Поскольку радиус действия сильного вза-

имодействия существенно меньше атомного боровского радиуса, учет сильного взаимодействия при низких энергиях может быть произведен через модификацию граничного условия. Для введения такого граничного условия достаточно знания ядерных длин рассеяния $p\bar{p}$ [69]. На расстояниях $R_s \ll R \ll R_r$ определяющим является кулоновское взаимодействие. Волновая функция межнуклонного движения представляет суперпозицию регулярного $F_0(pR)$ и иррегулярного $G_0(pR)$ Кулоновских решений, при этом можно считать соответствующий импульс $p \rightarrow 0$ [69]. Коэффициент, связывающий эти решения, элемент K -матрицы k , определяется через ядерные длины рассеяния следующим образом [35, 69] :

$$k = \tan(\delta_{sc}^{0,1}) = -\pi M a_{sc}^{0,1}. \quad (1.76)$$

Мы воспользуемся следующими значениями S -волновых длин рассеяния [75, 76]:

$$a_{sc}^0 = (1.07 - i1.45) \cdot 10^{-5} \text{ а.у.}, \quad (1.77)$$

$$a_{sc}^1 = (1.68 - i1.06) \cdot 10^{-5} \text{ а.у.} \quad (1.78)$$

Соответствующий элемент k -матрицы оказываются:

$$\tan(\delta_{sc}^0) = -0.06 + i0.08, \quad (1.79)$$

$$\tan(\delta_{sc}^1) = -0.1 + i0.06. \quad (1.80)$$

На языке векторов состояния $|f(R), S_{Pn}\rangle$, $R_s < R \ll R_r$, этот результат может быть записан так:

$$|f(R), S_{Pn}\rangle \sim |F_0(pR), S_{Pn}\rangle + \widehat{K} |G_0(pR), S_{Pn}\rangle \quad (1.81)$$

$$\widehat{K} = -2\pi M (a_{sc}^0 \widehat{\pi}_0 + a_{sc}^1 \widehat{\pi}_1). \quad (1.82)$$

Здесь $\widehat{\pi}_{0,1}$ проекционные операторы на подпространства синглетных и триплетных состояний протония. Таким образом эффект сильных взаимодействий может быть учтен через K -матрицу (1.82). Модификация граничного

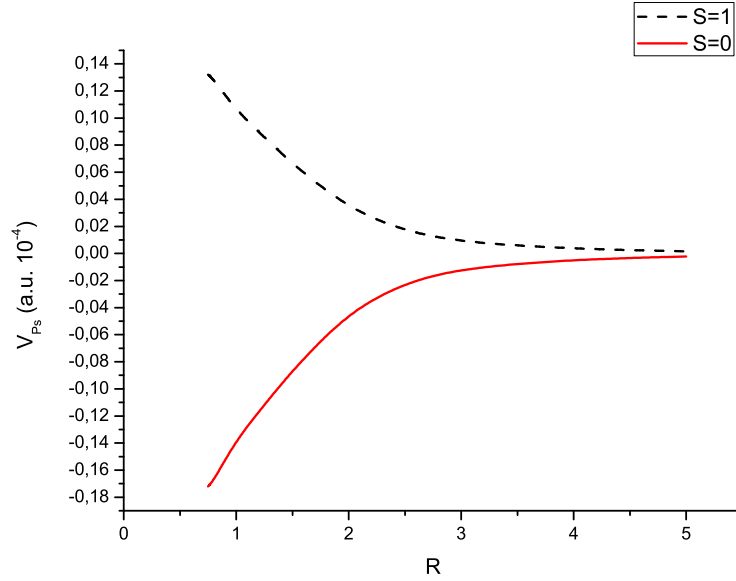


Рис. 1.9. Вещественная часть потенциала в синглетном состоянии (щтриховая линия) и в триплетном состоянии (сплошная линия).

условия в нуле (1.82) эквивалентна введению потенциала нулевого радиуса действия [81]:

$$\widehat{V}_s = \frac{2\pi}{M} (a_{sc}^0 \widehat{\pi}_0 + a_{sc}^1 \widehat{\pi}_1) \delta(\mathbf{R}) \left(\frac{\partial}{\partial R} R \right). \quad (1.83)$$

Для дальнейших вычислений необходимо включить все спин-зависящие взаимодействия (1.71) в эффективное межнуклонное взаимодействие. Усредним лептонное спин-зависящее взаимодействие по невозмущенной лептонной функции $\Psi_{e,\bar{e}}(R, \mathbf{r}_e, \mathbf{r}_{\bar{e}})$. Это приведет к следующему выражению:

$$\widehat{V}_{e\bar{e}}(R) = \int |\Psi_{e,\bar{e}}(R, \mathbf{r}_e, \mathbf{r}_{\bar{e}})|^2 \widehat{W}_{e\bar{e}} d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_{\bar{e}} \quad (1.84)$$

$$\widehat{V}_{e\bar{e}}(R) = A(R) (\alpha^0 \widehat{P}_0 + \alpha^1 \widehat{P}_1), \quad (1.85)$$

где $A(R) = |\Psi_{e,\bar{e}}(R, \mathbf{r}_e = \mathbf{r}_{\bar{e}})|^2$ вероятность лептонной коалесценции. Соответствующие значения вычислены в [35]. Межнуклонный потенциал, полученный в результате такого усреднения, приведен на Рис.1.9.

Обратим внимание, что зависящее от спина взаимодействие (1.71) также модифицирует состояния Pn и Ps каналах с перестрой-

кой. Такие эффекты проявляются только во втором порядке теории возмущений по сильному взаимодействию и не будут здесь приняты во внимание.

Перейдем к вычислению вероятностей переходов между состояниями сверхтонкой структуры водорода и антиводорода в процессе столкновения. Спиновое состояние $H - \bar{H}$ системы может быть описано в различных представлениях, содержащих 16 независимых спиновых компонент. Поскольку спин-зависящее взаимодействие в парах $(p\bar{p})$ и $(e\bar{e})$ сохраняет спин пары, такое взаимодействие будет диагональным в базисе собственных состояний полного спина $(p\bar{p})$ и $(e\bar{e})$. Такое представление мы будем обозначать $|S_{(p,\bar{p})}, M_{(p,\bar{p})}, S_{(e,\bar{e})}, M_{(e,\bar{e})}\rangle$ или S -представлением.

Асимптотический Гамильтониан, описывающий изолированные атомы H и \bar{H} и включающие члены, отвечающие за сверхтонкое расщепление атомов $\widehat{W}_{(pe)}$ and $\widehat{W}_{(\bar{p}\bar{e})}$, диагонален в базисе, в котором спины систем (pe) и $(\bar{p}\bar{e})$ $F_H F_{\bar{H}}$, имеют определенные значения. Такое представление $|F_H, M_H, F_{\bar{H}}, M_{\bar{H}}\rangle$ будем в дальнейшем называть F -представлением. Состояние рассеяния $|\varphi\rangle$ представляется в виде суперпозиции базисных векторов:

$$|\varphi\rangle = \sum_{F_H, M_H, F_{\bar{H}}, M_{\bar{H}}} f(R)_{F_H, M_H, F_{\bar{H}}, M_{\bar{H}}} |F_H, M_H, F_{\bar{H}}, M_{\bar{H}}\rangle \quad (1.86)$$

Зависящие от расстояния R коэффициенты разложения играют роль нуклонных волновых функций $H\bar{H}$ в заданном спиновом состоянии 4 частиц. Асимптотика функций $f(R)$ при больших R стандартным образом дает S -матрицу в заданном спиновом представлении.

Указанные волновые функции могут быть найдены из решения системы связанных уравнений:

$$\sum_{\mu} \langle \mu' | \widehat{H} - E | \mu \rangle F(R)_{\mu, \eta} = 0, \quad \eta = 1, 2, \dots, 16 \quad (1.87)$$

Здесь $F(R)_{\mu',\mu}$ матрица решений размерности 16×16 , индексы в которой означают конечный (μ') и начальный (μ) каналы; η означает набор спиновых квантовых чисел $F_H, M_H, F_{\bar{H}}, M_{\bar{H}}$.

Учтем, что на расстояниях $R \leq r_B$ величина адиабатического потенциала много больше сверхтонкого расщепления. Поэтому даже в пределе нулевых энергий сверхтонким расщеплением можно пренебречь в решении (1.87) на расстояниях $R < r_B$. В S -представлении $|S_{(p,\bar{p})}, M_{(p,\bar{p})}, S_{(e,\bar{e})}, M_{(e,\bar{e})}\rangle$ уравнения не связаны:

$$\left(-\frac{1}{2M} \frac{d^2}{dR^2} + \widehat{V}_{opt} + V_{ad}(R) + A(R)\alpha^{S_{(e\bar{e})}} - E \right) F(R)_{\mu,\mu} = 0, \quad (1.88)$$

здесь μ набор квантовых чисел $S_{(p,\bar{p})}, M_{(p,\bar{p})}, S_{(e,\bar{e})}, M_{(e,\bar{e})}$. Такая система уравнений, дополненная граничным условием, определяемым К-матрицей (1.82):

$$F(R_0)_{\mu,\mu'} = \delta_{\mu,\mu'} \left(F_0(pR_0) - 2\pi a_{sc}^{S_{(p\bar{p})}} G_0(pR_0) \right) \quad (1.89)$$

$$F'(R_0)_{\mu,\mu'} = \delta_{\mu,\mu'} \left(F'_0(pR_0) - 2\pi a_{sc}^{S_{(p\bar{p})}} G'_0(pR_0) \right). \quad (1.90)$$

Вместо решения системы (1.88) с граничными условиями (1.89-1.90) удобнее отнести граничное условие к расстоянию $R_r = r_B$ [69] с учетом ранее найденной фазы δ , аккумулированной в области $R < r_B$:

$$\left(F'(R_r) F^{-1}(R_r) \right)_{\mu,\mu'} = \delta_{\mu,\mu'} p(R_r) \cot(\delta + \delta_{sc}^{S_{(p\bar{p})}}) \quad (1.91)$$

здесь $p(R_r) = \sqrt{2MV_{ad}(R_r)}$ классический импульс на расстоянии R_r .

Учет сильного взаимодействия сводится к добавлению к δ фазового сдвига $\delta_{sc}^{S_{(p\bar{p})}}$, порожденного сильным взаимодействием. Аддитивность фаз объясняется тем, что вклад оптического потенциала, описывающего перестройку пренебрежимо мал на расстояниях действия ядерных сил. Напомним, что вычисленный сдвиг фазы за счет атомного взаимодействия в области перестройки:

$$\delta = 0.74 + i0.32. \quad (1.92)$$

Как только несвязанные уравнения решены в S -представлении, решение следует выразить в F -представлении, корректно описывающем асимптотики, с помощью унитарного преобразования [80]:

$$\widetilde{F}(R) = U^+ F(R) U \quad (1.93)$$

$$U = \langle S_{(p,\bar{p})}, M_{(p,\bar{p})}, S_{(e,\bar{e})}, M_{(e,\bar{e})} | F_H, M_H, F_{\bar{H}}, M_{\bar{H}} \rangle \quad (1.94)$$

Полученное таким образом решение $\widetilde{F}(R)$ должно быть сшито в области действия адиабатического потенциала с решением Φ , в котором учтены пороговые сверхтонкие энергии:

$$\sum_{\mu} \left[\left(-\frac{1}{2M} \frac{d^2}{dR^2} + V_{ad}(R) \right) \delta_{\mu',\mu} + [U^+ \widehat{V}_{(e\bar{e})} U]_{\mu',\mu} + Q_{\mu',\mu} \right] \Phi_{\mu,\eta}(R) = E \Phi_{\mu,\eta}(R) \quad (1.95)$$

$$[\widetilde{F}'(R_0) \widetilde{F}^{-1}(R_0)]_{\mu',\mu} = [\Phi'(R_0) \Phi^{-1}(R_0)]_{\mu',\mu} \quad (1.96)$$

Здесь $Q_{\mu',\mu}$ диагональная матрица (16×16) порогов сверхтонкого расщепления в различных каналах с полным спином F_H и $F_{\bar{H}}$:

$$Q_{\mu,\mu} = \alpha_{HF} \begin{cases} 0 & \text{if } (F_H = 0, F_{\bar{H}} = 0) \\ 1 & \text{if } (F_H = 1, F_{\bar{H}} = 0) \text{ или } (F_H = 0, F_{\bar{H}} = 1) \\ 2 & \text{if } (F_H = 1, F_{\bar{H}} = 1) \end{cases} \quad (1.97)$$

Из сохранения проекции полного спина ($M_{H\bar{H}} = M_H + M_{\bar{H}}$) следует, что Φ -матрица имеет блочную структуру, состоящую из матриц 6×6 ($M = 0$), две 4×4 матрицы ($M_{H\bar{H}} = 1$ и $M_{H\bar{H}} = -1$) и две 1×1 матрицы ($M_{H\bar{H}} = 2$ и $M_{H\bar{H}} = -2$).

Асимптотический вид решения на больших расстояниях $R \rightarrow \infty$:

$$\Phi(R) \rightarrow \exp(-i\hat{p}R) - \exp(i\hat{p}R) \hat{p}^{-1/2} \widehat{S} \hat{p}^{1/2}. \quad (1.98)$$

Здесь \hat{p} диагональная матрица с элементами $\hat{p}_{\mu,\mu} = \sqrt{2M(E - Q_{\mu,\mu})}$; $\exp(\mp i\hat{p}R)$ диагональная матрица с элементами $[\exp(\mp i\hat{p}R)]_{\mu,\mu} = \exp(\mp i\hat{p}_{\mu,\mu}R)$; и \widehat{S} искомая S -матрица.

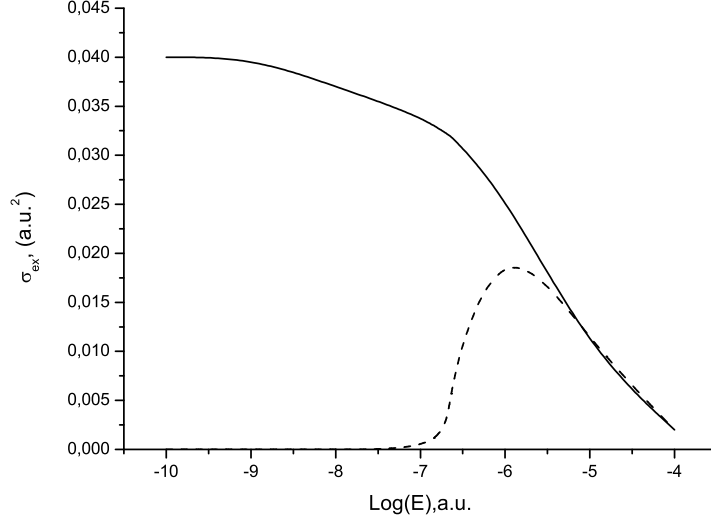


Рис. 1.10. Сечение реакций $\sigma_{d\bar{a} \rightarrow a\bar{d}}$ (сплошная линия) и $\sigma_{d\bar{a} \rightarrow c\bar{d}}$ (штриховая линия).

Мы предполагаем отсутствие внешнего магнитного поля ($B = 0$). Здесь и далее используются стандартные обозначения для состояний сверхтонкой структуры H : $|F_H = 0, M_H = 0\rangle$ обозначено a , состояние $|F_H = 1, M_H = -1\rangle$ обозначено b , состояние $|F_H = 1, M_H = 0\rangle$ - c , а состояние $|F_H = 1, M_H = 1\rangle$ - d . Соответствующие состояния \bar{H} обозначены \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} and \bar{d} .

Мы рассмотрим три типа порогового поведения реакций передачи спина как функция энергия столкновений. Сечения реакций $\sigma_{d\bar{a} \rightarrow a\bar{d}}$ и $\sigma_{d\bar{a} \rightarrow c\bar{d}}$ показаны на Рис.1.10; сечения $\sigma_{c\bar{d} \rightarrow d\bar{a}}$ показаны на Рис.(1.11).

В соответствии с СРТ-инвариантностью, энергии состояний $d\bar{a}$ и $a\bar{d}$ в точности равны, поэтому реакция $d\bar{a} \rightarrow a\bar{d}$ происходит даже в пределе нулевой энергии, $E \rightarrow 0$. В этом пределе сечение стремится к постоянному значению $\sigma_{d\bar{a} \rightarrow a\bar{d}}(E) \rightarrow 0.04 \text{ a.u.}^2$.

Реакция $d\bar{a} \rightarrow c\bar{d}$ происходит при энергиях выше порога $Q_{d\bar{a} \rightarrow c\bar{d}} = \alpha_{HF}$. Пороговое поведение показано на Рис.1.10. Той же величине равно сечение сопряженной реакции $\sigma_{d\bar{a} \rightarrow c\bar{d}} = \sigma_{a\bar{d} \rightarrow d\bar{c}}$.

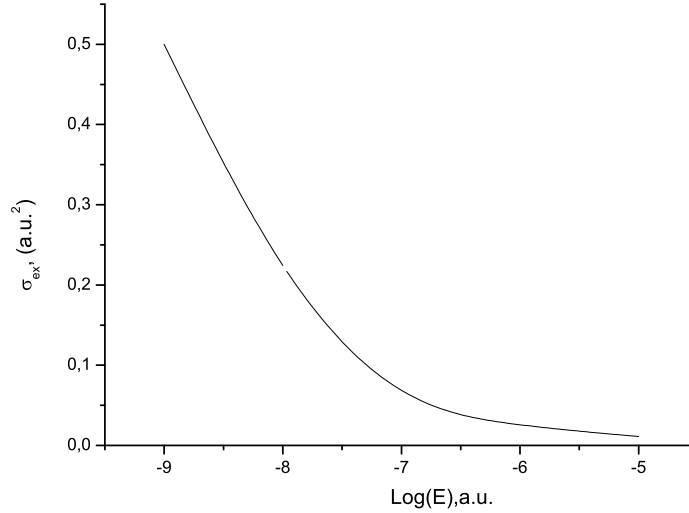


Рис. 1.11. Сечение реакции $\sigma_{cd\bar{\rightarrow}d\bar{a}}$.

Обратная реакция $cd\bar{\rightarrow}d\bar{a}$ - экзотермическая, таким образом сечение ведет себя как $1/v$, где v скорость столкновения см. Рис.1.11. Следовательно, для энергии столкновений $E < \alpha_{HF}$ сечение экзотермической реакции наибольшее из всех возможных реакций передачи спина.

Заметим, что гипотетическое нарушение СРТ-инвариантности будет проявлять себя как качественное изменение характера вблизипорогового поведения реакций передачи спина. В частности, возможная разница в энергиях сверхтонкого расщепления of H и \bar{H} приведет к появлению новых порогов реакции. Как следствие, сечения реакций $d\bar{a} \rightarrow a\bar{d}$ и $a\bar{d} \rightarrow d\bar{a}$ будут следовать закону v или $1/v$, вместо того, чтобы стремиться к постоянной величине при $E \rightarrow 0$.

Когда энергия столкновений заметно превышает величину сверхтонкого расщепления $E \gg \alpha_{HF}$, все сечения реакций передачи спина стремятся к одному пределу. В этом случае сверхтонким расщеплением можно пренебречь даже в асимптотической области. Тогда S -матрица диагональна в S -представлении. Переход в F -представление дается преобразованием (1.94).

Несложно показать, что:

$$S_{d\bar{a} \rightarrow a\bar{d}} = \frac{(\langle 0, 1|S|0, 1\rangle + \langle 1, 0|S|1, 0\rangle)}{4} - \frac{\langle 1, 1|S|1, 1\rangle}{2}, \quad (1.99)$$

$$S_{d\bar{a} \rightarrow c\bar{d}} = \frac{(\langle 0, 1|S|0, 1\rangle - \langle 1, 0|S|1, 0\rangle)}{4}. \quad (1.100)$$

Здесь $\langle i, j|S|i, j\rangle$ элемент S -матрицы в S -представлении, где $S_{p\bar{p}} = i$ и $S_{e\bar{e}} = j$ ($i, j = 0, 1$). Из выражений (1.99, 1.100) :

$$\langle 1, 0|S|1, 0\rangle = \langle 1, 1|S|1, 1\rangle. \quad (1.101)$$

Это означает, что вклад спин-зависящего взаимодействия в паре ($e\bar{e}$) (1.85) пренебрежимо мал. Это подтверждает сравнение вычислений амплитуд перехода с учетом и без учета потенциала(1.85). Длины рассеяния a_{10} и a_{11} в состояниях $|S_{p\bar{p}} = 1, S_{e\bar{e}} = 0\rangle$ и $|S_{p\bar{p}} = 1, S_{e\bar{e}} = 1\rangle$ оказываются:

$$a_{10} = 5.665 - i2.216 \text{ а.у.} \quad (1.102)$$

$$a_{11} = 5.677 - i2.216 \text{ а.у.} \quad (1.103)$$

Та же длина рассеяния a_1 , вычисленная без учета (1.85) оказалась равной:

$$a_1 = 5.666 - i2.216 \text{ а.у.}$$

Чтобы пояснить малый вклад лептонного взаимодействия в передачу спина, заметим, что отношение $|V_{e\bar{e}}(R)/V_{ad}(R)|$ не превышает 10^{-3} и достигает максимума в диапазоне межнуклонных расстояний $3 \text{ а.у.} < R < 5 \text{ а.у.}$ а таких расстояниях применимо квазиклассическое приближение для фазы:

$$\delta_{WKB} = \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{2M|V_{ad}(r)|} dr.$$

Учет спин-зависимых членов в лептонном взаимодействии $V_{e\bar{e}}(R)$ дает :

$$\Delta\delta_{WKB} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sqrt{M}V_{e\bar{e}}(R)}{\sqrt{2|V_{ad}(R)|}} dr < 10^{-3} \frac{\delta_{WKB}}{2}$$

Таким образом мы приходим к выводу, что сечения реакций передачи спина определяются сильным взаимодействием $p\bar{p}$.

Короткодействующий характер ядерных сил приводит к факторизации ядерного и атомного взаимодействий и существенно упрощает изучение энергетической зависимости реакций.

На малых расстояниях, где происходят искомые переходы, можно полностью пренебречь порогами реакций. Используя явный вид матрицы перехода U (1.94) и потенциал нулевого радиуса действия (1.83) можно получить следующее выражение для амплитуды перехода в приближении искаженных волн:

$$f_{\alpha\beta} = \frac{a_{sc}^1 - a_{sc}^0}{4} \int \Psi_{\beta}^{0*}(\mathbf{R}) \delta(\mathbf{R}) \left(\frac{\partial}{\partial R} R \right) \Psi_{\alpha}^0(\mathbf{R}) d^3 R = \frac{a_{sc}^1 - a_{sc}^0}{4} \Psi_{\beta}^{0*}(0) \Psi_{\alpha}^0(0). \quad (1.104)$$

Здесь $\Psi_{\alpha,\beta}^0(\mathbf{R})$ - волновая функция соответствующего начального (конечного) состояния α (β), вычисленная без учета сильного взаимодействия.

Выражение для сечений реакции имеет вид:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \pi \frac{p_{\beta}}{p_{\alpha}} \frac{|a_{sc}^1 - a_{sc}^0|^2}{4} |\Psi_{\beta}^0(0) \Psi_{\alpha}^0(0)|^2, \quad (1.105)$$

где $p_{\alpha,\beta}$ канальный импульс.

Дальнейший анализ удобно провести в терминах функций Йоста f_J [82]:

$$\Psi_{\alpha}^0(\mathbf{R}) = \frac{\phi_{\alpha}^0(R)}{R f_J(p_{\alpha})} \quad (1.106)$$

здесь $\phi_{\alpha}^0(R)$ регулярное S -волновое радиальное решение уравнения Шредингера в спиновом состоянии α . Такое решение в нуле ведет себя:

$$\phi_{\alpha}^0(R \rightarrow 0) = R$$

поэтому

$$\Psi_{\alpha}^0(0) = \frac{1}{f_J(p_{\alpha})}. \quad (1.107)$$

Выражение (1.105) принимает тогда вид:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \pi \frac{p_{\beta}}{p_{\alpha}} \left| \frac{a_{sc}^1 - a_{sc}^0}{2 f_J(p_{\beta}) f_J(p_{\alpha})} \right|^2. \quad (1.108)$$

Вблизипороговое поведение функции Йоста [82] имеет вид:

$$f_J(p_\alpha) = f_J(0) \exp(-ip_\alpha a) \quad (1.109)$$

где a длина рассеяния $H\bar{N}$.

Численные значения этих величин a and $1/|f_J(0)|^2$, как следует из наших предыдущих результатов:

$$a = 5.2 - i1.8 \text{ а.у.} \quad (1.110)$$

$$1/|f_J(0)|^2 = 29067. \quad (1.111)$$

Для вблизипорогового поведения сечений можно приближенно получить следующее выражение:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \pi \frac{p_\beta}{p_\alpha} \exp(2 \operatorname{Im} a(p_\alpha + p_\beta)) \left| \frac{a_{sc}^1 - a_{sc}^0}{2f_J^2(0)} \right|^2. \quad (1.112)$$

Как видно, в случае $p_\alpha = p_\beta$, сечение в пределе нулевых энергий стремится к постоянной величине:

$$\sigma_0 = \pi \left| \frac{a_{sc}^1 - a_{sc}^0}{2f_J^2(0)} \right|^2 = 0.04 \text{ а.у.} \quad (1.113)$$

а в присутствии энергетических порогов поведение сечений определяется мнимой частью $\operatorname{Im} a$ атомной длины рассеяния:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{p_\beta}{p_\alpha} \exp(2 \operatorname{Im} a(p_\alpha + p_\beta)) \sigma_0. \quad (1.114)$$

Сравнение полученных выше аналитических выражений с результатами численных расчетов показывает, что полученная в приближении искаженных волн формула (1.114) совпадает с численным расчетом в пределах нескольких процентов при энергии $E < 10^{-5}$ eV.

Поведение сечения (1.114) вблизи порога имеет ясный физический смысл. Реакции передачи спина происходят при сближении нуклонов на расстоянии порядка 1 fm. Из-за неупругих переходов в каналы $Pn + Ps$ поток $H - \bar{N}$ на этих расстояниях уменьшается пропорционально $\exp(2 \operatorname{Im} a(p_\alpha +$

p_β)). Такой эффект поглощения определяется мнимой частью длины рассеяния. Заметим, что верно и обратное: по энергетическому ходу реакций передачи спина можно определить мнимую часть длины рассеяния [83].

В случае экзотермических реакций ($c\bar{d} \rightarrow d\bar{a}$ или $b\bar{d} \rightarrow a\bar{a}$) прирост кинетической энергии в конечном состоянии : $\Delta E_\beta = n\alpha_{HF}$, $n = 1, 2$.

Из выражения (1.114) следует, что сечения таких реакций ведет себя как d_n/v в пределе $E \rightarrow 0$. Учитывая, что при $E \rightarrow 0$ канальный импульс ведет себя как: $p_\beta \rightarrow \sqrt{2Mn\alpha_{HF}}$, получаем для d_n :

$$d_n = \frac{\sqrt{2Mn\alpha_{HF}}}{M} \exp(2 \operatorname{Im} a \sqrt{2Mn\alpha_{HF}}) \sigma_0, \quad (1.115)$$

Соответствующие численные значения оказываются равными:

$$d_1 = 8.0 \times 10^{-7} \text{ а.у.}^2 \quad (1.116)$$

$$d_2 = 1.1 \times 10^{-6} \text{ а.у.}^2 \quad (1.117)$$

Сечение обратной реакции ($d\bar{a} \rightarrow c\bar{d}$ или $a\bar{a} \rightarrow b\bar{d}$) вблизи порога ведет себя следующим образом: $pd_n/\sqrt{2Mn\alpha_{HF}}$.

Как уже было указано, при энергиях столкновений $E \gg \alpha_{HF}$ все сечения стремятся к единому пределу:

$$\sigma = \exp(4 \operatorname{Im} ap) \sigma_0. \quad (1.118)$$

Важнейшим свойством указанных реакций является факторизация ядерного и атомного масштабов. В то время как эффект сильного взаимодействия проявляется в разности синглетной и триплетной ядерной длины рассеяния, эффект атомных сил проявляется в малом значении функции Йоста. Фактор ($|1/f_J(0)|^4$) значительно усиливает (приблизительно в 10^9 раз!) эффект сильного взаимодействия (по сравнению со случаем отсутствия кулоновских сил). Такое усиление объясняется фокусировкой потока адиабатическим притягивательным потенциалом системы $H\bar{N}$. Подобное усиление ядерных эффектов известно в физике антипротонов низких энергий,

оно связано, с одной стороны, с кулоновским притяжением между нуклоном и антинуклоном и факторизацией соответствующих масштабов взаимодействий [41].

На языке вблизипороговых состояний (несложно показать, что эффект фокусировки и наличие S-волновых вблизипороговых состояний связаны между собой) малость величины $|f_J(0)|$ объясняется тем, что такие состояния проявляют себя как нули функции Йоста $f_J(p)$ в комплексной плоскости импульса. Наличие таких вблизипороговых нулей объясняет малое значение функции Йоста $f_J(0)$.

Рассмотрим в рамках развитого ранее фазового подхода как модификация взаимодействия $H\bar{H}$ (например, при наличии внешних полей [84, 85]) скажется на сечениях передачи спина.

В Приложении 2 нами будет получено приближенное аналитическое выражение для функции Йоста в рамках квазиклассического приближения через ранее введенные фазы: distances $1 \text{ a.u.} < R < 5 \text{ a.u.}$:

$$\frac{1}{|f_J^{WK\bar{B}}(0)|^2} = \frac{2\pi M a_0}{\sin^2(\pi/8 + \Omega + \delta)}. \quad (1.119)$$

где

$$a_0 = \sqrt[4]{2MC_6} \frac{\Gamma(3/4)}{2\sqrt{2}\Gamma(5/4)} \simeq 4.99 \text{ a.u.} \quad (1.120)$$

$C_6 = 6.5$ константа ван-дер-Ваальса для асимптотики взаимодействия $H\bar{H}$, Ω квазиклассическая фаза, накопленная на расстояниях $R > r_B$

$$\Omega = \int_{R_r}^{\infty} \sqrt{2MV_{ad}(R)} dR = 19.38 \quad (1.121)$$

Напомним, что вычисленная ранее комплексная фаза, накопленная в зоне реакции, оказывается равной $\delta = 0.74 + i0.32$.

Соответствующее значение (1.119), полученное в таком квазиклассическом подходе

$$\frac{1}{|f_J^{WK\bar{B}}(0)|^2} = 24830 \quad (1.122)$$

оказывается достаточно близким к точному значению (1.111).

Будем варьировать фазу $\varphi = \pi/8 + \delta + \Omega$ с целью эффективного описания возможной модификации межатомного взаимодействия внешними полями. В первую очередь нас будет интересовать увеличение фактора усиления (1.111).

Фактор (1.111) становится бесконечным (а функция Йоста обращается в ноль $f_J(0) = 0$) при наличии состояния точно на пороге. В этом случае $\varphi = \pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Однако, поскольку имеются неупругие каналы и фаза φ содержит мнимую часть, такое условие не может выполняться точно; тем не менее фактор усиления будет иметь максимум при условии появления метастабильного связанного состояния в адиабатическом потенциале $\text{Re } \varphi = \pi k$.

На Рис. 1.12 показано сечение реакции $c\bar{d} \rightarrow d\bar{c}$ при нулевой энергии столкновений как функция фазы. При определенных значениях фазы сечение реакции оказывается в 50 раз больше вычисленного значения, соответствующего невозмущенному внешними полями взаимодействию $N\bar{N}$ ($\varphi = 20.51 + i3.2$). Этот результат показывает качественно возможность резкого усиления интенсивности реакций с передачей спина за счет модификации взаимодействия $N\bar{N}$ внешними полями.

Физической причиной такого поведения является, как это было указано, является наличие богатого спектра вблизипороговых состояний $N\bar{N}$.

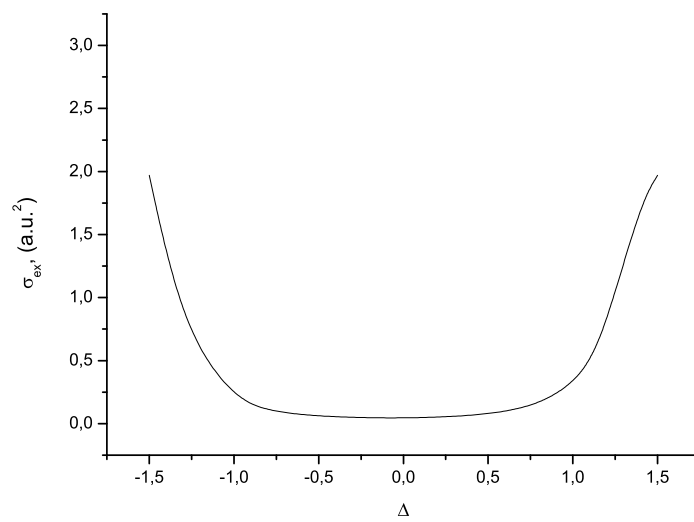


Рис. 1.12. Сечение реакции $cd\bar{} \rightarrow d\bar{}c\bar{}$ (при $E = 0$) как функция фазы.

Глава 2. Взаимодействие ультрахолодного антиводорода с материальной поверхностью

В настоящей главе мы рассмотрим другой класс задач, в которых квантовые свойства движения ультрахолодного антиводорода играют ключевую роль. Речь пойдет о взаимодействии антиводорода с материальной поверхностью при энергии столкновений (подразумевается нормальное столкновение) не превышает $10^{-9}eV$.

Интуитивное представление, согласно которому антиводород мгновенно аннигилирует при столкновении с материальной поверхностью, оказывается абсолютно неприменимым в случае малых энергий столкновения. Волновые свойства антиводорода проявляются в эффекте надбарьерного или т.н. квантового отражения от притягивательного потенциала (анти)атом-поверхность, в результате вероятность упругого отражения антиводорода от поверхности в пределе нулевых энергий стремится к единице. Надбарьерное отражение хорошо известно в различных проблемах квантовой механики [44], однако его прямое лабораторное наблюдение в значительной степени обусловлено прогрессом в получении холодных атомов и их детектировании. Поэтому работы по исследованию квантового отражения ультрахолодных атомов появились сравнительно недавно [77], [87], [90].

Другой причиной интереса к явлению квантового отражения состоит в том, что существенный вклад в коэффициент отражения дают расстояния, на которых существенны эффекты запаздывания в потенциале вандер-Ваальса-Казимира-Полдера, приводящие к более резкой зависимости такого потенциала от расстояния (переход от закона $1/z^3$ к закону $1/z^4$) [46, 47, 91]. Отражение ультрахолодных атомов от поверхности, чувствительное к асимптотической области взаимодействия атом-поверхность [45], может быть использовано для тестов предсказаний QED [87, 92–94].

Квантовое отражение антиводорода от поверхности примечательно в нескольких отношениях. Во-первых, отражение ультрахолодных антиатомов от поверхности открывает новые возможности по манипулированию и хранению таких атомов и поэтому, представляет практический интерес. Во-вторых, важной особенностью антиводорода является, как мы покажем далее, то обстоятельство, что амплитуда отраженной волны не содержит информацию о деталях взаимодействия с поверхностью на малых (порядка боровского радиуса) расстояниях. Это позволяет исключить систематические эффекты, связанные с деталями взаимодействия с поверхностными дефектами, примесями; другими словами открывает возможность для прецизионных экспериментов с антиводородом вблизи поверхности, т.к. в задачу входит только хорошо определенный потенциал ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера. В-третьих, детектирование антиводорода по аннигиляционному сигналу значительно проще, чем детектирование атомов (например, водорода).

В дальнейших главах будет показано, как эффект квантового отражения от поверхности может быть использован при исследовании гравитационных свойств антиводорода.

2.1. Квантовое отражение и поглощение

Квантовое отражение от притягивательного потенциала происходит при таких энергиях, когда де-бройлевская длина волны оказывается значительно больше, чем характерный масштаб изменения потенциала. Нас будет особенно интересовать ситуация, когда коэффициент отражения близок к 1. Качественная оценка (с известными уточнениями, которые можно найти в [95]) дает необходимое условие квантового отражения:

$$\frac{\partial \lambda_B(z)}{\partial z} \geq 1. \quad (2.1)$$

Для однородного потенциала вида $-C_s/z^s$ with $s > 2$ в пределе нулевых энергий условие (2.1) выполняется для расстояний z таких, что:

$$z_c \leq z \ll z_f \quad (2.2)$$

$$z_c \equiv (2\sqrt{2mC_s}/s)^{2/(s-2)} \quad (2.3)$$

$$z_f \equiv 1/\sqrt{2mE}. \quad (2.4)$$

Условие (2.2) определяет область, в которой «генерируется» отраженная волна и верно для энергий столкновения:

$$E \ll E_c = 1/(2mz_c^2). \quad (2.5)$$

Подробное исследование свойств однородных потенциалов (т.е. потенциалов вида $1/z^s$) с точки зрения квантового отражения можно найти в [45, 96, 97].

Потенциал взаимодействия \bar{H} – поверхность описывается потенциалом, который мы будем обозначать $V(z)$. Он не является однородным и отличается от потенциала взаимодействия H -поверхность. В частности, такой потенциал полностью притягивательный даже на малых расстояниях $z \leq z_s \simeq r_B$. Кроме того, взаимодействие с поверхностью на малых расстояниях приводит к интенсивным неупругим процессам, включающими перестройку атомов и аннигиляцию.

Однако на расстояниях $z \gg z_s$ такое взаимодействие определяется прежде всего взаимодействием индуцированных диполей в антиатоме и поверхности и аналогично диполь-дипольному взаимодействию атома H с поверхностью. Такой потенциал для системы водород-проводящая поверхность хорошо известен; его асимптотика на больших расстояниях определена в работах Казимира-Полдера [46], вычислению такого потенциала в общем случае посвящено много работ, мы будем пользоваться потенциалом полученным в работах [98], и будем обозначать его $V_{CP}(z)$.

На расстояниях $z_s \ll z \ll \lambda_\omega$ такой потенциал имеет асимптотику ван-дер-Ваальса:

$$V_{CP}(z) \simeq -C_3/z^3 \quad (2.6)$$

где $C_3 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \alpha_d(i\omega) d\omega = 0.25 \text{ а.у.}^2$. Здесь $\alpha_d(i\omega)$ динамическая дипольная поляризуемость (анти)водорода выраженная как функция мнимой частоты ЭМ поля $i\omega$, а λ_ω - характерная длина волны ЭМ поля дающая основной вклад в $\alpha_d(i\omega)$.

На расстояниях $z \gg \lambda_\omega$ существенны эффекты запаздывания и потенциал оказывается:

$$V_{CP}(z) \simeq -C_4/z^4 \quad (2.7)$$

здесь $C_4 = \frac{3}{8\pi} \frac{\alpha_d(0)}{\alpha} = 73.62 \text{ а.у.}^3$, $\alpha_d(0) = 9/2 \text{ а.у.}^3$ - поляризуемость (анти)водорода в основном состоянии, $\alpha = 1/137.04$ постоянная тонкой структуры.

Заметим, что приведенные выражения для C_3 and C_4 верны в пределе идеально проводящей поверхности [46], они могут быть вычислены в ряде моделей для различных реалистических поверхностей [48].

На малых расстояниях $z \simeq z_s$ взаимодействие между \bar{H} и поверхностью отличается от аналогичного взаимодействия в случае атома H . В частности, речь идет о процессах захвата \bar{p} и \bar{e} в среде с их последующей аннигиляцией. Эти неупругие процессы могут быть учтены введением соответствующего граничного условия.

Рассмотрим уравнение Шредингера, описывающее движение антиводорода у поверхности:

$$\left[-\frac{\partial^2}{2m\partial z^2} + V(z) - E \right] \Phi(z) = 0 \quad (2.8)$$

На расстояниях $z_s \ll z \ll \lambda_\omega$ потенциал имеет вид (2.6) и соответствующее решение (2.8) может быть представлено в виде:

$$\Phi(z) \sim \sqrt{z} \left(H_1^{(1)}(\rho) + \exp(2i\delta_s) H_1^{(2)}(\rho) \right) \quad (2.9)$$

$$\rho = 2\sqrt{2mC_3/z} \quad (2.10)$$

где $H_1^{(1)}(\rho)$ и $H_1^{(2)}(\rho)$ -функции Ганкеля [66] первого рода, а величина $\delta_s = \delta_1 + i\delta_2$ представляет собой комплексный фазовый сдвиг, учитывающий эффект взаимодействия на малых расстояниях. Его мнимая часть описывает поглощение антиводорода в результате неупругих реакций внутри поверхности. Мы пренебрегли энергией столкновения по сравнению с потенциалом $V_{CP}(z)$ на расстояниях $z \simeq z_s$.

В дальнейшем мы будем полагать, что часть волны, которая попадает внутрь поверхности, полностью поглощается. Обоснование такого условия полного поглощения будут даны ниже. Это условие означает, что:

$$\delta_2 \gg 1. \quad (2.11)$$

Легко видеть, что это условие отбирает решение уравнения (2.8), в котором присутствует только сходящаяся волна:

$$\Phi(z) \sim \sqrt{z}H_1^{(1)}(\rho), \quad z_s \ll z \ll \lambda_\omega. \quad (2.12)$$

На малых расстояниях это решение действительно переходит в решение, имеющее вид квазиклассической сходящейся волны:

$$\sqrt{z}H_1^{(1)}(2\sqrt{2mC_3/z}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p(z)}} \exp(-i \int p(x)dx) \quad (2.13)$$

здесь $p(z) = \sqrt{2mC_3/z^3}$ классический импульс в данной точке.

Важным оказывается то обстоятельство, что условие полного поглощения приводит к нечувствительности амплитуды рассеяния к деталям взаимодействия вблизи и внутри поверхности. Этот результат был получен нами ранее для случая взаимодействия атомов $H\bar{H}$. Таким образом, отраженный поток определяется только асимптотической формой потенциала и не зависит от физики взаимодействия на малых расстояниях.

Мы используем выражение (2.12) как граничное условие в решении уравнения Шредингера, которое не зависит от взаимодействия на малых расстояниях.

Асимптотика решения на больших расстояниях z имеет вид:

$$\Phi(z \rightarrow \infty) \sim \exp(-ikz) - S \exp(ikz) \quad (2.14)$$

где $k = \sqrt{2mE}$ импульс налетающего \bar{H} , а S диагональный элемент S -матрицы в упругом канале.

Коэффициент отражения $R = |S|^2$ полученный в результате численного решения (2.8) с выражением (2.12) в качестве граничного условия приведен в Таблице 2.1 как функция энергии налетающих атомов. Коэффициент отражения становится значительным ($> 50\%$) при $E \simeq 10^{-11}$ а.е. (соответствующая эффективная температура $T \simeq 2.7 \cdot 10^{-6}$ К) и достигает 99% при $E \simeq 10^{-14}$ а.е. ($T \simeq 2.7 \cdot 10^{-9}$ К).

Этот результат ясно показывает, что несмотря на эффект полного поглощения на малых расстояниях от поверхности, коэффициент отражения в пределе низких энергий стремится к 1.

Коэффициент отражения удобно выразить через комплексную длину рассеяния на потенциале V_{CP} с учетом граничного условия полного поглощения $a = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1-S}{2ik}$,

$$S(k) \simeq 1 - 2ika. \quad (2.15)$$

Коэффициент отражения равен:

$$|S|^2 \simeq 1 - 4k|\operatorname{Im} a| = 1 - kb \quad (2.16)$$

Здесь $b = 4|\operatorname{Im} a|$. Вероятность поглощения равна:

$$P(k) = 1 - |S|^2 \simeq kb. \quad (2.17)$$

Вероятность аннигиляции P становится малой при $kb \ll 1$, а коэффициент отражения стремится к 1.

$\log(E/a.u.)$	P	$1 - \exp(-kb)$	kb	R
-9	0.95	0.99	4.16	0.05
-10	0.69	0.74	1.32	0.31
-11	0.33	0.34	0.42	0.67
-12	0.12	0.13	0.13	0.88
-13	0.04	0.04	0.04	0.96
-14	0.013	0.013	0.013	0.987
-15	0.0042	0.0042	0.0042	0.9958
-16	0.0013	0.0013	0.0013	0.9987
-17	0.00042	0.00042	0.00042	0.99958
-18	0.00013	0.00013	0.00013	0.99987

Таблица 2.1

Вероятность аннигиляции (P) и отражения (R) антиводорода от материальной поверхности.

Введенная выше длина рассеяния оказывается равной:

$$a_{CP} = -52.4 - i543.5 \text{ а.у.}, \quad (2.18)$$

$$\text{Re } a_{CP} / \text{Im } a_{CP} = 0.09, \quad (2.19)$$

$$b = 2174.0 \text{ а.у.} \quad (2.20)$$

Вероятность аннигиляции P представлена в Таблице 2.1, включая приближенные выражения. В колонке 4 представлено приближение длины рассеяния (2.17), как видно, оно обусловлено для энергий $E < 10^{-11}$ а.у. .

Полезно сравнить полученное значение с комплексной длиной рассеяния для всюду однородного потенциала $-C_4/z^4$ с условием поглощения в 0. Такая длина рассеяния может быть вычислена в замкнутом виде [99]:

$$a_s^{abs} = \exp(-i\pi/(s-2)) \left(\frac{\sqrt{2mC_s}}{s-2} \right)^{2/(s-2)} \Gamma((s-3)/(s-2)) / \Gamma((s-1)/(s-2)) \quad (2.21)$$

для $s = 4$ такая длина рассеяния оказывается чисто мнимой:

$$a_4 = -i\sqrt{2mC_4} \quad (2.22)$$

что для случая \bar{H} дает:

$$a_4(\bar{H}) = -i519.9 \text{ а.у.} \quad (2.23)$$

Обратим внимание на близость точного значения a_{CP} и значения для потенциала $-C_4/z^4$. Это позволяет предположить, что основной вклад в эффект надбарьерного отражения дает асимптотическая область (2.7). Ненулевая вещественная часть длины рассеяния определяется вкладом от меньших расстояний, где потенциал имеет переходное поведение. Действительно, из выражения (2.21) следует, что для потенциалов с показателем $s < 4$ вещественная часть отрицательна, для $z = 4$ она равна нулю, а для $z > 4$ - положительная.

Выясним вклад внутренней части потенциала в длину рассеяния. Для этого заменим точный потенциал $V_{CP}(z)$ приближенным, аналитически решаемым [45]:

$$V_m(z) = -\frac{C_4}{z^3(z+l)} \quad (2.24)$$

где $l \equiv C_4/C_3$. Такой потенциал имеет правильную асимптотику на больших ($z \gg l$) и малых ($z \ll l$) расстояниях. Волновая функция при нулевой энергии в таком потенциале оказывается равной:

$$\Phi_m(z) = \sqrt{z(z+l)} \left(H_1^{(1)}(\zeta) - e^{2i\delta_s} H_1^{(2)}(\zeta) \right). \quad (2.25)$$

Здесь $\zeta = 2\sqrt{2mC_3(1/z + C_3/C_4)}$.

Исследуя асимптотическое поведение этой функции при $z \gg l$:

$$\Phi_m(z) \sim z(1 + l/(2z)) \left(H_1^{(1)}\left(\xi\left(1 + \frac{l}{2z}\right)\right) - e^{2i\delta_s} H_1^{(2)}\left(\xi\left(1 + \frac{l}{2z}\right)\right) \right) \quad (2.26)$$

(здесь $\xi = 2C_3\sqrt{2m/C_4}$) и собирая члены пропорциональные z , получим:

$$\Phi_m(z) \sim \frac{l}{2} \left(1 + \xi \frac{H_1^{(1)}(\xi) - e^{2i\delta_s} H_1^{(2)}(\xi)}{H_1^{(1)}(\xi) - e^{2i\delta_s} H_1^{(2)}(\xi)} \right) + z. \quad (2.27)$$

Используя связь асимптотического вида волновой функции и длину рассеяния:

$$\Phi_m(z \gg l) \sim 1 - z/a_m \quad (2.28)$$

Получим следующее выражение:

$$a_m = -\frac{l}{2} \left(1 + \xi \frac{H_1^{(1)}(\xi) - e^{2i\delta_s} H_1^{(2)}(\xi)}{H_1^{(1)}(\xi) - e^{2i\delta_s} H_1^{(2)}(\xi)} \right). \quad (2.29)$$

Условие полного поглощения ($\delta_2 \gg 1$, $e^{2i\delta_s} \rightarrow 0$) приводит к исключению членов с $H_1^{(2)}(\xi)$:

$$a_m = -\frac{l}{2} \left(1 + \xi \frac{H_1^{(1)}(\xi)}{H_1^{(1)}(\xi)} \right) \quad (2.30)$$

Отношение $\text{Re } a_m / \text{Im } a_m$ дается выражением:

$$\text{Re } a_m / \text{Im } a_m = \frac{\pi}{2} (J_1^2(\xi) + Y_1^2(\xi) + \xi(J_1'(\xi)J_1(\xi) + Y_1'(\xi)Y_1(\xi))) \quad (2.31)$$

где $J_1(z)$ and $Y_1(z)$ функции Бесселя [66] первого порядка. Соответствующие численные значения равны:

$$a_m = -69.8 - i505.6 \text{ а.у.}, \quad (2.32)$$

$$\text{Re } a_m / \text{Im } a_m = 0.14, \quad (2.33)$$

$$\xi = 3.53 \quad (2.34)$$

Отношение $\text{Re } a_m / \text{Im } a_m$ содержит важную информацию о масштабном параметре ξ определяющий характер перехода от асимптотики ван-дер-Ваальса к асимптотике Казимира-Полдера. В пределе больших ξ модельный потенциал V_m переходит в $-C_4/z^4$ и в то же время $\text{Re } a_m / \text{Im } a_m \simeq 1/\xi \rightarrow 0$

как это и должно быть для однородного потенциала $V = -C_4/z^4$. Соответственно, чем меньше для точного потенциала V_{CP} , отношение $\text{Re } a_m / \text{Im } a_m$, тем больший вклад дает область асимптотики Казимира в амплитуду рассеяния.

2.2. Вероятность квантового отражения как функция расстояния

Важным является вопрос «на каких расстояниях происходит квантовое отражение?» В практическом смысле ответ на такой вопрос означает, в частности, понимание, какой должна быть степень обработки поверхности, чтобы можно было бы наблюдать предсказанное квантовое отражение. Мы рассмотрим, можно ли придать физический смысл такому вопросу, детально исследуя, какие области потенциала дают вклад в амплитуду отраженной волны. Для этого мы воспользуемся методом фазовых функций [100] и представим волновую функцию антиводорода в виде:

$$\Phi(z) = \frac{A(z)}{p^{1/2}(z)} \left(B(z) \exp(i \int_{z_0}^z p(x) dx) - \exp(-i \int_{z_0}^z p(x) dx) \right) \quad (2.35)$$

здесь $A(z)$ и $B(z)$ произвольные функции, которые предстоит найти из уравнения Шредингера, $p(z) = \sqrt{2m(E - V_{CP}(z))}$ классический момент, а z_0 некоторое произвольное расстояние. Соотнести решение с падающей или отраженной волной возможно лишь в случае применимости квазиклассического приближения, тогда такое решение будет иметь вид $\exp(\pm i \int_{z_0}^z p(x) dx)$. Если квазиклассическое приближение верно во всей области расстояний, то решение может иметь вид только падающей волны и не происходит отражения. Очевидно, что именно в тех областях, где происходит нарушение квазиклассического приближения (2.2), «возникает» отраженная волна. Таким образом функция $B(z)$ в (2.35) может интерпретироваться как функция, которая преобразует квазиклассическое решение в точное квантовое и содержит информацию об амплитуде отраженной волны, генерированной на заданном расстоянии z .

Для однозначного определения двух функций $A(z)$ и $B(z)$ (вместо одной волновой функции) можно ввести произвольное дополнительное условие, которое удобно выбрать в виде [100, 101]:

$$\Phi'(z) = iA(z)p^{1/2}(z) \left(B(z) \exp(i \int_{z_0}^z p(x) dx) + \exp(-i \int_{z_0}^z p(x) dx) \right). \quad (2.36)$$

Легко установить соотношение между асимптотическим видом $B(\infty)$ и S-матрицей:

$$S = B(\infty) \exp(2i(\int_{z_0}^{z \rightarrow \infty} p(x) dx - kz)). \quad (2.37)$$

Подставляя выражение (2.35) и (2.36) в уравнение Шредингера получим нелинейное уравнение первого порядка для $B(x)$:

$$B'(z) = \frac{p'(z)}{2p} \left(B^2(z) \exp(2i \int_{z_0}^z p(x) dx) - \exp(-2i \int_{z_0}^z p(x) dx) \right). \quad (2.38)$$

Граничное условие, совместное с (2.12) и (2.13) имеет вид:

$$B(z_s) = 0$$

, и $z_0 = z_s$.

Функция $|B(z)|^2$ может быть интерпретирована (с известной долей осторожности; см. замечание выше), как "часть" отраженной волны, генерированной в диапазоне между z_0 и z . очевидно, $|B(\infty)|^2$ дает вероятность отражения при заданной энергии.

Поскольку при $z \rightarrow 0$ точность квазиклассического приближения возрастает, соответственно уменьшается вклад малых расстояний в амплитуду отраженной волны.

Из Рис.2.1, что при малых энергиях (фактически при $E \ll 10^{-10}$ а.у.) отраженная волна возникает в широком диапазоне расстояний. Очевидно, что в этом случае невозможно определить конкретное расстояние, на котором происходит отражение. При энергии $E = 10^{-12}$ а.у. 75% отраженной волны генерируется на расстояниях от 500 а.у. до 5000 а.у., в этой области потенциал имеет асимптотику Казимира-Полдера. Вклад расстояний от 100

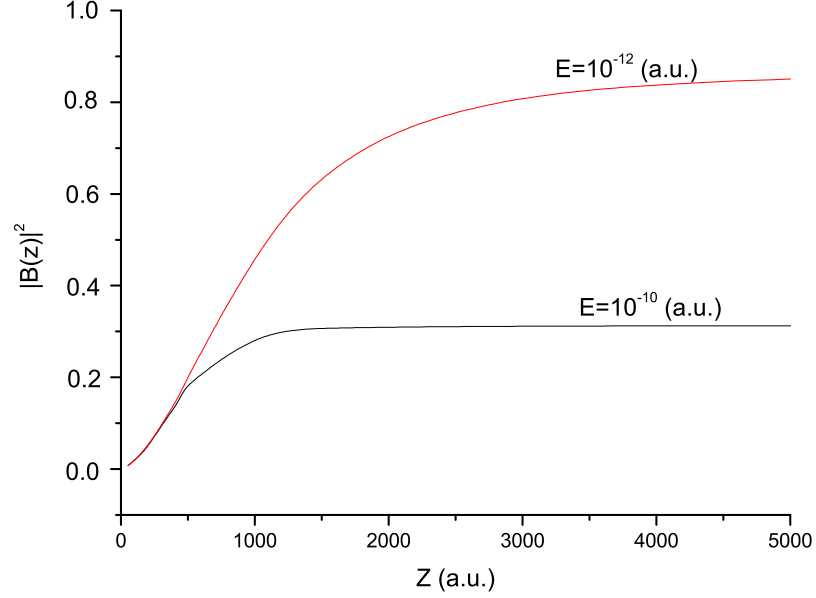


Рис. 2.1. $|B(z)|^2$, вклад различных расстояний в вероятность отражения для двух значений энергии.

а.у. до 500 а.у. составляет 22%. При увеличении энергии область, дающая вклад в отраженную волну, сужается и сдвигается в область малых расстояний. При энергии $E = 10^{-10}$ а.у. 92% отраженной волны генерируется на расстояниях от 100 а.у. до 1000 а.у. С дальнейшим увеличением энергии вероятность отражения экспоненциально уменьшается, в то же время область отражения стягивается в точку, что позволяет ввести хорошо определенное расстояние квантового отражения. Такое расстояние и вероятность отражения может быть оценена методом комплексной точки поворота [45, 102, 103].

Как было показано, вещественная часть длины рассеяния оказывается более чувствительной к деталям взаимодействия на переходных расстояниях. В общем случае, можно утверждать, что реальная часть фазового сдвига $\delta(E)$ ($S = \exp(2i\delta(E))$) содержит важную дополнительную информацию о взаимодействии антиатома с поверхностью. На Рис. 2.2 показана фаза $\text{Re } \delta(E)$ для точного взаимодействия $V_{CP}(z)$, для модельных потенциалов $V_1 = -C_4/z^4$ и $V_2 = -C_4/(z^4 + z^3C_4/C_3)$.

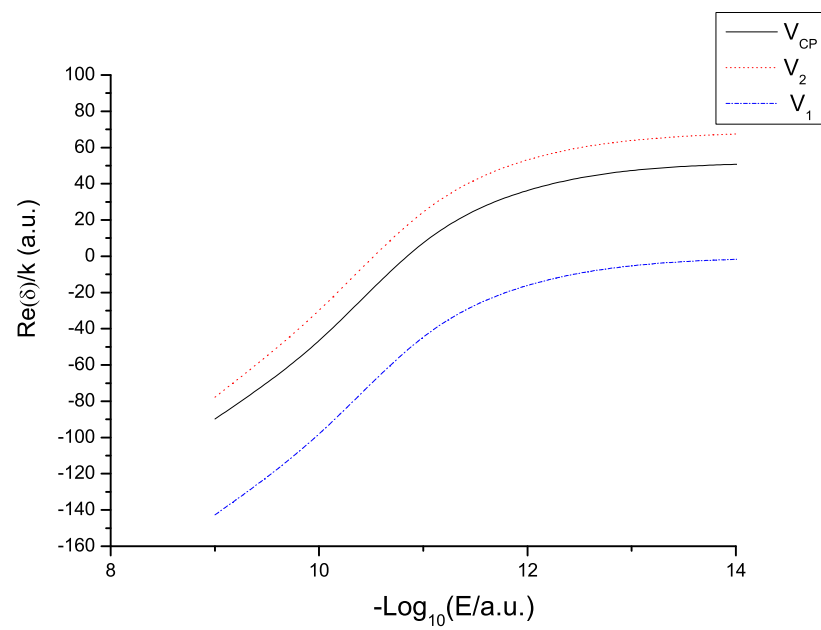


Рис. 2.2. $\text{Re } \delta/k$ как функция энергии для точного потенциала V_{CP} (сплошная линия) и для модельных потенциалов V_1 (штриховая) and V_2 (пунктирная линия).

Вещественный фазовый сдвиг для точного потенциала взаимодействия V_{CP} для энергий $E > 10^{-9}$ а.е. отрицателен, а для энергий $E < 10^{-9}$ а.е. - положителен. Вещественный фазовый сдвиг в потенциале $V_1 = -C_4/z^4$ отрицательный, и при нулевой энергии стремится к 0, $E \rightarrow 0$.

2.3. Ультрахолодный \bar{H} в волноводе

Очевидным следствием квантового отражения ультрахолодного антиводорода от материальной поверхности является возможность существования метастабильных состояний \bar{H} в замкнутых полостях и волноводах. Простейшим примером, с которого следует начать исследование таких состояний, является одномерный случай, когда движение антиводорода ограничено в одном из направлений материальными стенками, другими словами речь идет о состояниях антиводорода в одномерном ящике.

Мы будем предполагать стенки такого волновода (ящика) проводящими, а расстояние между ними L существенно больше, чем $|a_{CP}|$.

Граничное условие на левой стенке ($z = 0$) дается выражением (2.12). Чтобы получить аналогичное условие на правой стенке в уравнении (2.12) z следует заменить на $L - z$. Вдали от стенок ($|a_{CP}| \ll z \ll L - |a_{CP}|$) волновая функция имеет вид:

$$\Phi(z) \sim \sin(kz + \delta_{CP}) \quad (2.39)$$

здесь δ_{CP} - фазовый сдвиг в результате взаимодействия со стенками. Условие квантования с учетом симметрии задачи имеет следующий вид:

$$kL + 2\delta_{CP} = \pi n. \quad (2.40)$$

Мы ограничимся рассмотрением нижних состояний, таких что для фазы верно приближение длины рассеяния $\delta_{CP} = -ka_{CP}$. Тогда получаем для k :

$$k = \pi n / (L - 2a_{CP}), \quad (2.41)$$

Соответствующие квантованному импульсу энергии одномерных мод оказываются равны:

$$\mathcal{E}_n \equiv \varepsilon_n - i \frac{\Gamma_n}{2} = \frac{\pi^2 n^2}{2m(L - 2a_{CP})^2} \quad (2.42)$$

$$\mathcal{E}_n \simeq \frac{\pi^2 n^2}{2mL^2} \left(1 + 4 \frac{\operatorname{Re} a_{CP}}{L}\right) - i |\operatorname{Im} a_{CP}| \frac{4\pi^2 n^2}{2mL^3}. \quad (2.43)$$

Ширины этих состояний определяются следующими выражениями:

$$\Gamma_n = 2b \frac{\pi^2 n^2}{2mL^3} = \frac{2\varepsilon_n^{(0)} b}{L} \quad (2.44)$$

где $\varepsilon_n^{(0)} = \pi^2 n^2 / (2mL^2)$ уровни энергии в бесконечно глубокой прямоугольной яме.

Сдвиги и ширины определяются комплексной длиной рассеяния ($b = 4|\operatorname{Im} a|$, 2.18), которая характеризует квантовое отражение в пределе нулевых энергий.

Времена жизни указанных состояний увеличиваются с ростом расстояния между стенками как L^3 и уменьшаются с ростом квантового номера состояния как $1/n^2$. Эти выражения получены в предположении применимости приближения длины рассеяния (2.15), и верны для энергий состояний $\varepsilon_n < 10^{-11}$ а.е.

Волновые функции $\Phi_n(z)$, соответствующие комплексным энергиям \mathcal{E}_n , являются собственными функциями несамосопряженного Гамильтониана. такие состояния удовлетворяют условию би-ортогональности:

$$\int_0^\infty \Phi_n(z) \Phi_k(z) dz = \delta_{nk} \quad (2.45)$$

которое отличается от "стандартного" условия отсутствием комплексного сопряжения.

Заметим, что выражение для ширины (2.44) совпадает с интуитивно понятной квазиклассической формулой для интенсивности аннигиляции свободного антиводорода, который движется свободно между стенками со скоростью $v = \sqrt{2\varepsilon^{(0)}/M}$:

$$\Gamma = P(v)\omega, \quad (2.46)$$

здесь $P(v)$ вероятность аннигиляции при разовом столкновении, а $\omega = v/L$ - частота столкновений со стенками. Подставляя $P(v)$ из (2.17), мы снова получим выражение (2.44), то есть $\Gamma = 2\varepsilon^{(0)}\frac{b}{L}$. При более высоких энергиях ($\varepsilon > 10^{-8}$ а.е.) вероятность аннигиляции стремится к 1 $P(v) \simeq 1$, и мы получаем для ширины $\Gamma = \frac{v}{L}$. Время жизни таких быстрых частиц сопоставимо со временем пролета между стенками.

В качестве примера, примем расстояние между стенками волновода $L = 10 \mu m$ (что существенно превышает характерный масштаб потенциала ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера $b = 0.115 \mu m$),. Основное состояние для такого волновода имеет энергию $\varepsilon_0 = 7.5 \cdot 10^{-14}$ а.е. и ширину $\Gamma_0 = 1.7 \cdot 10^{-15}$ а.е., что соответствует времени жизни 0.014 с. Сравнивая это время со временем пролета между стенками $t = L/v = 0.0005$ с, находим, что антиводород успевает отразиться около 30 раз от стенок за время жизни основного состояния. Поскольку время жизни пропорционально L^3 , а время пролета - как L^2 , то «добротность» одномерного резонатора растет пропорционально L . Заметим, что само понятие метастабильного состояния осмысленно только при отношении времени жизни к времени пролета большем единицы.

Полезно получить выражения для метастабильных состояний \bar{H} внутри проводящего цилиндра радиуса R . Соответствующее уравнение для собственного состояния с номером n и угловым моментом m :

$$J_m(k_n(R - a_{CP})) = 0$$

здесь $J_m(x)$ - функция Бесселя целого индекса [66]. Приближенная формула для нулей функции Бесселя $J_m(z_{n,m}) = 0$:

$$z_{n,m} \approx \pi(n + 3/4 + m/2)$$

Для энергий и ширин соответствующих состояний получим:

$$\varepsilon_{n,m} \simeq \pi^2 \frac{(n + 3/4 + m/2)^2}{2MR^2} \quad (2.47)$$

$$\Gamma_{n,m} \simeq \varepsilon_{n,m} \frac{b}{R} \quad (2.48)$$

Для основного состояния:

$$\varepsilon_{0,0} = 5.783 \frac{1}{2MR^2}$$

Рассмотрим вопрос о прохождении атомов антиводорода через волновод. Нашей задачей будет выяснение вопроса об измерении длины рассеяния a_{CP} по коэффициенту прохождению через волновод. Эффекты гравитации в настоящей главе рассматриваться не будут, мы будем предполагать соответствующую ориентацию волновода.

В качестве простейшего примера рассмотрим одномерный волновод, представляющий собой две параллельные проводящие поверхности, находящиеся на расстоянии L друг от друга и ориентированные вертикально.

Уравнение Шредингера, описывающее поперечное движение между стенками вдоль координаты z и продольное движение вдоль стенок (координата x) имеет следующий вид:

$$\left[-\frac{\partial^2}{2m\partial x^2} - \frac{\partial^2}{2m\partial z^2} + V(z) + V(L-z) - E \right] \Psi(z, x) = 0. \quad (2.49)$$

Двумерную волновую функцию $\Psi(z, x)$ представим в виде суперпозиции произведений $\Phi_n(z)$ (2.39) и плоских волн $\exp(ip_n x)$:

$$\Psi(z, x) = \sum_n C_n \exp(ip_n x) \Phi_n(z) \quad (2.50)$$

здесь C_n -амплитуды заселенностей поперечных мод, определяемые свойствами потока на входе, p_n импульс горизонтального движения в моде $\varepsilon_n - i\Gamma_n/2$:

$$p_n^2/2m + \varepsilon_n - i\Gamma_n/2 = E. \quad (2.51)$$

Отметим, что собственные функции $\Phi_n(z)$, строго говоря, не образуют базис в гильбертовом пространстве [104]. Поэтому (2.50) является приближением. В дальнейшем будет показано, что при интересующих нас энергиях лишь небольшое число состояний поперечного движения дают вклад в волновую функцию на выходе из волновода, поэтому (2.50) оказывается оправданным.

Будем считать, что импульсное распределение во входящем пучке антиводорода в поперечном направлении достаточно широкое, чтобы считать, что несколько низковозбужденных состояний поперечного движения оказались равномерно заселенными.

Мы будем считать также, что полная энергия движения антиводорода много больше энергий нескольких первых поперечных мод. Горизонтальный импульс, соответствующий данному поперечному состоянию ($\varepsilon_n \ll E$) дается следующим выражением:

$$p_n \simeq \sqrt{2mE} - \sqrt{m/2E}(\varepsilon_n + i\Gamma_n/2) = p - \frac{(\varepsilon_n - i\Gamma_n/2)}{v} \quad (2.52)$$

здесь $p = \sqrt{2mE}$ и $v = p/m$.

Волновая функция $\Psi(z, x)$ тогда может быть записана как:

$$\Psi(z, x) = \exp(ipx) \sum_n C_n \exp(-\Gamma_n x/(2v)) \exp -i\varepsilon_n x/v \Phi_n(z). \quad (2.53)$$

Вводя время пролета через волновод $\tau^{pass} = x/v$ выразим среднюю плотность потока на выходе из волновода $F = F_0 \int |\Psi(z, d)|^2 dz$ через ширины поперечных мод:

$$F = F_0 \sum_n |C_n|^2 \langle \Phi_n | \Phi_n \rangle \exp(-\Gamma_n \tau^{pass}) \quad (2.54)$$

$$+ F_0 \sum_{n \neq k} C_n^* C_k \langle \Phi_n | \Phi_k \rangle \exp(i(\varepsilon_k - \varepsilon_n) \tau^{pass}) \exp\left(-\frac{(\Gamma_n + \Gamma_k) \tau^{pass}}{2}\right)$$

Обратим внимание на второй член в указанном выше разложении, будем в дальнейшем называть его интерференционным. Этот член не равен нулю в следствии неортогональности собственных состояний неэрмитового гамильтониана. $\langle \Psi_n | \Psi_k \rangle \neq \delta_{nk}$. Метастабильные состояния не являются стационарными и между ними происходят переходы с частотами $\omega_{nk} = \varepsilon_k - \varepsilon_n$. Такие переходы проявляются в осциллирующей зависимости $\exp(i\omega_{nk} \tau^{pass})$ в выражении для потока (2.54). Однако, для наблюдения такого рода интерференционного явления необходима высокая монохроматичность входного пучка, иными словами малый разброс по горизонтальным скоростям. Связанная с таким разбросом неопределенность во времени пролета $\delta\tau^{pass} = \tau^{pass} \delta v/v$ должна быть меньше чем ω_{nk}^{-1} , и, следовательно, ограничение на монохроматичность выглядит следующим образом:

$$\frac{\delta v}{v} < \tau^{pass} \omega_{nk}. \quad (2.55)$$

Для более широкого разброса в горизонтальных скоростях интерференционный член, усредненный по ширине распределения времени пролета, зануляется и выражение для потока через волновод выглядит следующим образом:

$$F = F_0 \sum_n \exp(-\Gamma_n \tau^{pass}). \quad (2.56)$$

Время пролета при τ^{pass} определяет количество состояний поперечного движения антиводорода, которые не успеют распасться при прохождении пучка через волновод. Увеличивая расстояние между стенками можно увеличить количество таких состояний.

Введем параметр, определяющий количество состояний, прошедших через волновод:

$$\xi = \frac{\pi^2 \tau^{pass} b}{2mL^3}$$

а количество прошедших без существенного распада состояний :

$$N^{pass} \simeq 1/\sqrt{\xi}$$

В предельном случае, когда существенен вклад лишь основного состояния $\sqrt{\xi} \gg 1$ получим связь между введенной ранее характеристикой квантового отражения b и зависимостью потока от ширины волновода:

$$b = \left(\frac{\partial \ln F(L)}{\partial L} \right) \frac{mL^4}{3\pi^2 \tau^{pass}}. \quad (2.57)$$

В обратном случае, когда множество состояний проходит через волновод без существенного распада за время пролета $\sqrt{\xi} \ll 1$, несложно получить следующее выражение для потока:

$$F \approx F_0 \frac{L^{3/2} \sqrt{2m}}{\sqrt{2\pi b \tau^{pass}}} \quad (2.58)$$

2.4. Учет свойств реальных поверхностей и отражение от тонких пленок

В исследовании отражения ультрахолодного антиводорода от поверхностей особый интерес представляет вопрос об условиях, при которых коэффициент квантового отражения антиводорода от поверхности возрастает.

Прежде всего заметим, что причина квантового отражения- резкое изменение масштаба притягивательного потенциала сравнению с де-

Бройлевской длиной волны антиводорода. Поэтому естественно предполагать, что уменьшение характерного масштаба изменения потенциала атом-поверхность приведет к увеличению коэффициента отражения.

Из выражения (2.22) следует, что уменьшение коэффициента C_4 приведет к уменьшению характерного масштаба потенциала и увеличению коэффициента отражения. Этого можно достичь выбором вещества с наименьшим коэффициентом C_4 . Для реальных веществ возможен лишь расчет потенциала V_{CP} , основанный на той или иной модели взаимодействия ЭМ волн с данным веществом. Рассмотрим кратко подход, позволяющий рассчитать потенциал взаимодействия в широком диапазоне веществ и геометрий, и предсказать вещества с минимальным C_4 , используя матрицу рассеяния для ЭМ волн, следуя работам [49–51].

В этом подходе потенциал взаимодействия атом-поверхность выражается через матрицы рассеяния отражения ЭМ волн:

$$V_{CP}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\xi \operatorname{Tr} \ln (1 - \mathbf{R}_p(i\xi)e^{-qz}\mathbf{R}_a(i\xi)e^{-qz}) \quad (2.59)$$

$$k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \xi^2/c^2} \quad (2.60)$$

Здесь $\mathbf{R}_{p,a}$ - матрица, описывающая отражение ЭМ волн от поверхности и атома соответственно, след берется по поперечным волновым векторам \mathbf{k} и поляризациям ЭМ волн.

Отражающие свойства атома можно описать с хорошей точностью в дипольном приближении в терминах динамической поляризуемости $\alpha(i\xi)$, кроме того, пренебрегая множественными отражениями, можно записать следующее выражение для потенциала:

$$V_{CP} = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \int_0^\infty d\xi \int d^2\mathbf{k} e^{-2qz} \Pi(\xi) \quad (2.61)$$

$$\Pi(\xi) = \left[\rho^{TE} - \left(1 + \frac{2c^2 q^2}{\xi^2} \right) \rho^{TM} \right] \quad (2.62)$$

Здесь $\rho^{TE, TM}$ - амплитуды отражения ЭМ волн с заданной поляризацией. Для отражения от полубесконечного пространства с учетом граничных

условий непрерывности:

$$\rho^{TE} = \frac{q - K}{q + K} \quad (2.63)$$

$$\rho^{TM} = \frac{\epsilon(i\xi)q - K}{\epsilon(i\xi)q + K} \quad (2.64)$$

Здесь $K = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \epsilon(i\xi)(\xi/c)^2}$ -продольный вектор внутри среды, ϵ - диэлектрическая проницаемость, вычисленная при комплексной частоте.

Для случая идеально проводящей поверхности

$$\rho^{TE} = -1$$

$$\rho^{TM} = 1$$

мы возвращаемся к исследованному ранее потенциалу V_{CP} .

Для описания зеркала из реального вещества, например кремния, может быть использована модель Друда-Лоренца [54, 55]:

$$\epsilon(i\xi) = \epsilon_0 + \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)\omega_0^2}{\xi^2 + \omega_0^2}$$

где $\epsilon_0 = 11.87$, $\epsilon_\infty = 1.035$, $\omega_0 = 6.6 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$.

Для описания аморфных веществ может быть применена модель Сельмейера [56]:

$$\epsilon(i\xi) = 1 + \sum_{i=1,2,3} \frac{B_i}{1 + (\xi/\omega_i)^2}$$

где $B_1 = 0.69675$, $B_2 = 0.40822$, $B_3 = 0.89082$, $\omega_1 = 27.273 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$, $\omega_2 = 16.286 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$, $\omega_3 = 0.190 \times 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$.

Указанный подход, основанный на полуфеноменологических моделях описания электронных свойств веществ, позволяет рассчитать коэффициент квантового отражения антиводорода от зеркал, сделанных из различных материалов. В Таблице(2.2) представлены результаты для длин рассеяния для различных материалов с варьируемыми диэлектрическими свойствами. Наибольший коэффициент отражения среди представленных веществ у зеркал из силики, соответствующая мнимая часть длины рассеяния примерно вдвое меньше, чем у идеально проводящей поверхности.

Другой способ увеличения коэффициента отражения состоит в том, чтобы изменить характер убывания потенциала на более резкое. Из выражения (2.21) следует, что увеличение показателя s приводит к уменьшению мнимой части длины рассеяния и увеличению коэффициента отражения. (В пределе $s \rightarrow \infty$ мнимая часть длины рассеяния стремится к 0 и квантовое отражение становится полным). Изменение показателя асимптотики можно достичь, используя тонкие пленки. Это несложно понять из следующей простой качественной модели: тонкую пленку можно представить себе как два полупространства, границы которых разделены малым расстоянием d , а знак потенциал ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера одного полупространства (дальнего от наблюдателя) заменен на обратный:

$$V_f(z) = V_{CP}(z) - V_{CP}(z + d) \approx -d \frac{dV_{CP}}{dz} \quad (2.65)$$

Легко видеть, что асимптотика потенциала тонкой пленки на больших расстояниях становится теперь:

$$V_f(z \rightarrow \infty) \rightarrow -\frac{4C_4d}{z^5} \quad (2.66)$$

Ранее мы выяснили, что именно эта асимптотическая область дает основной вклад в квантовое отражение, а соответствующая длина рассеяния близка к величине (2.21). Для $s = 5$ она равна:

$$a_5^{abs} = \exp(-i\pi/3) \left(\frac{\sqrt{8mdC_4}}{3} \right)^{2/3} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(4/3)} \quad (2.67)$$

Коэффициент $b_5 = \text{Im } a^{abs}$, определяющий свойства квантового отражения, равен:

$$b_5 = \left(\frac{8mdC_4}{9} \right)^{1/3} \frac{8\Gamma(2/3)}{\sqrt{3}\Gamma(4/3)} \quad (2.68)$$

Как видно, уменьшая толщину пленки d , можно добиться уменьшения b и соответственно, увеличения коэффициента отражения:

$$R = 1 - kb$$

Perfect mirror	Silicon	Silica	Graphene
$-53.0 - i543.0$	$-97.2 - i435.2$	$-77.0 - i272.6$	$-15.4-i109.7$

Таблица 2.2

Комплексная длина рассеяния (а.е.) для случая отражения антиводорода от различных материальных поверхностей.

Заметим, что с уменьшением b квадратично растет энергия столкновений, при которой применимо приближение длины рассеяния и, соответственно, коэффициент отражения близок к 1.

Указанная качественная модель объясняет изменение асимптотики и, как следствие, характерного масштаба действия потенциала, но не позволяет точно вычислить значения асимптотических констант C_5 .

Более точный подход состоит в использовании в ранее введенном выражении (2.61) в качестве амплитуды отражения от пленки ЭМ волн следующего выражения:

$$\rho_f = \frac{(1 - \exp(-2Kd)) \rho_b}{1 - \exp(-2Kd)\rho_b^2} \quad (2.69)$$

где ρ_b - введенные ранее амплитуды отражения от бесконечного полупространства (2.63).

d (thickness)	a (a.u.), Silicon	a (a.u.), Silica
1 nm	$3 - i178.1$	$6.5 - i97.9$
2 nm	$1.6 - i231.8$	$7.5 - i130.3$
5 nm	$-6.5 - i311.2$	$3.2 - i181.9$
10 nm	$-21.8 - i367.8$	$-9.3 - i221.1$
20 nm	$-45.2 - i408.0$	$-29.1 - i250.1$
50 nm	$-73.1 - i429.7$	$-53.3 - i267.4$
100 nm	$-85.0 - i433.7$	$-64.4 - i271.2$
∞	$-97.2 - i435.2$	$-77.0 - i272.6$

Таблица 2.3

Комплексная длина рассеяния (а.е.) для случая отражения антиводорода от пленок различной толщины.

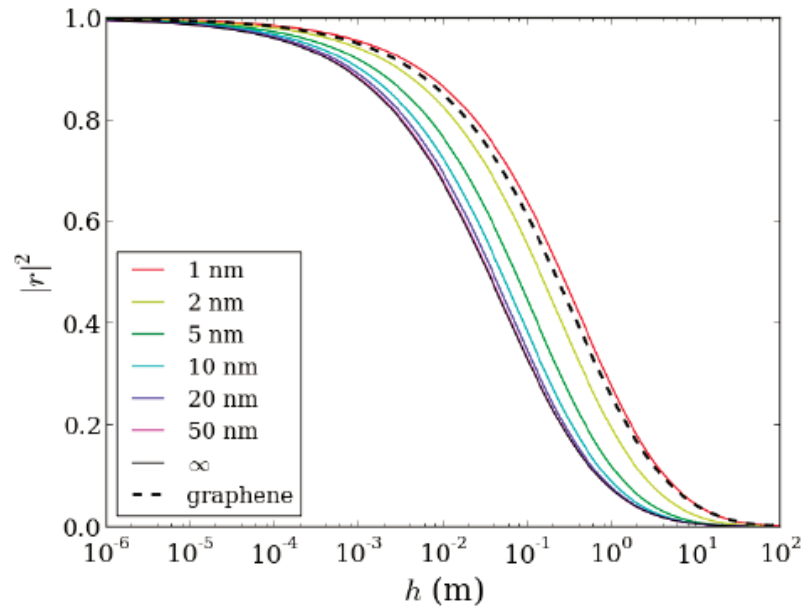


Рис. 2.3. Коэффициент отражения от пленок различной толщины как функция энергии налетающего антиводорода, выраженная в эквивалентных единицах высоты падения

Глава 3. Атом антиводорода в гравитационном поле

Явление квантового отражения антиводорода от поверхности приводит к любопытному явлению - существованию метастабильных состояний антиводорода, локализованном вблизи поверхности в гравитационном поле Земли. В силу близости коэффициента отражения к 1 при малых энергиях, характерных для состояний в гравитационном поле, такие состояния должны быть близки по свойствам к состояниям так называемого квантового баунсера- частицы, локализованной в квантовом состоянии в гравитационном поле над абсолютно отражающей поверхностью. Мы покажем, что гравитационные свойства антиводорода, в частности, гравитационная масса, могут быть установлены исходя из данных по спектру и пространственной локализации гравитационных состояний антиводорода на материальной поверхности. Антиводород, локализованный над поверхностью в гравитационном поле представляет собой простейшую одномерную квантовую систему, движение которой полностью определяется гравитационным полем, своеобразный «гравитационный атом», свойства которого могут быть точно предсказаны. Это позволяет развить новый подход к прецизионным исследованиям гравитационных свойств антиатомов на основе исследования спектроскопических и интерференционных свойств гравитационных состояний.

3.1. Гравитационные состояния \bar{H} вблизи материальной поверхности

Рассмотрим атом \bar{H} , локализованный вблизи материальной поверхности в гравитационном поле Земли. Такой конфайнмент \bar{H} возможен благодаря эффекту квантового отражения от потенциала ван-дер-Ваальса-

Казимира-Полдера V_{CP} между атомом и поверхностью, обеспечивающим квазиупругость отражения антиатома от материальной поверхности, если энергия антиатома достаточно мала. Уравнение Шредингера, определяющее движение антиводорода в суперпозиции V_{CP} и гравитационного потенциала, имеет вид:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \partial^2}{2m \partial z^2} + V_{CP}(z) + Mgz - E \right] \Psi(z) = 0 \quad (3.1)$$

Здесь z расстояние между \bar{H} и поверхностью, M - гравитационная масса антиводорода, m - инертная масса. Мы будем различать гравитационную и инертную массу для исследования вопроса о тесте слабого принципа эквивалентности. Волновая функция $\Psi(z)$, как было установлено в Главе 2, удовлетворяет условию полного поглощения при $z = 0$ и описывает поглощение волны в веществе материальной поверхности.

Обезразмерим уравнение (3.1), введя характерные масштабы длины и энергии:

$$l_0 = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2mMg}}, \quad (3.2)$$

$$l_{CP} = \sqrt{2mC_4}, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2 M^2 g^2}{2m}}, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{CP} = \frac{\hbar^2}{4m^2 C_4}. \quad (3.5)$$

Здесь $l_0 = 5.871 \mu m$ масштаб де-бройлевской длины волны атома антиводорода в гравитационном поле Земли, $l_{CP} = 0.027 \mu m$ - характерный масштаб действия потенциала ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера, $\varepsilon_0 = 2.211 \cdot 10^{-14}$ а.е. - характерный масштаб энергий состояний антиводорода в гравитационном поле, а $\varepsilon_{CP} = 1.007 \cdot 10^{-9}$ а.е. характерный масштаб энергии в потенциале ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера. Как видно, характерная длина волны антиводорода в гравитационном поле много больше характерного масштаба расстояний V_{CP} , $l_0 \gg l_{CP}$, в то время как характер-

ная энергия в гравитационном поле существенно меньше чем в потенциале антиатом-поверхность $\varepsilon_0 \ll \varepsilon_{CP}$.

Полезно для дальнейшего рассмотрения ввести также характерный временной масштаб для движения атома антиводорода в гравитационном поле τ_0 :

$$\tau_0 = \hbar/\varepsilon_0 \simeq 0.001s \quad (3.6)$$

На больших расстояниях от поверхности $z \gg l_{CP}$ решение уравнения (3.1) имеет вид:

$$\Psi(z) \sim \text{Ai}\left(\frac{z}{l_0} - \frac{E}{\varepsilon_0}\right) + K(E) \text{Bi}\left(\frac{z}{l_0} - \frac{E}{\varepsilon_0}\right) \quad (3.7)$$

где $\text{Ai}(x)$ и $\text{Bi}(x)$ функции Эйри [105], а $K(E)$ - зависящий от энергии коэффициент смешивания двух независимых решений. Условие квадратичной интегрируемости $\Psi(z \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ приводит к следующему условию на собственные значения энергии:

$$K(E_n) = 0 \quad (3.8)$$

Пользуясь установленной ранее иерархией масштабов $l_{CP} \ll l_0$, можно существенно упростить задачу, сведя задачу о состояниях антиводорода в гравитационном поле над материальной поверхностью к задаче о «квантовом баунсере» (частице в гравитационном поле над идеально отражающим зеркалом) с модифицированным граничным условием. Волновая функция баунсера удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{cases} \left[-\frac{\hbar^2 \partial^2}{2m \partial z^2} + Mgz - E_n \right] \Phi_n(z) = 0 \\ \Phi_n(z=0) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Уровни энергии в такой задаче хорошо известны [106]:

$$E_n^0 = \varepsilon_0 \lambda_n^0, \quad (3.10)$$

$$\text{Ai}(-\lambda_n^0) = 0. \quad (3.11)$$

n	λ_n^0	E_n^0 , peV	z_n^0 , μm
1	2.338	1.407	13.726
2	4.088	2.461	24.001
3	5.521	3.324	32.414
4	6.787	4.086	39.846
5	7.944	4.782	46.639
6	9.023	5.431	52.974
7	10.040	6.044	58.945

Таблица 3.1

Собственные числа, энергии гравитационных состояний and классические точки поворота для частицы с массой (анти)водорода в гравитационном поле земли над идеально отражающей поверхностью.

В таблице 3.1 приведены энергии и классические точки поворота («высоты подскока») $z_n^0 = E_n^0/(Mg)$ первых семи состояний квантового баунсера с массой антиводорода.

На расстояниях z , таких что $l_{CP} \ll z \ll l_0$ можно пренебречь гравитационным потенциалом в (3.1). В этом случае решение в указанной области имеет вид:

$$\Psi(z) \sim \sin(kz + \delta(E)). \quad (3.12)$$

Здесь k - волновой вектор $k = \sqrt{2mE}$, а $\delta(E)$ фазовый сдвиг в отраженной от поверхности волне \bar{H} , без учета гравитационного поля [107]. Сшивая асимптотики eq.(3.12) и eq.(3.7), получим соотношение между сдвигом фаз $\delta(E)$ и введенной ранее K -функцией (3.7):

$$K(E) = -\frac{\tan(\delta(E)) \text{Ai}'(-E/\varepsilon_0) - kl_0 \text{Ai}(-E/\varepsilon_0)}{\tan(\delta(E)) \text{Bi}'(-E/\varepsilon_0) - kl_0 \text{Bi}(-E/\varepsilon_0)}. \quad (3.13)$$

При выводе этих выражений мы приняли во внимание, что связь между $K(E)$ и $\delta(E)$ не зависит от точки сшивки z_m и поэтому формально может быть отнесена к $z_m = 0$.

Уравнение для модифицированных гравитационных уровней может быть получено подстановкой (3.13) в (3.8):

$$\frac{\tan(\delta(E_n))}{kl_0} = \frac{\text{Ai}(-E_n/\varepsilon_0)}{\text{Ai}'(-E_n/\varepsilon_0)}. \quad (3.14)$$

Это уравнение эквивалентно следующему граничному условию:

$$\frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)} = \frac{\tan(\delta(E_n))}{k}. \quad (3.15)$$

Таким образом, система уравнений, описывающая антиводород, локализованный у материальной поверхности в гравитационном поле Земли, имеет вид:

$$\begin{cases} \left[-\frac{\hbar^2 \partial^2}{2m \partial z^2} + Mgz - E_n \right] \Phi_n(z) = 0 \\ \frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)} = \frac{\tan(\delta(E_n))}{k} \end{cases} \quad (3.16)$$

Для нижних гравитационных уровней выполнено условие $kl_{CP} \ll 1$. Это условие обеспечивает выполнение приближения длины рассеяния для фазового сдвига: $\delta(E) \approx -ka_{CP}$. Вычисленная ранее комплексная длина рассеяния антиводорода на потенциале атом-поверхность (с учетом граничного условия полного поглощения) для идеально проводящей поверхности оказалась раной [107]:

$$a_{CP} = -(0.10 + i1.05)l_{CP}, \quad (3.17)$$

$$a_{CP} = -0.0027 - i0.0287\mu m \quad (3.18)$$

Таким образом уравнение для гравитационных состояний с учетом взаимодействия с поверхностью (3.14) приобретают вид:

$$\frac{a_{CP}}{l_0} = -\frac{\text{Ai}(-E_n/\varepsilon_0)}{\text{Ai}'(-E_n/\varepsilon_0)}. \quad (3.19)$$

Указанное выше уравнение эквивалентно следующему граничному условию на волновую функцию $\Phi(z)$ частицы в гравитационном поле:

$$\Phi(z \rightarrow 0) \rightarrow z - a_{CP} \quad (3.20)$$

В результате поглощения, описываемого мнимой частью длины рассеяния a_{CP} , гравитационные состояния \bar{H} вблизи поверхности оказываются квазистационарными.

Для малых квантовых чисел n , связь уровней антиводорода E_n с невозмущенными взаимодействиями с поверхностью уровнями E_n^0 (уровнями квантового баунсера), легко получить, введя в уравнение для баунсера комплексный сдвиг:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \partial^2}{2m \partial \tilde{z}^2} + Mg\tilde{z} - (E_n - Mga_{CP}) \right] \Phi_n(\tilde{z}) = 0 \quad (3.21)$$

$$\Phi_n(\tilde{z} \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad (3.22)$$

Уровни энергии E_n и собственные функции Φ_n :

$$E_n = E_n^0 + Mga_{CP}, \quad (3.23)$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{N_i} \text{Ai}((z - a_{CP})/l_0 - \lambda_n^0), \quad (3.24)$$

здесь N_i - нормировочная константа (см. Приложение Г).

В дальнейшем мы будем использовать безразмерные собственные значения $\lambda_n = E_n/\varepsilon_0$:

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + a_{CP}/l_0 \quad (3.25)$$

Важным следствием полученных выражений является тот факт, что комплексный сдвиг гравитационных состояний за счет взаимодействия с поверхностью - Mga_{CP} - мал и *одинаков* для всех нижних уровней. Это означает, в частности, что частоты перехода между гравитационными уровнями не содержат эффектов взаимодействия с поверхностью вплоть до второго порядка по a_{CP}/l_0 .

Выясним более подробно этот вопрос. Приближение длины рассеяния верно в пределе $k_n a_{CP} \rightarrow 0$, где $k_n = \sqrt{2mE_n}$ и, очевидно, применимо для нижних уровней. Так, для первого гравитационного состояния $|k_1 a_{CP}| =$

0.0071. Тем не менее, учет более высоких порядков разложения в (3.14) приведет к зависимости сдвига от номера уровня. Воспользуемся известным разложением s -волнового фазового сдвига $\delta(E)$ в однородном потенциале $1/z^4$ [108], сохраняя в нем ведущие члены, зависящие от импульса k :

$$a_{CP}k \cot(\delta(k)) \simeq -1 + \frac{\pi}{3} \frac{l_{CP}}{a_{CP}} (l_{CP}k) + \frac{4}{3} (l_{CP}k)^2 \ln\left(\frac{l_{CP}k}{4}\right) + \dots \quad (3.26)$$

Введем модифицированную, зависящую от импульса k "длину рассеяния" $\tilde{a}_{CP}(k) \equiv -\delta(k)/k$:

$$\tilde{a}_{CP}(k) \simeq a_{CP} + \frac{\pi}{3} l_{CP} (l_{CP}k) + \frac{4}{3} a_{CP} (l_{CP}k)^2 \ln\frac{l_{CP}k}{4} \quad (3.27)$$

Ведущий член в этом разложении $\frac{\pi}{3} l_{CP} (l_{CP}k)$ - вещественный и зависит только от асимптотических свойств потенциала V_{CP} , т.е. от размерного масштаба l_{CP} . Тогда уравнение для модифицированных уровней:

$$E_n = E_n^0 + Mg\tilde{a}_{CP}(E_n) \quad (3.28)$$

Учитывая малость зависящих от импульса членов (для нижних гравитационных состояний) в (3.27), получим:

$$E_n \simeq E_n^0 + Mg\tilde{a}_{CP}(k_n^0) = \varepsilon \left(\lambda_n^0 + a_{CP}/l_0 + \frac{\pi l_{CP}}{3l_0} (l_{CP}k_n^0) + \frac{4a_{CP}}{3l_0} (l_{CP}k_n^0)^2 \ln\frac{l_{CP}k_n^0}{4} \right). \quad (3.29)$$

Здесь $k_n^0 = \sqrt{2mE_n^0}$.

Учет зависящих от импульса членов в (3.27) меняет частоты переходов между состояниями, внося в них зависимость от взаимодействия с поверхностью. Тем не менее, такая поправка очень мала. Действительно, учитывая что для нижних гравитационных состояний, $l_{CP}k_n^0 \sim l_{CP}/l_0$, поправки оказываются второго порядка по l_{CP}/l_0 . Частота перехода между первым и вторым состоянием $\omega_{12} = \omega_{12}^0 + \Delta_{12}$, где $\omega_{12}^0 = (E_2^0 - E_1^0)/(2\pi\hbar) = 254.54$ Hz, а сдвиг $\Delta_{12} = Mg(\tilde{a}_{CP}(k_2^0) - \tilde{a}_{CP}(k_1^0)) = 0.0017$ Hz.

Учет первых двух членов в разложении (3.27) дает одинаковую ширину у всех нижних уровней:

$$\Gamma_n = \varepsilon \frac{b}{2l_0}. \quad (3.30)$$

Где $b = 4 \operatorname{Im} a_{CP}$:

$$b = 0.115 \text{ } \mu\text{m}. \quad (3.31)$$

Как видно из (3.30) ширина уровней пропорциональна отношению ε/l_0 . Несложно установить физический смысл такого соотношения. Из (3.2) и (3.4) сразу следует, что искомое отношение есть просто сила тяжести: $\varepsilon/l_0 = Mg$

$$\Gamma_n = \frac{b}{2} Mg. \quad (3.32)$$

Таким образом, измерение ширин гравитационных уровней вместе с величиной b позволяет измерить вес атома антиводорода.

Соответствующее время жизни (вычисленное для идеально проводящей поверхности) оказывается

$$\tau = \frac{2\hbar}{Mgb} \simeq 0.1 \text{ s}. \quad (3.33)$$

Обратим внимание на факторизацию гравитационных эффектов (фактор Mg) и эффект квантового отражения (константа b). Такая факторизация возможна благодаря малости отношения $b/(2l_0) \simeq 0.01$.

В предыдущей главе мы установили, что коэффициент отражения от диэлектрических поверхностей и в особенности, тонких пленок, может быть выше при тех же энергиях, а значит большим оказывается время жизни гравитационных состояний. Соответствующие времена жизни представлены в Таблице 3.2.

Сравнивая время жизни \bar{H} в нижних гравитационных состояниях с классическим периодом «подскока» $T = 2\sqrt{\frac{2l_0\lambda_1}{g}} \simeq 0.0033 \text{ s}$ антиводорода на высоту, соответствующую энергии основного гравитационного состояния, получим, что антиводород за время жизни совершает около 30 классических

d (thickness)	t (s), Silicon	t (s), Silica
1 nm	0.34	0.61
2 nm	0.25	0.46
5 nm	0.19	0.33
10 nm	0.16	0.27
20 nm	0.15	0.24
50 nm	0.14	0.22
∞	0.14	0.22

Таблица 3.2

Время жизни нижних гравитационных состояний антиводорода над пленками различной толщины.

подскока. Эти качественные оценки показывают, что нижние квазистационарные гравитационные состояния хорошо определены.

Ясно, что с увеличением квантового числа состояния N увеличивается классический период (на квантовом языке- уменьшается расстояние между уровнями). Выясним, каким номерам квантовых состояний соответствует ситуация, когда расстояния между уровнями сравниваются с шириной и описание в терминах отдельных квазистационарных состояний теряет физический смысл:

$$\frac{\tau_N}{T_N} = \frac{2\pi\hbar}{\Gamma(N)\frac{dE(n)}{dn}} > 1. \quad (3.34)$$

Здесь τ_N время жизни N -ого гравитационного состояния, T_N классический период, отвечающий энергии N -ого состояния $T_N = 2\hbar\pi/(dE(n)/dn)$.

Чтобы выполнить такую оценку преобразуем (3.14) используя асимптотическое выражение для функции Эйри большого аргумента:

$$\lambda_n = \left(\frac{3}{2} \left(\pi \left[n - \frac{1}{4} \right] - \delta(E_n) \right) \right)^{2/3}. \quad (3.35)$$

Точность приведенного выше квазиклассического выражения растет с n ; но даже для основного состояния оно дает значение с точностью несколько процентов. В интересующем нас энергетическом диапазоне $|\delta(E)| \ll \pi[n - \frac{1}{4}]$ [107], поэтому :

$$\lambda_n \simeq \lambda_n^0 - \frac{\delta(E_n^0)}{\sqrt{\lambda_n^0}}. \quad (3.36)$$

Мы использовали квазиклассическое выражение для собственных значений λ_n^0 [62]:

$$\lambda_n^0 \simeq \left(\frac{3}{2} \pi [n - \frac{1}{4}] \right)^{2/3} \quad (3.37)$$

Несложно проверить, что при малых n приведенная выше формула переходит в (3.25). Подстановка (3.36) в (3.34) приводит к следующему выражению:

$$\frac{\tau_n}{T_n} \simeq \frac{1}{4 \operatorname{Im} \delta(E_n^0)}. \quad (3.38)$$

Отношение $\tau(n)/T(n)$ показывает количество классических периодов - «подскоков» \bar{H} за время жизни n -го состояния. Эта зависимость показана на Рис.3.1.

Можно показать, что зависимость ширины состояния от его энергии в квазиклассическом пределе имеет вид:

$$\Gamma(E) = -\epsilon_0^{3/2} \frac{\ln(R(E))}{2\sqrt{E}} \quad (3.39)$$

где $R(E)$ - коэффициент надбарьерного (квантового) отражения.

Используя численные значения $\delta(E)$, $R(E)$, полученные нами ранее [107], получим, что условие (3.34) выполняется при

$$n < N = 30000. \quad (3.40)$$

Соответствующая энергия $E_N = 6 \cdot 10^{-11}$ а.е., а характерный размер такого состояния (классическая высота подскока) составляет $H_N = 1.6$ см. Эта означает, что квазистационарные гравитационные состояния хорошо определены вплоть до высоковозбужденных уровней.

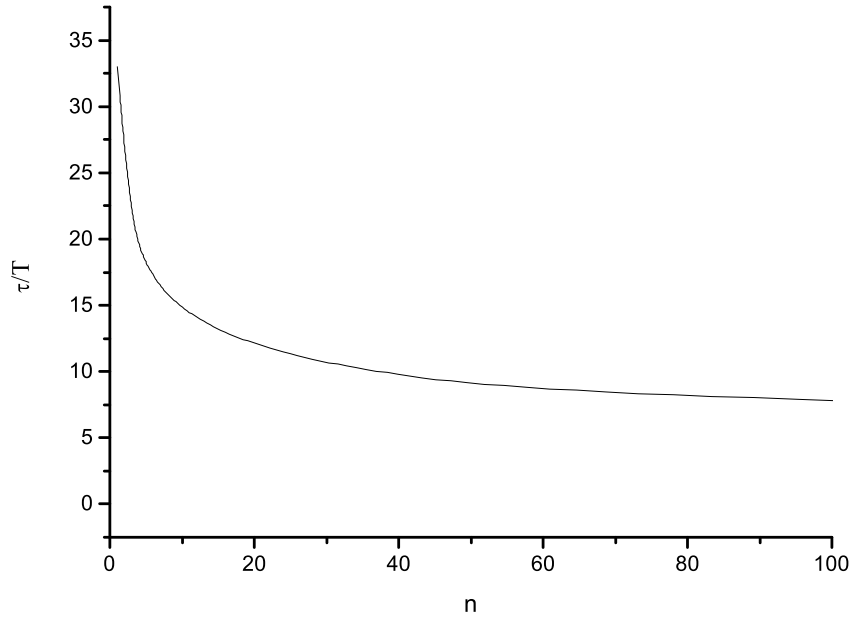


Рис. 3.1. Количество подскоков \bar{N} в течении времени жизни в n -ом гравитационном состоянии

3.2. Интерференция гравитационных состояний антиводорода

Квазистационарный характер гравитационных состояний проявляется в том, что, в отличии от стационарных состояний, ток через поверхность $z = 0$ оказывается ненулевым. Действительно, выражение для тока:

$$j(z, t) = \frac{i\hbar}{2M} \left(\Phi(z, t) \frac{d\Phi^*(z, t)}{dz} - \Phi^*(z, t) \frac{d\Phi(z, t)}{dz} \right). \quad (3.41)$$

При $z = 0$ для заданного гравитационного состояния (3.24) приведенное выражение оказывается:

$$j(0, t) = \varepsilon \exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar}t\right) \frac{\text{Ai}^*(-\lambda_n) \text{Ai}'(-\lambda_n) - \text{Ai}(-\lambda_n) \text{Ai}'^*(-\lambda_n)}{N_i N_i^*}. \quad (3.42)$$

Здесь λ_n дается выражением (3.25), N_i - нормировочная константа. Принимая во внимание малость отношения a_{CP}/l_0 и выражение Eq.(3.11), получим :

$$\text{Ai}(-\lambda_n) \approx -\frac{a_{CP}}{l_0} \text{Ai}'(-\lambda_n^0), \quad (3.43)$$

Это выражение записано с точностью до второго порядка по a_{CP}/l_0 . Используя явный вид нормировочной константы (выражение (Г.10) в Приложении D) $N_i = \text{Ai}'(-\lambda_n^0)$, окончательно получим:

$$j(0, t) = -\varepsilon \frac{b}{2\hbar l_0} \exp(-\frac{\Gamma}{\hbar}t) = -\frac{\Gamma}{\hbar} \exp(-\frac{\Gamma}{\hbar}t). \quad (3.44)$$

Полученный результат полностью соответствует полученному ранее выражению (3.30), так как:

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty |\Phi(z, t)|^2 dz = j(0, t) = -\frac{\Gamma}{\hbar} \exp(-\frac{\Gamma}{\hbar}t). \quad (3.45)$$

Рассмотрим теперь эволюцию суперпозиции нескольких гравитационных состояний:

$$\Phi(z, t) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{N_i} \text{Ai}(z/l_0 - \lambda_i) \exp(-i\lambda_i \frac{t}{\tau_0}). \quad (3.46)$$

Здесь τ_0 характерный масштаб времени движения \bar{H} в гравитационном поле (3.6), C_i амплитуды «заселенностей» состояний и $N_i = \text{Ai}'(-\lambda_i)$ -нормировочная константа.

Нас будет интересовать зависимость количества атомов антиводорода от времени в процессе эволюции такой суперпозиции:

$$F(t) = \int_0^\infty |\Phi(z, t)|^2 dz$$

$$F(t) = \sum_{i,j=1}^n \int_0^\infty \frac{C_j^* C_i}{N_j^* N_i} \text{Ai}^*(z/l_0 - \lambda_j) \text{Ai}(z/l_0 - \lambda_i) e^{(-i\varepsilon(\lambda_i - \lambda_j^*)t)} dz \quad (3.47)$$

Во-первых, заметим, что приведенное выражение зависит от времени (а не является константой, как это было бы в случае строго стационарных состояний) благодаря распаду гравитационных состояний за счет взаимодействия с поверхностью.

Во-вторых, квазистационарные состояния, отвечающие разным энергиям, не ортогональны между собой:

$$\frac{1}{N_i N_j} \int_0^\infty \text{Ai}^*(z/l_0 - \lambda_j) \text{Ai}(z/l_0 - \lambda_i) dz \equiv \alpha_{ij} \neq \delta_{ij}. \quad (3.48)$$

В Приложении Г, будет получено следующее выражение для α_{ij} , с точностью до второго порядка по a_{CP}/l_0 :

$$\alpha_{i \neq j} = i \frac{(-1)^{i+j} b / (2l_0)}{\lambda_j^0 - \lambda_i^0 + ib / (2l_0)} \quad (3.49)$$

Как видно, кросс-члены обращаются в 0 при отсутствии распада $b = 4 \text{Im } a_{CP} \rightarrow 0$.

Вычислим теперь, как зависит от времени количество атомов антиводорода (3.47):

$$F(t) = \exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar} t\right) \left(\sum_i^n |C_i|^2 + 2 \text{Re} \sum_{i>j}^n \sum_j^n C_j^* C_i \frac{i(-1)^{i+j} b / (2l_0)}{\lambda_j^0 - \lambda_i^0 + ib / (2l_0)} e^{-i(\lambda_i^0 - \lambda_j^0) \frac{t}{\tau_0}} \right). \quad (3.50)$$

Из уравнений (3.50) и (3.30) мы получим следующее выражение для скорости аннигиляции $-\frac{dF(t)}{dt}$, сохраняя члены первого порядка по a_{CP}/l_0 :

$$\frac{dF(t)}{dt} = -\frac{\Gamma}{\hbar} \exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar} t\right) \left(\sum_i^n |C_i|^2 + 2 \text{Re} \sum_{i>j}^n \sum_j^n (-1)^{i+j} C_j^* C_i e^{-i(\lambda_i^0 - \lambda_j^0) \frac{t}{\tau_0}} \right). \quad (3.51)$$

Для простого случая суперпозиции двух состояний и с равными заселенностями $C_{1,2}$ ($C_1 = C_2 = 1$), вышеприведенное выражение превращается в:

$$\frac{dF_{12}(t)}{dt} = -\frac{\Gamma}{\hbar} \exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar} t\right) (1 - \cos(\omega_{12} t)). \quad (3.52)$$

Здесь $\omega_{12} = (\lambda_2^0 - \lambda_1^0) / \tau_0$. Несложно проверить, что такой же результат можно получить, исследуя выражение для тока через поверхность $j(0, t)$ из (4.43) для случая суперпозиции состояний (3.46).

Примечательной особенностью такого выражения является то, что скорость аннигиляции не только падает по экспоненциальному закону, определяемому шириной Γ (одинаковой для всех нижних состояний с точностью

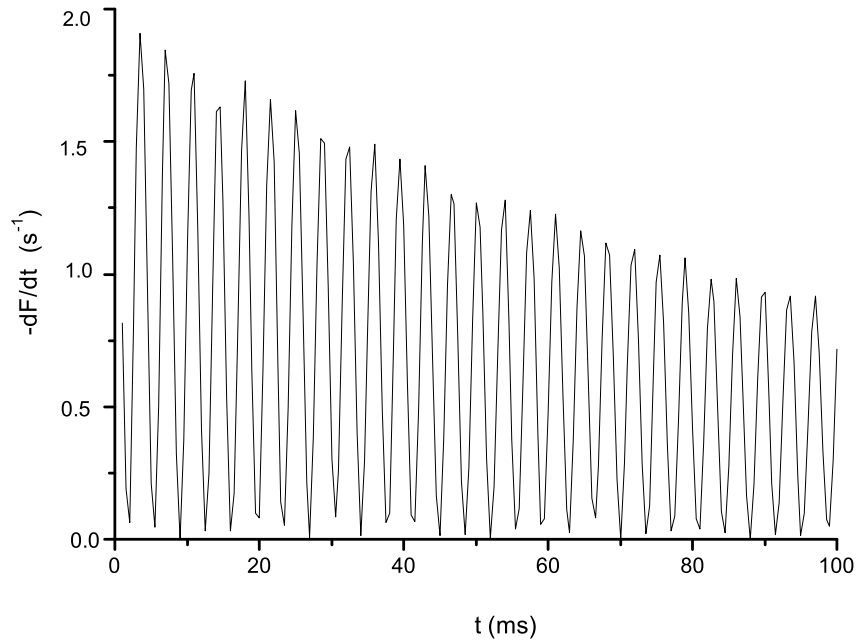


Рис. 3.2. Зависимость аннигиляционного сигнала от времени для суперпозиции первого и второго гравитационных состояний \bar{H} .

до членов 2 порядка), но и осциллирует с частотой перехода между состояниями (равной 254.54 Hz). На Рис.3.2 представлена временная зависимость аннигиляционного сигнала \bar{H} в суперпозиции 2 состояний.

Любопытно отметить, что осцилляции зависимости количества антиатомов от времени являются прямым следствием распада гравитационных состояний. Действительно, такие осцилляции возникают за счет неортогональности распадающихся квазистационарных состояний (3.50). Как видно из (3.49) соответствующие интерференционные члены пропорциональны мнимой части длины рассеяния; они обращаются в 0 при обнулении параметра, b/l_0 .

Важным обстоятельством является то, что частоты интерференционных членов в указанной выше временной зависимости $N(t)$ есть в точности частоты перехода между гравитационными состояниями, которые, как было отмечено, не содержат эффекта взаимодействия с поверхностью в первом

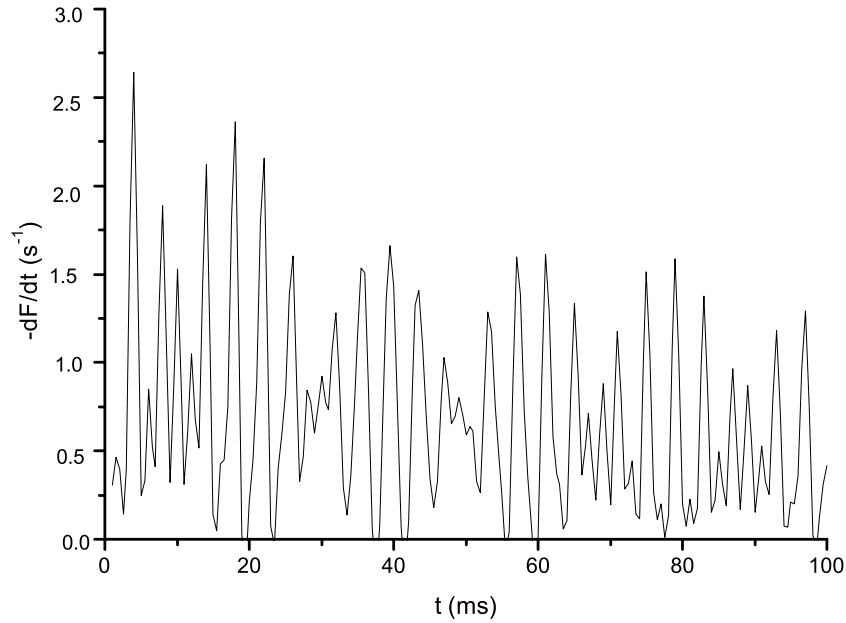


Рис. 3.3. Зависимость аннигиляционного сигнала от времени для суперпозиции первого, второго и третьего гравитационных состояний \bar{H} .

порядке по параметру $\text{Re } a_{CP}/l_0$, определяющему комплексный сдвиг гравитационных уровней.

Физическая причина такой осцилляционной зависимости очевидна при переходе к рассмотрению суперпозиции состояний с большими квантовыми числами n в виде волновых пакетов. В этом случае движение волнового пакета соответствует движению классической частицы, подпрыгивающей в гравитационном поле над отражающей поверхностью. Аннигиляция, в таком предельном случае, может происходить только в моменты столкновения волнового пакета с поверхностью, т.е. через периодические промежутки времени $T_n = 2\sqrt{2E_n/Mg^2} \approx 3.35n^{1/3}$ ms. Таким образом, осцилляции в квантовом случае при переходе к квазиклассическому пределу естественным образом описывают периодическое движение квазиклассического волнового пакета.

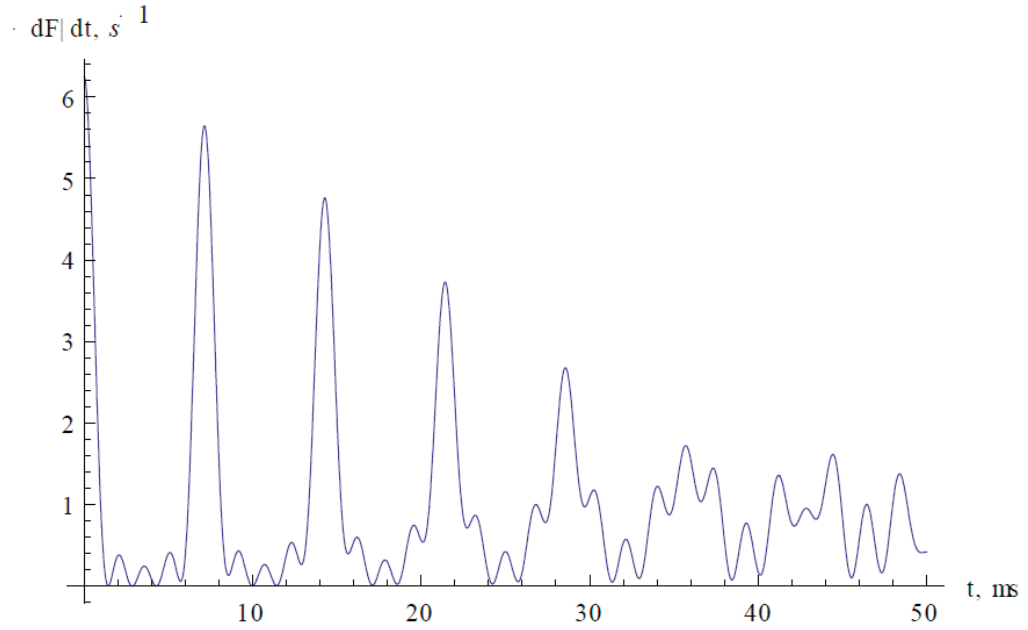


Рис. 3.4. Зависимость аннигиляционного сигнала от времени для суперпозиции состояний \bar{H} с $8 \leq n \leq 12$

3.2.1. Измерение гравитационной массы антиводорода

Тождественность наблюдаемой частоты аннигиляционного сигнала и частоты переходов ω_{12} в случае суперпозиции двух гравитационных состояний антиводорода (3.52) позволяет измерить следующую комбинацию гравитационной и инертной массы (3.4):

$$\frac{M^2}{m} = \frac{2\hbar\omega_{12}^3}{g^2(\lambda_2^0 - \lambda_1^0)^3}. \quad (3.53)$$

Полагая равенство инертной массы антиводорода и водорода в соответствии СРТ–теоремой, получим для гравитационной массы:

$$M = \sqrt{\frac{2m_H\hbar\omega_{12}^3}{g^2(\lambda_2^0 - \lambda_1^0)^3}}. \quad (3.54)$$

Исследование суперпозиции трех гравитационных состояний позволяет извлечь информацию не только о характерном энергетическом масштабе состояний антиводорода в гравитационном поле ε_0 , но и о возможном наличии дополнительных сил (так называемая неньютоновская гравитация,

дополнительные взаимодействия, связанные с существованием гипотетических легких бозонов в расширениях Стандартной Модели [64, 109]), масштаб действия которых сопоставим с характерным размером исследуемых гравитационных состояний. Наличие такого дополнительного взаимодействия между антиатомом и поверхностью (обычно оно описывается модельным потенциалом Юкавовского типа) приведет к модификации спектра, характеризуемого величиной $d^2E(n)/dn^2$. Для суперпозиции трех состояний получим (4.44):

$$\frac{dF_{123}(t)}{dt} = -\frac{2\Gamma}{3\hbar} \exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar}t\right) \left(\frac{3}{2} - \cos(\omega_{12}t) - \cos(\omega_{23}t) + \cos((\omega_{12} + \omega_{23})t)\right). \quad (3.55)$$

Здесь $\omega_{ij} = (\lambda_j^0 - \lambda_i^0)/\tau_0$.

Несложно убедиться, что период когерентности членов $\cos(\omega_{12}t)$ и $\cos(\omega_{23}t)$:

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_{12} - \omega_{23}} \simeq 0.02s. \quad (3.56)$$

Квазиклассическое выражение для T_r :

$$T_r \approx \frac{2\pi}{|d^2E/dn^2|}. \quad (3.57)$$

Период T_r является квантовым аналогом величины, которая называется ревайвал-полупериодом $T_{rev} = 4\pi/|d^2E/dn^2|$ (T_{rev} характеризует время, через которое квазиклассический волновой пакет возвращается к форме, близкой к исходной после квантового расширения [110]). На Рис.3.4 показана эволюция (4.45) суперпозиции трех состояний. Период T_r хорошо заметен, как период модуляции более высокочастотных колебаний . Отношение

$$T_r/\tau_0 = \frac{2\pi}{\lambda_3 - 2\lambda_2 + \lambda_1} \quad (3.58)$$

оказывается крайне чувствительным к любой нелинейной добавке к гравитационному потенциалу. Действительно, в то время как поправки к ин-

тенсивности гравитационного потенциала приводят к модификации ε_0 (через модификацию g), нелинейные поправки меняют вторую производную $|d^2E/dn^2|$.

3.2.2. Пространственно-временные корреляции

В предыдущем параграфе мы указали на интерференционный способ измерения частот переходов между гравитационными состояниями для получения величины гравитационной массы антиводорода. Другой подход может состоять в том, чтобы измерять пространственную плотность антиводорода в заданный момент времени. Такое измерение возможно, например, в эксперименте пролетного типа, в котором время пролета вдоль зеркала измеряется одновременно с пространственной плотностью в поперечной плоскости детектора. Поскольку в горизонтальном пучке антиатомов присутствует широкий спектр горизонтальных скоростей, такой подход позволяет исследовать зависимость от времени плотности антиводорода в вертикальном направлении:

$$|\Phi_{(12)}(z, t)|^2 = e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t} \left(|\Phi_{(12)}^{av}(z)|^2 + 2 \operatorname{Re} \frac{\operatorname{Ai}(x - \lambda_1) \operatorname{Ai}(x - \lambda_2)}{\operatorname{Ai}'(-\lambda_1) \operatorname{Ai}'(-\lambda_2)} e^{-i\omega_{12}t} \right) \quad (3.59)$$

$$|\Phi_{(12)}^{av}(z)|^2 = \left| \frac{\operatorname{Ai}(x - \lambda_1)}{\operatorname{Ai}'(-\lambda_1)} \right|^2 + \left| \frac{\operatorname{Ai}(x - \lambda_2)}{\operatorname{Ai}'(-\lambda_2)} \right|^2. \quad (3.60)$$

Здесь $x = z/l_0$.

Частота перехода $\omega_{12} = 254.54Hz$ может быть выделена по осцилляции плотности вокруг заданного положения z . Пространственный масштаб l_0 может быть измерен по положению первого нуля $z_1^{(2)}$ второго гравитационного состояния (верхний индекс означает номер состояния, нижний — номер нуля) $\operatorname{Ai}(z_1^{(2)}/l_0 - \lambda_2) = 0$; указанное условие эквивалентно следующему выражению:

$$z_1^{(2)} = (\lambda_2 - \lambda_1)l_0 = 10.27\mu m. \quad (3.61)$$

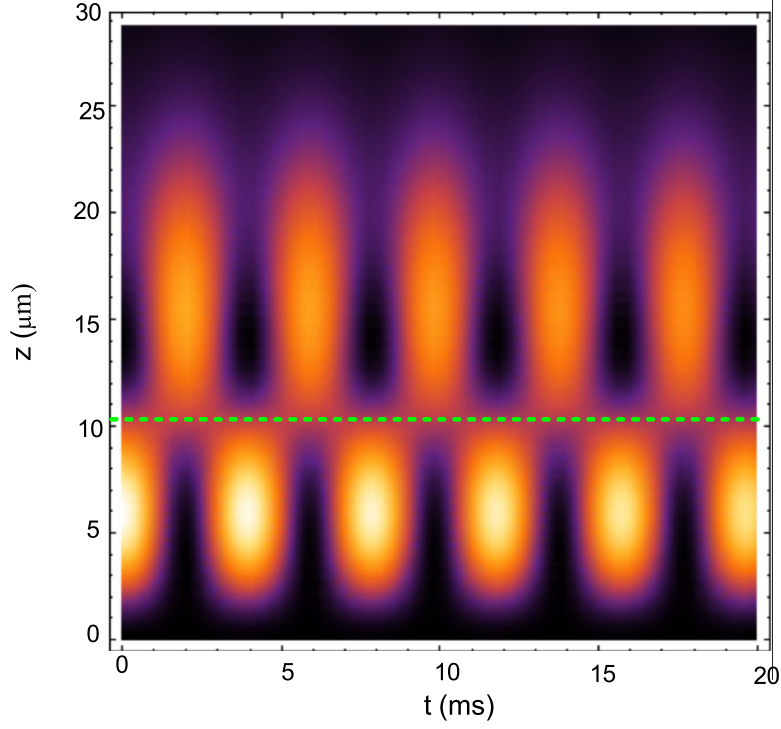


Рис. 3.5. Плотность вероятности \bar{H} в суперпозиции двух нижних гравитационных состояний, как функция высоты над зеркалом z и времени t . Более яркая область отвечает большей вероятности. Пунктирной линией отмечено положение нуля второго состояния

В этой точке $z = z_1^{(2)}$ временная зависимость плотности Eq.(3.59) совпадает с временной зависимостью основного состояния и не осциллирует:

$$|\Phi_{12}(z_1^{(2)}, t)|^2 = \exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar}t\right) \left| \frac{\text{Ai}(z_1^{(2)}/l_0 - \lambda_1)}{\text{Ai}'(-\lambda_1)} \right|^2. \quad (3.62)$$

Зависимость плотности вероятности от z и t показан на Рис.3.5.

Положение нуля $z_1^{(2)}$ не зависит от начального заселения состояний, поэтому его удобно использовать для измерения l_0 .

Несложно видеть, что одновременное измерение l_0 и ε_0 эквивалентно измерению инертной m и гравитационной $M_{\text{масс}} \bar{H}$:

$$m = \frac{\hbar^2}{2\varepsilon_0 l_0^2}, \quad (3.63)$$

$$M = \frac{\varepsilon_0}{g l_0}. \quad (3.64)$$

Слабый принцип эквивалентности $m = M$ означает определенную связь между ε_0 и l_0 :

$$\varepsilon_0 = \hbar \sqrt{\frac{g}{2l_0}}, \quad (3.65)$$

или, в терминах характерного времени (3.6):

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2l_0}{g}}. \quad (3.66)$$

В этом выражении легко распознать классическое время падения с высоты l_0 в гравитационном поле Земли.

Сделаем методическое замечание по поводу приведенных выше соотношений. В отличие от классической механики, где, с известными оговорками, слабый принцип эквивалентности можно сформулировать как независимость ускорения свободного падения тел от их состава и массы, в квантовой механике размер квантовых состояний, их характерная энергия и временной масштаб зависят от массы частицы. Это объясняется существованием в квантовой механике дополнительной размерной константы - постоянной Планка. Принцип эквивалентности в квантовой механике выражается как определенное универсальное соотношение между пространственным и энергетическим масштабам. Оно именно такое, что в классическом пределе дает известное выражение для времени падения.

Таким образом, измерение временной и пространственной зависимости плотности вероятности \bar{N} в суперпозиции двух состояний дает полную информацию о гравитационной и инертной массе антиводорода.

Использование суперпозиции трех (или более) гравитационных состояний может быть полезно для изучения вопроса о дополнительных (к гравитации) взаимодействиях с характерным пространственным масштабам порядка l_0 .

Рассмотрим для этих целей свойства нулей соответствующих функций Эйри, описывающих гравитационные состояния. Положение нулей функций

второго и третьего состояний следующее:

$$z_1^{(2)} = (\lambda_2 - \lambda_1)l_0 = 10.27\mu m, \quad (3.67)$$

$$z_1^{(3)} = (\lambda_3 - \lambda_2)l_0 = 8.41\mu m, \quad (3.68)$$

$$z_2^{(3)} = z_1^{(2)} + z_1^{(3)} = 18.68\mu m, \quad (3.69)$$

Суперпозиция трех состояний (ijk) эквивалентна суперпозиции двух (jk) состояний в точке z_i^k :

$$|\Phi_{(ijk)}(z_n^{(k)}, t)|^2 = |\Phi_{(ij)}(z_n^{(k)}, t)|^2. \quad (3.70)$$

Это означает, в частности, что в такой точке z_n^k суперпозиция трех состояний будет иметь гармоническую зависимость от времени с частотой ω_{ij} .

Легко также видеть, что если измерение положения нуля одного из состояний позволяет измерить l_0 , то измерение положения двух нулей дает информацию о гипотетических нелинейных добавочных членах к гравитационному потенциалу.

На Рис.3.6. показана пространственная и временная зависимость суперпозиции трех первых гравитационных состояний.

3.2.3. Квантовый баллистический эксперимент

Эксперимент по измерению ускорения свободного падения антиводорода, основанный на измерении времени падения, при учете квантовых свойств движения антиводорода, приобретает ряд существенных особенностей.

Прежде всего, время падения заранее приготовленного волнового пакета антиводорода представляет собой распределение, ширина которого определяется как начальным состоянием волнового пакета, так и высотой падения. Это есть следствие соотношения неопределенности, не допускающем одновременного уменьшения ширины распределения вертикальной

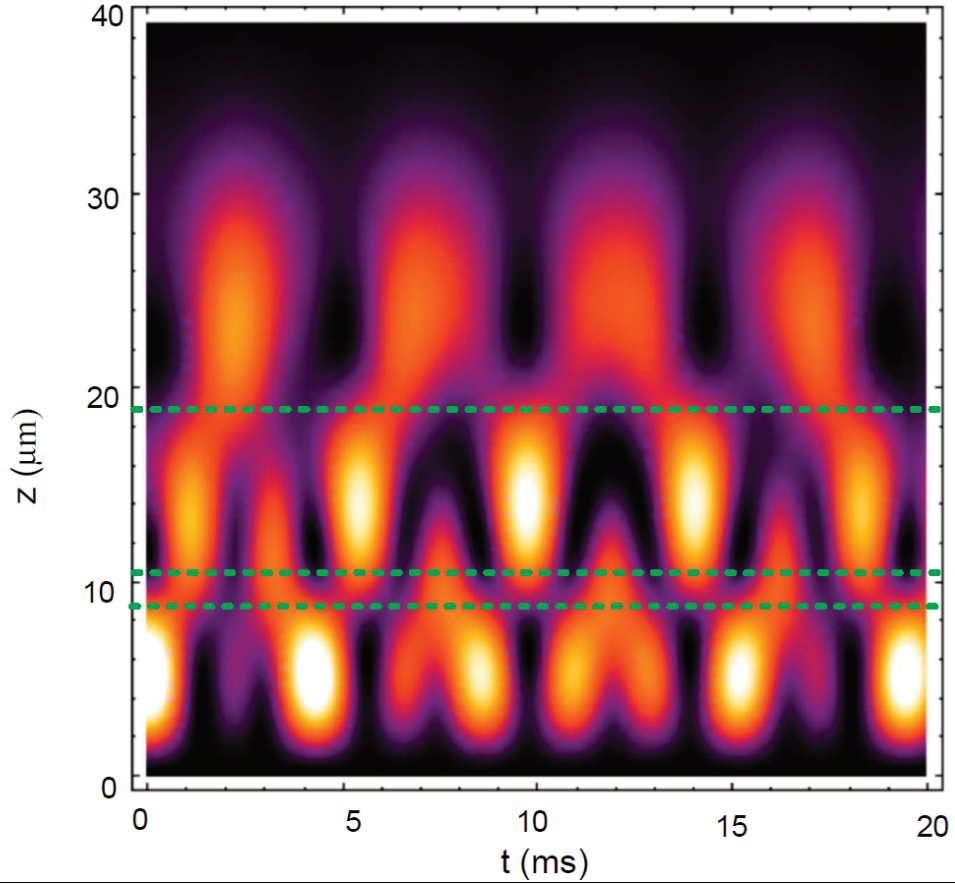


Рис. 3.6. Плотность вероятности \bar{N} в суперпозиции трех нижних гравитационных состояний, как функция высоты над зеркалом z и времени t . Более яркая область отвечает большей вероятности. Пунктирной линией отмечено положение нуля второго и третьего состояния.

координаты начального пучка и ширины распределения вертикальной скорости.

Выясним вид такого распределения и его связь с начальным состоянием. Будем считать, что антиводород находится в начальном состоянии, описываемом гауссовым распределением с шириной σ :

$$\Psi_0(z) = C \exp\left(-\frac{(z - H)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.71)$$

В момент времени $t = 0$ волновой пакет начинает падать. Его эволюция определяется через пропагатор в гравитационном поле:

$$\Psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z, z', t) \Psi_0(z') dz' \quad (3.72)$$

$$G(z, z', t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi it}} \exp\left(i \left[\frac{m}{2t} \left(z - z' - \frac{Mgt^2}{2m} \right)^2 + Mgz - \frac{M^2 t^3}{6m} \right]\right) \quad (3.73)$$

Эволюция плотности вероятности гауссова пакета в гравитационном поле определяется тогда следующим выражением:

$$|\Psi(z, t)|^2 = \frac{|C|^2 \sigma}{\zeta(t)} \exp\left(-\frac{\left(z - H + \frac{Mgt^2}{2m}\right)^2}{\zeta^2(t)}\right) \quad (3.74)$$

Здесь

$$\zeta(t) = \sigma \sqrt{1 + \frac{t^2}{m^2 \sigma^4}}$$

Из распределения (3.74) следует временное распределение аннигиляционных событий, отвечающих падению антиводорода на детектор с высоты H :

$$P(t) = \frac{|C|^2 \sigma}{\zeta(t)} \exp\left(-\frac{\left(H - \frac{Mgt^2}{2m}\right)^2}{\zeta^2(t)}\right) \quad (3.75)$$

Указанное выражение удобно переписать в виде:

$$P(t) = \frac{|C|^2 \sigma}{\zeta(t)} \exp\left(-\frac{(t - t_H)^2}{\Delta T^2}\right) \quad (3.76)$$

где мы ввели время расширения пакета

$$\Delta T = \sigma \sqrt{1 + \frac{t_H^2}{m^2 \sigma^4} \frac{m}{Mgt_H}} \quad (3.77)$$

и классическое время падения:

$$t_H = \sqrt{\frac{2Hm}{gM}}$$

Величина ΔT играет роль ширины распределения временных событий, а классическое время падения t_H оказывается средним значением, соответствующим максимуму распределения. Несложно установить, что для

получения минимальной относительной неопределенности $\Delta t/t_H$ необходимо при заданной высоте H выбрать ширину начального гауссова состояния:

$$\sigma_{min} = \sqrt{t_H/m} \quad (3.78)$$

Минимально возможная соответствующая ширина распределения временных событий:

$$\Delta T_{min} = \left(\frac{2m}{M^3 g^3 H} \right)^{1/4}$$

Рассмотрим ситуацию, когда начальное состояние представляет собой суперпозицию гравитационных состояний. Это соответствует следующей постановке эксперимента: зеркало, установленное на высоте H над детектором, служит для формирования суперпозиции гравитационных состояний, двигаясь вдоль которого атомы антиводорода достигают его края в заданный момент времени и падают. Формирование суперпозиции заданного числа состояний достигается расположением на заданной высоте над зеркалом шероховатой пластины-абсорбера, поглощающей антиводород в состояниях с квантовым номером больше заданного. Возможная принципиальная схема эксперимента показана на Рис.3.7. Интересной особенностью такой постановки эксперимента является тот факт, что временное распределение аннигиляционных событий в детекторе $P(t)$ оказывается тесно связанным с импульсным распределением начального состояния $F_0(p)$. Чтобы продемонстрировать это, запишем пропагатор движения в гравитационном поле в импульсном представлении $G(p, p', t)$:

$$\Psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(p, p', t) F_0(p') \exp(ipz/\hbar) dp dp' \quad (3.79)$$

$$G(p, p', t) = \exp\left(-\frac{it}{2m\hbar}(p^2 - Mgt + M^2 g^2 t^2/3)\right) \delta(p - Mgt - p') \quad (3.80)$$

Для достаточно больших времен падения, таких что $t \gg \hbar/\varepsilon_0$ интеграл (3.79) может быть вычислен методом стационарной фазы:

$$\Psi(z, t) \simeq \sqrt{\frac{m}{t}} \exp\left(\frac{imz^2}{2t} - \frac{it^3 M^2 g^2}{2m}\right) F_0(p_0 - Mgt), \quad (3.81)$$

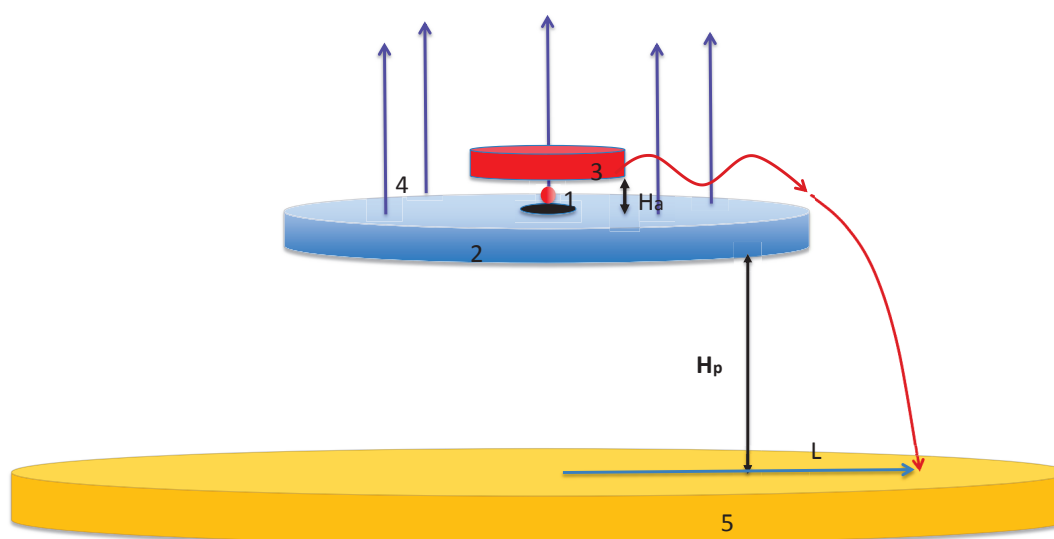


Рис. 3.7. Принципиальная схема эксперимента по измерению распределения времен падения суперпозиции гравитационных состояний \bar{H} . 1 - источник ультрахолодного антиводорода, 2 -зеркало, 3 -поглотитель, 4 -магнитное поле, 5 -детектор.

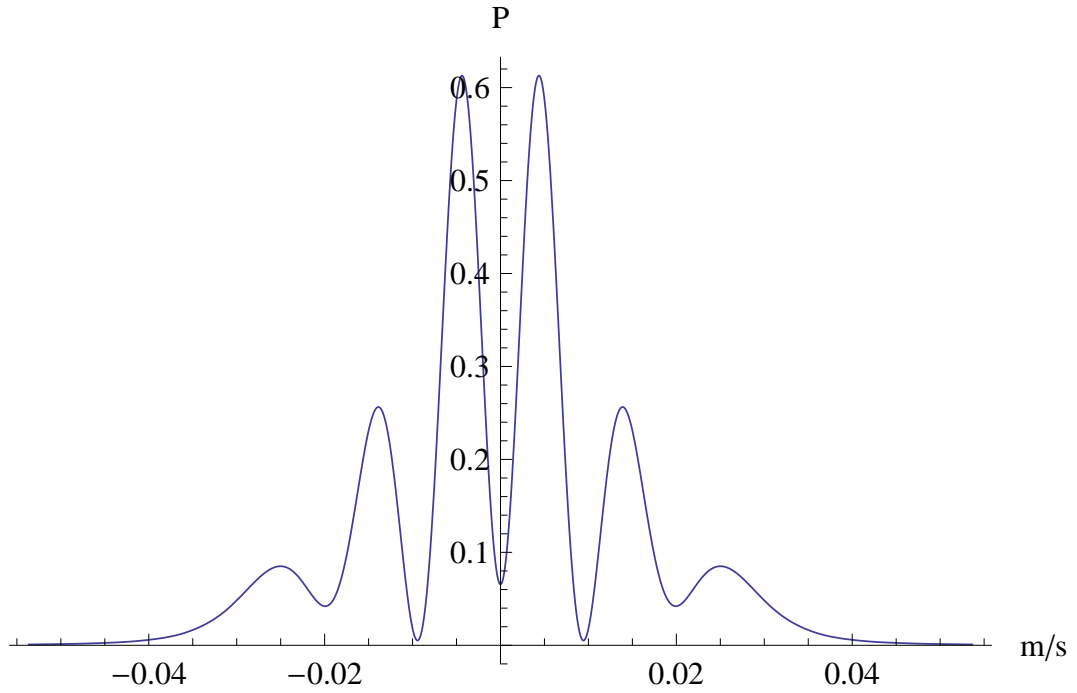


Рис. 3.8. Распределение по скоростям в суперпозиции $F_0(z) = g_1(z) - g_6(z)$.

где $p_0 = (z + gt^2/2)m/t$.

Как видно из приведенного выражения, импульсное распределение $F_0(p)$ отображается в распределении времен падения при временах падения больших характерного гравитационного времени $t \gg t_0$:

$$P = \frac{m}{t} |F_0(Mg(t - \sqrt{2Mg/(mz)}))|^2 \quad (3.82)$$

Два пика во временном распределении $t_1 = 246.9$ ms, $t_2 = 247.8$ ms, каждый шириной 0.5 ms и относительной точностью $\varepsilon \approx 2 \cdot 10^{-3}$ соответствуют максимумам в распределении по импульсам. Соотношение между пиками во временном распределении t_m и соответствующими максимумами в импульсном распределении даются выражением $p_m = \hbar k_m/l_0$, где k_m безразмерные величины:

$$\frac{\hbar k_m}{l_0} = Mg(t_m - t_0). \quad (3.83)$$

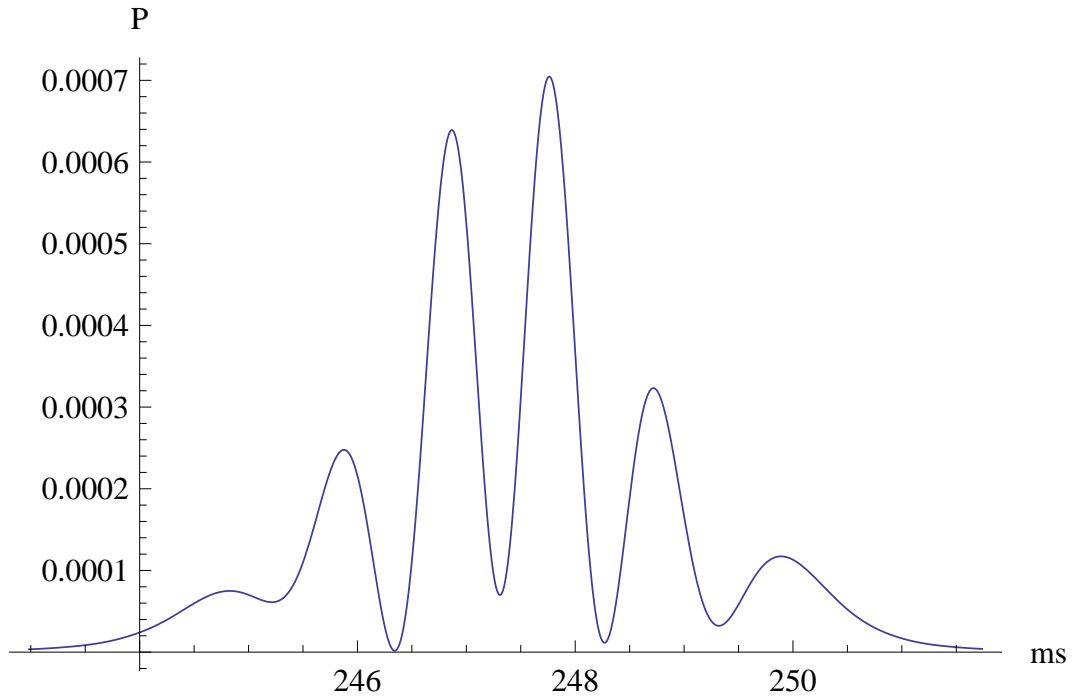


Рис. 3.9. Распределение по времени событий падения для суперпозиции гравитационных состояний $F_0(z) = g_1(z) - g_6(z)$. Высота падения $H_p = 30$ см.

Измерив временное распределение, можно определить характерный энергетический масштаб $\varepsilon_0 = Mgl_0$ из соотношения:

$$\varepsilon_0 = \frac{\hbar k_m}{t_m - t_0}, \quad (3.84)$$

Это позволяет в свою очередь определить гравитационную массу антиводорода:

$$M = \sqrt{\frac{2m\hbar k_m^3}{g^2(t_m - t_0)^3}}. \quad (3.85)$$

При статистике 10^3 событий этот подход позволяет измерить отношение M/m с точностью $6 \cdot 10^{-6}$.

3.3. Резонансная спектроскопия гравитационных состояний

Мы рассмотрим здесь другой метод, позволяющий прецизионно измерить частоты переходов между гравитационными уровнями, а значит, как было нами показано, и гравитационную массу антиводорода.

Указанный метод состоит в резонансном возбуждении переходов между гравитационными состояниями внешним полем и детектировании количества антиатомов в заданном состоянии в зависимости от частоты приложенного поля. Такой принцип широко применяется в атомной и молекулярной спектроскопии и известен как метод Раби [86].

Реализация такого метода предполагает три этапа: формирование начального квантового состояния, резонансный переход в возбужденное состояние, детектирование возбужденного или начального состояния.

В типичных условиях пролетного эксперимента поток атомов антиводорода движется в гравитационном поле над горизонтальным зеркалом. Так как разброс вертикальных скоростей в потоке велик по сравнению с характерными скоростями в гравитационных состояниях (характерные скорости антиатомов в нижних гравитационных состояниях порядка нескольких cm/s), то заселяются большое количество гравитационных состояний. В этом случае для выделения одного состояния (основного), можно поместить параллельно зеркалу пластину-поглотитель. Такой метод был использован в эксперименте по наблюдению гравитационных состояний нейтронов [58, 59]. Этот метод выделения основного состояния основан на том, что времена жизни состояний антиводорода между двумя поверхностями в гравитационном поле существенно зависят от расстояния между пластинами. В случае, когда расстояние между пластинами меньше характерного размера основного гравитационного состояния, время жизни основном определяется выражением (2.43). В случае, когда расстояние между зеркалом и поглотителем превышает классическую точку поворота для основного состояния, влияние поглотителя на движение антиводорода в основном состоянии оказывается экспоненциально малым и время жизни становится равным обычному времени жизни гравитационного состояния (3.30). Это время много больше времени жизни состояния «в ящике» (2.43). Таким образом при установке высоты поглотителя на уровне, незначительно превышающем вы-

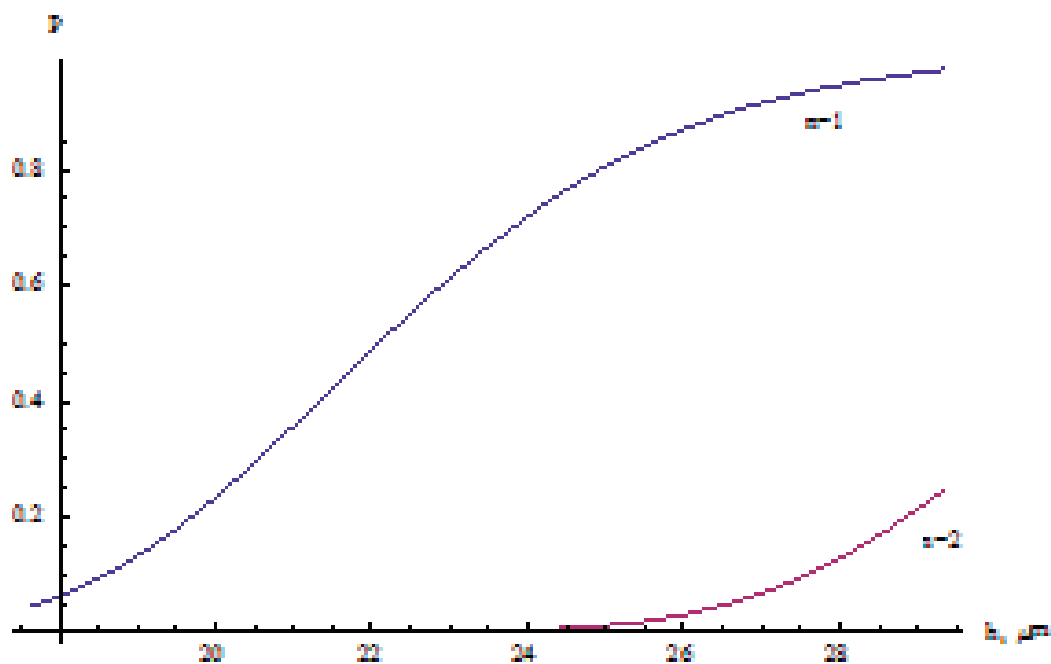


Рис. 3.10. Заселенность различных состояний в селективном устройстве как функция расстояния между зеркалом и поглотителем.

соту классической точки поворота основного гравитационного уровня ($13.6 \mu\text{m}$), можно добиться слабого поглощения основного состояния и сильного поглощения всех состояний с квантовыми числами $n > 1$.

Тем же способом, основанном на мезоскопическом размере гравитационных состояний и известной зависимости размера таких состояний от квантового числа, можно детектировать конечное состояние (например поставив детектор на высоте превышающей высоту основного состояния можно обнаружить состояния с $n > 1$). На Рис.3.10 показана зависимость заселенности состояний с различным n в зависимости от расстояния между зеркалом и поглотителем.

Рассмотрим более подробно резонансное возбуждение переходов между гравитационными состояниями внешним магнитным полем.

Такое поле должно быть, с одной стороны, переменным во времени и меняющимся по гармоническому закону с частотой, равной частоте перехода; с другой стороны это должно быть неоднородное магнитное поле, чтобы

обеспечить влияние на движение центра масс антиатома взаимодействия его магнитного момента с внешним полем.

Указанное неоднородное переменное магнитное поле, удовлетворяющее уравнению Максвелла, может быть представлено в следующем виде:

$$\vec{B}(z, x, t) = B_0 \vec{e}_z + \beta \cos(\omega t) (z \vec{e}_z - x \vec{e}_x). \quad (3.86)$$

Здесь B_0 постоянная, однородная, направленная вертикально компонента магнитного поля, z вертикальная координата, x - горизонтальная координата, измеряемая вдоль зеркала, β - градиент магнитного поля.

Меняющееся во времени магнитное поле (3.86) с необходимостью сопровождается электрическим полем ($[\vec{\nabla} \vec{E}] = -\frac{1}{c} \partial \vec{B} / \partial t$). Однако, для рассматриваемых здесь малых скоростей атомов, соответствующие члены малы и могут быть опущены.

Неоднородное магнитное поле приводит к смешиванию спиновых и пространственных степеней свободы. Волновая функция \bar{H} в этом случае описывается четырех-компонентным столбцом в нерелятивистском приближении) в пространстве спинов, каждая из компонент которого является функцией координат центра масс \vec{R} , относительной $\bar{p} - \bar{e}$ координаты $\vec{\rho}$ и времени t .

Уравнение Шредингера для движения антиводорода в магнитном поле имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_\alpha(\vec{R}, \vec{\rho}, t)}{\partial t} = \sum_{\alpha'} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_R + Mgz + V_{CP}(z) + \hat{H}_{in} + \hat{H}_m \right]_{\alpha, \alpha'} \Phi_{\alpha'}(\vec{R}, \vec{\rho}, t). \quad (3.87)$$

Здесь индекс α указывает на одно из четырех спиновых состояния системы $\bar{p} - \bar{e}$. Члены, отвечающие за различные типы взаимодействий имеют следующий смысл.

$V_{CP}(z)$ - потенциал взаимодействия атом-поверхность, \hat{H}_{in} - Гамильтониан, описывающий внутренние степени свободы антиводорода, включает

взаимодействие, приводящее к сверхтонкому расщеплению уровней:

$$\widehat{H}_{in} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_\rho - e^2/\rho + \frac{\alpha_{HF}}{2}\left(\widehat{F}^2 - 3/2\right). \quad (3.88)$$

Здесь $\mu = m_1 m_2 / m$, m_1 масса антипротона, m_2 масса позитрона, $m = m_1 + m_2$, α_{HF} константа сверхтонкого расщепления, \widehat{F} оператор полного спина антипротона и позитрона. Мы будем интересоваться только антиводородом в $1S$ -состоянии (переход в возбужденные кулоновские состояния имеет очень малую вероятность). Член $\frac{\alpha_{HF}}{2}\left(\widehat{F}^2 - 3/2\right)$ - модельное взаимодействие, корректно описывающее сверхтонкое расщепление уровней.

Член \widehat{H}_m описывает взаимодействие с магнитного поля с магнитным моментом позитрона и антипротона:

$$\widehat{H}_m = -2\vec{B}(z, x, t) \left(\mu_{\bar{e}} \hat{s}_{\bar{e}} \times \hat{I}_{\bar{p}} + \mu_{\bar{p}} \hat{s}_{\bar{p}} \times \hat{I}_{\bar{e}} \right). \quad (3.89)$$

Здесь $\mu_{\bar{e}}$ и $\mu_{\bar{p}}$ магнитные моменты позитрона и антипротона, $\hat{s}_{\bar{e}}$, $\hat{s}_{\bar{p}}$ оператор спина, действующий на спиновые переменные позитрона (антипротона), $\hat{I}_{\bar{e}}$, $\hat{I}_{\bar{p}}$ тождественный оператор в пространстве соответствующих спиновых переменных.

Поскольку поле $\vec{B}(z, x, t)$ зависит и от координат и от времени, указанный выше член связывает внутренние степени свободы антиводорода и движение его центра масс в гравитационном поле.

Мы будем полагать, как это обычно бывает в экспериментах пролетного типа, что горизонтальная скорость v направленная параллельно зеркалу вдоль оси x составляет несколько метров в секунду и существенно больше характерной для гравитационных состояний вертикальной скорости (cm/s). Будем рассматривать движение антиатома в системе, двигающейся вместе с атомом вдоль зеркала со скоростью v .

Будем также считать, что $B_0 \gg \beta L$, где L - характерный горизонтальный размер зеркала ($L \sim 30$ см) в реалистичной экспериментальной установке (мы ориентируемся на во многом аналогичный эксперимент

с ультрахолодными нейтронами [59, 111]. Указанное условие, как это видно из дальнейшего, обеспечивает фиксацию направления магнитного момента вдоль поля B_0 , что гарантирует максимальную вероятность переходов.

Нас будут интересовать лишь очень слабые поля, такие что Зеемановское расщепление много меньше сверхтонкой структуры $\mu_B B_0 \ll \alpha_{HF}$.

Иерархия энергий взаимодействия в нашем случае выглядит следующим образом:

$$m_2 e^2 / \hbar^2 \gg \alpha_{HF} \gg \mu_{\bar{e}} |B_0| \gg \varepsilon_n, \quad (3.90)$$

Это условие гарантирует выполнение адиабатического приближения для решения уравнения (3.87); оно означает, что внутренне состояние \bar{H} медленно меняется вслед за изменениями внешнего поля во времени и пространстве. Пренебрегая неадиабатическими эффектами, получим систему уравнений для зависящих от времени амплитуд $C_n(t)$ гравитационных состояний $g_n(z)$:

$$i\hbar \frac{dC_n(t)}{dt} = \sum_k C_k(t) V(t)_{n,k} \exp(-i\omega_{nk}t). \quad (3.91)$$

Здесь ω_{nk} - частота перехода между гравитационными состояниями.

Роль потенциала перехода $V(z, t)$ в указанном адиабатическом разложении играют зависящие от координаты центра масс атома и времени энергии сверхтонких подуровней:

$$V(t)_{n,k} = \int_0^\infty g_n(z) g_k(z) E(t, z) dz. \quad (3.92)$$

Здесь $g_n(z)$ -волновые функции гравитационных состояний [53], а энергии $E(z, t)$ -собственные значения Гамильтониана $\hat{H}_{in} + \hat{H}_m$, в котором \vec{R} и t рассматриваются как медленно меняющиеся параметры. Выражения для энергий из $1S$ -подпространства:

$$E_{a,c} = E_{1s} - \frac{\alpha_{HF}}{4} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_{HF}^2 + |(\mu_B - \mu_{\bar{p}})B(z, t)|^2}, \quad (3.93)$$

$$E_{b,d} = E_{1s} + \frac{\alpha_{HF}}{4} \mp \frac{1}{2} |(\mu_B + \mu_{\bar{p}})B(z, t)|. \quad (3.94)$$

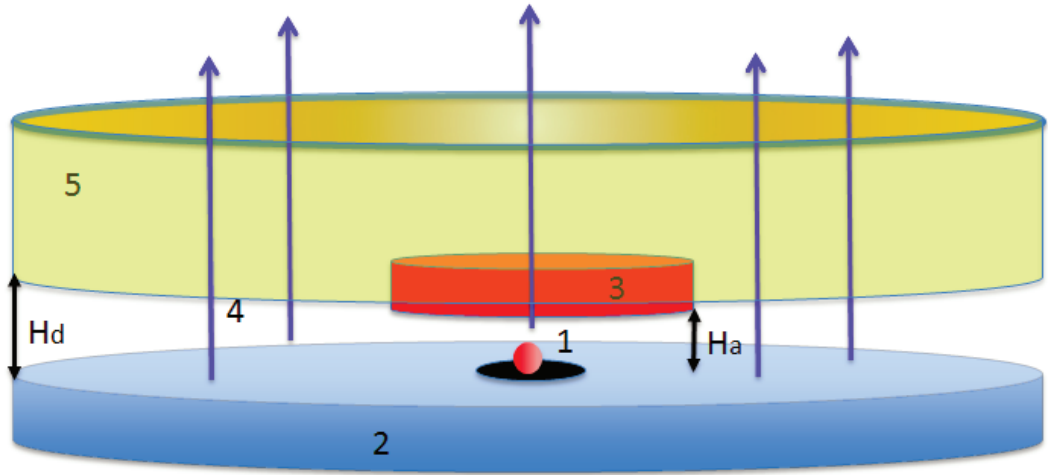


Рис. 3.11. Принципиальная схема резонансной спектроскопии гравитационных состояний антиводорода в пролетном эксперименте. 1 - источник ультрахолодного антиводорода, 2 - зеркало, 3 - поглотитель, 4 - магнитное поле, 5 - детектор.

Индексы a, b, c, d - стандартные обозначения Зеемановских подуровней сверхтонкой структуры. Наличие B_0 приводит к расщеплению b и d уровней в первом порядке по полю-квадратично, то для рассматриваемых слабых полей можно ограничиться только переходами между подуровнями b и d .

Качественно поведение вероятности перехода как функции времени дается формулой Раби, которая получается в пренебрежении нерезонансных переходов и ограничении приближением двух состояний: начального i и конечного f , при условии, что частота внешнего поля ω близка к частоте перехода между начальным и конечным состоянием $\omega_{if} = (E_f - E_i)/\hbar$:

$$P = \frac{1}{2} \frac{(V_{if})^2}{(V_{if})^2 + \hbar^2(\omega - \omega_{if})^2} \sin^2 \left(\frac{\sqrt{(V_{if})^2 + \hbar^2(\omega - \omega_{if})^2}}{2\hbar} t \right) \exp(-\Gamma t). \quad (3.95)$$

Множитель $1/2$ возникает из-за указанного выше обстоятельства, что только два (b, d) из четырех состояний принимают участие в переходах.

Принципиальная схема эксперимента по резонансной спектроскопии гравитационных уровней показана на Рис..3.11.

На первом этапе атом \bar{H} пролетает через щель между зеркалом и поглотителем размером H_a . Этим обеспечивается выделение основного состояния [112]. Щель между зеркалом и поглотителем должна быть близка к высоте классической точки поворота в основном состоянии $H_a = H_1 \simeq 13.6 \mu m$.

Далее, атомы \bar{H} подвергаются действию магнитного поля (3.86), которое вызывает резонансный переход в возбужденное гравитационное состояние.

Наконец, число \bar{H} атомов в конечном состоянии измеряется по интегральному аннигиляционному сигналу в детекторе, расположенном на высоте H_d над зеркалом перпендикулярно пучку антиводорода. высота H_d is должна удовлетворять условию $H_1 \ll H_d$.

На Рис.3.12 показан результат численного расчета (3.91) для вероятности перехода в 6-ое гравитационное состояние. Частота перехода $\omega = 972.46$ Hz. Значение градиента поля оптимизированное для получения наибольшей вероятности перехода $1 \rightarrow 6$ за время пролета $t_{fl} = \tau = 0.1$ s, оказалось равным $\beta = 27.2$ Gs/m, соответствующее значение однородного ведущего поля $B_0 = 30$ Gs.

Как было показано ранее, гравитационная масса антиводорода может быть определена по измеренной частоте перехода ω_{nk} :

$$M = \sqrt{\frac{2m\hbar\omega_{nk}^3}{g^2(\lambda_k - \lambda_n)^3}}. \quad (3.96)$$

Обратим внимание, что g - интенсивность гравитационного поля Земли, которая считается известной с высокой точностью в данном месте из независимых экспериментов. Такой подход предполагает факторизацию эффектов поля (g) и гравитационных свойств антиатома (M).

Равенство масс $M = m$ означает, что:

$$M = \frac{2\hbar\omega_{nk}^3}{g^2(\lambda_k - \lambda_n)^3}. \quad (3.97)$$

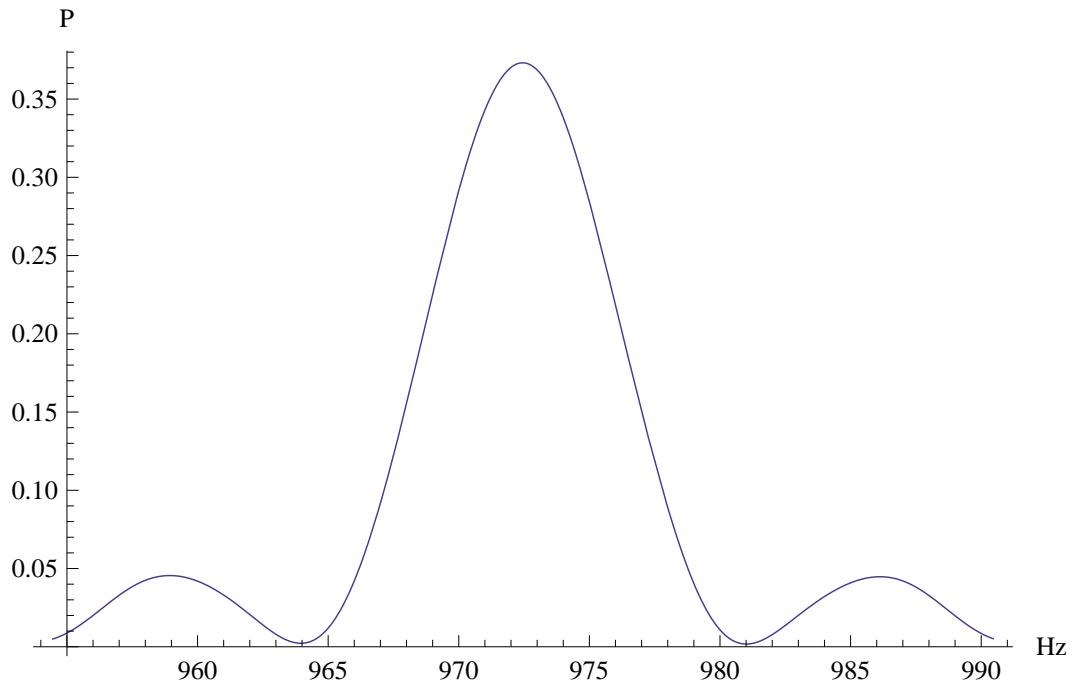


Рис. 3.12. Вероятность перехода из 1 в 6 гравитационное состояние под действием переменного неоднородного магнитного поля.

Предполагая время наблюдения равным времени жизни антиводорода над проводящей поверхностью $\tau \approx 0.1$ с, оценка относительной точности определения M дает $\epsilon_M \sim 10^{-3}$ для 100 событий перехода в 6-ое гравитационное состояние. Увеличение количества событий N приводит к улучшению точности пропорционально $1/\sqrt{N}$.

3.3.1. Динамический Штарк эффект

Спектроскопический метод определения частот переходов между гравитационными уровнями требует учета различных эффектов, приводящих к сдвигу максимума вероятности перехода как функции частоты приложенного поля.

Одним из таких эффектов, является сдвиг уровней за счет взаимодействия с осциллирующим вынуждающим полем. Такой эффект возникает во втором порядке по взаимодействию с полем. Мы рассмотрим такой сдвиг в формализме квазиэнергетических состояний, основанном на теореме Флоке.

Волновую функцию представим, согласно теореме Флоке, в виде:

$$\Psi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_m t\right) f_m(z, t). \quad (3.98)$$

Здесь E_m - квазиэнергии, а $f_m(z, t)$ периодические во времени функции, с периодом внешнего поля, $2\pi/\omega$. Раскладывая эту функцию в ряд Фурье:

$$\Psi(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_m t\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(-ik\omega t) \phi_m^k(z). \quad (3.99)$$

Воспользуемся тем, что $V(z, t) = \cos \omega t \cdot U(z)$, квазигармоники $\phi_m^k(z)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$(E_m + k\hbar\omega) \phi_m^k(z) = H_0 \phi_m^k(z) + \frac{1}{2} U(z) (\phi_m^{k-1}(z) + \phi_m^{k+1}(z)). \quad (3.100)$$

Здесь m и k - целые.

Амплитуды a_m находятся из начального условия. Если начальное состояние $|n_0\rangle$, то выражения для амплитуд:

$$a_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \phi_m^k | n_0 \rangle. \quad (3.101)$$

Амплитуда перехода $T_{n_0 \rightarrow n_1}$ из начального состояния n_0 в конечное n_1 через время t оказывается:

$$T_{n_0 \rightarrow n_1} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k, k'=-\infty}^{\infty} \langle n_1 | \phi_m^{k'} \rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_m t - ik'\omega t\right) \langle \phi_m^k | n_0 \rangle. \quad (3.102)$$

Полезно проследить, как указанный подход позволяет получить формулу Раби. Для этого нужно ограничиться двумя квазигармониками в разложении волновой функции, связанными резонансной частотой. Тогда указанная система переходит в следующее выражение:

$$\begin{aligned} E_{n_0} \phi_{n_0}^0(z) &= H_0 \phi_{n_0}^0(z) + \frac{1}{2} U(z) \phi_{n_0}^1(z) \\ (E_{n_0} + \hbar\omega) \phi_{n_0}^1(z) &= H_0 \phi_{n_0}^1(z) + \frac{1}{2} U(z) \phi_{n_0}^0(z). \end{aligned} \quad (3.103)$$

Здесь

$$H_0 = -\frac{\hbar^2 d^2}{2mdz^2} + Mgz$$

Мы ищем решение в виде

$$\phi_{n_0}^0(z) \approx C_0 \langle z|n_0 \rangle$$

и

$$\phi_{n_0}^1(z) \approx C_1 \langle z|n_1 \rangle$$

Сохраняя ведущие члены, получим:

$$\begin{aligned} (E_{n_0} - \epsilon_{n_0}) C_0 &= \frac{\hbar}{2} \Omega_{n_1 n_0} C_1, \\ (QE_{n_0} + \hbar\omega - \epsilon_{n_1}) C_1 &= \frac{\hbar}{2} \Omega_{n_0 n_1} C_0. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Здесь $\hbar\Omega_{n_1 n_0} = \langle n_0|U|n_1 \rangle$.

Указанная система имеет два решения для E_{n_0} , C_0 и C_1 :

$$\frac{E_{n_0}^\pm}{\hbar} = \frac{\epsilon_{n_0}}{\hbar} - \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 + (\Omega_{n_1 n_0})^2} \quad (3.105)$$

$$\frac{C_1^\pm}{C_0^\pm} = \frac{\Omega_{n_1 n_0}}{\delta \pm \sqrt{\delta^2 + (\Omega_{n_1 n_0})^2}}. \quad (3.106)$$

Коэффициенты C_0^\pm должны отвечать условию нормировки $\int (\phi_{n_0}^0(z) + \exp(-i\omega t)\phi_{n_0}^1(z))^2 dz = 1$:

$$C_0^\pm = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \Omega_{n_1 n_0}^2}} \right)} \quad (3.107)$$

Используя (3.101), приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} |\Psi(z, t) \rangle &= \left[\cos\left(\Omega \frac{t}{2}\right) - i \frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\Omega \frac{t}{2}\right) \right] e^{-i\left(\frac{E_{n_0}}{\hbar} - \frac{\delta}{2}\right)t} |n_0 \rangle \\ &\quad - i \frac{\Omega_{n_1 n_0}}{\Omega} \sin\left(\Omega \frac{t}{2}\right) e^{-i\left(\frac{\epsilon_{n_1}}{\hbar} + \frac{\delta}{2}\right)t} |n_1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Здесь

$$\Omega = \sqrt{\delta^2 + \Omega_{n_1 n_0}^2}$$

Как видно, полное зависящее от времени решение отвечает формуле Раби. Пренебрегая связью с другими состояниями, частота внешнего поля ω , при которой достигается максимум вероятности перехода совпадает с невозмущенной частотой перехода $\omega_{n_0 n_1}$. Мы покажем, что учет других членов приведет к сдвигу частоты, этот эффект второго порядка по $\Omega_{n_1 n_0}/\omega_{n_0 n_1}$.

Мы учтем поправки первого порядка к волновой функции :

$$\phi_{n_0}^0(z) \approx C_0 \langle z|n_0 \rangle + \sum_{k \neq n_0} C_{0,k} \langle z|k \rangle, \quad (3.109)$$

$$\phi_{n_0}^1(z) \approx C_1 \langle z|n_1 \rangle + \sum_{k \neq n_1} C_{1,k} \langle z|k \rangle \quad (3.110)$$

где

$$\begin{aligned} C_{0,k} &= \frac{1}{2} \frac{\langle k|U|n_1 \rangle}{E_{n_0} - \epsilon_k} C_1 \approx \frac{\hbar}{2} \frac{\Omega_{n_1 k}}{\epsilon_{n_0} - \epsilon_k} C_1 \\ C_{1,k} &= \frac{1}{2} \frac{\langle k|U|n_0 \rangle}{E_{n_0} + \hbar\omega - \epsilon_k} C_0 \approx \frac{\hbar}{2} \frac{\Omega_{n_0 k}}{\epsilon_{n_1} - \epsilon_k} C_0. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Упрощая систему (3.100), мы учтем еще две гармоники:

$$\begin{aligned} (E_{n_0} - \hbar\omega) \phi_{n_0}^{-1}(z) &= H_0 \phi_{n_0}^{-1}(z) + \frac{1}{2} U(z) \phi_{n_0}^0(z) \\ E_{n_0} \phi_{n_0}^0(z) &= H_0 \phi_{n_0}^0(z) + \frac{1}{2} U(z) \phi_{n_0}^{-1}(z) + \frac{1}{2} U(z) \phi_{n_0}^1(z) \quad , \\ (E_{n_0} + \hbar\omega) \phi_{n_0}^1(z) &= H_0 \phi_{n_0}^1(z) + \frac{1}{2} U(z) \phi_{n_0}^0(z) + \frac{1}{2} U(z) \phi_{n_0}^2(z) \quad , \\ (E_{n_0} + 2\hbar\omega) \phi_{n_0}^2(z) &= H_0 \phi_{n_0}^2(z) + \frac{1}{2} U(z) \phi_{n_0}^1(z) \end{aligned} \quad (3.112)$$

Эта система может быть сведена к двум уравнениям с помощью операторов Грина $\hat{G}(\epsilon)$:

$$\hat{G}(\epsilon) = \sum_k \frac{|k \rangle \langle k|}{\epsilon - \epsilon_k} \quad . \quad (3.113)$$

Используя эти операторы, получим:

$$\begin{aligned} \phi_{n_0}^{-1}(z) &= \frac{1}{2} \hat{G}(E_{n_0} - \hbar\omega) U(z') \phi_{n_0}^0(z') \\ \text{and } \phi_{n_0}^2(z) &= \frac{1}{2} \hat{G}(E_{n_0} + 2\hbar\omega) U(z') \phi_{n_0}^1(z'). \end{aligned} \quad (3.114)$$

В результате приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned}
E_{n_0} \phi_{n_0}^0(z) &= \left(H_0 + \frac{1}{4} U(z) \hat{G}(E_{n_0} - \hbar\omega) U(z') \right) \phi_{n_0}^0(z) + \frac{1}{2} U(z) \phi_{n_0}^1(z) \\
(E_{n_0} + \hbar\omega) \phi_{n_0}^1(z) &= \left(H_0 + \frac{1}{4} U(z) \hat{G}(E_{n_0} + 2\hbar\omega) U(z') \right) \phi_{n_0}^1(z) + \\
&+ \frac{1}{2} U(z) \phi_{n_0}^0(z) \quad .
\end{aligned} \tag{3.115}$$

Эта система эквивалентна (3.103), с той лишь разницей, что теперь в диагональные уравнения входят дополнительные эффективные взаимодействия $\hat{V} = (1/4)U\hat{G}U$. Сохраняя члены второго порядка по $\Omega_{n_0 n_1}/\omega_{n_0 n_1}$ получим:

$$\begin{aligned}
(E_{n_0} - E_{n_0} - V_{11}) C_0 &= \frac{\hbar}{2} \Omega_{n_1 n_0} C_1 + \frac{\hbar}{2} \sum_{k \neq n_1} \Omega_{k n_0} C_{1,k} \\
(E_{n_0} + \hbar\omega - E_{n_1} - V_{22}) C_1 &= \frac{\hbar}{2} \Omega_{n_0 n_1} C_0 + \frac{\hbar}{2} \sum_{k \neq n_0} \Omega_{k n_1} C_{0,k} .
\end{aligned} \tag{3.116}$$

Где мы ввели обозначения:

$$V_{11} = \frac{1}{4} \langle n_0 | U \hat{G}(E_{n_0} - \hbar\omega) U | n_0 \rangle \approx \frac{\hbar^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega_{k n_0}^2}{2\epsilon_{n_0} - \epsilon_{n_1} - \epsilon_k} \tag{3.117}$$

$$V_{22} = \frac{1}{4} \langle n_1 | U \hat{G}(E_{n_0} + 2\hbar\omega) U | n_1 \rangle \approx \frac{\hbar^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Omega_{k n_1}^2}{2\epsilon_{n_1} - \epsilon_{n_0} - \epsilon_k} . \tag{3.118}$$

Подставляя эти выражения в систему (3.116), получим:

$$\begin{aligned}
(E_{n_0} - \epsilon_{n_0} - V_{11} - U_{11}) C_0 &= \frac{\hbar}{2} \Omega_{n_1 n_0} C_1 \quad , \\
(E_{n_0} + \hbar\omega - \epsilon_{n_1} - V_{22} - U_{22}) C_1 &= \frac{\hbar}{2} \Omega_{n_0 n_1} C_0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}
U_{11} &= \frac{1}{4} \sum_{k \neq n_1} \frac{|\langle n_0 | U | k \rangle|^2}{E_{n_0} + \hbar\omega - \epsilon_k} \approx \frac{\hbar}{4} \sum_{k \neq n_1} \frac{\Omega_{k n_0}^2}{\epsilon_{n_1} - \epsilon_k} \\
U_{22} &= \frac{1}{4} \sum_{k \neq n_0} \frac{|\langle n_1 | U | k \rangle|^2}{\epsilon_{n_0} - \epsilon_k} \approx \frac{\hbar}{4} \sum_{k \neq n_0} \frac{\Omega_{k n_1}^2}{\epsilon_{n_0} - \epsilon_k}
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Выражение для квазиэнергий имеет вид:

$$E_{n_0}^{\pm} = \epsilon_{n_0} - \frac{\delta + (V_{11} - V_{22} + U_{11} - U_{22})}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\delta + (V_{11} - V_{22} + U_{11} - U_{22}))^2 + \Omega_{n_1 n_0}^2}. \quad (3.121)$$

Эффект связи с нерезонансными уровнями эквивалентен замене в формуле Раби δ выражением $\delta + (V_{11} - V_{22} + U_{11} - U_{22}) / \hbar$.

Максимальная вероятность перехода из начального состояния n_0 достигается при $\delta_{\max} = - (V_{11} - V_{22} + U_{11} - U_{22}) / \hbar$:

$$\delta_{\max} = \frac{\hbar}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Omega_{kn_1}|^2}{2\epsilon_{n_1} - \epsilon_{n_0} - \epsilon_k} + \sum_{k \neq n_0} \frac{|\Omega_{kn_1}|^2}{\epsilon_{n_0} - \epsilon_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\Omega_{kn_0}|^2}{2\epsilon_{n_0} - \epsilon_{n_1} - \epsilon_k} - \sum_{k \neq n_1} \frac{|\Omega_{kn_0}|^2}{\epsilon_{n_1} - \epsilon_k}. \quad (3.122)$$

В Таблице 3.3 приведены результаты численного расчета и расчета по формулам, приведенным выше.

Таблица 3.3

Сдвиг частоты перехода $n_0 \rightarrow n_1$ под действием периодического потенциала.

Transition	$\omega_{n_0 n_1}$	δ_{\max} analytical	δ_{\max} numerical
1 \rightarrow 2	254.564 Hz	0.28 Hz	0.24 Hz
1 \rightarrow 3	462.979 Hz	-0.03 Hz	-0.04 Hz
1 \rightarrow 4	647.177 Hz	0.16 Hz	0.17 Hz
1 \rightarrow 5	815.557 Hz	-0.29 Hz	-0.29 Hz
1 \rightarrow 6	972.459 Hz	-0.018 Hz	-0.019 Hz
1 \rightarrow 7	1120.491 Hz	0.45 Hz	0.4 Hz

Заметим, что аналогичный эффект известен в литературе как динамический Штарковский сдвиг [88].

3.4. Реализуемость эксперимента по наблюдению гравитационных состояний антиводорода

Для оценки реализуемости эксперимента по исследованию свойств гравитационных состояний антиводорода полезно провести сравнение с экспериментом, в котором наблюдались гравитационные состояния ультрахолодных нейтронов (УХН) [59, 106, 113]. Причины, по которым такое сравнение возможно состоят в том, что 1) масса нейтрона очень близка к массе антиводорода, 2) поправки к энергиям гравитационных состояний антиводорода за счет взаимодействия с поверхностью малы по сравнению с невозмущенными значениями; 3) время жизни \bar{H} в нижних квантовых состояниях порядка 0.1 с сравнимы или больше со временем нахождения УХН в экспериментальной установке, а 4) типичные скорости УХН и антиводорода в ловушках совпадают [114, 152].

Основными ограничениями, которые мы рассмотрим, будут ограничения, связанные с малой статистикой из-за ограниченного количества атомов антиводорода, доступных в ближайшее время.

В качестве основной экспериментальной схемы мы будем иметь ввиду пролетный эксперимент, в котором выделение гравитационного состояния осуществляется при пролете атома между зеркалом и поглотителем; селективность такого устройства, как было указано выше, определяется резкой зависимостью времени жизни состояний антиводорода между зеркалом и поглотителем от высоты поглотителя H . В случае, когда классическая точка поворота гравитационного состояния $H_n = \lambda_n^0 l_0$ меньше, чем высота поглотителя H , такие состояния малочувствительны к наличию поглотителя. Наоборот, состояния с $H_n > H$ интенсивно поглощаются [62, 116, 117]. Детальное описание экспериментальной методики можно найти в [59, 106, 113, 118].

Как и в случае экспериментов с антиводородом, основным ограничением в экспериментах с УХН является малая плотность последних в фа-

зовом пространстве. Доступные сегодня пучки УХН имеют интенсивность $4 \cdot 10^3 \text{ UCN}/\text{cm}^2/\text{s}$; такие УХН равномерно заполняют пространство вертикальных скоростей вплоть до $6 \text{ m}/\text{s}$ (УХН с большими скоростями просачиваются через стенки волноводов). При импульсном режиме длительностью 10^{-3} (необходимом при измерении времени пролета [119, 120]), поток падает до $4 \text{ UCN}/\text{cm}^2/\text{s}$. Таким образом достижимая статистика в нейтронном эксперименте в 10^2 событий в сутки позволяет ожидать точности измерения гравитационной массы 10^{-3} .

Проведем простые сравнительные оценки.

Средний поток \bar{N} , планируемый в экспериментах с антиводородом $3 \bar{N}/\text{s}$, объем облака $\sim 5 \times 10^{-2} \text{ cm}^3$. В случае УХН, испускаемых из малого источника объемом $\sim 5 \times 10^{-2} \text{ cm}^3$, максимальная плотность нейтронов составляет $30 \text{ UCN}/\text{cm}^3$; в импульсном режиме с длительностью $\sim 10^{-3}$ поток оказывается $0.15 \text{ UCN}/\text{s}$. Это в 20 раз меньше приведенной выше оценки для \bar{N} . Если учесть больший разброс по вертикальным скоростям антиводорода (эффективная температура в 100 раз больше в случае антиводорода), то будет потерян фактор $\sqrt{100} = 10$ и получим оценку $0.3 \bar{N}/\text{s}$. Это означает, что статистика в случае антиводорода и УХН примерно одинакова.

Исходя из прямого сравнения с экспериментами для УХН мы приходим к выводу о достижимости точности в 10^{-3} для измерения гравитационной массы антиводорода при планируемых плотностях ультрахолодных антиатомов.

Рассмотрим дополнительно вопрос об ограничениях на точность измерений. Основной источник неопределенности в классическом баллистическом эксперименте по определению ускорения свободного падения является начальное широкое распределение по скоростям антиатомов при вылете из ловушки [11]. такое распределение определяется фурье-образом основного состояния в электро-магнитной ловушке. Мы рассмотрим подход, позволя-

ющий заметно сузить такое распределение, аналогичный используемому в эксперименте с ультрахолодными нейтронами [58].

3.4.1. Ширина распределения временных событий падения

Рассмотрим волновой пакет, падающий в гравитационном поле. Нас будет интересовать распределение по времени аннигиляционных событий на горизонтальном детекторе, над которым на высоте H находится ловушка антиатомов. В следствии квадратичности гамильтониана, эволюция начального распределения плотности в фазовом пространстве осуществляется вдоль классических траекторий.

Волновой пакет в начальный момент центрирован на высоте H с шириной распределения по высоте Δz , с нулевой средней начальной скоростью и шириной распределения Δv .

Временное распределение событий падения имеет вид:

$$\frac{\Delta t}{t_H} = \sqrt{\left(\frac{\Delta z}{2H}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v}{\sqrt{2\bar{g}H}}\right)^2}, \quad (3.123)$$

где $t_H = \sqrt{2H/\bar{g}}$ классическое время падения с высоты H . Неопределенность в измерении ускорения свободного падения после N измерений $\Delta\bar{g}/\bar{g} = 2\Delta t/\sqrt{N}t_H$.

Будем считать, что частица находится в основном состоянии в гармоническом потенциале, тогда соответствующие распределения минимизируют соотношение неопределенности: $\Delta z\Delta v = \hbar/2m$.

В этом случае распределение по времени событий падения также имеет минимальную ширину

$$\Delta v = \Delta v_{opt} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \sqrt{\frac{\bar{g}}{2H}}. \quad (3.124)$$

Для $H = 30$ см оптимальная ширина распределения по скоростям $\Delta v_{opt} \approx 3.6 \times 10^{-4}$ м/с, а соответствующая ширина распределения времен

падения 2×10^{-4} . Однако, на практике реализуемое распределение скоростей в ловушке имеет ширину $\Delta v_0 \approx 0.5$ m/s, что приводит к ширине распределения по времени 0.2 s.

Это означает, что доминирующим фактором неопределенности является начальное распределение по скоростям Δv_0 , которое могло бы быть уменьшено методом фильтрации наиболее «горячих» атомов. Такая фильтрация приведет к потере статистики $\Delta v / \Delta v_0$. Мы покажем, что несмотря на уменьшение числа измерений, точность измерения ускорения свободного падения может возрасти.

3.4.2. Формирование распределения по скоростям

Идея формирования распределения по скоростям начального волнового пакета [89] состоит в пропускании потока антиатомов, освобождаемых из ловушки через щель между двумя дисками (в центре дисков находится ловушка антиатомов). При этом нижний диск, выполняя роль зеркала, отражает антиатомы за счет эффекта квантового отражения, в то время как верхний диск, выполненный в виде шероховатой поверхности, приводит к незеркальным отражениям антиатомов, что в итоге обеспечивает их наиболее вероятное поглощение. При этом верхнего диска достигают и поглощаются только антиатомы с достаточно высокой скоростью, чтобы преодолеть гравитационный барьер. Антиатомы с малой вертикальной скоростью, наоборот, проходят практически без потерь между дисками, падают с высоты H и детектируются. Поскольку горизонтальная скорость остается неизменной, измерение полного времени между освобождением ловушки и аннигиляцией, а также измерение расстояния L , которое пролетел антиатом вдоль горизонтальной поверхности, позволяет измерить время, проведенное антиатомом в фильтре и скорректировать время свободного падения.

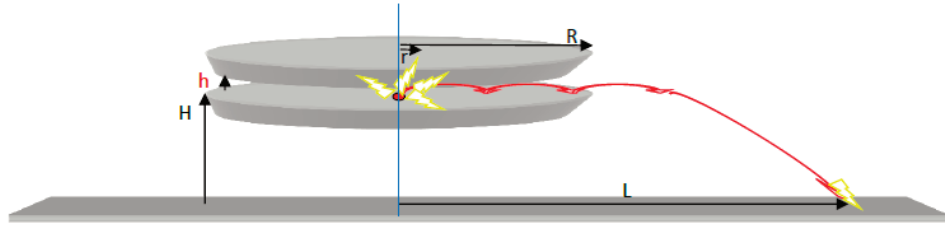


Рис. 3.13. Принципиальная схема эксперимента с коллимацией пучка антиатомов в гравитационном поле.

Если h ширина щели между дисками, распределение по скоростям на выходе из фильтра $\Delta v \approx \sqrt{2gh}$, то доля прошедших фильтр антиатомов $N/N_0 \approx \Delta v / \sqrt{2\pi}\Delta v_0$. Таким образом, доля антиатомов, используемых при измерении времени свободного падения, оказывается пропорциональной $h^{1/4}$.

Несложно видеть, что уменьшение ширины щели приводит к увеличению точности измерения ускорения свободного падения. Например, для $h = 1 \text{ mm}$, $\Delta v \approx 0.14 \text{ m/s}$, $N/N_0 \approx 5\%$ и точность увеличивается в 2 раза, для $h = 50 \text{ }\mu\text{ m}$, $\Delta v \approx 0.03 \text{ m/s}$, $N/N_0 \approx 1\%$ точность увеличивается в 4 раза.

Очевидным ограничением на размер щели снизу является условие, чтобы через фильтр проходило статистически значимое количество антиатомов. Учитывая размеры основного гравитационного состояния, легко видеть, что при $h < 14 \text{ }\mu\text{ m}$ пропускание фильтра резко (экспоненциально) падает и меньшие размеры щели использовать бессмысленно.

Глава 4. Состояния шепчущей галереи атомов антиводорода

Явление квантового отражения антиводорода от материальной поверхности приводит к существованию вблизиповерхностных состояний в гравитационном поле Земли, которые, как мы показали, могут быть важным инструментом исследования гравитационных свойств антивещества. Ключевым условием прецизионных измерений является длительное сохранение когерентности, то есть достижение максимально длительного времени нахождения антиводорода в заданном квантовом состоянии или их суперпозиции. Наиболее интересной была бы такая постановка эксперимента, в которой, с одной стороны, антиводород находился бы по-возможности длительное время в ловушке в заданном квантовом состоянии, а с другой стороны, динамика антиводорода в такой ловушке была бы определена с высокой точностью.

С этой точки зрения представляет особый интерес так называемый эффект шепчущей галереи. Такой эффект состоит в локализации волн различной природы вблизи искривленной поверхности. Этот эффект известен с древних времен в акустике, его детальное математическое объяснение было дано в классической работе Рэллея [121]. В оптике основанные на этом эффекте резонаторы шепчущей галереи привлекли большой интерес в последние десятилетия [122–125] и стали важным инструментом получения сверхузких оптических резонансов. Важнейшим преимуществом таких оптических резонаторов оказывается их очень высокая добротность. До недавнего времени было немного исследований, связанных с эффектом шепчущей галереи в случае так называемых материальных волн [126–133]. Открытие эффекта шепчущей галереи в рассеянии нейтронов на цилиндрическом зеркале [119, 120, 134–137] стало важным шагом в этом направлении. Было показано, что нейтроны, движущиеся параллельно цилиндрической поверх-

ности оказываются локализованными в особых состояниях вблизи поверхности, образованных суперпозицией центробежного потенциала и оптического потенциала взаимодействия нейтронов с поверхностью. Эффекты интерференции таких состояний оказываются чрезвычайно информативны для выяснения деталей взаимодействия нейтрона с поверхностью.

Мы собираемся рассмотреть аналогичный эффект для атомов антиводорода и покажем, что состояния радиального движения типа состояний шепчущей галереи действительно оказываются долгоживущими состояниями антиводорода вблизи поверхности. Такие состояния, оказываются в значительной мере похожи на гравитационные состояния, с той лишь разницей, что роль ускорения свободного падения g выполняет центробежное ускорение v^2/R , где v - тангенциальная скорость антиатомов, R - радиус кривизны поверхности. Пространственный и энергетический масштаб таких состояний определяется тангенциальной скоростью антиатомов и радиусом кривизны поверхности, что позволяет легко варьировать указанные масштабы. Мы покажем также, что замкнутый резонатор шепчущей галереи представляет собой искомую ловушку для антиатомов, в которой антиводород может находиться длительное время без разрушения квантового состояния.

4.1. Рассеяние антиводорода на цилиндрической поверхности.

Мы будем рассматривать движение антиводорода вдоль внутренности цилиндрической поверхности. Мы будем считать, что энергия тангенциального движения близка к полной энергии, а энергия радиального движения настолько мала, что коэффициент квантового отражения от потенциала антиводород-поверхность близок к 1. Мы будем рассматривать цилиндрические поверхности макроскопических радиусов R (несколько сантиметров), поэтому указанным состояниям будут соответствовать высокие угловые моменты.

Уравнение Шредингера естественно записать в цилиндрических координатах:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + V(|R - \rho|) - \frac{p^2}{2m} \right] \Psi(z, \rho, \varphi) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь $\Psi(z, \rho, \varphi)$ волновая функция ρ - радиальная координата, измеренная от оси цилиндра, φ - угол, $V(|R - \rho|)$ - потенциал \bar{H} -поверхность [98, 138], а p импульс \bar{H} .

Зависимость волновой функции от z - тривиальна и мы ее в дальнейшем будем опускать.

Уравнение (4.1) приводится стандартной подстановкой $\Psi(\rho, \varphi) = \Phi(\rho, \varphi)/\sqrt{\rho}$ к виду:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} \right) + V(|R - \rho|) - \frac{p^2}{2m} \right] \Phi(\rho, \varphi) = 0. \quad (4.2)$$

Решение указанного уравнения должно отвечать следующим граничным условиям: регулярности при $\rho = 0$, однозначности при замене $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$, и условию полного поглощения антиводорода внутри стенок цилиндра $\rho \geq R$ [138].

Стандартное отделение угловых переменных и разложение по базису собственных функций углового момента дает:

$$\Phi(\rho, \varphi) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \chi_{\mu}(\rho) \exp(i\mu\varphi), \quad (4.3)$$

где $\chi_{\mu}(\rho)$ - волновые функции радиального движения, удовлетворяющие следующему уравнению:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\hbar^2(\mu^2 - 1/4)}{2m\rho^2} + V(|R - \rho|) - \frac{p^2}{2m} \right] \chi_{\mu}(\rho) = 0. \quad (4.4)$$

Интересующие нас решения должны быть регулярны в $\rho = 0$.

Как было показано нами ранее [138], условие полного поглощения с учетом вида потенциала ван-дер-Ваальса-Казимира-Полдера вблизи по-

верхности оказывается:

$$\chi_\mu(\rho) \sim \sqrt{|R - \rho|} H_1^{(1)}(2\sqrt{2mC_3/|R - \rho|}), \quad (4.5)$$

где H_1^1 -функция Ганкеля первого рода [105]. Выражение Eq.(4.5) может быть использовано как граничное условие при $\rho \rightarrow R$.

Решение (4.4) для заданной энергии $p^2/(2m)$ и всех угловых моментов μ дает полное описание динамики \bar{H} . Мы, однако, будем интересоваться лишь специальным классом решений χ_μ , отвечающим модам шепчущей галереи \bar{H} .

4.1.1. Моды шепчущей галереи.

Рассмотрим состояния \bar{H} с большим угловым моментом μ , таким что $\hbar^2\mu^2/R^2 \approx p^2$ [120]. В этом случае радиальное движение оказывается достаточно медленным, чтобы обеспечить высокий коэффициент квантового отражения \bar{H} от поверхности.

Разложим в уравнении (4.4) выражение для центробежного потенциала вблизи $\rho = R$ введя отклонение $x = \rho - R$. Сохраняя первый порядок по малому параметру x/R , получим:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(-x) + \hbar^2 \frac{\mu^2 - 1/4}{2mR^2} \left(1 - \frac{2x}{R} \right) - \frac{p^2}{2m} \right] \chi_\mu(x) = 0. \quad (4.6)$$

Условие полного поглощения (4.5) можно теперь переписать:

$$\chi_\mu(x \rightarrow 0) \sim \sqrt{x} H_1^{(1)}(2\sqrt{2mC_3/x}). \quad (4.7)$$

Вводя новую переменную:

$$\varepsilon_\mu = \frac{p^2}{2m} - \hbar^2 \frac{\mu^2 - 1/4}{2mR^2} \simeq \frac{(pR)^2 - \hbar^2\mu^2}{2mR^2},$$

получим следующее радиальное уравнение:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(-x) - \frac{mv_\mu^2}{R} x - \varepsilon_\mu \right] \chi_\mu(x) = 0. \quad (4.8)$$

Мы ввели тангенциальную скорость v_μ , такую что $\mu = mv_\mu R/\hbar$. Величина ε_μ имеет смысл радиальной кинетической энергии антиатомов. В дальнейшем мы будем опускать индекс μ , подразумевая, что результаты получены для фиксированного значения углового момента.

Уравнение (4.129) описывает движение \bar{H} в однородном эффективном поле $a = -v^2/R$ ограниченное условием полного поглощения на границе стенки цилиндра.

Уравнение (4.129) определяет пространственный l_0 и энергетический ε_0 масштабы в эффективном линейном потенциале $m(v^2/R)x$:

$$l_0 = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2 R}{2m^2 v^2}}, \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2 m v^4}{2R^2}}. \quad (4.10)$$

(Всюду в этой главе мы будем подразумевать под l_0 и ε_0 введенные выше выражения, формально соответствующие введенным в предыдущей главе масштабам гравитационных состояний). Как видно, эти масштабы полностью определяются параметрами задачи: тангенциальной скоростью и радиусом цилиндра.

Нас будут интересовать такие значения параметров задачи (R and v), чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$l_0 \gg l_{CP}. \quad (4.11)$$

Указанное условие является необходимым для эффективного квантового отражения. Оно означает, в частности, что условие полного поглощения может быть заменено модифицированным граничным условием. Как видно, в такой постановке рассматриваемая проблема полностью эквивалентна рассмотренной ранее проблеме гравитационных состояний антиводорода [53]. В частности, для радиуса $R = 0.1$ m и скорости $v = 0.99$ m/s, эффективное ускорение оказывается равным ускорению свободного падения $v^2/R = g$,

характерный пространственный масштаб $l_0 = 5.87 \mu\text{m}$, а энергетический масштаб $\varepsilon_0 = 0.60 \text{ eV}$.

На Рис.4.1 показан коэффициент отражения от проводящей поверхности как функция радиальной энергии ε_μ .

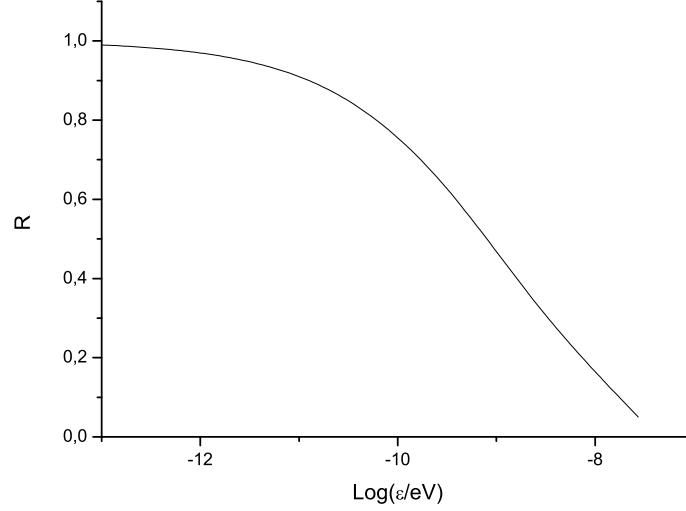


Рис. 4.1. Коэффициент квантового отражения, как функция радиальной энергии

Как было установлено ранее, благодаря иерархии масштабов 4.11 взаимодействие с поверхностью можно заменить граничным условием:

$$\begin{cases} \left[-\frac{\hbar^2 \partial^2}{2m \partial x^2} + \frac{mv^2}{R} x - \varepsilon \right] \chi_\mu(x) = 0 \\ \frac{\chi(0)}{\chi'(0)} = \frac{\tan(\delta(\varepsilon))}{k}. \end{cases} \quad (4.12)$$

Здесь $\delta(\varepsilon)$ - комплексная фаза рассеяния [138], а $k = \sqrt{2m\varepsilon_\mu}$ радиальный импульс. В пределе низких энергий, фазу можно представить в виде:

$$\delta(\varepsilon) = -ka_{CP}. \quad (4.13)$$

Вычисленная ранее комплексная длина рассеяния a_{CP} на потенциале \bar{H} -поверхность равна:

$$a_{CP} = -(0.10 + i1.05)l_{CP}, \quad (4.14)$$

$$a_{CP} = -0.0027 - i0.0287 \mu\text{m}. \quad (4.15)$$

Напомним, что указанное выражение соответствует идеально проводящей поверхности. Другие материалы, как было установлено нами ранее [139], оказываются лучшими отражателями антиводорода. в частности, для силики:

$$a_{CPs} = -0.0035 - i0.0144\mu m. \quad (4.16)$$

Граничное условие (4.12) в пределе низких энергий:

$$\frac{\chi(0)}{\chi'(0)} = -a_{CP}. \quad (4.17)$$

Поведение коэффициента квантового отражения R в том же низкоэнергетическом пределе [138]:

$$R \simeq 1 - 4k |\text{Im } a_{CP}|. \quad (4.18)$$

Как и в случае гравитационного потенциала мы приходим к выводу, что в эффективном центробежном потенциале вблизи поверхности существуют квазистационарные состояния. Волновые функции таких состояний описываются функциями Эйри [105] с комплексным аргументом:

$$\chi_n(x) \sim \text{Ai}(x/l_0 - \lambda_n), \quad (4.19)$$

где λ_n - модифицированные собственные значения квантового баунсера:

$$\text{Ai}(-\lambda_n + a_{CP}/l_0) = 0. \quad (4.20)$$

Эти значения сдвинуты на комплексную величину a_{CP}/l_0 по отношению к невозмущенным значениям λ_n^0 :

$$\text{Ai}(-\lambda_n^0) = 0. \quad (4.21)$$

Соответствующие этим собственным числам значения энергии:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 \lambda_n^0 + \frac{mv^2}{R} a_{CP}. \quad (4.22)$$

Ширина *всех* состояний в этом приближении одинакова:

$$\Gamma/2 = \frac{mv^2}{R} |\operatorname{Im} a_{CP}|. \quad (4.23)$$

Время жизни $\tau = \hbar/\Gamma$ состояний равна 0.1 s для скорости $v = 0.99$ m/s и радиуса $R = 0.10$ m в случае проводящей поверхности и 0.2 s для поверхности из силики [139]. Угловая координата \bar{H} за время жизни изменяется на:

$$\Delta\varphi = \frac{\tau v}{R} = \frac{\hbar}{2mv |\operatorname{Im} a_{CP}|} \quad (4.24)$$

Указанный угол не зависит от радиуса поверхности, он определяется только тангенциальной скоростью и свойствами поверхности. Для антиводорода этот $\Delta\varphi = 1.136$ rad для указанных выше параметров (проводящая поверхность) . Для силики этот угол вдвое больше.

Для энергий состояний шепчущей галереи применимо квазисклассическое приближение, дающее точность в несколько процентов даже для основного состояния:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 \left(\lambda_n^0 - \frac{\delta(\varepsilon_0 \lambda_n^0)}{\sqrt{\lambda_n^0}} \right), \quad (4.25)$$

$$\lambda_n^0 = \left(\frac{3}{2} \pi \left[n - \frac{1}{4} \right] \right)^{2/3}. \quad (4.26)$$

Точность указанного приближения возрастает с ростом n .

Как видно из приведенных выше соотношений состояния шепчущей галереи \bar{H} вблизи цилиндрической поверхности оказываются идентичными гравитационным состояниям. В случае состояний шепчущей галереи в выражение для энергии и ширины уровней входит только инертная масса антиводорода; кроме того эффективное ускорение v^2/R оказывается параметром, который можно менять (изменяя скорость или радиус поверхности).

4.1.2. Наблюдение эффекта шепчущей галереи

Мы показали, что время жизни состояний шепчущей галереи антиводорода определяется скоростью тангенциального движения и мнимой частью длины рассеяния антиводорода на поверхности. Это позволяет использовать состояния шепчущей галереи для прецизионного измерения фундаментальной величины a_{CP} .

Рассмотрим транспорт ультрахолодного антиводорода \bar{H} , локализованного в состояниях шепчущей галереи, вдоль цилиндрической поверхности, которая в рассматриваемых условиях играет роль волновода. Для того, чтобы контролируемым образом ограничить количество состояний шепчущей галереи введем в рассмотрение также внутренний коаксиальный цилиндр радиуса R_1 .

Мы покажем, что количество состояний, прошедших через такой цилиндрический коаксиальный волновод существенным образом зависит от расстояния между цилиндрическими поверхностями $H = R - R_1$.

Уравнение, описывающее движение атома между двумя цилиндрами в состояниях шепчущей галереи:

$$\begin{cases} \left[-\frac{\hbar^2 \partial^2}{2m \partial x^2} + \frac{mv^2}{R} x - \varepsilon \right] \chi_\mu(x) = 0 \\ \frac{\chi(0)}{\chi'(0)} = -a_{CP} \\ \frac{\chi(H)}{\chi'(H)} = -a_{CP}. \end{cases} \quad (4.27)$$

где $H = R - R_1$ - расстояние между цилиндрами.

Решение указанного уравнения дается комбинацией функций Эйри:

$$\chi_n(x) \sim \text{Ai}(x/l_0 - \beta_n) - S \text{Bi}(x/l_0 - \beta_n). \quad (4.28)$$

Граничное условие при $x = 0$ и $x = H$ определяет β_n [62]:

$$\frac{\text{Ai}(-\beta_n + a_{CP}/l_0)}{\text{Bi}(-\beta_n + a_{CP}/l_0)} = \frac{\text{Ai}(H/l_0 - \beta_n + a_{CP}/l_0) - a_{CP}/l_0 \text{Ai}'(H/l_0 - \beta_n + a_{CP}/l_0)}{\text{Bi}(H/l_0 - \beta_n + a_{CP}/l_0) - a_{CP}/l_0 \text{Bi}'(H/l_0 - \beta_n + a_{CP}/l_0)}. \quad (4.29)$$

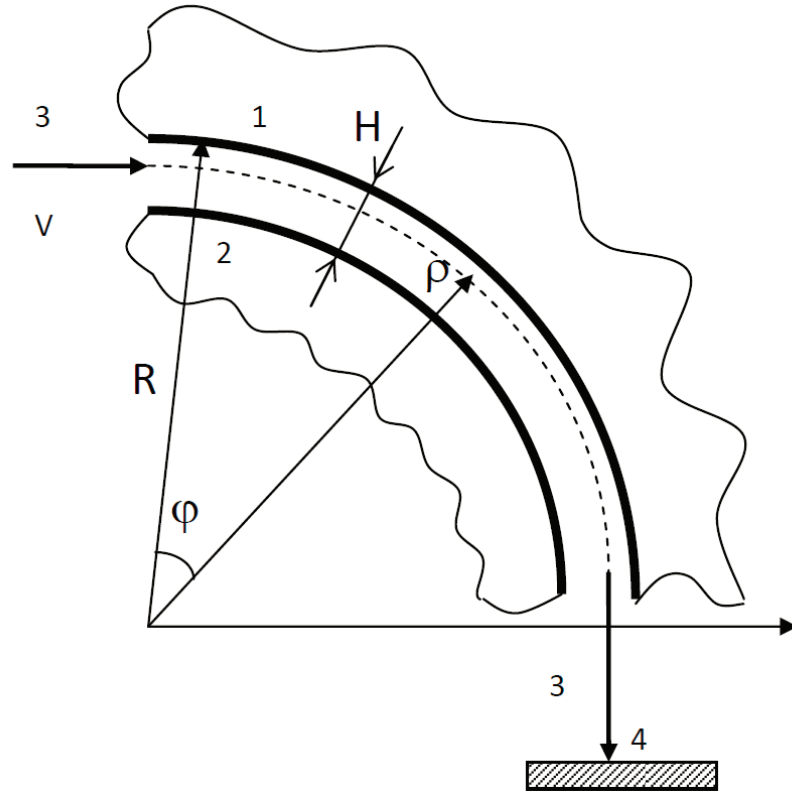


Рис. 4.2. Схема экспериментальной установки. 1- внешнее цилиндрическое зеркало, 2 - внутренне цилиндрическое зеркало, 3- тангенциальная скорость \bar{H} , 4 -детектор.

Важным свойством β_n - резкая зависимость от n . Для чисел n меньше чем N , где $H \simeq \lambda_N^0 l_0$ собственные значения $\beta_n \rightarrow \lambda_n, n \leq N$. Действительно, в этом случае центробежный барьер препятствует \bar{H} с малой радиальной энергией ($n \leq N$) проникать во внутренний цилиндр.

Воспользовавшись асимптотическими свойствами Эйри-функций

$$\text{Ai}(x - \beta_n) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{x - \beta_n}} \exp(-2/3(x - \beta_n)^{3/2}) \quad (4.30)$$

$$\text{Bi}(x - \beta_n) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{x - \beta_n}} \exp(2/3(x - \beta_n)^{3/2}), \quad (4.31)$$

получим уравнение для β_n :

$$\frac{\text{Ai}(-\beta_n + a_{CP}/l_0)}{\text{Bi}(-\beta_n + a_{CP}/l_0)} \simeq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{4}{3}(H/l_0 - \beta_n)^{3/2}\right) \left(1 + 2\frac{a_{CP}}{l_0} \sqrt{H/l_0 - \beta_n}\right). \quad (4.32)$$

Из уравнения (4.32) в пределе $H \gg |\beta_n|l_0$ следует :

$$\text{Ai}(-\beta_n + a_{CP}/l_0) \rightarrow 0, \quad (4.33)$$

что эквивалентно уравнению на собственные значения для состояний шепчущей галереи λ_n вблизи одной поверхности:

$$\text{Ai}(-\lambda_n + a_{CP}/l_0) = 0, \quad (4.34)$$

Таким образом в пределе $H \gg |\lambda_n|l_0$ функции β_n стремятся к пределу $\beta_n \rightarrow \lambda_n$.

Поправка к этим состояниям с учетом туннелирования через центробежный барьер приводит к выражению:

$$\beta_n = \lambda_n - \frac{\text{Bi}(-\lambda_n)}{2 \text{Ai}'(-\lambda_n)} \exp \left[-\frac{4}{3}(H/l_0 - \lambda_n)^{3/2} \right] \left(2\sqrt{H/l_0 - \lambda_n} \frac{a_{CP}}{l_0} + 1 \right) \quad (4.35)$$

Ширина n -ого состояния в следствии туннелирования через классически запрещенную область во внутренний цилиндр оказывается равной:

$$\Gamma_n \simeq 2 \frac{|\text{Im } a + CP|}{l_0} \varepsilon_0 \left(1 + \sqrt{(H/l_0 - \lambda_n)/\lambda_n} \exp \left[-\frac{4}{3}(H/l_0 - \lambda_n)^{3/2} \right] \right) \quad (4.36)$$

Приведенное выражение показывает, что ширина состояния \bar{H} локализованного между двумя цилиндрами резко возрастает, когда пространственный размер классически разрешенной области движения достигает второго цилиндра $\lambda_n l_0 \rightarrow H$.

В противоположном случае $H \ll \lambda_n l_0$ можно пренебречь центробежным потенциалом. Состояние антиводорода переходит в состояние в одномерном ящике:

$$\begin{cases} \left[\frac{\hbar^2 \partial^2}{2m \partial x^2} + \frac{\kappa_n^2}{2m} \right] \chi_\mu(x) = 0 \\ \frac{\chi(0)}{\chi'(0)} = -a_{CP} \\ \frac{\chi(H)}{\chi'(H)} = -a_{CP}. \end{cases} \quad (4.37)$$

Где эффективные импульсы κ_n равны:

$$\kappa_n = \frac{\pi n}{H + 2a_{CP}} \quad (4.38)$$

Соответствующие энергии $\tilde{\varepsilon}_n = \hbar^2 \kappa^2 / (2m)$ в пределе $H \ll \lambda_n l_0$ оказываются равными:

$$\tilde{\varepsilon}_n \simeq \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mH^2} (1 - 4a_{CP}/H) \quad (4.39)$$

На Рис.(4.3,4.4) показаны энергии и ширины первых трех состояний как функция расстояния H между цилиндрами.

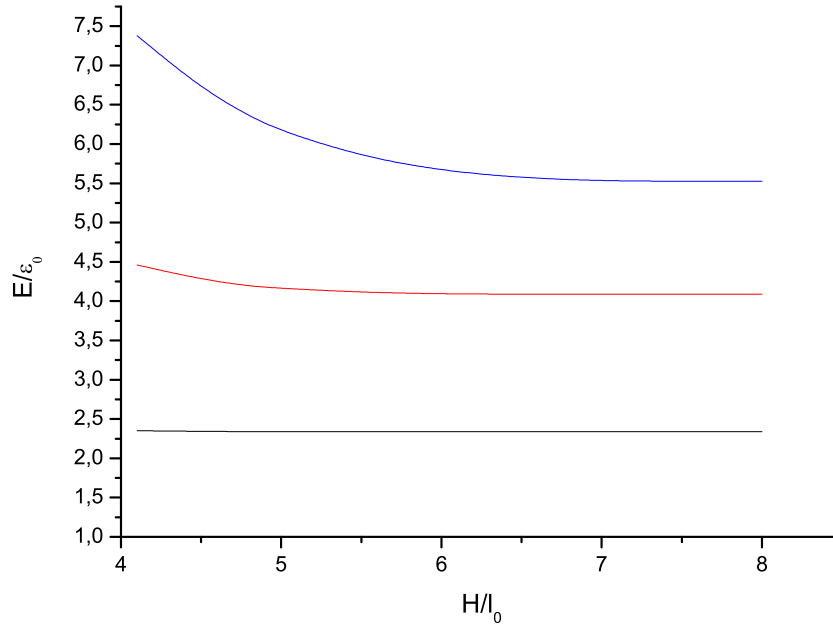


Рис. 4.3. Энергия первых трех состояний как функция расстояния между цилиндрами H .

Как видно из рисунка, происходит резкое возрастание времени жизни состояний при $H < \lambda_n^0 l_0$. Указанный резкий характер зависимости времени жизни означает, что количество состояний, прошедший через волновод заданной длины, зависит от H . На Рис.(4.5) показаны относительные заселенности $C_n(t)$ первых четырех состояний как функции времени нахождения в волноводе.

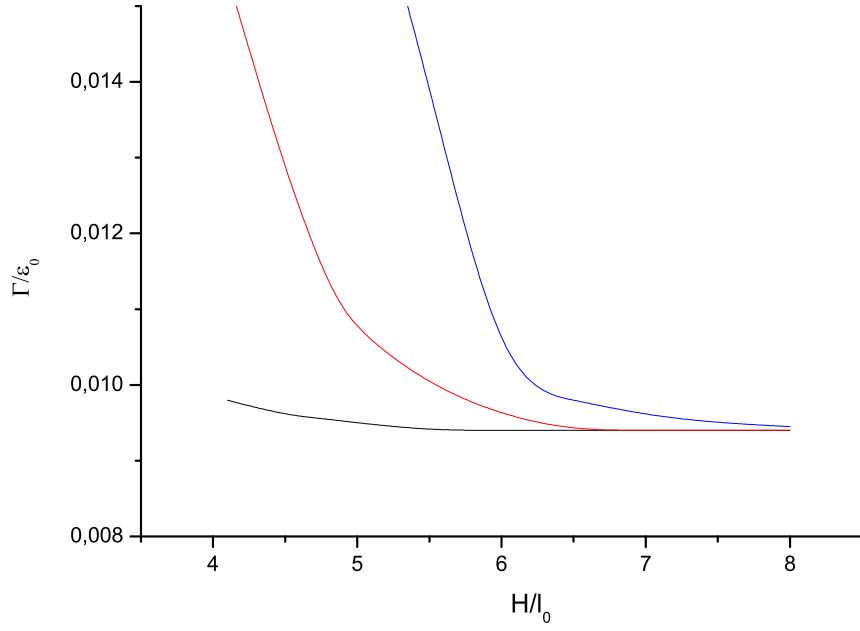


Рис. 4.4. Ширина первых трех состояний как функция расстояния между цилиндрами H .

Количество состояний N , которые дают основной вклад в поток через волновод определяется номером состояния, размер которого равен H . Для состояний с квантовым числом n , таким что $n < N$, $H \approx \lambda_N^0 l_0$. Пользуясь квазиклассическим приближением, для $N \gg 1$ можно получить следующее выражение:

$$N \approx \frac{(2H)^{3/2} m v}{3 \hbar \pi \sqrt{R}} \quad (4.40)$$

Коэффициент прохождения F оказывается в этом случае равным:

$$F \approx \sum_{i=1}^{\infty} |C_i(T)|^2 \approx \sum_{i=1}^{\infty} |C_i(0)|^2 \exp(-\Gamma_i T / \hbar). \quad (4.41)$$

Здесь $T = L/v$ классическое время пролета через волновод длиной L . В указанном выражении мы пренебрегли интерференционными членами, которые мы обсудим позже. Учитывая выражение (4.23) и ограничиваясь вкладом состояний таких, что $n \leq N$, получим:

$$F \approx \frac{(2H)^{3/2} m}{3 \hbar \pi \sqrt{R}} v \exp [2 m v \operatorname{Im} a_{CP} L / (\hbar R)] \quad (4.42)$$

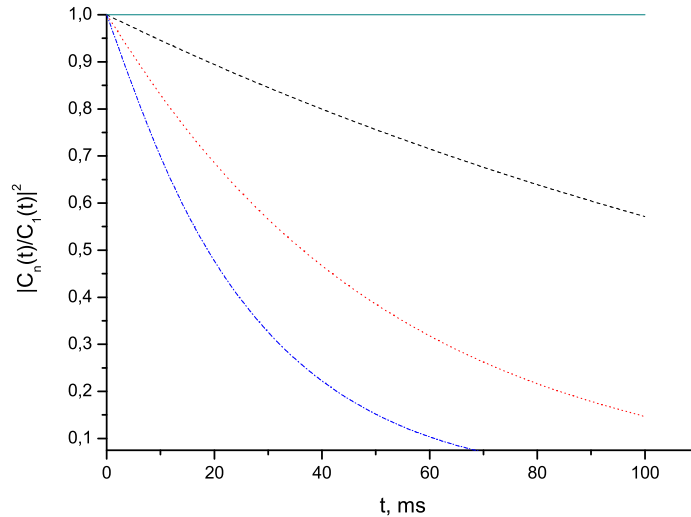


Рис. 4.5. Относительные заселенности первых четырех состояний шепчущей галереи \bar{H} как функция времени нахождения в волноводе. Сплошная линия - первое состояние, штриховая линия - второе состояние, пунктирная линия - третье состояние, штрих-пунктирная линия - четвертое состояние.

Важнейшим результатом является то, что измеримый экспериментально коэффициент прохождения оказывается экспоненциально зависящим от $\text{Im } a_{CP}$. Такая зависимость F от $\text{Im } a_{CP}$ является следствием того, что антиводород длительное время находится вблизи поверхности в состоянии шепчущей галереи.

На Рис.4.6 представлен коэффициент прохождения через коаксиальный волновод с параметрами $R = 0.1$ м, $H = 52$ μm , $L = 0.15$ м, как функция тангенциальной скорости v , полученный в результате численного решения (4.27).

Заметим, что в случае, когда число прошедших состояний N велико, роль внутреннего цилиндра фактически сводится к роли начальной колликации пучка. Поэтому экспериментальная установка для определения интегрального потока антиводорода состоящая из двух коаксиальных цилиндров

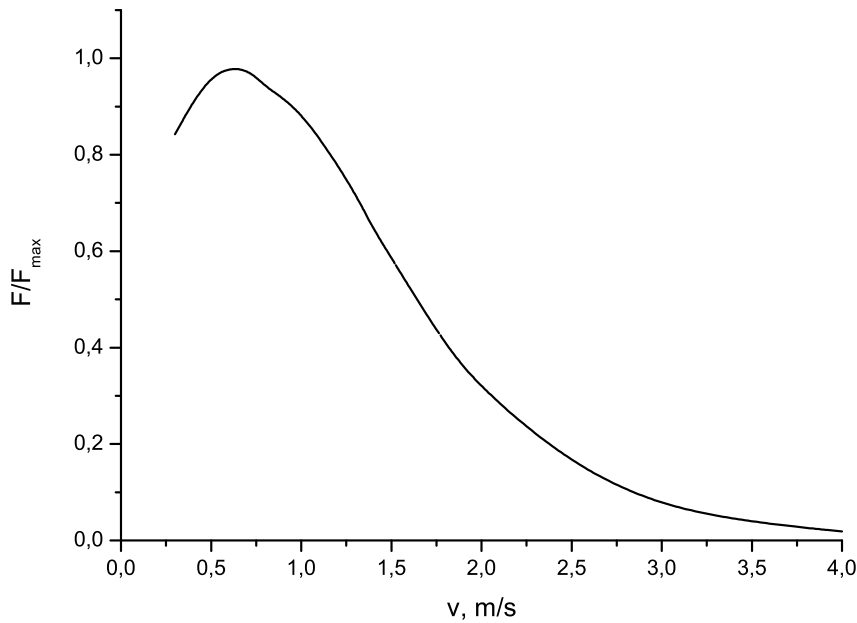


Рис. 4.6. Коэффициент прохождения как функция тангенциальной скорости v . Параметры волновода $R = 0.1$ м, $H = 52$ $\mu\text{м}$, $L = 0.15$ м.

может быть заменена одним внешним цилиндром и коллиматором пучка на входе.

Таким образом, измеряя тангенциальную скорость и коэффициент прохождения через волновод, можно с высокой точностью измерить $\text{Im } a_{CP}$.

4.2. Интерференция состояний шепчущей галереи

Наиболее информативным способом исследования эффекта шепчущей галереи является метод интерференции. Для наблюдения интерференции необходимым условием является формирование суперпозиции, состоящей из нескольких (небольшого числа) состояний. Формирование такого состояния возможно с помощью двух коаксиальных цилиндров было рассмотрено в предыдущем параграфе.

В Главе 3 было показано, что метастабильный характер вблизиповерхностных состояний \bar{H} приводит к появлению ненулевого тока через поверх-

ность. Действительно, граничное условие (3.20) содержит *комплексную* длину рассеяния a_{CP} , что приводит к существованию отличного от нуля тока $x = 0$:

$$j(0, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Phi(0, t) \frac{d\Phi^*(0, t)}{dx} - \Phi^*(0, t) \frac{d\Phi(0, t)}{dx} \right). \quad (4.43)$$

Такой ток связан со скоростью убывания количества антиатомов $dF(t)/dt$. Интересным свойством суперпозиции нескольких состояний антиводорода является появление осцилляций во временной зависимости $dF(t)/dt$, частотный спектр которой определяется частотами перехода между гравитационными состояниями. Этот эффект позволяет определить спектр состояний антиводорода.

Используя свойства функций Эйри несложно показать:

$$\frac{dF(t)}{dt} = -\frac{\Gamma}{\hbar} \exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar}t\right) \left(\sum_i^n |C_i|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{i>j}^n \sum_j^n C_j^* C_i \exp\left(-i(\varepsilon_i - \varepsilon_j) \frac{t}{\hbar}\right) \right). \quad (4.44)$$

Здесь C_i амплитуды заселения соответствующих состояний.

Для случая трех состояний получим явное выражение:

$$\frac{dF_{123}(t)}{dt} \approx -\frac{2\Gamma}{3\hbar} \exp\left(-\frac{\Gamma}{\hbar}t\right) \left(\frac{3}{2} - \cos(\omega_{12}t) - \cos(\omega_{23}t) + \cos((\omega_{12} + \omega_{23})t) \right), \quad (4.45)$$

где $\omega_{ij} = (\varepsilon_j - \varepsilon_i)/\hbar$.

Модуляции высокочастотных осцилляций происходят с периодом когерентности членов $\cos(\omega_{12}t)$ и $\cos(\omega_{23}t)$:

$$T_r = \frac{2\pi}{\omega_{12} - \omega_{23}}. \quad (4.46)$$

Поскольку частоты ω_{12} и ω_{23} близки, период T_r заметно больше характерного периода осцилляций. Величина T_r чувствительна к малым вариациям каждой из частот, а также к вариации характерного временного масштаба \hbar/ε_0 , вызванным изменением тангенциальной скорости v .

На Рис.(4.7) и Рис.(4.8) показаны зависимости аннигиляционного сигнала от времени для двух значений тангенциальных скоростей $v = 1.00 \text{ m/s}$ и $v = 0.99 \text{ m/s}$. На приведенных рисунках ясно видны различия в интерференционной временной зависимости.

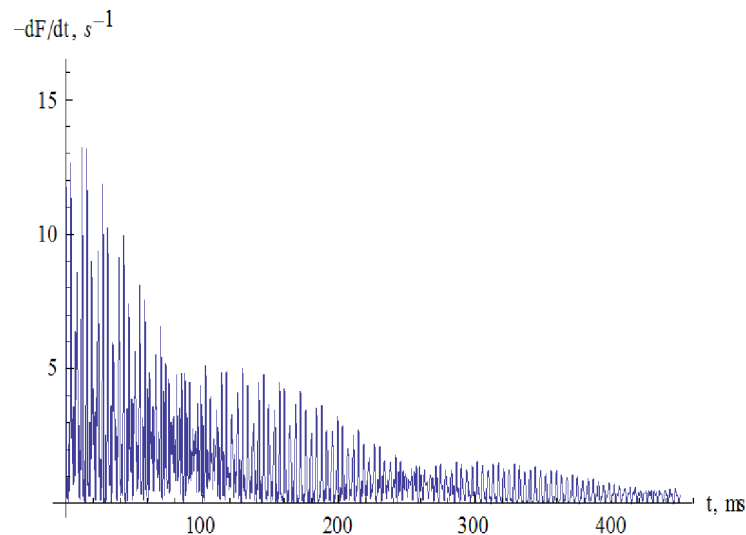


Рис. 4.7. Аннигиляционный сигнал \bar{N} как функция времени. $R = 0.1 \text{ m}$, $H = 32 \text{ }\mu\text{m}$ $v = 1.00 \text{ m/s}$.

В рассматриваемом выше случае $T_r = 0.170 \text{ s}$ для тангенциальной скорости $v = 1.00 \text{ m/s}$, и $T_r = 0.265 \text{ s}$ для тангенциальной скорости $v = 0.99 \text{ m/s}$, что приводит к наглядному изменению временной зависимости на Рис.(4.7) и Рис.(4.8).

Общий вид интерференционной зависимости показан на Рис.(4.9). Вклад возбужденных состояний быстрее убывает со временем, поэтому на больших временах интерференция происходит лишь между низшими состояниями.

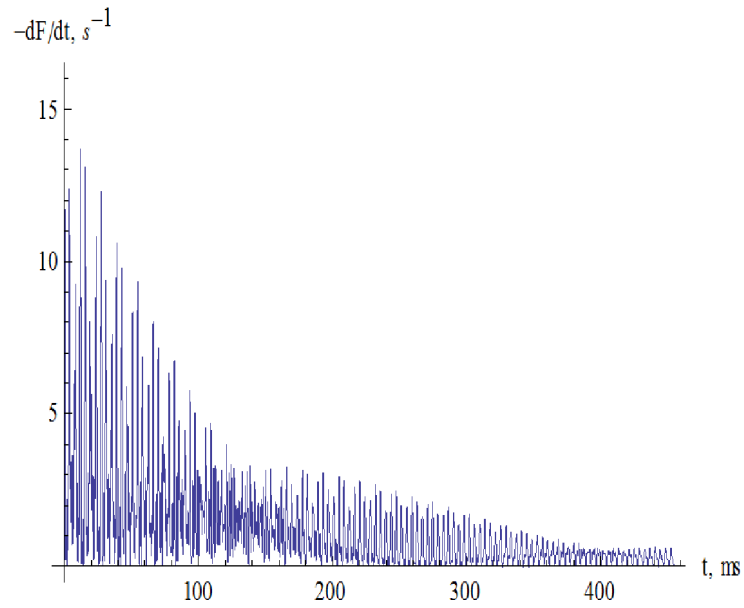


Рис. 4.8. Аннигиляционный сигнал \bar{H} как функция времени. $R = 0.1$ м, $H = 32 \mu\text{м}$ $v = 1.00$ м/с. $R = 0.1$ м, $H = 32 \mu\text{м}$ $v = 0.99$ м/с.

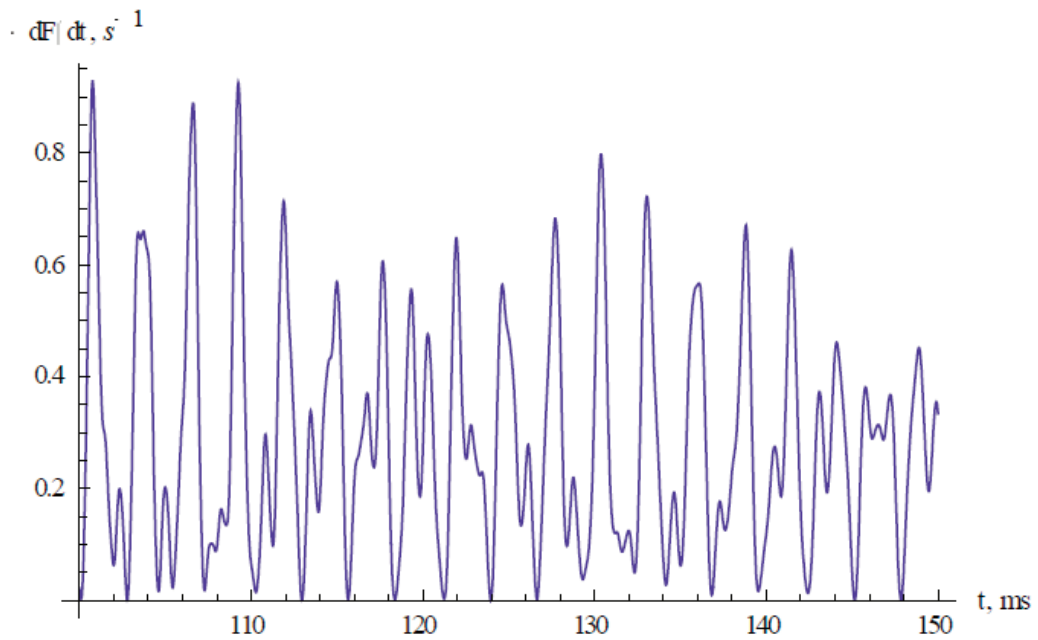


Рис. 4.9. Аннигиляционный сигнал \bar{H} как функция времени. $R = 0.1$ м, $H = 24 \mu\text{м}$ $v = 0.99$ м/с.

4.3. Замкнутый резонатор шепчущей галереи.

Наблюдение состояний шепчущей галереи возможно в течении максимально длительного времени, при условии, что атомы совершают финитное движение по всем направлениям. Такая 3D ловушка-резонатор шепчущей галереи возможна в следующей конфигурации.

Рассмотрим осесимметричную поверхность, уравнение которой в цилиндрических координатах имеет вид $\rho(z^2)$, где ρ - расстояние от оси симметрии до поверхности, z - координата вдоль оси. Примером такой поверхности может служить сферическая поверхность вблизи экватора.

Несложно убедиться, что кинетическая энергия вращения вокруг оси имеет вид:

$$U(z) = \frac{\hbar^2 (\mu^2 - 1/4)}{2m\rho^2(z)} \quad (4.47)$$

Эта кинетическая энергия, зависящая от z , играет роль потенциальной энергии для движения вдоль оси. Раскладывая этот эффективный потенциал вблизи $z = 0$ получим:

$$U(z) = \frac{\hbar^2 (\mu^2 - 1/4)}{2m\rho^2(0)} - \frac{\hbar^2 z^2 (\mu^2 - 1/4)}{2m\rho^3(0)} \frac{d\rho(0)}{d(z^2)} \quad (4.48)$$

Такая зависимость $U(z)$, имеющая минимум при $z = 0$, обеспечивает локализацию атомов вдоль оси z .

Рассмотрим в качестве примера точно решаемую задачу, выбрав в качестве искомой поверхности сферу. Для обеспечения 3D локализации достаточно взять часть сферы вблизи экватора $|z| < z_0 \ll R$, где R - радиус сферы.

Уравнение Шредингера в сферических координатах:

$$(\widehat{T}_r + \widehat{T}_\theta + \widehat{T}_\varphi + V_{CP}(r) - E) = 0 \quad (4.49)$$

$$\widehat{T}_r = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (4.50)$$

$$\widehat{T}_\theta = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (4.51)$$

$$\widehat{T}_\varphi = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (4.52)$$

Волновая функция в сферических координатах, отвечающая заданному угловому моменту l и его проекции μ на ось z , представим, с учетом разделения переменных, в следующем виде:

$$F(r, \theta, \varphi) = f(r) Y_{l\mu} \exp(i\mu\varphi)$$

Здесь $Y_{l\mu}(\theta)$ - стандартная шаровая функция, удовлетворяющая уравнению:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\mu^2}{\sin^2(\theta)} \right) Y_{l\mu}(\theta) = -l(l+1) Y_{l\mu}(\theta) \quad (4.53)$$

Стандартной подстановкой $f(r) = \chi(r)/r$ получим уравнение радиального движения:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V_{CP}(r) - E \right) \chi(r) = 0 \quad (4.54)$$

Сводя радиальное уравнение к уравнению для состояний шепчущей галереи (нас интересует случай больших l), получим, как и ранее:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^3} x - \epsilon_n \right) \chi(x) = 0 \quad (4.55)$$

Здесь $x = R - r$, а собственные значения ϵ_n определяются следующим образом:

$$\epsilon_n = E_n - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2} = \epsilon_0 \lambda_n \quad (4.56)$$

$$\epsilon_0 = \frac{\hbar^2 l^{4/3}}{2^{1/3} m R^2} \quad (4.57)$$

Собственные числа λ_n определяются условием (4.17):

$$\frac{\text{Ai}(-\lambda_n)}{\text{Ai}'(-\lambda_n)} = -a_{CP}/l_0. \quad (4.58)$$

Полная энергия состояния оказывается равной:

$$E_{n,l} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2} + \frac{\hbar^2 l^{4/3}}{2^{1/3} m R^2} \lambda_n \quad (4.59)$$

Вернемся теперь к движению вдоль оси z вблизи экватора сферы. Введем угол, определяющий отклонение от экваториального положения $\vartheta = \pi/2 - \theta$ и будем интересоваться окрестностью экватора $\vartheta \ll 1$.

Запишем уравнение для движения вдоль координаты $z = R \sin(\vartheta)$, раскладывая уравнение (4.53) по малому параметру z/R :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\hbar^2 \mu^2}{2mR^4} z^2 - \frac{\hbar^2 (l(l+1) - \mu^2)}{2mR^2} \right] \psi(z) = 0 \quad (4.60)$$

Это уравнение гармонического осциллятора с частотой:

$$\omega_z = \frac{\hbar \mu}{mR^2} \quad (4.61)$$

Вводя квантовое число k для осциллятора $k = l - \mu$ и учитывая, что $k \ll l$, перепишем уравнение (4.60):

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\hbar^2 \mu^2}{2mR^4} z^2 - \hbar \omega_z \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \psi(z) = 0 \quad (4.62)$$

Движение антиатомов локализовано вдоль оси z в основном в области:

$$|z| \leq R \sqrt{\frac{k + 1/2}{\mu}}$$

Таким образом, состояния шепчущей галереи вблизи экватора сферической поверхности оказываются локализованными вблизи поверхности в узком срезе z/llR , параллельном экватору. Это означает, что такая поверхность, открытая сверху и снизу, представляет собой 3D-ловушку.

Заметим, что частота вращения совпадает в этом приближении с частотой осцилляций вдоль оси z .

4.3.1. Учет гравитации

В предыдущих рассуждениях мы не учитывали эффекты гравитации. Будем считать, что ось z направлена вертикально вдоль g .

Несложно видеть, что при этом условии модификация уравнения движения вдоль оси z приведет лишь к сдвигу точки равновесия осциллятора:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\hbar^2 \mu^2}{2mR^4} (z + z_g)^2 - \hbar \omega_z \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \psi(z) = 0 \quad (4.63)$$

$$z_g = \frac{g}{\omega_z^2} = \frac{gR^2}{v^2} \quad (4.64)$$

Для ультрахолодных антиатомов со скоростью $v = 10\text{ м/с}$, $R = 0.1\text{ м}$, сдвиг положения равновесия под действием гравитации составляет макроскопическую величину $z_g \approx 10^{-3}\text{ м}$.

4.4. Полюса Редже в рассеянии на цилиндре.

В этом параграфе мы рассмотрим общие свойства S -матрицы рассеяния на потенциале, имеющем вид цилиндрической прямоугольной ямы. Для общности мы рассмотрим как отталкивательный потенциал, так и притягивающий. Мы сейчас не конкретизируем способ физической реализации такого потенциала, важно для нашего рассмотрения лишь условие малости области изменения потенциала по сравнению с длиной волны радиального движения антиводорода (условие резкого края). Заметим лишь, что физическая реализация отталкивательного потенциала с резким краем для антиводорода возможна, например, при отражении антиводорода от цилиндрического магнитного зеркала, либо затухающей волны. Случаю притягивательного потенциала с резким краем соответствует рассмотренное нами взаимодействие с материальной поверхностью.

Развитый здесь метод позволяет рассмотреть проблему рассеяния с точки зрения особенностей S -матрицы в комплексной плоскости углового

момента, т.е. на языке полюсов Редже [140]. Такой подход позволяет установить общие свойства рассеяния и установить их связь с такими хорошо известными волновыми явлениями, как радуга, gloria, поверхностные волны [141].

Интересующая нас связь полюсов Редже с состояниями шепчущей галереи будет установлена на основе асимптотических разложений.

4.4.1. Формальное решение

Уравнение Шредингера, описывающее рассеяние, удобно записать в цилиндрических координатах:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + U(\rho) - \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \right] \Psi(\rho, \varphi) = 0. \quad (4.65)$$

Волновая функция $\Psi(\rho, \varphi)$ зависит от радиальной (ρ) и угловой (φ) координат, $\hbar k$ импульс, а $U(\rho)$ потенциал рассеяния:

$$U(\rho) = U_0 \Theta(R - \rho) = \begin{cases} U_0, & \rho \leq R, \\ 0, & \rho > R. \end{cases} \quad (4.66)$$

где R - радиус цилиндра, а $\Theta(R - \rho)$ - ступенчатая функция, U_0 - положительная или отрицательная глубина потенциала.

В уравнении (4.65), мы пренебрегаем тривиальной зависимостью от осевой координаты z . Стандартной заменой $\Psi(\rho, \varphi) = \Phi(\rho, \varphi)/\sqrt{\rho}$, уравнение (4.65) преобразуется в:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} \right) + U_0 \Theta(R - \rho) - \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \right] \Phi(\rho, \varphi) = 0. \quad (4.67)$$

Волновая функция $\Phi(\rho, \varphi)$ при больших ρ имеет асимптотическое поведение:

$$\Phi(\rho, \varphi) \rightarrow \sqrt{\rho} \exp(ik\rho \cos(\varphi)) + f(\varphi) \exp(ik\rho + i\pi/4) \quad (4.68)$$

здесь $f(\varphi)$ - амплитуда рассеяния. Стандартное разложение двумерной функции $\Phi(\rho, \varphi)$ по базису углового момента $\exp(i\mu\varphi)$ дает:

$$\Phi(\rho, \varphi) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \chi_{|\mu|}(\rho) e^{i\mu\varphi} \quad (4.69)$$

где $\chi_{|\mu|}(\rho)$ - радиальные волновые функции.

Амплитуда рассеяния $f(\varphi)$ также может быть разложена по $\exp(i\mu\varphi)$ и может быть представлена в виде [142]:

$$f(\varphi) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi k}} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} (S(\mu, k) - 1) e^{i\mu\varphi} \equiv \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} f(\mu, k) e^{i\mu\varphi}. \quad (4.70)$$

Здесь $S(\mu, k) = \exp(2i\delta_{\mu}(k))$ матрица рассеяния в парциальной волне с моментом μ , $\delta_{\mu}(k)$ - фаза рассеяния, которую можно вычислить из решения следующего уравнения:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) + \frac{\hbar^2}{2M\rho^2} \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) + U_0 \Theta(R - \rho) - \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \right] \chi_{\mu}(\rho) = 0, \quad (4.71)$$

$$\chi_{\mu}(\rho \rightarrow 0) = 0, \quad (4.72)$$

$$\chi_{\mu}(\rho \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sin \left(k\rho + \delta_{\mu} - \frac{\pi}{2} (|\mu| - 1/2) \right). \quad (4.73)$$

Заметим, что типичные значения $\mu_0 \equiv kR \gg 1$.

Для суммирования большого количества членов в разложении по угловому моменту будем следовать методу комплексных угловых моментов.

Мы вводим $f(\mu, k)$, функцию комплексного момента μ , которая совпадает с амплитудой рассеяния при целых μ и имеет стандартные аналитические свойства в комплексной плоскости μ [143, 144]. Сумма (4.70) по целым μ преобразуется в интеграл по контуру в комплексной плоскости μ , вычисляемый с помощью вычетов и суммирования по соответствующим вкладкам. Для этого удобно воспользоваться формулой Пуассона [145]:

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu, k) e^{i\mu(\varphi+2\pi n)} d\mu. \quad (4.74)$$

Целое число n имеет смысл количества оборотов волны вокруг цилиндрической поверхности. Используя аналитические свойства, указанный

интеграл сводится к сумме вычетов:

$$f(\varphi) = 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_j \text{Res } f(\mu_j, k) e^{i\mu_j(\varphi+2\pi n)}. \quad (4.75)$$

Здесь μ_j - j -ый полюс амплитуды f , $\text{Res } f(\mu_j, k)$ - вычет амплитуды в этом полюсе.

Контур интегрирования выбирается так, чтобы $\text{Im } \mu_j \varphi > 0$ и $\text{Im } \mu_j(\pi - \varphi) > 0$.

Сумма по n вычисляется с учетом симметрии $\mu \rightarrow -\mu$. Тогда получим:

$$f(\varphi) = 2\pi i \sum_j \text{Res } f(\mu_j, k) \frac{\sin(\mu_j(\pi - \varphi))}{\sin(\mu_j \pi)}. \quad (4.76)$$

Указанное выражение выявляет роль полюсов Редже. Вклад каждого полюса можно связать с квазистационарным распадающимся состоянием. Состояния с максимальным временем жизни дают основной вклад в рассеяние на большие углы.

4.4.2. Уравнение для полюсов Редже

Формальное решение (4.67) записывается через функции Бесселя.

Внутри цилиндра $\rho < R$, регулярное решение (4.72) уравнения (4.71) пропорционально функции Бесселя:

$$\chi_\mu(\rho) \sim J_\mu(\kappa\rho) \quad (4.77)$$

здесь $\kappa = \sqrt{k^2 - 2MU_0/\hbar^2} \approx k - MU_0/k\hbar^2$.

Вне цилиндра решение записывается в виде суперпозиции:

$$\chi_\mu(\rho) \sim \cos \delta_\mu J_\mu(k\rho) + \sin \delta_\mu N_\mu(k\rho). \quad (4.78)$$

Условие сшивки в точке $\rho = R$ дает:

$$\kappa \frac{J'_\mu(\kappa R)}{J_\mu(\kappa R)} = k \frac{\cos \delta_\mu J'_\mu(kR) + \sin \delta_\mu N'_\mu(kR)}{\cos \delta_\mu J_\mu(kR) + \sin \delta_\mu N_\mu(kR)} \quad (4.79)$$

Окончательно, получим для фазы рассеяния:

$$\tan \delta_\mu = \frac{\frac{\kappa}{k} \frac{J'_\mu(\kappa R)}{J_\mu(\kappa R)} J_\mu(kR) - J'_\mu(kR)}{\frac{\kappa}{k} \frac{J'_\mu(\kappa R)}{N_\mu(\kappa R)} J_\mu(kR) - N'_\mu(kR)}. \quad (4.80)$$

Выражение для S -матрицы имеет вид:

$$S(\mu, p) = \exp(2i\delta_\mu), \quad (4.81)$$

$$S(\mu, p) = \frac{N'_\mu(kR) + iJ'_\mu(kR) - \frac{\kappa}{k} \frac{J'_\mu(\kappa R)}{J_\mu(\kappa R)} (N_\mu(kR) + iJ_\mu(kR))}{N'_\mu(kR) - iJ'_\mu(kR) - \frac{\kappa}{k} \frac{J'_\mu(\kappa R)}{J_\mu(\kappa R)} (N_\mu(kR) - iJ_\mu(kR))}. \quad (4.82)$$

Это выражение совпадает с аналогичным выражением для сферического потенциала при замене $\mu \rightarrow l + 1/2$.

При больших значениях индексов выражения для функции Бесселя $J_\mu(z)$ и Неймана $N_\mu(z)$ могут быть упрощены, если μ близок к значению аргументов:

$$\mu \sim \mu_0 \equiv kR \sim \kappa R \gg 1. \quad (4.83)$$

Воспользуемся асимптотическими разложениями [146] для функции $J_\mu(\mu z)$ двух комплексных переменных μ и z .

$$J_\mu(\mu z) \approx \left(\frac{4\zeta}{1-z^2} \right)^{1/4} \frac{\text{Ai}(\mu^{2/3}\zeta)}{\mu^{1/3}}, \quad (4.84)$$

здесь

$$\frac{2}{3}\zeta^{3/2} = \int_z^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} dt = \ln \frac{1 + \sqrt{1-z^2}}{z} - \sqrt{1-z^2} \quad (4.85)$$

Это выражение можно записать в эквивалентной форме:

$$\frac{2}{3}(-\zeta)^{3/2} = \int_1^z \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} dt = \sqrt{z^2-1} - \frac{1}{i} \ln \frac{1 + i\sqrt{z^2-1}}{z}. \quad (4.86)$$

а $\text{Ai}(z)$ - функция Эйри.

При z близком к 1

$$\zeta \approx 2^{1/3}(z - 1) \quad (4.87)$$

аналогичное выражение для функции Неймана и производных соответствующих функций:

$$N_\mu(\mu z) \approx - \left(\frac{4\zeta}{1 - z^2} \right)^{1/4} \frac{\text{Bi}(\mu^{2/3}\zeta)}{\mu^{1/3}}, \quad (4.88)$$

$$J'_\mu(\mu z) \approx -\frac{2}{z} \left(\frac{1 - z^2}{4\zeta} \right)^{1/4} \frac{\text{Ai}'(\mu^{2/3}\zeta)}{\mu^{2/3}}, \quad (4.89)$$

$$N'_\mu(\mu z) \approx \frac{2}{z} \left(\frac{1 - z^2}{4\zeta} \right)^{1/4} \frac{\text{Bi}'(\mu^{2/3}\zeta)}{\mu^{2/3}}. \quad (4.90)$$

где $\text{Bi}(z)$ - функция Эйри второго рода.

Введем обозначения

$$\zeta_{\text{in}} = 2^{1/3} \left(\frac{\kappa R}{\mu} - 1 \right), \quad \zeta_{\text{out}} = 2^{1/3} \left(\frac{kR}{\mu} - 1 \right), \quad (4.91)$$

и получим выражения для S -матрицы

$$S(\mu, k) = \frac{T^-(\mu, k)}{T^+(\mu, k)} \quad (4.92)$$

здесь

$$\begin{aligned} T^\pm(\mu, k) &= \text{Bi}'(\mu^{2/3}\zeta_{\text{out}}) \pm i\text{Ai}'(\mu^{2/3}\zeta_{\text{out}}) \\ &- \frac{\text{Ai}'(\mu^{2/3}\zeta_{\text{in}})}{\text{Ai}(\mu^{2/3}\zeta_{\text{in}})} [\text{Bi}(\mu^{2/3}\zeta_{\text{out}}) \pm i\text{Ai}(\mu^{2/3}\zeta_{\text{out}})]. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Полюса S -матрицы определяются из уравнения:

$$T^+(\mu, k) = 0, \quad (4.94)$$

или в явном виде:

$$\frac{\text{Ai}'(\mu^{2/3}\zeta_{\text{in}})}{\text{Ai}(\mu^{2/3}\zeta_{\text{in}})} = \frac{\text{Bi}'(\mu^{2/3}\zeta_{\text{out}}) + i\text{Ai}'(\mu^{2/3}\zeta_{\text{out}})}{\text{Bi}(\mu^{2/3}\zeta_{\text{out}}) + i\text{Ai}(\mu^{2/3}\zeta_{\text{out}})}. \quad (4.95)$$

4.4.3. Асимптотическое выражение для полюсов Редже

Как было показано ранее, нас интересуют большие значения углового момента, близкие к $\mu_0 = kR \gg 1$.

Аргумент функции Эйри (4.95) может быть разложен с учетом $\mu \sim \mu_0 \gg 1$:

$$\mu^{2/3} \zeta_{\text{in}} = \left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/3} (\kappa R - \mu) \approx -u_0 - x_m \quad (4.96)$$

$$\mu^{2/3} \zeta_{\text{out}} = \left(\frac{2}{\mu}\right)^{1/3} (kR - \mu) = -x. \quad (4.97)$$

Здесь

$$u_0 = \frac{MU_0 R}{\hbar^2 k} \left(\frac{2}{\mu_0}\right)^{1/3} = \frac{2MU_0}{\hbar^2 k^2} \left(\frac{\mu_0}{2}\right)^{2/3} \quad (4.98)$$

$$x = (\mu - \mu_0) \left(\frac{2}{\mu_0}\right)^{1/3}. \quad (4.99)$$

Комплексная переменная x пропорциональна разности между μ и μ_0 .

Уравнение (4.95) для полюсов Редже через переменную x_n имеет вид:

$$\frac{\text{Ai}'(-u_0 - x_n)}{\text{Ai}(-u_0 - x_n)} = \frac{\text{Bi}'(-x_n) + i \text{Ai}'(-x_n)}{\text{Bi}(-x_n) + i \text{Ai}(-x_n)} \quad (4.100)$$

Такая форма удобна для дальнейших асимптотических разложений x_n .

Конкретный вид асимптотического разложения функции Эйри в комплексной плоскости x зависит от фазы x . Это свойство известно как явление Стокса. Поэтому мы рассмотрим различные области комплексной плоскости x .

Прежде всего рассмотрим узкие резонансы, расположенные вблизи вещественной оси комплексной плоскости углового момента. В этом случае для функции Эйри воспользуемся следующей асимптотикой:

$$\text{Ai}(-z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} z^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3} z^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (4.101)$$

$$\text{Bi}(-z) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.102)$$

здесь $|\arg(z)| < 2\pi/3$

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \text{ для } |\arg(z)| < \pi, \quad (4.103)$$

$$\text{Bi}(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}z^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \text{ для } |\arg(z)| < \pi/3. \quad (4.104)$$

В случае потенциала притяжения ($u_0 < 0$) возможны полюса $u_0 < \text{Re } x_n < 0$, $|\text{Im } x_n| \ll |\text{Re } x_n|$. Для $|u_0| \gg 1$ уравнение (4.100) имеет вид:

$$\sqrt{\frac{|u_0| + x_n}{-x_n}} \tan\left[\frac{2}{3}(|u_0| + x_n)^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right] = 1 - i \exp\left[-\frac{4}{3}(-x_n)^{3/2}\right]. \quad (4.105)$$

Приближенное решение для мнимой части x дает экспоненциально малые значения:

$$\text{Im } x_n \sim \exp\left[-\frac{4}{3}\text{Re}(-x_n)^{3/2}\right] \quad (4.106)$$

причем вещественная часть $\text{Re } x_n$ удовлетворяет уравнению:

$$\sqrt{\frac{|u_0| + x_n}{-x_n}} \tan\left[\frac{2}{3}(|u_0| + x_n)^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right] = 1 \quad (4.107)$$

Для «глубоко связанных состояний» $||u_0| + x_n| \ll |x_n|$ для вещественной части полюсов получим $\text{Re } x_n$:

$$\text{Re } x_n \simeq -\left[\frac{3}{2}\pi\left(n - \frac{1}{4}\right)\right]^{2/3}, \quad (4.108)$$

Для «слабо связанных состояний» $||u_0| + x_n| \gg |x_n|$:

$$\text{Re } x_n \simeq -\left[\frac{3}{2}\pi\left(n - \frac{3}{4}\right)\right]^{2/3}, \quad (4.109)$$

Здесь и далее $n = 1, 2, \dots$

Существует лишь ограниченное число таких резонансов, определяемых глубиной u_0 .

Узкие резонансы $|\operatorname{Im} x_n| \ll |\operatorname{Re} x_n|$ с положительной вещественной частью $\operatorname{Re} x_n > 0$ в случае притягивательного потенциала и $\operatorname{Re} x_n > u_0$ в случае отталкивательного потенциала определяются асимптотическим уравнением (4.100):

$$\tan \left[\frac{2}{3}(x_n - u_0)^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right] = i \sqrt{\frac{x_n}{x_n - u_0}}. \quad (4.110)$$

Приближенные решения в этом случае выглядят так:

$$\operatorname{Re} x_n = \left[\frac{3}{2}\pi \left(n - \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} + |u_0| \Theta(U_0), \quad (4.111)$$

$$\operatorname{Im} x_n = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re} x_n}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{4 \operatorname{Re} x_n}{|u_0|} - \frac{|u_0|}{4 \operatorname{Re} x_n} \right). \quad (4.112)$$

Здесь $\Theta(U_0)$ равен единице для отталкивательного потенциала и нулю для притягивательного потенциала.

Формально, существует бесконечное количество таких надбарьерных резонансов. Однако, для больших n асимптотические разложения функций Бесселя (4.84), (4.88) не применимы, поскольку не выполняется условие $|\mu - \mu_0| \ll \mu_0$. В этом случае нужно вычислять точные значения S -матрицы из уравнения (4.82).

Соответствующие резонансам комплексные угловые моменты μ_n :

$$\mu_n = \pm \left[\mu_0 - x_n \left(\frac{\mu_0}{2} \right)^{1/3} \right] \quad (4.113)$$

Они расположены симметрично в плоскости μ относительно начала координат $\mu = 0$.

Долгоживущие квази-связанные состояния и узкие надбарьерные резонансы играют ключевую роль в описании эффекта шепчущей галереи [140].

Другой тип асимптотических разложений следует использовать, если аргумент $|\arg(z)| \geq 2\pi/3$. Для исследования этого случая сделаем замену:

$$x_n = -z_n \exp(i\pi/3) \quad (4.114)$$

Используем следующие соотношения для функций Эйри:

$$\text{Ai}(-z) = e^{i\pi/3} \text{Ai}(ze^{i\pi/3}) + e^{-i\pi/3} \text{Ai}(ze^{-i\pi/3}), \quad (4.115)$$

$$\text{Bi}(-z) = e^{-i\pi/6} \text{Ai}(ze^{i\pi/3}) + e^{i\pi/6} \text{Ai}(ze^{-i\pi/3}), \quad (4.116)$$

тогда уравнение (4.100) преобразуется к виду:

$$\frac{\text{Ai}'(u_0 + z_n e^{i\pi/3})}{\text{Ai}(u_0 + z_n e^{i\pi/3})} = \frac{\text{Ai}'(-z_n)}{\text{Ai}(-z_n)} \quad (4.117)$$

Для $|z_n| \gg 1$ получаем асимптотическое уравнение:

$$\tan\left(\frac{2}{3}z_n^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{z_n e^{i\pi/3} + u_0}{z_n}} \quad (4.118)$$

Его решение для больших n :

$$z_n = \left\{ \frac{3\pi}{2} \left[n - \frac{3}{4} + \arctan(e^{i\pi/6}) \right] \right\}^{2/3} \quad (4.119)$$

Соответствующие полюса Редже даются выражениями:

$$\mu_n = \pm \left(\mu_0 + z_n e^{i\pi/3} \left(\frac{\mu_0}{2} \right)^{1/3} \right) \quad (4.120)$$

Существует бесконечное количество резонансов этого типа; их мнимая часть быстро растет с n . Эти резонансы соответствуют так называемым поверхностным волнам. Время жизни этих состояний существенно меньше, чем время жизни ранее введенных состояний.

Положения полюсов в верхней полуплоскости комплексного момента μ показаны на Рис.4.10 и 4.11 для притягивательного и отталкивательного потенциалов соответственно.

4.4.4. Вычеты

Метод комплексного углового момента предполагает вычисление вычетов в соответствующих полюсах Редже S -матрицы. Получим асимптотические выражения для вычетов (4.92).

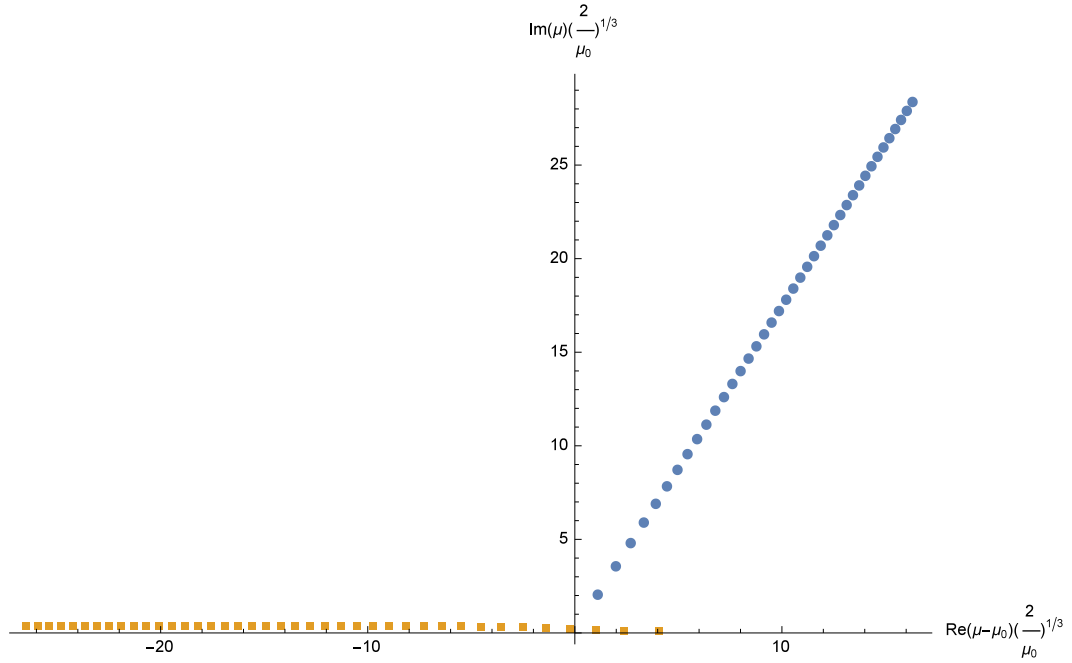


Рис. 4.10. Положение полюсов Редже для притягивательного потенциала. Показаны полюса, отвечающие вблизи порога состояниям. 1- узкие состояния (шепчущая галерея), 2- поверхностные волны, 3- узкие надбарьерные резонансы.

В окрестности полюса x_n S-матрицу можно записать в переменной x следующим образом:

$$S(x) \approx \frac{T^-(x_n)}{T^{+'}(x_n)(x - x_n)} \quad (4.121)$$

Функция T в приведенном выше выражении:

$$T^\pm(x) = \text{Ai}(-u_0 - x) (\text{Bi}'(-x) \pm i \text{Ai}') - \text{Ai}'(-u_0 - x) (\text{Bi}(-x) \pm i \text{Ai}(-x)) \quad (4.122)$$

Таким образом вычет имеет вид:

$$\text{Res } S(x_n) = \frac{T^-(x_n)}{T^{+'}(x_n)} \quad (4.123)$$

Указанное выражение может быть далее упрощено с учетом того, что x_n - корень уравнения $T^+(x_n) = 0$. Для числителя (4.123) получим выражение:

$$T^-(x_n) = -\frac{2i}{\pi} \frac{\text{Ai}(-u_0 - x_n)}{\text{Bi}(-x_n) + i \text{Ai}(-x_n)} \quad (4.124)$$

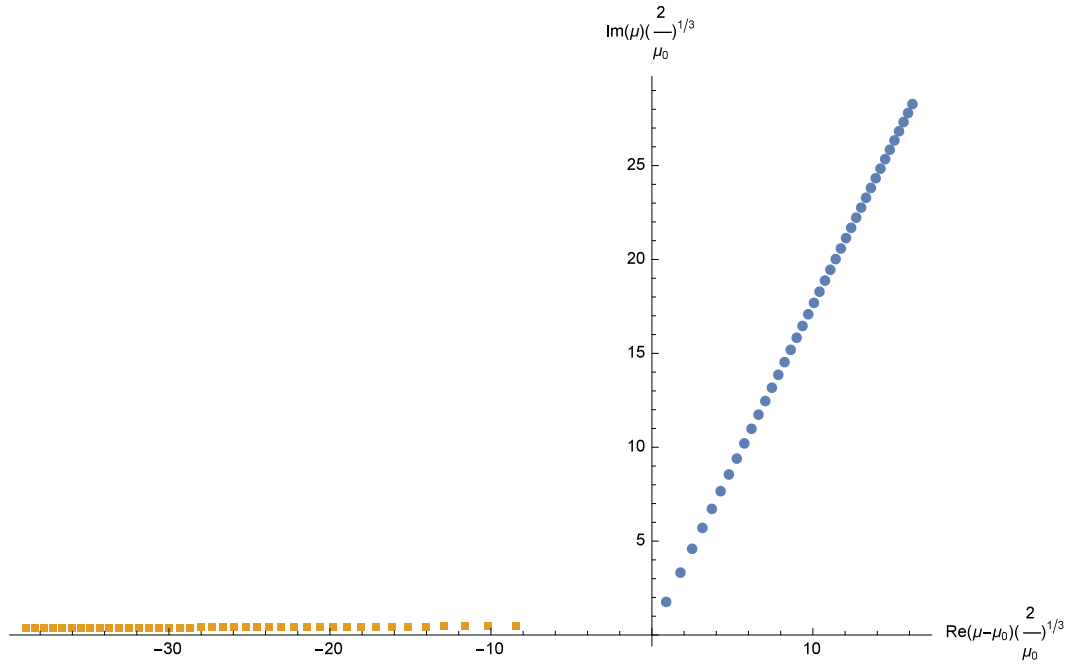


Рис. 4.11. Положение полюсов Редже для отталкивательного потенциала. Показаны полюса, отвечающие вблизипороговым состояниям. 2- поверхностные волны, 3- узкие надбарьерные резонансы

В выводе этого уравнения мы учли, что Вронскиан $Ai'(-x) Bi(-x) - Bi'(-x) Ai(-x) = 1/\pi$.

Для знаменателя (4.123) получим :

$$T^{+'}(x_n) = -u_0 Ai(-u_0 - x_n) (Bi(-x_n) + i Ai(-x_n)) \quad (4.125)$$

Для получения указанного выражения следует использовать уравнение для функций Эйри: $Ai''(-x) = x Ai(-x)$.

Собирая вместе полученные результаты, получим уравнение для вычетов:

$$\text{Res } S(x_n) = \frac{2i}{\pi u_0 (Bi(-x_n) + i Ai(-x_n))^2} \quad (4.126)$$

4.4.5. Физический смысл полюсов Редже

Для выяснения физического смысла полюсов Редже мы воспользуемся ранее выведенными уравнениями для приповерхностных состояний, используя линеаризацию центробежного потенциала вблизи поверхности $\xi = \rho - R \ll R$. В первом порядке по ξ/R получим следующее выражение:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + U_0 \Theta(-\xi) + \hbar^2 \frac{\mu^2 - 1/4}{2MR^2} \left(1 - \frac{2\xi}{R} \right) - E \right] \chi_\mu(\xi) = 0. \quad (4.127)$$

Вводя новую переменную:

$$\varepsilon_\mu = E - \hbar^2 \frac{\mu^2 - 1/4}{2MR^2} \simeq \frac{(MvR)^2 - \hbar^2 \mu^2}{2MR^2} \quad (4.128)$$

получим радиальное уравнение:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + U_0 \Theta(-\xi) - \frac{Mv^2}{R} \xi - \varepsilon_\mu \right] \chi_\mu(\xi) = 0 \quad (4.129)$$

Уравнение (4.129) описывает движение в эффективном поле $a = -v^2/R$ и потенциале взаимодействия с поверхностью $U_0 \Theta(-\xi)$. Эскиз потенциала показан на Рис. 4.12. Величина ε_μ играет роль радиальной энергии при условии $|\mu - \mu_0| \ll \mu_0$.

Указанное уравнение (4.129) в единицах l_0 и ε_0 имеет вид:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u_0 \Theta(-x) - x - \lambda_\mu \right] \chi_\mu(x) = 0. \quad (4.130)$$

Здесь $x = \xi/l_0$, $\lambda_\mu = \varepsilon_\mu/\varepsilon_0$ и $u_0 = U_0/\varepsilon_0$.

Регулярное решение (4.130) дается функцией Эйри $\text{Ai}(\xi)$:

$$\chi_\mu(x) \sim \begin{cases} \text{Ai}(-x - \lambda_\mu) & \text{if } x > 0 \\ \text{Ai}(u_0 - x - \lambda_\mu) & \text{if } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.131)$$

Сшивая внешнее решение (налетающая и рассеянная волна при $\xi > 0$) и внутренне решение ($\xi < 0$) в точке $\xi = 0$ получим уравнение (4.100).

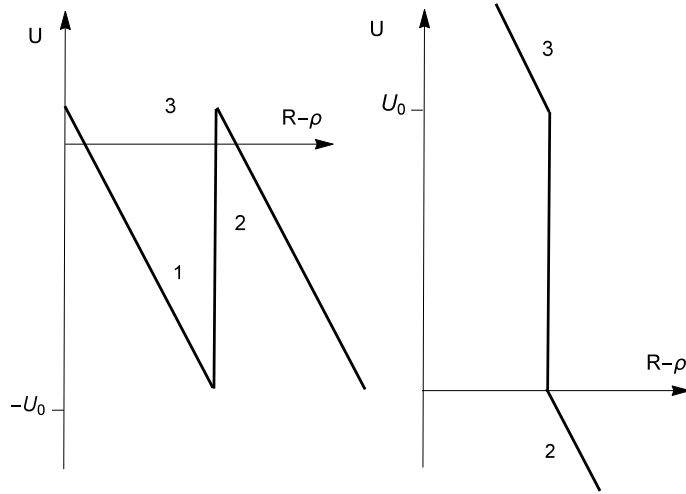


Рис. 4.12. Эскиз потенциала (притяжение- левый, отталкивание- правый). Скачок потенциала при $\xi = 0$ равен U_0 . Наклон при $\xi \neq 0$ определяется центробежным ускорением $a = v^2/R$. Области, ответственные за образование различных типов резонансов: 1 – долгоживущие квазисвязанные состояния, 2 – поверхностные волны, 3 – узкие надбарьерные резонансы.

Для притягивательного потенциала это квази-связанные состояния внутри эффективного потенциала. Они определяются уравнением (4.105). Квазистационарный характер таких состояний определяется вероятностью туннелирования через барьер (Fig.4.12), высота которого u_0 зависит от тангенциальной скорости:

$$u_0 = \frac{U_0}{\varepsilon_0} = \frac{2MU_0}{\hbar^2 k^2} \left(\frac{\mu_0}{2} \right)^{2/3} \quad (4.132)$$

Другой тип состояний, определяемых (4.110), представляют собой узкие надбарьерные резонансы. Причина их существования была детально выяснена ранее и состоит в надбарьерном отражении медленных атомов от резкого края потенциала [53, 107].

Наконец, резонансы, описываемые уравнением (4.118) относятся к типу поверхностных волн. Они могут быть объяснены как эффект проникновения под барьер и отражения от резкого края потенциала под барьером.

Заключение

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов физики взаимодействия ультрахолодного антиводорода с веществом, в которых ключевую роль играет учет квантовых свойств движения антиатомов. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Развита последовательный квантовый формализм расчета сечений взаимодействия ультрахолодного антиводорода и водорода, включая упругое сечение, сечение перестройки, сечения передачи спина, проведен численный расчет соответствующих сечений и длин рассеяния; выяснены физические особенности процесса взаимодействия ультрахолодного антиводорода и водорода. Важнейшей такой особенностью оказывается высокая степень упругости реакции $\exp(-\delta_2) = 0.75$. Это обстоятельство, наряду с эффектом поляризационного взаимодействия с асимптотикой $-6.5/r^6$ приводит к существованию богатого спектра вблизипороговых состояний системы $H\bar{H}$; вычислены положения полюсов S-матрицы в плоскости комплексного импульса вблизи порога, выяснена их динамика при изменении параметров задачи. Выяснена роль сильного взаимодействия, произведен расчет сечений и уровней вблизипороговых состояний с учетом сильного взаимодействия. Показано, что роль сильного взаимодействия является определяющей в процессе передачи спина при столкновениях $H\bar{H}$. Показано, что наличие вблизипороговых состояний системы $H\bar{H}$ приводит к резкому увеличению сечений реакции передачи спина (на 9 порядков по сравнению с прямой ядерной реакцией). Показано, что энергетический ход реакций передачи спина определяется тождественностью сверхтонкой структуры водорода и антиводорода.
2. Предсказан эффект отражения ультрахолодного антиводорода от материальной поверхности, вычислены коэффициенты отражения при

различных энергиях для идеально проводящей поверхности, кремния, силики и тонких пленок из этих веществ. Показана возможность длительного существования ультрахолодного антиводорода в контакте с материальными поверхностями. Исследованы состояния антиводорода в волноводах, рассмотрена проблема транспорта через волновод и использование такого рода экспериментов для определения коэффициента отражения антиводорода от поверхностей.

3. Предсказано существование долгоживущих квантовых состояний антиводорода в гравитационном поле Земли вблизи материальной поверхности; получен спектр и время жизни таких состояний. Предложен метод резонансной спектроскопии гравитационных состояний для прецизионного измерения гравитационной массы антиводорода; получены выражения для вероятности резонансных переходов и динамического сдвига. Предложен метод исследования интерференции гравитационных состояний по временной зависимости аннигиляционных состояний. Установлена связь между импульсным распределением начального состояния и временным распределением событий в баллистическом эксперименте, предложен метод прецизионного измерения такого распределения.
4. Предсказан эффект шепчущей галереи для антиводорода; рассчитаны энергии и времена жизни состояний шепчущей галереи, установлена их связь с гравитационными состояниями. Рассмотрен эффект интерференции состояний шепчущей галереи, показана возможность прецизионных измерений коэффициента отражения антиводорода от поверхности на основе интерференционного метода. Рассмотрен новый тип устройств - резонатор шепчущей галереи для антиатомов, рассчитан спектр мод шепчущей галереи в таком резонаторе, показана возможность использования таких устройств для измерения гравитационных свойств антиатомов.

Благодарности Автор выражает признательность О.Д. Далькарову за ценные замечания и неоценимую помощь при подготовке диссертации, В.В. Несвижевскому за многочисленные плодотворные обсуждения.

Литература

1. G. Gabrielse *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 1317
2. G. Baur, *Phys. Lett. B* **31** I (1993) 343
3. H. Poth *et al.*, *Hyperfine Interactions* **44** (1988) 259
4. Baur, G. *et al.* (1996). *Phys. Lett. B* **368**, p. 251
5. G. Budker and A.N. Skrinsky, *Sov. Phys. Usp.* **21** (1978) 227;
6. H. Amoretti *et al.* *Nature (London)*, 419:456, 2002.
7. G. Gabrielse *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 89:213401, 2002.
8. The ALPHA Collaboration and A. E. Charman. Description and first application of a new technique to measure the gravitational mass of antihydrogen. *Nature Communications*, 4:1785, April 2013.
9. Parthey, C. G., Matveev, A., Alnis, J., Bernhardt, B., Beyer, A., Holzwarth, R., Maistrou, A., Pohl, R., Predehl, K., Udem, Th., Wilken, T., Kolachevsky, N., Abgrall, M., Rovera, D., Salomon, C., Laurent, P. and Hansch, T. W. Improved Measurement of the Hydrogen 1S-2S Transition Frequency. *Phys. Rev. Lett.*, 107:203001, 2011.
10. P. Perez and Y. Sacquin. The GBAR experiment: gravitational behaviour of antihydrogen at rest. *Classical and Quantum Gravity*, 29(18), September 2012.
11. D. P. van der Werf. The GBAR experiment. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 30:1460263, January 2014.
12. A. Kellerbauer, M. Amoretti, A.S. Belov, G. Bonomi, I. Boscolo, R.S. Brusa, M. Büchner, V.M. Byakov, L. Cabaret, C. Canali, C. Carraro, F. Castelli, S. Cialdi, M. de Combarieu, D. Comparat, G. Consolati, N. Djourelou, M. Doser, G. Drobychev, A. Dupasquier, G. Ferrari, P. Forget, L. Formaro, A. Gervasini, M.G. Giammarchi, S.N. Gninenko, G. Gribakin, S.D. Hogan, M. Jacquy, V. Lagomarsino, G. Manuzio,

- S. Mariazzi, V.A. Matveev, J.O. Meier, F. Merkt, P. Nedelec, M.K. Oberthaler, P. Pari, M. Prevedelli, F. Quasso, A. Rotondi, D. Sillou, S.V. Stepanov, H.H. Stroke, G. Testera, G.M. Tino, G. Tréneç, A. Vairo, J. Vigué, H. Walters, U. Warring, S. Zavatarelli, and D.S. Zvezhinskij. Proposed antimatter gravity measurement with an antihydrogen beam. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms*, 266(3):351–356, February 2008.
13. AEGIS Collaboration and Marco G. Giammarchi. AEGIS at CERN: Measuring Antihydrogen Fall. *Few-Body Systems*, 54(5-6):779–782, May 2012.
 14. C.J. Batty (Rutherford) ExoticAtoms: A Review
Sov.J.Part.Nucl. 13 (1982) 71
 15. B.Kerbikov Pisma Zh.Eksp.Teor.Fiz. 37, 118 (1983); JETP Lett.(USSR) 37, 146 (1983)
 16. E.Fermi, E.Teller. The capture of negative mesotrons in matter *Phys.Rev.* 72, p.399, 1947.
 17. A.S. Wightman. *Phys.* 77 (1950) 521.
 18. D. L. Morgan, Jr. and V. W. Hughes. *Phys. Rev. D* 2, 1389,(1970).
 19. J.S. Briggs, P.T. Greenland and E.A. Soloviev The capture of slow antiprotons in helium, neon and argon *Hyperfine Interactions* 119 (1999) 235.
 20. W. Kolos, D.L. Morgan, D.M. Schrader, and L. Wolniewicz. *Phys. Rev. A*, 11:1792, 1975.
 21. E.A. Soloviev Nonadiabatic transitions in atomic collisions *UFN* 157 (3), 437 (1989).
 22. E.L. Surkov G.V. Shlyapnikov, J.T.M. Walraven. *Hyperfine Interactions*, 76:31, 1993.
 23. P.A. Sinha and A.S. Ghosh. *Europhys. Lett.*, 49:558, 2000.

24. P.K. Sinha, P. Chaudhuri, and A.S. Ghosh. *J. Phys. B*, 67:052509, 2003.
25. A. Voronin and J. Carbonell. *Hyperfine Interactions*, 115:143, 1998.
26. E. Armour and C.W. Chamberlain. *Few-Body Systems*, 31:101, 2002.
27. P. Froelich. *Quantum Chemistry of Antimatter. Adv. Qunt. Chem.*, 41:185, 2002 and the references therein.
28. S. Jonsell, A. Saenz, P. Froelich, A. Dalgarno, and B. Zygelman. *Phys. Rev. A*, 64:052712, 2001.
29. A. Voronin and J. Carbonell. *Phys. Rev. A*, 57:4335, 1998.
30. A. Voronin and J. Carbonell. *Nucl. Phys. A*, 689:529, 2001.
31. A. Voronin and J. Carbonell. *Nucl. Instr. and Methods B*, 214:139, 2004.
32. E.A.G. Armour, C.W. Chamberlain, Y. Liu, and G.D.R. Martin. *Nucl. Instr. Meth. B*, 221:1, 2004.
33. K. Strasburger. *J. Phys. B*; 37:4483, 2004.
34. P. Froelich. *Adv. Qunt. Chem.*, 41:185, 2002.
35. P. Froelich, B. Zygelman, A. Saenz, S. Jonsell, S. Eriksson, and A. Dalgarno. *Few-Body Systems*, 34:63, 2004.
36. S. Jonsell, A. Saenz, P. Froelich, B. Zygelman, and A. Dalgarno. *J. Phys. B*, 37:1195, 2004.
37. B. Zygelman, A. Saenz, P. Froelich, and S. Jonsell. *Phys. Rev. A*, 69:042715, 2004.
38. A. Voronin and J. Carbonell. *Nucl. Phys. A*, 689:529, 2001.
39. Y Liu E A G Armour and A Vigier. *J.Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 38, 2005.
40. K. Strasburger. *J. Phys. B*, 35, 2002.
41. B.Kerbikov, A.Stavinsky, V.Fedotov
Model-independent view on the low-mass proton-antiproton enhancement.
Phys.Rev. C 69, 055205 (2004)

42. Rubtsova O.A., Kukulín V.I., Pomerantsev V.N. Wave-packet continuum discretization for quantum scattering *Annals of Physics*, v.360, p.613
43. Y. Kino, M. Kamimura Non-adiabatic calculation of muonic atom-nucleus collisions. *Hyperfine Interactions* 82 (1993) 45.
44. J.E. Lennard-Jones. *Trans. Faraday Soc.*, 28:333, 1932.
45. H. Friedrich, G. Jacoby, and C.G. Meister. *Phys. Rev. A*, 65:032902, 2002.
46. H.B. Casimir and D.Polder. *Phys. Rev.*, 73:360, 1948.
47. I.E.Dzyaloshinskii, E.M. Lifshitz, and L.P. Pitaevskii. *Adv. Phys.*, 10:165, 1960.
48. J.F. Babb, G.L. Klimchitskaya, and V.M. Mostepanenko. *Phys. Rev. A*, 70:042901, 2004.
49. A. Lambrecht, P. A. Maia Neto, and S. Reynaud *New J. Phys.* 8, 243 (2006)
50. T. Emig, N. Graham, R. L. Jaffe, and M. Kardar *Phys. Rev. Lett.* 99, 170403 (2007)
51. G. Dufour, A. Gerardin, R. Guerout, A. Lambrecht, V. V. Nesvizhevsky, S. Reynaud, and A. Yu. Voronin *Phys. Rev. A* 87, 012901 (2013)
52. G. Dufour, R. Gu?rout, A. Lambrecht, V. V. Nesvizhevsky, S. Reynaud, and A. Yu. Voronin. *Phys. Rev. A*, 87:022506, 20013.
53. A.Yu. Voronin, P.Froelich, and V.V. Nesvizhevsky. *Phys. Rev. A*, 83:032903, 2011.
54. A. Lambrecht, I. Pirozhenko, L. Duraffourg, and P. Andreucci *Europhys. Lett.* 77, 44006 (2007).
55. R. Messina, D. A. R. Dalvit, P. A. Maia Neto, A. Lambrecht, and S. Reynaud. *Phys. Rev. A* 80, 022119 (2009).
56. C. Koughia, S. Kasap, and P. Capper *Springer Handbook of Electronic and Photonic Materials*, Springer Handbook Series (Springer, Berlin, 2006).

57. V.V Nesvizhevsky, H Börner, A.M Gagarski, G.A Petrov, A.K Petukhov, H Abele, S Bäblier, T Stöferle, and S.M Soloviev. Search for quantum states of the neutron in a gravitational field: gravitational levels. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 440(3):754–759, February 2000.
58. V.V. Nesvizhevsky H.G. Boerner A.K. Petoukhov H. Abele S. Baeßler F.J. Rueß Th. Stoeferle A. Westphal A.M. Gagarski G.A. Petrov and A.V. Strelkov. *Nature*, 415:297, 2002.
59. V.V. Nesvizhevsky *et al.* *Phys.Rev.D*, 67:102002, 2003.
60. V. V. Nesvizhevsky, A. K. Petukhov, H. G. Borner, T. A. Baranova, A. M. Gagarski, G. A. Petrov, K. V. Protasov, A. Y. Voronin, S. Baessler, H. Abele, A. Westphal, and L. Lucovac. Study of the neutron quantum states in the gravity field. *European Physical Journal C*, 40(4):479–491, April 2005. WOS:000231122900004.
61. A. Yu. Voronin, H. Abele, S. Baeßler, V. V. Nesvizhevsky, A. K. Petukhov, K. V. Protasov, and A. Westphal. Quantum motion of a neutron in a waveguide in the gravitational field. *Physical Review D*, 73(4):044029, February 2006.
62. A.Yu. Voronin *et al.* *Phys. Rev. D*, 73:044029, 2006.
63. Tobias Jenke, David Stadler, Hartmut Abele, Peter Geltenbort. Q-BOUNCE Experiments with quantum bouncing ultracold neutrons. *NIM A*, 611, 318 (2009).
64. S. Baessler, V.V. Nesvizhevsky, G.Pignol, K.V. Protasov, and A.Yu. Voronin. *Nucl. Instr. Meth. A*, 611:149, 2009.
65. Valery V. Nesvizhevsky, Alexei Yu. Voronin, Robert Cubitt, Konstantin V. Protasov Neutron whispering gallery *Nature Physics* 6, 114 - 117 (2010)
66. G.N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, 1922.

67. B. Zygelman, A. Saenz, P. Froelich, and S. Jonsell. *Phys. Rev. A*, 69:042715, 2004.
68. P. Froelich, S. Jonsell, A. Saenz, B. Zygelman, and A. Dalgarno. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4577, 2000.
69. A. Yu. Voronin and P. Froelich. *Phys. Rev. A*, 77:022505, 2008.
70. M. Abramowitz and I.E. Stegun. *Handbook of mathematical Functions*. Dover Publ., New York, 1965.
71. V.V. Flambaum G.F.Gribakin. *Phys. Rev. A*, 48:546, 1993.
72. Bo Gao. *J.Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 37:4273, 2004.
73. G. Gabrielse *et al.* *Phys. Rev. Lett.*, 89:233401, 2002.
74. T.L. Trueman. *Nucl. Phys.*, 26:57, 1961.
75. J. Carbonell, J.-M. Richard, and S. Wycech. *Z. Phys. A -Hadrons and Nuclei*, 343:325, 1998.
76. M. Kohno and W. Weise. *Nucl. Phys. A*, 454:429, 1986.
77. I.A. Yu, J.M. Doyle, J.C. Sandberg, C.L. Cesar, D. Kleppner, and T.J. Greytak. *Phys. Rev. Lett.*, 71:1589, 1993.
78. V.B. Berestetskii and L.P. Pitaevskii and E.M. Lifshitz. *Quantum Electrodynamics: Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics v 4*. Butterworth-Heinemann, 1982.
79. H.T.C. Stoof, J.M.V.A. Koelman, and B.J. Verhaar. *Phys. Rev. B*, 38:4688, 1988.
80. B. Zygelman, A. Dalgarno, M. J. Jamieson, and P. C. Stancil. *Phys. Rev. A*, 67:042715, 2003.
81. Yu.N. Demkov and V.N. Ostrovskii. *Zero-Range Potentials and Their Applications in Atomic Physics*.
82. R.G. Newton. *Scattering Theory of Waves and Particles*. Springer-Verlag, New York, 1982.
83. O.D. Dalkarov and K.V. Protasov. *Phys. Lett.*, page 117, 1992.

84. M. Marinescu and L. You. *Phys. Rev. Lett.*, 81:4596, 1998.
85. E. Tiesinga, B.J. Verhaar, and H.T.C. Stoof. *Phys. Rev. A*, 47:4114, 1993
86. Rabi, I. I., Millman, S., Kisch, P., and Zacharias, J. R. The molecular beam resonance method for measuring nuclear magnetic-Moments. The magnetic moments of Li-3(6), Li-3(7) and F-9(19) *Phys. Rev.* **55**, p. 0526,(1939).
87. F. Shimizo. *Phys. Rev. Lett.*, 86:987, 2001.
88. J.H. Shirley, *Phys. Rev.* **138**, 979 (1965).
89. G. Dufour, P. Debu, A. Lambrecht, V. V. Nesvizhevsky, S. Reynaud, and A. Yu Voronin. Shaping the distribution of vertical velocities of antihydrogen in GBAR. *European Physical Journal C*, 74(1):2731, January 2014.
90. T. A. Pasquini, Y. Shin, C. Sanner, M. Saba, A. Schirotzek, D. E. Pritchard, and W. Ketterle. *Phys.Rev.Lett*, 93:160406, 2004.
91. M. Bordag, U. Mohideen, and V.M. Mostepanenko. *Phys. Rep.*, 353:1, 2001.
92. A. Landragin et al. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1464, 1996.
93. C.I. Sukenik et al. *Phys. Rev. Lett.*, 70:560, 1993.
94. A. Shih and V.A. Parsegian. *Phys. Rev. A*, 12:835, 1975.
95. H. Friedrich and J. Trost. *Physics Reports*, 397:359, 2004.
96. A. Jurisch and h. Friedrich. *Phys. Rev. A*, 70:032711, 2004.
97. H. Friedrich and A. Jurisch. *Phys. Rev. Letters*, 92:103202.
98. M. Marinescu, A. Dalgarno, and J.F. Babb. *Phys. Rev. A*, 55:1530, 1997.
99. A. Yu. Voronin. *Phys. Rev. A*, 67:062706, 2003.
100. V. V. Babikov. *The method of phase functions in quantum mechanics*. Moscow: Nauka (in Russian), 1967.
101. F. Calogero. *Phase Approach to Potential Scattering*. New-York: Academic, 1967.

102. S. K. Savvinykh V. L. Prokovskii and F. K. Ulinich. *Sov.Phys. JETP*, 34:879, 1958.
103. S. K. Savvinykh V. L. Prokovskii and F. K. Ulinich. *Sov.Phys. JETP* 34, 34:1119, 1958.
104. T. Berggren. *Nucl. Phys.*, page 265, 1968.
105. M. Abramowitz and I.A. Stegun (eds.). *Handbook of Mathematical Functions*, 10th edition. Dover Publications, New York, 1972.
106. V.V. Nesvizhevsky *et al.* *Nature*, 415:297, 2002.
107. A.Yu. Voronin, P. Froelich, and B. Zygelman. *Phys. Rev. A*, 72:062903, 2005.
108. P.A. Macri and R.O. Barrachina. *Phys. Rev. A*, 65:062718, 2002.
109. V. V. Nesvizhevsky, G. Pignol, and K. V. Protasov. *Phys. Rev. D*, 77:034020, 2008.
110. R.W. Robinett. *Phys. Rep.*, 392:1, 2004.
111. M.Kreuz *et.al.* *Nucl.Instr.Meth A*, 611:326, 2009.
112. A. Voronin *et al.* *Phys.Rev. D*, 73:044029, 2006.
113. V.V. Nesvizhevsky *et al.* *Eur. Phys. J C*, 40:479, 2005.
114. C.L. Cesar *et al.* *AIP Conf. Proc.*, 770:33, 2005.
115. G. Gabrielse *et al.* *CERN-SPSC-2010-006 / SPSC-SR-057*.
116. R. Adhari *et al.* *Phys. Rev. A*, 75:063613, 2007.
117. A. Westphal *et al.* *Europ.Phys. J. C*, 51:367, 2007.
118. V.V. Nesvizhevsky. *Physics-Uspekhi*, 53:645, 2010.
119. V.V. Nesvizhevsky, A.Yu. Voronin, R. Cubitt, and K.V. Protasov. *Nature Physics*, 6:114, 2010.
120. R. Cubitt V.V.Nesvizhevsky K.V.Protasov and A.Yu. Voronin. *New J. Phys.*, 12:113050, 2010.
121. J.W. Strutt Baron Rayleigh. *The Theory of Sound, v.2.* Macmillan, London, 1878.

122. G. Mie. *Ann. Physik*, 25:371, 1908.
123. P. Debye. *Ann. Physik*, 30:57, 1909.
124. A.N. Oraevsky. *Quant. Electron.*, 32:377, 2002.
125. K.J. Vahala. *Nature*, 424:839, 2003.
126. D. Meschede, H.Walther, and G. Muller. *Phys. Rev. Lett.*, 54:551, 1985.
127. H. Wallis, J.Dalibard, and C. Cohen-Tannoudji. *Appl. Phys.B*, 54:407, 1992.
128. C.G. Aminoff et.al. *Phys. Rev. Lett.*, 71:3083, 1993.
129. H. Mabichi and H.J. Kimble. *Optics Letters*, 19:749, 1994.
130. D. W. Vernooy and H.J. Kimble. *Phys. Rev. A*, 55:1239, 1997.
131. R.P. Bertram et.al. *Phys. Rev. A*, 63:053405, 2001.
132. M.P. Klembovsky, M.L. Gorodetsky, and Th. Becker. *Phys. Lett. A*, 372:5246, 2008.
133. D. J. Alton, N. P. Stern, Takao Aoki, E. Ostby H. Lee, K. J. Vahala, and H. J. Kimble. *Nature Physics*, 7:159, 2011.
134. V.V. Nesvizhevsky, A.K.Petukhov, K.V.Protasov, and A.Yu.Voronin. *Phys.Rev.A*, 78:033616, 2008.
135. R. Cubitt et.al. *Nucl.Instr. Meth. A*, 611:322, 2009.
136. V.V.Nesvizhevsky and A.Yu. Voronin. *Comptes Rendus Physique*, 12:791, 2011.
137. V.V. Nesvizhevsky, A.Yu. Voronin, R.Cubitt, and K.V. Protasov. *J. Phys. Conf. Ser*, 340:012020, 2012.
138. A.Yu. Voronin and P. Froelich. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, 38:L 301, 2005.
139. Antoine Gerardin, Romain Guerout, Astrid Lambrecht, Serge Reynaud, V.V. Nesvizhevsky, and A.Yu. Voronin. *for Gbar Collaboration project, unpublished.*

140. V.V. Nesvizhevsky, R. Cubitt, K.V. Protasov, and A.Yu. Voronin. *New J. Phys.*, 12:113050, 2010.
141. H.M. Nussenzweig. *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering*. Cambridge University Press, 1992.
142. L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Quantum Mechanics. Nonrelativistic Theory*. Pergamon, London, 1965.
143. De Alfaro V. and Regge T. *Potential scattering*. North-Holland, 1965.
144. H. M. Nussenzweig. *Causality and Dispersion Relations*. Academic New York, 1972.
145. Yves Decanini Antoine Folacci. *Phys. Rev.A*, 67:042704, 2003.
146. M. Abramowitz and I.E. Stegun. *Handbook of mathematical Functions*. Dover Publ., New York, 1965.
147. E. Hiyama, Y. Kino, and M. Kamimura. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 51:223, 2003.
148. V.A. Karmanov, K.V. Protasov, and A. Yu. Voronin. *Eur. Phys. J.*, 8:A 429, 2000.
149. G.B. Andresen et.al. *Nature*, 468:673, 2010.
150. Alpha Collaboration and A. E. Charman. *Nature Communications*, 4:1785, 2013.
151. P. Pérez *et al.* Proposal to measure the gravitational behaviour of antihydrogen at rest gbar. 2011. <http://cdsweb.cern.ch/record/1386684/files/SPSC-P-342.pdf>.
152. G. Gabrielse *et al.* *CERN-SPSC-2010-006 / SPSC-SR-057*.

Приложение А.

А.1. Построение базиса

Рассмотрим построение базиса для диагонализации Гамильтониана 4 тел в области перестройки [147]) с использованием гауссовых функций.

Волновая функция 4 тел с заданным значением полного момента J и его проекции M представлена в виде суммы членов, описывающих различные асимптотические каналы $c = 1, 2$ в соответствующих координатах Якоби:

$$\bar{\Psi}_{JM} = \sum_{c,\alpha} A_{c,\alpha} \phi_{\alpha,c}^{JM}(\mathbf{r}_c, \mathbf{R}_c, \rho_c) \quad (\text{A.1})$$

здесь α - набор канальных квантовых чисел n, l . Мы ограничимся рассмотрением случая полного момента $J = 0$, поэтому:

$$\phi_{\alpha,c}(\mathbf{r}_c, \mathbf{R}_c, \rho_c) = \sum_{\lambda=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \sum_{\mu m} \sum_{m_1 m_2} (l_1 m_1, l_2 m_2 | \lambda \mu)(\lambda \mu, l m | 00) \varphi_{c1}^{n_1, l_1}(\mathbf{r}_{c1}) \varphi_{c2}^{n_2, l_2}(\mathbf{r}_{c2}) \varphi_c^{n, l}(\mathbf{r}_c) \quad (\text{A.2})$$

здесь $(l_1 m_1, l_2 m_2 | \lambda \mu)(\lambda \mu, l m | 00)$ - коэффициент Клебша-Гордана.

Функция $\varphi_{c_i}^{n_i, l_i}(\mathbf{r}_{c_i})$ раскладывается по Гауссовым функциям:

$$g_{nlm}(\mathbf{r}; \nu) = N_l(\nu) r^l e^{-\nu r^2} Y_{lm}(\hat{r}), \quad (\text{A.3})$$

здесь ν - комплексный параметр, а нормировочная константа N дается выражением :

$$N_l(\nu) = \frac{2(\nu + \nu^*)^{l+\frac{3}{2}}}{\Gamma(l + \frac{3}{2})}. \quad (\text{A.4})$$

Комплексный параметр ν зависит от n и выбирается в виде:

$$\text{Re } \nu = \frac{1}{r_{min}^2} \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{2(n-1)/(n_m-1)} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Im } \nu = \frac{\pi}{2r_{min}^2} \left(\frac{r_{min}}{r_{max}} \right)^{2(n-1)/(n_m-1)} \quad (\text{A.6})$$

Здесь r_{min}, r_{max} - свободные параметры, определяющие набор базисных Гауссовых функций, n_{max} - число базисных функций.

Коэффициенты разложения $A_{c,\alpha}$ находятся из уравнения на собственные значения:

$$\widehat{H}\Psi_{JM} = E\Psi_{JM}$$

Таблица А.1

Набор базисных функций

Channel	\mathbf{r}_α	\mathbf{r}_β	\mathbf{r}_γ	l_α	l_β	l_γ	n_α^{max}	n_β^{max}	n_γ^{max}
$H\bar{H}$	\mathbf{r}_{ep}	$\mathbf{r}_{\bar{e}\bar{p}}$	$\mathbf{r}_{\bar{H}H}$	0	0	0	8	8	120
$H\bar{H}$	$\mathbf{r}_{e\bar{e}}$	$\mathbf{r}_{\bar{p}\bar{p}}$	\mathbf{r}_{PnPs}	1	1	0	8	8	120
$Pn - Ps$	\mathbf{r}_{ep}	$\mathbf{r}_{\bar{e}\bar{p}}$	$\mathbf{r}_{\bar{H}H}$	0	0	0	8	8	120

Таблица А.2

Параметры базисных функций.

Координата	Угловой момент	r_{min} а.у.	r_{max} а.у.	n^{max}	$\gamma_{1/2}^{max}$ а.у.
$\mathbf{r}_{ep}, \mathbf{r}_{\bar{e}\bar{p}}$	0	0.13	7.2	8	5.99
$\mathbf{r}_{ep}, \mathbf{r}_{\bar{e}\bar{p}}$	1	0.8	14.0	8	11.66
$\mathbf{r}_{e\bar{e}}$	0	0.35	20.0	8	16.65
$\mathbf{r}_{\bar{p}\bar{p}}$	0	0.00003	1.7	120	1.42
\mathbf{r}_{PnPs}	0	1.0000	6.6	8	5.49

В приведенной выше таблице введен дополнительный параметр $\gamma_{1/2}^{max}$, имеющей смысл полуширины при половине максимума наиболее широкого из Гауссианов в наборе базисных функций.

А.2. Симметрии волновой функции

Нерелятивистский гамильтониан 4 тел инвариантен относительно зарядового сопряжения (C), а волновая функция- симметричной или антисимметричной.

Поскольку мы будем интересоваться лишь полным угловым моментом равным 0, нас будут интересовать симметричные волновые функции.

В канале Н- \bar{N} C-сопряжение приводит к инверсии координаты $\tilde{\mathbf{R}}$, описывающей относительное положение центров масс атомов, а остальные координаты (\mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2) меняются местами.

$$\tilde{\mathbf{R}} \xrightarrow{C} -\tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{r}_1 \xrightarrow{C} \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2 \xrightarrow{C} \mathbf{r}_1, \quad (\text{A.7})$$

В соответствии с этим симметричный базис имеет вид:

$$\begin{aligned} \phi_{n0}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{m0}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2)\varphi_{k0}(\tilde{\mathbf{R}}) &\longrightarrow [\phi_{n0}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{m0}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2) + \phi_{m0}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{n0}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2)] \varphi_{k0}(\tilde{\mathbf{R}}) \\ \phi_{n1}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{m1}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2)\varphi_{k0}(\tilde{\mathbf{R}}) &\longrightarrow [\phi_{n1}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{m1}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2) + \phi_{m1}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{n1}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2)] \varphi_{k0}(\tilde{\mathbf{R}}) \\ \phi_{n1}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{m0}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2)\varphi_{k1}(\tilde{\mathbf{R}}) &\longrightarrow [\phi_{n1}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{m0}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2) - \phi_{m0}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{n1}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2)] \varphi_{k1}(\tilde{\mathbf{R}}) \\ \phi_{n0}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{m1}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2)\varphi_{k1}(\tilde{\mathbf{R}}) &\longrightarrow [\phi_{n0}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{m1}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2) - \phi_{m1}^H(\mathbf{r}_1)\phi_{n0}^{\bar{H}}(\mathbf{r}_2)] \varphi_{k1}(\tilde{\mathbf{R}}), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

второй индекс здесь отвечает парному угловому моменту (0 или 1).

Четность нуклонной функции φ_{kL} связана с угловым моментом L :

$$\varphi_{k0}(-\tilde{\mathbf{R}}) = +\varphi_{k0}(\tilde{\mathbf{R}}); \varphi_{k1}(-\tilde{\mathbf{R}}) = -\varphi_{k1}(\tilde{\mathbf{R}}). \quad (\text{A.9})$$

C угловым моментом нуклонов поэтому связана симметрия или антисимметрия лептонных волновых функций (A.2).

В канале Pn-Ps координата ρ не меняется при зарядовом сопряжении, а две другие координаты (\mathbf{r} и \mathbf{R}) инвертируются:

$$\rho \xrightarrow{C} \rho, \mathbf{r} \xrightarrow{C} -\mathbf{r}, \mathbf{R} \xrightarrow{C} -\mathbf{R} \quad (\text{A.10})$$

Четность позитрония и протония зависит от их угловых моментов, поэтому симметричный базис имеет вид:

$$\phi_{n0}^{\text{Ps}}(\mathbf{r})\phi_{k0}^{\text{Pn}}(\mathbf{R})\eta_{m0}(\rho), \phi_{n1}^{\text{Ps}}(\mathbf{r})\phi_{k1}^{\text{Pn}}(\mathbf{R})\eta_{m0}(\rho). \quad (\text{A.11})$$

Аналогично получаем антисимметричные базисные функции:

$$\begin{aligned} & [\phi_{n0}^{\text{H}}(\mathbf{r}_1)\phi_{m0}^{\text{H}}(\mathbf{r}_2) - \phi_{m0}^{\text{H}}(\mathbf{r}_1)\phi_{n0}^{\text{H}}(\mathbf{r}_2)] \varphi_{k0}(\widetilde{\mathbf{R}}) \\ & [\phi_{n1}^{\text{H}}(\mathbf{r}_1)\phi_{m1}^{\text{H}}(\mathbf{r}_2) - \phi_{m1}^{\text{H}}(\mathbf{r}_1)\phi_{n1}^{\text{H}}(\mathbf{r}_2)] \varphi_{k0}(\widetilde{\mathbf{R}}) \\ & [\phi_{n1}^{\text{H}}(\mathbf{r}_1)\phi_{m0}^{\text{H}}(\mathbf{r}_2) + \phi_{m0}^{\text{H}}(\mathbf{r}_1)\phi_{n1}^{\text{H}}(\mathbf{r}_2)] \varphi_{k1}(\widetilde{\mathbf{R}}) \\ & [\phi_{n0}^{\text{H}}(\mathbf{r}_1)\phi_{m1}^{\text{H}}(\mathbf{r}_2) + \phi_{m1}^{\text{H}}(\mathbf{r}_1)\phi_{n0}^{\text{H}}(\mathbf{r}_2)] \varphi_{k1}(\widetilde{\mathbf{R}}) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

и в канале Pn–Ps:

$$\phi_{n0}^{\text{Ps}}(\mathbf{r})\phi_{k1}^{\text{Pn}}(\mathbf{R})\eta_{m1}(\rho), \phi_{n1}^{\text{Ps}}(\mathbf{r})\phi_{k0}^{\text{Pn}}(\mathbf{R})\eta_{m1}(\rho). \quad (\text{A.13})$$

А.3. Преобразования координат

В дальнейшем нам понадобится выразить волновую функцию в различных якобиевских координатах. Переход между этими координатами задается формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{1}{2}\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{R} + \rho \\ \mathbf{r}_2 &= -\frac{1}{2}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{R} + \rho \\ \widetilde{\mathbf{R}} &= \frac{1}{m_{\text{H}}}\mathbf{r} + \frac{m_{\text{p}}}{m_{\text{H}}}\mathbf{R}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

здесь m_{p} и m_{H} массы протона и водорода.

Преобразования базисных функций при переходе от одних координат к другим осуществляются согласно следующим формулам:

$$e^{-\alpha r_1^2 - \beta \tilde{R}^2 - \gamma r_2^2} = e^{-\alpha r^2 - bR^2 - c\rho^2 - 2f\mathbf{r}\mathbf{R} - 2g\mathbf{r}\rho - 2h\mathbf{R}\rho} \quad (\text{A.15})$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{m_H^2}\beta + \frac{1}{4}\gamma & b &= \frac{1}{4}\alpha + \frac{m_p^2}{m_H^2}\beta + \frac{1}{4}\gamma & c &= \alpha + \gamma \\ f &= -\frac{1}{4}\alpha + \frac{m_p}{m_H}\beta - \frac{1}{4}\gamma & g &= \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma & h &= -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma. \end{aligned}$$

(A.16)

Базисные функции в канале Pn–Ps могут быть записаны в аналогичной форме ((A.15)), но с $f = g = h = 0$. Используя выражения для гауссова интеграла

$$\int e^{-\lambda x^2 + 2\xi xy} dx = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\lambda^2}{\xi} y^2\right) \quad (\text{A.17})$$

приходим к выражению

$$S_{ij}(\mathbf{R}) = \int \varphi_i^* \varphi_j d\mathbf{r} d\rho = \left(\frac{\pi^2}{ac - g^2}\right)^{3/2} \exp(-\eta R^2), \quad (\text{A.18})$$

где

$$\eta = \frac{abc + 2fgh - ah^2 - bg^2 - cf^2}{ac - g^2} \quad (\text{A.19})$$

и $a = a_i^* + a_j$, $b = b_i^* + b_j$,

$$\varphi_k = e^{-a_k r^2 - b_k R^2 - c_k \rho^2 - 2f_k \mathbf{r}\mathbf{R} - 2g_k \mathbf{r}\rho - 2h_k \mathbf{R}\rho}$$

Приведем также значения якобиана для перехода между различными якобиевскими системами координат:

$$d\mathbf{r}_{ep} d\mathbf{r}_{\bar{e}\bar{p}} d\mathbf{r}_{\bar{H}H} = 8 d\mathbf{r}_{ep} d\mathbf{r}_{P_n P_s} d\mathbf{r}_{\bar{H}H} \quad (\text{A.20})$$

$$d\mathbf{r}_{ep} d\mathbf{r}_{\bar{e}\bar{p}} d\mathbf{r}_{\bar{H}H} = 8 d\mathbf{r}_{\bar{e}\bar{p}} d\mathbf{r}_{P_n P_s} d\mathbf{r}_{\bar{H}H} \quad (\text{A.21})$$

$$d\mathbf{r}_{e\bar{e}} d\mathbf{r}_{\bar{p}\bar{p}} d\mathbf{r}_{P_n P_s} = \left(\frac{m_H}{m_p}\right)^3 d\mathbf{r}_{\bar{e}\bar{e}} d\mathbf{r}_{P_n P_s} d\mathbf{r}_{\bar{H}H} \quad (\text{A.22})$$

Таблица А.3

Вклад различных конфигураций в первые три 4-тельные собственные функции, отвечающие дискретизированному континууму, с энергиями $\epsilon = E - 2E_{\text{H}}$, n , m , и k числа базисных функций, B_{nmk} - коэффициент разложения.

$\epsilon_1 = 0.000005645066171$					$\epsilon_2 = 0.00001984205517$					$\epsilon_3 = 0.00004009502617$				
n	m	k	channel	B_{nmk}	n	m	k	channel	B_{nmk}	n	m	k	channel	B_{nmk}
1	1	30	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.96487	1	1	31	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.91271	1	1	32	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.86830
1	1	29	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.23669	1	1	29	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.32924	1	1	29	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.34442
1	1	31	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.09645	1	1	30	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.18195	1	1	31	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.28920
1	1	32	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.04591	1	1	32	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.13361	1	1	33	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.15192
1	1	33	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.02742	1	1	33	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.06492	1	1	30	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.10414
1	1	34	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.01764	1	1	34	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.03844	1	1	34	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.07299
1	1	28	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.01696	1	1	28	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.02969	1	1	35	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.04277
1	1	35	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.02477	1	1	35	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.02477	1	1	28	$\text{H}\bar{\text{H}}$	-0.04036
1	1	36	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.01604	1	1	36	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.01604	1	1	36	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.02622
1	1	37	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.01029	1	1	37	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.01029	1	1	37	$\text{H}\bar{\text{H}}$	0.01628

А.4. Вклад различных конфигураций в базисные функции

Собственные функции полного гамильтониана, полученные в результате диагонализации, содержат вклад различных конфигураций. Конфигурации, связанные с упругим каналом имеют вид:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tilde{\mathbf{R}}) = 1s(\mathbf{r}_1)1s(\mathbf{r}_2)\chi(\tilde{\mathbf{R}}), \quad (\text{A.23})$$

где $\chi(\tilde{\mathbf{R}})$ линейная комбинация базисных функций $\varphi_k(\tilde{\mathbf{R}})$.

А.5. Уравнения для амплитуд рассеяния

Проведем преобразования системы (1.62) для получения удобных для численных вычислений уравнений. Прежде всего спроецируем указанную

систему на каналные состояния, положив при этом $R_0 = \rho_0 = r_B$:

$$\sum_{\alpha} \frac{\langle \Phi_{\alpha} | (\widehat{H} - E) | \Psi^0(\mathbf{S}, \mathbf{T}) \rangle}{E_{\alpha} - E} < \frac{d\Phi_{\alpha}}{dR_{H\bar{H}}} | \Phi_{ad}(R_0) \rangle = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\sum_{\alpha} \frac{\langle \Phi_{\alpha} | (\widehat{H} - E) | \Psi^0(\mathbf{S}, \mathbf{T}) \rangle}{E_{\alpha} - E} < \frac{d\Phi_{\alpha} | f_{\beta} \varphi_{\gamma} \rangle}{d\rho} |_{\rho_0} = 0 \quad (\text{A.25})$$

$$(\text{A.26})$$

Здесь $\Phi_{ad}(e_p, \mathbf{r}_{e\bar{p}}, r_B)$ - лептонная волновая функция при фиксированном межнуклонном расстоянии r_B , $f_{\beta}(\mathbf{r}_{p\bar{p}})$ - волновая функция Протония с набором квантовых чисел β , $\varphi_{\gamma}(\mathbf{r}_{e\bar{e}})$ - волновая функция позитрония с набором квантовых чисел γ .

Действие выражения $\widehat{H} - E$ на функцию-анзац Ψ^0 сводится к невязке этой функции и точного решения. Нас будет интересовать только области межнуклонных расстояний $R < r_B$. Действие гамильтониана на функцию $\chi(R)\Phi_{ad}(\mathbf{r}_{ep}, \mathbf{r}_{e\bar{p}}, \mathbf{r}_B)$ легко определить, учитывая что

$$(\widehat{T}_e + \widehat{T}_{\bar{e}} - 1/r_{ep} - 1/r_{e\bar{p}} + 1/r_{e\bar{p}} + 1/r_{e\bar{p}} - 1/r_{e\bar{e}}) \Phi_{ad} = V_{ad}(r_B)\Phi_{ad}$$

$$\begin{aligned} (\widehat{H} - E) \Psi^0 = & (\widehat{T}_{H\bar{H}} + \Delta V) \chi(R)\Phi_{ad}(\mathbf{r}_{ep}, \mathbf{r}_{e\bar{p}}, \mathbf{r}_B) + \\ & + W f_{n,l}(\mathbf{r}_{p\bar{p}}) \varphi_{k,l'}(\mathbf{r}_{e\bar{e}}) \mathbf{g}_{nkl'l'}(\mathbf{r}_{p\bar{p}}\mathbf{r}_B) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Здесь $\Delta V = V(\mathbf{r}_{ep}, \mathbf{r}_{e\bar{p}}, \mathbf{R}_{H\bar{H}}) - V_{ad}(\mathbf{r}_B)$, $V = 1/r_{p\bar{e}} + 1/r_{e\bar{p}} - 1/r_{e\bar{e}}$, $W = 1/r_{p\bar{e}} + 1/r_{e\bar{p}} - 1/r_{p\bar{e}} - 1/r_{pe}$.

Для вычисления амплитуды упругого рассеяния S и амплитуд переходов $T_{n,k,l,l'}$ в каналы с главным квантовым числом Протония $21 \leq n \leq 24$, главным квантовым числом позитрония $1 \leq k \leq 2$ и канальными угловыми моментами $l, l' = 0, 1$, дающих основной вклад, получим систему 17 связанных уравнений для 17 неизвестных.

Приложение Б.

В этом приложении мы получим полезное аналитическое выражение для функции Йоста $f_J(0)$ при нулевой энергии столкновений $H - \bar{H}$ на основе квазиклассического приближения.

Отправной точкой будет выражение для S -волновой длины рассеяния $H - \bar{H}$, полученной в следующих предположениях. На расстояниях $R > R_r \sim r_B$ а.у. взаимодействие $H - \bar{H}$ может быть описано одноканальным адиабатическим потенциалом $V_{ad}(R)$. На больших асимптотических расстояниях $R > R_h \sim 5$ а.у. этот потенциал имеет ван-дер-ваальсовское поведение $-C_6/R^6$, где $C_6 = 6.5$. Существует область $R_r < R < R_h \ll R_{vdW} = \sqrt[4]{2MC_6} \simeq 10.5$ а.у., где применимо квазиклассическое приближение.

Сшивая квазиклассическое решение с точным асимптотическим решением уравнения Шредингера с потенциалом $-C_6/R^6$ при нулевой энергии, получим следующее выражение для длины рассеяния (1.24):

$$a = a_0 \left(1 + \cot\left(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta\right) \right). \quad (\text{Б.1})$$

Здесь a_0 :

$$a_0 = R_{vdW} \frac{\Gamma(3/4)}{2\sqrt{2}\Gamma(5/4)} \simeq 4.99 \text{ а.у.} \quad (\text{Б.2})$$

а $\Omega = 19.38$ - квазиклассическая фаза (1.121), аккумулированная в области $R_r < R < \infty$.

Для вычисления функции Йоста, найдем вариацию длины рассеяния (1.24) при малой вариации фазы $\Delta\delta$:

$$\Delta a = -a_0 \frac{\Delta\delta}{\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \Omega + \delta\right)}. \quad (\text{Б.3})$$

Возмущение потенциалом нулевого радиуса действия

$$V_{ZRP} = \frac{2\pi}{M} a_{sc} \delta(\mathbf{R}) \left(\frac{\partial}{\partial R} R \right) \quad (\text{Б.4})$$

приводит к вариации фазы (1.76):

$$\Delta\delta = -2\pi M a_{sc}. \quad (\text{Б.5})$$

Несложно найти соответствующую вариацию (в следствии действия потенциала нулевого радиуса действия (Б.4)) амплитуды рассеяния методом искаженных волн:

$$\Delta f = -\frac{M}{2\pi} \int \Psi_0(\mathbf{R})^* V_{ZRP} \Psi_0(\mathbf{R}) d^3 R = -a_{sc} |\Psi_0(0)|^2 \quad (\text{Б.6})$$

где $\Psi_0(\mathbf{R})$ невозмущенная волновая функция. Воспользуемся уравнением (3.71), чтобы выразить функцию Йоста:

$$\Delta f = -\frac{a_{sc}}{|f_J(0)|^2}. \quad (\text{Б.7})$$

S -волновая длина рассеяния связана с амплитудой рассеяния на потенциале нулевого радиуса действия: $a = -f(0)$.

Подставляя это выражение в (Б.7) и сравнивая (Б.7) с (Б.3), окончательно получаем следующее выражение для $1/|f_J(0)|^2$:

$$1/|f_J(0)|^2 = \frac{\pi M a_0}{\sin^2(\pi/8 + \Omega + \delta)}. \quad (\text{Б.8})$$

Приложение В.

В настоящем приложении мы обоснуем граничное условие полного поглощения $\delta_2 \gg 1$, использованное при исследовании квантового отражения.

Рассмотрим модельный потенциал, описывающий взаимодействие атома антиводорода с поверхностью на малых расстояниях до поверхности и внутри нее.

$$V_s(z) = \begin{cases} U \exp(-i\varphi) \exp((-z)/\rho) & \text{if } z \geq 0 \\ U \exp(-i\varphi) & \text{if } z < 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Аргумент φ связывает вещественную и мнимую часть эффективного потенциала.

В случае сильно поглощающего потенциала V_s ($|\text{Im } \rho \sqrt{2mU}| \gg 1$, длина рассеяния на таком потенциале [148])

$$a_s \simeq z_0 + \rho \left(2\gamma + 2 \ln(\rho \sqrt{2m|U|}) - i\varphi \right) \quad (\text{B.2})$$

где $\gamma \simeq 0.577$ - константа Эйлера.

Важным параметром, описывающим процесс поглощения потенциалом V_s оказывается диффузный радиус ρ . Существенным оказывается отношение де-Бройлевской длины волны $\lambda_B(z)$ налетающего антиатома и диффузного радиуса ρ .

Разумно предположить, что $\rho \sim r_B$. Тогда несложно видеть, что $\rho \gg \lambda_B(\rho)$. Действительно, де-Бройлевская волна атома вблизи поверхности определяется ван-дер-ваальсовой асимптотикой потенциала атом-поверхность и равна

$$\lambda_B(r_B) = 1/\sqrt{2mC_3/r_B^3}$$

Поэтому искомое отношение равно:

$$r_B/\lambda_B(r_B) = \sqrt{\frac{r_B}{2mC_3}} \approx 0.1$$

Приведенное выше условие означает применимость квазиклассического приближения и мы можем вычислить мнимую часть фазы δ_2 :

$$\delta_2 = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{-2m(V_s(z) + V_m(z))} dz \quad (\text{B.3})$$

Указанное выше условие обеспечивает $\delta_2 \gg 1$.

Таким образом причина полного поглощения волны, достигшей поверхности, состоит в том, что эффективная длина волны антиводорода, ускоренного в потенциале ван-дер-Ваальса, оказывается у поверхности много меньше боровского радиуса- характерного расстояния, на котором происходит поглощение. В этом случае не возникает отраженной волны и происходит полное поглощение.

Приложение Г.

Получим выражение для скалярного произведения двух гравитационных состояний, отвечающих комплексным собственным значениям энергии:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{N_i N_j} \int_0^\infty \text{Ai}^*(z/l_0 - \lambda_j) \text{Ai}(z/l_0 - \lambda_i) dz \quad (\text{Г.1})$$

где

$$N_i^2 = \int_0^\infty \text{Ai}^2(z/l_0 - \lambda_j) dz. \quad (\text{Г.2})$$

Рассмотрим уравнение для собственных функций $\text{Ai}(z/l_0 - \lambda_i)$ и комплексных значений энергии $\lambda_i = \lambda_i^0 + a_{CP}/l_0$:

$$- \text{Ai}''(z/l_0 - \lambda_i) + z \text{Ai}(z/l_0 - \lambda_i) = \lambda_i \text{Ai}(z/l_0 - \lambda_i). \quad (\text{Г.3})$$

Тогда уравнение для комплексно-сопряженной функции, отвечающей комплексно-сопряженному собственному значению :

$$- \text{Ai}^{*''}(z/l_0 - \lambda_j) + z \text{Ai}^*(z/l_0 - \lambda_j) = \lambda_j^* \text{Ai}^*(z/l_0 - \lambda_j). \quad (\text{Г.4})$$

Умножим обе части уравнения (Г.3) на $\text{Ai}^*(z/l_0 - \lambda_j)$ и проинтегрируем по переменной z . Аналогично умножим обе части уравнения (Г.4) на $\text{Ai}(z/l_0 - \lambda_i)$ и интегрируем по z . Вычитая одно уравнение из другого, получим:

$$\text{Ai}^{*'}(-\lambda_j) \text{Ai}(-\lambda_i) - \text{Ai}^*(-\lambda_j) \text{Ai}'(-\lambda_i) = (\lambda_j^* - \lambda_i) \int_0^\infty \text{Ai}^*(z/l_0 - \lambda_j) \text{Ai}(z/l_0 - \lambda_i) dz. \quad (\text{Г.5})$$

Для получения приведенного выше результата мы проинтегрировали по частям интегралы, содержащие вторые производные и учли, что функция Эйри обращается в ноль на бесконечности.

Примем во внимание, что $\text{Ai}(-\lambda_i^0) = 0$, а также малость отношения a_{CP}/l_0 , получим с точностью до членов второго порядка по a_{CP}/l_0 :

$$\text{Ai}(-\lambda_i) = -\frac{a_{CP}}{l_0} \text{Ai}'(-\lambda_i^0), \quad (\text{Г.6})$$

$$\text{Ai}^*(-\lambda_j) = -\frac{a_{CP}^*}{l_0} \text{Ai}^{*'}(-\lambda_j^0). \quad (\Gamma.7)$$

Получим далее, с точностью до второго порядка по a_{CP}/l_0 :

$$\text{Ai}^{*'}(-\lambda_j) \text{Ai}(-\lambda_i) - \text{Ai}^*(-\lambda_j) \text{Ai}'(-\lambda_i) = i \frac{b}{2l_0} \text{Ai}^{*'}(-\lambda_j^0) \text{Ai}'(-\lambda_i^0). \quad (\Gamma.8)$$

Комбинируя полученный результат с известным выражением для нормировочного множителя :

$$N_i^2 = \text{Ai}'^2(-\lambda_i) + \lambda_i \text{Ai}^2(-\lambda_i), \quad (\Gamma.9)$$

который с точностью до членов второго порядка по a_{CP}/l_0 :

$$N_i = \text{Ai}'(-\lambda_i^0) \left(1 + \lambda_i^0 \frac{a_{CP}^2}{2l_0^2}\right). \quad (\Gamma.10)$$

получим:

$$\alpha_{i \neq j} = i \frac{b/(2l_0)}{\lambda_j^0 - \lambda_i^0 + ib/(2l_0)}. \quad (\Gamma.11)$$

Приложение Д.

В данном приложении мы получим аналитическое выражение для матричных элементов квантовой частицы в линейном потенциале с граничными условиями типа «стенка».

Потенциал, в котором движется частица имеет вид:

$$U(z) = mgz + U_0\Theta(-z) \quad (\text{Д.1})$$

здесь $\Theta(z)$ - ступенчатая функция.

Запишем уравнение движения в гейзенберговском виде, совпадающем в данном случае с классическим:

$$z''(t) = -g + \frac{U_0}{m}\delta(z) \quad (\text{Д.2})$$

Матричные элементы этого уравнения по состояниям в гравитационном потенциале имеют вид:

$$-\omega_{mn}^2 z_{mn} = -g\delta_{mn} + \frac{U_0}{m} \langle m|\delta(z)|n \rangle \quad (\text{Д.3})$$

Раскрывая явный вид последнего матричного элемента в правой части уравнения получим:

$$-\omega_{mn}^2 z_{mn} = -g\delta_{mn} + \frac{U_0}{m} \varphi_m(0)\varphi_n(0) \quad (\text{Д.4})$$

Здесь $\varphi_k(z)$ - волновая функция, отвечающая квантовому числу k .

Заметим, что волновая функция вблизи $z = 0$, согласно (3.25) имеет вид:

$$\varphi_k(0) = N_k \text{Ai}(-\lambda_k) \quad (\text{Д.5})$$

$$\lambda_k = \lambda_k^0 + a/l_0 \quad (\text{Д.6})$$

$$\text{Ai}(-\lambda_k^0) = 0 \quad (\text{Д.7})$$

$$\varphi_k(0) = N_k \text{Ai}'(-\lambda_k^0)a/l_0 \quad (\text{Д.8})$$

здесь $N_k = 1/|\text{Ai}'(-\lambda_k^0)|$ - нормировочная константа, $l_0 = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{2m^2g}}$ - характерная «гравитационная длина», $a = \hbar/\sqrt{2mU_0}$ - длина рассеяния на потенциале $U_0\Theta(-z)$.

Подставляя в (Д.4), получим окончательно:

$$z_{mn} = 2l_0 \frac{(-1)^{m+n} - \delta_{mn}}{(\lambda_m^0 - \lambda_n^0)^2} \quad (\text{Д.9})$$

Заметим, что матричные элементы от более высоких степеней z могут быть получены с использованием рекуррентного соотношения:

$$(z^p(t))'' = p(p-1)z^{p-2}(t)(z'(t))^2 + pz^{p-1}(t)z''(t) \quad (\text{Д.10})$$