

Федеральное государственное бюджетное
Физический институт им. П. Н. Лебедева
Российской академии наук

На правах рукописи

КИРАКОСЯН Мартин Раджевич

**КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СТОЛКНОВЕНИЯХ
УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЯДЕР**

(01.04.02 - теоретическая физика)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н. А. В. Леонидов

Москва - 2014

Оглавление

Введение	1
1 Феноменология цветного черенковского излучения	17
1.1 Введение	18
1.1.1 Хромопроницаемость	20
1.1.2 Потери энергии и черенковское излучение частицы в среде.	23
1.1.3 Кольцевые события на RHIC. Эксперимент.	26
1.2 Наблюдение излучения черенковских глюонов.	34
1.2.1 Простая модель.	34
1.2.2 Монте-карло процедура для генерации черенковского спектра.	36
1.2.3 Оценка потерь энергии за счет излучения черенковских глюонов.	40
2 Поляризация турбулентной кварк-глюонной плазмы	43
2.1 Введение	44
2.1.1 Кварк-глюонная плазма.	46
2.1.2 Статистическое описание турбулентности.	56
2.1.3 Турбулентная плазма. Эффекты нулевого порядка по регулярному полю	59

2.2	Диаграммная техника для вычисления функции распределения турбулентной плазмы. Разложение по регулярным полям	66
2.2.1	Пертурбативное разложение функции распределение в общем случае	67
2.2.2	Разложение по регулярным полям и корреляциям турбулентных полей для абелевой плазмы.	69
2.2.3	Вклады нулевого порядка по регулярным полям.	72
2.2.4	Вклады первого порядка по регулярным полям.	75
2.2.5	Неабелевая плазма. Вклады пропорциональные $G_{ab}^{\mu\nu}$	77
2.2.6	Неабелевая плазма. Вклады пропорциональные $K_{\mu\nu\mu'\nu'}^{ab}$	80
2.3	Турбулентная поляризация релятивистской плазмы в длинноволновом пределе.	81
2.3.1	Электромагнитная плазма.	81
2.3.2	Кварк-глюонная плазма.	85
2.4	Условия применимости.	88
2.5	Физические следствия.	93
2.5.1	Затухание волн в турбулентной плазме.	93
2.5.2	Плазмоны в турбулентной плазме.	97

3 Цветное переходное излучение на случайных неоднородностях **100**

3.1	Введение	101
3.2	Хромозлектрическая проницаемость статистически однородной среды.	104
3.3	Поправки к черенковским потерям и оценка размытия черенковского спектра за счет неоднородностей	109

3.4 Неоднородности в кварк-глюонной плазме	111
Заключение	115
Публикации автора	118
А Приложение к главе 2	119
А.1 Вычисление коэффициентов $I_1 - I_8$	119
А.2 Петлевое интегрирование по k_1 , пример.	121
А.3 Индуцированный ток. Пример.	123
А.4 Используемые обозначения.	123
А.5 Вычисления интегралов: примеры	124
А.6 Вычисления интегралов: ответы	125
А.7 Стандартные интегралы	128
В Приложение к главе 3	131
В.1 Эффективная хромопроницаемость случайно неоднородной сре- ды. Диаграммный вывод	131
В.2 Выражения для диэлектрической проницаемости.	134
Литература	135

Введение

Эксперименты по столкновению ядер высоких энергий представляют собой уникальный способ исследования свойств сильных взаимодействий. Это направление экспериментальных исследований находится на стыке ядерной физики и физики элементарных частиц и берет свое начало в середине 80-х годов прошлого века, когда эксперименты на релятивистских пучках ионов стали доступны в Брукхевенской национальной лаборатории (BNL) и Европейском Центре Ядерных Исследований (CERN). Последнее десятилетие экспериментальные данные по столкновениям ядер поступали, в основном, благодаря опять-таки работе ускорительных комплексов в BNL (Релятивистский Коллайдер тяжелых Ионов, RHIC) и CERN (Большой Адронный Коллайдер, LHC) с 2000 и 2010 года соответственно. Максимальная энергия столкновения на RHIC составляет 200 ГэВ/нуклон в системе центра масс при столкновении ядер золота, однако проводились сеансы и при более низких энергиях столкновений. Также в экспериментах на RHIC сталкивались протоны ($p-p$), ядра дейтерия с ядрами золота, $d-Au$ (имеющие большое значение для калибровки экспериментальных данных, полученных при столкновении ядер золота), ядра меди $Cu-Cu$, ядра урана $U-U$ [1]. Первые столкновения ядер свинца на Большом Адронном Коллайдере были получены в ноябре 2010 года. Энергия столкновений в системе центра масс составляла в них 2.76 ТэВ/нуклон [2].

Также в 2012 году проводились сеансы столкновений протонов с ядрами.

Уже первые результаты с RHIC ([3], [4], [5], [6]) продемонстрировали, что "more is different" (что можно примерно перевести как "большое ведет себя иначе"; фраза является заголовком статьи нобелевского лауреата Ф. Андерсона [34] и указывает на то, что физические характеристики сложных систем, как правило, не сводятся к тривиальной суперпозиции свойств составляющих частей путем элементарной редукции), а именно, что материя, сформированная при столкновениях ядер, обладает коллективными свойствами, не проявляющимися при столкновениях протонов. Среди основных результатов, наблюдаемых на RHIC (а также впоследствии на LHC, см. ниже) можно выделить: коллективную анизотропию в потоках частиц в направлении перпендикулярном оси столкновений, в частности, здесь следует отметить наблюдение эллиптического потока (v_2) и потоков более высокого порядка, двухгорбую структуру в двух- и трехчастичных корреляциях по относительному азимутальному углу образовавшихся адронов; эффект гашения струй - существенное смягчение распределений адронов по поперечным импульсам в сравнении с аналогичными распределениями в столкновениях протонов (см. экспериментальные результаты [89–92] а также теоретические вычисления [140–144, 147] и монте-карло модели [145, 146]); дальние корреляции в двухчастичном распределении адронов с близкими значениями азимутального угла по псевдобыстродам (именуемый в литературе "эффектом хребта" - ridge эффект) ([1], [11], [12], [13], [10]). В свою очередь, экспериментальные данные с LHC ([7], [8], [9]) подтвердили значение коллективных эффектов в физике ядерных столкновений при высоких энергиях, а также позволили прояснить влияние энергии столкновений на характеристики образовавшегося вещества. Среди

наиболее ярких результатов экспериментов на Большом Адронном Коллайдере, пожалуй, следует выделить сильно выраженный дисбаланс струй в одиночных событиях ([14], [15], [16]), а также обнаружение эффекта хребта и коллективных потоков в событиях с большой множественностью в столкновениях протонов ([17]).

Эксперименты на ускорителях направлены на исследование внутреннего строения и взаимодействия ядер и частиц. Согласно современным представлениям сильные взаимодействия кварков и глюонов в ядрах описываются квантовой хромодинамикой: квантовой теорией полей Янга-Миллса с калибровочной группой симметрии $SU(3)$ взаимодействия цветных фермионов (кварков) и калибровочных бозонов (глюонов). При низких энергиях кварки и глюоны удерживаются в адронах. Это явление носит название конфайнмента кварков и глюонов и связано, в частности, с нарушением конформной симметрии лагранжиана квантовой хромодинамики в пределе безмассовых кварков. Также в связанном состоянии нарушена киральная симметрия безмассового лагранжиана. Одним из свойств квантовой хромодинамики является наличие асимптотической свободы [37,38]: с увеличением энергии взаимодействие кварков и глюонов ослабевает. Это явление носит название деконфайнмента. Таким образом, при повышении температуры ядерной материи следует ожидать наличия двух фазовых переходов: перехода конфайнмент-деконфайнмент и кирального фазового перехода.

Увеличение энергии столкновений ядер в системе центра масс \sqrt{s} приводит к образованию материи со все большими значениями плотности энергии. Последнее связано с тем, что вследствие лоренцевского сжатия с увеличением энергии уменьшается объем области пространства, в которой сосредоточена

энергия. Теоретическое исследование свойств сильно взаимодействующего вещества при высоких плотностях и температурах представляет немалый интерес. Первые исследования, посвященные возможности появления нового фазового состояния материи в столкновениях ядер, относятся к семидесятым годам прошлого столетия ([19], [20], [39]) и связаны с концепцией кварк-глюонной плазмы (термин был введен Шуряком в работе [39]). Чуть ранее была выдвинута гипотеза об образовании нового состояния кварков при больших плотностях в нейтронных звездах в работе [18].

Оценить плотность энергии, образующейся при столкновении ядер, можно, следуя Бьоркену, воспользовавшись простыми геометрическими соображениями. А именно, поскольку основная доля частиц, рассеивающихся на большие поперечные углы, образуется в результате эволюции изначально сформированной материи, разумно предположить, что суммарную энергию частиц при значениях псевдобыстрот от -1 до $+1$ можно получить умножив плотность энергии на объем области, в которой сосредоточена материя спустя τ_0 после столкновения. Таким образом, значение плотности энергии можно оценить формулой (расширением в направлении поперечном оси столкновения можно пренебречь, так как $\tau_0 c \ll R$):

$$\epsilon = \left. \frac{dE}{d\eta} \right|_{\eta=0} \frac{1}{\pi R^2 \tau_0} \quad (1)$$

здесь R - радиус ядра.

Следует отметить, что представленная оценка достаточно консервативна. Тем не менее, даже эта оценка приводит к плотности энергии 5 ГэВ/фм^3 для $\tau_0 = 1/p_0$ (где $p_0 \sim 1 - 2 \text{ ГэВ}$ средняя энергия первичных партонов) в случае столкновения ядер золота на RHIC, что в 5 раз превышает плотность энергии, при которой, согласно результатам численного моделирования КХД на

решетке, происходит фазовый переход к кварк-глюонной плазме.

Помимо перехода конфайнмент-деконфайнмент при высоких температурах и(или) больших плотностях сильно взаимодействующей материи, по всей видимости, имеет место также киральный фазовый переход, приводящий к восстановлению киральной симметрии безмассовой КХД. Параметром порядка кирального фазового перехода является величина кваркового конденсата, имеющая ненулевое значение ($\langle q\bar{q} \rangle = -(240\text{МэВ})^3$, см., например, обзор [45]) в обычной адронной материи вследствие спонтанного нарушения симметрии вблизи значений температуры $T = 0$ и химического потенциала $\mu = 0$.

Графическая диаграмма, отображающая состояние сильно взаимодействующей материи при различных значениях температуры и химического потенциала носит название фазовой диаграммы КХД.

Уже в начале 80-х стало ясно, что природу фазовых переходов в КХД можно изучать в экспериментах по столкновению ядер. Работа прошлого поколения ускорителей в Брукхевене (ускоритель AGS, Alternating Gradient Synchrotron) и ядерная часть программы ускорителя SPS (Super Proton Synchrotron) в ЦЕРНе были, главным образом, нацелены на изучение фазовой диаграммы КХД. Также на изучение различных областей фазовой диаграммы направлены строящиеся в данный момент ускорители FAIR (An International Facility of Antiproton and Ion Research, [40]) и NICA (Nuclotron-based Ion Collider fAcility, [41]), которые, как ожидается, начнут работать на рубеже текущего десятилетия.

На рисунке ниже представлена фазовая диаграмма КХД, основывающаяся на современном представлении о термодинамических процессах в плотной ядерной материи, образующейся в столкновениях ядер.

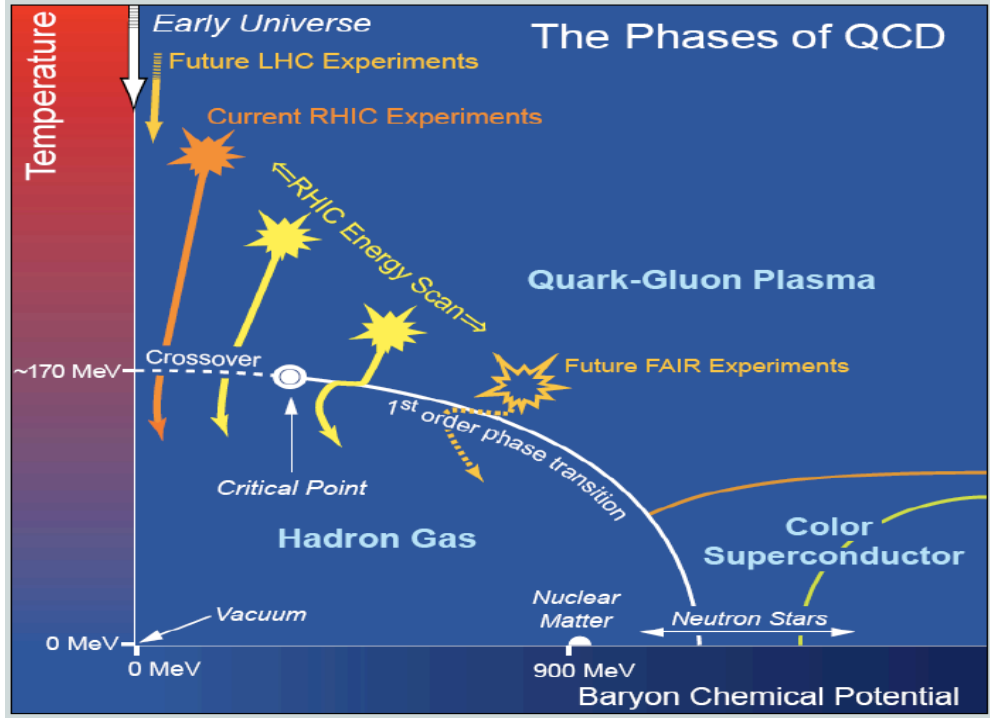


Рис. 1: Фазовая диаграмма КХД (взято из [1])

Наличие перехода конфанмент-деконфайнмент приводит к тому, что в отличие от привычной ядерной материи, состоящей из связанных состояний кварков и глюонов, взаимодействие частиц в кварк-глюонной плазме при высоких температурах ($T \gg \Lambda_{QCD} \sim 200 \text{ MeV}$) становится относительно слабым и короткодействующим. При больших температурах давление кварков и глюонов в плазме компенсирует отрицательное давление вакуума КХД и зависимость потенциала взаимодействия партонов в кварк-глюонной плазме от расстояния между частицами принимает вид:

$$V(r) = \frac{g^2 \exp(-m_D r)}{4\pi r}, \quad (2)$$

где известная как масса Дебая величина m_D возрастает линейно с температурой. Таким образом, пертурбативная КХД предсказывает, что ядерная материя при высоких температурах представляет собой идеальный газ Стефана-Больцмана. Однако указанное пертурбативное описание сталкивается с ря-

дом проблем. В частности, следует отметить, что ряды теории возмущений для разложения давления по степеням константы связи в неабелевых калибровочных теориях поля перестают работать в порядке g^6 ([42], см. также обзоры [129], [130]) и динамика полей на масштабе $g^2 T$ становится существенно непертурбативной. К тому же, согласно численным расчетам температурной квантовой хромодинамики на решетках, фактор непертурбативных поправок к дебаевской массе составляет величину порядка тройки [129]. Помимо этого, теоретически, остается открытым вопрос о принципиальной возможности полной термализации материи, образующейся в результате столкновения релятивистских ионов (хотя интерпретация существующих экспериментальных данных свидетельствует в пользу ранней термализации). Помимо этого следует отметить, что малая вязкость материи, образующейся в столкновениях ядер золота на RHIC (см. об этом ниже), не позволяет использовать идеальный газ слабосвязанных кварков и глюонов в качестве реалистичной модели для описания экспериментальных данных.

Можно условно выделить две группы экспериментальных сигналов, позволяющие изучать свойства материи, образовавшейся в столкновениях ядер:

- а) потоковые характеристики рождаемых частиц,
- б) наблюдаемые, характеризующие отклик среды и ее воздействие на прохождение сквозь нее высокоэнергетического партона, образовавшегося на ранних стадиях столкновения.

Для изучения свойств потоков частиц прежде всего необходимо сгруппировать события с учетом центральности столкновения. Последнее достигается за счет того, что центральность в столкновениях ядер антикоррелирует с множественностью рожденных частиц. Численно указанную антикорреляцию

можно вычислить с использованием модели Глаубера многократного рассеяния. Несмотря на то что в эксперименте невозможно определить точное значение прицельного параметра столкновения, сгруппировав события по множественности, можно изучать зависимость экспериментальных сигналов от центральности. Указываемое значения центральностей, например, 0–5% соответственно означает, что отбирались 5% событий с наибольшими значениями множественностей. В нецентральных соударениях, образовавшееся начальное состояние по очевидным причинам имеет азимутальную асимметрию. Если обозначить быстроту регистрируемой частицы через y , то в цилиндрических координатах компоненты ее импульса имеют вид:

$$\mathbf{p} = \left(p_T \cos \phi, p_T \sin \phi, \sqrt{p_T^2 + m^2} \sinh y \right) \quad (3)$$

Упомянутая выше асимметрия начального состояния приводит к асимметрии наблюдаемых распределений частиц в детекторе. Одночастичное распределение можно разложить в ряд Фурье по азимутальному углу ϕ :

$$\frac{d^3 N}{d^2 \mathbf{p}_T dy} = \frac{1}{2\pi p_T} \frac{d^2 N}{dp_T dy} [1 + 2v_1 \cos(\phi - \phi_0) + 2v_2 \cos(2(\phi - \phi_0)) + \dots] \quad (4)$$

где угол ϕ_0 определяет азимутальную ориентацию плоскости реакции. Угол ϕ_0 не известен заранее и меняется от события к событию.

Коэффициенты v_n (вообще говоря, зависящие от поперечного импульса и типа частиц) называют потоками n -го порядка. Особый интерес для изучения столкновений ядер представляет эллиптический поток v_2 . Существует некоторое количество методов определения угла ϕ_0 . Проблема осложняется тем, что априори не ясно вызвана ли азимутальная асимметрия коллективным потоком или пособытийными флуктуациями. Указанные методы определения азимутальной ориентации можно условно разделить на две группы. В одной

группе методов используются частицы с большими быстротами для определения ориентации плоскости столкновения и используется полученное значение угла ϕ_0 для определения потоков в центральной области. Преимущество метода заключается в том, что он исключает вклад от флуктуаций, некоррелированных с положением плоскости реакции (в предположении, что флуктуации не приводят к корреляциям между частицами в существенно различных областях псевдобыстрот). Вторая группа методов использует данные только центральной области быстрот. Далее необходимо выделить потоковые корреляции, для чего также используются различные методы, как например, метод кумулянтных моментов [35] или метод нулей Ли-Янга [36]. В основе указанных алгоритмов используется тот факт, что непотоковые флуктуации (например, связанные с образованием пары струй под углом 180°) некоррелированы со всеми остальными частицами.

Наряду с коллективными потоками интерес представляет взаимодействие среды с высокоэнергетичными партонами. Рождение высокоэнергетичных партонов в столкновениях протонов описывается пертурбативной квантовой хромодинамикой. Согласно расчетам, в столкновениях протонов с энергией 200 ГэВ партоны с поперечными импульсами в десятки ГэВ образуются с достаточной для экспериментальных наблюдений вероятностью. В свою очередь, при энергиях ЛНС можно наблюдать за струями с энергиями вплоть до сотен гигаэлектронвольт. Благодаря выполнению теорем факторизации квантовой хромодинамики вычисление процесса рождения высокоэнергетичных адронов можно разбить на три независимых части (последнее выполняется в низших порядках по твисту): вычисление не зависящей от конкретного процесса функции распределения партонов в протоне, а именно вероятности обнаружения

заданного партнона с заданными значениями импульса; вычисление зависящего от конкретного процесса сечения рассеяния партнов; вычисление функции фрагментации партнона в адроны. Первая и третья функции могут быть измерены экспериментально с достаточной степенью точности. Благодаря асимптотической свободе квантовой хромодинамики, сечение рождения высокоэнергетичных партнов описывается пертурбативной теорией поля, поэтому сечение можно не только измерить экспериментально, но и вычислить теоретически с контролируемой точностью. Сечение рассеяния высокоэнергетичных партнов в столкновениях ядер не отличается от соответствующего сечения в столкновениях протонов. Это связано с тем, что в случаях, когда переданный импульс достаточно велик, процесс рассеяния происходит на временах и расстояниях значительно меньших, чем характеристические времена и расстояния в образовавшейся среде кварков и глюонов. Функция распределения ядра, вообще говоря, не совпадает с функцией распределения протона, но разницу можно учесть путем анализа столкновения протонов с ядрами. Функция фрагментации партнов в среде, образовавшейся в результате столкновения ядер, сильно отличается от функций фрагментации в протоне, поскольку высокоэнергетичный партон проходит сквозь горячую материю из кварков и глюонов толщиной в среднем 5 – 7 ферми. Таким образом, экспериментальные измерения спектра высокоэнергетичных адронов в столкновениях ядер, откалиброванные (калибровка проводится при помощи модели Глаубера многократного рассеяния) по столкновениям протонов с ядрами, содержат важную информацию о горячей материи кварков и глюонов.

Экспериментальные результаты с ускорителя RHIC показали, что свойства вещества, образовавшегося в результате столкновений ядер, далеки от свойств

идеального газа партонов. В частности, например, измерения коллективных потоков ([1]) в столкновениях ионов, а именно обнаруженные значения эллиптического потока, указывают на раннюю термализацию и малую вязкость, образовавшегося вещества. Теоретически малую вязкость можно объяснить как на основе представлений о сильносвязанной кварк-глюонной плазме ([23]), так и за счет плазменной турбулентности ([21], [22]). Данные RHIC стимулировали новые идеи и теоретические разработки, направленные на решение фундаментальной задачи описания свойств ядерного вещества в экстремальных условиях. Согласованная работа экспериментальных групп на RHIC и LHC и теоретиков в течение последнего десятилетия привели к значительному прогрессу в этом направлении. Ниже представлена схематическая картина сложившихся представлений о различных стадиях состояния вещества в соударениях ядер:

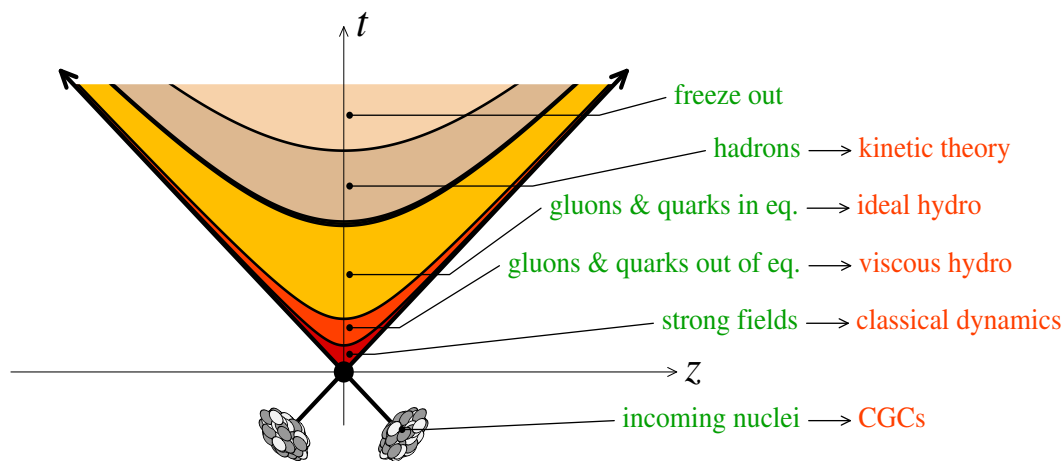


Рис. 2: Схематическая картина различных стадий столкновения ультрарелятивистских ядер в зависимости от времени и координаты на оси столкновений (взято из [24])

На сегодняшний день условно выделяются следующие стадии состояния вещества в соударениях ядер (далее в качестве переменной времени будет ис-

пользоваться лоренц-инвариантный интервал $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$):

1) До столкновения оба ядра представляют собой сильно сжатые в направлении оси столкновений "блины" (общепринято употребление английского слова *pancake*), следует отметить, что лоренц-фактор уже на РНЭС достигает значения порядка ста. В жестких процессах на этой стадии вследствие асимптотической свободы можно рассматривать кварки в адронах в качестве практически свободных конститuentов, взаимодействие между которыми можно описывать с использованием теории возмущений по константе связи. Анализ вычислений показывает, что практически все процессы (см. теоремы факторизации квантовой хромодинамики [83], см. также [84, 85] о факторизации в процессах с зависящими от спина наблюдаемыми), в которых наблюдается большая передача импульсов, можно факторизовать, разбивая вычисление сечения на две части: одна часть (т. н. жесткая часть) включает в себя только взаимодействия с большой передачей импульса и может быть вычислена пертурбативно, тогда как вторая (мягкая часть) содержит в себе в том числе непертурбативную информацию о распределении партонов в адроне. Для значительной части физических процессов имеет место так называемая коллинеарная факторизация и партонные распределения в адронах можно считать не зависящими от поперечного импульса партонов. В этом случае можно записать ренормгрупповые уравнения для распределений партонов, так называемые уравнения ДГЛАП (Докшицер, Грибов, Липатов, Альтарелли, Паризи) эволюции [86–88]. Благодаря эволюции, распределения партонов в адронах типичные значения долей продольного импульса (в дальнейшем x) смещаются в сторону малых значений. Плотность партонов резко возрастает с увеличением $\frac{1}{x}$. При малых значениях x более нельзя

говорить о коллинеарной факторизации. Партоны в адронах при малых значениях x приобретают существенные поперечные импульсы. Так, по оценкам, значения поперечных импульсов при энергиях RHIC в столкновениях золота составляют ~ 2 ГэВ при $x \sim 10^{-2}$. При этом, партоны по прежнему взаимодействуют слабо. Это плотное состояние партонов в ядре в литературе носит название конденсата цветного стекла (color glass condensate).

2) В момент $\tau = 0$ происходит столкновение ядер и партоны, находящиеся в различных ядрах, начинают взаимодействовать между собой. Согласно соотношению неопределенности раньше всех взаимодействуют между собой жесткие партоны. В этих взаимодействиях рождаются жесткие струи и лептоны, являющиеся хорошими экспериментальными пробами образующейся позже материи.

3) Позже (при характерных временах ~ 0.2 фм/с) взаимодействует основная масса партонов, составлявших начальные состояния ядер. На этих временах формируется основная часть множественности частиц в столкновениях. Вследствие больших чисел заполнения партонов в конденсате цветного стекла, динамика процесса может быть описана квазиклассически. Характерной особенностью классических решений (в координатах и калибровке светового конуса решение можно получить аналитически) уравнений квантовой хромодинамики является наличие исключительно продольных хромоелектрических и хромоманнитных полей в момент $\tau = 0$. Последующая квантовая эволюция во времени указанного начального состояния может быть описана лишь численно. Эту неравновесную динамическую партонную систему принято называть глазмой [30].

4) Данные RHIC и LHC, а также результаты численного моделирования

указывают на то, что плотная система партонов достигает по крайней мере частичного равновесия в течение достаточно короткого времени ($\sim 1/c$). Как уже было сказано, свойства коллективных потоков в экспериментах на RHIC и LHC указывают на малую гидродинамическую вязкость образовавшегося равновесного состояния (подробнее об этом см. ниже). Следует также отметить, что численная симуляция начального состояния (см. например [25]) свидетельствуют о локальной неоднородности состояния вещества на этой (а также следующей) стадии. Также источником неоднородностей является развитие турбулентности, возникающей вследствие наличия неустойчивости по отношению к поперечным флуктуациям в динамической эволюции глазмы ([29]), а также присутствие хромодинамических аналогов электромагнитных плазменных неустойчивостей.

5) На этой стадии вещество расширяется и остывает. Вследствие остывания равновесие достигается только локально. Остывание происходит вплоть до температуры перехода деконфайнмент-конфайнмент при значениях $T_c \sim 150 - 180$ МэВ. Для ядер свинца на LHC по оценкам последняя достигается спустя время ~ 10 фм/с после столкновения ядер.

6) Даже после адронизации плотность и температура адронного газа по прежнему велики. Вплоть до времен ~ 20 фм/с адронный газ продолжает остывать и расширяться

7) На этой стадии адроны перестают взаимодействовать между собой и продолжают двигаться практически свободно вплоть до распада или попадания в детектор.

Настоящая диссертация посвящена исследованию коллективных эффек-

тов, проявляющихся на стадиях 4) и 5).

Среди результатов, полученных на RHIC, следует выделить уже упоминавшуюся двугорбую структуру в топологии двух-трехчастичных корреляций адронов в экспериментах STAR и PHENIX (подробнее в основной части диссертации). Одним из возможных объяснений этого эффекта является наличие черенковского излучения глюонов ([26], [27], [28]) в среде, образовавшейся на стадиях 4) и 5), хотя следует отметить существование других моделей, позволяющих описать эффект: в частности, заслуживают внимание решения типа волн Маха релятивистской гидродинамики [31] (тем не менее в моделях, основанных на таких решениях, имеются проблемы с сильными корреляциями на углы порядка 0, которые не наблюдаются в эксперименте [32]), а также модели, в которых двугорбая структура может быть получена как результат гидродинамического развития неоднородностей начального состояния [33]. Среди ярких эффектов, наблюдаемых на RHIC и LHC, можно отметить уже упоминавшийся эффект гашения струй в столкновениях ядер. Первая глава диссертации посвящена исследованию черенковского излучения в сильновзаимодействующей среде. На основе численного моделирования черенковского излучения глюонов оцениваются параметры среды, позволяющие описать экспериментальные данные с RHIC, а также потери на черенковское и переходное излучение на неоднородностях.

Вторая глава диссертации посвящена турбулентности в кварк-глюонной плазме. Рассматриваются различные свойства указанного состояния материи, приведено вычисление поляризационных свойств турбулентной кварк-глюонной плазмы в низшем порядке по турбулентным пульсациям.

Наконец, третья глава посвящена исследованию переходного излучения на

случайных неоднородностях в сильно взаимодействующей среде. Оценивается вклад эффектов переходного излучения к черенковским глюонам в плазме. Также продемонстрирована малость потерь на переходное излучение на случайных неоднородностях в плазме.

Глава 1

Феноменология цветного черенковского излучения

1.1 Введение

Обнаружение двугорбой структуры в столкновениях ядер золота при энергиях 200 ГэВ/нуклон в экспериментах STAR ([47], [48]) и PHENIX ([49], [50], [51]) возродило интерес к феномену черенковского излучения в квантовой хромодинамике. Первоначально идея о возможности наблюдения черенковских глюонов в столкновениях ядер была рассмотрена в работе [26] для интерпретации некоторых кольцевых событий, полученных в экспериментах с космическими лучами. Также как и в электродинамике, черенковское излучение глюонов в среде возможно в том случае, когда значение реальной части хромоэлектрической проницаемости ([46]) в среде превышает единицу. Вычисление поляризационных свойств плотной сильновзаимодействующей среды, вообще говоря, представляет собой весьма нетривиальную задачу. Аналитические расчеты поляризационных свойств можно провести в приближении равновесного газа кварков и глюонов (кварк-глюонная плазма) [52]. В рамках этой модели значение реальной части цветной проводимости не превышает единицу. Также поляризационные свойства (как и прочие свойства вещества, не зависящие от времени в пространстве Минковского) равновесного состояния кварков и глюонов можно извлекать из данных численного моделирования температурной квантовой хромодинамики на решетках. В качестве обзора аналитических вычислений и численных расчетов свойств температурных калибровочных теорий поля можно рекомендовать [53]. Тем не менее, следует отметить, что приближение плазменного газа кварков и глюонов, по всей видимости, не описывает среду, образующуюся в результате столкновений ядер на RHIC. В частности, вычисления в приближении кварк-глюонной плазмы не в состоянии объяснить малые значения наблюдаемого

на эксперименте отношения вязкости к плотности энтропии η/s . Вообще говоря, значение реальной части хромопроницаемости сильно взаимодействующего вещества (впрочем, аналогичное утверждение имеет место также в квантовой электродинамике) может превышать единицу в случае, если в ней имеются связанные состояния. В работе [54] была предложена простая модель скалярных возбуждений в кварк-глюонной плазме, приводящая к излучению черенковских глюонов. Также связь между резонансами в среде и черенковским излучением обсуждалась в работах [55], [56]. Задача полного теоретического описания состояния вещества, образующегося в результате столкновений ядер, на сегодня далека от разрешения. В связи с этим нельзя исключать возможность "выживания" резонансов (особенно интересна судьба резонансов в неравновесном состоянии, образующемся на начальном этапе после столкновения).

В данной диссертации рассматривается феноменология черенковского излучения в КХД. Вводятся феноменологические параметры реальной и мнимой части цветной проницаемости в среде и рассматривается комбинация параметров, позволяющая наилучшим образом описать экспериментальные данные. В случае идеально прозрачного вещества, как и в абелевом случае, хромодинамический эффект Вавилова-Черенкова отличает фиксированный угол излучения глюона и спектр излучения задается широко известной формулой Тамма-Франка. Однако на эксперименте наблюдаются размазанные распределения. За размазывание распределения по углам может отвечать как конечная длина распространения источника в веществе (этот эффект был рассмотрен в [57] и не приводит к существенному уширению распределений в условиях распространения жесткой частицы сквозь плотную ядерную среду), так и наличие

поглощения в среде. Величиной, описывающей поглощение в среде является мнимая часть хромопроницаемости. В данной диссертации рассмотрена комбинация уширения за счет непрозрачности среды и дополнительного уширения за счет комбинации эффектов адронизации и перерасеяния, что позволяет количественно описать данные с RHIC.

Одной из наиболее важных задач, стоящих перед современной теорией взаимодействия ядер, является количественное описание эффекта гашения струй – подавления числа частиц с большими поперечными импульсами. Черенковское излучение является собой сильный когерентный эффект. В связи с этим в случаях, когда область частот, на которых величина реальной части проницаемости больше единицы, достаточно велика, потери на черенковское излучение могут достигать существенных значений. Таким образом потери на черенковское излучение могут давать существенный вклад в эффект гашения струй. В настоящей диссертации также приведена оценка этих потерь.

1.1.1 Хромопроницаемость

Удобным феноменологическим способом описания свойств ядерной материи является хромопроницаемость, позволяющая учесть влияние внутренних токов [61] в веществе.

В древесном приближении динамика полей Янга-Миллса в среде описывается следующим уравнением:

$$D_{\mu}^{ab} F_b^{\mu\nu} = j_{ext.}^{a\nu} + j_{ind.}^{a\nu} \quad (1.1)$$

где $j_{ext.}^a$ – внешний ток в среде, а $j_{ind.}^a$ – индуцированный ток в среде.

a и c – цветовые индексы, μ, ν – лоренцевы индексы.

Ковариантная производная выражается формулой:

$$D_\mu^{ac} = \partial_\mu \delta^{ab} + gf^{abc} A_\mu^b \quad (1.2)$$

где A_μ^a – потенциал калибровочного поля, g – константа сильного взаимодействия.

Тензор калибровочного поля квантовой хромодинамики $F_{\mu\nu}^a$ выражается через потенциал калибровочного поля посредством формулы:

$$F_a^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.3)$$

При малых локальных калибровочных преобразованиях полей материи $\exp(i\alpha_a(x)t^a)$ (здесь t^a – матрицы векторного представления алгебры КХД $su(3)$) потенциал преобразуется как:

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + D^{ab} A_\mu^b \quad (1.4)$$

Тогда как тензор $F_{\mu\nu}^a$ преобразуется по присоединенному представлению калибровочной группы:

$$F_{\mu\nu}^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a + gf^{abc} \alpha^b F_{\mu\nu}^c \quad (1.5)$$

В случае, когда константа связи КХД мала, можно воспользоваться абелевым приближением. В этом приближении цветовые компоненты калибровочных полей Янга-Миллса преобразуются так же, как и электромагнитное поле классической электродинамики. В однородной и стационарной среде уравнение (1.1) для компонент хромоелектрического поля принимает вид (следует отметить, что в абелевом приближении хромоелектрические и хромомангнитные поля калибровочно инвариантны):

$$\left[\omega^2 \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - k^2 \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \right] E_{tot,j}^a = \frac{4\pi\omega}{\iota} j_{ext,i}^a \quad (1.6)$$

Здесь, в полной аналогии с электродинамикой [64], был введен тензор хромопроницаемости ε_{ij} , позволяющий в линейном приближении учитывать вклад индуцированных токов. В изотропной среде имеются всего лишь две независимые компоненты тензора цветной проницаемости:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \varepsilon_T + \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \varepsilon_L \quad (1.7)$$

Вещественная часть компонент тензора хромопроницаемости определяет фазовую скорость распространения сигнала в среде в соответствующем направлении, тогда как мнимая часть – его поглощение, что непосредственно следует из дисперсионных уравнений.

Для оценки свойств хромопроницаемости можно воспользоваться стандартными соотношениями теории рассеяния. В приближении разреженной среды проницаемость выражается через вещественную часть амплитуды рассеяния вперед для соответствующего кванта (например, поперечно или продольно поляризованного глюона) посредством следующей формулы ([59, 60]):

$$Re\Delta\varepsilon = Re\varepsilon - 1 = \frac{4\pi N_s ReF_0(\omega)}{\omega^2} = \frac{N_s \sigma(\omega) \rho(\omega)}{\omega} \quad (1.8)$$

Здесь ω энергия кванта взаимодействия, F_0 – амплитуда рассеяния вперед, N_s – плотность рассеивающих центров в среде, σ – полное сечение рассеяния кванта с данной энергией, ρ – отношение действительной части амплитуды рассеяния вперед к мнимой.

При переходе от второго к третьему равенству использовалась оптическая теорема:

$$ImF_0(\omega) = \frac{\omega}{4\pi} \sigma(\omega) \quad (1.9)$$

Из-за непертурбативных эффектов теоретическое вычисление амплитуды рассеяния представляет собой неразрешимую на данный момент задачу, одна-

ко она может извлекаться из экспериментов по упругим и неупругим столкновениям адронов. Для резонансных состояний вещественная часть амплитуды рассеяния положительна слева от пика и отрицательна справа от него. Комбинированный эффект от множества резонансов может приводить к превышению значения хромопроницаемости над единицей в достаточно широком диапазоне частот.

1.1.2 Потери энергии и черенковское излучение частицы в среде.

Удобным методом вычисления энергетических потерь партона в среде является вычисление работы, произведенной индуцированными зарядами над высокоэнергетической частицей, движущейся в среде [64, 65], благодаря которому можно получить следующую формулу для потерь на единицу длины:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\mathbf{v}}{v} q^a \operatorname{Re} \mathbf{E}_{ind}^a(x = \mathbf{v}t, t) \quad (1.10)$$

E_{ind}^a – индуцированное хромоэлектрическое поле в веществе,

здесь \mathbf{v} – скорость партона (в случае, когда потери частицы на единицу длины невелики, скорость можно считать постоянной),

q^a – цветной заряд партона (нормировка – $q^a q^a = C_{V(A)} \alpha_s$; $C_{V(A)}$ – инвариант Казимира для соответствующего представления калибровочной группы; α_s – константа связи квантовой хромодинамики).

Как и следовало ожидать потери энергии не зависят от хромомагнитного поля, поскольку последнее не совершает работы над зарядом.

Далее, в абелевом приближении линейной хромодинамики, используя уравнение для хромоэлектрического поля в изотропной среде (1.6), можно полу-

чить:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{C_{V(A)}\alpha_s}{2\pi^2v} \int d^3k \left(\frac{\omega}{k^2} \left(\text{Im}[\varepsilon_L^{-1}] + (v^2k^2 - \omega^2)\text{Im}[(\omega^2\varepsilon_T - k^2)^{-1}] \right) \right)_{\omega=\mathbf{k}\mathbf{v}} \quad (1.11)$$

Таким образом задача о вычислении потерь в среде сводится к задаче о вычислении компонент тензора хромоэлектрической проницаемости.

Вообще говоря, интеграл (1.11) может содержать инфракрасные или ультрафиолетовые расходимости. В этом случае необходимо ввести обрезание по импульсу интегрирования. В качестве естественной шкалы ультрафиолетового обрезания, например, можно принять энергию частицы, для которой вычисляются потери.

Нули знаменателей пропагаторов в (1.11) свидетельствуют о распространении квазичастиц в среде. Так, например, в плазме возникает полюс продольного пропагатора, отвечающий за распространение плазмонов. Черенковское излучение возникает в следствие наличия полюса поперечного пропагатора на действительной оси при значениях хромопроницаемости, превышающих единицу.

Ниже приведен вывод распределения черенковского излучения по углам и импульсам для случая хромопроницаемости (диэлектрической проницаемости) в классическом пределе (квантовое черенковское излучение в электродинамике рассмотрено в работе [62]; вывод формул для черенковского излучения глюонов для случая действительной хромопроницаемости рассмотрен в работе [63]).

Рассмотрим поперечную часть интеграла потерь (1.11) (здесь z – направление распространения частицы):

$$\frac{dE}{dz} = \frac{iC_{V(A)}g^2}{2\pi^2} \int d\omega \int d\mathbf{k} \frac{\omega \mathbf{k}^2 v^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{\mathbf{k}^2 \mathbf{k}^2 - \omega^2 \varepsilon(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \quad (1.12)$$

далее в рассматриваемом случае ультрарелятивистской частицы вектор скорости частицы $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) = (0, 0, 1)$.

Таким образом в цилиндрических координатах (k, \mathbf{q}, ϕ) предыдущее выражение принимает вид:

$$\frac{dE}{dz} = \frac{iC_{V(A)}g^2}{\pi} \int d\omega \omega \int_0^{+\infty} dq q^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{k^2 + q^2} \frac{1}{k^2 + q^2 - \varepsilon(\omega)\omega^2} \quad (1.13)$$

Угол излучения глюона определяется отношением компонент вектора Пойнтинга:

$$\tan^2(\theta) = \frac{S_z^2}{S_\rho^2} = \frac{E_z(\omega, \mathbf{k})}{E_\rho(\omega, \mathbf{k})} = \frac{\mathbf{q}^2}{k^2} \quad (1.14)$$

Пусть $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega)$, тогда короткое вычисление приводит к следующему выражению для спектра испускаемых глюонов (необходимо также учесть свойства $\varepsilon_1(-\omega) = \varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(-\omega) = -\varepsilon_2(\omega)$, которые непосредственно следуют при наложении запаздывающих условий на решения волнового уравнения в среде):

$$\frac{1}{\omega} \frac{d^3W}{dzd\omega d(\tan^2 \theta)} = C_{V(A)}g^2 \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \mathcal{P} [\tan^2 |\zeta(\omega), \Gamma(\omega)] \quad (1.15)$$

здесь:

$$\mathcal{P} [\tan^2 |\tilde{\zeta}(\omega), \tilde{\Gamma}(\omega)] = \frac{1}{\pi} \frac{\tilde{\Gamma}(\omega)}{(\tan^2 \theta - \tilde{\zeta}(\omega))^2 + \tilde{\Gamma}^2(\omega)} \quad (1.16)$$

В свою очередь,

$$\tilde{\zeta}(\omega) = \varepsilon_1(\omega) - 1 \quad (1.17)$$

$$\tilde{\Gamma}(\omega) = \varepsilon_2(\omega)$$

Далее после перехода к переменной $\cos \theta$, распределение принимает вид [66,67]:

$$\frac{1}{\omega} \frac{d^3W}{dzd\omega d \cos \theta} = \frac{2C_{V(A)}g^2}{\pi} \frac{\cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \Gamma(\omega)}{(\cos^2 \theta - \zeta(\omega))^2 + \Gamma^2(\omega)} \quad (1.18)$$

где:

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \\ \Gamma &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\end{aligned}\tag{1.19}$$

При $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ (1.18) переходит в распределение Тамма-Франка [77] (для ультрарелятивистской частицы):

$$\frac{1}{\omega} \frac{d^3W}{dzd\omega d\cos^2\theta} = C_{V(A)} g^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon(\omega)}\right) \delta(\cos^2\theta - 1/\varepsilon(\omega))\tag{1.20}$$

1.1.3 Кольцевые события на RHIC. Эксперимент.

Ниже представлено краткое изложение экспериментальных методов определения двухчастичных корреляций в столкновениях ядер.

Определяющей характеристикой струй в соударениях частиц является коллимированный поток адронов в направлении родительских партонов. Для экспериментальных исследований струй используются специализированные алгоритмы реконструкции. Однако прямая реконструкция струй в столкновениях ионов – непростая задача, вследствие малого отношения сигнала к шуму.

Измерения двухчастичных корреляций по азимутальному углу $\Delta\phi$ представляет собой замечательную альтернативу определений свойств первоначального распределения партонов в столкновениях ядер. Для измерения указанных корреляций зарегистрированные адроны делятся на два класса: адроны-триггеры и адроны-партнеры. При анализе данных также выбирают окна по поперечным импульсам для адронов-триггеров и адронов-партнеров. Окна по p_T , вообще говоря, различаются для различных классов адронов. Далее строится распределение по разнице азимутальных углов $\Delta\phi$ между триггерной частицей и частицей партнером в результате усреднения по множеству

событий. Тем самым решаются проблемы, возникающие в связи с наличием значительных фоновых шумов в индивидуальном столкновении, а также появляется возможность экспериментального исследования распределений партонов вплоть до значений поперечных импульсов порядка ГэВ.

В лидирующем порядке квантовой хромодинамики в связи с сохранением импульса в двухчастичном рассеянии угол в плоскости перпендикулярной оси столкновений между начальными партонами с большими поперечными импульсами практически равен π (с точностью до малой поправки связанной с наличием ненулевого поперечного импульса сталкивающихся партонов). Однако, в дальнейшем, в связи с процессами перерассеяния, излучения и фрагментации обратный пик при значениях разницы азимутального угла $\sim \pi$ размывается (см. экспериментальные графики, приведенные ниже).

Рассмотрим типичные характеристики, используемые при обработки двухчастичных корреляций в столкновениях ядер. Одной из таких характеристик является доля адронных пар (в литературе используется аббревиатура JPY, Jet Pair Yield), которая представляет собой нормированное на число событий дифференциальное распределение пар адронов:

$$JPY(p_T^a, p_T^b, \Delta\phi) \equiv \frac{d^3 N^{ab}}{dp_T^a dp_T^b d\Delta\phi} \quad (1.21)$$

здесь $p_T^{a(b)}$ – модуль поперечного импульса адрона-триггера (партнера), N^{ab} – количество зарегистрированных пар адрон-триггер, адрон-партнер, N_{evts} – число событий

Также используется доля адронных пар, отнесенная к адронам-триггерам (обозначается как Y_{jet_ind}):

$$Y_{jet_ind} \equiv JPY(p_T^a, p_T^b, \Delta\phi) \Big/ \frac{dN^a}{N_{evts} dp_T^a}. \quad (1.22)$$

В первом порядке двухчастичные корреляции вблизи направления частицы триггера связаны с фрагментацией партона в два адрона, тогда как азимутальные корреляции на углы порядка π связаны с фрагментацией партона a в адрон плюс фрагментацией партона b адрон.

В столкновениях ядер присутствует модификация сечения рождения адронов и пар адронов за счет коллективных эффектов, связанных с наличием среды. Она может быть учтена сравнением рождения адронов (адронных пар) в столкновениях протонов и ядер. Таким образом, вводится величина ядерной модификации сечения рождения одного адрона:

$$R_{AA}(p_T) \equiv \frac{1/\sigma_{AA} \cdot d\sigma_{AA}/dp_T}{\langle N_{col} \rangle / \sigma_{pp} \cdot d\sigma_{pp}/dp_T}, \quad (1.23)$$

здесь $\langle N_{col} \rangle$ – среднее число попарных столкновений протонов для заданной центральности, определяемое методом Глаубера.

Аналогично, модификация доли адронных пар в ядре определяется соотношением:

$$J_{AA} \equiv \frac{JPY_{AA}}{\langle N_{col} \rangle JPY_{pp}}, \quad (1.24)$$

а модификация доли адронных пар к адронам-триггерам:

$$I_{AA} \equiv \frac{Y_{jet_ind}^{AA}(p_T^a, p_T^b)}{Y_{jet_ind}^{pp}(p_T^a, p_T^b)}. \quad (1.25)$$

В отсутствии эффектов среды указанные величины оказались бы равны единице.

Для жестких адронов величина I_{AA} является оптимальной характеристикой. Действительно, в следствие крутого спада функций фрагментации струй, вероятность рождения более чем одного жесткого адрона от одной струи мала, в связи с этим $Y_{jet_ind}^{pp}$ характеризует отношение числа пар струй к общему числу струй, тогда как I_{AA} характеризует ядерную модификацию отношения

количества обратных струй к числу струй. Однако, для средних и жестких адронов указанное соответствие между струями и адронами отсутствует, поэтому обычно используется величина J_{AA} .

Источником корреляций адронов в столкновениях протонов и ядер могут быть как коллективные потоковые эффекты (такие, например, как v_2), так и эффекты, связанные с фрагментацией струй в адроны. Для того, чтобы выделить последние, необходимо вычесть азимутальные корреляции, связанные с эллиптическим потоком.

Азимутальная корреляционная функция определяется соотношением:

$$C(\Delta\phi) = \frac{N_{same}(\Delta\phi)}{N_{mixed}(\Delta\phi)}, \quad (1.26)$$

где $N_{same}(\Delta\phi)$ и $N_{mixed}(\Delta\phi)$ – это распределение диадронных пар, наблюдаемых в одном событии и разных событиях соответственно. Распределение пар в разных событиях вычисляется следующим образом: азимутальное распределение адронов-партнеров по отношению к адронам-триггерам выбираются из разных событий с одинаковыми значениями центральности. Форма распределения N_{mixed} определяется угловым разрешением и эффективностью детектора, однако, не содержит физических корреляций. Далее:

$$\int d\Delta\phi N_{mixed}(\Delta\phi) = N_{evts} \langle n_a \rangle \langle n_b \rangle, \quad (1.27)$$

здесь N_{evts} число событий, тогда как n_a и n_b – среднее число зарегистрированных адронов-триггеров и адронов-партнеров в событии.

Наличие эллиптического потока вносит неизотропную поправку к комбинаторному распределению адронов, пропорциональную фактору $\xi(1 + 2v_2^a v_2^b \cos(\Delta\phi))$ (где v_2^a и v_2^b – средние значения эллиптического потока в событии для адронов-триггеров и адронов-партнеров соответственно). Таким образом,

распределение диадронных пар может быть представлено в виде:

$$N^{same}(\Delta\phi) = \xi(1 + 2v_2^a v_2^b \cos(2\Delta\phi))N^{mixed}(\Delta\phi) + Jet(\Delta\phi), \quad (1.28)$$

здесь член $Jet(\Delta\phi)$ в правой части представляет собой вклад, связанный с парами струй.

Далее несложно видеть, что величину ξ можно вычислить из соотношения:

$$\xi = \frac{\langle n_a n_b \rangle}{\langle n_a \rangle \langle n_b \rangle}. \quad (1.29)$$

Метод вычисления величины ξ с помощью этой формулы носит название ABS (absolute combinatoric background subtraction method; метод полного вычитания комбинаторного фона). У этого метода есть недостаток, связанный с тем, что от события к событию число адронов-триггеров и адронов-партнеров коррелируют, при этом между их числом имеется существенная положительная корреляция (чем больше множественность в событии, тем больше как адронов-триггеров, так и адронов-партнеров). Таким образом, среднее $\langle n_a n_b \rangle$ может оказаться больше $\langle n_a \rangle \langle n_b \rangle$ (в этом случае $\xi > 1$). На практике, как правило, используют некоторую модификацию метода.

Также для определения ξ используется метод ZYAM (zero yield at minimum, нулевой выход в минимуме). Метод основывается на предположении, что функция $Jet(\Delta\phi)$ принимает значение ноль в точке своего минимума, которое, в свою очередь, выполняется в пределе, при котором адроны от пары струй не перекрываются (на практике это не всегда так).

После того, как ξ определено, отношение диадронных пар, сформированных из пар струй к комбинаторному фону вычисляется согласно:

$$JPR(\Delta\phi) = \frac{Jet(\Delta\phi)}{N_{mixed}(\Delta\phi)} = \frac{N_{same}}{N_{mixed}} - \xi(1 + 2v_2^a v_2^b \cos(2\Delta\phi)). \quad (1.30)$$

Для определения эллиптического потока использовался метод плоскости реакции. В соответствие с этим методом, сначала из анализа множественность частиц в событии определяется плоскость реакции события (это экспериментально определенное значение, вообще говоря, не обязательно совпадает с истинной плоскостью реакции; как правило используется термин плоскость события), а затем определяется v_2 по формуле:

$$\langle\langle \cos 2(\phi - \Phi_{EP}) \rangle\rangle, \quad (1.31)$$

здесь Φ_{EP} - азимутальный угол плоскости события. В формуле два усреднения: одно усреднение по трекам частиц в событии, второе усреднение – по событиям в заданной области центральностей (центральность события восстанавливается из общей множественности, либо из оценки числа зрителей – непрореагировавших нуклонов).

Экспериментальные данные коллаборации PHENIX

Коллаборация PHENIX проводила измерения двухадронных корреляций на основе minimum bias (минимальное вычитание) данных столкновения ядер золота и протонов с ускорителя RHIC при энергиях в системе центра масс в 200 ГэВ/нуклон в 2004-2005 годах.

Центральность столкновения определялось из оценки числа зрителей на основе данных субдетекторов BBC (beam-beam counters) и ZDC (zero degree calorimeter, калориметр на малые углы). Для достаточной статистики в бинах по поперечному импульсу в анализе экспериментальных данных проводилась грубая разбивка по центральноностям: 0 – 20%, 20 – 40%, 40 – 60%. Для оценки числа участников и числа бинарных столкновений использовалась программа, использующая метод монте-карло, основанная на модели Глаубера.

Треки адронов измерялись с помощью дрейфовых камер, расположенных вне центрального магнитного поля на расстоянии 2 метра от точки взаимодействия и двух слоев многопроводных пропорциональных камер (PC1 и PC3), расположенных на расстоянии 2.5 метров и 5 метров соответственно. В целом система измерения треков PHENIX представляет собой два крыла в центральной области, покрывающих интервал псевдобыстрот от -0.35 до $+0.35$ и области азимутального угла шириной 90° каждая. Разрешение по импульсам составляло $(0.7\% \oplus 1\%) \times p$ (ГэВ/с).

Результаты оказались устойчивы по отношению к выбору конкретного метода вычитания фона (ZYAM либо ABS, см. выше). Ниже приведены примеры графиков диадронных корреляций для различных значений центральностей и выборок по поперечному импульсу для адронов-триггеров и адронов-партнеров.

Экспериментальные данные коллаборации STAR

Коллаборация STAR также представила данные двухадронных корреляций по результатам измерений столкновений ядер золота при энергии в системе центра масс в 200 ГэВ/нуклон в 2004-2005 годах.

Центральность столкновений также определялась на основе данных субдетекторов STARa BBC (beam-beam counters) и ZDC (zero degree calorimeter, адронный калориметр на малые углы), данные которых также использовались триггером события.

Треки адронов измерялись с помощью системы время-проекционных камер TPC (time projection chamber). Внутренний и внешний радиус трековой системы, измеренной от оси пучка составляют 0.5 и 2 метра соответственно.

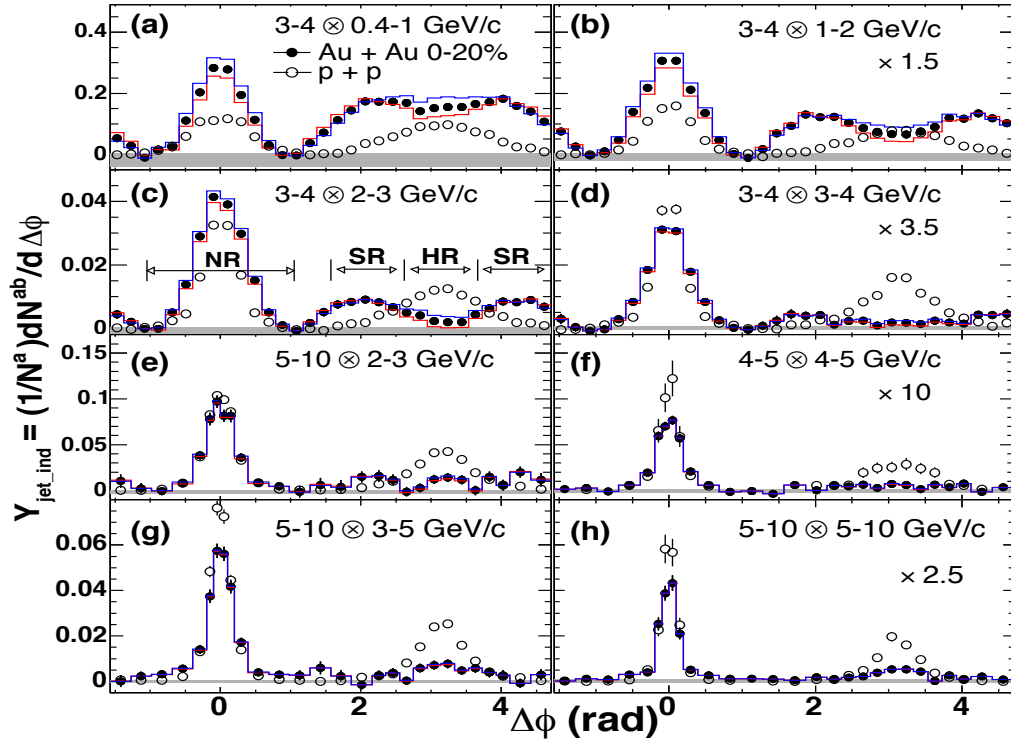


Рис. 1.1: Доля адронных пар по отношению к адронам-триггерам как функция азимутального угла $\Delta\phi$ для различных значений поперечного импульса адрона-триггера и адрона-партнера для столкновений протонов и столкновений золота с центральностями 0 – 20%; данные в правой части масштабированы (данные коллаборации PHENIX [51]).

Трековая система покрывает все азимутальные углы и область псевдобыстрот $|\eta| < 1.8$

Для вычитания фона использовалась процедура ZYA1 (zero yield at 1, нулевой выход при 1). Согласно этому функция $Jet(\Delta\phi)$ принимает нулевое значение при $\Delta\phi = 0$, которое, впрочем, соответствует минимуму. Адроны-триггеры измерялись при значениях псевдобыстрот $|\eta_{Trig.}| < 0.7$, адроны-триггеры – при $|\eta_{Assoc.}| < 1$

Экспериментальные данные коллаборации STARa, а также сравнение с моделью излучения черенковских глюонов будут приведены ниже в тексте дис-

сергации.

1.2 Наблюдение излучения черенковских глюонов.

Результаты, изложенные ниже были получены в работе автора в соавторстве с А. В. Виноградовым, И. М. Дреминым и А. В. Леонидовым [150].

1.2.1 Простая модель.

Для иллюстрации кинематики черенковского излучения в столкновениях ядер полезно рассмотреть следующую простую модель: пусть пары партонов ядер рассеиваются на угол в 90° , а затем один из партонов испускает черенковский глюон. Тогда соотношение между углом излучения черенковского глюона и углами θ_L и ϕ_L в лабораторной системе (здесь θ_L – угол с осью столкновений, ϕ_L – азимутальный угол в плоскости перпендикулярной оси столкновений, отсчитываемый от направления обратной струи) принимает вид:

$$\cos \theta = |\sin \theta_L \cos \phi_L| \quad (1.32)$$

Тогда 1.18 принимает вид:

$$\frac{d^4 N}{dld\omega d\phi_L d \cos \theta_L} = \frac{4\alpha_s C_{V(A)}}{\pi} \frac{|\sin \theta_L \cos \phi_L (1 - \sin^2 \theta_L \cos^2 \phi_L)| \Gamma(\omega)}{(\sin^2 \theta_L \cos^2 - \zeta(\omega))^2 + \Gamma^2(\omega)} \quad (1.33)$$

В случае, если фрагментация в адроны происходит в направлении первоначального глюона, распределение адронов можно получить, проинтегрировав предыдущее уравнение по θ_L .

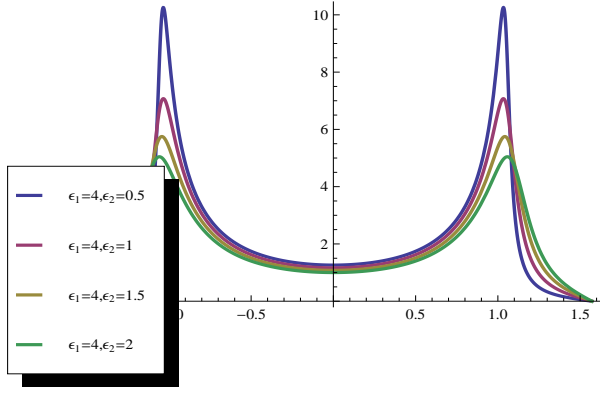


Рис. 1.2: Распределение $\frac{d^3 N}{4\alpha_s C_{V(A)} d\omega d\phi_L}$ для различных значений ε_2 при фиксированном ε_1

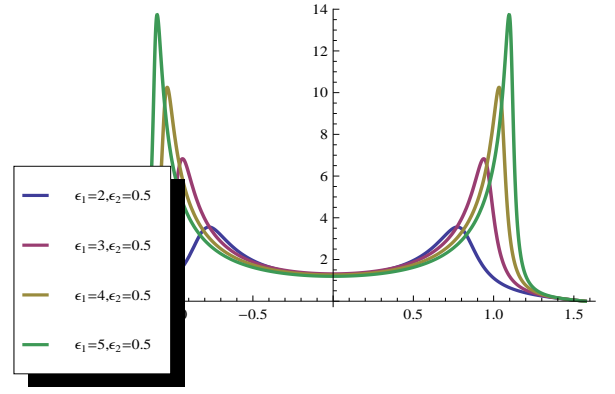


Рис. 1.3: Распределение $\frac{d^3 N}{4\alpha_s C_{V(A)} d\omega d\phi_L}$ для различных значений ε_1 при фиксированном ε_2

Интеграл можно вычислить аналитически. В результате получается распределение (зависимости переменных Γ , A и B от ω опущены для краткости):

$$\frac{d^3 N}{d\omega d\phi_L} = 4\alpha_s C_{V(A)} \frac{\Gamma}{|\cos \phi_L|} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 + (\cos^2 \phi_L - \zeta)^2}} \frac{1}{A^2 + B^2} \right\} \times$$

$$\left[\left(A + (1 - \zeta) \frac{B}{\Gamma} \right) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{A^2 + B^2} + A \right)} - \left(B + (1 - \zeta) \frac{A}{\Gamma} \right) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{A^2 + B^2} - A \right)} \right] \quad (1.34)$$

здесь,

$$A(\omega, \phi_L) = \Gamma^2(\omega) + \zeta^2(\omega) - \zeta(\omega) \cos^2 \phi_L$$

$$B(\omega, \phi_L) = \Gamma(\omega) \cos^2 \phi_L \quad (1.35)$$

Максимум распределения приходится на угол $\arccos \zeta$. Также, как легко можно заметить, в случае, когда выполняется неравенство $\varepsilon_2^2 \ll \varepsilon_1^2$ положение максимума практически полностью определяется значением ε_1^2 , тогда как ширина определяется ε_2 . Существенным также является тот факт, что функция распределения принимает значение 0 при углах больше $\frac{\pi}{2}$. Свойства распределения иллюстрируют Рис. 1.2 и Рис. 1.3.

1.2.2 Монте-карло процедура для генерации черенковского спектра.

Для генерации черенковского спектра необходимо осуществить следующие действия:

- (а) описать кинематику распределения пар начальных партонов, являющихся источником вторичных черенковских глюонов;
- (б) осуществить процедуру генерации спектра черенковских глюонов с учетом распределения источников;
- (в) описать адронизацию глюонов в адроны и учесть экспериментальные ограничения на псевдобыстроты, азимутальный угол и поперечные импульсы адронов.

Также для решения задачи необходимо определить конкретные зависимости $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$. Поскольку в данный момент не существует модели, позволяющей вычислить поляризационные свойства КХД-материи вне приближения слабой связи, можно попытаться ограничиться простейшими предположениями о частотных свойствах хромопроницаемости. Принимая во внимание, что импульсное окно, в котором наблюдается двугорбая структура достаточно узкое (~ 2 ГэВ), можно в первом приближении положить $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$ (не рассматривается зависимость от волнового вектора \mathbf{k} , таким образом здесь пренебрегается возможной пространственной дисперсией хромопроницаемости) постоянными в рассматриваемом интервале. Предполагается, что область энергий, в которой $\varepsilon_1(\omega) > 1$, ограничена значениями максимальной частоты ω_{\max} . Таким образом:

$$\frac{d^2 N}{d\omega dl} \propto \theta(\omega_{\max} - \omega), \quad (1.36)$$

ω_{\max} характеризуется верхней границей энергии резонансов в ядерной среде.

Таким образом, ω_{max} представляет собой один из параметров модели. В нашей модели выбиралось значение энергии ω_{max} в 3.5 ГэВ, исходя из того, что в эксперименте не наблюдается двугорбая структура при значениях энергии обратной струи больших 3 ГэВ. К тому же анализ показал, что результаты слабо зависят от величины ω_{max} .

Для того чтобы получить кинематику первоначальных партонных пар рассматривались столкновения протонов в 200 ГэВ в генераторе адронных столкновений RUTHIA [78]. Таким образом пренебрегалось ядерной модификацией функции распределения.

Далее была написана Монте-Карло процедура для генерации черенковских глюонов согласно распределению (1.18) вокруг направления обратного партона.

Для того чтобы перейти к следующему этапу необходима процедура, позволяющая преобразовать партоны в адроны. Описание адронизации осуществлялось с использованием фрагментационных функций $D_{q(g)}^h(x, \mathbf{p}_\perp | Q^2)$, которые описывают вероятность адронизации партона $q(g)$ с виртуальностью Q^2 в адрон h с долей продольного импульса x и поперечным импульсом \mathbf{p}_\perp . В предположениях гипотезы мягкого обесцвечивания (которая показала себя в качестве хорошего приближения при интерпретации экспериментальных данных в столкновениях лептонов) форма распределения адронов совпадает с распределением глюонов, т. е. $D_g^h(x, \mathbf{p}_\perp | Q^2) \propto \delta(1 - x)$. Однако, вследствие рассеяния на партнонах среды условия, гипотезы мягкого обесцвечивания в ядрах не выполняются. К тому же, как видно из Рис. 1.2 и Рис. 1.3, в области углов $|\Delta\phi| > \frac{\pi}{2}$ корреляция глюонов отсутствует. Мы сосредоточили наше внимание на фрагментации глюонов в легкие адроны, поскольку эксперимен-

тальная доля остальных резонансов мала (в частности $\rho : \omega : \phi = 10 : 2 : 1$ согласно [76]). Для учета поперечного импульса, приобретаемого глюоном, использовалась следующая параметризация фрагментационных функций:

$$D_g^h(x, \mathbf{p}_\perp | Q^2) \propto D_g^h(x, | Q^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_\perp^2}} \exp\left\{-\frac{\mathbf{p}_\perp^2}{2\Delta_\perp^2}\right\}, \quad (1.37)$$

где Δ_\perp – параметр, характеризующий размытие струи в поперечном направлении.

В качестве $D_g^{x,|Q^2}$ выбиралась фрагментационная функция для начальной виртуальности $Q_0^2 = 2$ ГэВ. Фрагментация прямой струи проводится без учета размазывания в поперечном направлении.

Следует отдельно отметить недостатки модели. Модель не учитывает каскадное излучение глюонов и кварков в начальном и конечном состоянии, дисперсионные зависимости компонент хромопроницаемости, полную геометрию среды, образовавшейся в результате столкновения, детальное описание многократного рассеяния глюона в сильно взаимодействующей среде. Также в модели не учитывался эффект распада на два черенковских глюона, рассмотренный позднее в работе [63]. Таким образом, приведенные ниже значения параметров среды представляют собой всего лишь оценку. Тем не менее, модель иллюстрирует возможность извлечения информации о сильновзаимодействующей среде на основе экспериментальных данных.

Таким образом, в конечном счете, имеется три параметра для описания экспериментальных данных STAR и PHENIX: действительная часть цветной проницаемости ε_1 , мнимая часть цветной проницаемости ε_2 и параметр, характеризующий размытие струи в поперечном направлении. На последнем этапе распределения, получаемые после осуществления Монте-Карло процедуры, приведенной выше, нормировались так, чтобы левый минимум обрат-

Эксперимент	θ_{max}	ε_1	ε_2	Δ_{\perp}
STAR	1.04 рад.	5.4	0.7	0.7 ГэВ
PHENIX	1.27 рад.	9.0	2.0	1.1 ГэВ

Рис. 1.4: Таблица оптимальных значений параметров среды, описывающих экспериментальные данные STAR и PHENIX для значений поперечного импульса обратной струи $1\text{GeV} < |\mathbf{p}_T| < 2\text{GeV}$ и $2\text{GeV} < |\mathbf{p}_T| < 3\text{GeV}$ соответственно

ной струи совпадал с левым минимумом обратной струи экспериментальных распределений двухчастичных корреляций.

В таблице ниже представлены значения параметров наилучшим образом описывающие экспериментальные данные для областей значений поперечного импульса обратной струи $1\text{GeV} < |\mathbf{p}_T| < 2\text{GeV}$ и $2\text{GeV} < |\mathbf{p}_T| < 3\text{GeV}$ для STAR и PHENIX соответственно. Следует отметить, что различные значения для ε_1 для STAR и PHENIX напрямую связаны с разницей в значениях положений максимумов θ_{max} . Указанное различие может быть вызвано необходимостью учесть зависимость ε_1 от частоты, а также возможной зависимостью свойств среды от псевдобыстроты (напомним, что области охватываемых псевдобыстрот для STAR и PHENIX различаются).

Ниже представлены сравнения экспериментальных точек распределений двухчастичных корреляций с результатами моделирования:

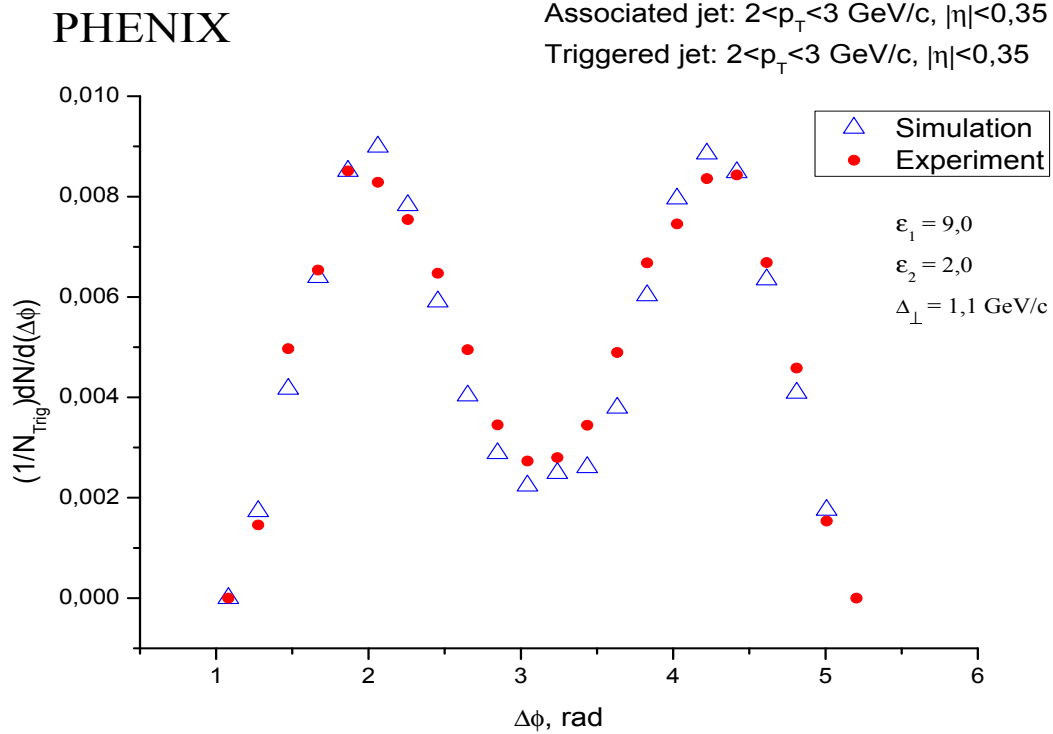


Рис. 1.5: Сравнение экспериментального распределений диадронных корреляций коллаборации PHENIX с результатами моделирования для области поперечных импульсов адронов прямой и обратной струи $2 \text{ GeV} < p_T < 3 \text{ GeV}$ и $2 \text{ GeV} < p_T < 3 \text{ GeV}$ соответственно (треугольные отметки – результаты моделирования; круглые отметки – эксперимент).

1.2.3 Оценка потерь энергии за счет излучения черенковских глюонов.

Подробные вычисления потерь на излучение черенковских глюонов с учетом квантовых эффектов представлены в работе [63].

Здесь будет представлена квазиклассическая оценка. Потери энергии на черенковское излучение можно оценить, используя цветное обобщение формулы Тамма-Франка – (1.20). Учитывая оценки, приведенные в предыдущем параграфе, можно для определенности рассмотреть потери на единицу длины

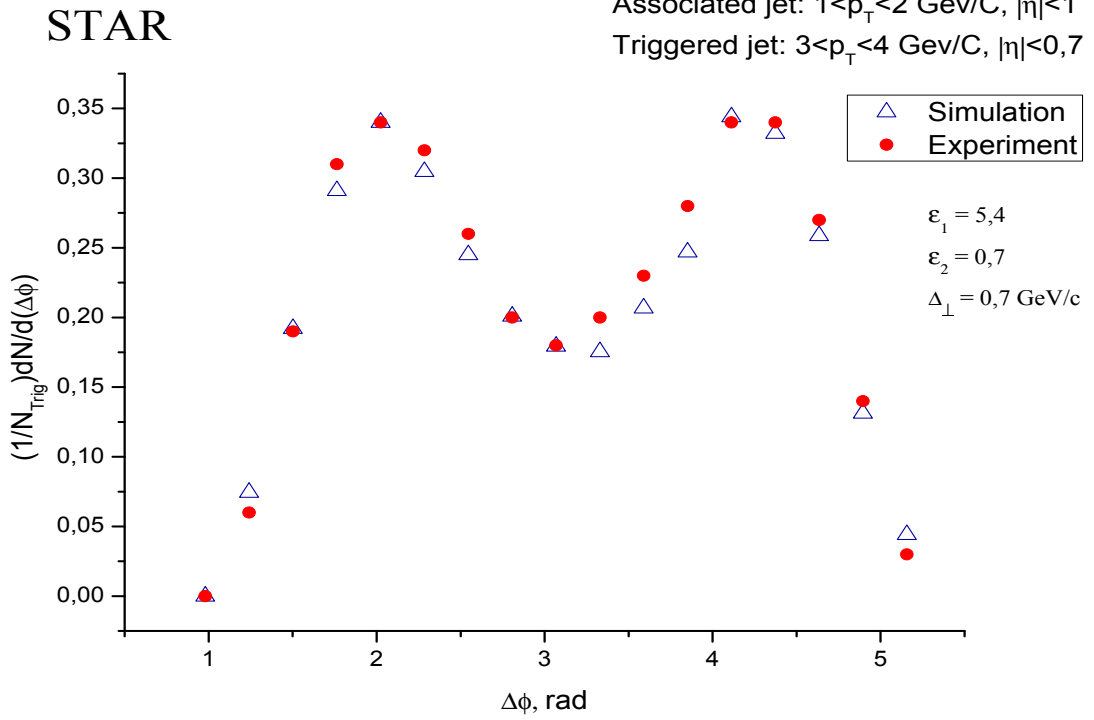


Рис. 1.6: Сравнение экспериментального распределений диадронных корреляций коллаборации STAR с результатами моделирования для области поперечных импульсов адронов прямой и обратной струи $3 \text{ ГэВ} < p_T < 4 \text{ ГэВ}$ и $1 \text{ ГэВ} < p_T < 2 \text{ ГэВ}$ соответственно (треугольные отметки – результаты моделирования; круглые отметки – эксперимент).

кварка с начальной энергией в 10 ГэВ , движущегося с ультрарелятивистской скоростью в среде, в которой дисперсионная зависимость диэлектрической проницаемости имеет вид:

$$\varepsilon(\omega) = \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{если } \omega \leq \omega_0 \text{ ГэВ} \\ 0 & \text{если } \omega > \omega_0 \text{ ГэВ.} \end{cases}$$

Тогда согласно (1.20), записав формулу в системе Гаусса, можно получить:

$$\frac{dE}{dz} = C_{F(V)} \frac{1}{0.1973} \alpha_s \int_0^{\omega_0} \omega (1 - 1/\varepsilon_0) d\omega, \quad (1.38)$$

здесь константа связи квантовой хромодинамики α_s и множитель $\frac{1}{0.1973}$

возникли в связи с переходом к системе Гаусса. Инвариант Казимира фундаментального представления группы квантовой хромодинамики $SU(3) C_V$ равен $\frac{4}{3}$.

Оценка потерь энергии согласно этой формуле приводит к величине порядка 9 ГэВ/фм для высокоэнергетичного кварка, движущегося в среде со значением $\varepsilon_0 = 7.0$.

Глава 2

Поляризация турбулентной кварк-глюонной плазмы

2.1 Введение

Естественным образом ранние стадии столкновения ядер описываются на языке классических уравнений движения для полей Янга-Миллса. Переход к классическому описанию достигается благодаря большим плотностям и, соответственно, числам заполнения мягких глюонных мод. В этой парадигме жесткие партонные составляющие структурной функции ядра выступают в роли источников для мягких глюонных мод. Решение классических уравнений движения демонстрирует, что конфигурация полей в начальный момент времени после столкновения представляет собой существенно неизотропную совокупность полей – глазму [79, 80]. Важным для последующей динамики столкновения ядер является тот факт, что продольная по отношению к оси столкновения конфигурация полей в глазме нестабильна относительно лоренц-неинвариантных квантовых флуктуаций [81]. Как показывает численный анализ, проделанный в работе [82], при последующем развитии неустойчивой динамики указанная полевая конфигурация приходит в состояние, характеризующееся турбулентным колмогоровским спектром импульсов ее мод. Чуть ранее было продемонстрировано, что колмогоровский спектр возникает в простой скалярной модели множественного рождения частиц в столкновениях ядер [94, 95]. В работе [96] было указано, что следствием турбулентности, возникающей в результате эволюции глазмы, является малая вязкость образующейся системы.

Успех применения гидродинамического подхода к описанию экспериментальных данных столкновения ядер на RHIC и LHC указывает на то, что образующаяся материя достаточно быстро достигает стадии локальной термализации. Достаточно очевидно, что модели, способные обеспечить быстрый (в

сравнении с температурой системы) переход в состояние равновесия должны быть существенно непертурбативны. В связи с этим достаточно актуальными представляются в настоящий момент подходы к изучению поведения квантовополевых теорий в режиме сильной связи с использованием дуальности между классом конформных квантовых теорий поля размерности d и теорией струн в пространстве анти-де Ситтера размерности $d + 1$ [97, 98] (дуальность AdS/CFT). Одним из следствий из AdS/CFT является тот факт, что тензор энергии импульса широкого класса квантовых теорий поля размерности d в режиме сильной связи можно описать, исследуя динамику уравнения Эйнштейна размерности $d + 1$ с отрицательной космологической постоянной [99]. Наиболее реалистичной моделью для описания коллективных свойств в столкновениях ядер, учитывающей начальную анизотропность динамики глазмы, представляется анизотропная гидродинамика. Последняя исследовалась в работах [100–104].

В свою очередь, динамика неизотропной кварк-глюонной плазмы неустойчива. Роль неустойчивостей, по всей видимости, существенна для обеспечения быстрой изотропизации системы. Вообще говоря, можно выделить два типа неустойчивостей в плазме: неустойчивости, вызванные неоднородностями в пространственном распределении частиц, составляющих плазму (гидродинамические неустойчивости) и неустойчивости, вызванные неоднородностью и неизотропностью в распределении частиц плазмы по импульсам (кинетические неустойчивости) [107]. По всей видимости наиболее существенной для феноменологии ядерных столкновений плазменной неустойчивостью является кинетическая неустойчивость Вайбеля [108–114], возникающая в случаях, когда импульсы частиц в плазме распределены неизотропно. Неизотропность ди-

динамики кварк-глюонной плазмы (последняя очевидным образом связана с геометрией столкновения ядер) приводит к тому что неустойчивость Вайбеля и связанный с ней турбулентный каскад (см. [115,116]) оказывает существенное влияние на физику ядерных столкновений. В частности в [117], [118], [119](указанные работы в значительной степени опирались на более ранние вычисления в электромагнитной плазме [120,121]) была вычислена сдвиговая вязкость турбулентной плазмы и указано, что турбулентность может представлять собой эффективный механизм, обеспечивающий наблюдаемую в эксперименте малую вязкость образующейся в результате столкновения ядер кварк-глюонной среды.

В этой части диссертации будет схематически изложен вывод для коэффициентов переноса (которые были вычислены в [117], [118] и [122]), а также будут рассмотрены поляризационные свойства изотропной турбулентной кварк-глюонной плазмы.

2.1.1 Кварк-глюонная плазма.

Основные положения кинетической теории для неабелевой плазмы

В квазиклассическом приближении макроскопические свойства кварк-глюонной плазмы полностью характеризуются одночастичными и многочастичными функциями распределения: $f(p, x, Q)$, $f(p_1, p_2, x_1, x_2, Q_1, Q_2)...$ Здесь, соответственно, p - импульс частицы, x - координата частицы, Q - цветной заряд (см. далее). Условием применимости квазиклассического приближения является малость области локализации частиц в плазме в сравнении с длиной волны калибровочного поля в ней [123]. В дальнейшем будет везде предполагаться, что условие применимости квазиклассического приближения

выполнено.

В случае, когда взаимодействие между частицами в плазме мало, для описания макроскопических характеристик плазмы достаточно информации об одночастичной функции распределения. Последнее верно вследствие того, что в этом приближении можно отбросить высшие члены иерархии кинетических уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона (ББГКИ эволюция). В дальнейшем изложении внимание будет сосредоточено на одночастичной функции распределения.

Вообще говоря, кинетическую теорию для анализа физики процессов, происходящих в плазме, можно применять только в том случае, когда плазменный параметр много меньше единицы. Рассмотрим условие применимости коллективного описания для классической и квантовой плазмы [123] вблизи равновесия. Ниже все физические константы (\hbar , c , k_B - постоянная Больцмана) в формулах будут выписаны в явном виде.

Имеет смысл рассмотреть для начала абелев случай [105, 106] классической плазмы. Равновесная функция распределения релятивистской электромагнитной плазмы (под электромагнитной плазмой здесь и везде в дальнейшем будет подразумеваться релятивистская электрон-позитронная плазма) - распределение Гиббса:

$$\hat{f}^{eq}(p_0) = \exp\left(\frac{\mu - p_0}{k_B T}\right). \quad (2.1)$$

Тогда средняя плотность частиц (которую можно вычислить, проинтегрировав функцию распределения по импульсной мере $\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$) равна:

$$\bar{N} = 8\pi \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar c}\right)^3 \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right). \quad (2.2)$$

Для того, чтобы квантовыми эффектами в плазме можно было пренебречь, необходимо выполнение условия $\exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) \ll 1$. Последнее, как несложно по-

казать, эквивалентно малости длины волны де Бройля в сравнении со средним расстоянием между частицами плазмы.

Еще одним размерным параметром плазмы помимо средней плотности частиц \bar{N} является радиус Дебая:

$$r_D^2 = \frac{k_B T}{4\pi \bar{N} e^2}. \quad (2.3)$$

Из этих двух величин можно сконструировать безразмерную величину - плазменный параметр [105]:

$$\epsilon = \frac{\bar{r}^3}{r_D^3}, \quad (2.4)$$

где \bar{r} определяется как $\bar{r} \equiv \bar{N}^{-1/3}$ и соответствует, по порядку величины, среднему расстоянию между частицами в плазме.

Коллективное описание плазменной динамики применимо только в том случае, когда плазменный параметр мал. Это означает, что в объеме области пространства, в которой проявляются коллективные эффекты в плазме (величина этой области очевидным образом связана с дебаевским радиусом), сосредоточено большое количество частиц плазмы. Это условие можно выписать в явном виде:

$$\left(\frac{4\pi}{k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \bar{N}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{\hbar c} \right)^3 \ll 1. \quad (2.5)$$

Аналогичный анализ для классической плазмы можно провести в неабелевом случае. Различие состоит в том, что выражение для дебаевского радиуса кварк-глюонной плазмы (вывод выражения для радиуса экранировки кварк-глюонной плазмы будет приведен в тексте диссертации ниже) содержит зависящий от неабелевых зарядов инвариант Казимира $C_2 = 1/2$ для кварков и $C_2 = N$ для глюонов (см. ниже):

$$r_D^2 = \frac{k_B T}{4\pi \bar{N} g^2 (\hbar c)^2 C_2}, \quad (2.6)$$

здесь как и везде далее, безразмерный параметр g - константа сильных взаимодействий.

Условие малости параметра ϵ приводит к выражению:

$$\left(\frac{4\pi C_2}{k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \bar{N}^{\frac{1}{2}} g^3 \ll 1. \quad (2.7)$$

Как видно, для того чтобы в классической неабелевой плазме (как впрочем и в абелевой) можно было использовать коллективное описание, нет необходимости требовать малости параметра g . При достаточной плотности материи в плазме условие (2.5) и (2.7) выполняются даже в случаях когда константы взаимодействий не малы.

В дальнейшем тексте диссертации будет предполагаться, что химический потенциал равен нулю $\mu = 0$ (хотя вычисления легко обобщаются на случай ненулевого химического потенциала). Это приближение выглядит разумным с учетом совокупности экспериментальных данных [123, 124]. Кроме того, следует отметить, что химический потенциал можно ввести только для частиц, с которыми ассоциируется сохраняющийся заряд. Отсутствие глобальной $U(1)$ симметрии связанной с глюонными степенями свободы, делает невозможным введение химического потенциала для равновесного распределения глюонов.

Для плазмы с нулевым химическим потенциалом невозможно обеспечить выполнение $\exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) \ll 1$. В связи с этим необходимо пользоваться квантовыми функциями распределения: распределением Ферми-Дирака или Бозе-Эйнштейна в зависимости от статистики.

$$f_{BE} = \frac{1}{\exp\left(\frac{p_0}{k_B T}\right) - 1} \quad (2.8)$$

$$f_{FD} = \frac{1}{\exp\left(\frac{p_0}{k_B T}\right) + 1},$$

(вообще говоря, указанные выражения приведены в системе координат, связанной с неподвижной средой (heat bath); в произвольной системе координат, движение которой относительно системы покоя среды задается четырехвектором скорости u^μ , в статистических распределениях следует использовать экспоненту $\exp(-n^\mu p_\mu/T)$)

В этом случае, как несложно показать, плазменный параметр ϵ совпадает по порядку величины с константой взаимодействия g . Таким образом, коллективное описание квантовой плазмы возможно только в случае малости константы взаимодействия.

Вообще говоря, функция распределения зависит от переменных фазового пространства, динамических переменных: энергии-импульса, координаты-времени и цветного заряда. Цветной заряд неабелевой калибровочной группы, вообще говоря, не является динамической переменной системы. Однако, всегда можно определить канонические переменные (переменные Дарбу), ассоциированные с этим зарядом [123, 125]. Необходимо, чтобы скобки Пуассона для этих переменных имели вид:

$$\{Q_a, Q_b\}_{P.B.} = f_{abc}Q_c, \quad (2.9)$$

где f_{abc} - структурные константы алгебры.

Тогда элемент фазового пространства для данного представления группы имеет вид:

$$dQ = c_r dQ^1 \dots dQ^m \delta(Q^a Q_a - q_2) \dots \delta(d_{a_1 \dots a_k} Q^{a_1} Q^{a_2} \dots Q^{a_k} - q_k) \quad (2.10)$$

здесь m - число генераторов представления (для присоединенного представления группы $SU(n)$ имеем $m = n^2 - 1$), k - число операторов Казимира представления (для присоединенного представления групп $SU(n)$ - $k = n - 1$)

и зависящая от распределения нормировка c_r выбирается так, чтобы $\int dQ = 1$. Инвариант Казимира q_2 зависит от представления калибровочной группы. В частности, например, $q_2 = \frac{N^2 - 1}{2N}$ для фундаментального и антифундаментального представлений и $q_2 = N$ для присоединенного представления.

Также достаточно очевидно (с учетом нормировки), что интегралы по этой мере обладают свойствами, $\int dQ Q^a = 0$, $\int dQ Q^a Q^b = C_2 \delta^{ab}$, которые будут использоваться в дальнейшем. Инвариант Казимира C_2 зависит от представления: для фундаментального и антифундаментального представления (кварков и антикварков соответственно) $C_2 = \frac{1}{2}$, для присоединенного представления (глюонов) $C_2 = N$. Импульсная мера фазового пространства для частицы с массой m имеет вид:

$$dP = d^4 p 2\theta(p^0) \delta(p^2 - m^2), \quad (2.11)$$

что отвечает условию нахождения частицы плазмы на массовой оболочке.

Таким образом, функция распределения $f(x, p, Q)$ представляет собой вероятность нахождения частицы с импульсом p , и зарядом Q^a в точке с пространственно-временными координатами x .

Далее, используя информацию о функции распределения, можно вычислить макроскопические характеристики плазмы. Так, выражение для тензора энергии-импульса частиц плазмы имеет вид:

$$T^{\mu\nu} = \int dQ dP p^\mu p^\nu f(x, p, Q). \quad (2.12)$$

Цветной ток, генерируемый частицами плазмы, задается формулой:

$$j_\mu^a = g \int dP dQ p_\mu Q^a f(x, p, Q). \quad (2.13)$$

Тензор поляризации $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$ определяется из равенства:

$$j_{\mu}^a = \Pi_{\mu\nu}^{ab} A_{\nu}^b, \quad (2.14)$$

где A_{μ}^a приложенный внешний потенциал калибровочного поля.

Или иначе:

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab} = \frac{\delta j_{\mu}^a}{\delta A_{\nu}^b}, \quad (2.15)$$

опустив индексы цвета, можно очевидным образом получить выражения для электромагнитной плазмы.

Записав кинетическое уравнение Больцмана с учетом уравнений Вонга [136] (которые суть классические уравнения движения на элементы фазового пространства):

$$\begin{aligned} m \frac{dx}{d\tau} &= p^{\mu} \\ m \frac{dp^{\mu}}{d\tau} &= g Q^a F_a^{\mu\nu}(x) p_{\nu} \\ m \frac{dQ^a}{d\tau} &= -g f^{abc} p^{\mu} A_{\mu}^b(x) Q^c \end{aligned} \quad (2.16)$$

(A_{μ}^a и $F_{\mu\nu}^a$ соответственно потенциал самосогласованного калибровочного поля и собственно калибровочное поле), можно получить кинетическое уравнение для функции распределения неабелевой плазмы:

$$\begin{aligned} \frac{df(p(\tau), x(\tau), Q(\tau))}{d\tau} &= p^{\mu} \left(\partial_{\mu} - g f^{abc} A_{\mu}^b Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} \right. \\ &\quad \left. - g Q_a F_{\mu\nu}^a \frac{\partial}{\partial p_{\nu}} \right) f(x, p, Q) = C[f] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Во власовском приближении бесстолкновительной плазмы кинетическое уравнение принимает вид:

$$p^{\mu} \left(\partial_{\mu} - g f^{abc} A_{\mu}^b Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} - g Q_a F_{\mu\nu}^a \frac{\partial}{\partial p_{\nu}} \right) f(x, p, Q) = 0. \quad (2.18)$$

Самосогласованное поле в плазме связано с функцией распределения посредством уравнения движения для полей Янга-Милса:

$$D_{\mu}^{ab} F_b^{\mu\nu} = j^{a\nu}(x), \quad (2.19)$$

Отметим, что поскольку при локальных преобразованиях заряд Q^a преобразуется по неприводимому представлению калибровочной группы (см. третье уравнение Вонга в (2.16)), левая часть уравнений (2.17) и (2.71) калибровочно инвариантна. Также правильным образом относительно калибровочной группы преобразуется выражение для тока (2.13).

Поляризационные свойства релятивистской кварк-глюонной плазмы в лидирующем приближении. Дебаевский радиус. Затухание Ландау

Ниже будет приведено вычисление поляризационных свойств бесстолкновительной турбулентной плазмы. Аналогичные выражения для релятивистской электрон-позитронной плазмы было получено в [126]. В неабелевом случае ответ был получен в [137] путем пересуммирования жестких петлевых мод (HTL, hard thermal loop) температурной квантовой хромодинамики (см. также [127, 128] и обзоры [129, 130]).

Для вычисления поляризации будем искать решение (2.71) в виде:

$$f(p, x, Q) = f^{eq}(p) + \delta f(x, p, Q), \quad (2.20)$$

где f_{eq} зависящая от типа частиц плазмы равновесная функция распределения (а именно, распределение Ферми-Дирака для кварков и антикварков и распределение Бозе-Эйнштейна для глюонов). После перехода к импульсному представлению и элементарного вычисления легко получить выражение

для $\delta f(k, p, Q)$ в лидирующем порядке по самосогласованному калибровочному полю плазмы:

$$\delta f(k, p, Q) = \frac{1}{i((pk) + i\varepsilon)} Q_a p^\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} F_{\mu\nu}^a(k) f^{eq}(p) \quad (2.21)$$

малая добавка $i\varepsilon$ позволят учитывать запаздывающие граничные условия.

Далее, вследствие нейтральности основного состояния плазмы по отношению к неабелевому заряду (свойство аналогичное электрической нейтральности электромагнитной плазмы), $f^{eq}(p)$ не вносит вклада в ток. Таким образом, используя (2.13) и (2.15), можно получить выражение для поляризационного тензора бесстолкновительной кварк-глюонной плазмы:

$$\Pi_{ab}^{\mu\nu} = \frac{2}{(2\pi)^3} g^2 \int dQ Q_a Q_b \int d\Omega_{\mathbf{v}} \frac{-(vk)v^\mu g^{\nu 0} + k^0 v^\mu v^\nu}{(vk) + i\varepsilon} \left(- \int p^2 \frac{df^{eq}(p)}{dp} dp \right) \quad (2.22)$$

Как легко заметить вследствие калибровочной инвариантности и изотропии, лишь две компоненты тензора независимы. Также очевидна факторизация цветных индексов (действительно, $\int dQ Q_a Q_b \sim \delta_{ab}$). В итоге, компоненты поляризационного тензора изотропной среды можно полностью задать двумя независимыми компонентами Π_L (компонента продольной поляризации) и Π_T (компонента поперечной поляризации):

$$\Pi_{ab}^{00}(k_0, \mathbf{k}) = \delta_{ab} \frac{|\mathbf{k}|^2}{k_0^2} \Pi_L(k_0, \mathbf{k}) \quad (2.23)$$

$$\Pi_{ab}^{0i}(k_0, \mathbf{k}) = \delta_{ab} \frac{k^i}{k_0} \Pi_T(k_0, \mathbf{k}) \quad (2.24)$$

$$\Pi_{ab}^{ij} = \delta_{ab} \left[\left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \right) \Pi_T(k_0, \mathbf{k}) + \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \Pi_L \right] \quad (2.25)$$

Поляризационный тензор (2.15) связан с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k} | l)$ посредством формулы:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\Pi_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{\omega^2}, \quad (2.26)$$

так что

$$\varepsilon_{L(T)}(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\Pi_{L(T)}(\omega, \mathbf{k})}{\omega^2} \quad (2.27)$$

Вычислив интегралы по dP и dQ , можно получить явные выражения для продольной и поперечной компонент тензора поляризации (обозначение НТЛ связано с тем, что вклад в поляризацию, связанный с этим членом, совпадает с ответом первого порядка, полученным при пересуммировании петлевых вкладов от жестких температурных мод (Hard Thermal Loops)):

$$\begin{aligned} \Pi_L^{\text{HTL}} &= -m_g^2 x^2 \left[1 - \frac{x}{2} L(x) \right] \\ \Pi_T^{\text{HTL}} &= m_g^2 \frac{x^2}{2} \left[1 + \frac{1}{2x} (1 - x^2) L(x) \right], \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $m_D^2 = g^2/3(N + N_2)T^2$ дебаевская масса плазмы, в свою очередь N_f число частиц фундаментального и антифундаментального представления в плазме (кварков и антикварков) $x \equiv k_0/|\mathbf{k}|$ и

$$L(x) \equiv \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - i\pi\theta(1-x). \quad (2.29)$$

Аналогичное выражение имеет место для случая электромагнитной плазмы с дебаевской массой $m_D = e^2 T^2/3$.

Для релятивистской электромагнитной плазмы ответ был получен в работе [126] в 60-м году. Вычисление было произведено на основе кинетического уравнения в бесстолкновительном пределе методом, аналогичным изложеному выше. В неабелевом случае ответ первоначально был получен на основе техники перенормировки мягких мод плазмы петлями жестких мод в температурной квантовой хромодинамике [127, 128].

Мнимая часть в выражениях для компонент тензора поляризации связана с правилом обхода при интегрировании, соответствующим запаздывающему

начальному условию. Затухание волн, связанное с этой мнимой частью, вызвано когерентным взаимодействием поля с частицами плазмы и носит название затухания Ландау [131].

Дисперсию для продольных и поперечных коллективных возбуждений в плазме можно получить, решая дисперсионные уравнения соответственно для продольного и поперечного пропагатора:

$$k_0^2 - \text{Re } \Pi_L(k_0, \mathbf{k}) = 0 \quad (2.30)$$

$$k_0^2 - \mathbf{k}^2 + \text{Re } \Pi_T(k_0, \mathbf{k}) = 0 \quad (2.31)$$

Дисперсионные уравнения бесстолкновительной плазмы, вообще говоря, можно решить численно. Ниже приведено аналитическое разложение решений в случае, когда модуль волнового вектора много меньше плазменной частоты [123].

$$\begin{aligned} \omega_L^2(|\mathbf{k}|)_{\text{HTL}} &= \omega_{\text{pl}}^2 \left(1 + \frac{3}{5} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\text{pl}}} \right)^2 + O \left(\left(\frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\text{pl}}} \right)^4 \right) \right) \\ \omega_T^2(|\mathbf{k}|)_{\text{HTL}} &= \omega_{\text{pl}}^2 \left(1 + \frac{6}{5} \left(\frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\text{pl}}} \right)^2 + O \left(\left(\frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\text{pl}}} \right)^4 \right) \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

здесь ω_{pl} - плазменная частота, определяемая соотношением:

$$\omega_{\text{pl}}^2 = \frac{m_D^2}{3}. \quad (2.33)$$

Величина, обратная дебаевской массе, задает дебаевскую длину плазмы, значение которой в абелевом и неабелевом случае приведено ранее.

2.1.2 Статистическое описание турбулентности.

Турбулентное состояние вещества характеризуется наличием случайных коллективных возбуждений. Вследствие случайного характера возбуждений

плазмы, статистическое описание наиболее естественно при рассмотрении регулярных характеристик в задачах, связанных с турбулентностью. Для всех макроскопических характеристик вещества (в данном случае плазмы) можно выделить их регулярную и турбулентную части. Корректность указанного разделения обеспечивается в предположении эргодичности, согласно которой система за достаточно большой промежуток времени пройдет достаточно близко к любому заданному состоянию в фазовом пространстве вне зависимости от начальных условий. Таким образом, начальные состояния системы не влияют на средние значения величин и среднее по статистическому ансамблю совпадает со средним по времени [120].

Разложим самосогласованный потенциал калибровочного поля на регулярную и турбулентную компоненты:

$$A_\mu^a = A_\mu^{Ra} + A_\mu^{Ta}, \quad (2.34)$$

причем среднее по ансамблю от турбулентной компоненты равно нулю: $\langle A_\mu^{Ta} \rangle = 0$.

Аналогично, можно разложить функцию распределения в плазме:

$$\begin{aligned} f(p, x, Q) &= f^R(p, x, Q) + f^T(p, x, Q) \\ \langle f(x, p, Q) \rangle &= f^R(x, p, Q), \quad \langle f^T(x, p, Q) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

При малых калибровочных преобразованиях потенциал поля преобразуется следующим образом:

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \alpha^a + g f^{abc} A_\mu^b \alpha^c \quad (2.36)$$

Для обеспечения корректности рассмотрения необходимо отделить калибровочные преобразования регулярной и турбулентной компонент потенциала

следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^{Ra} &= \partial_\mu \alpha^a + gf^{abc} A_\mu^{Rb} \alpha^c \\ \delta A_\mu^{Tb} &= gf^{abc} A_\mu^{Tb} \alpha^c,\end{aligned}\tag{2.37}$$

подобное разделение проводится при проведении вычислений в калибровке фонового поля.

Как видно при таком разделении условие равенства нулю среднего от турбулентного поля по ансамблю $\langle A_\mu^{aT} \rangle = 0$ не нарушается при калибровочном преобразовании.

Для дальнейшего рассмотрения, удобно ввести следующие обозначения:

$$F_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu}^{Ra} + \mathbf{F}_{\mu\nu}^{Ta} + \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Ta},\tag{2.38}$$

где:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}^{Ra} &= \partial_\mu A_\nu^{Ra} - \partial_\nu A_\mu^{Ra} + gf^{abc} A_\mu^{Rb} A_\nu^{Rc} \\ \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Ta} &= \partial_\mu A_\nu^{Ta} - \partial_\nu A_\mu^{Ta} + gf^{abc} A_\mu^{Tb} A_\nu^{Tc} \\ \mathbf{F}_{\mu\nu}^{Ta} &= gf^{abc} (A_\mu^{Tb} A_\nu^{Rc} + A_\mu^{Rb} A_\nu^{Tc})\end{aligned}\tag{2.39}$$

Далее определим коррелятор калибровочного потенциала, а также калибровочно инвариантный коррелятор полей:

$$\langle A_\mu^{Ta}(x) A_\nu^{Tb}(y) \rangle = G_{\mu\nu}^{ab}(x, y)\tag{2.40}$$

$$\langle \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Ta}(x) U^b(x, y) \mathcal{F}_{\mu'\nu'}^{Tc}(y) \rangle = K_{\mu\nu\mu'\nu'}^{ab}(x, y).\tag{2.41}$$

Везде ниже в тексте диссертации будут предполагаться статистическая однородность корреляций $K_{\mu\nu\mu'\nu'}^{Ta}(x, y) = K_{\mu\nu\mu'\nu'}^{Ta}(x-y)$ (и аналогичное соотношение для $G_{\mu\nu}^{ab}$) и симметрия корреляторов относительно перестановок цветных и лоренцевских индексов.

Для вычисления характеристик турбулентной кварк-глюонной плазмы (как, например, коэффициентов переноса или поляризационных свойств плазмы, которые будут приведены ниже в тексте) по теории возмущений, необходимо раскладывать одночастичную функцию распределения по степеням турбулентного поля и затем проводить усреднение.

2.1.3 Турбулентная плазма. Эффекты нулевого порядка по регулярному полю

Уравнение диффузии для турбулентной плазмы

Рассмотрим сначала турбулентную кварк-глюонную плазму в нулевом порядке по регулярному полю $F_{\mu\nu}^{Ra}$.

Обозначим равновесную функцию распределения турбулентной плазмы через:

$$f^{R(0)}(x, p, Q) = f^{R(0)}(x, p), \quad (2.42)$$

где индекс (0) обозначает член нулевого порядка в разложении по регулярной части калибровочного потенциала A^R .

В случаях, когда плазма в основном состоянии в среднем нейтральна относительно калибровочного заряда, эта функция не зависит от Q .

Далее следует разложить кинетическое уравнение (2.71) по турбулентным полям. Усредняя по статистическому ансамблю, пользуясь тем, что частная производная $f^{R(0)}(x, p)$ по калибровочному заряду равна нулю и оставляя члены лидирующего порядка по корреляторам G и K , можно получить следующую

щее уравнение для $f^{R(0)}$:

$$\begin{aligned} & \left(p^\mu \partial_\mu - g^2 p^\mu f^{abc} \left\langle A_\mu^{Tb} Q_c \frac{\partial}{\partial Q^a} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} p^{\mu'} Q_a \mathcal{F}_{\mu'\nu}^{Td} \right\rangle \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right. \\ & \left. - g^2 p^\mu Q_a \left\langle \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Ta} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} p^{\mu'} Q_b \mathcal{F}_{\mu'\nu'}^{Tb} \right\rangle \frac{\partial}{\partial p_{\nu'}} \right) f^{R(0)}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Вследствие ассиметрии структурных констант f^{abc} алгебры $su(3)$ по цветовым индексам, в случае, когда коррелятор $G_{ab}^{\mu\nu}$ симметричен по цветовым индексам, второй член в выражении равен нулю. Тогда после интегрирования по заряду, окончательно можно получить следующее уравнение для основного турбулентного состояния кварк-глюонной плазмы в этом приближении:

$$\left(p_\mu \partial^\mu - q_2 g^2 p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} \frac{1}{(p\partial) + i\epsilon} K_{aa}^{\mu\nu\mu'\nu'}(x) p_{\mu'} \frac{\partial}{\partial p'} \right) f \quad (2.44)$$

здесь через $\frac{1}{(pk) + i\epsilon}$ формально обозначает запаздывающую функцию Грина уравнения $p^\mu \partial_\mu f = 0$.

Появление вильсоновской линии при вычислении среднего по ансамблю (формула (2.41)) связано с зависимостью зарядов $Q(x)$ от пространственно-временных координат в плазме. Действительно, подстановка:

$$Q(t)^a = P \exp \left(- \int_{x(t_0)}^{x(t)} f_{abc} A_c^\mu dx_\mu \right) Q_{x(t_0)}^b \quad (2.45)$$

в выражение, содержащее Q_a и использование статистической однородности коррелятора приводит к (2.44).

Как видно уравнение (2.44) имеет вид уравнения диффузии:

$$\left(p_\mu \partial^\mu - \frac{\partial}{\partial p^\nu} \left(D^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right) f^{R(0)}. \quad (2.46)$$

Перейдя в импульсное представление и воспользовавшись антисимметрией $K^{\mu\nu\mu'\nu'}$, можно получить явное выражение для $D^{\mu\nu}$:

$$D^{\mu\nu} = g^2 q_2 p_{\mu'} p_{\nu'} \int d^4 k K^{\mu\nu\mu'\nu'}(k) \frac{1}{i((pk) + i\epsilon)}. \quad (2.47)$$

Уравнение диффузии для турбулентной электромагнитной плазмы было исследовано в [138, 139], неабелевый случай рассматривался в [117, 118]

Исследуя уравнение (2.46), можно изучать транспортные свойства турбулентной плазмы. Ниже будет приведена схема вычисления аномальной вязкости турбулентной плазмы, следуя [117].

Аномальная сдвиговая вязкость плазмы

Аномальная вязкость турбулентной кварк-глюонной плазмы была вычислена в работах [117, 118].

Эффективные столкновения частиц плазмы друг с другом посредством турбулентного поля способны существенно уменьшить среднюю длину пробега. Это, в свою очередь, явным образом сказывается на ее транспортных свойствах. Прежде чем приводить схему вычисления, ниже будет представлена эвристическая оценка.

Для начала будет рассмотрена оценка в плазме в отсутствии турбулентности. В кинетической теории газов выводится формула, устанавливающая простую связь между длиной свободного пробега и сдвиговой вязкостью системы слабо связанного газа или жидкости [132, 133]

$$\eta \sim \frac{1}{3} \bar{N} \bar{p} \lambda_f, \quad (2.48)$$

где \bar{p} - средний импульс частиц, λ_f - средняя длина свободного пробега

Оценка для \bar{p} в релятивистской плазме дает $\bar{p} = 3T$. В свою очередь, длина свободного пробега в слабо связанной плазме выражается через транспортное сечение рассеяния частиц в ней посредством формулы:

$$\lambda_f = (\bar{N} \sigma_{tr})^{-1}, \quad (2.49)$$

тогда как, транспортное сечение выражается через дифференциальное сечение рассеяния формулой:

$$\sigma_{tr} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin^2(\theta) \quad (2.50)$$

квадрат синуса угла рассеяния под интегралом в правой части отражает тот факт, что наиболее эффективная передача импульса осуществляется при рассеяниях на большие углы.

Транспортное сечение в КХД было рассчитано в работе [133]. Было получено следующее выражение:

$$\sigma_{tr} \approx \frac{5g^4}{4\bar{p}^2} \log \frac{4\pi}{g}. \quad (2.51)$$

Таким образом, окончательно оценка для сдвиговой вязкости принимает вид:

$$\eta = \frac{T}{\sigma_{tr}} = \frac{18\pi s}{25g^4 \log 4\pi g}, \quad (2.52)$$

здесь s - плотность энтропии, для ультрарелятивистских частиц плазмы $s = 4\bar{N}$

Эта оценка близка к результату подробного вычисления в приближении лидирующих логарифмов, полученному в [134]

В случае, когда в плазме присутствуют турбулентные поля, данная оценка претерпевает изменения. Длина свободного пробега по определению - длина, на которой частица полностью теряет первоначальный импульс, то есть импульс, приобретенный за счет перерассеяний, становится сравнимым с первоначальным импульсом частицы. Далее, если длина когерентности турбулентных полей в плазме - l , то изменение импульса частицы на этой длине имеет порядок:

$$\Delta p \sim gQ^a F^a l \quad (2.53)$$

где F^a турбулентное поле в плазме (будь-то электрическое или магнитное).

В итоге, длина свободного пробега выражается формулой:

$$\lambda = l \left\langle \frac{\bar{p}}{\Delta p} \right\rangle = \frac{\bar{p}^2}{g^2 Q^2 \langle F^2 \rangle l} \quad (2.54)$$

Другие слагаемые формулы для вязкости не претерпевают изменений. Таким образом, оценка для вязкости турбулентной плазмы принимает вид:

$$\eta \sim \frac{9sT^3}{4g^2 Q^2 \langle F^2 \rangle l} \quad (2.55)$$

Как можно видеть, турбулентные поля эффективно уменьшают длину свободного пробега частиц в плазме, что в свою очередь приводит к уменьшению вязкости.

Далее будет рассмотрена схема подробного вычисления вязкости в турбулентной как в изотропном, так и в неизотропном случае. Вычисление проводится в приближении линейного отклика. Поскольку вязкость является релятивистским инвариантом, можно без ограничения общности рассмотреть координатную систему, связанную с покоящейся средой. Разумно рассмотреть линейную поправку к равновесной функции распределения:

$$f^{R(0)}(p, r) = f^{eq}(p) + \delta f^{R(0)} = f^{eq} [1 + f_1(p, x)(1 \pm f^{eq}(p))], \quad (2.56)$$

знак определяется статистикой: + для бозонов, – для фермионов

Для определения коэффициентов вязкости необходимо вычислить поправки к тензору энергии-импульса плазмы:

$$\delta T_{ij} = -2\eta(\nabla u)_{ij} - \xi\delta_{ij}(\nabla \mathbf{u}), \quad (2.57)$$

здесь $(\nabla u)_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_k u_k$ - симметричный бесследовый тензор.

Тензор энергии-импульса выражается через одночастичную функцию распре-

деления посредством формулы:

$$T_{ik} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2 p_0} p_i p_j f^{R(0)}(p, r) \quad (2.58)$$

Вязкость можно получить рассматривая возмущения вида (аналогичное вычисление для объемной вязкости дает 0, как и должно быть в масштабно-инвариантной системе):

$$f_1(p, x) = -\frac{\bar{\Delta}(p)}{E_p T^2} p_i p_j (\nabla u)_{ij} \quad (2.59)$$

Несложное вычисление показывает, что таким образом сдвиговая вязкость выражается через $\bar{\Delta}(p)$ посредством формулы:

$$\eta = -\frac{1}{15T} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}^4}{p_0^2} \bar{\Delta}(p) \frac{\partial f^{eq}}{\partial p_0}. \quad (2.60)$$

Подставляя вариацию (2.56) с функцией f_1 вида (2.59) в (2.46) В работе [117] была выбрана следующая параметризация коррелятора турбулентных полей:

$$K_{\mu\nu\mu'\nu'}^{ab}(x) = \langle F_{0\mu\nu}^a F_{0\mu'\nu'}^b \rangle \exp \left[-\frac{\mathbf{r}^2}{a^2} - \frac{t^2}{\tau^2} \right] \quad (2.61)$$

Рассматривался как изотропный:

$$\begin{aligned} \langle E_i^a E_j^b \rangle &= \frac{1}{3} \delta^{ab} \delta_{ij} \langle E^2 \rangle \\ \langle B_i^a B_j^b \rangle &= \frac{1}{3} \delta^{ab} \delta_{ij} \langle B^2 \rangle \\ \langle E_i B_j \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.62)$$

так и неизотропный сценарий:

$$\begin{aligned} \langle E_i^a E_j^b \rangle &= 0 \\ \langle B_i^a B_j^b \rangle &= \frac{1}{2} \delta^{ab} (\delta_{ij} - \delta_{i3} \delta_{j3}) \langle B^2 \rangle \\ \langle E_i^a B_j^b \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.63)$$

здесь \mathbf{E}^a и \mathbf{B}^a соответственно хромоэлектрическое и хромомагнитное поле.

Физической мотивацией выбранной конфигурации полей в неизотропном сценарии служит тот факт, что неустойчивость Вайбеля, с которой принято связывать развитие турбулентности в столкновениях ядер - магнитная неустойчивость. Причем неустойчивость развивается в направлении поперечном относительно оси столкновения. Поэтому на начальном этапе развития турбулентности можно ожидать неизотропную конфигурацию полей, тогда как со временем плазма изотропизируется и происходит перекачка магнитных мод в электрические.

В работе [118] вариационным методом было проведено вычисление с учетом столкновительного члена. По порядку величины ответ согласуется с оценкой полученной в начале подраздела. Таким образом, турбулентность представляет собой эффективный механизм обеспечивающей малую вязкость среды.

Коэффициент \hat{q} .

Интересно, что турбулентность кварк-глюонной плазмы способна также, по крайней мере частично, объяснить эффект гашения струй в столкновениях ядер. Вычисления радиационных потерь в среде кварков и глюонов демонстрируют [140–144, 147], что ключевым параметром определяющим потери в веществе является параметр \hat{q} , который по определению представляет собой средний квадрат поперечного импульса, передаваемого партону в среде на единицу длины. Турбулентные поля плазмы эффективно перерассеивают глюоны, тем самым, увеличивая коэффициент и, соответственно, гашения струй.

В кварк-глюонной плазме в отсутствии турбулентности вычисление в приближении лидирующих логарифмов дает следующее значение коэффициен-

та [135]:

$$\hat{q} = \frac{8\zeta(3)}{\pi} N C_r \alpha_s^2 T^3 \ln \frac{1}{\alpha_s}, \quad (2.64)$$

где l , как и ранее, длина корреляции турбулентных полей плазмы.

В турбулентной плазме элементарное вычисление дает следующий вклад к значению коэффициента, вызванный перерассеянием на турбулентных полях:

$$\hat{q} = q_2 g^2 \langle E^2 + B^2 \rangle l, \quad (2.65)$$

действительно, в среднем на длине когерентности частица приобретает импульс $\vec{p}^2 = q_2 g^2 \langle E^2 + B^2 \rangle$, откуда непосредственно следует формула для \hat{q}

2.2 Диаграммная техника для вычисления функции распределения турбулентной плазмы. Разложение по регулярным полям

Далее рассмотрим эффекты в турбулентной плазме, связанные с присутствием в плазме регулярных полей. В частности, будет рассмотрен ряд теории возмущений функции распределения относительно регулярных и турбулентных полей, изложена соответствующая диаграммная техника. Как результат, будут исследоваться турбулентные поправки к поляризационному тензору в приближении длинноволновых корреляций. Материал соответствует результатам двух работ автора в соавторстве с Андреем Владимировичем Леонидовым и Берндтом Мюллером [151] и Андреем Владимировичем Леонидовым и Игорем Михайловичем Дреминым [152].

2.2.1 Пертурбативное разложение функции распределе- ние в общем случае

Далее будет проведено систематическое пертурбативное разложение функции распределения по регулярным полям в плазме и корреляциям турбулентных полей.

Рассмотрим для начала уравнение следующего вида:

$$(p^\mu \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^b Q^c \frac{\partial}{\partial Q_a}) f(p, x, Q) = Q_a \phi^a(x, p), \quad (2.66)$$

где функция $\phi(x, p)$ - не зависит от Q^a .

Раскладывая решение этого уравнения по степеням A_μ^b , можно получить следующее формальное выражение для $f(x, p, Q)$.

$$f(x, p, Q) = f^{(0)}(p, x, Q) + \left(\frac{1}{p^\mu D_\mu} \right)_{ab} Q^b \phi^a(x, p) \quad (2.67)$$

здесь $(1/p^\mu D_\mu)_{ab}$ - оператор обратный оператору $p^\mu D_{\mu ab}$, где D_μ^{ab} , как обычно, ковариантная производная:

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} - f^{abc} A_\mu^c \quad (2.68)$$

функция $f^{(0)}(p, x, Q)$ - "нулевая мода", то есть решение однородного уравнения:

$$(p^\mu \partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^b Q^c \frac{\partial}{\partial Q_a}) f^{(0)}(p, x, Q) = 0 \quad (2.69)$$

Записанный выше формально обратный оператор представляется в виде ряда:

$$\left(\frac{1}{p^\mu D_\mu} \right)_{ab} = \frac{1}{(p\partial)} \left(\delta_{ab} + \frac{1}{(p\partial)} f_{abc}(p^\mu A_\mu^c) + \frac{1}{(p\partial)} f_{adc}(p^\mu A_\mu^c) \frac{1}{(p\partial)} f_{dbe}(p^\nu A_\nu^e) + \dots \right) \quad (2.70)$$

Далее будет вновь рассмотрено кинетическое уравнение во власовском пределе:

$$p^\mu \left(\partial_\mu - g f^{abc} A_\mu^b Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} - g Q_a F_{\mu\nu}^a \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right) f(x, p, Q) = 0 \quad (2.71)$$

Учитывая (2.67) достаточно очевидно, что уравнение для функции распределения $f(x, p, Q)$ можно переписать в виде операторного уравнения:

$$f(x, p, Q) = f^{(0)}(x, p, Q) + \left(\frac{1}{(p D)} \right)_{ab} p^\mu g Q^b F_{\mu\nu}^b \frac{\partial}{\partial p_\nu} f(x, p, Q) \quad (2.72)$$

где $f^{(0)}(x, p, Q) = f^{eq}(p)$ - равновесная функция распределения плазмы.

В диаграммном представлении уравнение (2.72) имеет вид:

$$\text{---} = \text{---}_{eq} + \text{---} \text{---} \text{---} \quad (2.73)$$

где сплошная линия с индексом "eq" обозначает первый член $f^{eq}(p)$ (2.72)

$$\text{---}_{eq} = f^{eq}(p) \quad (2.74)$$

сплошная толстая линия обозначает функцию распределения:

$$\text{---} = f(x, p, Q) \quad (2.75)$$

вьющаяся линия обозначает цветное поле в плазме:

$$\text{---} = F_{\mu\nu}^a(x) \quad (2.76)$$

прерывистая линия обозначает пропагатор:

$$----- = \left(\frac{1}{(pD)} \right)_{ab} \quad (2.77)$$

Наконец, определим вершину:

$$----- \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} = gQ^a p^\mu \frac{\partial}{\partial \nu} \quad (2.78)$$

Уравнение (2.72) можно решать раскладывая в ряд теории возмущений по степеням полей плазмы плазмы $F_{\mu\nu}^a$. В диаграммном виде указанное разложение записывается в виде:

$$\text{---} = \text{---}^{eq} + \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}^{eq} + \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}^{eq} + \dots \quad (2.79)$$

2.2.2 Разложение по регулярным полям и корреляциям турбулентных полей для абелевой плазмы.

Первым делом будет рассмотрен абелевый случай (электромагнитная электрон-позитронная плазма). В абелевом случае в выражении для пропагатора вместо ковариантной производной стоит обычная производная:

$$\left(\frac{1}{(pD)} \right)_{ab} \rightarrow \frac{1}{(p\partial)} \quad (2.80)$$

Также неабелевые заряды Q_a следует заменить знаком (положительным или отрицательным) соответствующего абелевого заряда (электрический заряд не имеет цветных индексов). Интеграл по неабелевым зарядам $\int dQ$ переходит в сумму по положительным и отрицательным зарядам плазмы:

$$\int dQ \rightarrow \sum_{+-} \quad (2.81)$$

По очевидной причине для обозначения константы связи электромагнитного взаимодействия будет использоваться символ e .

Далее, коррелятор полей турбулентной абелевой плазмы принимает вид:

$$K_{ab}^{\mu\nu\mu'\nu'}(x) \rightarrow K^{\mu\nu\mu'\nu'}(x) = \left\langle F^{T\mu\nu}(x) F^{T\mu'\nu'}(0) \right\rangle \quad (2.82)$$

Можно разложить калибровочное поле электромагнитной плазмы на турбулентную и регулярную компоненты:

$$F^{\mu\nu} = F^{R\mu\nu} + F^{T\mu\nu}, \quad (2.83)$$

где среднее от турбулентной компоненты равно нулю, $\langle F^{T\mu\nu} \rangle = 0$

Как и в неабелевой плазме, проводится разложение функции распределения на регулярную и турбулентную компоненты:

$$f(p, x) = f^T(p, x) + f^R(p, x). \quad (2.84)$$

В диаграммных обозначениях:

$$\text{---} \underset{R}{\text{---}} = f^R(k, p, Q) \quad (2.85)$$

$$\text{---} \underset{T}{\text{---}} = f^T(k, p, Q) \quad (2.86)$$

$$\text{---} \underset{T}{\text{---}} = F_{\mu\nu}^T(k), \quad (2.87)$$

Для вычисления характеристик плазмы на основе теории возмущений будет проведено разложение регулярных и турбулентных компонент функции распределения и калибровочного поля плазмы по степеням регулярного поля:

$$F^{T\mu\nu} = F^{T(0)\mu\nu} + F^{T(1)\mu\nu} + \dots$$

$$f^T(p, x) = f^{T(0)}(p, x) + f^{T(1)}(p, x) + \dots \quad (2.88)$$

$$f^R(p, x) = f^{R(0)}(p, x) + f^{R(1)}(p, x) + \dots$$

где члены разложения с верхним символом (n) пропорциональны (n)-ой степени регулярного поля ($F^{T\mu\nu} \sim F^{R\mu\nu}, \dots$).

Для проведения вычислений удобно ввести также следующие диаграммные обозначения:

$$\overline{\underline{\quad}} \equiv (f^{T(R)}(k, p, Q))^{(0)} \sim (F_{\mu\nu}^R)^0 \quad (2.89)$$

$$\overline{\overline{\quad}} \equiv (f^{T(R)}(k, p, Q))^{(1)} \sim (F_{\mu\nu}^R)^1 \quad (2.90)$$

$$\underbrace{\sim\sim\sim}_T \equiv (F_{\mu\nu}^T)^{(0)} \sim (F_{\mu\nu}^R)^0 \quad (2.91)$$

$$\underbrace{\sim\sim\sim}_T \equiv (F_{\mu\nu}^T)^{(1)} \sim (F_{\mu\nu}^R)^1. \quad (2.92)$$

Тогда в диаграммных обозначениях разложение (2.88) принимают вид:

$$\overline{\overline{\overline{\quad}}} = \overline{\underline{\quad}} + \overline{\overline{\quad}} + \dots \quad (2.93)$$

$$\underbrace{\sim\sim\sim\sim\sim}_T = \underbrace{\sim\sim\sim}_T + \underbrace{\sim\sim\sim}_T + \dots \quad (2.94)$$

Подставляя указанные разложения в (2.73) можно получить следующее диаграммное уравнение:

$$\begin{aligned} & \overline{\underline{\quad}} + \overline{\overline{\quad}} + \overline{\underline{\quad}} + \overline{\overline{\quad}} = \overline{\underline{\quad}} + \\ & \underbrace{\overline{\underline{\quad}}}_{R} + \underbrace{\overline{\underline{\quad}}}_{R} + \underbrace{\overline{\underline{\quad}}}_{T} + \underbrace{\overline{\underline{\quad}}}_{T} + \\ & \underbrace{\overline{\underline{\quad}}}_{T} + \underbrace{\overline{\underline{\quad}}}_{R} + \underbrace{\overline{\underline{\quad}}}_{R} + \underbrace{\overline{\underline{\quad}}}_{T} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Для вычисления поляризационных свойств плазмы необходимо определить вклад в функцию распределения связанный с присутствием в плазме регулярных полей. Поляризационный оператор вычисляется согласно формуле аналогичной (2.14):

$$j_\mu = \Pi_{\mu\nu} A^{R\nu}, \quad (2.96)$$

где, как обычно, A^μ - потенциал регулярного калибровочного поля.

В свою очередь, ток, возникающий в плазме в присутствии регулярных полей, может, очевидно, быть вычислен согласно уравнению:

$$j_\nu(x) = e \sum_{i,s} \int dP p_\nu q_i f(p, x, q), \quad (2.97)$$

где сумма по i (i пробегает значения от одного до двух, причем $q_1 = +1$, $q_2 = -1$), а сумма по s - сумма по спинам.

Также в абелевой плазме упрощаются уравнения движения для полей (2.19). Динамика полей в электромагнитной плазме описывается уравнениями Максвелла:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = j^\nu(x) \quad (2.98)$$

2.2.3 Вклады нулевого порядка по регулярным полям.

Для начала будут рассмотрены вклады нулевого порядка по регулярным полям. После усреднения, из (2.95) легко получить следующее диаграммное уравнение для регулярной компоненты функции распределения:

$$\frac{R}{\text{---}} = \frac{eq}{\text{---}} + \left\langle \text{---} \begin{array}{c} T \\ \text{---} \\ T \end{array} \right\rangle. \quad (2.99)$$

Оттуда же слеует диаграммное уравнение для стохастической компоненты функции распределения:

$$\frac{T}{\text{---}} = \text{---} \begin{array}{c} T \\ \text{---} \\ R \end{array} + \left[\text{---} \begin{array}{c} T \\ \text{---} \\ T \end{array} - \left\langle \text{---} \begin{array}{c} T \\ \text{---} \\ T \end{array} \right\rangle \right] \quad (2.100)$$

Подставляя уравнение для турбулентных частей в выражения для регулярных компонент, можно после усреднения получить выражения зависящие

только от корреляций турбулентных полей. При вычислении регулярных величин в условиях слабой турбулентности выражением в квадратных скобках можно пренебречь. Это связано с тем обстоятельством, что в первом порядке теории возмущений по корреляциям турбулентных полей результат усреднения зависит от тройных корреляций, которые не дают вклада в гауссовском приближении (см. ниже). Вообще говоря, выражение в квадратных скобках приводит к нечетным корреляциям турбулентных полей. В случае, когда распределение турбулентных полей плазмы подчинено гауссовскому статистическому ансамблю, корреляции полей нечетного порядка равны нулю. В дальнейшем, в ходе вычислений турбулентные поля в плазме будут рассмотрены в гауссовском приближении. Подставляя выражение для $f^{(0)T}$, из (2.100) в (2.99), можно получить:

$$\frac{R}{\quad} = \frac{eq}{\quad} + \left\langle \text{---} \overset{T}{\curvearrowright} \text{---} \overset{T}{\curvearrowright} \text{---} \underset{R}{\quad} \right\rangle \quad (2.101)$$

Далее можно определить диаграммное представление для коррелятора турбулентных полей:

$$\overset{K}{\curvearrowright} = K^{\mu\nu\mu'\nu'}(x) \quad (2.102)$$

Тогда уравнение (2.101) принимает вид:

$$\frac{R}{\quad} = \frac{eq}{\quad} + \text{---} \overset{K}{\curvearrowright} \text{---} \underset{R}{\quad} \quad (2.103)$$

Переходя в импульсное представление, предыдущее уравнение можно переписать в виде:

$$\left(i(pk) - \hat{O}(p, k, K) \right) \times \frac{R}{\quad} = 0 \quad (2.104)$$

где оператор $\hat{O}(p, k, K)$ приближенно задается следующей диаграммой в импульсном представлении:

$$\hat{O}(p, k, K) = \text{---} \overset{K}{\text{---}} \text{---} + \dots \quad (2.105)$$

при выводе (2.104) использовался тот факт, что $(p\partial)f^{eq}(p, x) = 0$.

Таким образом, уравнение (2.104) определяет перенормировку пропагатора. В рассматриваемом пределе гауссовских корреляций оператор $\hat{O}(p, k, K)$ представляет собой сумму неприводимых диаграмм:

$$\hat{O}(p, k, K) = \text{---} \overset{K}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overset{K}{\text{---}} \overset{K}{\text{---}} \text{---} + \text{---} \overset{K}{\text{---}} \overset{K}{\text{---}} \overset{K}{\text{---}} \text{---} + \dots \quad (2.106)$$

В первом порядке (2.104), очевидно, представляет собой абелевый аналог уравнения диффузии (2.44). Таким образом, достаточно очевидно, что турбулентные поправки к функции распределения в нулевом порядке по регулярным полям можно учесть используя в вычислениях перенормированный пропагатор:

$$\text{---} \overset{K}{\text{---}} \text{---} \equiv \frac{1}{i(pk) - \hat{O}(p, k, K)}. \quad (2.107)$$

и взяв в качестве начальной функции распределения турбулентной плазмы решение уравнения диффузии (2.104), которое обозначим через $f^{(0)}(p, x)$.

Вообще говоря, уравнение (2.104) допускает стационарные решения только специального вида (см. подробнее в подразделе "Условия применимости"). Функция $f^{eq}(p)$ не является решением. В дальнейшем везде ниже будет использоваться приближение, в котором вместо $f^{(0)}(p, x)$ можно использовать $f^{eq}(p)$. Более подробно условия применимости будут освещены ниже в специально посвященном этому подразделу.

2.2.4 Вклады первого порядка по регулярным полям.

В данном подразделе будут рассмотрены поправки к функции распределения пропорциональные первой степени регулярного поля: $f^{R(1)}$ and $f^{T(1)}$. Используя ту же процедуру, что и в предыдущем подразделе, можно из уравнения (2.95) получить следующие диаграммные выражения:

$$\overline{\overline{R}} = \text{---} \overset{R}{\curvearrowright} \underset{R}{\text{---}} + \left\langle \text{---} \overset{T}{\curvearrowright} \overline{\overline{T}} \right\rangle + \left\langle \text{---} \overset{T}{\curvearrowright} \overline{\overline{T}} \right\rangle \quad (2.108)$$

и:

$$\overline{\overline{T}} = \text{---} \overset{R}{\curvearrowright} \underset{T}{\text{---}} + \text{---} \overset{T}{\curvearrowright} \underset{R}{\overline{\overline{---}}} + \text{---} \overset{T}{\curvearrowright} \underset{R}{\overline{\overline{---}}} \quad (2.109)$$

Для того чтобы замкнуть систему для $f^{R(1)}$ необходимо выразить турбулентную компоненту поля пропорциональную первой степени регулярного поля $F_{\mu\nu}^{T(1)}$ (двойная волнистая линия в правой части (2.109)) соответственно через турбулентную компоненту функции распределения пропорциональную первой степени регулярного поля $f^{T(1)}$ (двойная прямая линия). Для этого следует воспользоваться уравнением Максвелла (2.98). В импульсном представлении решение уравнения Максвелла с током j^ν задается выражением:

$$F_{\mu\nu}(k) = -\frac{\imath k_\mu j_\nu - \imath k_\nu j_\mu}{k^2} \quad (2.110)$$

Далее воспользовавшись выражением для тока (2.97), можно получить

$$F_{\mu\nu}^{T(1)}(k) = g \int d^4p dQ Q \delta(p^2) \cdot \theta(p^0) f^{T(1)}(k, p, Q) \times \frac{\imath k_\nu p_\mu - \imath k_\mu p_\nu}{k^2} \quad (2.111)$$

Для удобства проведения вычислений разумным представляется ввести новое диаграммное обозначение - квадратную вершину, определяющую связь между $F_{\mu\nu}^{T(1)}$ и $f^{T(1)}$ в (2.111):

$$\text{---} \blacksquare \text{---} = \frac{g \int d^4p_1 dQ Q^2 \delta((p_1)^2) \theta((p_1)^0) (\imath k_\nu (p_1)_\mu - \imath k_\mu (p_1)_\nu)}{k^2} \quad (2.112)$$

С учетом введенных обозначений можно таким образом переписать (2.109) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{T}} &= \text{---} \overset{R}{\curvearrowright} \underset{T}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{T}{\curvearrowright} \underset{R}{\bullet} \text{---} + \\
 &\text{---} \overset{R}{\curvearrowleft} \underset{T}{\bullet} \text{---} \text{---} \underset{R}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{T}{\curvearrowleft} \underset{R}{\bullet} \text{---} \text{---} \underset{R}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{T}{\curvearrowright} \underset{R}{\bullet} \text{---} \text{---} \underset{R}{\bullet} \text{---}
 \end{aligned} \tag{2.113}$$

Уравнение (2.113) вновь выражает $f^{T(1)}$ через $F_{\mu\nu}^{T(1)}$. Повторяя итерации, можно очевидным образом получить выражение для $f^{T(1)}$ содержащее только $F_{\mu\nu}^R$, а также бесконечно много диаграмм с квадратными вершинами. Однако, как будет подробно показано в подразделе "Условия применимости", диаграммы с квадратными вершинами подавлены по сравнению с диаграммами не содержащими последних. Таким образом ряд можно оборвать. Наконец, подставляя (2.113) в (2.108), усредняя и оставляя только члены содержащие не более одного коррелятора турбулентных полей, можно получить следующее диаграммное выражение для функции распределения в импульсном представлении $f^{R(1)}(k, p)$ в приближении слабой турбулентности:

$$\begin{aligned}
 \overline{\overline{R}} &= \text{====} \overset{R}{\curvearrowright} \underset{R}{\bullet} \text{====} + \text{====} \overset{K}{\curvearrowright} \underset{R}{\bullet} \text{====} \text{---} \underset{eq}{\bullet} \text{====} + \text{====} \overset{eq}{\curvearrowright} \underset{K}{\bullet} \text{====} \text{---} \underset{eq}{\bullet} \text{====} + \\
 &\text{====} \overset{eq}{\curvearrowleft} \underset{R}{\bullet} \text{====} \text{---} \underset{K}{\bullet} \text{====} \text{---} \underset{eq}{\bullet} \text{====} + \text{====} \overset{R}{\curvearrowleft} \underset{K}{\bullet} \text{====} \text{---} \underset{eq}{\bullet} \text{====} + \text{====} \overset{K}{\curvearrowright} \underset{eq}{\bullet} \text{====} \text{---} \underset{eq}{\bullet} \text{====}
 \end{aligned} \tag{2.114}$$

здесь всюду используется пересуммированный пропагатор (2.107).

К сожалению не удастся выполнить пересуммирование (2.107) в аналитической форме. Ограничиваясь первым порядком по корреляциям, получаем:

$$(2.115)$$

2.2.5 Неабелевая плазма. Вклады пропорциональные

$$G_{ab}^{\mu\nu}$$

Далее будет рассмотрен вклад неабелевых членов в разложение функции распределения.

Ситуация в кварк-глюонной плазме в сравнении с электромагнитным случаем осложняется тем, что потенциал глюонного поля A_μ^a содержится в пропагаторе (2.77) для неабелевого кинетического уравнения (2.71). Таким образом при усреднении возможно появление вкладов пропорциональных коррелятору потенциалов глюонного поля $G_{ab}^{\mu\nu}$. Вычисление ниже показывает, что, по крайней мере в первом порядке по корреляциям полей, ответ для поляризационного оператора не зависит от $G_{ab}^{\mu\nu}$.

Вычисление будет производиться непосредственно исходя из уравнения (2.71). Регулярная и турбулентная компоненты функции распределения f^R , f^T будут раскладываться в ряд по степеням регулярного потенциала ($f^{(0)} \sim (AR)^0$, $f^{(1)} \sim (AR)^1$, ...). A^R . Сосредоточимся на неабелевых вкладах, то есть только на членах, содержащих коррелятор $G_{\mu\nu}^{ab}$. Вклады с $K_{\mu\nu\mu'\nu'}^{ab}$ исследуются ниже. Причина, по которой A^T не раскладываются в ряд по регулярным полям заключается в том, что $A^{T(n)}$ связаны с $f^{T(n)}$ посредством уравнения движения (2.19), которые в первом порядке по константе связи g эквивалентны уравнениям Максвелла (2.98), и, как будет показано ниже в подразделе посвященном условиям применимости, приводят к вкладам, которыми можно пренебречь.

Далее, из (2.71) следует:

$$(p^\mu \partial_\mu) f^{T(0)} = gp^\mu Q_a \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Ta} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{R(0)} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} (p^\mu \partial_\mu) f^{T(1)} &= gp^\mu f^{abc} A_\mu^{Tb} Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} f^{R(1)} + g^2 p^\mu f^{abc} A_\mu^{Rb} Q^c \frac{1}{(p\partial)} p^{\mu'} \mathcal{F}_{\mu'\nu}^{Ta} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{R(0)} \\ &+ gp^\mu Q_a \mathbf{F}_{\mu\nu}^{Ta} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{R(0)} + gp^\mu Q_a \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Ta} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{R(1)} + g^2 p^\mu p^\nu p'^\nu Q^a F_{\mu\nu}^{Ra} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} \\ &\times Q_c \mathcal{F}_{\mu'\nu'}^{Tc} \frac{\partial}{\partial p_{\nu'}} f^{R(0)} + g^2 p^\mu f^{abc} A_\mu^{Rb} Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} p_d^{\mu'} \mathcal{F}_{\mu'\nu}^{Td} \frac{\partial}{\partial p_{\nu}} f^{R(0)} \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned} (p^\mu \partial_\mu) f^{R(1)} &= gp^\mu f^{abc} \left\langle A_\mu^{Tb} Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} f^{T(1)} \right\rangle + gp^\mu Q_a \left\langle \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Ta} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{T(1)} \right\rangle \\ &+ gp^\mu Q_a \left\langle \mathbf{F}_{\mu\nu}^R \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{T(0)} \right\rangle + gp^\mu Q_a F_{\mu\nu}^{Ra} \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{R(0)} \end{aligned} \quad (2.118)$$

Наконец, подставив (2.116) и (2.117) в (2.118), можно получить следующую поправку к регулярной функции распределения первого порядка по отноше-

нию к корреляциям потенциалов:

$$f^{R(1)} = f_{\text{HTL}} + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 \quad (2.119)$$

Здесь f_{HTL} обозначает уже приведенный вклад в функцию распределения бесстолкновительной плазмы, связанный с присутствием в ней регулярного поля, тогда как I_n отвечают турбулентным поправкам.

$$\begin{aligned} I_1 &= g^3 p^\mu f^{abc} \left\langle A_\mu^{Tb} Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} p^{\mu'} \frac{1}{p^\mu \partial_\mu} f^{def} A_{\mu'}^{Re} Q^f \frac{\partial}{\partial Q^d} \frac{1}{p^\mu \partial_\mu} p^{\mu'} Q_g \mathcal{F}_{\mu'\nu} \right\rangle \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{R(0)} \\ I_2 &= g^2 p^\mu f^{abc} \left\langle A_\mu^{Tb} Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} f^{def} p^{\mu'} A_{\mu'}^{Te} \right\rangle Q^f \frac{\partial}{\partial Q^d} f^{R(1)} \\ I_3 &= g^3 p^\mu f^{abc} \left\langle A_\mu^{Tb} Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} \frac{p^{\mu'} p^{\mu''}}{(p^\mu \partial_\mu)} Q_d Q_e F_{\mu'\nu}^{Rd} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{1}{p^\mu \partial_\mu} Q_f \mathcal{F}_{\mu''\nu'}^{Tf} \right\rangle \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{R(0)} \\ I_4 &= g^2 p^\mu f^{abc} \left\langle A_\mu^{Tb} Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} p^{\mu'} Q_d \mathbf{F}_{\mu'\nu}^{Td} \right\rangle \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{R(0)} \\ I_5 &= g^2 p^\mu f^{abc} \left\langle A_\mu^{Tb} Q^c \frac{\partial}{\partial Q^a} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} p^{\mu'} Q_d \mathcal{F}_{\mu'\nu}^{Td} \right\rangle \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{R(1)} \\ I_6 &= g^3 p^\mu Q_a \left\langle \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Ta} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{1}{p^\mu \partial_\mu} p^{\mu'} f^{bdc} Q^d \frac{\partial}{\partial Q^b} A_{\mu'}^{Rc} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} p^{\mu''} \mathcal{F}_{\mu''\nu'}^{Td} \right\rangle Q_d \frac{\partial}{\partial p_{\nu'}} f^{R(0)} \\ I_7 &= g^3 p^\mu Q_a \left\langle \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Ta} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} p^{\mu'} Q^b F_{\mu'\nu'}^{Rb} \frac{\partial}{\partial p_{\nu'}} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} p^{\mu''} Q_c \mathcal{F}_{\mu''\nu''}^{Tc} \right\rangle \frac{\partial}{\partial p_{\nu''}} f^{R(0)} \\ I_8 &= g^2 p^\mu Q_a \left\langle \mathcal{F}_{\mu\nu}^{Ta} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \frac{1}{(p^\mu \partial_\mu)} p^{\mu'} Q_d \mathbf{F}_{\mu'\nu'}^{Td} \right\rangle \frac{\partial}{\partial p_{\nu'}} f^{R(0)} \end{aligned} \quad (2.120)$$

Для вычисления поляризации необходимо взять интеграл по dQ . После умножения на Q^a и интегрирования по частям по Q , становится ясно, что нет вклада в поляризацию от I_3 , I_5 , I_6 и I_8 .

Далее для определенности будет рассматриваться изотропный коррелятор $G_{\mu\nu}^{ab}$:

$$G_{\mu\nu}^{ab} = \delta_{ab} \left[g_{\mu\nu} g_{\nu 0} \langle A_0^2 \rangle + \frac{1}{3} \hat{\delta}_{\mu\nu} \langle \mathbf{A}^2 \rangle \right] B(|\mathbf{r}|, t) \quad (2.121)$$

Обозначим через $f^{Ra(1)}(x, p) = \int Q^a dQ f^{R(1)}(x, p, Q)$ функция распределения неабелевого заряда. Из члена I_2 можно получить следующую ренор-

мализацию уравнения для $f^{Ra(1)}(x, p)$ в режиме длинноволновых корреляций (детали вычисления представлены в Приложении А):

$$[(p^\mu \partial_\mu) + p\gamma] f^{Rl(1)} = \int Q^l dQ (HTL + I_1 + I_4) \quad (2.122)$$

здесь:

$$\gamma = g^2 \frac{N^2 - 1}{4N} \sqrt{\pi} l \left[\langle A_0^2 \rangle + \left\langle \frac{1}{3} \mathbf{A}^2 \right\rangle \right] \quad (2.123)$$

где $l = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2\tau^2}}}$

Только лишь сумма всех трех членов HTL (перенормированная согласно (2.122)), I_1 I_4 является калибровочно инвариантной. Подробное вычисление приведено в Приложении А. Окончательное выражение для поляризационного тензора имеет вид:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{sum } ab} = m_g^2 \delta^{ab} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[-v^\mu g^{\nu 0} + \frac{k^0 v^\mu v^\nu}{(vk) + i\gamma} + \frac{k^0 v^\mu v^\nu}{(vk) + i\epsilon} ((vk) + i\gamma) \right] \quad (2.124)$$

Как видно, указанное выражение калибровочно-инвариантно. Более того, лидирующий вклад имеет порядок γ^2 и квадратичен по коррелятору $G_{\mu\nu}^{ab}$. Таким образом, в наинизшем (по крайней мере) порядке по корреляциям калибровочных потенциалов в турбулентной плазме, корреляции потенциалов не вносят вклада в поляризационные свойства.

2.2.6 Неабелевая плазма. Вклады пропорциональные

$$K_{\mu\nu\mu'\nu'}^{ab}$$

Как было показано в предыдущем подразделе корреляции потенциалов не вносят вклад в поляризацию плазмы в первом порядке.

В результате поляризационные свойства турбулентной кварк-глюонной плазмы определяются исключительно коррелятором калибровочных полей

$K_{\mu\nu\mu'\nu'}^{ab}(x)$, определенным в (2.41). Вильсоновская линия в определении коррелятора здесь возникает в результате усреднения выражений содержащих пропагатор (2.77). Действительно, как не сложно показать, проведя довольно простое вычисление в импульсном представлении:

$$\begin{aligned} \hat{O}(p, k, K) &= \text{---} \overset{K}{\text{---}} \text{---} = \left\langle p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} Q^a Q^b F_a^{T\mu\nu} \left(\frac{1}{p^\mu D_\mu} \right)_{bc} F_c^{T\mu'\nu'} p_{\mu'} \frac{\partial}{\partial p^{\nu'}} \right\rangle \\ &= p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} Q^a Q^b \int d^4 k_1 \frac{1}{(pk_1)} K_{ab}^{\mu\nu\mu'\nu'}(k - k_1) p_{\mu'} \frac{\partial}{\partial p^{\nu'}} \end{aligned} \quad (2.125)$$

Отсюда, разложение для функции распределения в наинизшем порядке по корреляциям полей и потенциалам слаботурбулентной неабелевой плазмы совпадает с соответствующим разложением для абелевой плазмы с точностью до замены коррелятора (2.82) коррелятором (2.41):

$$K_{\mu\nu\mu'\nu'} \rightarrow K_{\mu\nu\mu'\nu'}^{ab} \quad (2.126)$$

и цветовых множителей Q^a .

2.3 Турбулентная поляризация релятивистской плазмы в длинноволновом пределе.

2.3.1 Электромагнитная плазма.

Ниже приведено вычисление турбулентных поправок к поляризационному тензору релятивистской электромагнитной плазмы. В данной работе вычисления проводились в предположении выполнения условий изотропного турбулентного сценария (см. формулу (2.62)), то есть рассматривается предел развитой турбулентности. Для определенности (а также для удобства проведения вычислений) рассматривалась параметризация коррелятора аналогич-

ная (2.61):

$$K_{\mu\nu\mu'\nu'}(x) = \langle F_{0\mu\nu}F_{0\mu'\nu'} \rangle \exp \left[-\frac{\mathbf{r}^2}{a^2} - \frac{t^2}{\tau^2} \right] \quad (2.127)$$

В изотропном случае:

$$\begin{aligned} \langle E_i E_j \rangle &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \langle E^2 \rangle \\ \langle B_i B_j \rangle &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \langle B^2 \rangle \\ \langle E_i B_j \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

Разложим полный поляризационный тензор турбулентной электромагнитной плазмы $\Pi_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ на сумму двух компонент: компоненту $\Pi_{L(T)}^{\text{HTL}}$, представляющую приведенное в (2.28) выражение для поляризации бесстолкновительной плазмы, и компоненту $\Pi_{L(T)}^{\text{turb}}(\omega, \mathbf{k})$, определяющую турбулентные поправки:

$$\Pi_{L(T)}(\omega, \mathbf{k}) = \Pi_{L(T)}^{\text{HTL}}(\omega, \mathbf{k}) + \Pi_{L(T)}^{\text{turb}}(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.129)$$

Далее, как уже упоминалось, вычисления проводятся в приближении слабой турбулентности, и сохраняются наименьшие вклады по корреляциям турбулентных полей, а именно вклады пропорциональные первой степени корреляций турбулентных полей $\langle E^2 \rangle$ и $\langle B^2 \rangle$ (см. формулу (2.62)). Помимо этого, вычисления проводятся в длинноволновом приближении: рассматривается градиентное разложение компонент поляризационного тензора $\Pi_{L(T)}^{\text{turb}}(\omega, |\mathbf{k}|)$ по параметру $(|\mathbf{k}|l) < 1$:

$$\Pi_{L(T)}^{\text{turb}}(\omega, |\mathbf{k}| | l) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\mathbf{k}|l)^n}{\mathbf{k}^2} \left[\phi_{L(T)}^{(n)} \left(\frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \right) \langle E^2 \rangle + \chi_{L(T)}^{(n)} \left(\frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \right) \langle B^2 \rangle \right] \quad (2.130)$$

Ниже будут подробно рассматриваться поправки к функции распределения, определяемые формулой (2.115) в релятивистском пределе. Как уже упоминалось (и будет показано ниже) диаграммами с квадратными вершинами можно пренебречь. Таким образом, основной вклад в турбулентные поправки

к функции распределения привносят две диаграммы без квадратных вершин, диаграмма:

$$\begin{aligned}
 \langle \delta f_{12} \rangle_I = & \text{---} \overset{K}{\text{---}} \overset{R}{\text{---}} \overset{eq}{\text{---}} = \frac{e^3 q^3}{i((pk) + i\epsilon)} F^{R\rho\sigma}(k) \cdot \int d^4 k_1 p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} K^{\mu\nu\mu'\nu'}(k_1) \\
 & \times \frac{1}{i((p(k - k_1)) + i\epsilon)} p_{\mu'} \frac{\partial}{\partial p^{\nu'}} \frac{1}{i((pk) + i\epsilon)} p_\rho \frac{\partial}{\partial p^\sigma} f^{eq}(p)
 \end{aligned} \tag{2.131}$$

и диаграмма:

$$\begin{aligned}
 \langle \delta f_{12} \rangle_{II} = & \text{---} \overset{K}{\text{---}} \overset{R}{\text{---}} \overset{eq}{\text{---}} = \frac{e^3 q^3}{i((pk) + i\epsilon)} F^{R\rho\sigma}(k) \cdot \int d^3 k_1 K^{\mu\nu\mu'\nu'}(k_1) p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} \\
 & \times \frac{1}{i((p(k - k_1)) + i\epsilon)} p_\rho \frac{\partial}{\partial p^\sigma} \frac{1}{i(-(pk_1) + i\epsilon)} p_{\mu'} \frac{\partial}{\partial p^{\nu'}} f^{eq}(p),
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

где f^{eq} - распределение ферми-дирака для электронов и позитронов.

Первая диаграмма дает основной вклад в градиентное разложение (2.130). Последнее связано с тем обстоятельством, что выражение (2.132) содержит два пропагатора под интегралом по k_1 , тогда как выражение (2.131) содержит один пропагатор в подинтегральном выражении. Поэтому выражение для (2.132) содержит дополнительный фактор $(|\mathbf{k}| l)$ по сравнению с (2.131).

Для определения турбулентных поправок к поляризации необходимо вычислить поправки к функции распределения (2.131) и (2.132), проинтегрировать по импульсам и просуммировать по зарядам согласно (2.97) и воспользоваться (2.96).

Вычисление проводилось в первых двух порядках градиентного разложения по $(|\mathbf{k}| l)$. Как уже упоминалось выше, градиентное разложение для (2.131) начинается с членов порядка $(|\mathbf{k}| l)$ и содержит как члены пропорциональные корреляциям электрических полей $\phi_{L(T)}^{(n)}$, так и члены пропорциональные корреляциям магнитных полей $\chi_{L(T)}^{(n)}$, тогда как разложение для (2.132) начина-

ется с членов порядка $(|\mathbf{k}|l)^2$ и содержит только члены пропорциональные корреляциям электрических полей $\phi_{L(T)}^{(n)}$ ($\chi_{L(T)}^{(n)} = 0$).

Процедура вычисления интеграла по k_1 приведена в приложение А.2. Приложение А.3 содержит вычисления интегралов по импульсам.

Приведем ответы для поляризации. Вычисление вклада от диаграммы (2.131) приводит к следующим выражениям для функций $\phi_{L(T)}^{(1)}$ и $\chi_{L(T)}^{(1)}$, определяющий лидирующий вклады градиентного разложения (2.130):

$$\phi_{\text{IT}}^{(1)}(x) = \frac{\imath e^4}{6\pi\sqrt{\pi}} 2x \left[\frac{4 + 10x^2 - 6x^4}{3(1-x^2)} + x(1-x^2) L(x) \right] \quad (2.133)$$

$$\phi_{\text{IL}}^{(1)}(x) = -\frac{\imath e^4}{6\pi\sqrt{\pi}} \frac{8x^3}{3(1-x^2)^2} \quad (2.134)$$

и

$$\chi_{\text{IT}}^{(1)}(x) = \frac{\imath e^4}{6\pi\sqrt{\pi}} 4x \left[\frac{-2 + 6x^2}{3(1-x^2)} + x L(x) \right] \quad (2.135)$$

$$\chi_{\text{IL}}^{(1)}(x) = -\frac{\imath e^4}{6\pi\sqrt{\pi}} \frac{8x^3}{3(1-x^2)^2}. \quad (2.136)$$

Выражение для функций $\phi_{L(T)}^{(2)}$ и $\chi_{L(T)}^{(2)}$ определяющих вклад от (2.131) во втором порядке по $(|\mathbf{k}|l)$ имеют вид:

$$\phi_{\text{IT}}^{(2)}(x) = \frac{e^4}{6\pi^2} x \left[\frac{22}{3}x + 4x^3 + (1 + 3x^2 + 2x^4) L(x) \right] \quad (2.137)$$

$$\phi_{\text{IL}}^{(2)}(x) = \frac{e^4}{6\pi^2} 2x^3 \left[\frac{2x}{1-x^2} + L(x) \right] \quad (2.138)$$

и:

$$\chi_{\text{IT}}^{(2)}(x) = \frac{e^4}{6\pi^2} x \left[14x + (1 - 7x^2) L(x) \right] \quad (2.139)$$

$$\chi_{\text{IL}}^{(2)}(x) = \frac{e^4}{6\pi^2} 2x \left[\frac{6x - 4x^3}{1-x^2} + (1 - 2x^2) L(x) \right], \quad (2.140)$$

где, как и ранее:

$$x = \frac{k^0}{|\mathbf{k}|} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \quad (2.141)$$

$$L(x) \equiv \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - i\pi\theta(1-x) \quad (2.142)$$

$$\phi_{\text{П L(T)}}^{(1)} = \chi_{\text{П L(T)}}^{(1)} = 0, \quad (2.143)$$

Далее обратимся к вкладам от диаграммы (2.132). Ниже приведена формула для единственных ненулевых вкладов, $\phi_{\text{П L(T)}}^{(2)}$:

$$\phi_{\text{П T}}^{(2)}(x) = \frac{e^4}{6\pi^2} \left[\frac{2}{3}x^2 - 4x^4 - x(1+x^2-2x^4) L(x) \right] \quad (2.144)$$

$$\phi_{\text{П L}}^{(2)}(x) = \frac{e^4}{6\pi^2} [4x^2 - 2x^3 L(x)] \quad (2.145)$$

2.3.2 Кварк-глюонная плазма.

Как было показано ранее, вычисление поляризации кварк-глюонной плазмы турбулентной плазмы отличается от соответствующего вычисления для электромагнитной плазмы только лишь множителем, связанным с интегрированием по неабелевым зарядам dQ и статистикой функции распределения для глюонов.

Цветовой множитель, связанный с интегралом по динамическим переменным Q^a можно получить воспользовавшись приведенной ранее формулой:

$$\int dQ Q^a Q^b = C_2 \delta^{ab}. \quad (2.146)$$

Напомним, что C_2 зависящая от представления алгебры $su(n)$ величина, для кварков и антикварков:

$$C_2 = \frac{1}{2}, \quad (2.147)$$

а для глюонов:

$$C_2 = N, \quad (2.148)$$

так же как и ранее, q_2 зависит от представления алгебры зарядов. Для фундаментального и антифундаментального представления:

$$q_2 = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad (2.149)$$

для присоединенного представления:

$$q_2 = N. \quad (2.150)$$

Воспользовавшись этими формулами, можно вычислить интеграл по dQ .

Также при вычислении поляризационного тензора производится интегрирование по импульсу. В первом порядке по корреляциям турбулентных полей ответ для поляризации зависит от интеграла $\int dp \frac{df^{eq}(p)}{dp}$. Вообще говоря, указанный интеграл расходится для бозонов вследствие того, что наиболее эффективно с полями плазмы взаимодействуют ультрарелятивистские частицы малых энергий (что представляет собой релятивистский эффект: второй закон Ньютона, записанный для частицы с нулевой массой и зарядом Q_a в поле $F^{\mu\nu a}$ имеет вид $\frac{dv^\mu}{d\tau} = 1/p^0 v_\nu g Q_a F^{\mu\nu a}$), которые перенасыщены в статистике Бозе-Эйнштейна. Впрочем, указанная расходимость устраняется при учете того факта, что глюоны в плазме приобретают эффективную массу порядка m_g . Соответственно интеграл можно обрезать на значениях энергии порядка дебаевской массы.

С учетом вышесказанного ответ для поляризации турбулентной плазмы в первом порядке по корреляциям принимает вид:

$$\phi_{IT}^{(1)}(x) = \frac{\imath C_{q(g)}}{6\pi\sqrt{\pi}} 2x \left[\frac{4 + 10x^2 - 6x^4}{3(1-x^2)} + x(1-x^2) L(x) \right] \quad (2.151)$$

$$\phi_{IL}^{(1)}(x) = -\frac{\imath C_{q(g)}}{6\pi\sqrt{\pi}} \frac{8x^3}{3(1-x^2)^2} \quad (2.152)$$

и

$$\chi_{\text{IT}}^{(1)}(x) = \frac{iC_{q(g)}}{6\pi\sqrt{\pi}} 4x \left[\frac{-2 + 6x^2}{3(1-x^2)} + x L(x) \right] \quad (2.153)$$

$$\chi_{\text{IL}}^{(1)}(x) = -\frac{iC_{q(g)}}{6\pi\sqrt{\pi}} \frac{8x^3}{3(1-x^2)^2}. \quad (2.154)$$

$$\phi_{\text{IT}}^{(2)}(x) = \frac{C_{q(g)}}{6\pi^2} x \left[\frac{22}{3}x + 4x^3 + (1 + 3x^2 + 2x^4) L(x) \right] \quad (2.155)$$

$$\phi_{\text{IL}}^{(2)}(x) = \frac{C_{q(g)}}{6\pi^2} 2x^3 \left[\frac{2x}{1-x^2} + L(x) \right] \quad (2.156)$$

и

$$\chi_{\text{IT}}^{(2)}(x) = \frac{C_{q(g)}}{6\pi^2} x [14x + (1 - 7x^2) L(x)] \quad (2.157)$$

$$\chi_{\text{IL}}^{(2)}(x) = \frac{C_{q(g)}}{6\pi^2} 2x \left[\frac{6x - 4x^3}{1-x^2} + (1 - 2x^2) L(x) \right] \quad (2.158)$$

$$\phi_{\text{IT}}^{(2)}(x) = \frac{C_{q(g)}}{6\pi^2} \left[\frac{2}{3}x^2 - 4x^4 - x(1 + x^2 - 2x^4) L(x) \right] \quad (2.159)$$

$$\phi_{\text{IL}}^{(2)}(x) = \frac{C_{q(g)}}{6\pi^2} [4x^2 - 2x^3 L(x)], \quad (2.160)$$

где поперечная и продольная компонента поляризованного оператора выражаются через ϕ и χ посредством (2.130).

Коэффициенты $C_{q(g)}$ различны для кварков и глюонов. После интегрирования по зарядам dQ и импульсу dp можно получить значения для коэффициентов.

Для кварков:

$$C_q = g^4 N_q \frac{N^2 - 1}{4N} \quad (2.161)$$

Для глюонов:

$$C_g = \frac{2g^3 N^2}{N + \frac{N_q}{2}} \quad (2.162)$$

Отметим, что глюонный вклад - лидирующий по константе взаимодействия. Это связано с тем, что интеграл по импульсу для глюонов обрезается на дебаевской массе. В итоге, глюоны основной вклад в турбулентную поляризацию плазмы. В дальнейшем кварковая компонента будет отбрасываться.

2.4 Условия применимости.

В этом подразделе будут рассмотрены условия применимости приближений и оценка следующих порядков разложения по корреляциям турбулентных полей.

Рассмотрим для начала приближение, позволившее заменить функцию распределения частиц в турбулентной плазме $f^{(0)}(p, x)$ равновесной функцией распределения f^{eq} .

Функция распределения турбулентной плазмы $f^{(0)}(x, p)$ представляет собой решение уравнения диффузии (2.104):

$$\left((p^\mu \partial_\mu - \hat{O}(p, x, K)) \right) f^{(R)0}(p, x) = 0 \quad (2.163)$$

где, уже приведенный ранее оператор $\hat{O}(p, x, K)$ в импульсном представлении, в наинизшем приближении по корреляциям турбулентных полей выражается посредством формулы:

$$\hat{O}(p, k, K) \sim p^\mu \frac{\partial}{\partial p_\nu} \left(\int d^4 k_1 \frac{1}{i((pk_1) - i\epsilon)} K_{\mu\nu\mu'\nu'}(k - k_1) \right) p^{\mu'} \frac{\partial}{\partial p_{\nu'}} \quad (2.164)$$

Для начала разумно попробовать искать стационарные решения уравнения (2.163). Для этого будем искать решения для функции распределения в импульсном представлении в виде:

$$f^{(R)0}(p, k) = \delta^4(k) h(p) \quad (2.165)$$

Достаточно очевидно, что для того чтобы функция распределения указанного вида удовлетворяла уравнению диффузии (2.163), функция импульсов $h(p)$ должна удовлетворять следующему условию:

$$\hat{O}(p, 0, K)h(p) = 0. \quad (2.166)$$

Элементарный анализ показывает, что в первом порядке по турбулентным пульсациям, решение этого уравнения - степенная функция распределения вида:

$$h(p) = \frac{C_1}{p}, \quad (2.167)$$

где C_1 - не зависящая от импульса константа. Средняя энергия частиц плазмы для решений подобного вида бесконечна. В дальнейшем анализе решения такого типа рассматриваться не будут.

Далее перейдем к нестационарным решениям уравнения диффузии (2.104). Представляется разумным рассмотреть нестационарное решение (для определенности также можно сосредоточиться на пространственно однородных решениях), которое переходит в равновесное распределение $f^{eq}(p)\delta^4(k)$ в пределе $K \rightarrow 0$, при котором турбулентные корреляции исчезают. В импульсном представлении указанным свойством обладает решение:

$$f^{(R)0}(k, p) = ip^0 \delta(\iota(pk) - \hat{O}(p, k, K)) \delta^3(k) f^{eq}(p), \quad (2.168)$$

после перехода обратно в координатное представление:

$$f^{(R)0}(x, p) = \exp(\hat{\kappa}t) f^{eq}(p), \quad (2.169)$$

где, в свою очередь, $\hat{\kappa}$ удовлетворяет уравнению:

$$\iota(p^0 \hat{\kappa}) - \hat{O}(p, \hat{\kappa}, 0, K) = 0 \quad (2.170)$$

(следует отметить, что \hat{k} также представляет собой оператор, зависящий от импульсов p и производных по ним)

Как известно из теории линейного отклика нестационарных сред, отклик на внешнее возмущение нелокален. Таким образом поляризация зависит не только от величины регулярного поля турбулентной плазмы $F_{\mu\nu}^R(k)$, но и от производных регулярного поля по компонентам волнового вектора, например $\partial_k F_{\mu\nu}^R(k)$.

Для того чтобы оценить условие, при котором указанным нестационарным вкладом можно пренебречь, необходимо произвести соответствующее вычисление. Что в лидирующем (по корреляциям турбулентных полей) приближении сводится к оценке вклада от следующей диаграммы (диаграмма аналогичная той, которая определяет вклад первого порядка в приближении НТЛ) и сравнении его со вкладом от (2.131):


(2.171)

Далее, записывая выражение для вклада (2.171) в явном виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{i((pk) + i\epsilon)} p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} \int d^4 k_1 eq F^{\mu\nu}(k_1) i p^0 \delta(i(p(k - k_1)) - \hat{O}(p, k - k_1, K)) \delta^3(\mathbf{k}) f^{eq} \\
&= \frac{eq}{i((pk) + i\epsilon)} p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} F^{\mu\nu}(\hat{k}, \mathbf{k}) f^{eq}(p) \sim \frac{eq}{i((pk) + i\epsilon)} p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} \left(F^{\mu\nu}(k) \right. \\
& \left. + i \frac{\partial F^{\mu\nu}(k)}{\partial k^0} \frac{\hat{O}(p, 0, K)}{p^0} \right) f^{eq}(p)
\end{aligned}
\tag{2.172}$$

и сравнивая с диаграммы, дающей лидирующий вклад в градиентное разложение (2.130):


(2.173)

как легко увидеть с помощью элементарных вычислений, можно получить

следующие условие на регулярное поле в плазме:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^R(k)/\partial k^0}{F_{\mu\nu}^R(k)} \ll \frac{1}{k} \quad (2.174)$$

или, переходя в координатное представление:

$$\delta t \frac{\partial F_{\mu\nu}(t)}{\partial t} \ll F_{\mu\nu}(t) \quad (2.175)$$

Таким образом приближение работает на временах много меньших характеристического времени изменения полей в плазме. Кроме того ограничения на параметры задачи накладывают требование малости разложения по корреляциям турбулентных полей в сравнении со вкладом в функцию распределения в нулевом порядке по корреляциям (2.28), а также малости следующих членов разложения в сравнении с вкладом первого порядка по корреляциям. Первое условие накладывает следующее ограничение на параметры задачи:

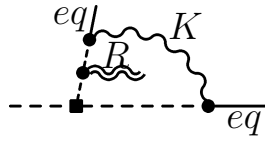
$$\frac{e^2 \langle E^2 \rangle l}{|\mathbf{k}| T^2} \ll 1 \quad (2.176)$$

аналогично, оценивая следующий член разложения по корреляциям турбулентных полей, получаем условие:

$$\frac{\langle E^2 \rangle l}{|\mathbf{k}| T^2} \ll 1 \quad (2.177)$$

Далее следует подробно остановиться на диаграммах с квадратными вершинами. Выше в расчетах пренебрегался вклад от этих диаграмм. Ниже будет представлена оценка условий, при которых это возможно. Для этого выпишем

в явном виде выражение для одной из диаграмм с квадратной вершиной:



$$\begin{aligned}
\text{---} \square \text{---} &= \frac{e^5}{(2\pi)^4 \imath(pk)} \int \int \int \int \sum_{q_1} d^4 p_1 d^4 k_1 d^4 k_2 d^4 k_3 \cdot q_1^2 \delta(p_1^2) \theta(p_1^0) \times \\
&\frac{k_{1\nu} p_{1\mu} - k_{1\mu} p_{1\nu}}{k_1^2} \frac{1}{\imath(p_1 k_1)} p_{1\rho} \frac{\partial}{\partial p_1^\sigma} q_1 F^{\rho\sigma}(k_1 - k_3) \frac{1}{\imath p_1(k_1 - k_2)} p_{1\mu} \frac{\partial}{\partial p_1^\nu} f(p_1) q_1 q K^{\mu\nu\mu'\nu'}(k_3) \\
&\delta^4(k_1 - k_2 - k_3) \times \frac{1}{\imath p(k - k_1)} p_{\mu'} \frac{\partial}{\partial p^{\nu'}} f(p) \delta^4(k - k_1 + k_3) \\
&= \frac{e^5 F^{\rho\sigma}(k)}{(2\pi)^4 \imath(pk)} \int \int \sum_{q_1} d^4 p_1 q_1 d^4 k_1 q_1^2 \delta(p^2) \theta(p_1^0) \frac{\imath(k_{1\mu} p_{1\nu} - k_{1\nu} p_{1\mu})}{k_1^2} \frac{1}{\imath(p_1 k_1)} p_{1\rho} \frac{\partial}{\partial p_1^\sigma} q_1 \times \\
&\frac{1}{\imath p_1(k_1 - k)} p_{1\mu} \frac{\partial}{\partial p_1^\nu} f(p_1) q_1 q K^{\mu\nu\mu'\nu'}(k_1 - k) \frac{1}{\imath p(k - k_1)} p_{\mu'} \frac{\partial}{\partial p^{\nu'}} f(p)
\end{aligned} \tag{2.178}$$

Чтобы получить выражение для тока, нужно дополнительно проинтегрировать по p и просуммировать по q . Как легко видеть (сравнивая с (2.132) и подсчитывая количество интегрирований по импульсам p и p_1 и по k_1), этим членом можно пренебречь при $1/l \gg eT$. Однако даже при $1/l \ll eT$ диаграммами с квадратными вершинами можно пренебречь если учесть экранирование при величинах волнового вектора k порядка дебаевской массы в знаменателе выражения (2.111).

Применимость теории линейного отклика также накладывает ограничение на амплитуду регулярных калибровочных полей $F^{\mu\nu}$ плазмы. Последняя применима в случаях когда поле не изменяет существенным образом распределение частиц в плазме. Можно использовать следующие простые физические аргументы следуя, например, [148]: регулярные поля плазмы могут существенно изменить распределение частиц если импульс полученный частицей на длине когерентности становится порядка характерных импульсов частиц плазмы, то

есть порядка температуры плазмы. Отсюда можно прийти к условию:

$$|F_{\mu\nu}| \ll \frac{k_{field} T}{e}. \quad (2.179)$$

2.5 Физические следствия.

2.5.1 Затухание волн в турбулентной плазме.

Рассмотрим для начала случай электромагнитной плазмы. Для того чтобы исследовать затухание волн в плазме, рассмотрим мнимую часть поляризации турбулентной плазмы в первом порядке градиентного разложения (2.130). Как уже было показано ранее, в первом порядке вклад в поляризацию дают только члены $\phi_{IT(L)}^{(1)}$ и $\chi_{IT(L)}^{(1)}$ из (2.131), так что мнимая часть поперечной и продольной поляризации в этом приближении задается выражениями:

$$\begin{aligned} \text{Im}\Pi_T(\omega, \mathbf{k} | l) \simeq & -\pi m_D^2 \frac{x}{4} (1-x^2) \theta(1-x) + \frac{(|\mathbf{k}| l)}{\mathbf{k}^2} \left(\langle E^2 \rangle \text{Im}\phi_{IT}^{(1)}(x) \right. \\ & \left. + \langle B^2 \rangle \text{Im}\chi_{IT}^{(1)}(x) \right) \end{aligned} \quad (2.180)$$

$$\text{Im}\Pi_L(\omega, \mathbf{k} | l) \simeq -\pi m_D^2 \frac{x^3}{2} \theta(1-x) + \frac{(|\mathbf{k}| l)}{\mathbf{k}^2} \left(\langle E^2 \rangle \text{Im}\phi_{IL}^{(1)}(x) + \langle B^2 \rangle \text{Im}\chi_{IL}^{(1)}(x) \right), \quad (2.181)$$

где функции $\text{Im}\phi_{IL(T)}^{(1)}$ и $\text{Im}\chi_{IL(T)}^{(1)}$ даются уравнениями (2.133)-(2.136). Графики для функций $\text{Im}\phi_{IT}^{(1)}$, $\text{Im}\chi_{IT}^{(1)}$, $\text{Im}\phi_{IL}^{(1)}$, $\text{Im}\chi_{IL}^{(1)}$ представлены на Рис. (2.1) и (2.2) соответственно.

1. Времениподобная область. Из Рис. 2.1 и 2.2 можно видеть, что знак мнимой части турбулентной проницаемости в поляризационном тензоре во времениподобной области $x > 1$ - отрицательный. Что приводит к турбулентному затуханию как поперечных, так и продольных времениподобных мод.

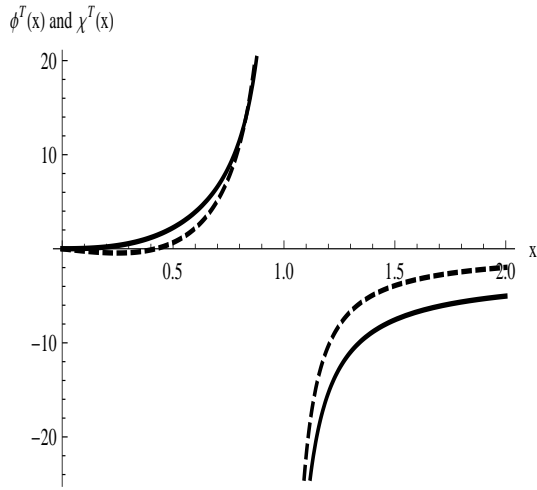


Рис. 2.1: Функции $\frac{6\pi\sqrt{\pi}}{e^4} \text{Im} [\phi_T^{(1)}(x)]$ (сплошная линия) и $\frac{6\pi\sqrt{\pi}}{e^4} \text{Im} [\chi_T^{(1)}(x)]$ (прерывистая линия).

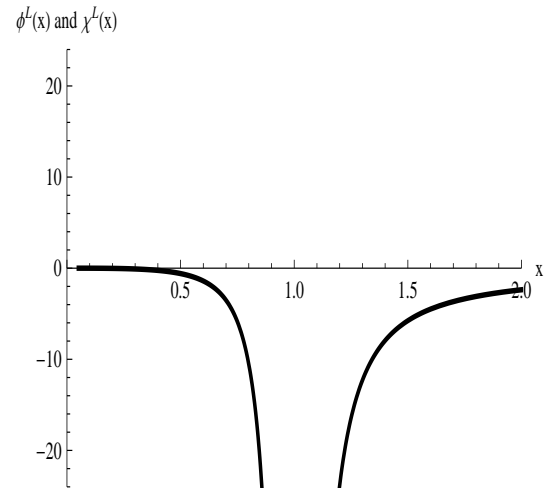


Рис. 2.2: Функции $\frac{6\pi\sqrt{\pi}}{e^4} \text{Im} [\phi_L^{(1)}(x)]$ (сплошная линия) и $\frac{6\pi\sqrt{\pi}}{e^4} \text{Im} [\chi_L^{(1)}(x)]$ (прерывистая линия).

Следует отметить, что в этой области четырехмерного пространства волновых векторов нет затухания Ландау и поэтому турбулентное затухание волн в этой области является лидирующим эффектом.

2. Пространственноподобная область. В пространственноподобной области $x < 1$ ситуация отлична от описанной выше. В отличие от времениподобной области, даже в нулевом порядке по турбулентным корреляциям присутствует ненулевой отрицательный вклад отвечающий затуханию Ландау в уравнении (2.28). Как видно из рисунков 2.1 и 2.2, мнимая турбулентная добавка к продольной поляризации отрицательна. Таким образом турбулентность усиливает затухание Ландау продольных волн. Не так обстоит дело с турбулентными поправками в поперечную часть поляризационного тензора (2.133) и (2.135). Из Рис. 2.1 и 2.2 также можно увидеть, что электрический вклад (а именно вклад пропорциональный корреляциям электрических полей) $\text{Im} [\phi_T^{(1)}(x)]$ в пространственноподобной области положителен для всех значений x , тогда

как магнитный вклад отрицателен при $x < x^*$, где $x^* \sim 0.43$ и положителен при $x > x^*$. Таким образом, в пространственноподобной области турбулентность может уменьшать эффект затухания Ландау. При определенных условиях (см. ниже) турбулентный вклад может сравняться с по величине с вкладом от затухания Ландау, что может привести к неустойчивости длинноволновых мод (хотя следует отметить, что область параметров, для которых турбулентный вклад сравним с вкладом нулевого порядка по корреляциям выходит за рамки рассматриваемого приближения) .

Рассмотрим условие, при которых турбулентный вклад равен по величине вкладу, отвечающему за затухание Ландау релятивистской плазмы. Легко получить указанное условие, когда в турбулентной плазме присутствуют ненулевые корреляции только лишь магнитных полей:

$$\text{Im}\Pi_T(\omega, |\mathbf{k}|) = -\pi \frac{e^2 T^2}{12} x(1-x^2) \left[1 - \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \frac{(|\mathbf{k}| l)}{\mathbf{k}^2} \frac{e^2 \langle B^2 \rangle}{T^2} \Phi(x) \right], \quad (2.182)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{x(1-x^2)} \left[\frac{-4 + 12x^2}{3(1-x^2)} + 2x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right] \quad (2.183)$$

На Рис. 2.3 и 2.4 представлена зависимость значений безразмерного параметра $e^2(|\mathbf{k}| l) \langle B^2 \rangle / (\mathbf{k}^2 m_D^2)$ от x , для которых турбулентный вклад равен по величине вкладу нулевого порядка по корреляциям. В случае, когда амплитуда корреляций магнитных и электрических полей турбулентной плазмы равны между собой $\langle B^2 \rangle = \langle E^2 \rangle$, уравнение аналогичное (2.182) принимает вид:

$$\text{Im}\Pi_T(\omega, |\mathbf{k}|) = -\pi \frac{e^2 T^2}{12} x(1-x^2) \left[1 - \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \frac{(|\mathbf{k}| l)}{\mathbf{k}^2} \frac{e^2 \langle E^2 \rangle}{T^2} \Theta(x) \right] \quad (2.184)$$

где

$$\Theta(x) = \frac{1}{x(1-x^2)} \left[\frac{x^2(22-6x^2)}{3(1-x^2)} + x(3-x) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right] \quad (2.185)$$

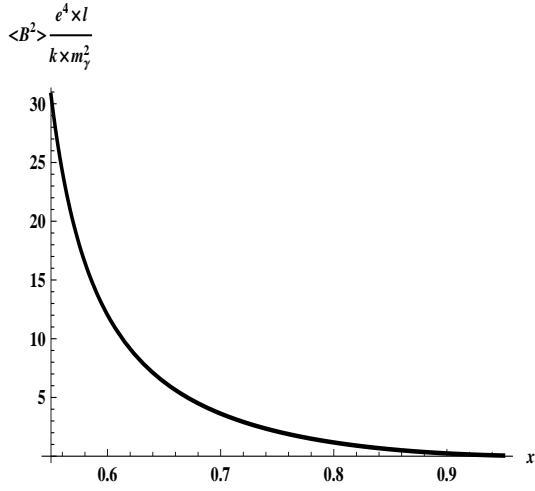


Рис. 2.3: Значения параметра $e^4(|\mathbf{k}|l)\langle B^2 \rangle / \mathbf{k}^2 m_D^2$ в случае когда в плазме присутствуют только корреляции магнитных полей.

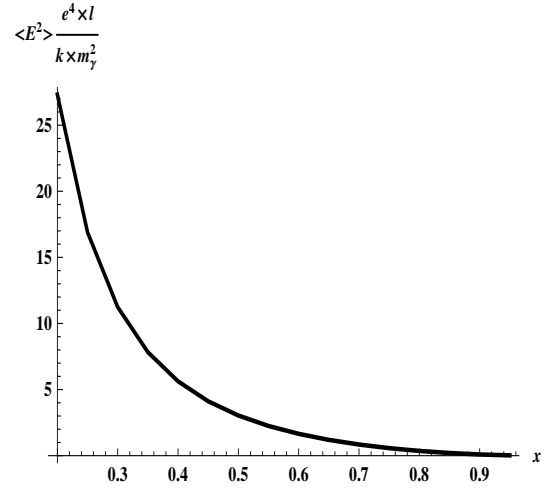


Рис. 2.4: Значения параметра $e^4(|\mathbf{k}|l)\langle B^2 \rangle / \mathbf{k}^2 m_D^2$ в предположении что амплитуда корреляций электрических и магнитных полей равна по величине $\langle B^2 \rangle = \langle E^2 \rangle$.

Аналогичные выражения для кварк-глюонной плазмы со всей очевидностью следуют из выражений для поляризаций в неабелевом случае. Качественно, поведение мнимой части во времениподобной и пространственноподобной области не претерпевает изменений. Различаются лишь численные коэффициенты в выражениях для турбулентного вклада. Используя (2.151) и (2.153), легко получить выражение для мнимой части поперечной части поляризации (очевидно лидирующий вклад вносят глюоны), когда в плазме присутствуют только лишь корреляции хромомагнитных полей:

$$\text{Im}\Pi_T(\omega, |\mathbf{k}|) = -\pi \frac{g^2 T^2}{12} x(1-x^2) \left[1 - \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \frac{(|\mathbf{k}|l) C_g \langle B^2 \rangle}{\mathbf{k}^2 g^2 T^2} \Phi(x) \right] \quad (2.186)$$

Соответственно, условие, при котором турбулентный вклад сравнивается по величине с вкладом нулевого порядка принимает вид:

$$\frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \frac{(|\mathbf{k}|l) C_g \langle B^2 \rangle}{\mathbf{k}^2 g^2 T^2} \Phi(x) = 1 \quad (2.187)$$

Аналогично, в предположении равенства корреляций хромозлектрических и хромомагнитных полей $\langle E^2 \rangle = \langle B^2 \rangle$, получаем:

$$\text{Im}\Pi_T(\omega, |\mathbf{k}|) = -\pi \frac{g^2 T^2}{12} x(1-x^2) \left[1 - \frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \frac{(|\mathbf{k}| l) C_g \langle E^2 \rangle}{\mathbf{k}^2 g^2 T^2} \Theta(x) \right] \quad (2.188)$$

и

$$\frac{4}{\pi^2 \sqrt{\pi}} \frac{(|\mathbf{k}| l) C_g \langle E^2 \rangle}{\mathbf{k}^2 g^2 T^2} \Theta(x) = 1 \quad (2.189)$$

2.5.2 Плазмоны в турбулентной плазме.

Также интересно проанализировать влияние турбулентности на распространение в плазме коллективных возбуждений - плазмонов. Как в абелевом так и в неабелевом случае плазмоны характеризуются дисперсионными соотношениями $\omega_{T(L)}(|\mathbf{k}|)$, которые можно получить из решения дисперсионных уравнений для соответствующих компонент поляризационного тензора. Уравнения дисперсии представляют собой нули реальной части обратных пропагаторов поперечных и продольных волн соответственно

$$\text{Re} \left[\mathbf{k}^2 \left(1 - \frac{\Pi_L(k^0, |\mathbf{k}|)}{\omega^2} \right) \Big|_{k^0 = \omega_L(|\mathbf{k}|)} \right] = 0 \quad (2.190)$$

$$\text{Re} \left[\mathbf{k}^2 - (k^0)^2 + \Pi_T(k^0, |\mathbf{k}|) \Big|_{k^0 = \omega_T(|\mathbf{k}|)} \right] = 0,$$

в то время как мнимая часть поляризации определяет затухание и расплывание плазмонов. Решая указанные уравнения (в общем случае численно) и используя выражения для поляризации в плазме, можно в приближении $gTl \ll 1$ получить модификацию дисперсионных соотношений для плазмонов. Кроме того, как можно легко увидеть, ширина размытия плазмонов связана с мнимой частью посредством уравнения:

$$\Gamma_{T(L)} = \sqrt{-\text{Im}(\Pi_{T(L)})} \quad (2.191)$$

Следует отметить, что, как уже отмечалось прежде, мнимый турбулентный вклад является лидирующим по отношению к градиентному разложению по kl в сравнении с действительным.

Рассмотрим для определенности дисперсионные соотношения в пределе $\frac{k}{\omega_{pl}} \ll 1$ (значение плазменной частоты будет приведено ниже). В этом пределе в отсутствие турбулентности можно получить аналитические выражения для дисперсии плазмонов. Для поляризационного тензора (2.28) бесстолкновительной плазмы можно получить выражения для разложений по степеням $\frac{k}{\omega_{pl}}$ ([123]) уже приведенное в (2.32)

Далее можно вычислить турбулентные поправки к указанным соотношениям. Из выражений для поляризации поляризации легко получить указанные поправки как для электромагнитной плазмы:

$$\begin{aligned}\omega_L^2(|\mathbf{k}|)_{\text{turb}} &= (\omega_{\text{pl L}}^{\text{turb}})^2 \left(1 + \frac{3}{5}y_L^2\right) - \frac{e^4 l^2}{6\pi^2} \left(\frac{24}{5}\langle E^2 \rangle + \frac{64}{15}\langle B^2 \rangle\right) y_L^2 + O(y_L^4) \\ \omega_T^2(|\mathbf{k}|)_{\text{turb}} &= (\omega_{\text{pl T}}^{\text{turb}})^2 \left(1 + \frac{3}{5}y_T^2\right) - \frac{e^4 l^2}{6\pi^2} \left(\frac{24}{7}\langle E^2 \rangle + \frac{32}{15}\langle B^2 \rangle\right) y_T^2 + O(y_T^4),\end{aligned}\tag{2.192}$$

где

$$y_L = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\text{pl L}}^{\text{turb}}}; \quad y_T = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\text{pl T}}^{\text{turb}}}\tag{2.193}$$

и

$$\begin{aligned}(\omega_{\text{pl L}}^{\text{turb}})^2 &= \omega_{\text{pl L}}^2 - \frac{e^4 l^2}{6\pi^2} \left(\frac{16}{3}\langle E^2 \rangle + \frac{8}{3}\langle B^2 \rangle\right) \\ (\omega_{\text{pl T}}^{\text{turb}})^2 &= \omega_{\text{pl T}}^2 - \frac{e^4 l^2}{6\pi^2} \left(\frac{128}{15}\langle E^2 \rangle + \frac{8}{3}\langle B^2 \rangle\right).\end{aligned}\tag{2.194}$$

Так и для кварк-глюонной плазмы:

$$\begin{aligned}\omega_L^2(|\mathbf{k}|)_{\text{turb}} &= (\omega_{\text{pl L}}^{\text{turb}})^2 \left(1 + \frac{3}{5}y_L^2\right) - \frac{C_g l^2}{6\pi^2} \left(\frac{24}{5}\langle E^2 \rangle + \frac{64}{15}\langle B^2 \rangle\right) y_L^2 + O(y_L^4) \\ \omega_T^2(|\mathbf{k}|)_{\text{turb}} &= (\omega_{\text{pl T}}^{\text{turb}})^2 \left(1 + \frac{3}{5}y_T^2\right) - \frac{C_g l^2}{6\pi^2} \left(\frac{24}{7}\langle E^2 \rangle + \frac{32}{15}\langle B^2 \rangle\right) y_T^2 + O(y_T^4),\end{aligned}\tag{2.195}$$

где

$$y_L = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\text{pl L}}^{\text{turb}}}; \quad y_T = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\text{pl T}}^{\text{turb}}}, \quad (2.196)$$

и

$$\begin{aligned} (\omega_{\text{pl L}}^{\text{turb}})^2 &= \omega_{\text{pl L}}^2 - \frac{C_g l^2}{6\pi^2} \left(\frac{16}{3} \langle E^2 \rangle + \frac{8}{3} \langle B^2 \rangle \right) \\ (\omega_{\text{pl T}}^{\text{turb}})^2 &= \omega_{\text{pl T}}^2 - \frac{C_g l^2}{6\pi^2} \left(\frac{128}{15} \langle E^2 \rangle + \frac{8}{3} \langle B^2 \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.197)$$

Глава 3

Цветное переходное излучение на случайных неоднородностях

3.1 Введение

Численное моделирование убедительно демонстрирует, что начальное распределение плотности энергии в столкновениях тяжелых ядер неоднородно в плоскости прицельного параметра [58], [73] (см. графики ниже). Впрочем, указанная неоднородность достаточно очевидна и является следствием флуктуаций числа мягких и жестких столкновений на единицу площади в плоскости столкновения.

В качестве иллюстрации, ниже на рис. 3.1 (взято из [73]) представлено начальное распределение плотности энергии, полученное с помощью Монте-Карло модели NEXUS [74], в основе которой лежит микроскопическое описание, основанная на теории Редже-Грибова. Также, на рис. 3.2 представлен аналогичный график распределения плотности энергии, полученное в работе [58] на основе модели HIJING (Heavy Ion Jet INteraction Generator [75]).

Ниже приведена процедура получения начального распределения плотности энергии в столкновениях ядер следуя работе [58].

Для простоты рассматривалось приближение бьеркеновской гидродинамики и игнорировались продольные флуктуации плотности энергии. В приближении бьеркеновской гидродинамики поток в продольном направлении по отношению к оси столкновений отсутствует при $z = 0$. Таким образом, плотность энергии при $z = 0$ можно оценить исходя из формулы:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}(\tau, \mathbf{x}_\perp, z = 0) \\ \mathbf{M}_\perp(\tau, \mathbf{x}_\perp, z = 0) \end{pmatrix} = \sum_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v}_{\perp\alpha} \end{pmatrix} \frac{p_{\perp\alpha}}{\tau} F(\tau p_{\perp\alpha}) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_{\perp\alpha}(\tau)) \delta(y_\alpha), \quad (3.1)$$

здесь $\tau = \frac{t}{\gamma}$ - время в системе отсчета неподвижного глюона.

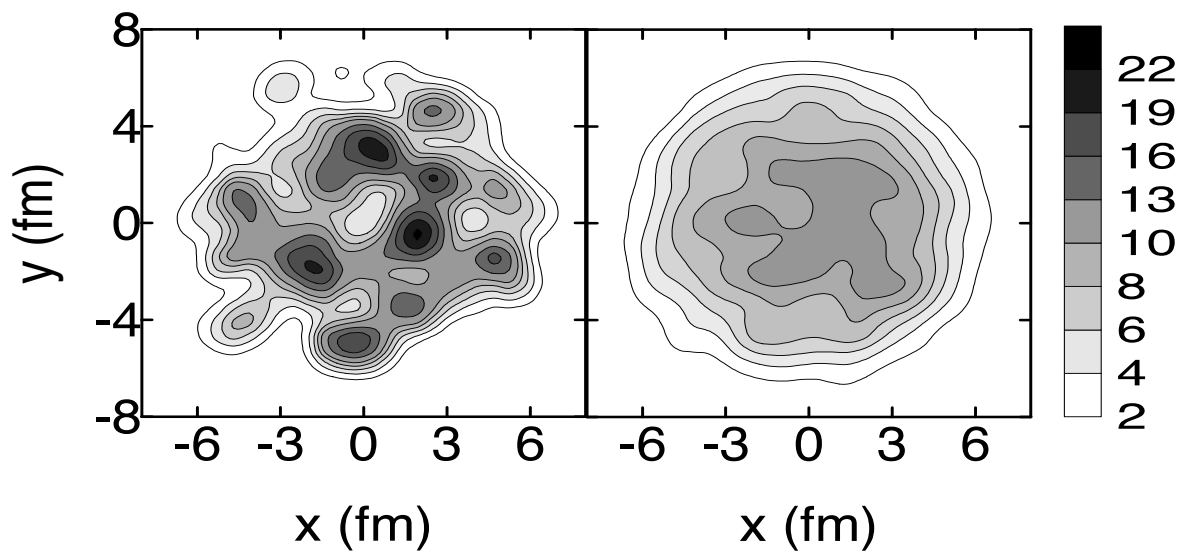


Рис. 3.1: Слева, начальное распределение плотности энергии в единичном столкновении ядер золота при энергии в 200 ГэВ/нуклон как функции координат в плоскости перпендикулярной оси столкновений, полученное с помощью Монте-Карло модели NeXus. Справа, то же распределение после усреднения по 30 столкновениям.

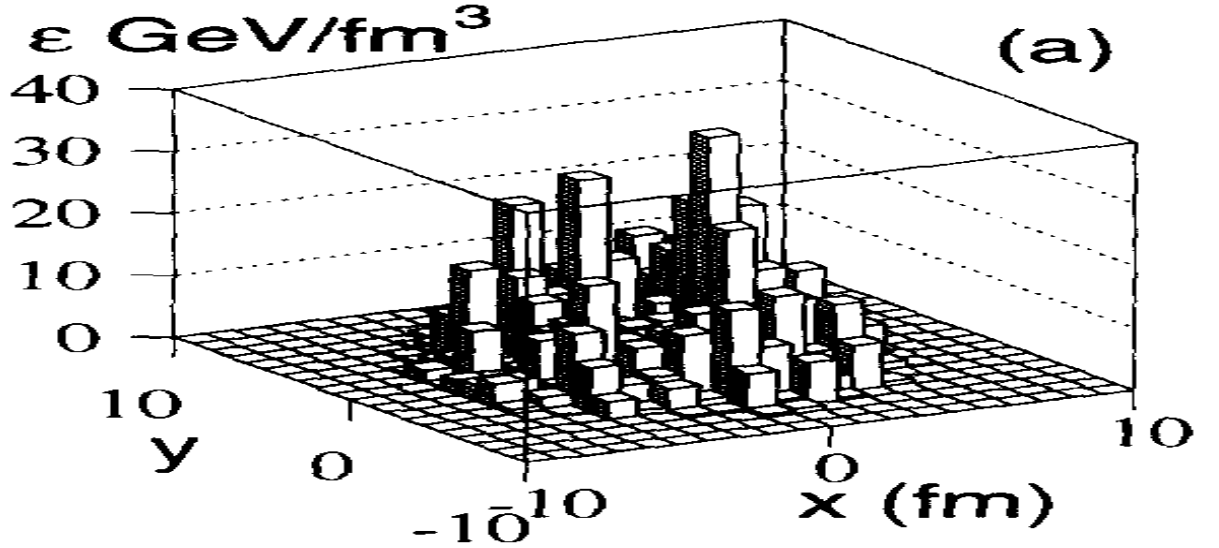


Рис. 3.2: Начальное распределение плотности энергии в столкновениях ядер золота при энергии в 200 ГэВ/нуклон как функции координат в плоскости перпендикулярной оси столкновений, полученное с помощью Монте-Карло модели HIJING (рисунок взят из работы [58]).

Формула учитывает движение глюонов $\mathbf{x}_{\perp\alpha}(\tau) = \mathbf{x}_{\perp\alpha} + \mathbf{v}_{\perp\alpha}\tau$, фактор $F(\tau p_{\perp\alpha}) = \frac{1}{1 + \frac{\hbar^2}{(\tau p_{\perp\alpha})^2}}$ учитывает вероятность рождения партона с поперечным импульсом $p_{\perp\alpha}$.

Далее, для перехода от дискретного распределения к непрерывному следует определить пространственное разрешение в плоскости поперечной оси столкновений, а также разрешение по псевдобыстроте. В предположении, что разрешение по псевдобыстроте равно Δy , а пространственное разрешение равно Δr_{\perp} , можно выполнить замену:

$$\delta^2(x_{\perp} - x_{\perp\alpha}(\tau))\delta(y_{\alpha}) \rightarrow \frac{\Theta(\Delta y/2 - |y_{\alpha}|)}{\Delta r_{\perp}^2 \Delta y} \prod_{i=1,2} \Theta(\Delta r_{\perp}/2 - |x_{i\alpha}(\tau) - x_i|) \quad (3.2)$$

Принцип неопределенности накладывает ограничение на величину Δr_{\perp} снизу, в следствие того, что $\Delta r_{\perp} > \frac{\hbar}{\Delta p_{\perp}}$. Тогда как причинность ограничивает

величину Δr_{\perp} сверху. Действительно, через время τ после столкновения в системе отсчета связанной с движущимся ядром локальная причинно связанная область для произвольного партона ядра равна $c\tau$. Таким образом, даже к моменту, когда наступает адронизация ($\tau \sim 3fm/c$) имеется несколько причинно не связанных друг с другом областей. В работе [58] для оценки минимального эффекта флуктуаций рассматривалась величина Δr равная максимальному причинно-связанному диаметру к моменту термализации: $\Delta r_{\perp} = 2c\tau_{th}$. В качестве величины Δy значительной степени произвольно выбиралось значение $\Delta y = 1$, так как глюоны с большими значениями псевдобыстрот рождаются позже в процессе столкновения и не успевают достигнуть равновесия с глюонами с $y_{\alpha} = 0$.

Оценивая плотность энергии согласно формулам (3.1) и (3.2) и используя HIJING для определения $r_{\perp\alpha}$ и $p_{\alpha\perp}$, можно получить распределение начальной плотности энергии. Согласно результатам моделирования типичные величины относительной флуктуации плотности энергии составляют $\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \sim 0.7$. Следует также отметить, что даже в идеальном Стеффан-Больцмановском ансамбле в конечном объеме температурные флуктуации могут достигать значительных величин. В частности в условиях RHIC последние могут достигать величины $\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \sim 0.5$ [58].

3.2 Хромоэлектрическая проницаемость статистически однородной среды.

Результаты, представленные ниже, получены автором. Часть результатов была опубликована в [149], другая часть (касающаяся поправок к черенков-

ским потерям) публикуется впервые.

Как уже было указано, неоднородность начального состояния, вместе с неустойчивостью могут привести к значительным флуктуациям хромоэлектрических свойств образовавшейся сильновоздействующей материи. Задача о потерях на неоднородностях в среде тесно связано с задачей о распространении волн в неоднородных средах, изучение которой имеет достаточно длинную историю. Монография [68] может использоваться в качестве хорошего обзора состояния области на момент написания.

Следует отметить, что в данной диссертации не рассматривается переходное излучение на границе между средой и вакуумом. Приминительно к столкновениям ядер оно исследовалось в работе [69].

Далее вычисления будут проводится в абелевом приближении. Из формулы (1.11) следует, что для определения потерь необходимо вычислить компоненты хромоэлектрического тензора.

Рассмотрим уравнение для хромоэлектрического поля в среде с проницаемостью зависящей от пространственных координат $\varepsilon(\mathbf{r})$:

$$\Delta \mathbf{E}^a - \nabla(\nabla \mathbf{E}^a) + \omega^2 \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^a = 4\pi i \omega \cdot \mathbf{j}(\omega), \quad (3.3)$$

здесь $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$ - вектор хромоэлектрической проницаемости в смешанном представлении, a - цветовой индекс, \mathbf{j}^a - источник поля в среде.

следует отметить, что в абелевом приближении компоненты хромоэлектрического поля \mathbf{E}^a калибровочно инвариантны.

Далее, представив ε в виде $\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 + \chi(\mathbf{r})$, получаем:

$$\Delta \mathbf{E}^a - \nabla(\nabla \mathbf{E}^a) + \omega^2 \mathbf{E} + \omega^2 \chi(\mathbf{r}) \mathbf{E} \quad (3.4)$$

Поскольку задача о распространении скалярных волн в среде значитель-

но проще задачи о распространении электромагнитных волн, нередко можно встретить приближение, в которых пренебрегают эффектами деполяризации. В этом приближении отбрасывается член $\nabla(\nabla\mathbf{E}^a)$ и, как следствие, векторное волновое уравнение переходит в скалярное. Кроме того, изучение скалярного волнового уравнения имеет самостоятельный интерес, например, в связи с задачей изучения распространения акустических волн.

Рассмотрим далее модель среды с флуктуирующим значением $\chi(\mathbf{r}) = \chi_0(1 + \xi(\mathbf{r}))$, где $\xi(\mathbf{r})$ представляет собой статистическую функцию, среднее значение которой, без ограничения общности можно положить равным нулю, $\langle \xi(\mathbf{r}) \rangle = 0$. Пусть также распределение случайной функции $\xi(\mathbf{r})$ гауссовское, а именно, корреляции полей даются выражениями:

$$\begin{aligned} \langle \xi(\mathbf{r}_1)\xi(\mathbf{r}_2) \rangle &= B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ \langle \xi(\mathbf{r}_1)\xi(\mathbf{r}_2) \dots \xi(\mathbf{r}_{2n+1}) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(\mathbf{r}_1)\xi(\mathbf{r}_2)\xi(\mathbf{r}_3)\xi(\mathbf{r}_4) \rangle &= B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)B(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) + B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4) + B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4)B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.5}$$

Аналогично произвольная корреляция четного количества функций $2n$ дается суммой $(2n - 1)!!$ членов с произведением всевозможных парных корреляций. Для вычисления электромагнитных или КХД свойств среды в наинизшем приближении достаточно знать только лишь функцию парного коррелятора, требование гауссовости корреляций сказывается только лишь при вычислении вкладов высших порядков, а также при определении пределов применимости.

Кроме того, в дальнейшем будет предполагаться статистическая однородность корреляций:

$$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{3.6}$$

Статистически однородные корреляции естественным образом возникают в средах с развитой турбулентностью. Как будет видно далее усредненные электрические (цветные) свойства среды со статистически однородными флуктуациями диэлектрической(хромо) проницаемости можно описать с помощью эффективного ди(хромо)электрического тензора зависящего от волнового вектора.

Дальнейшее изложение будет в значительной степени следовать работе [70], в которой рассматривалась поправка к черенковскому излучению в турбулентной атмосфере.

Представим хромоэлектрическое поле \mathbf{E}^a в среде как сумму регулярной и стохастической компонент:

$$\mathbf{E}^a = \langle \mathbf{E}^a \rangle + \mathbf{e}^a \quad (3.7)$$

здесь \mathbf{e}^a - стохастическая компонента хромоэлектрического поля.

Подставляя указанное выражение в (3.3), можно получить следующую систему уравнений для $\langle \mathbf{E}^a \rangle$ и \mathbf{e}^a :

$$\begin{cases} \Delta \langle \mathbf{E}^a \rangle - \nabla(\nabla \langle \mathbf{E}^a \rangle) + \omega^2 \langle \mathbf{E}^a \rangle + \chi_0 \cdot \omega^2 \langle \mathbf{E}^a \rangle + \chi_0 \cdot \omega^2 \langle \mathbf{e}^a \xi(\mathbf{r}) \rangle = 4\pi i \omega \cdot \mathbf{j}^a(\omega) \\ \Delta \mathbf{e}^a - \nabla(\nabla \mathbf{e}^a) + \omega^2 \mathbf{e}^a + \chi_0 \cdot \omega^2 \mathbf{e}^a = -\chi_0 \cdot \omega^2 \xi(\mathbf{r}) \langle \mathbf{E}^a \rangle + \chi_0 \cdot \omega^2 [\xi(\mathbf{r}) \mathbf{e}^a - \langle \xi(\mathbf{r}) \mathbf{e}^a \rangle] \end{cases}$$

Оставляя только лишь квадратичные по $\xi(\mathbf{r})$ члены, можно, очевидным образом, получить следующее выражении для эффективного тензора хромопроницаемости среды.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \varepsilon_0(\omega) \delta_{ij} - \chi_0 \cdot \omega^2 \int G_{ij}(\mathbf{r}) B(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\ &= \varepsilon_0(\omega) \delta_{ij} - \chi_0 \cdot \omega^2 \int d^3\mathbf{k}_1 G_{ij}(\mathbf{k}_1) \cdot B(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \end{aligned} \quad (3.8)$$

здесь $G_{ij}(\mathbf{r})$ и $G_{ij}(\mathbf{k})$ представляют собой функцию Грина векторного волнового уравнения в координатном и импульсном представлениях соответственно,

тогда как $B(\mathbf{k})$ представляет собой корреляционную функцию в импульсном представлении.

Последовательный диаграммный вывод формулы для эффективной диэлектрической проницаемости, позволяющий оценить область применимости выражений приведен в приложении Б.1

В связи с сингулярностью функции Грина векторного волнового уравнения, работах [71] и [72], где впервые исследовалась распространение векторных волн в случайных средах, было проведено нелинейное переопределение флуктуирующей части диэлектрической проницаемости, в которой нет необходимости при работе с импульсным представлением.

В случае статистической изотропности среды, которая будет предполагаться далее корреляционная функция (в координатном представлении) имеет вид:

$$B(\mathbf{r}) = B(|\mathbf{r}|) \quad (3.9)$$

В этом случае тензор хромопроницаемости имеет только две независимые компоненты:

$$\varepsilon_{ij} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \varepsilon_{\perp} + \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \varepsilon_{\parallel} \quad (3.10)$$

Для корреляционных функций:

- $B(r) = \sigma^2 \exp(-\frac{r}{a})$
- $B(r) = \sigma^2 \frac{1}{((\frac{r}{a})^2 + 1)^2}$ для скалярного волнового уравнения

интегрирование в (3.8) можно выполнить аналитически.

Степенной коррелятор рассматривался, для того чтобы оценить влияние дальних корреляций (присутствие которых следует ожидать в реальных турбулентных системах вследствие степенного поведения в них корреляционной функций).

Выражения для продольной и поперечной части эффективной диэлектрической проницаемости приведены в приложении Б.2.

3.3 Поправки к черенковским потерям и оценка размытия черенковского спектра за счет неоднородностей

Формула для потерь на излучение в среде с заданным тензором хромоэлектрической проницаемости (1.11) и выражения для компонент эффективного хромоэлектрического тензора в среде с флуктуирующей хромопроницаемостью позволяет оценить поправку к потерям на черенковское излучение за счет потерь на переходное излучение на неоднородностях. На графике ниже представлена зависимость величины $\Delta = \frac{d^2 E_{ch}/dx \cdot d\omega}{d^2 E_{ch+inh}/dx \cdot d\omega}$ от частоты ω , полученной благодаря численному интегрированию с помощью формулы (1.11). Здесь $d^2 E_{ch}/dx \cdot d\omega$ дифференциальные потери отнесенные на единицу длины за счет излучения черенковских глюонов, соответственно $d^2 E_{ch+inh}/dx \cdot d\omega$ – дифференциальные потери отнесенные на единицу длины за счет излучения черенковских глюонов в неоднородной среде.

Как видно неоднородности вносят небольшой вклад ($\sim 1 - 2\%$) в излучение черенковских глюонов и ими можно пренебречь. Наличие небольшого подавления черенковского излучения в неоднородной среде связано с тем фактом, что реальная часть эффективной поперечной ди(хромо)электрической проницаемости уменьшается. Это, в свою очередь, подавляет потери на излучение Вавилова-Черенкова. Это уменьшение оказывается достаточно сильным, чтобы компенсировать потери собственно на переходное излучение на неоднород-

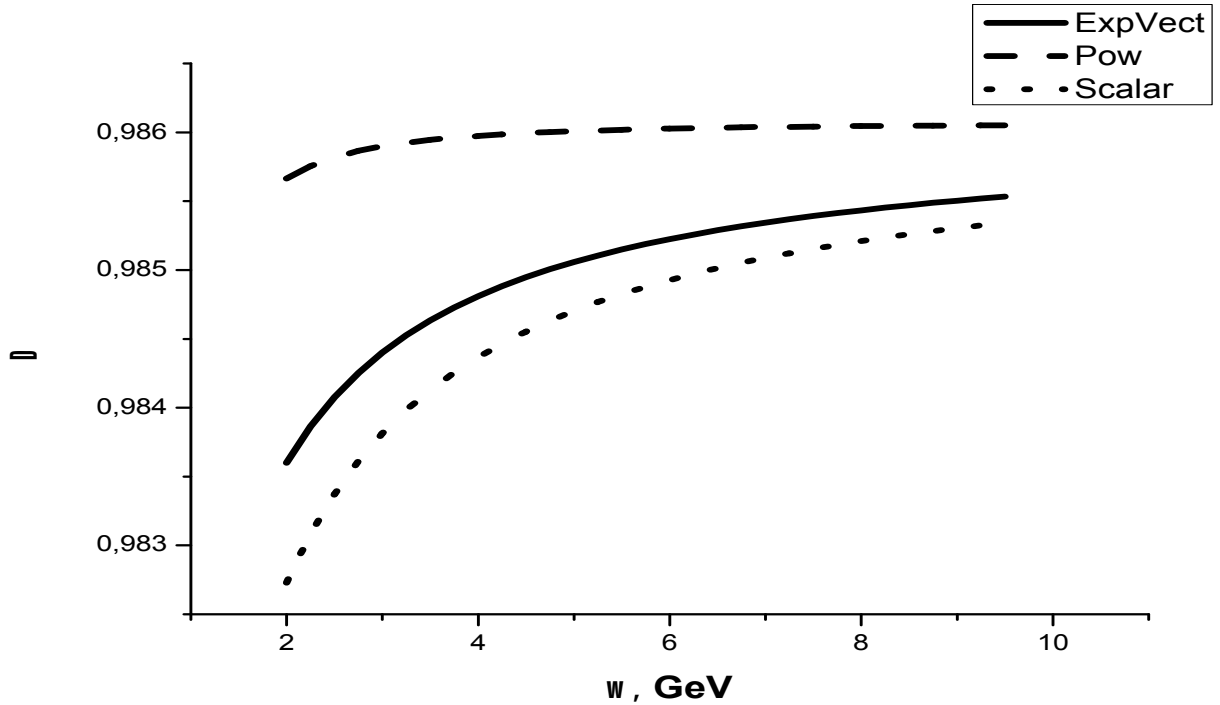


Рис. 3.3: Величина Δ в зависимости от ω в гигаэлектронвольтах для $\varepsilon_0 = 7$ и $\sigma = 0.3$

ностях.

Малость эффекта обусловлена тем, что переходное излучение вообще говоря представляет собой более слабый эффект в сравнении с черенковским излучением. Так в области постоянства ди(хромо)электрической проницаемости (по частоте) потери на черенковское излучение растут как ω^2 , тогда как потери на переходное излучение – как ω .

Также в соответствии с формулой (1.18) следствием наличия мнимой части у поперечной компоненты ди(хромо)электрической проницаемости является размазывания углового распределения черенковского излучения. Однако расчет показывает, что ширина Брейта-Вигнера не превышает одного процента от угла излучения.

3.4 Неоднородности в кварк-глюонной плазме

Заряженная частица, движущаяся в плазме теряет энерги/ на поляризацию. Кроме того, высокоэнергичная частица в плазме теряет энергию на столкновение с частицами плазмы (следует отметить, что основным источником потерь в кварк-глюонной плазме является упомянутое во введении к диссертации радиационное излучение глюонов, которое здесь не рассматривается).

Вследствие того что реальная часть ди(хромо)проницаемости полностью ионнизированной плазмы меньше единицы, поляризационные потери индуцированы мнимой компонентой поляризационного тензора в (2.28). Поляризационные потери можно вычислить согласно формуле (1.11) из первой главы:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{C_{V(A)}\alpha_s}{2\pi^2v} \int d^3k \left(\frac{\omega}{k^2} (Im[\varepsilon_L^{-1}] + (v^2k^2 - \omega^2)Im[(\omega^2\varepsilon_T - k^2)^{-1}]) \right)_{\omega=\mathbf{k}\mathbf{v}} \quad (3.11)$$

В неоднородной плазме также имеется переходное излучение на неоднородностях среды. Ниже будет приведена оценка указанного вклада, полученная в работе автора [149]. Как уже было отмечено, даже спустя времена порядка термализации в веществе, образовавшемся в результате столкновения, присутствуют неоднородности. Амплитуда корреляций температуры может достигать величин порядка $\frac{\delta T}{T} \sim 0.5$, длина корреляций составляет ~ 0.5 ферми. Таким образом, интересной представляется задача об оценке вклада потерь на переходное излучение на неоднородностях в кварк-глюонной плазме.

В пренебрежении столкновениями, в абелевом приближении уравнение для цветной компоненты хромоелектрического поля (для удобства цветной индекс

опущен) в плазме имеет вид:

$$\Delta \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) + \omega^2 \varepsilon_0 \mathbf{E} - g \mathbf{v} \int \frac{4\pi \cdot d^3 p}{i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega)} \frac{\partial f^{eq}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (3.12)$$

Далее выполним замену $f^{eq}(p) \rightarrow f^{eq}(1 + \eta(\mathbf{r}))$, где $\eta \mathbf{r}$ случайная функция.

Тогда в импульсном представлении предыдущее уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} & -k^2 \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) E_j + \omega^2 \varepsilon_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) E_j + \frac{k_i k_j}{k^2} \omega^2 \varepsilon_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}) \\ & + \omega^2 \varepsilon_{\perp}(\omega, \mathbf{k}) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \widehat{E_j \eta}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2} \omega^2 \varepsilon_{\parallel}(\widehat{E_j \eta})(\omega, \mathbf{k}) \\ & = \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где, в свою очередь:

$$\widehat{(E_j \eta)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{r} E_j(\mathbf{r}) \eta(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (3.14)$$

Далее, вновь предположив статистическую однородность и гаусовость корреляций, после пересуммирования (см. предыдущий раздел), можно получить следующее выражение для эффективных поперечной и продольной компонент тензора хромопроницаемости:

$$\begin{aligned} & \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \omega^2 \varepsilon_{eff\perp} + \frac{k_i k_j}{k^2} \omega^2 \varepsilon_{eff\parallel} \\ & = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \omega^2 \varepsilon_{\perp} + \frac{k_i k_j}{k^2} \omega^2 \varepsilon_{\parallel} \\ & + C_{ij_1}(\omega, \mathbf{k}) \int d^3 \mathbf{k}_1 C_{j_1 j_2}(\omega, \mathbf{k}_1) B(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где:

$$C_{ij} \equiv (\varepsilon_{\parallel} - 1) \frac{k_i k_j}{k^2} + (\varepsilon_{\perp} - 1) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \quad (3.16)$$

в свою очередь, ε_{\parallel} , ε_{\perp} - стандартные функции компонент проницаемости релятивистскоц плазмы, полученные из (2.28) согласно формуле:

$$\varepsilon_{ij} 1 - \frac{\Pi_{ij}}{\omega^2}, \quad (3.17)$$

тогда как тензор A_{ij} определяется как:

$$A_{ij} \equiv \frac{\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)}{k^2 - \omega^2 \varepsilon_{\perp}} - \frac{1}{\omega^2 \varepsilon_{\parallel}} \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (3.18)$$

Переходное излучение на неоднородностях приводит к дополнительному вкладу в мнимую часть компонент тензора хромопроницаемости.

В итоге, для экспоненциальной корреляционной функции вида:

$$B(\mathbf{r}) = \sigma^2 \exp(-\alpha r) \quad (3.19)$$

значения компонент хромопроницаемости и интеграл потерь (3.11) были рассчитаны численно. Здесь на рис. 3.4 приведен график отношения потерь на поляризацию и переходное излучение в неоднородной плазме к потерям на поляризацию в однородной плазме в зависимости от энергии партона в кварк-глюонной плазме с параметрами флуктуаций $\sigma = 0.3$ (амплитуда корреляций) и $a = \frac{1}{\alpha} = 0.4$ фм (длина корреляций).

Как видно на графике эффект от неоднородностей практически отсутствует (разница порядка 0.1 процента).

Причина по которой вклад от неоднородностей мал, заключается в том, что флуктуирующая часть хромопроницаемости близка к нулю в области частот, на которой набирается интеграл потерь (3.11), то есть $m_g^2 \ll \omega^2$ для $\omega \sim E$ (здесь E - энергия частицы).

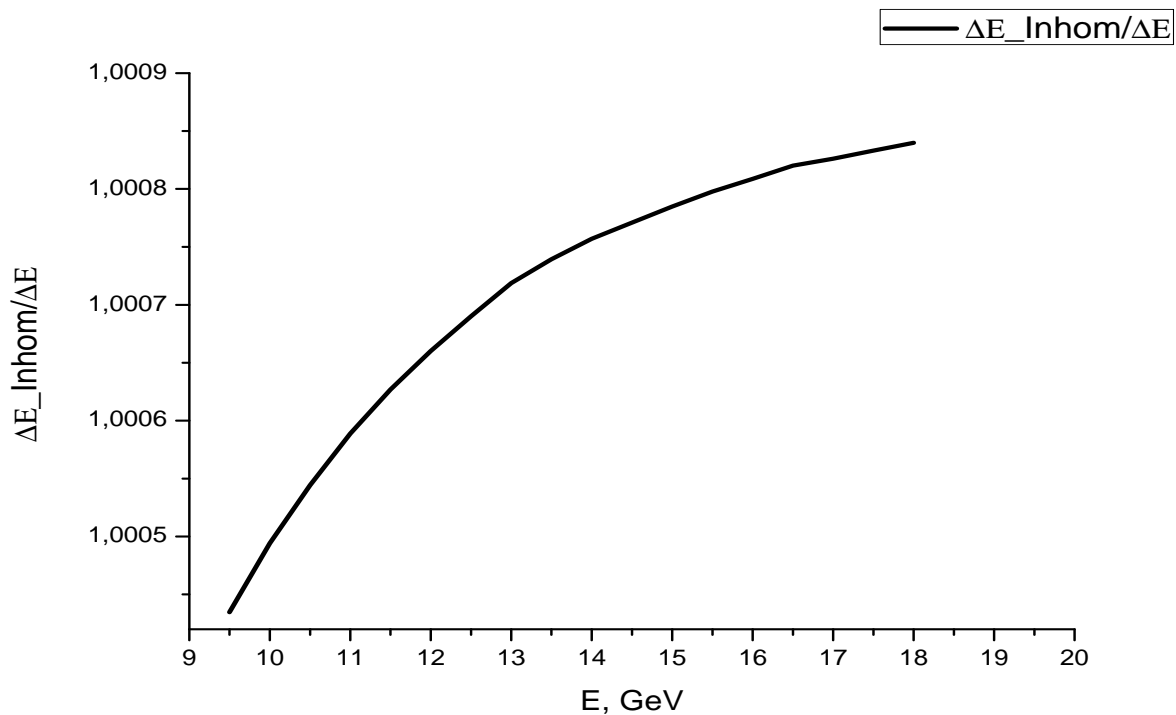


Рис. 3.4: Отношение потерь легкого партона на поляризацию и переходное излучение на неоднородностях к потерям на поляризацию в однородной кварк-глюонной плазме в зависимости от энергии партона в ГэВ для $\sigma = 0.3$ и $a = 0.5$ фм

Заключение

В заключение, ниже приведен список основных результатов данной диссертации:

- 1 Исследовался феномен излучения черенковских глюонов в среде с сильным взаимодействием. Была построена феноменологическая модель, позволяющая объяснить экспериментальные данные двухчастичных корреляций в столкновениях ядер на ускорителе RHIC и написана компьютерная программа, использующая метод монте-карло, симулирующая эту модель. Произведена оценка хромоэлектрических параметров среды, позволяющих объяснить наблюдаемые в эксперименте распределения. Было показано, что комбинируя параметры действительной и мнимой частей хромопроницаемости среды в некоторой области частот и учитывая многократное рассеяние, можно описать экспериментальные данные.
- 2 Рассматривались поляризационные свойства турбулентной релятивистской плазмы в пределе слабой турбулентности. Разработана схема вычислений по теории возмущений параметров релятивистской плазмы с калибровочным полем. Было получено выражение для поляризационного тензора в ведущем и следующем за ним порядках градиентного разложе-

ния по длине корреляций как в электромагнитной, так и в КХД-плазме. Вычисления продемонстрировали, что в первом порядке по корреляциям турбулентных полей выражения различаются лишь на постоянный множитель, причем ответ для поляризации КХД-плазмы слабее подавлен по константе связи. Показано, что мнимый вклад в поляризационный оператор приводит к затуханию волн во времениподобной области. Тогда как в пространственноподобной области турбулентная поправка приводит к уменьшению эффекта от затухания Ландау поперечных волн и усилению затухания продольных волн. Были проанализированы поправки к дисперсионным соотношениям для плазмонов.

3 Рассматривались потери на переходное излучение на случайных неоднородностях в среде с сильным взаимодействием, образующейся в результате столкновения ядер. Было показано, что вклад от этих потерь пренебрежимо мал как в среде, в которой возможно излучение черенковских глюонов, так и в кварк-глюонной плазме.

Благодарности

Хочется выразить огромную признательность моему научному руководителю А. В. Леонидову за постановку интересных задач и за многочисленные обсуждения связанных с ними вопросов. Автор также благодарен всем участникам семинара сектора физики высоких энергий теоретического отдела ФИАН за обсуждение и критику вышеупомянутых результатов. Особенно важными для понимания были обсуждения с руководителем семинара И. М. Дреминым. Также хотелось бы выразить отдельную признательность С. В. Русакову за обсуждения и всестороннюю поддержку на протяжении всего времени написания диссертации и В. А. Нечитайло за прочтение рукописи, указание на ошибки и стилистическую правку. Ну и наконец автор считает нужным отметить неоценимую помощь со стороны родных и близких.

Публикации автора

{1} I. M. Dremin, M. R. Kirakosyan, A. V. Leonidov, A. V. Vinogradov
“Cherenkov Glue in Opaque Nuclear Medium” // *Nucl. Phys. A826: 190-197,*
2009

{2} М. Р. Киракосян “Энергетические потери партноа в неоднородной цвет-
ной среде” // *КСФ 09 2011 стр. 15*

{3} M. Kirakosyan, A. Leonidov, B Müller “Turbulence-Induced Instabilities in
EP and QGP” // *Acta Physica Polonica B, vol. 6, p 403, (2013)*

{4} I. M. Dremin, M. R. Kirakosyan, A. V. Leonidov “On Collective Properties
of Dense QCD Matter” // *Advances in High Energy Physics vol. 2013 (2013),*
706531

Приложение А

Приложение к главе 2

А.1 Вычисление коэффициентов $I_1 - I_8$.

Сначала рассмотрим поправку к *HTL* связанную с перенормировкой пропагатора (2.122):

$$\Pi_{\mu\nu}^{HTL} = m_g^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{-(vk)v_\mu g_{\nu 0} + k^0 v_\mu v_\nu}{(vk) + i\gamma} = m_g^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[-v^\mu g^{\nu 0} + \frac{i\gamma \cdot v^\mu g^{\nu 0}}{(vk) + i\gamma} + \frac{k^0 v^\mu v^\nu}{(vk) + i\gamma} \right] \quad (\text{A.1})$$

Ниже приведена выражение для поправки к поляризации от I_1 . После усреднения и интегрирования Q и p можно получить:

$$\begin{aligned} \delta_{I_1} \Pi_{\mu'\lambda}^{ab} &= g^4 \delta^{ab} \left(N + \frac{N_F}{2} \right) \frac{N^2 - 1}{2N} \int dP \frac{p^\mu p_\lambda p_{\mu'} p^{\mu''}}{i[(pk) + i\gamma]} \left[- \left(g_{\mu 0} g_{\mu'' 0} \langle A_0^2 \rangle + \frac{1}{3} \hat{\delta}_{\mu\mu''} \langle \mathbf{A}^2 \rangle \right) \right. \\ &\times \int d^4 k_1 G(k_1) \frac{-ik_{1\nu}}{i[p(k - k_1) + i\epsilon]} \frac{1}{i[-(pk) + i\epsilon]} + \left(g_{\mu 0} g_{\nu 0} \langle A_0^2 \rangle + \frac{1}{3} \hat{\delta}_{\mu\nu} \langle \mathbf{A}^2 \rangle \right) \\ &\times \left. \int d^4 k_1 G_{k_1} \frac{-ik_{1\mu''}}{i[p(k - k_1) + i\epsilon] i[-(pk_1) + i\epsilon]} \right] \frac{\partial}{\partial p_\nu} f^{R(0)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Первый член в большой квадратных скобках задается переписывается в виде (второй член в больших квадратных скобках сократится как будет видно

ниже).

$$\int d^4 k_1 G(k_1) \frac{i k_{1\nu}}{i[p(k-k_1) + i\epsilon] i[-(pk_1) + i\epsilon]} = i \int d^4 k_1 G(k_1) \left[\frac{1}{i(pk)} \left(\frac{k_{1\nu}}{i[p(k-k_1) + i\epsilon]} - \frac{k_{1\nu}}{i[-(pk_1) + i\epsilon]} \right) \right] = \frac{i}{i(pk)} \int d^4 k_1 \left[G(k_1 + k) \frac{k_{1\nu}}{i[-(pk_1) + i\epsilon]} - G(k_1) \frac{k_{1\nu}}{i[-(pk_1) + i\epsilon]} + G(k_1) \frac{k_\nu}{i[-(p(k-k_1)) + i\epsilon]} \right] \quad (\text{A.3})$$

В свою очередь:

$$\int d^4 k_1 \left[G(k_1 + k) \frac{k_{1\nu}}{i[-(pk_1) + i\epsilon]} - G(k_1) \frac{k_{1\nu}}{i[-(pk_1) + i\epsilon]} \right] \approx \int d^4 k_1 \frac{dG(k_1)}{dk_{1\nu'}} k_{\nu'} \times \frac{k_{1\nu}}{i[-(pk_1) + i\epsilon]} \quad (\text{A.4})$$

Далее,

$$\frac{dG(k_1)}{dk_{1\nu'}} = -2 \frac{\sqrt{\hat{g}}}{(2\pi)^2} \hat{g}^{\mu\nu'} k_{1\mu} \exp[-\hat{g}_{\mu\nu} k_1^\mu k_1^\nu] \quad (\text{A.5})$$

здесь введено определение:

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Таким образом,

$$\int d^4 k_1 \frac{k_{1\mu} k_{1\nu} \exp[-\hat{g}_{\mu\nu} k_1^\mu k_1^\nu]}{i[-(pk_1) + i\epsilon]} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\hat{g}^{\mu\nu}} \left[\frac{(2\pi)^2 \sqrt{\pi}}{\det \hat{g}} \frac{1}{2 \sqrt{\hat{g}_{\mu\nu}^{-1} p^\mu p^\nu}} \right] \quad (\text{A.7})$$

Произведя сопутствующие расчеты и собрав воедино, можно получить выражение, определяющее вклад от первого члена в больших квадратных скобках (A.2):

$$\delta_{I_1} \Pi_{\mu'\lambda}^{ab} = \delta^{ab} m_g^2 \cdot i\gamma \int d\Omega \left[k_0 \frac{v_\mu v_\nu}{((vk) + i\epsilon)((vk) + i\gamma)} \right] \quad (\text{A.8})$$

Далее, вклад от I_4 :

$$\begin{aligned}
\delta_{I_4} \Pi_{\nu\lambda}^{ab} &= g^4 \delta^{ab} \left(N + \frac{N_F}{2} \right) \frac{N^2 - 1}{2N} \int dP \frac{p^\mu p^\lambda}{i[(pk) + i\epsilon]} \left[\left(g_{\mu 0} g_{\mu' 0} \langle A_0^2 \rangle + \frac{1}{3} \hat{\delta}_{\mu\mu'} \langle \mathbf{A}^2 \rangle \right) \right. \\
&\times \int d^4 k_1 G(k_1) \frac{p^{\mu'}}{i[p(k - k_1) + i\epsilon]} \frac{\partial}{\partial p^\nu} f^{R(0)} - \left(g_{\mu 0} g_{\mu' 0} \langle A_0^2 \rangle + \frac{1}{3} \hat{\delta}_{\mu\mu'} \langle \mathbf{A}^2 \rangle \right) \\
&\times \left. \int d^4 k_1 G(k_1) \frac{p^\nu}{i[p(k - k_1) + i\epsilon]} \frac{\partial}{\partial p_{\mu'}} f^{R(0)} \right]
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Второй член в больших квадратных скобках в точности сокращает второй член в больших квадратных скобках выражения (A.2). Соответственно первый член дает вклад:

$$\delta_{I_4} \Pi_{\mu\nu}^{ab} = -\delta^{ab} i\gamma m_g^2 \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v^\mu g^{\nu 0}}{(vk) + i\gamma} \tag{A.10}$$

который, в свою очередь, сокращает второй член в больших квадратных скобках (A.1).

Суммируя оставшиеся члены, получаем (2.124).

A.2 Петлевое интегрирование по k_1 , пример.

В этом приложении будет продемонстрировано вычисление интеграла по k_1 в выражении (2.131). Следует отметить, что несмотря на то что в тексте диссертации приведены ответы для изотропного случая, ниже будут приведены вычисления в общем случае, с произвольным коррелятором полей $K^{\mu\nu\mu'\nu'}(x)$:

Необходимо вычислить следующий интеграл:

$$I_1 = \int d^4 k_1 \frac{K^{\mu\nu\mu'\nu'}(k_1)}{i((p(k - k_1)) + i\epsilon)} \tag{A.11}$$

Используя α -представление:

$$\frac{1}{i((p(k - k_1)) + i\epsilon)} = - \int_0^{+\infty} d\alpha \exp [i\alpha((p(k - k_1)) + i\epsilon)] \tag{A.12}$$

и параметризацию коррелятора в виде (??), можно получить:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{a^3\tau}{(2\pi)^2} K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} \int_0^{+\infty} d\alpha \int d^4k_1 \exp \left[-\frac{\mathbf{k}_1^2 a^2}{2} - \frac{(k_1^0)^2 \tau^2}{2} \right] \exp[\imath\alpha(p(k - k_1) + \imath\epsilon)] \\
&= -\frac{a^3\tau}{(2\pi)^2} K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} \int_0^{+\infty} d\alpha \int d^4k_1 \exp \left[-\frac{a^2}{2} \left(\mathbf{k}_1^2 - \frac{2\imath\alpha \mathbf{p} \mathbf{k}_1}{a^2} \right) - \frac{\tau^2}{2} \left((k_1^0)^2 + \frac{2\imath\alpha p^0 k_1^0}{\tau^2} \right) \right] \\
&\times \exp[\imath\alpha(pk)] = -K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} \int_0^{+\infty} d\alpha \exp \left[-\frac{\alpha^2 \mathbf{p}^2}{2a^2} - \frac{\alpha^2 (p^0)^2}{2\tau^2} + \imath\alpha(pk) \right] = \\
&\left(c.o.v. \hat{\alpha} = -\alpha \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}} \right) = -K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}}} \int_0^{+\infty} d\hat{\alpha} \\
&\times \exp \left[-\hat{\alpha}^2 + \imath\hat{\alpha}(pk) \right] / \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}} \approx -K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}}} \int_0^{+\infty} d\hat{\alpha} \\
&\times \left[1 + \frac{\imath\hat{\alpha}(pk)}{\sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}}} \right] \exp[-\hat{\alpha}^2]
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Таким образом, после некоторых вычислений:

$$I_1 = -K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\imath(pk)}{2\sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}}} \right] \tag{A.14}$$

наконец, турбулентный вклад в функцию распределения $\langle \delta f_{12} \rangle_I$ соответствующий (2.131) принимает:

$$\begin{aligned}
\langle \delta f_{12} \rangle_I &= \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \approx -\frac{e^3 q^3}{\imath((pk) + \imath\epsilon)} F^{\rho\sigma}(k) K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} \\
& p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}}} + \frac{\imath(pk)}{2\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}\right)} \right] \times p_{\mu'} \frac{\partial}{\partial p^{\nu'}} \frac{1}{\imath((pk) + \imath\epsilon)} p_\rho \frac{\partial}{\partial p^\sigma} f_F(p, T)
\end{aligned} \tag{A.15}$$

А.3 Индуцированный ток. Пример.

Далее будет приведено вычисление индуцированного тока, отвечающего диаграмме (??). Используя (2.13), получаем:

$$\begin{aligned}
\delta j_{\text{I}}^\lambda(k) &= e \sum_{q,s} q \int d^4 p \delta(p^2) \theta(p^0) p^\lambda \langle \delta f_{12}(p, k, q) \rangle_{\text{I}} = -e^4 K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} F^{\rho\sigma}(k) \sum_{q,s} q^4 \\
&\times \int d^4 p \delta(p^2) \theta(p^0) p^\lambda \frac{p_\mu}{i((pk) + i\epsilon)} \frac{\partial}{\partial p^\nu} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}}} + \frac{i(pk)}{2\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}\right)} \right] p_{\mu'} \frac{\partial}{\partial p^{\nu'}} \\
&\frac{1}{i((pk) + i\epsilon)} p_\rho \frac{\partial}{\partial p^\sigma} f_{\text{F}}(p, T)
\end{aligned} \tag{A.16}$$

проинтегрировав по частям, и воспользовавшись антисимметрией $K^{\mu\nu\mu'\nu'}$ по перестановке индексов $\mu\nu$ и $\mu'\nu'$ можно получить:

$$\begin{aligned}
\delta j_{\text{I}}^\lambda(k) &= -e^4 K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} F^{\rho\sigma}(k) \sum_{q,s} q^4 \int d^4 p \delta^4(p^2) \theta(p^0) \left[\frac{\delta_\nu^\lambda}{(pk)} - \frac{k_\nu p^\lambda}{(pk)^2} \right] p_\mu \\
&\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}}} + \frac{i(pk)}{2\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2a^2} + \frac{(p^0)^2}{2\tau^2}\right)} \right] p_{\mu'} \left[\frac{\partial^2 f_{\text{F}}}{\partial p^{\nu'} \partial p^\sigma} \frac{p_\rho}{(pk)} + \frac{\partial f_{\text{F}}}{\partial p^\sigma} \frac{g_{\rho\nu'}}{(pk)} - \frac{k_{\nu'} p_\rho}{(pk)^2} \frac{\partial f_{\text{F}}}{\partial p^\sigma} \right] \\
&\equiv P_{11}^\lambda + P_{12}^\lambda + P_{21}^\lambda + P_{22}^\lambda + P_{31}^\lambda + P_{32}^\lambda + P_{41}^\lambda + P_{42}^\lambda + P_{51}^\lambda + P_{52}^\lambda + P_{61}^\lambda + P_{62}^\lambda
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Отметим, что калибровочная инвариантность выражения для тока очевидным образом следует из структуры первой скобки в (A.17).

А.4 Используемые обозначения.

Ниже приведены обозначения и определения, которые упростят запись выражений для (A.17).

При вычислении интеграла по импульсам удобно воспользоваться следующими обозначениями:

$$\hat{\delta}_{\mu\nu} = \text{diag}(0, 1, 1, 1); \quad \hat{g}_{\mu\nu} = \text{diag}(0, -1, -1, -1); \quad \hat{\mathbf{k}}_\mu = (0, -\mathbf{k}); \quad \hat{e}_\mu = \frac{\hat{\mathbf{k}}_\mu}{\mathbf{k}} \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}^{\text{L}}(\hat{k}) = \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\mathbf{k}^2}; \quad \mathcal{P}_{\mu\nu}^{\text{T}}(\hat{k}) = \left(-\hat{g}_{\mu\nu} - \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\mathbf{k}^2} \right) \quad (\text{A.19})$$

А.5 Вычисления интегралов: примеры

Ниже будет проиллюстрировано вычисление интегралов на примеры вкладов P_{11}^λ and P_{12}^λ из (A.17). Можно получить:

$$\begin{aligned} P_{11}^\lambda &= -\frac{4 \cdot 2e^4 \sqrt{\pi} l K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} F^{\rho\sigma}}{2(2\pi)^3} \left(\int_0^{+\infty} dp p \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right) \int \Omega_{\mathbf{v}} \frac{g_{\nu'0} g_{\sigma 0} \delta_\nu^\lambda v_\mu v_\rho v_{\mu'}}{(vk)^2} = \\ &= \frac{2i\sqrt{\pi} g^4 l}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\lambda} F_0^{\mu'0} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} \left[g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^{\text{L}}(\hat{k}) \cdot B_3(\omega, |\mathbf{k}|) + g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^{\text{T}}(\hat{k}) \right. \\ &\times B_4(\omega, |\mathbf{k}|) + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \hat{e}_\mu \cdot B_5(\omega, |\mathbf{k}|) + \left(\hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu}^{\text{T}}(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu'}^{\text{T}}(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'\mu}^{\text{T}}(\hat{k}) \right) \\ &\left. \times B_6(\omega, |\mathbf{k}|) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{aligned} P_{12}^\lambda &= \frac{4 \cdot 2e^4 l^2 K_0^{\mu\nu\mu'\nu'} F^{\rho\sigma}}{2(2\pi)^3} \left(\int_0^{+\infty} dp p \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \right) \int \Omega_{\mathbf{v}} \frac{g_{\nu'0} g_{\sigma 0} \delta_\nu^\lambda v_\mu v_\rho v_{\mu'}}{(vk)} = \\ &= -\frac{2ie^4 l^2}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\lambda} F_0^{\mu'0} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} \left[g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^{\text{L}}(\hat{k}) \cdot A_3(\omega, |\mathbf{k}|) + g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^{\text{T}}(\hat{k}) \right. \\ &\times A_4(\omega, |\mathbf{k}|) + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \hat{e}_\mu \cdot A_5(\omega, |\mathbf{k}|) + \left(\hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu}^{\text{T}}(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu'}^{\text{T}}(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'\mu}^{\text{T}}(\hat{k}) \right) \\ &\left. \times A_6(\omega, |\mathbf{k}|) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Выражения для стандартных интегралов $A_{1,9}$, $B_{1,9}$, $C_{1,9}$ и $D_{1,9}$, появляющихся при угловом интегрировании приведены ниже в А.7.

A.6 Вычисления интегралов: ответы

$$\begin{aligned}
P_{21}^\lambda &= \frac{2i\sqrt{\pi}e^{4l}}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\nu} F_0^{\mu'0} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} k_\nu \left[g_{\mu 0} g^{\lambda 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^L(\hat{k}) C_3(\omega, |\mathbf{k}|) + g_{\mu 0} g^{\lambda 0} \right. \\
&\times \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) C_4(\omega, |\mathbf{k}|) + (g_{\mu 0} \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \hat{e}^\lambda + g^{\lambda 0} \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \hat{e}_\mu) C_5(\omega, |\mathbf{k}|) + \left(g_{\mu 0} \left[\hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) \right. \right. \\
&+ \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_\rho^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) \left. \left. \right] + g^{\lambda 0} \left[\hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'\mu}^T(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu'}^T(\hat{k}) \right] \right) \\
&\times C_6(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[\hat{e}_\mu \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_\rho^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_\mu^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) \right. \\
&+ \left. \hat{e}_{\mu'} \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] C_8(\omega, |\mathbf{k}|) + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\mu \hat{e}_\rho \hat{e}^\lambda C_7(\omega, |\mathbf{k}|) \\
&+ \left(\mathcal{P}_{\mu'}^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) + \mathcal{P}_{\mu'}^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_\mu^T(\hat{k}) + \mathcal{P}_\rho^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_{\mu'\mu}^T(\hat{k}) \right) C_9(\omega, |\mathbf{k}|) \left. \right]
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
P_{21}^\lambda &= -\frac{2e^4 l^2}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\nu} F_0^{\mu'0} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} k_\nu \left[g_{\mu 0} g^{\lambda 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^L(\hat{k}) B_3(\omega, |\mathbf{k}|) + g_{\mu 0} g^{\lambda 0} \right. \\
&\times \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) B_4(\omega, |\mathbf{k}|) + (g_{\mu 0} \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \hat{e}^\lambda + g^{\lambda 0} \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \hat{e}_\mu) B_5(\omega, |\mathbf{k}|) + \left(g_{\mu 0} \left[\hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) \right. \right. \\
&+ \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_\rho^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) \left. \left. \right] + g^{\lambda 0} \left[\hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'\mu}^T(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu'}^T(\hat{k}) \right] \right) \\
&\times B_6(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[\hat{e}_\mu \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_\rho^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_\mu^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) \right. \\
&+ \left. \hat{e}_{\mu'} \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] B_8(\omega, |\mathbf{k}|) + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\mu \hat{e}_\rho \hat{e}^\lambda B_7(\omega, |\mathbf{k}|) \\
&+ \left(\mathcal{P}_{\mu'}^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) + \mathcal{P}_\mu^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) + \mathcal{P}_\rho^{\text{T}\lambda}(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_{\mu'\mu}^T(\hat{k}) \right) B_9(\omega, |\mathbf{k}|) \left. \right]
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
P_{31}^\lambda &= \frac{2i\sqrt{\pi}e^{4l}}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\nu} F_0^{\mu'\nu'} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} g_{\rho\nu'} \delta_\nu^\lambda \left[g_{\mu 0} g_{\mu'0} B_1(\omega, |\mathbf{k}|) + (g_{\mu 0} \hat{e}_{\mu'} + g_{\mu'0} \hat{e}_\mu) \right. \\
&\times B_2(\omega, |\mathbf{k}|) + \mathcal{P}_{\mu'\mu}^L(\hat{k}) B_3(\omega, |\mathbf{k}|) + \left. \mathcal{P}_{\mu'\mu}^T(\hat{k}) B_4(\omega, |\mathbf{k}|) \right]
\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
P_{32}^\lambda &= -\frac{2e^4 l^2}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\nu} F_0^{\mu'\nu'} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} g_{\rho\nu'} \delta_\nu^\lambda \left[g_{\mu 0} g_{\mu' 0} A_1(\omega, |\mathbf{k}|) + (g_{\mu 0} \hat{e}_{\mu'} + g_{\mu' 0} \hat{e}_\mu) \right. \\
&\quad \left. \times A_2(\omega, |\mathbf{k}|) + \mathcal{P}_{\mu'\mu}^L(\hat{k}) A_3(\omega, |\mathbf{k}|) + \mathcal{P}_{\mu'\mu}^T(\hat{k}) A_4(\omega, |\mathbf{k}|) \right]
\end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
P_{41} &= -\frac{2\iota\sqrt{\pi}e^4 l}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\nu} F_0^{\mu'\nu'} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} g_{\rho\nu'} k_\nu \left[g_{\mu' 0} g_{\mu 0} g^{\lambda 0} C_1(\omega, |\mathbf{k}|) + (g_{\mu' 0} g_{\mu 0} \cdot \hat{e}^\lambda \right. \\
&\quad \left. + g_{\mu 0} g^{\lambda 0} \cdot \hat{e}_{\mu'} + g_{\mu' 0} g^{\lambda 0} \cdot \hat{e}_\mu) C_2(\omega, |\mathbf{k}|) + \left(g_{\mu' 0} \cdot \mathcal{P}_\mu^{L\lambda}(\hat{k}) + g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{L\lambda}(\hat{k}) + g^{\lambda 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^L(\hat{k}) \right) \right. \\
&\quad \left. \times C_3(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[g_{\mu' 0} \cdot \mathcal{P}_\mu^{T\lambda}(\hat{k}) + g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{T\lambda}(\hat{k}) + g^{\lambda 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] C_4(\omega, |\mathbf{k}|) \right. \\
&\quad \left. + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\mu \hat{e}^\lambda C_5(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[\hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_\mu^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] C_6(\omega, |\mathbf{k}|) \right]
\end{aligned} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned}
P_{42} &= \frac{2e^4 l^2}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\nu} F_0^{\mu'\nu'} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} g_{\rho\nu'} k_\nu \left[g_{\mu' 0} g_{\mu 0} g^{\lambda 0} B_1(\omega, |\mathbf{k}|) + (g_{\mu' 0} g_{\mu 0} \cdot \hat{e}^\lambda \right. \\
&\quad \left. + g_{\mu 0} g^{\lambda 0} \cdot \hat{e}_{\mu'} + g_{\mu' 0} g^{\lambda 0} \cdot \hat{e}_\mu) B_2(\omega, |\mathbf{k}|) + \left(g_{\mu' 0} \cdot \mathcal{P}_\mu^{L\lambda}(\hat{k}) + g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{L\lambda}(\hat{k}) + g^{\lambda 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^L(\hat{k}) \right) \right. \\
&\quad \left. \times B_3(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[g_{\mu' 0} \cdot \mathcal{P}_\mu^{T\lambda}(\hat{k}) + g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{T\lambda}(\hat{k}) + g^{\lambda 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] B_4(\omega, |\mathbf{k}|) \right. \\
&\quad \left. + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\mu \hat{e}^\lambda B_5(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[\hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_\mu^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] B_6(\omega, |\mathbf{k}|) \right]
\end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
P_{51} &= -\frac{2\iota\sqrt{\pi}e^4 l}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\nu} F_0^{\mu'\nu'} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} \delta_\nu^\lambda k_{\nu'} \left[g_{\mu 0} g_{\mu' 0} \hat{e}_\rho \cdot C_2(\omega, |\mathbf{k}|) + (g_{\mu' 0} \right. \\
&\quad \left. \times \mathcal{P}_{\mu\rho}^L(\hat{k}) + g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^L(\hat{k}) C_3(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[g_{\mu' 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) + g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) \right] C_4(\omega, |\mathbf{k}|) + \hat{e}_\rho \hat{e}_\mu \hat{e}_{\mu'} \right. \\
&\quad \left. \times C_5(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[\hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] C_6(\omega, |\mathbf{k}|) \right]
\end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
P_{52} &= \frac{2e^4 l^2}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\nu} F_0^{\mu'\nu'} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} \delta_\nu^\lambda k_{\nu'} \left[g_{\mu 0} g_{\mu' 0} \hat{e}_\rho \cdot B_2(\omega, |\mathbf{k}|) + (g_{\mu' 0} \right. \\
&\quad \left. \times \mathcal{P}_{\mu\rho}^L(\hat{k}) + g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^L(\hat{k}) B_3(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[g_{\mu' 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) + g_{\mu 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) \right] B_4(\omega, |\mathbf{k}|) + \hat{e}_\rho \hat{e}_\mu \hat{e}_{\mu'} \right. \\
&\quad \left. \times B_5(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[\hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] B_6(\omega, |\mathbf{k}|) \right]
\end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}
P_{61} = & -\frac{2l\sqrt{\pi}e^4l}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\nu} F_0^{\mu'\nu'} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} k_{\nu'} k_{\nu'} \left[g_{\mu 0} g_{\mu' 0} g^{\lambda 0} \hat{e}_\rho D_2(\omega, |\mathbf{k}|) + \left(g_{\mu 0} g^{\lambda 0} \right. \right. \\
& \times \mathcal{P}_{\mu'\rho}^L(\hat{k}) + g_{\mu' 0} g^{\lambda 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^L(\hat{k}) + g_{\mu 0} g_{\mu' 0} \cdot \mathcal{P}_\rho^{L\lambda}(\hat{k}) \left. \left. \right) D_3(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[g_{\mu 0} g^{\lambda 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) + g_{\mu' 0} g^{\lambda 0} \right. \right. \\
& \times \mathcal{P}_{\rho\mu}^T(\hat{k}) + g_{\mu 0} g_{\mu' 0} \cdot \mathcal{P}_\rho^{T\lambda}(\hat{k}) \left. \left. \right] D_4(\omega, |\mathbf{k}|) + \left(g_{\mu 0} \cdot \hat{e}_\rho \hat{e}_{\mu'} \hat{e}^\lambda + g_{\mu' 0} \cdot \hat{e}_\rho \hat{e}_\mu \hat{e}^\lambda + g^{\lambda 0} \cdot \hat{e}_\rho \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\mu \right) \right. \\
& \times D_5(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[g_{\mu 0} \left[\hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_\rho^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{T\lambda}(\hat{k}) \right] + g_{\mu' 0} \left[\hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu}^T(\hat{k}) \right. \right. \\
& \left. \left. + \hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_\rho^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_\mu^{T\lambda}(\hat{k}) \right] + g^{\lambda 0} \left[\hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu'}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] \right] \\
& \times D_6(\omega, |\mathbf{k}|) + \hat{e}_\mu \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \hat{e}^\lambda D_7(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[\hat{e}_\mu \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_\rho^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) \right. \\
& \left. + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_\mu^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] D_8(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[\mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{T\lambda}(\hat{k}) \right. \\
& \left. + \mathcal{P}_{\mu'\mu}^T(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_\rho^{T\lambda}(\hat{k}) + \mathcal{P}_\mu^{T\lambda}(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) \right] D_9(\omega, |\mathbf{k}|) \Big]
\end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
P_{62} = & \frac{2e^4l^2}{(\pi)^2} \langle F_0^{\mu\nu} F_0^{\mu'\nu'} \rangle (k^\rho A^\sigma - k^\sigma A^\rho) g_{\sigma 0} k_{\nu'} k_{\nu'} \left[g_{\mu 0} g_{\mu' 0} g^{\lambda 0} \hat{e}_\rho C_2(\omega, |\mathbf{k}|) + \left(g_{\mu 0} g^{\lambda 0} \right. \right. \\
& \times \mathcal{P}_{\mu'\rho}^L(\hat{k}) + g_{\mu' 0} g^{\lambda 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^L(\hat{k}) + g_{\mu 0} g_{\mu' 0} \cdot \mathcal{P}_\rho^{L\lambda}(\hat{k}) \left. \left. \right) C_3(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[g_{\mu 0} g^{\lambda 0} \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) + g_{\mu' 0} g^{\lambda 0} \right. \right. \\
& \times \mathcal{P}_{\rho\mu}^T(\hat{k}) + g_{\mu 0} g_{\mu' 0} \cdot \mathcal{P}_\rho^{T\lambda}(\hat{k}) \left. \left. \right] C_4(\omega, |\mathbf{k}|) + \left(g_{\mu 0} \cdot \hat{e}_\rho \hat{e}_{\mu'} \hat{e}^\lambda + g_{\mu' 0} \cdot \hat{e}_\rho \hat{e}_\mu \hat{e}^\lambda + g^{\lambda 0} \cdot \hat{e}_\rho \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\mu \right) \right. \\
& \times C_5(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[g_{\mu 0} \left[\hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_\rho^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{T\lambda}(\hat{k}) \right] + g_{\mu' 0} \left[\hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu}^T(\hat{k}) \right. \right. \\
& \left. \left. + \hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_\rho^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_\mu^{T\lambda}(\hat{k}) \right] + g^{\lambda 0} \left[\hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \cdot \mathcal{P}_{\rho\mu'}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] \right] \\
& \times C_6(\omega, |\mathbf{k}|) + \hat{e}_\mu \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \hat{e}^\lambda C_7(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[\hat{e}_\mu \hat{e}_{\mu'} \cdot \mathcal{P}_\rho^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_\mu \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) \right. \\
& \left. + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}_\rho \cdot \mathcal{P}_\mu^{T\lambda}(\hat{k}) + \hat{e}_{\mu'} \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) + \hat{e}_\rho \hat{e}^\lambda \cdot \mathcal{P}_{\mu\mu'}^T(\hat{k}) \right] C_8(\omega, |\mathbf{k}|) + \left[\mathcal{P}_{\mu\rho}^T(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_{\mu'}^{T\lambda}(\hat{k}) \right. \\
& \left. + \mathcal{P}_{\mu'\mu}^T(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_\rho^{T\lambda}(\hat{k}) + \mathcal{P}_\mu^{T\lambda}(\hat{k}) \cdot \mathcal{P}_{\mu'\rho}^T(\hat{k}) \right] C_9(\omega, |\mathbf{k}|) \Big]
\end{aligned} \tag{A.31}$$

A.7 Стандартные интегралы

Здесь приведены явные выражения для $A_1(\omega, |\mathbf{k}|) \dots A_9(\omega, |\mathbf{k}|)$, \dots , $D_1(\omega, |\mathbf{k}|) \dots D_9(\omega, |\mathbf{k}|)$, $x = \omega/|\mathbf{k}|$:

$$\begin{aligned}
 A_1(\omega, |\mathbf{k}|) &= \int_0^{+\pi} d\theta \frac{\sin \theta}{(kv) + i\epsilon} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} L[x] \\
 A_2(\omega, |\mathbf{k}|) &= \int_0^{+\pi} d\theta \frac{\cos \theta \sin \theta}{(kv) + i\epsilon} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} (-2 + xL[x]) \\
 A_3(\omega, |\mathbf{k}|) &= \int_0^{+\pi} d\theta \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{(kv) + i\epsilon} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} (-2x + x^2 L[x]) \\
 A_4(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2}(A_1(\omega, |\mathbf{k}|) - A_3(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
 A_5(\omega, |\mathbf{k}|) &= \int_0^{+\pi} d\theta \frac{\cos^3 \theta \sin \theta}{(kv) + i\epsilon} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \left(-\frac{3}{2} - 2x^2 + x^3 L[x] \right) \\
 A_6(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2}(A_2(\omega, |\mathbf{k}|) - A_5(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
 A_7(\omega, |\mathbf{k}|) &= \int_0^{+\pi} d\theta \frac{\cos^4 \theta \sin \theta}{(kv) + i\epsilon} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \left(-\frac{3}{2}x - 2x^3 + x^4 L[x] \right) \\
 A_8(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2}(A_3(\omega, |\mathbf{k}|) - A_7(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
 A_9(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{4}(A_1(\omega, |\mathbf{k}|) - 2A_3(\omega, |\mathbf{k}|) + A_7(\omega, |\mathbf{k}|))
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}
B_1(\omega, |\mathbf{k}|) &= \int_0^{+\pi} d\theta \frac{\sin \theta}{((kv) + i\epsilon)^2} = -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \frac{2}{1-x^2} \\
B_2(\omega, |\mathbf{k}|) &= \int_0^{+\pi} d\theta \frac{\sin \theta \cos \theta}{((kv) + i\epsilon)^2} = -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \left(L[x] + \frac{2x}{1-x^2} \right) \\
B_3(\omega, |\mathbf{k}|) &= \int_0^{+\pi} d\theta \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{((kv) + i\epsilon)^2} = -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \left(-2 + 2xL[x] + \frac{2x^2}{1-x^2} \right) \\
B_4(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2}(B_1(\omega, |\mathbf{k}|) - B_3(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
B_5(\omega, |\mathbf{k}|) &= -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \left(-4x + 3x^2L[x] + \frac{2x^3}{1-x^2} \right) \\
B_6(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2}(B_2(\omega, |\mathbf{k}|) - B_5(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
B_7(\omega, |\mathbf{k}|) &= -\frac{1}{\mathbf{k}^2} \left(-\frac{2}{3} - 6x^2 + 4x^3L[x] + \frac{2x^4}{1-x^2} \right) \\
B_8(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2}(B_3(\omega, |\mathbf{k}|) - B_7(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
B_9(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{4}(B_1(\omega, |\mathbf{k}|) - 2B_3(\omega, |\mathbf{k}|) + B_7(\omega, |\mathbf{k}|))
\end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
C_1(\omega, |\mathbf{k}|) &= \int_0^{+\pi} d\theta \frac{\sin \theta}{((kv) + i\epsilon)^3} = \frac{1}{|\mathbf{k}|^3} \frac{2x}{(1-x^2)^2} \\
C_2(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{|\mathbf{k}|^3} \left(\frac{2}{(1-x^2)} + \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \right) \\
C_3(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{|\mathbf{k}|^3} \left(\frac{4x}{(1-x^2)} + \frac{2x^3}{(1-x^2)^2} + L[x] \right) \\
C_4(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2}(C_1(\omega, |\mathbf{k}|) - C_3(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
C_5(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{|\mathbf{k}|^3} \left(-2 + 3xL[x] + \frac{6x^2}{(1-x^2)} + \frac{2x^4}{(1-x^2)^2} \right) \\
C_6(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2}(C_2(\omega, |\mathbf{k}|) - C_5(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
C_7(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{|\mathbf{k}|^3} \left(-6x + 6x^2L[x] + \frac{8x^3}{(1-x^2)} + \frac{2x^5}{(1-x^2)^2} \right) \\
C_8(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2}(C_3(\omega, |\mathbf{k}|) - C_7(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
C_9(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2}(C_1(\omega, |\mathbf{k}|) - 2C_3(\omega, |\mathbf{k}|) + C_7(\omega, |\mathbf{k}|))
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
D_1(\omega, |\mathbf{k}|) &= -\frac{2}{3\mathbf{k}^4} \frac{3x^2 + 1}{(1 - x^2)} \\
D_2(\omega, |\mathbf{k}|) &= -\frac{1}{|\mathbf{k}|} C_1(\omega, |\mathbf{k}|) + x D_1(\omega, |\mathbf{k}|) \\
D_3(\omega, |\mathbf{k}|) &= -\frac{1}{|\mathbf{k}|} (C_2(\omega, |\mathbf{k}|) + x C_1(\omega, |\mathbf{k}|)) + x^2 D_1(\omega, |\mathbf{k}|) \\
D_4(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2} (D_1(\omega, |\mathbf{k}|) - D_3(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
D_5(\omega, |\mathbf{k}|) &= -\frac{1}{|\mathbf{k}|} (C_3(\omega, |\mathbf{k}|) + x C_2(\omega, |\mathbf{k}|) + x^2 C_1(\omega, |\mathbf{k}|)) + x^3 D_1(\omega, |\mathbf{k}|) \\
D_6(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2} (D_2(\omega, |\mathbf{k}|) - D_5(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
D_7(\omega, |\mathbf{k}|) &= -\frac{1}{|\mathbf{k}|} (C_5(\omega, |\mathbf{k}|) + x C_3(\omega, |\mathbf{k}|) + x^2 C_2(\omega, |\mathbf{k}|) + x^3 C_1(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
&\quad + x^4 D_1(\omega, |\mathbf{k}|) \\
D_8(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2} (D_3(\omega, |\mathbf{k}|) - D_7(\omega, |\mathbf{k}|)) \\
D_9(\omega, |\mathbf{k}|) &= \frac{1}{2} (D_1(\omega, |\mathbf{k}|) - 2D_3(\omega, |\mathbf{k}|) + D_7(\omega, |\mathbf{k}|))
\end{aligned}
\tag{A.35}$$

Приложение В

Приложение к главе 3

В.1 Эффективная хромопроницаемость случайно неоднородной среды. Диаграммный вывод

Усредненное поле в неоднородной среде можно вычислить используя разложение по $(\xi(\mathbf{r}))$ в импульсном представлении $\left(\mathbf{G}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)) dt d\mathbf{r} \right)$. Выражению для функции Грина уравнения 3.3 принимает вид:

$$\begin{aligned} [(\omega^2 \cdot \varepsilon_0 - \mathbf{k}^2)\delta_{ij} + k_i k_j] \times G_j = -\omega^2 \cdot \chi_0 \times (\hat{\xi}G_i)(\mathbf{k}) + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3} n_i \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Здесь $(\hat{\xi}G_i)(\mathbf{k})$ представляет собой:

$$(\hat{\xi}G_i)(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \int \mathbf{G}(\mathbf{k}') \xi(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d^3\mathbf{k}' \quad (\text{B.2})$$

Тогда как $\xi(\mathbf{k})$, в свою очередь, Фурье-образ от $\xi(\mathbf{r})$, то есть:

$$\xi(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \xi(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (\text{B.3})$$

Матрица обратная к $(\omega^2\varepsilon_0 - \mathbf{k}^2)\delta_{ij} + k_i k_j$ является функцией Грина векторного волнового уравнения в импульсном представлении:

$$A_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\omega^2\varepsilon_0 - k^2} + \frac{k_i k_j}{\omega^2\varepsilon_0 \cdot (\omega^2\varepsilon_0 - k^2)} \quad (\text{B.4})$$

Решая предыдущее уравнение по теории возмущений можно получить разложение:

$$\begin{aligned} G_i(\mathbf{k}) = & \frac{1}{(2\pi)^3} A_{ij} n_j \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0) - \\ & - \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot (\omega^2\chi_0) \cdot A_{ij_1} (\hat{\xi} A_{j_1 j} n_j \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)) + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot (\omega^2\chi_0)^2 \cdot A_{ij_1} (\hat{\xi} A_{j_1 j_2} (\hat{\xi} A_{j_2 j} n_j \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0))) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Далее как уже упоминалось в основном тексте предполагается, предполагается, что статистическая $\xi(\mathbf{r})$ удовлетворяет условиям гауссовского статистического ансамбля. Последнее означает, что выражение для n -ых корреляций записывается в следующем виде (без потери общности среднее от ξ можно положить равным 0, так как χ_0 содержит в себе среднее значение ди(хромо)электрической проницаемости):

$$\langle \xi(\mathbf{r}_1) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(\mathbf{r}_1) \xi(\mathbf{r}_2) \rangle = B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

$$\langle \xi(\mathbf{r}_1) \dots \xi(\mathbf{r}_{2n+1}) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(\mathbf{r}_1) \dots \xi(\mathbf{r}_{2n}) \rangle = \text{Sum of all sorts of } (2(n-1)!!) \text{ pair correlations.}$$

После усреднения ряда теории возмущений (B.5) по гауссовскому ан-

самблю можно получить:

$$\begin{aligned}
 G_i(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} A_{ij} n_j \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0) + \frac{1}{(2\pi)^3} (\omega^2 \chi_0)^2 A_{ij_1} \times \\
 &\times \int \int \int \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 B(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) A_{j_1 j_2} A_{j_2 j_3} n_{j_3} \times \\
 &\times \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0) \exp(i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_1)) \exp(i(\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}\mathbf{r}_2)) + \dots
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

По обыкновению диаграммная техника является удобным способом представления рядов теории возмущений. Можно сформулировать следующие обозначения и "правила Фейнмана" для ряда В.6:

1) Пропагатор

$$\text{~~~~~} = A_{ij} \tag{B.7}$$

2) Простейшая петля поляризации :

$$\text{~~~~~} = (\omega^2 \chi_0)^4 \int d^3\mathbf{k}_1 B(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}) A_{ij}(\mathbf{k}_1) \tag{B.8}$$

3) Источник:

$$\otimes = \frac{1}{(2\pi)^3} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0) \tag{B.9}$$

Тогда (В.6) можно записать в виде:

$$\text{~~~~~} = \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \dots \tag{B.10}$$

Далее уравнение Дайсона принимает вид:

$$\text{~~~~~} = \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \dots \tag{B.11}$$

Где поляризационный оператор:

$$\bullet = \text{~~~~~} + \text{~~~~~} + \dots \tag{B.12}$$

Взяв первый член ряда для поляризационного оператора (что отвечает условию $\sigma^2 \ll 1$ и $\sigma^2 \omega \epsilon_0 \alpha \ll 1$) и проведя интегрирование можно получить эффективный тензор ди(хромо)электрической проницаемости.

В.2 Выражения для диэлектрической проницаемости.

Для $B(r) = \sigma^2 \exp(-\frac{r}{a})$ (здесь $\alpha = \frac{1}{a}$) выражения для продольной и поперечной частей ди(хромо)электрической проницаемости имеют вид:

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_0 - (\chi_0)^2 \sigma^2 \left[\frac{\omega^2}{(\omega\sqrt{\varepsilon_0} + i\alpha)^2 - k^2} - \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\alpha(i\omega\sqrt{\varepsilon_0} + \alpha)}{2k^2} - \frac{\alpha((\omega\sqrt{\varepsilon_0})^2 + \alpha^2 + k^2)}{2k^3} \arctan\left(\frac{ik}{\omega\sqrt{\varepsilon_0} + i\alpha}\right) \right) \right] \quad (\text{B.13})$$

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_0 - (\chi_0)^2 \sigma^2 \left[\frac{1}{\varepsilon_0} + \frac{2}{\varepsilon_0} \left(\frac{\alpha(i\omega\sqrt{\varepsilon_0} + \alpha)}{2k^2} - \frac{\alpha((\omega\sqrt{\varepsilon_0})^2 + \alpha^2 + k^2)}{2k^3} \arctan\left(\frac{ik}{\omega\sqrt{\varepsilon_0} + i\alpha}\right) \right) \right] \quad (\text{B.14})$$

Для корреляционной функции $B(r) = \sigma^2 \frac{1}{((\frac{r}{a})^2 + 1)^2}$ удается получить аналитическое выражение лишь для поперечной части хромоэлектрического тензора (следует отметить, что в пределе крупномасштабных корреляций $\omega a \ll 1$ вклад в поперечную часть значительно больше вклада в продольную):

$$\begin{aligned} \text{Re}[\varepsilon_{\perp}] = & \varepsilon_0 - (\chi_0)^2 \frac{\sigma^2}{8\alpha^2 k} \left[\exp\left(\frac{k + \omega\varepsilon_0}{\alpha}\right) \text{Ei}\left(-\frac{k + \omega\varepsilon_0}{\alpha}\right) \cdot (k + \omega\varepsilon_0 - \alpha) + \right. \\ & + \exp\left(-\frac{k + \omega\varepsilon_0}{\alpha}\right) \text{Ei}\left(\frac{k + \omega\varepsilon_0}{\alpha}\right) \cdot (k + \omega\varepsilon_0 + \alpha) - \exp\left(\frac{|k - \omega\varepsilon_0|}{\alpha}\right) \\ & \times \text{Ei}\left(-\frac{|k - \omega\varepsilon_0|}{\alpha}\right) \cdot (|k - \omega\varepsilon_0| - \alpha) - \exp\left(-\frac{|k - \omega\varepsilon_0|}{\alpha}\right) \text{Ei}\left(\frac{|k - \omega\varepsilon_0|}{\alpha}\right) \\ & \left. \times (|k - \omega\varepsilon_0| + \alpha) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\text{Im}[\varepsilon_{\perp}] = (\chi_0)^2 \frac{\pi\sigma^2}{8\alpha^2 k} \left[\exp\left[-\frac{|k - \omega\varepsilon_0|}{\alpha}\right] (|k - \omega\varepsilon_0| + \alpha) - \exp\left[-\frac{k + \omega\varepsilon_0}{\alpha}\right] (k + \omega\varepsilon_0 + \alpha) \right] \quad (\text{B.16})$$

Литература

- [1] M. J. Tannenbaum *Highlights from BNL-RHIC, Invited lectures at the International School of Subnuclear Physics, 49th Course, "Searching for unexpected at LHC and the status of our knowledge Erice, Sicily, Italy, June 24-July 3, 2011*[arXiv:1201.5900]
- [2] Tapan K. Nayak *Heavy Ions: Results from the Large Hadron Collider, Proceedings of Lepton-Photon 2011 Conference, to be published in Pramana, Journal of Physics.*[arXiv:1201.4264]
- [3] J. Harris *Results from the STAR Experiment, Proc.Quark Matter 2001, Jan. 14-20 SUNY*
- [4] W. Zajc *Results from the PHENIX Experiment, Proc.Quark Matter 2001, Jan. 14-20 SUNY;*
- [5] C. Roland et al. [PHOBOS Collaboration], *First Results from the PHOBOS Experiment at RHIC Proc.Quark Matter 2001, Jan. 14-20 SUNY* [hep-ex/0105043]
- [6] F. Videbaek, *Results from the BRAHMS Experiment Proc.Quark Matter 2001, Jan. 14-20 SUNY J.Phys.G27:671-676,2001*

- [7] G. Aad et al. *Measurement of the pseudorapidity and transverse momentum dependence of the elliptic flow of charged particles in lead–lead collisions at image with the ATLAS detector Phys. Lett. B707 (2012), 330*
- [8] CMS collaboration *Measurement of jet fragmentation into charged particles in pp and Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{TeV}$ CERN-PH-EP-2012-143*
- [9] K. Aamodt et al. (ALICE Collaboration) *Charged-Particle Multiplicity Density at Midrapidity in Central Pb-Pb Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{TeV}$ Phys. Rev. Lett. 105 (2010), 252302*
- [10] I. Arsene, et al. (BRAHMS Collaboration) *Quark Gluon Plasma an Color Glass Condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment Nucl.Phys.A757:1-27,2005*
- [11] STAR Collaboration: J. Adams, et al *Experimental and Theoretical Challenges in the Search for the Quark Gluon Plasma: The STAR Collaboration’s Critical Assessment of the Evidence from RHIC Collisions Nucl.Phys.A757:102-183,2005*
- [12] PHENIX Collaboration, K. Adcox, et al *Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration Nucl.Phys.A757:184-283,2005*
- [13] B.B.Back et al (PHOBOS) *The PHOBOS Perspective on Discoveries at RHIC Nucl. Phys. A757 (2005), 28*
- [14] CMS collaboration *Observation and studies of jet quenching in PbPb collisions at nucleon-nucleon center-of-mass energy = 2.76 TeV Phys.Rev.C84:024906,2011*

- [15] ATLAS collaboration *Measurement of the azimuthal anisotropy for charged particle production in $\sqrt{(s_{NN})} = 2.76$ TeV lead-lead collisions with the ATLAS detector* *Phys.Rev. C86 (2012) 014907*
- [16] ALICE Collaboration: K. Aamodt *Charged-particle multiplicity density at mid-rapidity in central Pb-Pb collisions at $\sqrt{(s_{NN})} = 2.76$ TeV* *Phys.Rev.Lett.105:252301,2010*
- [17] CMS collaboration *Observation of Long-Range Near-Side Angular Correlations in Proton-Proton Collisions at the LHC* *JHEP 1009:091,2010*
- [18] J. C. Collins and M. J. Perry *Superdense Matter: Neutrons or Asymptotically Free Quarks?* *34, 1353 (1975)*
- [19] Joseph I. Kapusta *Quantum chromodynamics at high temperature* *B 148, 461 (1979)*
- [20] D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe *QCD and instantons at finite temperature* *Rev. Mod. Phys. 53, 43–80 (1981)*
- [21] M. Asakawa, S.A. Bass, B. Müller *Anomalous Viscosity of an Expanding Quark-Gluon Plasma* *Phys.Rev.Lett.96:252301,2006*
- [22] M. Asakawa, S.A. Bass, B. Müller *Anomalous Transport Processes in Anisotropically Expanding Quark-Gluon Plasmas* *Prog.Theor.Phys.116:725-755,2007*
- [23] G. Policastro, D.T. Son, A.O. Starinets *Shear viscosity of strongly coupled $N=4$ supersymmetric Yang-Mills plasma* *Phys.Rev.Lett.87:081601,2001*
- [24] E. Iancu *QCD in heavy ion collisions* [hep-ph/1205.0579]

- [25] M. Gyulassy, D.H. Rischke, B. Zhang *Hot Spots and Turbulent Initial Conditions of Quark-Gluon Plasmas in Nuclear Collisions* *Nucl.Phys.A613:397-434,1997* []
- [26] Дремин И.М. *Когерентное адронное излучение при сверхвысоких энергиях Письма в ЖЭТФ 1216 (1977)*
- [27] I. M. Dremin *Ring-like events: Cherenkov gluons or Mach waves?* *Nucl. Phys. A 767 (2006), 233*
- [28] I. M. Dremin *The medium in heavy-ion collisions* *Nucl. Phys. A 785 (2007), 369*
- [29] P. Romatschke, R. Venugopalan *The Unstable Glasma* *Phys. Rev. D74, 045011 (2006)*.
- [30] T. Lappi, L. McLerran *Some Features of the Glasma* *Nucl.Phys.A772:200-212,2006*
- [31] Guo-Liang Ma, Xin-Nian Wang *Jets, Mach cone, hot spots, ridges, harmonic flow, dihadron and γ -hadron correlation in high-energy heavy-ion collisions* *Phys. Rev. Lett. 106, 162301(2011)*
- [32] B. Betz et al. *Universality of the Diffusion Wake from Stopped and Punch-Through Jets in Heavy-Ion Collisions* *Phys. Rev. C 79 034902 (2009)*
- [33] J. Takahashi et al. *Topology Studies of Hydrodynamics Using Two-Particle Correlation Analysis* *Phys. Rev. Lett. 103 242301 (2009)*
- [34] P.W. Anderson *More is Different* *Science 177, 393 (1972)*

- [35] N. Borghini, P. M. Dinh, J.-Y. Ollitrault *A new method for measuring azimuthal distributions in nucleus nucleus collisions Phys. Rev. C63 (2001) 054906*
- [36] R. S. Bhalerao, N. Borghini, J.-Y. Ollitrault *Analysis of anisotropic flow with Lee-Yang zeroes Nucl.Phys. A727 (2003) 373-426*
- [37] D. J. Gross, F. Wilczek *Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories Phys. Rev. Lett. 30 (26): 1343-1346*
- [38] H. D. Politzer *Reliable perturbative results for strong interactions Phys. Rev. Lett. 30 (26): 1346-1349*
- [39] E. V. Shuryak *Quark-gluon plasma and hadronic production of leptons, photons and psions Physics Letters B 78 (1), 150-153*
- [40] FAIR CDR - An International Accelerator Facility for Beams of Ions and Antiprotons, Conceptual Design Report. English
- [41] <http://nica.jinr.ru>
- [42] A. D. Linde *Confinement of Monopoles at High Temperatures: A Solution of the Primordial Monopole Problem Phys.Lett. B96 (1980) 293-296*
- [43] J.-P. Blaizot, E. Iancu *The Quark-Gluon Plasma: Collective Dynamics and Hard Thermal Loops. Phys.Rept. 359 (2002) 355-528*
- [44] J.-P. Blaizot, E. Iancu, A. Rebhan *Thermodynamics of the high-temperature quark-gluon plasma. Review for "Quark-Gluon Plasma 3 eds. R.C. Hwa and X.-N. Wang, World Scientific, Singapore*

- [45] E. V. Shuryak *The QCD vacuum, hadrons and the superdense matter* World Scientific, 2004
- [46] I. M. Dremin *Equations, chromopermittivity and instabilities of the quark-gluon medium* *Phys.Atom.Nucl.* 74:487-489,2011
- [47] STAR Collaboration *Distributions of Charged Hadrons Associated with High Transverse Momentum Particles in pp and Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV* *Phys.Rev.Lett.* 95:152301,2005
- [48] J.G. Ulery (STAR) *Two- and Three-Particle Jet-Like Correlations* [arXiv:0801.4904]
- [49] S. S. Adler et al. PHENIX Collaboration *Dense-Medium Modifications to Jet-Induced Hadron Pair Distributions in Au-Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV* *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006), 052301
- [50] PHENIX Collaboration, A. Adare, et al *Transverse momentum and centrality dependence of dihadron correlations in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV: Jet-quenching and the response of partonic matter* *Phys. Rev. C* 77 (2008), 011901
- [51] PHENIX Collaboration, A. Adare, et al *Dihadron azimuthal correlations in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV* *Phys.Rev.C* 78:014901,2008
- [52] J.-P. Blaizot, E. Iancu *The Quark-Gluon Plasma: Collective Dynamics and Hard Thermal Loops* *Phys.Rept.* 359 (2002) 355-528
- [53] J.-P. Blaizot, E. Iancu *Thermodynamics of the high-temperature quark-gluon plasma* Review for "Quark-Gluon Plasma 3 eds. R.C. Hwa and X.-N. Wang, World Scientific, Singapore

- [54] V. Koch, A. Majumder, X.-N. Wang *Cherenkov Radiation from Jets in Heavy-ion Collisions Phys.Rev.Lett.* 96:172302,2006
- [55] I.M. Dremin, V.A. Nechitailo *Asymmetry of in-medium rho-mesons as a signature of Cherenkov effects* [arXiv:0704.1081]
- [56] I.M. Dremin, *The medium in heavy-ion collisions Nucl.Phys.A* 785:365-370,2007
- [57] I.M. Dremin *Cherenkov gluons (predictions and proposals) Int. J. Mod. Phys. A* 22 (2007) 3087; *J. Phys. G* 35 (2008) 054001
- [58] M. Gyulassy, D.H. Rischke, B. Zhang, *Hot Spots and Turbulent Initial Conditions of Quark-Gluon Plasmas in Nuclear Collisions Nucl.Phys. A* 613 (1997), 397
- [59] Дж. Джексон *Классическая электродинамика М.: Мир, 1965*
- [60] Гольдбергер, М.; Ватсон, К. *Теория столкновений М.: Мир, 1967*
- [61] I.M. Dremin *Equations, chromopermittivity and instabilities of the quark-gluon medium Phys.Atom.Nucl.* 74, 487-489, 2011
- [62] М.И. Рязанов *JETP* 32 (1957), . 32, 1244
- [63] M. Alfimov, A. Leonidov *Quantum Spectrum of Cherenkov Glue Nucl.Phys. A* 875 (2012) 160-172 [arXiv:1106.5231]
- [64] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц *Курс теоретической физики; Т. 8, Электродинамика сплошных сред М.: Наука, 1982*
- [65] M. H. Thoma, M. Gyulassy *Quark Damping And Energy Loss In The High Temperature Qcd. Nucl.Phys. B* 351 (1991) 491-506

- [66] V. M. Grichine *On the energy-angle distribution of Cherenkov radiation in an absorbing medium Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. A482 (2002), 629*
- [67] V.M. Grichine, S.S. Sadilov *Radiation energy loss of an accelerated charge in an absorbing medium Phys. Lett. B559 (2003), 26*
- [68] В. И. Татарский *Распространение волн в турбулентной атмосфере* М.: Наука, 1967
- [69] M. Djordjevich *Transition Radiation in QCD matter Phys.Rev.C73:044912, 2006*
- [70] V. V. Tamoykin *Cherenkov and Trandient Radiation of Uniformly Moving Charge In Random Inhomogenius Medium. Astroph. and Space Sc. 16 (1972)*
- [71] В. М. Финкельберг *Диэлектрическая проницаемость смесей. ЖТФ, т .34, № 3, с. 509 - 518 (1964)*
- [72] Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский *О пространственной дисперсии неоднородных сред. ЖЭТФ, т. 48, № 2, 656-665 (1965)*
- [73] Y. Nama et al. *NeXSPheRIO Results on Elliptic-Flow Fluctuations at RHIC. Phys.Atom.Nucl.71:1558-1564 (2008)*
- [74] H.J. Drescher, F.M. Liu, S. Ostapchenko, T. Pierog, K. Werner *Initial Condition for QGP Evolution from NEXUS. Phys.Rev. C65 054902 (2002)*
- [75] X.N. Wang and M. Gyulassy. *Phys. Rev. D 44 (1991) 3501, Phys. Rev. D 45 (1992) 844, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 1480, Phys. Lett. B 282 (1992) 466, Comp. Phys. Comm. 83 (1994) 307.*

- [76] S. Damjanovic (for the NA60 Collaboration) *First measurement of the rho spectral function in nuclear collisions* *Eur.Phys.J.C*49:235-241(2007)
- [77] Тамм И. Е., Франк И. М. *Когерентное излучение быстрого электрона в среде ДАН СССР* 14 107 (1937)
- [78] Sjostrand T., Mrenna S., Skands P. *PYTHIA 6.4 Physics and Manual* LU TP 06-13 FERMILAB-PUB-06-052-CD-T, March 2006
- [79] A. Kovner, L. McLerran, H. Weigert *Gluon production from non-abelian Weizsäcker-Williams fields in nucleus-nucleus collisions* *Phys.Rev. D*52 (1995) 6231-6237
- [80] T. Lappi, L. McLerran *Some Features of the glasma.* *Nucl.Phys.A*772:200-212,2006
- [81] P. Romatschke, R. Venugopalan *The unstable glasma.* *Phys.Rev.D*74:045011,2006
- [82] K. Fukushima, F. Gelis *The evolving glasma.* *Nucl. Phys. A*874 (2012), 108
- [83] J. Collins *Foundations of perturbative QCD* Cambridge University Press, 2011
- [84] A.V. Efremov, O.V. Teryaev *QCD asymmetry and polarized hadron structure functions* *Phys.Lett. B*150 (1985) 383
- [85] A.V. Efremov, O.V. Teryaev *On Spin Effects in Quantum Chromodynamics* *Sov.J.Nucl.Phys.* 36 (1982)
- [86] V.N. Gribov, L.N. Lipatov *Deep inelastic e p scattering in perturbation theory* *Sov. J. Nucl. Phys.* 15 (1972) 438.

- [87] G. Altarelli, G. Parisi *Asymptotic freedom in parton language Nucl. Phys. B126, 298–318. (1977)*
- [88] Yu. L. Dokshitzer *Calculation of structure functions of deep-inelastic scattering and $e+e^-$ annihilation by perturbation theory in quantum chromodynamics Sov. Phys. JETP 46 (1977) 641.*
- [89] STAR Collaboration *Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions Nucl. Phys. A757 (2005) 102–183*
- [90] PHENIX Collaboration *Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration Nucl. Phys. A757 (2005)*
- [91] CMS Collaboration, *Study of high- p_T charged particle suppression in PbPb compared to pp collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{TeV}$ Eur.Phys.J. C72 (2012) 1945*
- [92] ALICE Collaboration *Particle-yield modification in jet-like azimuthal di-hadron correlations in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76\text{TeV}$ Phys. Rev. Lett. 108, 092301 (2012)*
- [93]
- [94] K. Dusling, T. Epelbaum, F. Gelis, R. Venugopalan *Role of quantum fluctuations in a system with strong fields: onset of hydrodynamical flow. Nucl. Phys. A850 (2011), 69-109*

- [95] T. Epelbaum, F. Gelis *Role of quantum fluctuations in a system with strong fields: spectral properties and thermalization. Nucl. Phys. A872 (2011), 210-244*
- [96] K. Dusling, T. Epelbaum, F. Gelis, R. Venugopalan *Instability induced pressure isotropization in a longitudinally expanding system. Phys. Rev. D86 (2012), 085040*
- [97] J. M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity. Adv. Theor. Math. Phys.2 (1998) 231–252*
- [98] J. Polchinski *Introduction to Gauge/Gravity Duality. Lectures at TASI, June 1-7, 2010, arXiv:1010.6134*
- [99] M. Rangamani *Gravity and Hydrodynamics: Lectures on the fluid-gravity correspondence. Class.Quant.Grav.26:224003,2009*
- [100] W. Florkowski, R. Ryblewski, M. Strickland *Anisotropic Hydrodynamics for Rapidly Expanding Systems. arXiv:1304.0665*
- [101] W. Florkowski, R. Ryblewski, M. Strickland *Testing viscous and anisotropic hydrodynamics in an exactly solvable case. Phys. Rev. C 88, 024903 (2013)*
- [102] Radoslaw Ryblewski *Collective phenomena in the early stages of relativistic heavy-ion collisions. PhD. Thesis*
- [103] M. P. Heller, R. A. Janik, P. Witaszczyk *The characteristics of thermalization of boost-invariant plasma from holography. Phys. Rev. Lett. 108, 201602 (2012)*

- [104] M. P. Heller, R. A. Janik, P. Witaszczyk *A numerical relativity approach to the initial value problem in asymptotically Anti-de Sitter spacetime for plasma thermalization - an ADM formulation* *Phys. Rev. D* 85, 126002 (2012)
- [105] Yu. L. Klimontovich *Statistical physics.* (Harwood Academic, Chur, Switzerland, 1986).
- [106] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical physics, Part 1. 3rd edition,* (Pergamon Press, Oxford, 1980)
- [107] S. Mrowczynski, M. H. Thoma *What Do Electromagnetic Plasmas Tell Us about Quark-Gluon Plasma?* *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*57:61-94, 2007
- [108] E.S. Weibel, *Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution,* *Phys. Rev. Lett.* 2:83 (1959)
- [109] S. Mrowczynski, *Stream instabilities of the quark-gluon plasma.* *Phys. Lett. B*214 (1988), 587.
- [110] Y.E. Pokrovsky, A.V. Selikhov, *Filamentation in a quark-gluon plasma.* *JETP Lett.* 47 (1988), 12-14
- [111] S. Mrowczynski, *Plasma instability at the initial stage of ultrarelativistic heavy-ion collisions.* *Phys. Lett. B*314:118 (1993)
- [112] S. Mrowczynski, *Color filamentation in ultrarelativistic heavy-ion collisions.* *Phys. Lett. B*393:26 (1997).
- [113] P. Arnold, J. Lenaghan, G.D. Moore *QCD plasma instabilities and bottom-up thermalization.* *JHEP* 08 (2003), 002

- [114] P. Arnold, J. Lenaghan, G.D. Moore, L.G. Yaffe, *Apparent thermalization due to plasma instabilities in the quark-gluon plasma. Phys. Rev. Lett. 94 (2005), 072302*
- [115] P. Arnold, G.D. Moore, *QCD plasma instabilities: The non-Abelian cascade. Phys. Rev. D73 (2006), 025006*
- [116] P. Arnold, G.D. Moore, *Turbulent spectrum created by non-Abelian plasma instabilities. Phys. Rev. D73 (2006), 025013*
- [117] M. Asakawa, S. A. Bass, and B. Müller, *Anomalous transport processes in anisotropically expanding Quark-Gluon plasmas. Progress of Theoretical Physics, vol. 116, no. 4, pp. 725–755*
- [118] M. Asakawa, S. A. Bass, and B. Müller, *Anomalous viscosity of an expanding quark-gluon plasma. Physical Review Letters, vol. 96, no. 25, Article ID 252301, 2006.*
- [119] M. Asakawa, S. A. Bass, and B. Müller, *Anomalous transport processes in turbulent non-Abelian plasmas. Nuclear Physics A, vol. 854, no. 1, pp. 76–80, 2011.*
- [120] V. N. Tsytovich, *Theory of Turbulent Plasma, Springer. New York, NY, USA, 1977*
- [121] S. Ichimaru, *Statistical Plasma Physics. Westview Press, Boulder, Colo, USA, 1991.*
- [122] A. Majumder, B. Müller, and X. N. Wang, *Small shear viscosity of a Quark-Gluon plasma implies strong jet quenching. Physical Review Letters, vol. 99, Article ID 192301, 4 pages, 2007.*

- [123] D. F. Litim, C. Manuel, *Semi-classical transport theory for non-Abelian plasmas. Phys.Rept. 364 (2002) 451-539*
- [124] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, U. A. Wiedemann *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions. CERN-PH-TH/2010-316, MIT-CTP-4198, ICCUB-10-202*
- [125] K. Johnson, *Functional integrals for spin. Annals Phys. 192 (1989) 104.*
- [126] В. П. Силин *Об электромагнитных свойствах релятивистской плазмы. ЖЭТФ, 1960, 1577-1583.*
- [127] E. Braaten, RD. Pisarski *Calculation of the gluon damping rate in hot QCD. Phys. Rev. D 42, 2156-2160 (1990)*
- [128] J.C. Taylor, S.M.H. Wong *The effective action of hard thermal loops in QCD. Nucl.Phys. B346 (1990) 115-128*
- [129] J.-P. Blaizot, E. Iancu *The Quark-Gluon Plasma: Collective Dynamics and Hard Thermal Loops. Phys.Rept. 359 (2002) 355-528*
- [130] J.-P. Blaizot, E. Iancu, A. Rebhan *Thermodynamics of the high-temperature quark-gluon plasma. Review for "Quark-Gluon Plasma 3 eds. R.C. Hwa and X.-N. Wang, World Scientific, Singapore*
- [131] Л. Д. Ландау, Е. Ф. Лифшиц *Том 10. Физическая кинетика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002*
- [132] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics. (McGraw-Hill, New York, 1965)*

- [133] P. Danielewicz, M. Gyulassy *Dissipative phenomena in quark-gluon plasmas. Phys. Rev. D* 31, 53–62 (1985)
- [134] P. B. Arnold, G. D. Moore, L. G. Yaffe *Transport coefficients in high temperature gauge theories. 1. Leading log results JHEP* 0011 (2000) 001
- [135] R. Baier, D. Schiff *Deciphering the properties of the medium produced in heavy ion collisions at RHIC by a pQCD analysis of quenched large transverse momenp- perp π^0 spectra JHEP* 0609 (2006) 059
- [136] S. K. Wong, *Field And Particle Equations For The Classical Yang-Mills Field And Particles With Isotopic Spin Nuovo Cim.* 65A (1970) 689
- [137] E. Braaten and R. D. Pisarski *Simple effective Lagrangian for hard thermal loops Phys. Rev. D* 45 (1992) 1827
- [138] T. H. Dupree *A Perturbation Theory for Strong Plasma Turbulence Phys. Fluids* 9, 1773 (1966)
- [139] T. H. Dupree *Nonlinear Theory of Low-Frequency Instabilities Phys. Fluids* 11, 2680 (1968)
- [140] B.G.Zakharov *Fully quantum treatment of the Landau–Pomeranchuk–Migdal effect in QED and QCD JETP Lett.* 63:952-957,1996
- [141] B.G.Zakharov *Radiative energy loss of high energy quarks in finite-size nuclear matter and quark-gluon plasma JETP Lett.* 65:615-620,1997
- [142] B.G.Zakharov *Light-cone path integral approach to the Landau-Pomeranchuk-Migdal effect and the SLAC data on bremsstrahlung from high energy electrons Phys.Atom.Nucl.* 62 (1999) 1008-1018

- [143] B.G.Zakharov *Transverse Spectra of Radiation Processes in Medium JETP Lett. 70 (1999) 176-182*
- [144] R.Baier, Yu.L.Dokshitzer, A.H.Mueller, S.Peigné, D.Schiff *Radiative energy loss of high energy quarks and gluons in a finite volume quark-gluon plasma Nucl.Phys.B483:291-320,1997*
- [145] I.P. Lokhtin, A.M. Snigirev *A Model of jet quenching in ultrarelativistic heavy ion collisions and high-p(T) hadron spectra at RHIC Eur.Phys.J. C45 (2006) 211-217*
- [146] I.P. Lokhtin, A.V. Belyaev, A.M. Snigirev *Jet quenching pattern at LHC in PYQUEN model Eur.Phys.J. C71 (2011) 1650*
- [147] A. Kovner, U. A. Wiedemann *Gluon Radiation and Parton Energy Loss Review for Quark Gluon Plasma 3, Editors: R.C. Hwa and X.-N. Wang, World Scientific, Singapore.*
- [148] P. Arnold, G. D. Moore, L. G. Yaffe *The Fate of Non-Abelian Plasma Instabilities in 3+1 Dimensions Phys.Rev.D72:054003,2005*
- [149] М. Р. Киракосян *Энергетические потери партона в неоднородной цветной среде КСФ 09 2011 стр. 15*
- [150] I. M. Dremin, M. R. Kirakosyan, A. V. Leonidov, A. V. Vinogradov *Cherenkov Glue in Opaque Nuclear Medium' Nucl. Phys. A826: 190-197, 2009*
- [151] M. Kirakosyan, A. Leonidov, B Müller *Turbulence-Induced Instabilities in EP and QGP Acta Physica Polonica B, vol. 6, p 403, (2013)*

- [152] I. M. Dremin, M. R. Kirakosyan, A. V. Leonidov *On Collective Properties of Dense QCD Matter Advances in High Energy Physics vol. 2013 (2013)*, 706531