Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук»
(ФИАН)

На правах рукописи

Грицаенко Вячеслав Сергеевич

Предсимплектические структуры и минимальные лагранжианы первого порядка для массивных полей

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Григорьев Максим Анатольевич

Москва — 2024

Оглавление

Стр.

Введение 4

Глава 1. Внутреннее действие 16
- 1.1 Расслоение джетов 16
- 1.2 Лагранжев формализм 19
- 1.3 Внутреннее действие 21
- 1.4 Примеры естественных систем 25
  - 1.4.1 Гамильтонова механика 25
  - 1.4.2 Естественная мультисимплектическая система 26
  - 1.4.3 Механическая система со связями 27
  - 1.4.4 Уравнение Кортевега-де Фриза 30
  - 1.4.5 Метрическая гравитация 31
  - 1.4.6 Теория Фронсдала 34
  - 1.4.7 Массивный спин 1 36
- 1.5 Массивный спин 2 38
- 1.6 Минимальное мультисимплектическое действие 41
- 1.7 Массивный спин 3 46
- Выводы 48

Глава 2. Обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм 49
- 2.1 BV на языке градуированных супермногообразий 49
- 2.2 Q-многообразия и Q-расслоения 54
- 2.3 AKSZ-модель 55
- 2.4 Предсимплектический BV-AKSZ формализм 57
- 2.5 Алгебра дифференциальных форм на языке градуированной геометрии 60
- 2.6 Обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм 62
- 2.7 Внутреннее действие 67
- 2.8 Электродинамика старших форм 70
- 2.9 Модель Фридмана-Таунсенда 73
- Выводы 75

Стр.

Глава 3. Бездуховая массивная теория бигравитации 76

3.1 Скачок ван Дама-Вельтмана-Захарова 76

3.2 Дух Бульвара-Дезера 82

3.3 Бездуховая массивная теория бигравитации 84

3.4 Бигравитация на реперном языке 87

3.5 Размерная редукция 92

3.6 Бигравитация в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма 95

3.7 Квазирегулярность поверхности связей 97

Выводы 102

Заключение 103

Список литературы 104

Введение

Актуальность темы. Лагранжев формализм является крайне эффективным способом работы с теоретикополевыми задачами в физике. Например, в классической физике, где вполне можно обойтись без записи действия, Лагранжев формализм является крайне удобным способом задания взаимодействия в системе, поскольку в отличие от уравнений движения, куда взаимодействия могут входить сложным образом, в лагранжиан взаимодействие добавляется аддитивно. В то же время в квантовой теории поля решение задач без записи действия (или какого-либо аналога действия) во множестве примеров является крайне затруднительным. В связи с этим оказывается актуальным вопрос о построении действия (или, что эквивалентно, лагранжиана) по заранее заданным уравнениям движения, которые обычно представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных (PDE). Данная проблема называется обратной вариационной задачей. В более общем смысле она формулируется так: можно ли по заданным уравнениям движения построить функционал, равенство нулю вариационной производной которого воспроизводило бы эти заранее заданные уравнения?

Известно, что PDE могут быть рассмотрены в инвариантных геометерминах терминах, как поверхность на расслоении джетов (стационарная поверхность) и распределение Картана на ней. Подробнее с этим можно ознакомиться в работах [1—3]. С другой стороны, Лагранжева формулировка теории существенно зависит от набора переменных, в которых она строится. Действительно, поиск Лагранжевой формулировки традиционно сопряжён с введением в теорию (или исключением из неё) вспомогательных полей, от выбора которых впоследствии Лагранжева формулировка зависит. В частности, для массивных спиновых теорий при $s \geqslant 2$ Лагранжева формулировка не может быть построена без введения вспомогательных полей, поскольку количество уравнений движения для подобных теорий превышает количество полей, в терминах которых записаны эти уравнения.[4—7] Именно с этой неинвариантностью связана одна из ключевых сложностей обратной вариационной задачи.

Одновременно с этим массивные теории, частным случаем которых являются массивные спиновые теории, являются объектом повышенного интереса в последнее время. Даже с точки зрения классической теории поля массивные поля являются крайне полезными моделями в задачах, в которых предполагается конечный радиус взаимодействия, что, например, актуально в космологии. При этом безмассовые поля естественно рассматривать, как гладкий предел массы к нулю (и, соответственно, радиуса взаимодействия к бесконечности) массивных теорий. В квантовой же теории поля массивные поля зачастую являются даже в большей степени предпочтительными по сравнению с безмассовыми в силу отсутствия в них нетривиальной калибровочной симметрии, благодаря чему для квантования подобных полей не нужно вводить никакие дополнительные структуры. Более того, интерес к массивным теориям также связан и с теорией струн, которая является одним из многообещающих кандидатов на роль единой теории фундаментальных взаимодействий. Этот интерес связан с тем, что спектр теории струн содержит массивные поля в секторе $s \geqslant 2$.[8; 9] Всё это лишь усиливает интерес к методам построения инвариантной Лагранжевой формулировки для массивных теорий.

Существует инвариантный подход к построению Лагранжевой формулировки. Он основан на задании вместе со стационарной поверхностью и распределением Картана дополнительной математической структуры. Естественным кандидатом на роль подобной структуры является симплектическая (или её вырожденный аналог - предсимплектическая) структура. Подробнее об этом подходе можно узнать из работ [10; 11], а также предшествовавших им классических работ [12—15]. В случае механики, когда имеется лишь одна независимая переменная, стационарная поверхность оказывается конечномерной, и роль предсимплектической структуры играет симплектическая форма. Для систем без связей симплектическая форма полностью задаёт динамику. Однако в случае теории поля стационарная поверхность в общем случае бесконечномерна, что существенно усложняет работу с подобным объектом.

Крайне важной в данном направлении является работа [16], в которой показано, что для PDE без дифференциальных следствий низшего порядка можно определить действие на сечениях самой стационарной поверхности (так называемое внутреннее действие), которое воспроизведёт исходную PDE. Таким образом было показано, что для подобных теорий Лагранжева формулировка закодирована в геометрических структурах, а именно в соответствующей стационарную поверхность с определёнными на ней распределением Картана и предсимплектической структурой.

Вместе с тем, часто Лагранжева формулировка массивных теорий часто содержит дифференциальные следствия низшего порядка. Более того, массивные спиновые теории уже начиная с $s = 2$ содержат дифференциальные следствия нулевого порядка, которые значительно влияют на вид стационарной поверхности. Вследствие этого нет гарантий того, что внутреннее действие для массивных спиновых теорий будет полным, а значит возникает вопрос о построении инвариантной Лагранжевой формулировки для данных теорий.

Тем не менее, существует способ исключить дифференциальные следствия низшего порядка из Лагранжевой формулировки массивных спиновых теорий путём трюка Штюкельберга. Штюкельбергова формулировка теории может быть получена, например, при помощи размерной редукции теории или же напрямую при помощи перевода дифференциальных следствий исходной теории во вспомогательные поля, инвариантные относительно Штюкельберговых (иначе говоря, сдвиговых) калибровочных преобразований.[17] При этом Штюкельбергова калибровочная симметрия является достаточно тривиальной в том смысле, что может быть исключена, например, заменой переменных. В связи с этим возникает более общая задача изучения инвариантных Лагранжевых формулировок для калибровочных теорий. При этом крайне удобным языком для изучения калибровочных систем является формализм Баталина-Вилковыского (BV, [18—21]), который, будучи изначально инструментом для квантования теорий, смог проявить себя также в исследовании симметрий и взаимодействий в теоретикополевых системах в том числе и на классическом уровне. В связи с этим вызывает интерес модель Александрова-Концевича-Шварца-Заборонского (AKSZ, [22]), которая позволяет получить BV-формулировку исходной теории в терминах градуированных многообразий и определённой на них Q-структуры.

Тем не менее, применение модели AKSZ при требовании конечномерности таргет-пространства и локальности ограничено топологическими и диффеоморфизм инвариантными системами. Для того, чтобы обойти данное ограничение, можно заменить в конструкции AKSZ симплектическую структуру на предсимплектическую. Более того, так как лагранжиан системы не зависит от переменных, находящихся в ядре предсимплектической структуры, от данных переменных можно избавиться, проведя соответствующую факторизацию. В этом заключается предсимплектический BV-AKSZ формализм. Более того, оказывается возможным модифицировать набор аксиом, лежащих в основе предсимплектического BV-AKSZ формализма, заменив требование нильпотентности Q-дифференциала на более общее условие, являющееся аналогом мастер-уравнения формализма BV. Полученная таким образом конструкция называется обобщённым предсимплектическим BV-AKSZ формализмом.

Преимущество обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма раскрывается при рассмотрении приводимых калибровочных теорий, например, электродинамики старших форм. Как известно, калибровочные параметры данной теории оказываются инвариантны относительно собственных калибровочных преобразований, вследствие чего необходимый набор переменных для построения BV формулировки включает в себя помимо полей и духов также духи для духов и все соответствующие антиполя. Таким образом, BV формулировка электродинамики старших форм оказывается крайне громоздкой. А потому оказывается актуальной задача о записи BV-формулировок подобных теорий в более компактном виде, что и позволяет сделать обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм.

Ещё одним примером калибровочной, но в то же время массивной теории, с которой обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм хорошо себя показывает, является массивная гравитация. С начала прошлого века массивная гравитация являлась интересной альтернативой для описания Вселенной на космологических масштабах. Изначальной целью модификации теории гравитации было решение проблемы согласования массы галактик с распределением их скоростей вращения: полагалось, что введение характерного масштаба действия для гравитационного поля способно разрешить возникший парадокс без введения альтернативного вида материи.

Позднее, с развитием методов квантовой теории поля, мотивация развития массивной теории гравитации изменилась. Причиной тому стала так называемая проблема космологической постоянной. Данная проблема состоит в следующем. При помощи методов квантовой теории поля из естественного предположения, что материя, ответственная за ускоренное расширение Вселенной, описывается скалярным полем, следует оценка для космологической постоянной Λ_{QFT}. В то же время из наблюдения следует не согласующаяся с Λ_{QFT} оценка космологической постоянной Λ_{exp}, причём $\frac{\Lambda_{QFT}}{\Lambda_{exp}} \sim 10^{122}$, что является на данный момент самым серьёзным расхождением между квантовой теорией поля и теорией гравитации. Конечно, данную проблему можно решить при помощи перенормирования Λ, однако перенормировка в случае стандартной подели гравитации является аддитивной, и столь тонкая "настройка"космологических параметров сложна с точки зрения интерпретации получаемых результатов. В то же время в случае массивной теории гравитации параметр m, перенормируется мультипликативно, что существенно облегчает интерпретацию.

Однако теория массивной гравитации за свою историю исследования столкнулась с целой массой проблем. Первую подобную проблему в 1970 году описали независимо Х. ван Дам с М. Вельтманом в работе [23] и В.И. Захаров в работе [24]. Дело в том, что теория Фирца-Паули, являясь линеаризованной теорией массивной гравитации, обладает пятью степенями свободы, в то время как обычная линеаризованная гравитация обладает, как известно, двумя. В то же время предел теории Фирца-Паули $m \to 0$ не является гладким, в результате чего в безмассовом пределе остаётся третья, лишняя степень свободы. Она приводит к тому, что в одночастичной амплитуде рассеяния (а следовательно и в законе Ньютона) возникает лишний множитель $\frac{4}{3}$, а значит массивная гравитация в безмассовом пределе описывает более сильное притяжение, чем стандартная, безмассовая гравитация.

Решение данной проблемы предложено А.И. Вайнштейном в работе [25]. Он показал, что линеаризованная массивная гравитация справедлива лишь на очень больших расстояниях. Это расстояние было названо радиусом Вайнштейна, $r_V = (\frac{r_g}{m})^{\frac{1}{5}}$, где r_g - гравитационный радиус, описываемый стандартной общей теорией относительности. Внутри же радиуса Вайнштейна оставшиеся три степени свободы характеризуются сильным самодействием, а потому не взаимодействуют с оставшимися двумя.

Другое решение данной проблемы предложил М. Поррати в работе [26]. В своей работе он рассмотрел линеаризацию массивной теории гравитации вокруг пространства анти-де Ситтера. В таком случае в одночастичной амплитуде рассеяния возникает дополнительный свободный параметр Λ, и пределы $\Lambda \to 0$ и $m \to 0$ оказываются неперестановочными. Таким образом если в одночастичной амплитуде стремить к нулю сначала m, а затем Λ, то скачок степеней свободы не наблюдается. В противном же случае наблюдается решение ван-Дама-Вельтмана-Захарова.

Тем не менее, в том же 1972 году вышла работа [27] за авторством Д. Бульвара и С. Дезера, которая поставила перед исследователями массивной теории гравитации куда более серьёзную проблему. Проведя разложение Арновитта-Дезера-Мизнера для массивной теории гравитации и посчитав степени свободы, Д. Бульвар и С. Дезер пришли к выводу, что у данной теории не пять, а шесть степеней свободы. Более того, они пришли к выводу, что в общем случае массивной гравитации лишняя степень свободы обладает отрицательной кинетической энергией (то есть является духом), что приводит к неустойчивости решений в этой теории. Данное открытие остановило рассмотрение массивной гравитации, как альтернативной космологической модели, почти на 40 лет.

Ситуация изменилась в 2010 году с выходом работы [28] за авторством К. де Рам, Г. Габададзе и А. Толли. В данной работе авторы обратили внимание на то, что линеаризованная массивная гравитация обладает пятью степенями свободы, и задались вопросом о механизме отщепления данной лишней, духовой степени свободы. Им удалось найти частный случай потенциала в массивной теории гравитации, который теперь в их честь называется потенциалом де Рам-Габададзе-Толли (dRGT).

Потенциал dRGT крайне сложно записывается в метрическом формализме. Однако оказалось, что он приобретает не столь громоздкий вид в реперном формализме. Более того, оказалось, что интерес представляет версия массивной бигравитации с потенциалом dRGT, в которой фоновый репер, необходимый для построения массивного потенциала, также является динамической переменной. Таким образом была построена бездуховая массивная бигравитация.

Бездуховая массивная бигравитация, в отличие от массивной гравитации с потенциалом dRGT, в которой фоновый репер не является динамической переменной, обладает калибровочной симметрией. Однако несмотря на наличие двух различных реперов, описывающих в себя нетривиальным образом пять степеней свободы массивной гравитации и две степени свободы безмассовой, калибровочные преобразования данной теории включают в себя лишь один параметр для диффеоморфизмов и один параметр для преобразований Лоренца.

Несмотря на упрощение вида теории в реперном формализме, данная теория всё ещё является малоизученной. Вместе с тем, обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм предоставляет собой мощный инструмент для исследования калибровочных теорий, а потому его применение к бездуховой массивной бигравитации является актуальной задачей.

Степень проработанности темы. Мультисимплектический подход (стоит напомнить, что внутреннее действие является частным случаем мультисимплектического действия) берёт начало с работы Т. де Дондера [29], в которой автор предложил обобщение Гамильтонового формализма, хорошо зарекомендовавшего себя в одномерном случае - механике, на многомерные системы -

теорию поля, и продолжившей её работы Г. Вейля [30], в которой автор развил идею т. де Дондера и обобщил на многомерный Гамильтонов формализм подход Гамильтона-Якоби. В дальнейшем подход де Дондера-Вейля был рассмотрен с на языке расслоения джетов, что позволило, например, в инвариантных терминах сформулировать для обобщённого Гамильтонового формализма аналог преобразований Лежандра. В качестве основных работ в данном направлении можно выделить [31—37]. Особое внимание стоит обратить на работы [38], в которой был представлен набор различных мультисимплектических расслоений, использующихся в мультисимплектическом формализме, [39], в которой обсуждается применение мультисимплектического формализма к гравитации, [40], в которой описана факторизация по ядру в случае вырожденной мультисимплектической формы, а также [16], в которой было введено понятие внутреннего действия и таким образом для большого спектра систем была решена обратная вариационная задача. Однако несмотря на существенный вклад в развитие обобщённого Гамильтонового подхода, сделанного в данных работах, в них рассматривались исключительно неградуированные объекты, что затрудняет систематическое исследование калибровочных систем.

С другой стороны, в области инвариантного геометрического подхода к рассмотрению калибровочных систем нельзя не отметить работу [41], в которой было показано, что, исключив требование невырожденности у симплектической структуры (то есть рассмотрев предсимплектическую структуру), можно обобщить конструкцию AKSZ на нетопологические теории. В дальнейшем данный подход, а именно предсимплектический BV-AKSZ формализм, был развит в работах [42—44]: в частности, на примере гравитации в работе [42] и конформной гравитации в работе [43]. Также важно отметить работы [45—47] в которых не рассматривается Лагранжев формализм, однако исследуется математический аппарат, который сильно связан с предсимплектическим BV-AKSZ формализмом.

Важной работой в области построения минимальных предсимплектических моделей является статья [48], в которой описывается способ ослабить аксиомы предсимплектического BV-AKSZ формализма, а именно заменить требование нильпотентности Q-дифференциала на аналог мастер-уравнения. Таким образом Q-дифференциал, предсимплектическая структура ω и ковариантный Гамильтониан $\mathcal{H}$ оказываются подчинены соотношениям

$$\mathrm{d}\omega = 0\,, \qquad i_Q\omega - \mathrm{d}\mathcal{H} \in \mathcal{I}\,, \qquad i_Q i_Q\omega = 0\,, \qquad i_Q L_Q\omega \in \mathcal{I}\,, \tag{1}$$

где L_Q - производная Ли, а идеал $\mathcal{I}$ порождён формами с базы расслоения (обычно базой является пространство-время). Данный подход является многообещающим в исследовании массивной гравитации, поскольку позволяет получать минимальные предсимплектические формулировки теорий, которые при этом являются BV-полными. В то же время, исследование BV-формулировок массивной гравитации на данный момент ограничивается рассмотрением конечного (и вполне ограниченного) количества поправок к линейной теории (в качестве примера можно привести работы [49; 50]).

Исследование гравитации напрямую связано также с исследованием других спиновых систем с $s \geqslant 2$. В области безмассовых спиновых систем важнейшей работой является статья [51], в которой была предложена Лагранжева формулировка для безмассовой теории произвольного спина. Следующей качественной ступенью в развитии безмассовых спиновых теорий стало появление развёрнутого формализма, в рамках которого удалось построить взаимодействие безмассовых высшеспиновых полей с гравитацией в произвольной размерности. Для этого было рассмотрен случай искривлённого фонового пространства, поскольку как было известно из литературы ранее, в плоском пространстве в принципе невозможно построить теорию калибровочных высших спинов.[52] В качестве основных работ в данном направлении можно выделить статьи [53—56], а также обзор [57]. Также важно отметить, что в работе [58] рамках развёрнутого формализма была решена обратная вариационная задача.

В области массивных спиновых полей нельзя не отметить пионерскую работу [4], в которой был предложен способ построения Лагранжевой формулировки массивной теории спина 2 путём введения вспомогательного поля, которое можно интерпретировать, как след исходнного поля, в терминах которого записаны уравнения движения. Дальнейшее обобщение данного подхода на случай произвольного спина было предложено в работе [5].

Существует также нековариантный подход к построению Лагранжевой формулировки. В работе [59] рамках подобного подхода можно построить действие для массивных спиновых полей без привлечения вспомогательных полей. Однако, помимо того, что подобная Лагранжева формулировка является нековариантной, она также содержит производные вплоть до 20 порядка, а её лагранжиан вмещается на 30 страницах.

Наконец, интересно отметить киральный подход к рассмотрению массивных высшеспиновых систем, описанный в работе [60]. Данный подход позволяет продвинуться в построении взаимодействия в массивных спиновых системах, однако существенно усложняет учёт симметрий полей. Более того, на данный момент подход, описанный в работе [60], пусть и является многообещающим, на данный момент был применён лишь к массивным теориям спинов $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ и 2.

Цели исследования:

1. Исследовать предсимплектические формулировки теорий с нетривиальными дифференциальными следствиями нулевого порядка в терминах стационарной поверхности.
2. Построить минимальное предсимплектическое действие для массивных теорий спина 2 и 3.
3. Построить в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма минимальные формулировки приводимых калибровочных, а также некалибровочных теорий.

Для достижения поставленных целей были сформулированы следующие **задачи исследования**:

1. Построить минимальную предсимплектическую формулировку в терминах стационарной поверхности для массивных спиновых теорий и получить их минимальное расширение для случаев массивных теорий спинов 2 и 3.
2. Явно проследить, как в случае, когда Q-дифференциал не содержит информации о калибровочной симметрии теории, предсимплектический BV-AKSZ формализм восстанавливает внутреннее действие.
3. Построить минимальную формулировку электродинамики p-формы и модели Фридмана-Таунсенда в терминах обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построена минимальная полная (то есть воспроизводящая все уравнения движения) предсимплектическая формулировка в терминах стационарной поверхности для массивных теорий спина 2 и 3.
2. Показано, что предсимплектический BV-AKSZ формализм воспроизводит внутреннее действие в случае, когда Q-дифференциал не содержит информации о калибровочной симметрии теории.

3. В рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма построены минимальные формулировки электродинамики p-формы в произвольной размерности и её неабелевой модификации для $p = 2$, $n = 4$ - модели Фридмана-Таунсенда.

Достоверность. Достоверность полученных в рамках диссертационной работы результатов обеспечивается надёжностью математического аппарата, используемого в исследовании, включающего в себя дифференциальную геометрию, теорию супермногообразий и суперотображений.

Научная новизна. Все представленные в диссертационной работе результаты являются новыми. Полученные в диссертационной работе результаты используются в научных исследованиях как российскими, так и зарубежными учёными и научными группами.

Научная значимость. Изучаемые в диссертационной работе проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Полученный в диссертационной работе метод построения минимальных предсимплектических формулировок для массивных теорий спинов 2 и 3 без изменений обобщается на случаи старших спинов. Полученные в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма формулировки электродинамики p-форм, модели Фридмана-Таунсенда и бездуховой массивной бигравитации записаны в минимальном наборе переменных и содержат явно определяющие теорию геометрические структуры, что позволяет существенно облегчить их дальнейшее исследование.

Апробация результатов работы. Результаты, полученные в ходе работы над диссертацией, были представлены и обсуждены на международных конференциях:

1. "The International Workshop Supersymmetries and Quantum Symmetries – SQS'22"(Дубна, 2022)
2. "International Conference Quantum Field Theory and Gravity (QFTG 2023)" (Томск, 2023)

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано две работы, обе в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов ВАК и находящемся в белом списке изданий, индексируемых базами данных Scopus и Web of Science.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 111 страниц.

Глава 1 посвящена построению инвариантных Лагранжевых формулировок для массивных спиновых теорий. В разделе 1.1 описываются необходимые для дальнейшей работы математические структуры, главной из которых является расслоение джетов. Раздел 1.2 содержит описание понятия Лагранжевой формулировке на языке расслоения джетов. Раздел 1.3 вводит понятие внутреннего действия - частного случая мультисимплектического действия, определённого на сечениях стационарной поверхности теории, после чего применение данной конструкции раскрывается на примерах в разделе 1.4. В разделе 1.5 описывается построение внутреннего действия для теории, не являющейся естественной в смысле определения, полученного в разделе 1.3 - массивной теории спина 2. Также в данном разделе показывается, что внутреннее действие для данной теории не является полным. Раздел 1.6 посвящён построению минимальной предсимплектической формулировки для массивной теории спина 2 на основе так называемой Parent-формулировки действия. И, наконец, раздел 1.7 посвящён построению внутреннего действия (которое ожидаемо оказывается неполным) и минимальной предсимплектической формулировки для массивной теории спина 3.

Глава 2 посвящена методу построения инвариантных Лагранжевых формулировок, учитывающему калибровочные симметрии теории - обобщённому предсимплеткическому BV-AKSZ формализму. Разделы 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 и 2.5 посвящены структурам, необходимым для формулировки обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма. В разделе 2.6 вводится понятие обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма, после чего доказывается, что при помощи него можно восстановить полную BV-формулировку теории в случае квазирегулярной предсимплектической структуры. Раздел 2.7 посвящён рассмотрению в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма теорий, для которых Q-дифференциал не содержит данных о калибровочных преобразований. Доказывается, что в данном случае обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм воспроизводит внутреннее действие. В разделе 2.8 данный формализм используется для построения минимальной предсимплектической формулировки для приводимой калибровочной теории - электродинамики p-форм. Наконец, раздел 2.9 посвящён рассмотрению минимальной предсимплектической формулировки для неабелевой модификации электродинамики p-форм - модели Фридмана-Таунсенда.

Глава 3 посвящена построению минимальной предсимплектической формулировки для бездуховой массивной теории бигравитации. Разделы 3.1 и 3.2 посвящены исторической справке о проблемах, которые были выявлены в массивной теории бигравитации, а именно скачку ван Дама-Вельтмана-Захарова (также в разделе 3.1 описываются решения данной проблемы) и духу Бульвара-Дезера. В разделе 3.3 описывается способ построения потенциала для массивной теории бигравитации, который не приводит к появлению в теории лишней духовой степени свободы. Раздел 3.4 посвящён реперному формализму, который позволяет сформулировать бездуховую массивную теорию бигравитации в более компактной форме. В разделе 3.5 рассматривается альтернативный способ получения потенциала бездуховой массивной теории бигравитации путём размерной редукции через дискретизацию пространства. Наконец, разделы 3.6 и 3.7 посвящены применению к бездуховой массивной теории бигравитации обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма. В частности, в разделе 3.6 описывается поиск связей, позволяющих удовлетворить аксиомам обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма, а в разделе 3.7 предоставляется доказательство того, что данная поверхность связей является квазирегулярной.

Глава 1. Внутреннее действие

1.1 Расслоение джетов

Любая теоретикополевая система с точки зрения математики описывается на языке расслоений. Расслоение $\mathcal{F} \to X$ - тройка $(\mathcal{F},X,\pi)$, где топологическое пространство X называется базой расслоения, топологическое пространство $\mathcal{F}$ - тотальным пространством расслоения, а $\pi : \mathcal{F} \to X$ - каноническая проекция. В подавляющем большинстве содержательных теоретикополевых систем $\mathcal{F}$ и X являются многообразиями, и в качестве X выступает пространство-время. Более того, в данной работе каждое тотальное пространство расслоения $\mathcal{F}$ можно будет представить (во всяком случае локально), как Декартово произведение $X \times F$, где F носит название слоя расслоения. Подобные расслоения называются (локально) тривиальными.

Пусть x^a - координаты на базе X, а φ^i - координаты на слое F (соответственно, координатами на $\mathcal{F}$ будут (x^a, φ^i)). Полями системы будут называться сечения теории: отображения $\sigma : X \to \mathcal{F}$. Компоненты полей обозначаются как $\sigma^i(x)$ (или $\sigma(\varphi^i)$), но чаще для удобства вводится обозначение $\varphi^i(x)$.

Для работы с уравнениями движения (в том числе Лагранжевыми) теоретикополевой системы удобно ввести дополнительную конструкцию, а именно расслоение джетов, ассоциированное с расслоением $\mathcal{F} \to X$. По определению, k-е расслоение джетов $J^k(\mathcal{F})$ - это расслоение, координаты слоя которого - это классы эквивалентности сечений, у которых производные совпадают до k-го порядка включительно. Иными словами, точка в расслоении $J^k(\mathcal{F})$ - это пара $(x^a, [\sigma^i]_k$, где $[\sigma^i]_k$ - класс эквивалентности сечений, у которых в точке x^a совпадают первые k производных.

Пусть $l \leqslant k$. В таком случае легко определить сюрьективную проекцию $\pi^k_l : J^l(\mathcal{F}) \to J^k(\mathcal{F})$ из l-го расслоения джетов в k-е. Можно также определить обратный проективный предел, а именно $J^\infty(\mathcal{F})$ - бесконечное расслоение джетов. В качестве его координат удобно выбрать $(x^a, \varphi^i, \varphi^i_a, \varphi^i_{ab},...) = (x^a,\varphi^A)$, где φ^i_a - координата, ассоциированная с $\partial_a\sigma^i(x)$, а A - мультииндекс.

Касательное расслоение к расслоению джетов можно разбить на два подрасслоения: вертикальное (касательное расслоение вдоль слоя) и комплиментарное ему горизонтальное. Последнее можно определить следующим образом:

$$\widehat{D}_a = \frac{\partial}{\partial x^a} + \varphi^i_a \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + \varphi^i_{ab} \frac{\partial}{\partial \varphi^i_b} + ... \tag{1.1}$$

Данное векторное поле называется распределением Картана. Это распределение очевидным образом инволютивно. В данном, координатном, виде очевидно, что $\widehat{D}_a$ задаёт полную производную на $J^\infty(\mathcal{F})$.

Вместе с разбиением касательного пространства на вертикальную и горизонтальную составляющие аналогичным образом можно задать разбиение алгебры дифференциальных форм $\Omega(J^\infty(\mathcal{F}))$.

$$\Omega(J^\infty(\mathcal{F})) = \bigoplus_{0\leqslant h\leqslant n} \bigoplus_{v\geqslant 0} \Omega^{(h,v)}(J^\infty(\mathcal{F})) \tag{1.2}$$

h и v называются горизонтальным и вертикальным рангом формы соответственно. Проще говоря, элементами $\Omega^{(h,v)}(J^\infty(cF))$ являются дифференциальные (h,v)-формы. Вместе с введением двух градуировок для дифференциальных форм удобно также разбить дифференциал де Рама на сумму двух дифференциалов: $\mathrm{d} = \mathrm{d}_h + \mathrm{d}_v$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_h &: \Omega^{(h,v)}(J^\infty(\mathcal{F})) \to \Omega^{(h+1,v)}(J^\infty(\mathcal{F})) \\ \mathrm{d}_v &: \Omega^{(h,v)}(J^\infty(\mathcal{F})) \to \Omega^{(h,v+1)}(J^\infty(\mathcal{F})) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Из нильпотентности дифференциала d, а также опрделения d_h и d_v вытекают следующие соотношения на данные дифференциалы:

$$\mathrm{d}_h^2 = \mathrm{d}_v^2 = 0\,, \qquad \mathrm{d}_h \mathrm{d}_v + \mathrm{d}_v \mathrm{d}_h = 0 \tag{1.4}$$

В координатах произвольная дифференциальная форма ранга (h,v), а также горизонтальный и вертикальный дифференциалы де Рама выглядят следующим образом соответственно.

$$w = w_{a_1 ... a_h A_1 ... A_v} dx^{a_1} ... dx^{a_h} \mathrm{d}_v \varphi^{A_1} ... \mathrm{d}_v \varphi^{A_v} \tag{1.5}$$

$$\mathrm{d}_h = dx^a \widehat{D}_a \tag{1.6}$$

$$\mathrm{d}_v = \mathrm{d}_v \varphi^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i} + \mathrm{d}_v \varphi^i_a \frac{\partial}{\partial \varphi^i_a} + \ldots \tag{1.7}$$

Уравнения движения теоретикополевой системы, будучи дифференциальными уравнениями в частных производных (PDE), - это равная нулю комбинация полей и их производных. На языке расслоения джетов $J^\infty(\mathcal{F})$ PDE задаётся равенством нулю функций E_i от координат слоя. Данное условие может быть бесконечно продолжено.

$$\begin{aligned} E_i &= 0 \\ \widehat{D}_a E_i &= 0 \\ \widehat{D}_b \widehat{D}_a E_i &= 0 \\ &\ldots \end{aligned} \tag{1.8}$$

Данный набор уравнений вместе со всеми их возможными линейными комбинациями задаёт на $J^\infty(\mathcal{F})$ подрасслоение $\mathcal{M}$, которое называется стационарной поверхностью. Таким образом PDE эквивалентным образом задаётся парой $(\mathcal{M}, \widehat{D}_a)$. Стоит отметить, что, несмотря на привязку к координатам в определении $\mathcal{M}$ и $\widehat{D}_a$, сам объект $(\mathcal{M}, \widehat{D}_a)$ является координатно независимым.

Наконец осталось поговорить о решениях уравнений движения на данном языке. Для этого введём D_a - проекцию $\widehat{D}_a$ на $\mathcal{M}$, как на расслоение над X. Решениями уравнений движений в таком случае будут такие сечения $\sigma : X \to \mathcal{M}$, что D_a будет касателен к ним. В инвариантных терминах это условие можно записать следующим образом.

$$\mathrm{d} \circ \sigma^* = \sigma^* \circ \mathrm{d}_h \tag{1.9}$$

Здесь $\mathrm{d}_h = dx^a D_a$. Вводя локальные координаты ψ^A на $\mathcal{M}$, можно задать решение уравнений движения, как связь на $\mathcal{M}$ вида $\psi^A - \sigma^A(x) = 0$. В данных координатах можно выписать и D_a: $D_a = \partial_a + \Gamma^A_a(\psi,x)\frac{\partial}{\partial \psi^A}$, где $\Gamma^A_a(\psi,x)$ можно интерпретировать, как коэффициенты связности. Таким образом условие (1.9) легко выписывается в введнных ранее локальных координатах:

$$\partial_a \sigma^A(x) - \Gamma^A_a(\sigma(x),x) = 0 \tag{1.10}$$

Таким образом мы ввели все математические конструкции, которые позволяют рассматривать уравнения движения в инвариантных геометрических терминах. Следующим естественным шагом является обобщение рассмотренных конструкций на Лагранжев формализм.

1.2 Лагранжев формализм

Как известно, PDE $\mathcal{E}_i$ называются Лагранжевыми, если они могут быть получены варьированием некоторого функционала $S[\varphi(x)]$, называемого действием, то есть выполняется равенство $\mathcal{E}_i = \frac{\delta S[\varphi(x)]}{\delta\varphi^i(x)}$. Тем не менее важно помнить, что даже если $\mathcal{E}_i$ является Лагранжевой системой PDE, нет гарантий, что $\Lambda^i_j\mathcal{E}_i$ будет Лагранжевой системой даже при условии обратимости дифференциального оператора Λ^i_j. Данная проблема в литературе носит название проблемы множителя (multiplier problem). В этом смысле сама постановка задачи определения, являются ли уравнения движения какой-либо теоретико-полевой системы Лагранжевыми, не инвариантна. Для удобства работы с этим вопросом удобно сформулировать его на более инвариантном, геометрическом языке в терминах расслоения джетов.

Пусть на $J^\infty(\mathcal{F})$ определена такая $(n{,}0)$-форма $\mathcal{L}$, что $E_i = \delta^{EL}_i\mathcal{L}$, где

$$\delta^{EL}_i = \frac{\partial}{\partial\varphi^i} - \widehat{D}_a\frac{\partial}{\partial\varphi^i_a} + \widehat{D}_a\widehat{D}_b\frac{\partial}{\partial\varphi^i_{ab}} - ... \tag{1.11}$$

Пусть имеется две системы PDE E_i и E'_α. Они называются эквивалентными тогда, когда изоморфны друг другу две стационарные поверхности $(\mathcal{M}, \widehat{D}_a)$ и $(\mathcal{M}', \widehat{D}'_a)$. В этом смысле система PDE $(\mathcal{M}, \widehat{D}_a)$ называется Лагранжевой, когда существует такие расслоение джетов $J^\infty(\mathcal{F})$ и определённая на нём $(n{,}0)$ форма $\mathcal{L}$, что бесконечно продолженная система $E_i = \delta^{EL}_i\mathcal{L}$ эквивалентна $(\mathcal{M}, \widehat{D}_a)$.

Оператор δ^{EL}_i обязан удовлетворять следующему соотношению

$$\mathrm{d}_v\mathcal{L} = \mathrm{d}_v\varphi^i\delta^{EL}_i\mathcal{L} - \mathrm{d}_h\widehat{\chi} \tag{1.12}$$

Данное равенство называется первой вариационной формулой, которую можно интерпретировать следующим образом: при интегрировании лагранжиана по частям возникает граничный член (нужно ли это?). Её также можно интерпретировать, как определение $(n-1{,}1)$-формы $\widehat{\chi}$. Так как большинство физических лагранжианов (как и все лагранжианы, рассмотренные в данной работе) не содержат производных от полей старше второго порядка, найдём для примера вид для $\widehat{\chi}$ для подобного случая.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_h\widehat{\chi} &= \mathrm{d}_v\varphi^i E_i - \mathrm{d}_v\mathcal{L} = \\ &= \mathrm{d}_v\varphi^i(-\widehat{D}_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_a} + \widehat{D}_a\widehat{D}_b\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_{ab}})(dx)^n - (\mathrm{d}_v\varphi^i_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_a} + \mathrm{d}_v\varphi_{ab}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_{ab}})(dx)^n \quad (1.13)\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}_v\varphi^i(-\widehat{D}_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_a} + \widehat{D}_a\widehat{D}_b\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_{ab}})(dx)^n = \mathrm{d}_h(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_a} - \widehat{D}_b\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_{ab}})\mathrm{d}_v\varphi^i(dx)^{n-1}_a \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned}&(\mathrm{d}_v\varphi^i_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_a} + \mathrm{d}_v\varphi^i_{ab}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_{ab}})(dx)^n = \\ &\qquad = ((\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_a} - \widehat{D}_b\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_{ab}})\mathrm{d}_h\mathrm{d}_v\varphi^i + \mathrm{d}_h(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_{ab}}\mathrm{d}_v\varphi^i_b))(dx)^{n-1}_a \quad (1.15)\end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\widehat{\chi} = ((\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_a} - \widehat{D}_b\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_{ab}})\mathrm{d}_v\varphi^i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^i_{ab}}\mathrm{d}_v\varphi^i_b)(dx)^{n-1}_a = \widehat{\chi}^a_A\mathrm{d}_v\varphi^A(dx)^{n-1}_a\,, \quad (1.16)$$

где в данном случае $\widehat{\chi}^a_A \neq 0$ только в случае, когда мультииндекс A пробегает значения (i), $(i{,}a)$ и $(i{,}a{,}b)$. Также здесь для удобства было введено следующее обозначение для базисных элементов горизонтальных дифференциальных форм.

$$(dx)^{n-k}_{a_1\ldots a_k} = \frac{1}{(n-k)!}\varepsilon_{a_1\ldots a_k b_1\ldots b_{n-k}}dx^{b_1}\ldots dx^{b_{n-k}} \quad (1.17)$$

$(n-1{,}1)$-форма $\widehat{\chi}$ называется предсимплектическим потенциалом. При помощи него можно ввести предсимплектическую структуру - $(n-1{,}2)$-форму $\widehat{\omega}$, определённую следующим образом:

$$\widehat{\omega} = \mathrm{d}_v\widehat{\chi} = \widehat{\omega}^a_{AB}\mathrm{d}_v\varphi^A\mathrm{d}_v\varphi^B(dx)^{n-1}_a\,. \quad (1.18)$$

Подставив в определение предсимплектической структуры первую вариационную формулу, можно получить

$$\widehat{\omega} = (\mathrm{d} - \mathrm{d}_h)\widehat{\chi} = \mathrm{d}(\widehat{\chi} + \mathcal{L}) - \mathrm{d}_v\varphi^i E_i\,, \quad (1.19)$$

где второе равенство выполняется благодаря $\mathrm{d}_h\mathcal{L} = 0$, поскольку $\mathcal{L}$ - $(n,0)$-форма.

Пусть ω, χ и l - ограничение на $\mathcal{M}$ $\widehat{\omega}$, $\widehat{\chi}$ и $\mathcal{L}$ соответственно. Ограничив предыдущее выражение $\mathcal{M}$, получим

$$\omega = \mathrm{d}(\chi + l) \tag{1.20}$$

Несложно увидеть, что $\chi + l$, будучи прообразом ω относительно d, является обобщённой формой Пуанкаре-Картана, ограниченной на $\mathcal{M}$.

1.3 Внутреннее действие

Прежде, чем дать определение внутреннему действию, рассмотрим сначала более общую ситуацию. Пусть $F \times X \to X$ - тривиальное расслоение. В силу тривиальности расслоения на алгебре дифференциальных форм можно ввести горизонтальную и вертикальную градуировку. Из этого следует, что и дифференциал де Рама можно представить в виде суммы горизонтального и вертикального дифференциалов $\mathrm{d} = \mathrm{d}_X + \mathrm{d}_F$. Пусть x^a - координатный базис на X, а φ^i - координатный базис на F. Тогда в данных координатах $\mathrm{d}_X = dx^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ и $\mathrm{d}_F = d\varphi^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$. Если на $F \times X \to X$ определены также две формы: $(n-1,2)$-форма $\widetilde{\chi}$ и $(n,0)$-форма $\widetilde{\mathcal{H}}$, то на сечениях $\sigma : X \to F \times X$ можно определить действие следующего вида:

$$S[\sigma] = \int (\sigma^*(\widetilde{\chi}) - \sigma^*(\widetilde{\mathcal{H}})) \tag{1.21}$$

Данное действие называется предсимплектическим или мультисимплектическим. Последнее название связано с тем, что в суммарная градуировка предсимплектического потенциала $\widetilde{\chi}$ равна $n+1$, а не 2. В частном случае вид (1.21) имеют Гамильтоново действие, AKSZ-действие и многие другие.

В координатах φ^i и x^a действие (1.21) может быть переписаным следующим образом:

$$S[\varphi] = \int (d\varphi^i(x)\widetilde{\chi}_i(x,dx,\varphi) - \widetilde{\mathcal{H}}(x,dx,\varphi)) \tag{1.22}$$

Варьируя действие (1.22) по φ^i и вводя $\widetilde{\omega} = \mathrm{d}_F\widetilde{\chi}$, можно получить следующие уравнения движения

$$\widetilde{\omega}_{ij}(x,dx,\varphi(x))d\varphi^j(x) - \partial_i\widetilde{\mathcal{H}}(x,dx,\varphi) = 0 \tag{1.23}$$

Если $\widetilde{\omega}_{ij}$ обратима, можно ввести $Q^j = \widetilde{\omega}^{ij}\partial_i\widetilde{\mathcal{H}}$ и переписать уравнение движения в виде

$$\widetilde{\omega}_{ij}(x,dx,\varphi(x))(d\varphi^j(x) - Q^j(x,dx,\varphi(x))) = 0 \tag{1.24}$$

Ещё одним определением, которое нужно дать перед тем, как перейти ко внутреннему действию, является определение естественной системы.

Определение 1.3.1. *Естественной называется Лагранжева теоретикополевая система, удовлетворяющая трём требованиям:*

1. *Действие данной системы может быть записано в мультисимплектическом виде (возможно, при помощи введения в систему вспомогательных полей).*
2. *Среди уравнений движения системы нет алгебраических соотношений на* φ^i*.*
3. $(n-1,2)$*-форма* $\widetilde{\omega}$ *не выраждена в следующем смысле: условие* $i_V\widetilde{\omega} = 0$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $V = 0$*.*

Последнее условие можно переформулировать следующим эквивалентным способом: действие (1.21) (и, соответственно, следующие из него уравнения движения) не содержат алгебраических (или, иначе говоря, Штюкельберговых) калибровочных симметрий, а именно симметрий вида $\delta\varphi^i(x) = R^i(x,\varphi)\varepsilon(x)$, причём $R^i(x,\varphi)$ такое, что $R^i(x,\varphi)\varepsilon(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon(x) = 0$.

Наконец, перейдём к построению внутреннего дйствия. Пусть имеется сформулированная на языке джетов система PDE $(\mathcal{M}, \widehat{D}_a)$. Пусть также на $\mathcal{M}$ определена предсимплектическая структура ω. В силу точности ω по её определению, $\mathrm{d}_v\omega = 0$. Более того, предположим, что предсимплектическая структура сохраняется, что на данном языке означает выполнение условия $\mathrm{d}_h\omega = 0$. Данное условие сохранения означает существование $(n,0)$-формы l, причём такой, что $\mathrm{d}_h\chi = \mathrm{d}_v l$. Действительно, $\mathrm{d}_h\omega = \mathrm{d}_h\mathrm{d}_v\chi = -\mathrm{d}_v\mathrm{d}_h\chi = 0$, а значит в силу нильпотентности d_v $\mathrm{d}_h\chi$ определена с точностью до добавления произвольной формы $\mathrm{d}_v l$. Из этого следует, что у предсимплектической структуры ω существует прообраз относительно дифференциала d: $\omega = \mathrm{d}(\chi + l)$.

Данное утверждение легко проверить: $\mathrm{d}(\chi + l) = \mathrm{d}_v\chi + \mathrm{d}_h\chi + \mathrm{d}_v l + \mathrm{d}_h l = \omega$. Если χ получено из какого-либо лагранжиана (например, по формуле (1.16)), в качестве l в соответствии с (1.20) можно выбрать ограничение лагранжиана на стационарную поверхность $\mathcal{M}$.

Учитывая, что $\chi + l$ является ограничением на $\mathcal{M}$ формы Пуанкаре-Картана, на сечениях стационарной поверхности $\sigma : X \to \mathcal{M}$ можно построить следующее мультисимплектическое действие:

$$S^C[\sigma^*] = \int \sigma^*(\chi + l) \tag{1.25}$$

Чтобы убедиться, что данное действие является мультисимплектическим, введём координаты x^a и ψ^A на $\mathcal{M}$. Используя данные координаты, можно переписать (1.25) следующим образом:

$$\begin{aligned} S^C[\sigma^*] = \int \sigma^*(\chi^A \mathrm{d}_v \psi^A + l) = \int \sigma^*(\chi^A(\mathrm{d} - \mathrm{d}_h)\psi^A + l) = \\ = \int (\sigma^*(\chi^A \mathrm{d}\psi^A) - \sigma^*(\chi^A \mathrm{d}_h \psi^A - l)) \end{aligned} \tag{1.26}$$

Вводя $(n,0)$-форму $\mathcal{H} = \chi_A \mathrm{d}_h \psi^A - l$, перепишем действие в следующем виде (1.21):

$$S[\sigma^*] = \int \sigma^*(\chi^A \mathrm{d}\psi^A) - \sigma^*(\mathcal{H}) \tag{1.27}$$

Действие (1.25) называется внутренним действием теории. Его преимуществом является тот факт, что оно построено в терминах внутренней геометрии самой стационарной поверхности $\mathcal{M}$: для его построения необходимы только стационарная поверхность $\mathcal{M}$, а также определённые на ней предсимплектическая структура ω и распределение Картана D_a.

Введя обозначение $Q^A(x,dx,\psi(x)) = \sigma^*(\mathrm{d}_h\psi^A)$, легко выписать уравнения движения, следующие из внутреннего действия.

$$\omega_{AB}(x,dx,\psi(x))(d\psi^B(x) - Q^B(x,dx,\psi(x))) = 0 \tag{1.28}$$

Несмотря на то, что стационарная поверхность $\mathcal{M}$ в общем случае бесконечномерна, внутреннее действие (1.25) зависит лишь от конечного набора полей. Чтобы доказать этот факт, предположим, что вектора R_μ формируют базис векторов, лежащих в ядре ω: $\omega_{AB}R^A_\mu = 0$. Данное распределение по своему построению инволютивно, ведь из $i_{R_\mu}\omega = 0$ следует $i_{[R_\mu, R_\nu]}$. Это означает, что как минимум локально можно выбрать новую систему координат (ψ^i, ψ^α) таким образом, чтобы $R_\mu = R^\alpha_\mu \frac{\partial}{\partial \psi^\alpha}$. В этих координатах калибровочные преобразования для полей ψ^x представляются в виде $\delta\psi^i = \varepsilon^i(x)$. Можно выбрать произвольные функции $\varepsilon^i(x)$ и тем самым зафиксировать калибровку таким образом, чтобы занулить все поля $\psi^i(x)$ и таким образом исключить их из действия.

В случае, если (1.25) воспроизводит все уравнения движения исходной системы, соответствующая предсимплектическая структура ω называется полной. В дальнейшем будет показано, что естественная теоретикополевая система всегда приводит к полной предсимплектической структуре. Тем не менее, в теории встречаются системы, не попадающие под данное выше определение естественных. Например, существуют системы, среди уравнений движения которых имеются алгебраические.

1.4 Примеры естественных систем

1.4.1 Гамильтонова механика

В качестве первого, простейшего примера рассмотрим Гамильтонову механику с конечномерным фазовым пространством F (тотальным пространством в таком случае будет $F \times \mathbb{R}^1$), на котором введём координаты $z^a = (x^i, p^i)$. Также мы предположим, что система является консервативной, а связи отсутствуют. Уравнения движения в таком случае будут иметь следующий вид:

$$\dot{z}^a = V^a(z(t), t)\,, \tag{1.29}$$

где точкой обозначена полная производная по времени, а V^a можно трактовать, как координаты некоторого векторного поля $V = V^a \frac{\partial}{\partial z^a}$ на $F \times \mathbb{R}^1$. Введя расслоение джетов $J^\infty(F \times \mathbb{R}^1)$ с определённым на нём горизонтальным дифференциалом $\mathrm{d}_h = dt(\frac{\partial}{\partial t} + z^a_t \frac{\partial}{\partial z^a} + z^a_{tt} \frac{\partial}{\partial z^a_t})$, можно перейти к стационарной поверхности $\mathcal{M}$, горизонтальный дифференциал на которой будет иметь вид

$$\mathrm{d}_h = dt(\frac{\partial}{\partial t} + V^a \frac{\partial}{\partial z^a}) \tag{1.30}$$

Как можно заметить, простота данной задачи заключается также в том, что несмотря на бесконечномерность $J^\infty(F \times \mathbb{R}^1)$, $\mathcal{M}$ оказывается конечномерной. Введём на $\mathcal{M}$ симплектическую структуру $\omega = \omega_{ab}(z) \mathrm{d}_v z^a \mathrm{d}_v z^b$. $\omega_{ab}(z)$, вообще говоря, может зависить и от времени t, но ранее было оговорено, что рассматриваемая механическая система является консервативной. Заметим, что в силу одномерности $X = \mathbb{R}^1$ симплектическая структура ω является вертикальной.

Наконец, введём симплектический потенциал χ через $\omega = \mathrm{d}_v \chi$ и Гамильтониан $H = i_V \chi - l$ (так как V сохраняет симплектическую структуру, $L_V \omega = 0$, откуда при подстановке $\mathrm{d}_h \chi = -\mathrm{d}_v l$ и независимости χ и ω от времени автоматически следует данное выражение) и при помощи них построим внутреннее действие

$$S^C[z^a] = \int dt(\dot{z}^a \chi_a - H)\,, \tag{1.31}$$

Очевидно, что данное действие является стандартным Гамильтоновым действием для механической системы. В силу оговоренного ранее отсутствия у системы связей ω_{ab} обратима, а потому уравнениями движения, следующими из действия, являются (1.29).

1.4.2 Естественная мультисимплектическая система

Рассмотрим более общий пример, затрагививавшийся в обсуждении ранее, а именнно мультисимплектическую систему. Предположим, что рассматриваемая система удовлетворяет всем требованиям определения (1.3.1) и, следовательно, является естественной. Согласно (1.16) выпишем предсимлектический потенциал данной теории на $J^{\infty}(F \times X)$

$$\widehat{\chi} = \bar{\chi}_i \mathrm{d}_v \varphi^i \tag{1.32}$$

В силу определенния естественной системы координаты φ^i на стационарной поверхности остаются независимыми. Из этого следует, что, во-первых, в качестве координат на $\mathcal{M}$ можно выбрать x^a, φ^A, где мультииндекс A включает в себя индексы джетов. Во-вторых, ограничение предсимплектического потенциала на стационарную поверхность не меняет его: $\chi = \bar{\chi}_i \mathrm{d}_v \psi^i$. Также изменений не претерпит и гамильтонниан $\bar{H}$.

$$\mathcal{H} = \bar{\chi}_i \mathrm{d}_h \varphi^i - \mathcal{L}(dx)^n = \bar{\mathcal{H}}\,. \tag{1.33}$$

Из этого следует, что внутреннее действие для рассматриваемой системы имеет вид

$$S[\psi] = \int \big(d\psi^B \bar{\chi}_B(\psi(x),x,dx) - \bar{\mathcal{H}}(\psi(x),x,dx)\big) \tag{1.34}$$

Все остальные поля, порождённые координатами джетов, лежат в ядре предсимплектической структуры $\mathrm{d}_v \chi$ и, соответственно, являются Штюкельберговыми и могут быть исключены выбором калибровки. Таким образом мы приходим к выводу, что внутреннее действие эквивалентно исходному.

1.4.3 Механическая система со связями

Рассмотрим вновь механическую систему, однако пусть теперь в теории присутствуют связи. Иными словами, пусть F является фазовым пространством некоторой Гамильтоновой системы со связями. Динамика подобной системы по определению определяется расширенным Гамильтоновым действием:

$$S[z^a,\lambda_\alpha] = \int dt(\dot{z}^b\chi_b - H - \lambda_\alpha T^\alpha)\,, \tag{1.35}$$

где z^a - координаты фазового пространства, χ_b и H - симплектический потенциал и Гамильтониан, λ_α - множители Лагранжа, а $T^\alpha(z)$ - связи. Скобка Пуассона на F, определяемая симплектической структурой $\omega = \mathrm{d}\chi$, в данном разделе будет обозначаться, как $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}$. Для произвольных функций $f(z)$ и $g(z)$ $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial z^a}\omega^{ab}\frac{\partial f}{\partial z^b}$, где ω^{ab} определяется по симплектической структуре из условия $\omega^{ab}\omega_{bc} = \delta^a_c$.

Для простоты можно предположить, что связи данной системы являются неприводимыми связями (то есть нет вторичных связей) первого рода, то есть на поверхности связи Σ, определяемой условиями $T^\alpha(z) = 0$, $\left\{T^\alpha,T^\beta\right\} = 0$ и $\{T^\alpha,H\} = 0$. Это можно сделать без ограничения общности, поскольку если среди связей есть связи второго рода $T^{\alpha'}$ с соответствующими им множителями Лагранжа $\lambda_{\alpha'}$, можно проварьировать действие (1.35) по $T^{\alpha'}$ и $\lambda_{\alpha'}$ и получить уравнения

$$\begin{aligned} \lambda^{\alpha'} &= \Delta^{\alpha'\beta'}\{T_{\beta'},H\}\ , \\ T^{\alpha'} &= 0\,, \end{aligned} \tag{1.36}$$

где $\Delta^{\alpha'\beta'}$ определяется из условия $\Delta^{\alpha'\beta'}\Delta_{\beta'\gamma'} = \delta^{\alpha'}_{\gamma'}$, $\Delta_{\alpha'\beta'} = \{T_{\alpha'},T_{\beta'}\}\,|_{T^{\alpha'}=0}$ - матрица Дирака. Уравнения (1.36) определяют поверхность связей второго рода Σ'. Данные уравнения являются алгебраическими и могут быть разрешены относительно $T^{\alpha'}$ и $\lambda_{\alpha'}$. Таким образом $T^{\alpha'}$ и $\lambda_{\alpha'}$ являются вспомогательными полями, от которых можно избавиться, подставив решение (1.36) в действие (1.35). В результате вновь получится расширенное Гамильтоново действие с симплектическим потенциалом $\widetilde{\chi} = \chi|_{\Sigma'}$ и Гамильтонианом $\widetilde{H} = H|_{\Sigma'}$. Поскольку Σ' определяется связями второго рода, подобное действие никак не повлияет на ранг соответствующей симплектической структуры.

Для построения внутреннего действия для рассматриваемой теории удобно ввести на фазовом пространстве F особую систему координат: $y^\alpha = T^\alpha$ (таким образом $y^\alpha = 0$ задаёт поверхность связей Σ) и y^i, дополняющие y^α до базиса (то есть набор координат y^i является базисом на Σ), а также соответствующие Лагранжевы множители λ_α. Поскольку уравнения движения выражают $\dot{y}^i$ через y^i, стационарная поверхность $\mathcal{M}$ представляет собой $\Sigma \times \mathbb{R}^1$, координатами на стационарной поверхности являются t, y^i и λ_α.

Несложно убедиться, что предсимплектическим потенциалом и Гамильтонианом, следующим из (1.35), будут $\chi' = \chi'_i(y,t)dy^i = \chi|_{\mathcal{M}}$ и $H' = H|_{\mathcal{M}}$. Тогда внутреннее действие для механики со связями примет вид

$$S^C[y^i,\lambda_\alpha] = \int dt(\dot{y}^i\chi'_i - H')\,. \tag{1.37}$$

Это не общепринятое Гамильтоново действие, поскольку из-за связей первого рода исходная симплектическая структура $\omega = \mathrm{d}\chi$ на F на $\mathcal{M}$ стала вырожденной. Это означает, что векторные поля $R^\alpha = \{T^\alpha, \cdot\,\}|_\Sigma$, являющиеся генераторами калибровочных преобразований, формируют ядро $\omega' = \mathrm{d}\chi'$. Хорошо известно, что если исходная симплектическая структура расширенного Гамильтонового действия ω обратима и T^α регулярны, векторные поля R^α исчерпывают ядро $\omega' = \mathrm{d}\chi'$ (подробно об этом написано в работе [61]). Поскольку $\mathcal{M} = \Sigma \times \mathbb{R}^1$, данные векторные поля исчерпывают ядро симплектической структуры в вертикальном подпространстве.

Согласно описанному в разделе **1.3**, для интерпретации полученного действия необходимо также ограничиться на фиксирующее калибровку подпространство поверхности связи Σ. Если ограничиться лишь локальным анализом, забыв о проблемах, которые могут возникнуть с перспективы глобальной геометрии, это означает ограничение на симплектический фактор поверхности связи. Пусть u^i - координаты на этом симплектическом факторе. Тогда внутреннее действие (в терминах редуцированного фазового пространства) примет вид:

$$S^{C'}[u^i] = \int dt(\chi''_i\dot{u}^i - H'')\,, \tag{1.38}$$

где χ'' и H'' симплектический потенциал и Гамильтониан, ограниченные на фиксирующее калибровку подмногообразие поверхности связей.

Действие в терминах редуцированного может быть получено множеством хорошо известных в литературе способов. Например, можно было бы ввести фиксирующие калибровку условия G_α, такие, что $\{T^\alpha,G_\beta\}$ - обратимая на поверхности связей Σ матрица. В таком случае набор T^α, G_β (в котором и T^α, и G_β понимаются, как связи) является набором связей второго рода, и в таком случае от этих связей можно избавиться описанным выше способом при помощи редуцирования фазового пространства.

Другим способом получить (1.38) является исключение T^α,λ_α, как вспомогательных полей, из действия (1.35), что приводит сразу к действию (1.37). Далее можно заметить, что калибровочные преобразования для z^a, $\delta z^a = \{T^\alpha,z^a\}\,|_\Sigma\varepsilon^\alpha$, следующие из связей первого рода, являются алгебраическими (то есть Штюкельберговыми). Это означает, что данные переменные могут быть зафиксированы (или даже исключены) соответствующим выбором калибровки, в результате чего получится действие (1.38).

То, что рассмотренные выше калибровочные преобразования являются Штюкельберговыми и следовательно соответствующие переменные могут быть исключены исключительно алгебраическими операциями (т.е. процедурой исключения вспомогательных полей), может создать у читателя впечатление, что локально и при соблюдении всех необходимых условий регулярности системы со связями первого рода эквивалентны некалибровочным системам. Однако это особенность исключительно одномерных систем, то есть механики. В общем случае локальная калибровочная теория не эквивалентна некалибровочной (то есть не сводится к некалибровочной при помощи исключения вспомогательных полей). В этом можно убедиться на примере электродинамики, в которой существуют нетривиальные классы БРСТ когомологий в секторе положительной градуировки, что не связано с глобальной геометрией (подробнее об этом можно прочитать в работе [62]). В то же время в системах со связями первого рода в рамках механики нетривиальные БРСТ когомологии могут возникать лишь из-за особенностей глобальной геометрии фазового пространства или поверхности связей или из-за нерегулярности связей.

1.4.4 Уравнение Кортевега-де Фриза

Уравнение Кортевега-де Фриза (КдВ) - это известное нелинейное уравнение третьего порядка в частных производных. Данное уравнение имеет вид:

$$\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0\,, \tag{1.39}$$

где $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ и $\partial_x^n = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$.

Как известно, данное уравнение является нелагранжевым в наивном смысле, поскольку оно содержит производную третьего порядка x, и одновременно с этим в уравнении отсутствует вторая производная по x. Подобное уравнение не может быть получено варьированием по $u(x,t)$ из какого-либо функционала. Тем не менее, лагранжиан для данной теории можно написать в терминах функции $\psi(x,t) = \partial_x u(x,t)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_x\psi\partial_t\psi + (\partial_x\psi)^3 - \frac{1}{2}(\partial_x^2\psi)^2 \tag{1.40}$$

При варьировании данного действия по ψ получается уравнение

$$\partial_t\partial_x\psi + 6\partial_x\psi\partial_x^2\psi + \partial_x^4\psi = 0\,, \tag{1.41}$$

которое совпадает с уравнением КдВ с точностью до замены $\psi(x,t) = \partial_x u(x,t)$.

Для того, чтобы построить внутреннее действие для данной теории, необходимо для начала определить её стационарную поверхность. База расслоения X очевидным образом параметризуется координатами $y^a = (t,x)$, а слой $J^\infty(\mathcal{F})$ параметризуется координатами ψ, ψ_t, ψ_{tt}, …, ψ_x, ψ_{xx}, …. Однако на стационарной поверхности удобно вместо "временной"части координат ψ_t, ψ_{tt}, … использовать их сдвинутые версии: $\widetilde{\psi}_t = \frac{1}{2}\psi_t + \psi_{xxx}$, …. Таким образом координатами стационарной поверхности $\mathcal{M}$ являются y^a, ψ, $\widetilde{\psi}_t$, …, ψ_x, …, в то время как координата $\widetilde{\psi}_{tx}$ и её последующие джеты из данного базиса выпадает в силу уравнений движения.

Далее, использовав $(n,0)$-форму $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\psi_x\psi_t + (\psi_x)^3 - \frac{1}{2}(\psi_{xx})^2$, выпишем предсимплектический потенциал для данной теории и его ограничение на стационарную поверхность $\mathcal{M}$:

$$\widehat{\chi} = \frac{1}{2}\psi_x d_v\psi dx + ((\widetilde{\psi}_t + 3\psi_x^2)d_v\psi - \psi_{xx}d_v\psi_x)dt \tag{1.42}$$

$$\chi = \frac{1}{2}\psi_x d_v \psi dx + ((\widetilde{\psi}_t + 3\psi_x^2) d_v \psi - \psi_{xx} d_v \psi_x) dt \,. \tag{1.43}$$

Несложно убедиться, что ковариантный Гамильтониан для данной теории имеет вид

$$\mathcal{H} = (\frac{1}{2}\psi_x \widetilde{\psi}_t + 2\psi_x^3 + \psi_x \psi_{xxx} - \frac{1}{2}\psi_{xx}^2) d^2 y \,. \tag{1.44}$$

Наконец, можно выписать внутреннее действия для уравнения КдВ:

$$S^C[\psi,\psi_x,\psi_{xx},\widetilde{\psi}_t] = \int d^2 y (\frac{1}{2}\partial_t \psi \psi_x + \partial_x \psi \widetilde{\psi}_t + 3\psi_x^2 \partial_x \psi - \psi_{xx} \partial_x \psi_x - \psi_x \widetilde{\psi}_t - 2\psi_x^3 + \frac{1}{2}\psi_{xx}^2) \,. \tag{1.45}$$

Для того, чтобы убедиться, что внутренее действие (1.45) действительно приводит к уравнениям КдВ, нужно проварьировать это действие по $\widetilde{\psi}_t$, ψ_{xx}, ψ_x и ψ. В результате получатся соответственно уравнения

$$\partial_x \psi - \psi_x = 0 \,, \tag{1.46}$$

$$\psi_{xx} - \partial_x \psi_x = 0 \,, \tag{1.47}$$

$$\frac{1}{2}\partial_t \psi + 6\psi_x \partial_x \psi + \partial_x \psi_{xx} - 6\psi_x^2 - \widetilde{\psi}_t = 0 \,, \tag{1.48}$$

$$\frac{1}{2}\partial_t \psi_x - \partial_x \widetilde{\psi}_t - 6\psi_x \partial_x \psi_x = 0 \,. \tag{1.49}$$

Данные уравнения позволяют исключить переменные ψ_x, ψ_{xx} и $\widetilde{\psi}_t$, в результате чего действие (1.45) сведётся к действию с лагранжианом (1.40). Таким образом полученное внутреннее действие (1.45) является полным.

1.4.5 Метрическая гравитация

Рассмотрим теперь общую задачу о построении действия первого порядка для гравитационного поля на примере действия Эйнштейна-Гильберта. Плотность лагранжиана данного действия имеет вид:

$$S = \int d^n x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) \,, \tag{1.50}$$

где $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta}$ - это стандартным образом определённая кривизна Риччи

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\partial_\alpha \Gamma^\lambda{}_{\beta\lambda} - \frac{1}{2}\partial_\beta \Gamma^\lambda{}_{\alpha\lambda} + \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\Gamma^\lambda{}_{\gamma\lambda} - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma}\,, \tag{1.51}$$

а $\Gamma^\lambda\ {}_{\alpha\beta}$ - символы Кристоффеля (компоненты связности Леви-Чивита), определённые по метрике $g_{\mu\nu}$

$$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\gamma}(\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta})\,. \tag{1.52}$$

Действие (1.50) инвариантно относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\delta g_{\alpha\beta} = \nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)}, \tag{1.53}$$

Круглыми скобками в (1.53) обозначена симметризация по индексам, а ∇_a - ковариантная производная.

$$\nabla_\alpha \xi_\beta = \partial_\alpha \xi_\beta - \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\xi_\gamma \tag{1.54}$$

При калибровочных преобразованиях (1.53) символы Кристоффеля так же преобразуются:

$$\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\rho} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) \tag{1.55}$$

Несложно убедиться, что (1.53) и (1.55) - преобразования метрики и коэффициентов связности при инфинитезимальных диффеоморфизмах.

Варьируя данное действие по $g^{\alpha\beta}$, мы получим уравнения Эйнштейна для вакуума

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 0\,, \tag{1.56}$$

где $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ - скалярная кривизна Риччи.

Действие (1.50) содержит как первые, так и вторые производные от метрического тензора. Для простоты последующих вычислений можно привести данное действие к виду, в котором в нём содержатся лишь первые производные метрического тензора, путём добавления полной производной:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(-\frac{1}{2}g^{\kappa\xi}\partial_\lambda g_{\kappa\xi}g^{\alpha\beta}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} - \partial_\lambda g^{\alpha\beta}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\kappa\xi}\partial_\alpha g_{\kappa\xi}g^{\alpha\beta}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\beta} + \\ + \partial_\alpha g^{\alpha\beta}\Gamma^\lambda{}_{\lambda\beta} + g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\Gamma^\lambda{}_{\gamma\lambda} - g^{\alpha\beta}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma}) \quad (1.57)$$

Первая производная метрики может быть выражена через символы Кристоффеля, а значит и дальнейшие её производные могут быть выражены через символы Кристоффеля и их производные. Таким образом координатами на стационарной поверхности $\mathcal{M}$ удобно выбрать x^μ, $g_{\mu\nu}$, $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\rho\lambda}{}_{\mu\nu}$, ... (стоит отметить, что, хоть метрический тензор и коэффициенты связности - приципиально другой объект по сравнению с координатами на стационарной поверхности $g_{\mu\nu}$, $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, здесь и далее они обозначаются одинаково для того, чтобы не вводить лишние, препятствующие пониманию обозначения).

Наконец, мы можем вычислить форму χ. Так как действие теперь содержит лишь первые производные метрического тензора, в данную форму, как и в предыдущих примерах, войдёт только первое слагаемое из (1.16):

$$\widehat{\chi} = \sqrt{-g}(\Gamma^{\rho\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\Gamma_\lambda{}^{\lambda\nu} - \frac{1}{2}g^{\rho\nu}\Gamma_\lambda{}^{\lambda\mu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma_\lambda{}^{\lambda\rho} - \\ - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho\lambda}{}_\lambda)d_v g_{\mu\nu}(dx)^{d-1}_\rho \quad (1.58)$$

Ограничение данной формы на стационарную поверхность не исключает ни одного слагаемого из предсимплектического потенциала.

$$\chi = \sqrt{-g}(\Gamma^{\rho\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\Gamma_\lambda{}^{\lambda\nu} - \frac{1}{2}g^{\rho\nu}\Gamma_\lambda{}^{\lambda\mu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma_\lambda{}^{\lambda\rho} - \\ - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho\lambda}{}_\lambda)d_v g_{\mu\nu}(dx)^{d-1}_\rho \quad (1.59)$$

Ковариантный гамильтониан имеет вид:

$$\mathcal{H} = \sqrt{-g}(\Gamma^{\rho\mu\nu}\Gamma_{\nu\mu\rho} - \Gamma^{\nu\mu}{}_\mu\Gamma^\lambda{}_{\lambda\nu})(dx)^d \quad (1.60)$$

И наконец мы можем записать внутреннее действие для метрической гравитации:

$$S^C = \int d^dx\sqrt{-g}(\partial_\rho g_{\mu\nu}(\Gamma^{\rho\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\rho\mu}\Gamma_\lambda{}^{\lambda\nu} - \frac{1}{2}g^{\rho\nu}\Gamma_\lambda{}^{\lambda\mu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma_\lambda{}^{\lambda\rho} - \\ - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho\lambda}{}_\lambda) - \Gamma^{\rho\mu\nu}\Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma^{\nu\mu}{}_\mu\Gamma^\lambda{}_{\lambda\nu}) \quad (1.61)$$

Данное действие является действием первого порядка по построению, и потому содержит метрический тензор и символы Кристоффеля, как независимые переменные. По порядку и составу полей оно идентично действию Палатини[20]. Чтобы увидеть это нагляднее, приведём (1.61) к виду действия Палатини. Для этого выделим в нём $g^{\mu\nu}$ в качестве общего множителя. Это можно сделать интегрированием по частям, что эквивалентно выбору другого представителя предсимплектического потенциала χ из класса эквивалентности.

$$S^C = \int d^dx\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\lambda\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} + \Gamma^\gamma{}_{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\gamma\lambda} - \Gamma^\gamma{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\gamma}) \tag{1.62}$$

Легко убедиться, что данное действие также инвариантно относительно инфинитезимальных диффеоморфизмов (1.53) и (1.55), а уравнения движения, которые получаются варьированием (1.62) по $g^{\alpha\beta}$ и $\Gamma_\lambda{}^{\alpha\beta}$ - это (1.56) и (1.52) соответственно. Таким образом мы приходим к выводу, что внутреннее действие (1.62) является полным.

1.4.6 Теория Фронсдала

Рассмотрим более сложный пример - безмассовое поле произвольного целого спина s в произвольной размерности. Данная теория впервые была рассмотрена Фронсдалом [51]. Ранее предсимплектические формулировки данного действия были рассмотрены в работах [41; 44; 63; 64]. Также альтернативная формулировка первого порядка в рамках развёрнутого формализма была получена в работе [65].

Плотность лагранжиана теории Фронсдала выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = (-\frac{1}{2}\partial^\rho\varphi_{\mu(s)}\partial_\rho\varphi^{\mu(s)}+\frac{1}{2}s\partial^\nu\varphi_{\nu\mu(s-1)}\partial_\lambda\varphi^{\lambda\mu(s-1)}+\frac{1}{4}s(s-1)\partial^\rho\varphi^\nu_{\nu\mu(s-2)}\partial^\rho\varphi_\lambda^{\lambda\mu(s-2)}-\\ -\frac{1}{2}s(s-1)\partial^\rho\varphi_\nu^{\nu\mu(s-2)}\partial^\lambda\varphi_{\rho\lambda\mu(s-2)}+\frac{1}{8}s(s-1)(s-2)\partial^\rho\varphi^\nu_{\nu\rho\mu(s-3)}\partial_\lambda\varphi_\tau^{\tau\lambda\mu(s-3)})(dx)^n\,,\end{gathered} \tag{1.63}$$

где для более компактной записи было введено обозначение $\varphi_{\mu(s)}$ для полностью симметричного и дважды бесследового тензора $\varphi_{\mu_1\ldots\mu_s}(x)$ (имеется в виду, что след данного тензора по любым двум индексам не равен 0, но если взять след сразу по двум парам индексам, то получится 0).

Варьируя действие Фронсдала по $\varphi^{\mu(s)}$, получим уравнение Фронсдала

$$F_{\mu(s)} - \frac{1}{2}\eta_{(\mu\mu}F^{\nu}_{\nu\mu(s-2)\,)} = 0\,, \tag{1.64}$$

где $F_{\mu(s)}$ - тензор Фронсдала.

$$F_{\mu(s)} = \Box\varphi_{\mu(s)} - \partial_{(\mu}\partial^{\nu}\varphi_{\nu\mu(s-1)\,)} + \partial_{(\mu}\partial_{\mu}\varphi^{\nu}_{\nu\mu(s-2)\,)} \tag{1.65}$$

Теория Фронсдала является калибровочной. Её калибровочные преобразования имеют вид

$$\delta\varphi_{\mu(s)} = \partial_{(\mu}\lambda_{\mu(s-1)\,)} \tag{1.66}$$

В качестве координат стационарной поверхности $\mathcal{M}$ удобно выбрать x^{μ}, $\varphi_{\mu(s)}$, $\varphi_{\mu(s)|\rho}$, $\varphi_{\mu(s)|\rho\lambda}$, где чертой отделены индексы джетов. Так как уравнения движения (1.64) не накладывают ограничения на координаты нулевого и первого джетов, а предсимплектический потенциал $\widehat{\chi}$ не содержит координат из джетов выше первого, удобно выписать сразу ограничение $\widehat{\chi}$ на стационарную поверхность.

$$\begin{aligned}\chi = (-{\varphi_{\mu(s)}}^{|\rho} + s{\varphi_{\nu\mu(s-1)}}^{|\nu}\eta^{\rho}_{\mu} + \frac{1}{2}s(s-1){\varphi^{\nu}_{\nu\mu(s-2)}}^{|\rho}\eta_{\mu\mu} - \\ - \frac{1}{2}s(s-1)\varphi^{\nu}_{\nu\mu(s-2)|\mu}\eta^{\rho}_{\mu} - \frac{1}{2}s(s-1){\varphi^{\rho}_{\lambda\mu(s-2)}}^{|\lambda}\eta_{\mu\mu} + \\ + \frac{1}{4}s(s-2)(s-3)\varphi^{\nu\lambda}_{\nu\mu(s-3)|\lambda}\eta_{\mu\mu}\eta^{\rho}_{\mu})d_v\varphi^{\mu(s)}(dx)^{n-1}_{\rho}\end{aligned} \tag{1.67}$$

По данному предсимплектическому потенциалу можно построить ковариантный Гамильтониан.

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = (-\tfrac{1}{2}\varphi^{\mu(s)|\rho}\varphi_{\mu(s)|\rho} + \tfrac{s}{2}\varphi^{\mu(s-1)|\nu}_{\nu}\varphi^{\lambda}_{\mu(s-1)|\lambda} + \frac{s(s-1)}{4}\varphi^{\nu\mu(s-2)|\rho}_{\nu}\varphi^{\lambda}_{\lambda\mu(s-2)|\rho} - \\ - \frac{s(s-1)}{2}\varphi^{\nu\mu(s-2)|\rho}_{\nu}\varphi^{\lambda}_{\rho\mu(s-2)|\lambda} + \frac{s(s-1)(s-2)}{8}\varphi^{\nu\rho}_{\nu\mu(s-3)|\rho}\varphi^{\tau\mu(s-3)|\lambda}_{\tau\lambda})(dx)^n\end{aligned} \tag{1.68}$$

Наконец, можно выписать внутреннее действие для теории Фронсдала

$$
\begin{aligned}
S^{C}[\varphi^{\mu(s)}, {\varphi^{\mu(s)}}_{|\rho}] = \int d^n x(-\partial^{\rho}\varphi^{\mu(s)}\varphi_{\mu(s)|\rho} + s\partial_{\nu}\varphi^{\nu\mu(s-1)}\varphi^{\lambda}_{\mu(s-1)|\lambda} + \\
+ \frac{s(s-1)}{2}\partial_{\rho}\varphi^{\nu}_{\nu\mu(s-2)}\varphi_{\lambda}^{\lambda\mu(s-2)|\rho} - \frac{s(s-1)}{2}\partial^{\lambda}\varphi_{\rho\lambda\mu(s-2)}\varphi_{\nu}^{\nu\mu(s-2)|\rho} - \\
- \frac{s(s-1)}{2}\partial_{\rho}\varphi^{\nu}_{\nu\mu(s-2)}\varphi_{\lambda}^{\rho\mu(s-2)|\lambda} + \frac{s(s-1)(s-2)}{4}\partial^{\rho}\varphi^{\nu}_{\nu\rho\mu(s-3)}\varphi_{\tau\lambda}^{\tau\mu(s-3)|\lambda} - \mathcal{H})
\end{aligned}
\tag{1.69}
$$

Данное действие инвариантно относительно следующих калибровочных преобразований:

$$
\delta\varphi_{\mu(s)} = \partial_{(\mu}\lambda_{\mu(s-1)\,)}\,, \qquad \delta\varphi_{\mu(s)|\rho} = \partial_{\rho}\partial_{(\mu}\lambda_{\mu(s-1)\,)}\,. \tag{1.70}
$$

Для того, чтобы проверить, что внутреннее действие (1.69) эквивалентно исходному, проварьируем данное действие по ${\varphi^{\rho}}_{\mu(s)}$.

$$
\begin{aligned}
- \partial^{\rho}\varphi_{\mu(s)} + \eta^{\rho}_{(\mu}\partial^{\nu}\varphi_{\nu\mu(s-1)\,)} + \eta_{(\mu\mu}\partial^{\rho}\varphi^{\nu}_{\nu\mu(s-2)\,)} - \eta_{(\mu\mu}\partial^{\lambda}\varphi^{\rho}_{\lambda\mu(s-2)\,)} - \\
- \eta^{\rho}_{(\mu}\partial_{\mu}\varphi^{\nu}_{\nu\mu(s-2)\,)} + \frac{1}{2}\eta^{\rho}_{(\mu}\eta_{\mu\mu}\partial^{\lambda}\varphi^{\nu}_{\nu\lambda\mu(s-3)\,)} + {\varphi_{\mu(s)}}^{|\rho} - {\eta^{\rho}_{(\mu}\varphi_{\lambda\mu(s-1)\,)}}^{|\lambda} - \\
- {\eta_{(\mu\mu}\varphi^{\lambda}_{\lambda\mu(s-2)\,)}}^{|\rho} + {\eta_{(\mu\mu}\varphi^{\rho}_{\lambda\mu(s-2)\,)}}^{|\lambda} + \eta^{\rho}_{(\mu}\varphi^{\nu}_{\nu\mu(s-2)|\mu\,)} - \\
- \frac{1}{2}{\eta^{\rho}_{(\mu}\eta_{\mu\mu}\varphi^{\tau}_{\tau\lambda\mu(s-3)\,)}}^{|\lambda} = 0
\end{aligned}
\tag{1.71}
$$

Беря различные следы от данного уравнения и подставляя их него, не сложно убедиться в верности равенства $\partial^{\rho}\varphi_{\mu(s)} = {\varphi_{\mu(s)}}^{|\rho}$. Однако в силу громоздкости данной процедуры она будет опущена. Подставляя же $\partial^{\rho}\varphi_{\mu(s)} = {\varphi_{\mu(s)}}^{|\rho}$ обратно в действие (1.69), получим исходное действие Фронсдала. Наконец, интересно отметить, что действие (1.69) можно интерпретировать, как расширение линеаризованного действия Палатини на случай произвольного спина.

1.4.7 Массивный спин 1

Рассмотрим ещё одну теорию, не являющуюся Лагранжевой в наивном смысле - массивный спин 1. Уравнения движения данной теории имеют вид

$$\begin{cases} (\Box - m^2)A^\nu = 0 \\ \partial_\nu A^\nu = 0 \end{cases}$$

Действительно, в данной системе имеется $n+1$ уравнений (n - размерность X) на n полей $A^\nu(x)$, а значит данная система на первый взгляд не может быть получена варьированием какого-либо функционала по A^ν. Тем не менее, данная система уравнений всё же может быть получена из действия

$$S[A^\nu] = \int d^n x(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu)\,, \tag{1.72}$$

где $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Варьируя данное действие по A_ν, получим

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - m^2 A^\nu = 0 \tag{1.73}$$

Подействовав на данное уравнение оператором ∂_ν, получим уравнение второе уравнение из (1.72): $\partial_\nu A^\nu = 0$, а его подстановка в (1.73) приводит (1.73) к виду первого уравнения (1.72).

Несмотря на наличие у данной теории дифференциальных следствий низшего порядка, данная теория тем не менее является есстественной, ведь эти следствия не накладывают никаких ограничений на сами поля A^ν. Поэтому в качестве координнат на стаионарной поверхности $\mathcal{M}$ удобно выбрать x^μ, A^μ, $F^{\mu\nu}$, $S'^{\mu\nu}$, ..., где $F^{\mu\nu}$ и $S^{\mu\nu}$ антисимметричная и симметричная компоненты $A^{\mu|\nu}$ соответственно, а штрих обозначает бесследовость.

Как и ранее, можн вычислить предсимлектический потенциал, используя (1.16).

$$\widehat{\chi} = -\mathrm{d}_v A_\mu F^{\nu\mu}(dx)^{d-1}_\nu \tag{1.74}$$

Ограничение предсимплектического потенциала на стационарную поверхность не изменяет его.

$$\chi = -\mathrm{d}_v A_\mu F^{\nu\mu}(dx)^{d-1}_\nu \tag{1.75}$$

По стандартной процедуре можно выписать ковариантный Гамильтониан:

$$\mathcal{H} = (-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu)(dx)^n \tag{1.76}$$

И, наконец, внутреннее действие для массивной теории спина 1 имеет вид

$$S^C = \int d^d x(-\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu) \tag{1.77}$$

Несложно убедиться в том, что данное действие эквивалентно исходному. Действительно, проварьировав (1.77) по $F_{\mu\nu}$, получим $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Подстановка этого результата обратно в (1.77) приводит внутреннее действие к исходному.

1.5 Массивный спин 2

Перейдём к рассмотрению не являющейся в силу определения (1.3.1) естественной системы: массивной теории спина 2 на пространстве Минковского. Уравнениями движения данной теории является следующая система PDE на симметричное бесследовое поле $\varphi_{\mu\nu}$

$$\begin{cases} (\Box - m^2)\varphi_{\mu\nu} = 0 \\ \partial^\mu \varphi_{\mu\nu} = 0 \end{cases} \tag{1.78}$$

Как и в предыдущем случае массивной теории спина 1, уравнений в системе массивной теории спина 2 больше, чем переменных, а потому на первый взгляд теория не является Лагранжевой. Тем не менее, различие заключается в том, что действие для этой теории не может быть написано в терминах симметричного бесследового поля $\varphi_{\mu\nu}$. Решение данной проблемы было впервые описано в известной работе [4] Маркусом Фирцем и Вольфгангом Паули, которые предложили использовать для написания действия вместе с полем $\varphi_{\mu\nu}$ вспомогательное скалярное поле, которое можно интерпретировать, как след $\varphi_{\mu\nu}$. Действие, предложенное Фирцем и Паули, имеет вид

$$S[\varphi_{\mu\nu}] = \int d^n x(-\frac{1}{2}\partial_\lambda \varphi^{\mu\nu}\partial^\lambda \varphi_{\mu\nu} + \partial^\mu \varphi_{\mu\nu}\partial_\lambda \varphi^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi^\nu_\nu \partial^\mu \varphi^\lambda_\lambda - \partial^\lambda \varphi_{\lambda\mu}\partial^\mu \varphi^\nu_\nu - \\ - \frac{1}{2}m^2(\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu} - \varphi^\mu_\mu \varphi^\nu_\nu)) \tag{1.79}$$

Для того, чтобы понять, как из уравнений в итоге исчезает вспомогательное скалярное поле, а данное действие приводит к системе (1.78), проварьируем действие (1.79) по полю $\varphi_{\mu\nu}$.

$$(\Box - m^2)\varphi_{\alpha\beta} - (\Box - m^2)\varphi^{\tau}_{\tau}\eta_{\alpha\beta} - \\ - \partial_\alpha\partial^\gamma\varphi_{\gamma\beta} - \partial_\beta\partial^\gamma\varphi_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha\partial_\beta\varphi^{\gamma}_{\gamma} + \partial_\tau\partial_\rho\varphi^{\tau\rho}\eta_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.80)$$

Данное уравнение, как и в случае массивного спина 1, имеет дифференциальные следствия низшего порядка. Действительно, свернув данное уравнение с метрическим тензором $\eta^{\alpha\beta}$, а также подействовав на (1.80) ∂^β и $\partial^\alpha\partial^\beta$, получим, соответственно 3 условия.

$$(2-n)(\partial_\gamma\partial^\gamma\varphi^{\alpha}_{\alpha} - \partial_\alpha\partial_\beta\varphi^{\alpha\beta}) + (n-1)m^2\varphi^{\alpha}_{\alpha} = 0\,, \tag{1.81}$$

$$\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta} - \partial_\alpha\varphi^{\beta}_{\beta} = 0\,, \tag{1.82}$$

$$\partial^\alpha\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta} - \partial^\alpha\partial_\alpha\varphi^{\beta}_{\beta} = 0 \tag{1.83}$$

Из уравнений (1.81) и (1.83) следует, что $\varphi^{\beta}_{\beta} = 0$. А при подстановке этого результата в (1.82), получим $\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta} = 0$ - второе уравнение системы (1.78). Наконец, подставив $\varphi^{\beta}_{\beta} = 0$ и $\partial^\beta\varphi_{\alpha\beta} = 0$ в уравнение (1.80), получим, что все слагаемые, кроме первых двух, занулятся, а значит воспроизведётся первое уравнение системы (1.78).

Теперь можно перейти к построению внутреннего действия для данной теории. Пусть x^a, $\phi_{\mu\nu}$, $\phi_{\mu\nu|\lambda}$, ... - координаты на расслоении джетов $J^\infty(F \times X)$. Обозначим за φ^A ограничене координат φ^A на стационарную поверхность $\mathcal{M}$. Тогда координатамии на $\mathcal{M}$ будут x^a, $\varphi_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu|\lambda}$, ..., где в силу уравнений движения (1.78) все координаты φ^A будут полностью бесследовыми в отличие от координат ϕ^A.

Как и ранее, вычислим предсимплектическй потенциал $\widehat{\chi}$..

$$\widehat{\chi} = \mathrm{d}_v\phi^{\mu\nu}(-\phi_{\mu\nu}{}^{|\lambda} + 2\phi_{\rho\nu}{}^{|\rho}\eta^{\lambda}_{\mu} + \eta_{\mu\nu}\phi^{\rho|\lambda}_{\rho} - \frac{1}{2}\phi^{\rho}_{\rho|\nu}\eta^{\lambda}_{\mu} - \frac{1}{2}\phi^{\rho}_{\rho|\mu}\eta^{\lambda}_{\nu} - \eta_{\mu\nu}\phi^{\rho\lambda}{}_{|\rho})(dx)^{n-1}_{\lambda} \tag{1.84}$$

При ограничении на стационарную поверхность большая часть слагаемых в предсимплектическом потениале зануляется.

$$\chi = -\mathrm{d}_v\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}{}^{|\lambda}(dx)^{n-1}_{\lambda}\,. \tag{1.85}$$

При построении ковариантного Гамильтониана все следовые слагаемые из $\mathcal{L}|\mathcal{M}$ также исчезнут.

$$\mathcal{H} = (-\frac{1}{2}\varphi^{\mu\nu}{}_{|\lambda}\varphi_{\mu\nu}{}^{|\lambda} + \frac{1}{2}m^2\varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu})(dx)^n \tag{1.86}$$

Такм образом внутреннее действие для массивной теории спина 2 имеет вид

$$S^C = \int d^nx(-\partial_\gamma\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}{}^{|\gamma} + \frac{1}{2}\varphi^{\alpha\beta}{}_{|\gamma}\varphi_{\alpha\beta}{}^{|\gamma} - \frac{1}{2}m^2\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}) \tag{1.87}$$

Проварьировав данное действие по $\varphi_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu}{}^{|\lambda}$, получим соответственно

$$\varphi^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} = \partial_\gamma\varphi^{\alpha\beta} - \frac{n}{n^2+n-2}(\partial_\lambda\varphi^{\lambda\beta}\eta^\alpha_\gamma + \partial_\lambda\varphi^{\lambda\alpha}\eta^\beta_\gamma) + \frac{2}{n^2+n-2}\partial^\lambda\varphi_{\lambda\gamma}\eta^{\alpha\beta} \tag{1.88}$$

$$\partial^\gamma\varphi^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} - m^2\varphi^{\alpha\beta} = 0\,. \tag{1.89}$$

Наконе, подстановкой (1.88) в (1.89) получается следующее уравнение:

$$\partial^\lambda\partial_\lambda\varphi^{\mu\nu} - \frac{n}{n^2+n-2}(\partial^\mu\partial_\lambda\varphi^{\lambda\nu} + \partial^\nu\partial_\lambda\varphi^{\lambda\mu}) + \frac{2}{n^2+n-2}\partial^\gamma\partial^\lambda\varphi_{\lambda\gamma}\eta^{\mu\nu} - \\ - m^2\varphi^{\mu\nu} = 0 \tag{1.90}$$

Уравнение (1.90) является по своей сути уравнением Клейна-Гордона на бездивергентную часть поля $\varphi_{\mu\nu}(x)$. Тем не менее, само уравнение $\partial^\mu\varphi_{\mu\nu} = 0$ никаким образом не следует из действия (1.87). Таким образом соответствующая предсимплектическая структура ω не является полной. Иначе говоря, набора $(\mathcal{M},D_a,\omega)$ недостаточно для того, чтобы восстановиить полную Лагранжеву формулировку массивной теори спина 2, а значит можно предположить, что для построения Лагранжевой формулировки данной теории необходимо ввести дополнительные геометрические структуры, например, расширив стационарную поверхность. Именно построению минимального расширения стационарной поверхности и, как следствие, внутреннего действия будет посвящён следующий раздел.

1.6 Минимальное мультисимплектическое действие

Зададимся вопросом о минимальном расширении формулировки первого порядка для случая массивного поля спина 2. Используем в качестве отправной точки так называемое Parent-действие, которое можно интерпретировать, как многомерное расширения действия Остроградского. Данный выбор обусловлен тем, что Parent-действие имеет ту же мультисимплектическую структуру, что и внутреннее действие, однако в отличие от последнего оно не является минимальным. Пусть для простоты, как и в случае с формулой (1.16), $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi^i, \varphi^i_\alpha)$. В таком случае Parent действие имеет следующий вид:

$$S^P[\varphi,\varphi_\alpha,\varphi_{\alpha\beta},\pi_i^{|\alpha},\pi_i^{|\alpha\beta}] = \int d^n x(\mathcal{L}-\pi_i^{|\alpha}(\partial_\alpha\varphi^i-\varphi^i_{|\alpha})-\pi_i^{|\alpha\beta}(\partial_\alpha\varphi^i_{|\beta}-\varphi^i_{|\alpha\beta})) \quad (1.91)$$

Parent-действие, как и внутренее действие, является частным случаем мультисимплектического действия. Действительно, вводя обозначения

$$\overline{\chi} = \pi_i^{|\alpha} d_F\varphi^i (dx)^{n-1}_\alpha \quad (1.92)$$

и

$$\overline{\mathcal{H}} = \mathrm{d}_h\Psi^i\overline{\chi}_i - \mathcal{L}(dx)^n = (\pi_i^{|\alpha}\varphi^i_{|\alpha} - \mathcal{L})(dx)^n\,, \quad (1.93)$$

Можно переписать действие (1.91) в следующем виде:

$$S^P = \int(\mathrm{d}\Psi^i\overline{\chi}_i - \overline{\mathcal{H}})\,. \quad (1.94)$$

По своей конструкции Parent-действие является переопределённым - оно содержит большое количество вспомогательных полей. Зачастую можно исключить часть этих полей, но при этом остаться в рамках мультисимплектического формализма. Рассмотрим это для начала на простом примере естественной системы - массивного спина 1. Для данной системы Parent-действие можно записать в виде

$$S^P[A_\mu,A_{\mu|\nu},\pi^{\mu\nu}] = \int d^d x(-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \pi^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - A_{\mu|\nu})) \quad (1.95)$$

Здесь $F_{\mu\nu}$ - антисимметричная комонента $A_{\mu|\nu}$. Варьируя данное действие по $A_{\alpha|\beta}$, легко получить

$$\pi^{\alpha\beta} = -F^{\alpha\beta} \tag{1.96}$$

Подставив это уравнение обратно в Parent-действие, получим

$$S^P[A_\mu,\pi^{\mu\nu}] = \int d^dx(-\frac{1}{4}\pi_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}\pi^{\mu\nu}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)) \tag{1.97}$$

Для удобства интерпретации удобно вновь воспользоваться (1.96), но уже в качестве замены переменной. Тогда итоговое действиие, а именно

$$S^P[A_\mu,F^{\mu\nu}] = \int d^dx(-\frac{1}{2}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A^\nu A_\nu)\,, \tag{1.98}$$

в точности совпадёт со внутренним действием для массивной теории спина 1 (1.77).

Теперь перейдём к Parent-действию для массиивной теории спина 2. Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S^P = \int d^nx(-\frac{1}{2}\phi_{\alpha\beta|\gamma}\phi^{\alpha\beta|\gamma} + \phi_{\alpha\beta}{}^{|\alpha}\phi^{\gamma\beta}{}_{|\gamma} + \frac{1}{2}\phi_\alpha^{\alpha|\gamma}\phi_{\beta|\gamma}^\beta - \phi^{\gamma\beta}{}_{|\gamma}\phi_{\alpha|\beta}^\alpha - \\ - \frac{1}{2}m^2(\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta} - \phi_\alpha^\alpha\phi_\beta^\beta) + \pi_{\alpha\beta|\gamma}(\partial^\gamma\phi^{\alpha\beta} - \phi^{\alpha\beta|\gamma}))\,. \end{aligned} \tag{1.99}$$

Для того, чтобы, как и в предыдущем примере массивного спина 1, избавиться от лишних (в смысле построения мультисимплектической формулировки) вспомогательных полей, проварьируем данное действие по $\phi^{\mu\nu}{}_{|\lambda}$.

$$\pi_{\mu\nu}{}^{|\lambda} = -\phi_{\nu\mu}{}^{|\lambda} + \phi_{\gamma\mu}{}^{|\gamma}\eta_\nu^\lambda + \phi_{\gamma\nu}{}^{|\gamma}\eta_\mu^\lambda + \phi_\gamma^{\gamma|\lambda}\eta_{\mu\nu} - \phi^{\gamma\lambda}{}_{|\gamma}\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\phi_{\gamma|\mu}^\gamma\eta_\nu^\lambda - \frac{1}{2}\phi_{\gamma|\nu}^\gamma\eta_\mu^\lambda\,. \tag{1.100}$$

Данное уравнение может быть решено относительно $\phi_{\mu\nu}{}^{|\lambda}$. Действительно, можно заметить, что при взятии следов (1.100) получаются выражения

$$\pi_\mu^{\mu|\lambda} = (n-2)(\phi_\mu^{\mu|\lambda} - \phi^{\mu\lambda}{}_{|\mu}) \tag{1.101}$$

и

$$\pi^{\mu\lambda}{}_{|\mu} = (1-n)(\frac{1}{2}\phi_{\mu}^{\mu|\lambda} - \phi^{\mu\lambda}{}_{|\mu}) \qquad (1.102)$$

Подстановка этих выражений обратно в уравнение (1.100) даёт

$$\phi_{\mu\nu}{}^{|\lambda} = -\pi_{\nu\mu}{}^{|\lambda} + \frac{1}{n-1}\pi_{\gamma\mu}{}^{|\gamma}\eta_{\nu}^{\lambda} + \frac{1}{n-1}\pi_{\gamma\nu}{}^{|\gamma}\eta_{\mu}^{\lambda} + \frac{1}{n-2}\pi_{\gamma}^{\gamma|\lambda}\eta_{\mu\nu}\,. \qquad (1.103)$$

Таким образом поле $\phi_{\mu\nu}{}^{|\lambda}$ может быть исключено из действия (1.99), и мультисимплектическое действие принимает вид

$$S = \int d^n x(-\frac{1}{2}\pi_{\alpha\beta|\gamma}\pi^{\alpha\beta|\gamma} - \frac{1}{n-1}\pi_{\alpha\beta}{}^{|\alpha}\pi^{\gamma\beta}{}_{|\gamma} + \frac{1}{2(n-2)^2}\pi_{\alpha}^{\alpha|\gamma}\pi_{\beta|\gamma}^{\beta} - \\ - \frac{1}{2}m^2(\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta} - \phi_{\alpha}^{\alpha}\phi_{\beta}^{\beta}) + \pi_{\alpha\beta|\gamma}\partial^{\gamma}\phi^{\alpha\beta})\,. \qquad (1.104)$$

Для перехода действия к более привычному виду можно воспользоваться (1.100), как заменой переменных от $\pi_{\mu\nu|\lambda}$ к $\pi_{\mu\nu|\lambda}$. Тогда действие примет вид

$$S = \int d^n x(-\phi^{\mu\nu|\lambda}\partial_{\lambda}\phi_{\mu\nu} + 2\phi^{\lambda\mu}{}_{|\lambda}\partial^{\nu}\phi_{\nu\mu} + \phi_{\mu}^{\mu|\lambda}\partial_{\lambda}\phi_{\nu}^{\nu} - \phi^{\lambda\mu}{}_{|\lambda}\partial_{\mu}\phi_{\nu}^{\nu} - \phi_{\mu}^{\mu|\lambda}\partial^{\nu}\phi_{\nu\lambda} + \\ + \frac{1}{2}\phi_{\alpha\beta|\gamma}\phi^{\alpha\beta|\gamma} - \phi_{\alpha\beta}{}^{|\alpha}\phi^{\gamma\beta}{}_{|\gamma} - \frac{1}{2}\phi_{\alpha}^{\alpha|\gamma}\phi_{\beta|\gamma}^{\beta} + \phi^{\gamma\beta}{}_{|\gamma}\phi_{\alpha|\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}m^2(\phi_{\alpha\beta}\phi^{\alpha\beta} - \phi_{\alpha}^{\alpha}\phi_{\beta}^{\beta})) \qquad (1.105)$$

Интересно отметить, что что предел $m \to 0$ действия (1.105) совпадает с частным случаем $s = 0$ действия (1.69). Также безмассовый предел (1.105) совпадает и с результатом линеаризации действия (1.62). Для того, чтобы убедиться, что действие (1.105) воспроизводит все уравнения движения, проварьируем данное действие по $\phi_{\alpha\beta}{}^{|\gamma}$ и $\phi_{\alpha\beta}$, что даст соответственно

$$-\partial_{\gamma}\phi^{\alpha\beta} + \partial_{\lambda}\phi^{\lambda\beta}\eta_{\gamma}^{\alpha} + \partial_{\lambda}\phi^{\lambda\alpha}\eta_{\gamma}^{\beta} + \partial_{\gamma}\phi_{\lambda}^{\lambda}\eta^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\partial^{\beta}\phi_{\lambda}^{\lambda}\eta_{\gamma}^{\alpha} + \partial^{\alpha}\phi_{\lambda}^{\lambda}\eta_{\gamma}^{\beta}) - \\ - \partial^{\lambda}\phi_{\lambda\gamma}\eta^{\alpha\beta} + \phi^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} - \phi^{\lambda\beta}{}_{|\lambda}\eta_{\gamma}^{\alpha} - \phi^{\lambda\alpha}{}_{|\lambda}\eta_{\gamma}^{\beta} - \phi_{\lambda|\gamma}^{\lambda}\eta^{\alpha\beta} + \\ + \frac{1}{2}(\phi_{\lambda}^{\lambda|\beta}\eta_{\gamma}^{\alpha} + \phi_{\lambda}^{\lambda|\alpha}\eta_{\gamma}^{\beta}) + \phi_{\lambda\gamma}{}^{|\lambda}\eta^{\alpha\beta} = 0\,, \qquad (1.106)$$

и

$$\partial^{\gamma}\phi^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} - \partial^{\alpha}\phi^{\lambda\beta}{}_{|\lambda} - \partial^{\beta}\phi^{\lambda\alpha}{}_{|\lambda} - \partial^{\gamma}\phi^{\lambda}_{\lambda|\gamma}\eta^{\alpha\beta} + \partial_{\gamma}\phi^{\lambda\gamma}{}_{|\lambda}\eta^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\partial^{\alpha}\phi^{\lambda|\beta}_{\lambda} + \partial^{\beta}\phi^{\lambda|\alpha}_{\lambda}) - \\ - m^2\phi^{\alpha\beta} + m^2\phi^{\gamma}_{\gamma}\eta^{\alpha\beta} = 0 \quad (1.107)$$

При взятии дивергенции (1.106) и подстановке результата в (1.107) получится уравнение (1.80), которое обладает обсуждавшимися ранее дифференциальными следствиями низшего порядка, а следовательно и система уравнений (1.106) и (1.107) обладают такими же дифференциальными следствиями.

Чтобы сравнить внутреннее действие (1.87) с полученным мультисимплектическим расширением, полезно сравнить их в одних и тех же координатах. Для этого введём для следов $\phi_{\mu\nu}$ и $\phi_{\mu\nu|\lambda}$ новые обозначения $\phi^{\lambda}_{\lambda} = \rho$, $\phi^{\lambda\mu}{}_{|\lambda} = \psi^{\mu}$ и $\phi^{\lambda}_{\lambda|\mu} = \xi_{\mu}$, а также введём полностью бесследовые компоненты $\phi_{\mu\nu}$ и $\phi_{\mu\nu|\lambda}$ - $\varphi_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu|\lambda}$ соответственно. Тогда замена переменных от $\phi_{\mu\nu}$ и $\phi_{\mu\nu|\lambda}$ к новым переменным будет иметь вид $\phi_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{n}\eta_{\mu\nu}\rho$ и

$$\phi^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} = \varphi^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} + \frac{n}{n^2+n-2}(\psi^{\alpha}\eta^{\beta}_{\gamma} + \psi^{\beta}\eta^{\alpha}_{\gamma}) - \frac{2}{n^2+n-2}\psi_{\gamma}\eta^{\alpha\beta} - \\ - \frac{1}{n^2+n-2}(\xi^{\alpha}\eta^{\beta}_{\gamma} + \xi^{\beta}\eta^{\alpha}_{\gamma}) + \frac{n+1}{n^2+n-2}\xi_{\gamma}\eta^{\alpha\beta} \quad (1.108)$$

Действие (1.105) в переменных ψ_{μ}, ξ_{μ}, ρ $\varphi_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu|\lambda}$ будет иметь следующий вид:

$$S = \int d^n x(-\varphi^{\alpha\beta|\gamma}\partial_{\gamma}\varphi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varphi^{\alpha\beta|\gamma}\varphi_{\alpha\beta|\gamma} - \frac{1}{2}m^2\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} + \\ + \frac{2(n^2-2)}{n^2+n-2}\psi^{\beta}\partial^{\gamma}\varphi_{\gamma\beta} - \frac{n^2+n-4}{n^2+n-2}\xi^{\beta}\partial^{\gamma}\varphi_{\gamma\beta} + \frac{n-2}{n}\xi_{\gamma}\partial^{\gamma}\rho - \frac{n-2}{n}\psi_{\gamma}\partial^{\gamma}\rho - \\ - \frac{n^2-2}{n^2+n-2}\psi^{\alpha}\psi_{\alpha} - \frac{n^2-3}{2(n^2+n-2)}\xi^{\alpha}\xi_{\alpha} + \frac{n^2+n-4}{n^2+n-2}\psi^{\alpha}\xi_{\alpha} + \frac{1}{2}m^2\frac{n-1}{n}\rho^2) \\ (1.109)$$

В данных переменных видно, что первые 3 слагаемых в действии (1.109) - это внутреннее действие (1.87) для массивного спина 2. Таким образом минимальным расширением стационарной поверхности в случае массивной теории спина 2 является добавлениие к ней координат ψ_{μ} и ξ_{μ}, соответствующих дивергенции и градиенту поля $\phi_{\mu\nu}(x)$, а также координаты ρ, соответствующей следу $\phi_{\mu\nu}(x)$.

Наконец, интересным замечанием также является то, что (1.109) несложно переписать в форме действия Сина-Хагена. Для этого в (1.109) сделаем замену $\psi^\mu \to \psi^\mu - \frac{1}{n}\xi^\mu$. В результате получим действие

$$\begin{aligned}S = \int d^n x(&-\varphi^{\alpha\beta|\gamma}\partial_\gamma\varphi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\varphi^{\alpha\beta|\gamma}\varphi_{\alpha\beta|\gamma} - \frac{1}{2}m^2\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} + \\ &+ 2\frac{n^2-2}{n^2+n-2}\psi^\beta\partial^\gamma\varphi_{\gamma\beta} - \frac{n-2}{n}\xi^\beta\partial^\gamma\varphi_{\gamma\beta} + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\xi_\gamma\partial^\gamma\rho - \frac{n-2}{n}\psi_\gamma\partial^\gamma\rho - \\ &- \frac{n^2-2}{n^2+n-2}\psi^\alpha\psi_\alpha - \frac{1}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\xi^\alpha\xi_\alpha + \frac{n-2}{n}\psi^\alpha\xi_\alpha + \frac{1}{2}m^2\frac{n-1}{n}\rho^2)\end{aligned} \tag{1.110}$$

Проварьировав данное действие по ψ^α и ξ^α, получим уравнения

$$-2\frac{n^2-2}{n^2+n-2}\psi_\alpha + \frac{n-2}{n}\xi_\alpha + 2\frac{n^2-2}{n^2+n-2}\partial^\gamma\varphi_{\gamma\alpha} - \frac{n-2}{n}\partial_\alpha\rho = 0 \tag{1.111}$$

и

$$-\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\xi_\alpha + \frac{n-2}{n}\psi_\alpha - \frac{n-2}{n}\partial^\gamma\varphi_{\gamma\alpha} + \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\partial_\alpha\rho = 0\,. \tag{1.112}$$

Эти решения могут быть решены относительно ψ_α и ξ_α: $\psi_\alpha = \partial^\gamma\varphi_{\gamma\alpha}$ b $\xi_\alpha = \partial_\alpha\rho$. Соответственно, поля ψ_α и ξ_α могут быть исключены из (1.110).

$$\begin{aligned}S = \int d^n x(&\frac{1}{2}\varphi^{\alpha\beta|\gamma}\varphi_{\alpha\beta|\gamma} - \frac{1}{2}m^2\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} - \varphi^{\alpha\beta|\gamma}\partial_\gamma\varphi_{\alpha\beta} + \frac{n^2-2}{n^2+n-2}\partial_\alpha\varphi^{\alpha\beta}\partial^\gamma\varphi_{\gamma\beta} + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\partial^\gamma\rho\partial_\gamma\rho - \frac{n-2}{n}\partial^\gamma\varphi_{\gamma\beta}\partial^\beta\rho + \frac{1}{2}m^2\frac{n-1}{n}\rho^2)\end{aligned} \tag{1.113}$$

Наконец, можно исключить и вспомогательное поле ${\varphi^{\alpha\beta}}_{|\gamma}$, проварьировав по нему (1.113) и подставив результат обратно в действие.

$$\varphi^{\alpha\beta}_{|\gamma} = \partial_\gamma\varphi^{\alpha\beta} - \frac{n}{n^2+n-2}(\partial_\lambda\varphi^{\lambda\beta}\eta^\alpha_\gamma + \partial_\lambda\varphi^{\lambda\alpha}\eta^\beta_\gamma) + \frac{2}{n^2+n-2}\partial^\lambda\varphi_{\lambda\gamma}\eta^{\alpha\beta} \tag{1.114}$$

$$\begin{aligned}S = \int d^n x(&-\frac{1}{2}\partial_\gamma\varphi^{\alpha\beta}\partial^\gamma\varphi_{\alpha\beta} + \partial_\alpha\varphi^{\alpha\beta}\partial^\gamma\varphi_{\gamma\beta} - \frac{n-2}{n}\partial^\gamma\varphi_{\gamma\beta}\partial^\beta\rho + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\partial^\gamma\rho\partial_\gamma\rho - \frac{1}{2}m^2\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m^2\frac{n-1}{n}\rho^2)\end{aligned} \tag{1.115}$$

Данное действие является действием Фирца-Паули в форме Сина-Хагена с точностью до замены $\rho \to \frac{n}{n-2}\rho$.

1.7 Массивный спин 3

Рассмотрим схожую не являющуюся натуральной Лагранжеву систему - массивную теорию спина 3 [5]. Для написания действия данной теории необходимо добавлять в систему вспомогательное поле, как и в случае массивного спина 2. Однако по сравнению с последним, случай массивного спина 3 интересен тем, что данное вспомогательное поле уже не может быть проинтерпретировано, как компонента исходного поля. Также стоит отметить, что в данной работе рассматривалось действие массивного спина 3 из работы [66], которое связано с оригинальным действием из работы [5] переопределением полей.

В терминах полностью бесследового поля $\varphi_{\mu\nu\lambda}$ и скалярного поля ρ действие массивной теории спина 3 записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}S[\varphi,\rho] = \int d^n x(-\frac{1}{2}\partial_\gamma\varphi^{\mu\nu\lambda}\partial^\gamma\varphi_{\mu\nu\lambda}+\frac{3}{2}\partial_\lambda\varphi^{\mu\nu\lambda}\partial^\gamma\varphi_{\mu\nu\gamma}+\frac{3}{4}\partial_\gamma\varphi^{\mu\gamma}_{\mu}\partial^\lambda\varphi^{\nu}_{\nu\lambda}+\frac{3}{2}\partial_\nu\varphi^{\gamma}_{\gamma\mu}\partial^\nu\varphi^{\lambda\mu}_{\lambda}-\\ - 3\partial^\mu\varphi^{\lambda\gamma}_{\lambda}\partial^\nu\varphi_{\mu\nu\gamma} - \frac{1}{2}m^2\varphi_{\mu\nu\gamma}\varphi^{\mu\nu\gamma} + \frac{3}{2}m^2\varphi^{\nu}_{\nu\mu}\varphi^{\lambda\mu}_{\lambda} + \frac{9}{4}m^2\rho^2+\\ + \frac{3(n-1)(n-2)}{2n^2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho - \frac{3(n-2)}{2n}m\rho\partial_\mu\varphi^{\nu\mu}_{\nu})\end{aligned} \qquad (1.116)$$

Для того, чтобы убедиться, что из данного действия действительно следуют уравнения движения массивного спина 3, проварьируем его по $\varphi_{\mu\nu\lambda}$ и ρ. В результате имеем систему:

$$\begin{aligned}\Box\varphi_{\mu\nu\lambda} - \partial_\mu\partial^\gamma\varphi_{\gamma\nu\lambda} - \partial_\nu\partial^\gamma\varphi_{\gamma\mu\lambda} - \partial_\lambda\partial^\gamma\varphi_{\gamma\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial^\gamma\varphi^{\tau}_{\tau\gamma} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda}\partial_\mu\partial^\gamma\varphi^{\tau}_{\tau\gamma}-\\ -\frac{1}{2}\eta_{\mu\lambda}\partial_\nu\partial^\gamma\varphi^{\tau}_{\tau\gamma} - \eta_{\mu\nu}\Box\varphi^{\gamma}_{\gamma\lambda} - \eta_{\nu\lambda}\Box\varphi^{\gamma}_{\gamma\mu} - \eta_{\mu\lambda}\Box\varphi^{\gamma}_{\gamma\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\gamma\partial^\tau\varphi_{\lambda\gamma\tau} + \eta_{\nu\lambda}\partial^\gamma\partial^\tau\varphi_{\mu\gamma\tau}+\\ + \eta_{\mu\lambda}\partial^\gamma\partial^\tau\varphi_{\nu\gamma\tau} + \partial_\mu\partial_\nu\varphi^{\gamma}_{\gamma\lambda} + \partial_\lambda\partial_\nu\varphi^{\gamma}_{\gamma\mu} + \partial_\mu\partial_\lambda\varphi^{\gamma}_{\gamma\nu} - m^2\varphi_{\mu\nu\lambda} + m^2\eta_{\mu\nu}\varphi^{\gamma}_{\gamma\lambda}+\\ + m^2\eta_{\nu\lambda}\varphi^{\gamma}_{\gamma\mu} + m^2\eta_{\mu\lambda}\varphi^{\gamma}_{\gamma\nu} + \frac{n-2}{2n}m\eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\rho + \frac{n-2}{2n}m\eta_{\nu\lambda}\partial_\mu\rho+\\ + \frac{n-2}{2n}m\eta_{\mu\lambda}\partial_\nu\rho = 0\,,\end{aligned} \qquad (1.117)$$

$$\frac{3}{2}m^2\rho - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\Box\rho - \frac{n-2}{2n}m\partial_\mu\varphi^{\nu\mu}_{\nu} = 0\,. \qquad (1.118)$$

Данная система имеет дифференциальные следствия нулевого порядка. В этом можно убедиться, найдя след и дивергенцию (1.117) и сравнив их с

(1.118). В результате получим $\rho = 0$ и, следовательно, $\varphi^{\mu}_{\mu\lambda} = 0$. При подстановке этих двух условий в уравнение (1.117) уравнение (1.117) переходит в уравнение Клейна-Гордона. Таким образом получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}(\Box - m^2)\varphi_{\mu\nu\lambda} &= 0\\ \partial^{\mu}\varphi_{\mu\nu\lambda} &= 0\end{aligned} \qquad (1.119)$$

Стационарная поверхность $\mathcal{M}$ массивной теории спина 3 определяется продолжением уравнения (1.119), а следовательно в качестве координат на $\mathcal{M}$ удобно выбрать x^{μ}, $\varphi_{\mu\nu\lambda}$, $\varphi_{\mu\nu\lambda|\gamma}$, ... (очевидно, что джеты ρ в координатную систему не войдут). Так как вычисление предсимплектического потенциала $\widehat{\chi}$, его ограничения на стационарную поверхность χ и ковариантного Гамильтониана $\mathcal{H}$ в данном случае ничем не отличается от аналогичного вычисления в случае массивного спина 2, удобнее сразу выписать ответ для внутреннего действия массивной теории спина 3.

$$S^C = \int d^n x(-\partial_{\gamma}\varphi^{\mu\nu\lambda}{\varphi_{\mu\nu\lambda}}^{|\gamma} + \frac{1}{2}{\varphi^{\mu\nu\lambda}}_{|\gamma}{\varphi_{\mu\nu\lambda}}^{|\gamma} - \frac{1}{2}m^2\varphi^{\mu\nu\lambda}\varphi_{\mu\nu\lambda}) \qquad (1.120)$$

Как и в случае с массивным спином 2, действие (1.120) не воспроизводит все уравнения движения (1.119). Чтобы найти минимальную мультисимплектическую формулировку массивного спина 3, для данной теории выпишем Parent-действие

$$\begin{aligned}S^P = \int d^n x(&-\frac{1}{2}{\varphi_{\mu\nu\lambda}}^{|\gamma}{\varphi^{\mu\nu\lambda}}_{|\gamma} + \frac{3}{2}{\varphi^{\lambda\mu\nu}}_{|\lambda}{\varphi_{\gamma\mu\nu}}^{|\gamma} + \frac{3}{4}{\varphi^{\mu\gamma}_{\mu}}_{|\gamma}{\varphi^{\nu}_{\nu\lambda}}^{|\lambda} + \frac{3}{2}\varphi^{\gamma}_{\gamma\mu|\nu}\varphi^{\lambda\mu|\nu}_{\lambda} -\\ &- 3\varphi^{\lambda\gamma|\mu}_{\lambda}{\varphi_{\gamma\mu\nu}}^{|\nu} - \frac{1}{2}m^2\varphi_{\mu\nu\lambda}\varphi^{\mu\nu\lambda} + \frac{3}{2}m^2\varphi^{\nu}_{\nu\mu}\varphi^{\lambda\mu}_{\lambda} + \frac{9}{4}m^2\rho^2 +\\ &+ \frac{3(n-1)(n-2)}{2n^2}\rho^{\mu}\rho_{\mu} + \frac{3(n-2)}{2n}m\rho^{\mu}\varphi^{\nu}_{\nu\mu} - \xi^{\mu}(\partial_{\mu}\rho - \rho_{\mu}) -\\ &- {\pi_{\mu\nu\lambda}}^{|\gamma}(\partial_{\gamma}\varphi^{\mu\nu\lambda} - {\varphi^{\mu\nu\lambda}}_{|\gamma}))\end{aligned} \qquad (1.121)$$

Из данного действия можно исключить ρ_{μ} и ${\varphi_{\mu\nu\lambda}}^{|\gamma}$, и при этом остаться в мультисимплектической формулировке. Уравнения движения, получающиеся при варьировании (1.121) по ρ_{μ} и ${\varphi_{\mu\nu\lambda}}^{|\gamma}$ выглядят следующим образом:

$$\xi^{\mu} = -\frac{3(n-1)(n-2)}{n^2}\rho^{\mu} - \frac{3(n-2)}{2n}m\varphi^{\nu\mu}_{\nu} \qquad (1.122)$$

$$\begin{aligned}\pi^{\mu\nu\lambda}{}_{|\gamma} = {} & \varphi^{\mu\nu\lambda}{}_{|\gamma} - \eta^{\lambda}_{\gamma}\varphi^{\beta\mu\nu}{}_{|\beta} - \eta^{\mu}_{\gamma}\varphi^{\beta\lambda\nu}{}_{|\beta} - \eta^{\nu}_{\gamma}\varphi^{\beta\mu\lambda}{}_{|\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda}_{\gamma}\varphi^{\beta\alpha}_{\beta}{}_{|\alpha} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu}_{\gamma}\varphi^{\beta\alpha}_{\beta}{}_{|\alpha} - \\ & - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu}_{\gamma}\varphi^{\beta\alpha}_{\beta}{}_{|\alpha} - \eta^{\mu\nu}\varphi^{\beta\lambda}_{\beta}{}_{|\gamma} - \eta^{\mu\lambda}\varphi^{\beta\nu}_{\beta}{}_{|\gamma} - \eta^{\lambda\nu}\varphi^{\beta\mu}_{\beta}{}_{|\gamma} + \eta^{\mu\nu}\varphi^{\lambda\beta}_{\gamma}{}_{|\beta} + \eta^{\mu\lambda}\varphi^{\nu\beta}_{\gamma}{}_{|\beta} + \eta^{\lambda\nu}\varphi^{\mu\beta}_{\gamma}{}_{|\beta} + \\ & + \frac{1}{2}\eta^{\mu}_{\gamma}\varphi^{\beta\nu|\lambda}_{\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\mu}_{\gamma}\varphi^{\beta\lambda|\nu}_{\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\nu}_{\gamma}\varphi^{\beta\mu|\lambda}_{\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\nu}_{\gamma}\varphi^{\beta\lambda|\mu}_{\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\lambda}_{\gamma}\varphi^{\beta\nu|\mu}_{\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\lambda}_{\gamma}\varphi^{\beta\mu|\nu}_{\beta} \qquad (1.123)\end{aligned}$$

Данные уравнения можно решить относительно ρ_μ и $\varphi_{\mu\nu\lambda}{}^{|\gamma}$, а после подстановки результата обратно в действие и замены ξ^μ и $\pi_{\mu\nu\lambda}{}^{|\gamma}$ на ρ_μ и $\varphi_{\mu\nu\lambda}{}^{|\gamma}$ согласно выписанным выше соотношениям, получим минимальное мультисимплектическое действие для массивной теории спина 3.

$$\begin{aligned}S = \int d^n x (& -\varphi^{\mu\nu\lambda}{}_{|\gamma}\partial^\gamma\varphi_{\mu\nu\lambda} + 3\varphi^{\lambda\mu\nu}{}_{|\lambda}\partial^\gamma\varphi_{\mu\nu\gamma} + \frac{3}{2}\varphi^{\mu\gamma}_{\mu}{}_{|\gamma}\partial_\lambda\varphi^{\nu\lambda}_{\nu} + 3\varphi^{\gamma}_{\gamma\mu|\nu}\partial^\nu\varphi^{\lambda\mu}_{\lambda} - \\ & - 3\varphi^{\lambda\gamma|\mu}_{\lambda}\partial^\nu\varphi_{\mu\nu\gamma} - 3\varphi^{\mu\nu\gamma}{}_{|\gamma}\partial_\mu\varphi^{\lambda}_{\lambda\nu} + \frac{3(n-1)(n-2)}{n^2}\rho^{|\mu}\partial_\mu\rho + \frac{3(n-2)}{2n}m\varphi^{\nu}_{\nu\mu}\partial^\mu\rho + \\ & + \frac{1}{2}\varphi_{\mu\nu\lambda}{}^{|\gamma}\varphi^{\mu\nu\lambda}{}_{|\gamma} - \frac{3}{2}\varphi^{\lambda\mu\nu}{}_{|\lambda}\varphi_{\gamma\mu\nu}{}^{|\gamma} - \frac{3}{4}\varphi^{\mu\gamma}_{\mu}{}_{|\gamma}\varphi^{\nu}_{\nu\lambda}{}^{|\lambda} - \frac{3}{2}\varphi^{\gamma}_{\gamma\mu|\nu}\varphi^{\lambda\mu|\nu}_{\lambda} + 3\varphi^{\lambda\gamma|\mu}_{\lambda}\varphi_{\gamma\mu\nu}{}^{|\nu} - \\ & - \frac{1}{2}m^2\varphi_{\mu\nu\lambda}\varphi^{\mu\nu\lambda} + \frac{3}{2}m^2\varphi^{\nu}_{\nu\mu}\varphi^{\lambda\mu}_{\lambda} + \frac{9}{4}m^2\rho^2 - \frac{3(n-1)(n-2)}{2n^2}\rho^\mu\rho_\mu) \,. \qquad (1.124)\end{aligned}$$

где $\varphi_{\mu\nu\rho}$ полностью симметричный тензор, а $\varphi^{\mu\nu\lambda}{}_{|\gamma}$ симметричен лишь по своим первым трём индексам. Если в действии (1.124) приравнять к нулю ρ и ρ^μ, а также все следы $\varphi_{\mu\nu\rho}$ и $\varphi^{\mu\nu\lambda}{}_{|\gamma}$, то в результате получится действие (1.120). В этом смысле действие (1.124) является расширением внутреннего действия (1.120).

Выводы

Основным результатом данной главы является построение полной минимальной предсимплектической формулировки для массивных теорий спина 2 и 3. Для обеих теорий был найден спектр переменных необходимого расширения стационарной структуры и определённого на ней предсимплектического потенциала.

Глава 2. Обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм

2.1 BV на языке градуированных супермногообразий

Несмотря на то, что внутреннее действие является удобным инструментом для описания минимальных формулировок естественных теорий на геометрическом языке, данная конструкция не даёт никаких инструментов для анализа калибровочных симметрий теории. Вместе с тем, калибровочные теории встречаются в физике крайне часто. Более того, любая теория поля $\varphi^i(x)$, описываемая действием $S[\varphi]$, инвариантна относительно преобразований вида

$$\delta\varphi^i(x) = M^{ij}\frac{\delta S[\varphi]}{\varphi^j}\,, \qquad M^{ij} = -M^{ji}\,, \tag{2.1}$$

которые называются тривиальными калибровочными преобразованиями с произвольным параметром M^{ij}. Таким образом возникает вопрос о инвариантном построении Лагранжевой формулировки, учитывающем калибровочные симметрии теорий. Удобным языком для решения этой задачи является формализм Баталина-Вилковыского (BV), краткому описанию которого будет посвящён данный раздел. Говоря более конкретно, в этом разделе будут введены понятия пространства полей и антиполей, антискобки, BV-действия и БРСТ-дифференциала.

Прежде, чем перейти к формализму BV, необходимо ввести базовые структуры, которые будут в нём использоваться. Для начала нужно определить понятие градуированного пространства. $\mathbb{Z}$-градуированным пространством называется $\mathcal{N}$ пространство, которое является прямой суммой подпространств $\mathcal{N} = \bigoplus_i \mathcal{N}_i$. В случае, когда сумма конечна и содержит m слагаемых, пространство называется $\mathbb{Z}_m$-градуированным. В частном случае $m = 2$ $\mathbb{Z}_2$-градуированное пространство называется суперпространством.

Частным случаем градуированных пространств являются градуированные алгебры.

Определение 2.1.1. *Ассоциативной суперкоммутативной алгеброй $\mathcal{A}$ называется пространство, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1. *$\mathcal{A}$ - суперпространство, то есть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$.*

2. $\mathcal{A}$ - *ассоциативная алгебра.*
3. $\forall a \in \mathcal{A}_{0,1}\ \exists|\cdot|:\ |a| = 0 \iff a \in \mathcal{A}_0, |a| = 1 \iff a \in \mathcal{A}_1$. *Градуировка* $|\cdot|$ *называется Грассмановой чётностью элемента* a.
4. $\forall a, b \in \mathcal{A}_{0,1}$

$$ab = (-1)^{|a||b|} ba\,, \qquad |ab| = (|a| + |b|)\mathrm{mod}2 \tag{2.2}$$

Аналогично можно ввести понятие $\mathbb{Z}$-градуированной алгебры, в которой градуировку обозначим $\mathrm{gh}(\cdot)$ (пока что без уточнения причин выбора подобного обозначения). Более того, можно алгебру $\mathcal{A}$, у которой одновременно есть и Грассманова чётность $|\cdot|$, и $\mathbb{Z}$- градуировка $\mathrm{gh}(\cdot)$. Удобно понимать эту алгебру, как алгебру функций на некотором градуированном супермногообразии $\mathcal{E}$.

Поскольку мотивацией данного раздела является описание калибровочных симметрий теории, для чего привлекается язык градуированных пространств, рассмотрим в качестве $\mathcal{E}$ расширение $\mathcal{F}$, причём для координат $\mathcal{F}$, то есть для (x^a, φ^i) справедливо $|x^a| = |\varphi^i| = \mathrm{gh}(x^a) = \mathrm{gh}(\varphi^i) = 0$. Иными словами, схематично можно представить $\mathcal{E} = \mathcal{F} \times \{ghosts\}$, где под $\{ghosts\}$ понимается расширение $\mathcal{F}$, параметризующееся координатами ненулевых градуировок. Поскольку в данной диссертационной работе описываются лишь теории с бозонными полями, удобно здесь и далее положить $|\cdot| = \mathrm{gh}(\cdot)\mathrm{mod}2$.

В качестве координат на $\mathcal{E}$ удобно выбрать Φ^A и Φ^*_A, где A - мультииндекс, причём на эти переменные наложим условие

$$\mathrm{gh}(\Phi^*_A) = -\mathrm{gh}(\Phi^A) - 1\,. \tag{2.3}$$

Таким образом если переменные φ^i находятся среди координат Φ^A, то среди Φ^*_A существуют такие координаты φ^*_i, такие, что $\mathrm{gh}(\varphi^*_i) = -\mathrm{gh}(\varphi^i) - 1 = -1$. Координаты Φ^A принято называть полями, а координаты Φ^*_A - антиполями теории. Здесь важно отметить, что Φ^A следовало бы назвать скорее координатами, а Φ^*_A - антикоординатами, а полями и антиполями, по аналогии с определением физических полей, данным в первой главе, назвать сечения соответствующих расслоений. Тем не менее, поскольку обсуждение в данной главе в основном посвящено стандартному определению BV, Φ^A и Φ^*_A далее в этой главе до определения 2.1.2 действительно будут полями, а далее же под термином "(анти-)поле"в данной главе будут пониматься именно координаты $\mathcal{E}$. Соответственно, $\mathcal{E}$ в таком случае называется пространством полей-антиполей.

Дальнейшие обсуждения в данном разделе будут проведены в так называемых "конденсированных"обозначениях Де Витта. Это значит, что мультииндекс A будет включать в себя не только дискретные индексы, но и непрерывный индекс x^a, параметризующий точки базы расслоения $\mathcal{E} \to X$. Соответственно, под свёрткой индексов будет подразумеваться стандартная свёртка и одновременно с ней интегрирование по X.

Аналогично с тем, как в Гамильтоновом формализме вводится скобка Пуассона, введём понятие антискобки $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}$, $\mathrm{gh}(\{\,\cdot\,,\cdot\,\}) = 1$. Для произвольных функций F и G антискобка определяется, как

$$\{F,G\} = \frac{\delta^R F}{\delta \Phi^A}\frac{\delta^L G}{\delta \Phi^*_A} - \frac{\delta^R F}{\delta \Phi^*_A}\frac{\delta^L G}{\delta \Phi^A}\,. \tag{2.4}$$

Здесь важно отметить несколько моментов. Во-первых, данный вид антискобки не гарантирован при произвольном выборе координат Φ^A и Φ^*_A. Тем не менее, теорема Дарбу гарантирует, что существуют такие координаты Φ'^A и Φ'^*_A, в которых антискобка примет вид (2.4). Во-вторых, с точки зрения антискобки понятно разделение координат на $\mathcal{E}$ на поля и антиполя, поскольку $\left\{\Phi^A,\Phi^*_B\right\} = \delta^A_B$, и соответственно Φ^*_A можно интерпретировать, как "сопряжённые импульсы"к переменным Φ^A.

Антискобка удовлетворяет следующим соотношениям симметрии (второе и третье выражение - это правило Лейбница и тождество Якоби для антискобки):

$$\begin{gathered}
\{F,G\} = -(-1)^{(|F|+1)(|G|+1)}\,\{G,F\} \\
\{F,GH\} = \{F,G\}\,H + (-1)^{(|F|+1)|G|}G\,\{F,H\} \\
\{F,\{G,H\}\,\} = \{\,\{F,G\}\,,H\} + (-1)^{(|F|+1)(|G|+1)}\,\{G,\{F,H\}\,\}\,.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Поскольку при построении $\mathcal{E}$ расслоение $\mathcal{F}$ было расширенно в том числе Грассмановыми переменными, а потому на $\mathcal{E}$ возникает дополнительная симметрия, объединяющая как чётные, так и нечётные переменные (с точки зрения Грассмановой точности). Эта симметрия называется симметрией Бекки, Руэ, Сторы и Тютина (БРСТ-симметрией). Она кодируется при помощи так называемого БРСТ-дифференциала s - векторного поля, удовлетворяющего свойствам

$$\mathrm{gh}(s) = 1\,, \qquad s^2 = 0. \tag{2.6}$$

БРСТ-дифференциал можнет быть записан в терминах антискобки и производящего функционала $S_{BV}[\Phi,\Phi^*]$, $\mathrm{gh}(S_{BV}) = 0$, как

$$s = \{S_{BV}, \cdot\,\} \tag{2.7}$$

Следующее из нильпотентности s уравнение $\{S_{BV},S_{BV}\} = \partial_a K^a$, где $\partial_a K^a$ - граничный член, называется мастер-уравнением, а сам функционал $S_{BV}[\Phi,\Phi^*]$ - мастер-действием (или BV-действием).

Рассмотрим решение мастер-уравнения в простейшем случае. Пусть имеется калибровочная система, описываемая действием $S_0[\varphi]$, калибровочными генераторами которой являются R^i_α, то есть действие S_0 инвариантно относительно преобразований $\varphi^i \to \varphi^i + R^i_\alpha \varepsilon^\alpha$. Предположим также, что координаты $\mathcal{E}$ у такой системе представимы в виде $\Phi^A = (\varphi^i,C^\alpha)$, $\mathrm{gh}(C^\alpha) = 1$, и $\Phi^*_A = (\varphi^*_i,C^*_\alpha)$, $\mathrm{gh}(C^*_\alpha) = -2$. Тогда можно показать, что решение мастер-уравнения имеет вид

$$S_{BV}[\varphi,C,\varphi^*,C^*] = S_0[\varphi] + \varphi^*_i R^i_\alpha C^\alpha + \dots\ , \tag{2.8}$$

причём данный ряд необязательно конечен.

Описанный набор конструкций определяет BV-формулировку локальной калибровочной теории. Тем не менее, помимо данного, конвенционального определения, существует и альтернативное определение в терминах градуированного многообразия $\mathcal{E} \to X$ и построенного по нему расслоению джетов $J^\infty(\mathcal{E})$.

Определение 2.1.2. *Локально определённой BV системой называется расслоение* $J^\infty(\mathcal{E})$, *ассоциированное с расслоением* $\mathcal{E} \to X$, $\dim(X) = n$, *на котором определены нильпотентное векторное поле* s, $\mathrm{gh}(s) = 1$, *и* $(n,2)$ *форма* $\overset{n}{\omega}$, $\mathrm{gh}(\overset{n}{\omega}) = -1$, *причём* $\overset{n}{\omega} = \Pi^* \omega^{\mathcal{E}}$, *где* $\omega^{\mathcal{E}}$ *- замкнутая, невырожденная* $n+2$*-форма на* $\mathcal{E}$ *и* $\Pi : J^\infty(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$. *При этом* $\overset{n}{\omega}$ *удовлетворяет условию*

$$L_s \overset{n}{\omega} + \mathrm{d}_h(\dots) = 0\,, \tag{2.9}$$

где L_s *- производная Ли вдоль векторного поля* s*:*

$$L_s = i_s \mathrm{d}_v + (-1)^{|s|} \mathrm{d}_v i_s \tag{2.10}$$

Выбрав в качестве координат на $\mathcal{E}$ x^a и $\Phi^{\bar{A}} = (\Phi^A,\Phi^{*A})$, можно выписать $\omega^{\mathcal{E}}$ в виде

$$\omega^{\mathcal{E}} = \omega^{\mathcal{E}}{}_{\bar{A}\bar{B}} \mathrm{d}\Phi^{\bar{A}} \mathrm{d}\Phi^{\bar{B}} (dx)^n \,, \tag{2.11}$$

из чего очевидно следует, что $\omega^{\mathcal{E}}$ задаёт на $\mathcal{E}$ градуированную скобку Пуассона.

Для того, чтобы в дальнейшем пользоваться определением **2.1.2**, необходимо доказать, что из него следуют основные конструкции BV-формализма, а именно мастер-действие и антискобка. Для простоты можно предположить, что когомологии де Рама многообразия X пусты. Тогда, используя "волшебную формулу"Картана (2.10), можно переписать (2.9) в виде

$$i_s \overset{n}{\omega} - \mathrm{d}_v \overset{n}{\mathcal{H}} = \mathrm{d}_h (\ldots) \,. \tag{2.12}$$

Таким образом s - Гамильтоново векторное поле и $(n{,}0)$-форма $\overset{n}{\mathcal{H}}$ - Гамильтониан.

Однако в приведённом рассуждении необязательно ограничиваться исключительно полем s: для любого векторного V, удовлетворяющего уравнению $L_V \overset{n}{\omega} = \mathrm{d}_h(\ldots)$ существует соответствующий этому векторному полю Гамильтониан - $(n{,}0)$-форма H_V, удовлетворяющая аналогу формулы (2.12). Таким образом естественно определить на $J^\infty(\mathcal{E})$ нечётную скобку Пуассона $\{\,\cdot\,,\cdot\,\}$, как

$$\{H_{V_1}, H_{V_2}\} = i_{V_1} i_{V_2} \overset{n}{\omega} \,. \tag{2.13}$$

Подставив в данное выражение в качестве V_1 и V_2 s, получим

$$\left\{ \overset{n}{\mathcal{H}}, \overset{n}{\mathcal{H}} \right\} = i_s i_s \overset{n}{\omega} = \mathrm{d}_h (\ldots) \,, \tag{2.14}$$

то есть классическое мастер-уравнение в терминах Лагранжевой плотности $\overset{n}{\mathcal{H}}$ мастер-действия. Само же мастер-действие примет вид

$$S_{BV}(\widehat{\sigma}) = \int_X \widehat{\sigma}^*_{pr} (\overset{n}{\mathcal{H}}) \,, \tag{2.15}$$

где $\widehat{\sigma}$ - суперсечения $\mathcal{E}$, а $\widehat{\sigma}_{pr}$ - их продолжение. Для получения же классического действия (то есть S_0) необходимо положить равными нулю все поля теории с ненулевой градуировкой (или, что эквивалентно, ограничиться с суперсечений $\widehat{\sigma}$ на обыкновенные сечения).

Наконец, зададимся вопросом о теоретикополевой интерпретации описаной выше системы. Пусть, сечение $\sigma : X \to \mathcal{E}$ - решение теоретикополевой системы, и продолжение этого решения σ_{pr} удовлетворяет условию $\sigma_{pr}^* \circ s = 0$. Тогда калибровочные преобразования теории можно можно определить в терминах вертикального векторного поля ξ, $\mathrm{gh}(\xi) = -1$, играющего роль калибровочного параметра:

$$\delta\sigma_{pr}^* = \sigma_{pr}^* \circ [s,\xi] \tag{2.16}$$

где $[s,\xi]$ - коммутатор векторных полей.

2.2 Q-многообразия и Q-расслоения

Следующей необходимой для дальнейшего обсуждения конструкцией является Q-многообразие.

Определение 2.2.1. *Q-многообразием (M,Q) называется $\mathbb{Z}$-градуированное многообразие M с определённым на нём нечётным нильпотентным векторным полем Q, $\mathrm{gh}(Q) = 1$.*

Важным частным примером Q-многообразие $(T[1]X,\mathrm{d}_X)$, которое в дальнейшем для краткости будет обозначаться просто $T[1]X$. $T[1]X$ - это касательное расслоение над многообразием X со сдвинутой градуировкой. Пусть x^a - координаты на X. Тогда координатами на $T[1]X$ будут являться x^a, $\mathrm{gh}(x^a) = 0$, и θ^a, $\mathrm{gh}(\theta^a) = 1$. Алгебра функций на $T[1]X$ может быть отождествлена с алгеброй дифференциальных форм на X, при этом дифференциал де Рама на X будет соответствовать однородному векторному полю d_X на $T[1]X$. В представленных выше координатах $\mathrm{d}_X = \theta^a \frac{\partial}{\partial x^a}$.

Аналогично с определением расслоения над многообразием можно ввести и понятие Q-расслоения для двух Q-многообразий. [67]

Определение 2.2.2. *Q-расслоением (M,Q,N,q,π) называется пара Q-многообразий (M,Q) и (N,q), Q-структуры которых согласованны относительно проекции $\pi : (M,Q) \to (N,q)$, то есть $\pi^* \circ q = Q \circ \pi^*$.*

Язык Q-расслоений крайне удобен тем, что в его терминах легко сформулировать BV-формулировку локальных калибровочных теорий на уровне уравнений движения. Аналогичные формулировки ранее были предложены в работах [63; 68].

Рассмотрим Q-расслоение $(\mathcal{E},Q,T[1]X,\pi)$. Сечениями $\sigma : T[1]X \to \mathcal{E}$ являются полевые конфигурации, а решениями называются такие сечения, что

$$\mathrm{d}_X \circ \sigma^* = \sigma^* \circ Q \,. \tag{2.17}$$

Тогда калибровочными преобразованиями σ являются преобразования вида

$$\delta\sigma^* = \sigma^* \circ [Q,Y] \,, \tag{2.18}$$

где Y - вертикальное векторное поле, $\mathrm{gh}(Y) = -1$. Можно заметить, что аналогичное определение калибровочных преобразований было дано в конце предыдущего раздела.

Можно заметить, что калибровочные преобразования могут быть также записаны в виде

$$\delta\sigma^* = \mathrm{d}_X \circ \xi^*_\sigma + \xi^*_\sigma \circ Q \,, \tag{2.19}$$

где $\xi^*_\sigma : \mathcal{C}^\infty(E) \to \mathcal{C}^\infty(T[1]X)$ - калибровочный параметр, $\mathrm{gh}(xi_\sigma) = -1$, удовлетворяющий

$$\xi^*_\sigma(fg) = (\xi^*_\sigma(f)\sigma^*(g) + (-1)^{|f|}\sigma^*(f)\xi^*_\sigma(g) \,, \tag{2.20}$$

где $\xi^*_\sigma(\pi^*\alpha) = 0 \; \forall\alpha \in \mathcal{C}^\infty(T[1]X)$. Если σ является решением, то легко заметить, что формула (2.18) может быть восстановлена заданием $\xi_\sigma = \sigma^* \circ Y$. При этом речь идёт исключительно о решениях, а не о произвольных калибровочных конфигурациях, поскольку лишь калибровочные преобразования решений имеют инвариантный геометрический смысл.

2.3 AKSZ-модель

AKSZ-модель была впервые предложена в работе [22] в качестве геометрической конструкции, которая содержит в себе всю BV-формулировку теории, включающую в себя мастер-действие и антискобку. В терминах предыдущего раздела AKSZ-модель - это тривиальное Q-расслоение $(\mathcal{E},Q) = T[1]X \times (\mathcal{F},q)$ ($T[1]X$ называется источником, а $(\mathcal{F},q)$ - таргет-пространством или просто таргетом), на слое $\mathcal{F}$ которого определена симплектическая структура $\omega^{\mathcal{F}}$, $\mathrm{gh}(\omega^{\mathcal{F}}) = n-1$, где $n = \dim(X)$. При этом

$$L_Q\omega = 0\,, \tag{2.21}$$

где ω - симплектическая структура на тотальном пространстве $\mathcal{E}$, определённая по симплектической структуре таргета $\omega^{\mathcal{F}}$. При этом Q-структура в таком случае является произведением Q-структур таргета и источника, то есть $Q = \mathrm{d}_X + q$. Также важно отметить, что в качестве источника AKSZ-модели может выступать не только $T[1]X$, но и любое другое Q-многообразие. Однако подобное выходит за рамки данной работы.

Поля и антиполя BV-формулировки теории могут быть получены, как суперсечения $\mathcal{E}$. Пусть ψ^A - координаты на $\mathcal{F}$, а x^a и θ^a - координаты на $T[1]X$. Тогда в терминах суперсечений $\widehat{\sigma} : T[1]X \to \mathcal{E}$ можно записать

$$\widehat{\sigma}^*(\psi^A) = \overset{0}{\psi}{}^A(x) + \overset{1}{\psi}{}^A_a(x)\theta^a + \ldots = \Psi^A(x|\theta). \tag{2.22}$$

При этом $\mathrm{gh}(\overset{k}{\psi}{}^A_{\ldots}(x)) = \mathrm{gh}(\psi^A) - k$.

Мастер-действие в рамках AKSZ-модели записывается, как действие, определённое на суперсечениях $\widehat{\sigma}$, и имеет вид

$$S[\widehat{\sigma}] = \int_{T[1]X} \widehat{\sigma}^*(\chi)(\mathrm{d}_X) - \widehat{\sigma}^*(\mathcal{H})\,, \tag{2.23}$$

где χ - симплектический потенциал, определяемый, как и раньше, через $\omega = \mathrm{d}\chi$, $\mathcal{H}$ - ковариантный Гамильтониан, определяемый условием $i_Q\omega - \mathrm{d}\mathcal{H} = 0$ (оно получается из условия $L_Q\omega = 0$ при помощи "волшебной формулы"Картана), а $\widehat{\sigma}^*(\chi)(\mathrm{d}_X)$ обозначает вычисленную на векторном поле d_X 1-форму $\widehat{\sigma}^*(\chi)$, то есть $\widehat{\sigma}^*(\chi)(\mathrm{d}_X) = i_{\mathrm{d}_X}\widehat{\sigma}^*(\chi)$.

По симплектической структуре на $\mathcal{F}$ можно стандартным образом определить симплектическую структуру $\bar{\omega}$ на суперсечениях. Пусть $\delta_1\widehat{\sigma}$ и $\delta_1\widehat{\sigma}$ - два касательных вектора к суперсечению $\widehat{\sigma}$ (иначе говоря, отображения $T[1]X \to T_{\widehat{\sigma}\mathcal{E}}$). Тогда значение $\bar{\omega}$ на суперсечении $\widehat{\sigma}$, вычисленное на этих касательных векторах, задаётся, как

$$\bar{\omega}_{\widehat{\sigma}}(\delta_1\widehat{\sigma},\delta_2\widehat{\sigma}) = \int_{T[1]X} \omega_{\widehat{\sigma}}(\delta_1\widehat{\sigma},\delta_2\widehat{\sigma}) \,, \tag{2.24}$$

где подынтегральное выражение очевидным образом является функцией на $T[1]X$. В координатах (2.24) имеет следующий вид:

$$\bar{\omega} = \int d^n x d^n \theta \omega_{AB}(\Psi(x|\theta))\delta\Psi^A(x|\theta)\delta\Psi^B(x|\theta) \,. \tag{2.25}$$

Наконец, выпишем уравнения движения, следующие из (2.23):

$$\widehat{\sigma}^*(\omega_{AB})(d_X \sigma^*(\psi^A) - \widehat{\sigma}^*(Q\psi^A)) = 0 \,. \tag{2.26}$$

В случае невырожденной симплектической структуры данные уравнения эквивалентны условию (2.17). В случае, если для каких-либо ψ^A $\mathrm{gh}(\psi^A) = -1$, уравнение (2.26) принимает вид $\widehat{\sigma}^*(Q\psi^A) = 0$, то есть подобные уравнения являются связями [69].

2.4 Предсимплектический BV-AKSZ формализм

Несмотря на то, что AKSZ-модель является крайне компактным и удобным способом задания BV-формулировки для калибровочных теоретико-полевых систем, её применение (при требовании конечномерности таргет-пространства) ограничено топологическими (то есть не содержащими степеней свободы) и диффеоморфизм-инвариантными теориями.

Однако существует альтернативный подход к построению инвариантной Лагранжевой формулировки. Он состоит в том, чтобы не требовать от симплектической структуры условие невырожденности.

Определение 2.4.1. *Предсимплектический BV-AKSZ формализм - это Q-расслоение $(\mathcal{E},Q,T[1]X,\pi)$, на котором определена предсимплектическая структура ω, $\mathrm{gh}(\omega) = n-1$, удовлетворяющая условиям*

$$d\omega = 0, \qquad L_Q\omega \in \mathcal{I} \,, \tag{2.27}$$

где $\mathcal{I} \subset \bigwedge^\bullet(\mathcal{E})$ обозначает идеал в $\bigwedge^\bullet(\mathcal{E})$, порождённый дифференциальными формами $\pi^*(\alpha)$, $\alpha \in \bigwedge^{k>0}(T[1]X)$.

Если предсимплектическая структура ω регулярна (в том смысле, что распределение её ядра является регулярным), то предсимплектический BV-AKSZ формализм позволяет восстановить полную BV-формулировку локальной системы. В частности, по введённым данным можно построить классическое действие на пространстве суперсечений $\mathcal{E}$,

$$S[\sigma] = \int_{T[1]X} (\sigma^*\chi)(\mathrm{d}_X) - \sigma^*(\mathcal{H}) \,, \tag{2.28}$$

которое можно считать обобщением AKSZ-действия (2.23). Здесь, как и ранее, χ - это предсимплектический потенциал, а $\mathcal{H}$ определяется из условия $i_Q\omega - \mathrm{d}\mathcal{H} \in \mathcal{I}$. Данное действие инвариантно относительно калибровочных преобразований, генерируемых распределением ядра предсимплектической структуры. Более того, как и в случае внутреннего действия, для подавляющего числа теоретикополевых систем предсимплектическая структура включает в себя лишь конечное количество координат, а потому и действие зависит лишь от конечного количества координат.

Для того, чтобы получить мастер-действие, необходимо продолжить действие (2.28) на пространство суперсечений $\mathcal{E}$. Соответствующее пространство полей и антиполей может быть получено, как симплектический фактор данного пространства суперсечений. [42; 43; 48].

Рассмотрим пример электродинамики в рамках предсимплектического BV-AKSZ формализма. Пусть имеется Q-расслоение $(\mathcal{E},Q,T[1]X,\pi)$, $\dim(X) = 4$, в качестве координат на котором выберем x^a, θ^a, C, F_{ab}, при чём

$$\begin{aligned} \mathrm{gh}(x^a) &= 0 \,, \qquad \mathrm{gh}(\theta^a) = 1 \,, \\ \mathrm{gh}(C) &= 1 \,, \qquad \mathrm{gh}(F_{ab}) = 0 \,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Согласованный с проекцией π и градуировками координат Q-дифференциал будет действовать следующим образом:

$$\begin{aligned} Qx^a &= \theta^a \,, \qquad Q\theta^a = 0 \,, \\ QC &= \frac{1}{2}F_{ab}\theta^a\theta^b \,, \qquad QF_{ab} = 0 \,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Поскольку предсимплектическая структура имеет градуировку $4 - 1 = 3$, для данной системы не слишком много кандидатов на эту роль. Рассмотрим предсимплектическую структуру вида

$$\omega = \mathrm{d}\chi\,, \qquad \chi = \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}\mathrm{d}C\mathrm{d}F^{ab}\theta^c\theta^d\,. \tag{2.31}$$

Полевые конфигурации определим, как сечения $\sigma : T[1]X \to \mathcal{E}$: $\sigma^*(C) = A_m(x)\theta^m$, $\sigma^*(F_{ab}) = F_{ab}(x)$. И тогда действие (2.28) на пространстве сечений примет известный вид

$$S[A_b, F_{ab}] = \int d^4x(\frac{1}{2}F^{ab}(\partial_a A_b - \partial_b A_a) - \frac{1}{4}F^{ab}F_{ab})\,. \tag{2.32}$$

Для того, чтобы построить BV-формулировку данной теории, рассмотрим вместо сечений суперсечения:

$$\begin{gathered}\widehat{\sigma}^*(C) = \overset{0}{C}(x) + A_m(x)\theta^m + \frac{1}{2}\overset{2}{C}_{mn}(x)\theta^m\theta^n + \dots\,,\\ \widehat{\sigma}^*(F^{ab}) = F^{ab}(x) + \overset{1}{F}{}^{ab}{}_m(x)\theta^m + \frac{1}{2}\overset{2}{F}{}^{ab}{}_{mn}(x)\theta^m\theta^n + \dots\,.\end{gathered} \tag{2.33}$$

Прежде, чем рассмотреть действие (2.28) на пространстве суперсечений, полезно рассмотреть на этом пространстве предсимплектическую структуру. При этом будем рассматривать лишь члены четвёртой степени однородности по θ^a (то есть члены порядка θ^4), поскольку все остальные члены или тождественно равны 0 в силу того, что θ^a - Грассмановы переменные, или окажутся равными нулю после интегрирования по θ.

$$\begin{aligned}\bar{\omega} = \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}(\frac{1}{2}\mathrm{d}\overset{0}{C}\mathrm{d}\overset{2}{F}{}^{ab}{}_{mn} - \mathrm{d}A_m\mathrm{d}\overset{1}{F}{}^{ab}{}_n + \frac{1}{2}\mathrm{d}\overset{2}{C}_{mn}\mathrm{d}F^{ab})\theta^m\theta^n\theta^c\theta^d =\\ = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\overset{0}{C}\mathrm{d}\overset{2}{F}{}^{ab}{}_{ab} - 2\mathrm{d}A_a\mathrm{d}\overset{1}{F}{}^{ab}{}_b + \mathrm{d}\overset{2}{C}_{ab}\mathrm{d}F^{ab})(\theta)^n\,,\end{aligned} \tag{2.34}$$

где $(\theta)^n = \frac{1}{24}\varepsilon_{abcd}\theta^a\theta^b\theta^c\theta^d$. Таким образом очевидно, что все остальные компоненты суперсечений, кроме $\overset{0}{C}$, $\overset{2}{F}{}^{ab}{}_{ab}$, A_a, $\overset{1}{F}{}^{ab}{}_b$, $\overset{2}{C}_{ab}$ и F^{ab} окажутся в ядре предсимплектической структуры. Более того, учитывая градуировки оставшихся компонент и вид предсимплектической структуры, эти компоненты могут быть интерпретированы как поля теории, дух и соответствующие антиполя. Действительно, $A_a(x)$, $\mathrm{gh}(A_a) = 0$ и $F^{ab}(x)$, $\mathrm{gh}(F^{ab}) = 0$, очевидно, представляют физический сектор полей теории, а именно являются электромагнитным потенциалом и тензором электромагнитного поля соответственно. Тогда компоненты $A^{*a}(x) = 2\overset{1}{F}{}^{ab}{}_b(x)$, $\mathrm{gh}(A^{*a}(x)) = -1$, и $F^*_{ab}(x) = \overset{2}{C}_{ab}(x)$, $\mathrm{gh}(F^*_{ab}(x)) = -1$, являются антиполями к $A_a(x)$ и $F^{ab}(x)$ соответственно. И, наконец, компоненты $C(x) = \overset{0}{C}(x)$, $\mathrm{gh}(C(x)) = 1$, и $C^*(x) = \overset{2}{F}{}^{ab}{}_{ab}(x)$, $\mathrm{gh}(C^*(x)) = -2$, являются духом в данной теории и его антиполем.

С учётом вышеизложенного, рассмотрим действие (2.28) на пространстве суперсечений:

$$S_{BV} = \int d^4x(\frac{1}{2}F^{ab}(\partial_a A_b - \partial_b A_a) - \frac{1}{4}F^{ab}F_{ab} + \partial^a C A^*_a)\,. \qquad (2.35)$$

Данное действие очевидным образом является хорошо известным мастер-действием для электродинамики.

2.5 Алгебра дифференциальных форм на языке градуированной геометрии

Не смотря на то, что язык градуированных многообразий и градуированных расслоений на первый взгляд существенно отличается от стандартного, неградуированного языка, представленного в первой главе данной работы, между этими подходами есть взаимное соответствие, раскрытию которого будет посвящён данный раздел. К тому же подобное обсуждение, помимо того, что является интересным само по себе, пригодится в данной работе позднее.

Для начала определим понятие алгебры вертикальных форм на градуированном расслоении $M \to N$. Причём не обязательно, что данное расслоение является Q-расслоением, однако всё это обсуждение на подобный случай обобщается тривиально. Будем называть алгеброй вертикальных форм фактор-алгебру $\bigwedge^\bullet(M)/\mathcal{I}$, где $\mathcal{I} \subset \bigwedge^\bullet(M)$ - идеал, порождённый формами с базы расслоения, то есть формами $\pi^*\alpha$, $\alpha \in \bigwedge^{k>0}(N)$.

Рассмотрим дополнительно расслоение $\widetilde{M} \to X$, где X - неградуированное многообразие. Пусть на данном расслоении есть плоская связность, а значит дифференциал де Рама на $\widetilde{M}$, как уже было сказано в первой главе данной работы, разбивается на вертикальную и горизонтальную компоненты: $\mathrm{d} = \mathrm{d}_h + \mathrm{d}_v$. Введём также расслоение $M \to T[1]X$, при этом $M = \Pi^*\widetilde{M}$, где Π - проекция расслоения $T[1]X$, то есть $\Pi : T[1]X \to X$. Иными словами, расслоение M можно представить, как расслоение $\widetilde{M}$, которое было дополнено Грассмановыми координатами θ^a, которые можно понимать, как вспомогательные переменные, играющие роль базисных дифференциалов dx^a. Или, что эквивалентно, расслоение $\widetilde{M}$ можно рассматривать, как подрасслоение в M, определяемое условием $\theta^a \; = \; 0$.

Алгебра вертикальных форм на расслоении $M \to T[1]X$ (в том смысле, в котором она была определена выше) изоморфна алгебре всех форм на расслоении $\widetilde{M} \to X$ с определённым на нём дифференциалом d_v. Чтобы это увидеть, введём отображение $\Upsilon : \bigwedge^\bullet(M) \to \bigwedge^\bullet(\widetilde{M})$. Если x^a, ψ^A являются координатами на $\widetilde{M}$, тогда координатами на M, очевидно, являются x^a, θ^a и ψ^A. В данных координатах отображение Υ можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\Upsilon(\mathrm{d}\psi^A) = \mathrm{d}_v\psi^A \,, \\
\Upsilon(\theta^a) = dx^a \,, \\
\Upsilon(dx^a) = 0 = \Upsilon(d\theta^a) \,, \\
\Upsilon(f(x,\psi)) = f(x,\psi) \,.
\end{gathered} \tag{2.36}$$

Легко заметить, что поскольку $\mathcal{I}$ задаётся формами, поднятыми с базы расслоения, базисными элементами алгебры дифференциальных форм на которой являются как раз dx^a и $d\theta^a$, $\Upsilon(\mathcal{I}) \; = \; 0$, и следовательно отображение Υ хорошо определено на классе эквивалентности, коим и являеется алгебра вертикальных форм. Более того, введённоее отображение является изоморфизмом между дифференциальными алгебрами $(\bigwedge^\bullet(M)/\mathcal{I},\mathrm{d}')$ и $(\bigwedge^{(\bullet,\bullet)}(\widetilde{M}),\mathrm{d}_v)$, где d' - дифференциал де Рама на факторе, то есть $\mathrm{d}'[a] \; = \; [\mathrm{d}a]$, где $[a]$ - класс эквивалентности форм a на M.

Введённое отображение Υ позволяет определить аналоги дифференциалов d_h и d_v на $\widetilde{M}$ в терминах алгебры вертикальных форм $\bigwedge^\bullet(M)/\mathcal{I}$. Выше уже писалось, что вертикальному дифференциалу де Рама d_v соответствует дифференциал d', в то время как горизонтальный дифференциал де Рама d_h можно определить следующим образом:

$$\mathrm{d}_h\Upsilon([a]) = \Upsilon([L_D a]) \,, \qquad D = \theta^a D_a \,, \tag{2.37}$$

где D_a - распределение Картана, определённое в прошлой главе, то есть, как и ранее, $\mathrm{d}_h \; = \; dx^a D_a$.

2.6 Обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм

Несмотря на то, что порой в рамках предсимплектического BV-AKSZ формализма Q-многообразие $(\mathcal{E},Q)$ является конечномерным (явный пример подобного - теория Максвелла - рассмотрен в разделе **2.4**), в общем случае конечномерность данного объекта не гарантированна. Тем не менее, в силу локальности предсимплектической структуры конечномерным является результат факторизации $\mathcal{E}$ по ядру предсимплектической структуры. Однако в связи с этим возникает вопрос: нельзя ли с самого начала рассматривать некоторое конечномерное расслоение, возможно, ослабив при этом какие-то аксиомы предсимплектического BV-AKSZ формализма, и при этом получить в результате полную BV-формулировку теории? Оказывается, что это возможно: ослабив требование нильпотентности векторного поля Q, можно получить формализм, который позволяет получать минимальные предсимплектические формулировки теорий.

Определение 2.6.1. *Обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм - это $\mathbb{Z}$-градуированное расслоение $\pi : \mathcal{E} \to T[1]X$, $\dim X = n$, на котором определены 2-форма ω (предсимплектическая структура), $\mathrm{gh}(\omega) = n-1$, 0-форма $\mathcal{H}$ (ковариантный Гамильтониан), $\mathrm{gh}(\mathcal{H}) = n$, и векторное поле Q, $\mathrm{gh}(Q) = 1$, удовлетворяющие условиям $Q \circ \pi^* = \pi^* \circ \mathrm{d}_X$ и*

$$\mathrm{d}\omega = 0\,, \qquad i_Q\omega - \mathrm{d}\mathcal{H} \in \mathcal{I}\,, \qquad \frac{1}{2}i_Q i_Q\omega - Q\mathcal{H} = 0\,, \tag{2.38}$$

где $\mathcal{I} \subset \bigwedge^\bullet(\mathcal{E})$ - идеал, порождённый дифференциальными формами $\pi^*(\alpha)$, $\alpha \in \bigwedge^{k>0}(T[1]X)$.

Как будет доказано далее, по имеющимся в определении **2.6.1** данным можно воспроизвести действие (2.28) и, как следствие, описать локально-определённую BV-систему. Данная версия определения с иной, менее общей, версией аксиом впервые возникла в работе [48]. Также интересно отметить, что аксиомы (2.38) (однако с другой интерпретацией - условия (2.38) являлись требованием калибровочной инвариантности действия (2.28)) впервые возникли в работе [41].

Определение **2.6.1** можно было бы сформулировать альтернативным образом, введя вместо предсимплектической структуры ω предсимплектический потенциал χ, связанный с предсимплектической структурой условием $\omega = \mathrm{d}\chi$.

В рамках подобной версии определения был бы зафиксирован граничный член действия (2.28). Более того, добавление к χ 1-формы из идеала $\mathcal{I}$ приводит к соответствующей добавке с $\mathcal{H}$, в следствие чего действие (2.28) не меняется. Действительно, пусть имеются χ, $\mathcal{H}$ и Q, удовлетворяющие аксиомам (2.38). Определим χ', отличающуюся от χ добавлением 1-формы из идеала $\mathcal{I}$, которая в свою очередь в локальных координатах x^a, θ^a и Ψ^A имеет вид $\alpha_a dx^a + \beta_a d\theta^a$. Тогда

$$\omega' = \mathrm{d}\chi' = \mathrm{d}\alpha_a dx^a + \mathrm{d}\beta_a d\theta^a \,. \tag{2.39}$$

Используя аксиому $i_Q\omega - \mathrm{d}\mathcal{H} \in \mathcal{I}$, получим, что $i_Q\omega' = \mathrm{d}\mathcal{H} + Q\alpha_a dx^a + \mathrm{d}\alpha_a\theta^a + Q\beta_a d\theta^a$, а значит $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \alpha_a\theta^a$. Подставив ω' и $\mathcal{H}'$ в третью аксиому (2.38), получим

$$\frac{1}{2}i_Q i_Q\omega' - \mathcal{H}' = \frac{1}{2}i_Q i_Q\omega + Q\alpha_a\theta^a - \mathcal{H} - Q\alpha_a\theta^a = 0\,. \tag{2.40}$$

Таким образом добавление 1-формы из идеала к χ не меняет аксиомы (2.38). При подстановке же χ' и $\mathcal{H}'$ в действие (2.28) можно увидеть, что первое слагаемое сгенерирует добавку $\widehat{\sigma}^*(\alpha_a\theta^a)$, а второе - аналогичную добавку с противоположным знаком, а следовательно действие не изменится.

Для того, чтобы продвинуться далее, необходимо определить, в каком виде необходимо (и необходимо ли) накладывать требования регулярности на предсимплектический потенциал ω. Для этого важно определить так называемое расслоение суперджетов $SJ^\infty(\mathcal{E})$. Данное расслоение может быть определено, как расслоение джетов над расслоением $\bar{\mathcal{E}} \to X$, слой $\bar{\mathcal{F}}$ которого является суперотображениями $T_x[1]X \to \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ - слой расслоения $\mathcal{E}$. Иными словами, можно определить $SJ^\infty(\mathcal{E})$, как расслоение, ограничение которого на нулевые сечения $T[1]X$ даст $J^\infty(\bar{\mathcal{E}})$.[45; 48; 70]

Продолжение Q на $SJ^\infty(\mathcal{E})$ может быть ограничено на $J^\infty(\bar{\mathcal{E}}) \subset SJ^\infty(\mathcal{E})$, в результате чего получается вертикальное векторное поле s. Предсимплектическая структура ω на $\mathcal{E}$ задаёт 2-форму на слоях $\bar{\mathcal{E}}$. Действительно, рассмотрим в точке $x \in X$ слой $\mathcal{E}_x$ над x. Слой $\mathcal{E}_x$ сам по себе является расслоением над $T_x[1]X$. Слой $\bar{\mathcal{E}}_x$ расслоения $\bar{\mathcal{E}}$ в точке x - это, по определению, пространство суперсечений $\mathcal{E}_x$ над $T_x[1]X$. Тогда ограничение ω на $\mathcal{E}_x$ задаёт 2-форму на $\bar{\mathcal{E}}_x$ при помощи ограничения (2.24) на $\bar{\mathcal{E}}_x$. Если данная 2-форма регулярна, и её ранг не зависит от точки x, то предсимплектическая структура ω называется квазирегулярной. Важно заметить, что предсимплектическая структура может быть квазирегулярной, будучи при этом нерегулярной в стандартном смысле слова.

Докажем, что в случае квазирегулярной предсимплектической структуры обобщённый предсимплектический BV-AKSZ-формализм позволяет восстановить полную BV-формулировку теории.[48] Пусть в терминах обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма имеется система $(\mathcal{E},T[1]X,\omega,\mathcal{H},Q)$. Тогда в терминах этого же формализма можно также определить и систему $(SJ^{\infty}(\mathcal{E}),T[1]X,\bar{\omega},\bar{\mathcal{H}},\bar{Q})$, где $\bar{Q}$ - продолжение Q на $SJ^{\infty}(\mathcal{E})$, $\bar{\omega} = (\pi^{\infty}_{\mathcal{E}})^{*}\omega$ и $\bar{\mathcal{H}} = (\pi^{\infty}_{\mathcal{E}})^{*}\mathcal{H}$ при $\pi^{\infty}_{\mathcal{E}} : SJ^{\infty}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$. Поскольку $(SJ^{\infty}(\mathcal{E}),T[1]X,\bar{\omega},\bar{\mathcal{H}},\bar{Q})$ - также система в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма, для $\bar{\omega}$, $\bar{\mathcal{H}}$ и $\bar{Q}$ справедливо

$$\mathrm{d}\bar{\omega} = 0\,, \qquad i_{\bar{Q}}\bar{\omega} - \mathrm{d}\bar{\mathcal{H}} \in \bar{\mathcal{I}}\,, \qquad \frac{1}{2}i_{\bar{Q}}i_{\bar{Q}}\bar{\omega} - \bar{Q}\bar{\mathcal{H}} = 0\,, \tag{2.41}$$

где $\bar{\mathcal{I}} \subset \bigwedge^{\bullet}(SJ^{\infty}(E))$ обозначает идеал форм, поднятых с базы $T[1]X$.

Первое условие (2.41) приводит (хотя бы локально) к существованию предсимплектического потенциала $\bar{\chi}$, удовлетворяющего условию $\bar{\omega} = \mathrm{d}\bar{\chi}$. Также, поскольку векторное поле Q проектируемо в d_X на $T[1]X$, его продолжение $\bar{Q}$ может быть представленно в виде $\bar{Q} = D + s$, где $D = \theta^a D_a$ и D_a - распределение Картана. Используя "волшебную формулу"Картана $i_D\mathrm{d}\bar{\chi} = L_D\bar{\chi} + \mathrm{d}i_D\bar{\chi}$ во втором условии (2.41), можно получить

$$i_s\bar{\omega} = \mathrm{d}(\bar{\mathcal{H}} - i_D\bar{\chi}) - L_D\bar{\chi} + \bar{\mathcal{I}}\,. \tag{2.42}$$

Поскольку на расслоении джетов хорошо определена вертикальная проекция, построим её для предыдущего уравнения:

$$i_s\bar{\omega}^v = \mathrm{d}_v(\bar{\mathcal{H}} - i_D\bar{\chi}) - L_D\bar{\chi}^v\,. \tag{2.43}$$

Таким образом из (2.43) следует, что s является Гамильтоновым векторным полем, который впоследствии можно интерпретировать, как БРСТ-дифференциал.

Другой ключевой структурой в BV-формулировке теории является мастер-уравнение. Для того, чтобы показать, что оно также восстанавливается из обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма, рассмотрим третье условие аксиом (2.41) в терминах векторного поля s, для чего запишем

$$i_s i_s \bar{\omega} = i_{\bar{Q}-D} i_{\bar{Q}-D} \bar{\omega} = i_{\bar{Q}} i_{\bar{Q}} \omega - 2 i_{\bar{Q}} i_D \bar{\omega} + i_D i_D \bar{\omega} \,. \tag{2.44}$$

Выпишем второе условие (2.41) в виде $i_{\bar{Q}} \bar{\omega} - \mathrm{d}\bar{\mathcal{H}} - \alpha = 0$, где $\alpha \in \bar{\mathcal{I}}$. Применяя к данному условию $i_{\bar{Q}}$, получим

$$i_{\bar{Q}} i_{\bar{Q}} \bar{\omega} - Q\bar{\mathcal{H}} - i_{\bar{Q}} \alpha = 0 \,. \tag{2.45}$$

Поскольку α - это 1-форма из идеала, то $i_{\bar{Q}} \alpha = i_D \alpha$. Далее, сравнив уравнение (2.45) с третьим условием из (2.41), получим, что $i_{\bar{Q}} i_{\bar{Q}} \bar{\omega} = 2 i_D \alpha$. С другой стороны, второй член формулы (2.44), использовав вновь второе условие из (2.41), можно переписать в виде

$$-2 i_D (\mathrm{d}\bar{\mathcal{H}} + \alpha) = -2 D\bar{\mathcal{H}} - 2 i_D \alpha \,. \tag{2.46}$$

Таким образом $2 i_D \alpha$ и $-2 i_D \alpha$ из первого и второго членов (2.44) сокращаются. Третий же член можно переписать, вновь используя "волшебную формулу"Картана:

$$i_D i_D \mathrm{d}\bar{\chi} = i_D L_D \bar{\chi} + i_D \mathrm{d} i_D \bar{\chi} = 2 D (i_D \bar{\chi}) \,. \tag{2.47}$$

Итого, формула (2.44) принимает вид мастер-уравнения с граничным членом:

$$\frac{1}{2} i_s i_s \bar{\omega} = D (i_D \bar{\chi} - \mathcal{H}) \,. \tag{2.48}$$

Чтобы переписать (2.43) и (2.48) в более привычном виде, необходимо рассмотреть специальную систему координат на $SJ^\infty(\mathcal{E})$. Пусть x^a, θ^a и Ψ^A - координаты на $\mathcal{E}$. Тогда в качестве координат на $SJ^\infty(\mathcal{E})$ естественно выбрать x^a, θ^a и $\Psi^A_{\dots|\dots}$, при чём

$$\Psi^A_{a\dots|b\dots} = D_a \dots D^\theta_a \dots \Psi^A \,, \tag{2.49}$$

где D^θ_a играет роль производной по θ^a таким же образом, каким D_a играет роль производной по x^a.

Однако оказывается, что есть более удобная система координат на $SJ^\infty(\mathcal{E})$, x^a, θ^a и $u^A_{\dots|\dots}$, определяемая условиями

$$\begin{gathered} ({u^A}_{a_1\dots|b_1\dots} - \Psi^A_{a_1\dots|b_1\dots})|_{\theta=0} = 0 \,, \\ D^\theta_a {u^A}_{a_1\dots|b_1\dots} = 0 \,. \end{gathered} \tag{2.50}$$

В данной системе координат $D^{\theta}_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a}$. Выражения для старых координат через новые может быть выписано в виде

$$\begin{aligned} \Psi^A &= u^A + \theta^a u^A_{|a} + \frac{1}{2}\theta^a\theta^b u^A_{|ab} + \ldots \\ \Psi^A_{|a} &= u^A_{|a} + \theta^b u^A_{|ab} + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c u^A_{|abc}\ldots \\ &\ldots . \end{aligned} \tag{2.51}$$

В данной системе координат s коммутирует с $\frac{\partial}{\partial\theta^a}$, а значит величины из формул (2.43) и (2.48) можно представить в виде ряда по θ^a (или, аналогично, в виде разложения по горизонтальной градуировке форм, если говорить на языке форм на $J^\infty(\bar{\mathcal{E}})$). Обозначим через $\overset{k}{\widetilde{\chi}}$, $\overset{k}{\widetilde{\omega}}$ и $\overset{k}{\widetilde{\mathcal{H}}}$ компоненты горизонтальной градуировки k форм $\Upsilon(\bar{\chi}^v)$, $\Upsilon(\bar{\omega}^v)$ и $\Upsilon(\bar{\mathcal{H}}^v)$ соответственно. Тогда уравнения (2.43) и (2.48) примут вид

$$i_s\overset{n}{\widetilde{\omega}} + \mathrm{d}_v\overset{n}{\widetilde{\mathcal{L}_{BV}}} = -\mathrm{d}_h\overset{n-1}{\widetilde{\chi}} \tag{2.52}$$

и

$$\frac{1}{2}i_s i_s\overset{n}{\widetilde{\omega}} = \mathrm{d}_h(\overset{n}{\widetilde{\mathcal{L}_{BV}}})\,, \tag{2.53}$$

где $\overset{n}{\widetilde{\mathcal{L}_{BV}}} = \Upsilon(i_D\bar{\chi}) - \Upsilon(\bar{\mathcal{H}})$.

Таким образом было показано, что обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм содержит в себе информацию о БРСТ-дифференциале s и мастер-уравнении, и для доказательства того, что данный формализм восстанавливает BV-формулировку теории осталось лишь доказать, что из него следует регулярная симплектическая структура.

Поскольку $\overset{n}{\widetilde{\omega}}$ получается отображением на $J^\infty(\bar{\mathcal{E}})$ $(n+2)$-формы с $\bar{\mathcal{E}}$ и $\overset{n}{\widetilde{\omega}}$ пропорциональна форме объёма $(dx)^n$, распределение ядра $\overset{n}{\widetilde{\omega}}$ вертикально. И тогда из квазирегулярности ω следует регулярность формы $\overset{n}{\widetilde{\omega}}$, а следовательно все необходимые требования удовлетворены и (как минимум локально) обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм содержит в себе полную BV-формулировку теории.

Дальнейшие разделы данной главы будут посвящены применению обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма к различным теоретикополевым системам. В честности, в разделе **2.7** будет объяснена взаимосвязь между обобщённым предсимплектическим BV-AKSZ формализмом и внутренним действием для систем, у которых Q не содержит данных о калибровочной симметрии. Далее, в разделах 2.8 и следующем за ним будут описаны так называемые приводимые калибровочные теории: электродинамика p-форм и модель Фридмана-Таунсенда.

2.7 Внутреннее действие

Как было отмечено ранее, BV-формализм является крайне удобным инструментом для работы с калибровочными теориями, причём не только на квантовом, но и на классическом уровне. При этом обычно, когда речь идёт о BV-формулировке теории, подразумевается, что задан весь необходимый спектр вспомогательных переменных, необходимый для описания калибровочных симметрий теории, и при этом Q содержит в себе всю информацию о соответствующих калибровочных преобразованиях. Подобные формулировки теорий называются BV-полными. Тем не менее, часто случается, что Q содержит себе информацию не о всех калибровочных преобразованиях. Тогда BV-формулировка теории называется, соответственно, неполной. В частном случае BV-неполной формулировки Q может и вовсе не содержать информацию о присутствующих в теории калибровочных симметриях. Именно подобный вырожденный случай будет рассмотрен в данном разделе.

Рассмотрим в рамках предсимплектического BV-AKSZ формализма систему $(E,Q,T[1]X,\omega)$, слой которой может быть параметризован координатами ψ^A, база координатами x^a и θ^a, причём среди всех переменных ψ^A, x^a и θ^a лишь у θ^a градуировка будет отличной от 0, $\mathrm{gh}(\theta^a) = 1$. В таком случае алгебра функций $C^\infty(E)$ может быть без потери общности отождествлена с алгеброй горизонтальных форм на расслоении $\widetilde{E} \to X$. А так как Q-дифференциал в данном случае будет линеен по θ^a, он может быть отождествлён с горизонтальным дифференциалом де Рама d_h на $\widetilde{E} \to X$. Таким образом $(\widetilde{E},\mathrm{d}_h)$ является обычным PDE, определённым в том же смысле, что и в главе 1 данной работы. [45; 71]

Поскольку в среди координат слоя градуировка всех переменных равна 0, а для предсимплектической структуры справедливо утверждение $\mathrm{gh}(\omega) = n-1$, для рассматриваемой системы можно выписать

$$\omega = \omega^{a}_{AB} d\psi^{A} d\psi^{B} (\theta)^{(n-1)}_{a} \,. \tag{2.54}$$

Данную систему можно без ограничения общности рассмотреть в терминах расслоения $\widetilde{E} \to T[1]X$, которое можно рассматривать, как подмногообразие E, определённое условием $\theta^{a} = 0$. При помощи определённого ранее отображения Υ можно определить необходимые для аксиом предсимплектического BV-AKSZ формализма формы на $\widetilde{E}$:

$$\begin{gathered} \widetilde{\omega} = \Upsilon(\omega) \subset \bigwedge\nolimits^{n-1,2}(\widetilde{E}) \,, \qquad \widetilde{\chi} = \Upsilon(\chi) \subset \bigwedge\nolimits^{n-1,1}(\widetilde{E}) \,, \\ \widetilde{\mathcal{L}} = \Upsilon(\mathcal{L}) \subset \bigwedge\nolimits^{n,0}(\widetilde{E}) \,. \end{gathered} \tag{2.55}$$

Сами аксиомы имеют следующий вид:

$$\widetilde{\omega} = \mathrm{d}_{v} \widetilde{\chi} \,, \qquad \mathrm{d}_{h} \widetilde{\omega} = 0 \,. \tag{2.56}$$

Таким образом $\widetilde{\omega}$ можно интерпретировать, как предсимплектическую структуру [12; 72—74] на $\widetilde{E}$, а значит $(\widetilde{E}, \mathrm{d}_{h})$ - PDE, на котором определена совместная предсимплектическая структура $\widetilde{\omega}$. А так как когомологии d_{v} тривиальны, существует (по крайней мере локально) $(n,0)$-форма $\widetilde{l}$, причём такая, что

$$\widetilde{\omega} = \mathrm{d}(\widetilde{\chi} + \widetilde{l}) \,, \qquad \mathrm{d}_{h} \widetilde{\chi} + \mathrm{d}_{v} \widetilde{l} = 0 \,. \tag{2.57}$$

Таким образом на сечениях $\widetilde{E}$ можно определить действие:

$$S^{C}[\sigma^{*}] = \int \sigma^{*}(\widetilde{\chi} + \widetilde{l}) \,. \tag{2.58}$$

Легко убедиться в том, что данное действие, в случае, когда $\widetilde{E}$ является стационарной поверхностью, является внутренним действием теории, определённым в разделе **1.3**, формула (1.25). Более того, полученное действие совпадает также с AKSZ-дейййствием, получающимся в рамках предсимплектического BV-AKSZ формализма. Для того, чтобы убедиться в этом, следует выписать действие (2.28) для рассматриваемой системы. Для начала вспомним, что аксиома $L_{Q}\omega \in \mathcal{I}$, которая на $\widetilde{E}$ принимает вид $\mathrm{d}_{h}\omega = 0$, эквивалентна аксиоме $i_Q\omega - \mathrm{d}\mathcal{H} = L_Q\chi - \mathrm{d}(\mathcal{H} - i_Q\chi) \in \mathcal{I}$, которая в свою очередь на $\widetilde{E}$ принимает вид

$$\mathrm{d}_h\widetilde{\chi} + \mathrm{d}_v(\Upsilon(i_Q\chi) - \widetilde{\mathcal{H}}) = 0\,, \tag{2.59}$$

Таким образом из второго уравнения в (2.57) следует, что $\widetilde{l} = \Upsilon(i_Q\chi) - \widetilde{\mathcal{H}}$. Наконец, выпишем действие (2.28):

$$S^{gPDE}[\sigma^*] = \int_{T[1]X} (\sigma^*(\chi_A)\mathrm{d}_X\sigma^*(\psi^A) - \sigma^*(\chi_A Q\psi^A - l)) = \\ \int_X (\sigma^*(\widetilde{\chi}_A)\mathrm{d}\sigma^*(\psi^A) - \sigma^*(\chi_A \mathrm{d}_h\psi^A - l))\,, \tag{2.60}$$

где функция $l \in C^\infty(E)$ определяется из условия $\Upsilon(l) = \widetilde{l}$, а σ, для того, чтобы не вводить лишние обозначения, обозначает и сечение $X \to E$, и его продолжение на сечение $T[1]X \to E$. Легко убедиться, что полученное выражение совпадает с внутренним действием, записанным в конкретных координатах (1.26).

Интересным случаем также является система, у которой Q-дифференциал не содержит информации о калибровочных симметриях, но уже в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма. Легко увидеть, что в терминах расслоения $\widetilde{E} \to X$ третья аксиома обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма тривиально выполнена, так как $\mathrm{gh}(i_Q i_Q\omega) = \mathrm{gh}(Q\mathcal{L}) = n + 1$, а значит на $\Upsilon(i_Q i_Q\omega) = \Upsilon(Q\mathcal{L}) = 0$, как $(n+1{,}0)$-формы. Все предыдущие рассуждения для предсимплектического BV-AKSZ формализма также остаются верны, в том числе и то, что Q линеен по θ^a $Q = \theta^a D_a$, где D_a - векторное поле. Тем не менее, в силу того, что $Q^2 \neq 0$, D_a не является инволютивным, а следовательно Q в терминах $\widetilde{E} \to X$ можно интерпретировать, как ковариантную производную, соответствующую неплоской связности. Таким образом подобную систему в терминах обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма можно интерпретировать, как аналогичную систему в терминах предсимплектического BV-AKSZ формализма, в которой провели факторизацию по регулярному подраспределению максимального ранга в вертикальном ядре $\widetilde{\omega}$. Горизонтальный дифференциал, индуцированный d_h на подобное фактор-пространство, в общем случае оказывается ненильпотентным, что согласуется с изложенным выше в данном абзаце.

Соответствующее действие в случае обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма можно выписать в виде:

$$S[\sigma] = \int_X \sigma^*(\Theta)\,, \tag{2.61}$$

где $\Theta = \Upsilon(\chi + \mathcal{L} + i_Q\chi)$. Очевидно, что данное действие является частным случаем мультисимплектического действия. [12; 31; 34; 40; 75]

2.8 Электродинамика старших форм

Известно, что электродинамика может быть компактно сформулирована на языке дифференциальных форм. Действительно, пусть $\mathbf{A} = A_\mu dx^\mu$ - 1-форма электромагнитного потенциала. Тогда действие для свободного электромагнитного поля примет вид

$$S[A] = \int \mathrm{d}\mathbf{A} \star \mathrm{d}\mathbf{A} = \int \mathbf{F} \star \mathbf{F}\,, \tag{2.62}$$

где $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{A}$, а $\star$ - звезда Ходжа, то есть$\star\mathbf{T}) = \frac{1}{(n-p-1)!}\varepsilon_{(n)} \cdot (T^{(p+1)} dx^{(n-p-1)}$ для любой p-формы в n-мерном пространстве. Здесь и далее в данном разделе при помощи $T^{(p)}$ будет обозначаться полностью антисимметричный тензор ранга p, а при помощи $T^{(k)} \cdot R_{(k)}$ будет обозначаться их свёртка. $\varepsilon_{(n)} = \varepsilon_{i_1 \cdot i_n}$.

Очевидно, что из (2.62) следует уравнение движения

$$\mathrm{d} \star \mathrm{d}A = 0\,, \tag{2.63}$$

которое вместе с условием $\mathrm{d}^2 A = 0$ даёт систему уравнений Максвелла. Калибровочное преобразование электродинамики в данной форме имеет вид $\delta A = dC$, где $C(x)$ - произвольная функция.

В подобной форме электродинамика допускает очевидное обобщение на старшие формы: пусть теперь $\mathbf{A}$ является p-формой в в n-мерном пространстве. Действие для данной теории будет иметь тот же вид, что и (2.62), вид уравнений движения также не изменится. Однако калибровочным параметром C теперь будет выступать не функция, а $p-1$-форма. Это изменение приводит к тому, что калибровочное преобразование для электродинамики p-формы оказывается приводимым: параметр C оказывается инвариантным относительно калибровочных преобразований вида $\delta C = \mathrm{d}C_1$, при этом параметры C_1 инвариантны относительно преобразований $\delta C_1 = \mathrm{d}C_2$ и так далее. С точки зрения BV-формализма это означает, что полная BV-формулировка электродинамики p-формы помимо полей и духов будет также содержать набор духов для духов, для которых также необходимо будет ввести духи, и так далее, а также все соответствующие антиполя. Тем не менее, оказывается, что весь подобный набор переменных на языке предсимплектического BV-AKSZ формализма можно закодировать в виде всего двух переменных C и F, чему и будет посвящён данный раздел. При этом что мы остановимся лишь на абелевых модификациях электродинамики.

Пусть имеется тривиальное расслоение $E \to T[1]X$, где в качестве X выберем для простоты n-мерное пространство Минковского. В качестве координат на E выберем x^a, θ^a, C, $\mathrm{gh}(C) = p$ и $F^{(p+1)}$, $\mathrm{gh}(F^{(p+1)}) = 0$, а также введём для удобства производящую функцию $\mathbf{F} = \frac{1}{(p+1)!}F_{a_1\ldots a_{p+1}}\theta^{a_1}\ldots\theta^{a_{p+1}}$. Q-дифференциал на $E \to T[1]X$ действует следующим образом:

$$\begin{aligned} Qx^a = \theta^a\,, Q\theta^a = 0 \\ QC = \mathbf{F}\,, \qquad QF^{(p+1)} = 0\,. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Легко убедиться в нильпотентности данного дифференциала Q. Это означает, что стандартная версия предсимплектического BV-AKSZ формализма будет эквивалентна обобщённой.

Для простоты последующих выкладок введём звёздочное сопряжение $\star$, которое будет действовать следующим образом: $\star\mathbf{F} = \frac{1}{(n-p-1)!}\varepsilon_{(n)} \cdot (F^{(p+1)}\theta^{(n-p-1)}$. Тогда можно будет записать предимплектическую структуру и предсимплектический потенциал в следующем виде:

$$\omega = \mathrm{d}\chi\,, \qquad \chi = \frac{1}{2}(\star\mathbf{F})\mathrm{d}C\,, \tag{2.65}$$

Обобщённый гамильтониан может быть построен по данной симплектической структуре при помощи $i_Q\omega - \mathrm{d}\mathcal{H} \in \mathcal{I}$.

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}\mathbf{F}(\star\mathbf{F})\,. \tag{2.66}$$

Наконец, через параметризацию сечений $\sigma^*(C) = A_{(p)} \cdot \theta^{(p)}$, $\sigma^*(F_{(p+1)}) = \mathrm{F}_{(p+1)}$ можно ввести поля $A_{(p)}(x)$ и $\mathrm{F}_{(p+1)}(x)$, в терминах которых запишем действие:

$$\begin{aligned} S[A_{(p)},\mathrm{F}^{(p+1)}] &= \int_{T[1]X} (\mathrm{d}_X\mathbf{A})(\star\mathbf{F}) - \frac{1}{4}\mathbf{F}(\star\mathbf{F}) \\ &= \int d^n x(\frac{1}{2}\partial_{[(1)}A_{(p)]}\cdot\mathrm{F}^{(p+1)} - \frac{1}{4}\mathrm{F}^{(p+1)}\cdot\mathrm{F}_{(p+1)})\,. \end{aligned} \qquad (2.67)$$

Данное действие эквивалентно исходному действию для p-формы. В этом легко убедиться, проварьировав данное действие по $\mathbf{F}$ (получим $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{A}$) и подставив результат обратно в (2.67).

Теперь рассмотрим, как в рамках рассматриваемого формализма можно получить действие BV для данной модели. Без ограничения общности рассмотрим случай $p = 2$, $n = 4$, поскольку увеличение p не изменит следующие действия идейно, но добавит большее количество духов в систему.

В случае $p = 2$, $n = 4$ предсимплектическая структура (2.65) принимает вид

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}(\mathrm{d}F^{abc}\theta^d)\mathrm{d}C\,. \qquad (2.68)$$

Для получения формулировки BV данной системы необходимо рассмотреть суперсечения $\widehat{\sigma} : T_x[1]X \to E$:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}^*(C) &= \overset{0}{C} + \overset{1}{C}_a\theta^a + \frac{1}{2}A_{ab}\theta^a\theta^b + \frac{1}{6}\overset{3}{C}_{abc}\theta^a\theta^b\theta^c + \ldots\,, \\ \widehat{\sigma}^*(F^{abc}) &= F^{abc} + \overset{1}{F}{}^{abc}{}_d\theta^d + \frac{1}{2}\overset{2}{F}{}^{abc}{}_{de}\theta^d\theta^e + \frac{1}{6}\overset{3}{F}{}^{abc}{}_{def}\theta^d\theta^e\theta^f + \ldots\,. \end{aligned} \qquad (2.69)$$

На этих суперсечениях можно выписать и предсимплектическую структуру:

$$\overset{4}{\omega} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\overset{0}{C}\mathrm{d}\overset{3}{F}{}^{abc}{}_{abc} - 3\mathrm{d}\overset{1}{C}_a\mathrm{d}\overset{2}{F}{}^{abc}{}_{bc} + 3\mathrm{d}A_{ab}\mathrm{d}\overset{1}{F}{}^{abc}{}_c - \mathrm{d}\overset{3}{C}_{abc}\mathrm{d}F^{abc})(\theta)^4\,, \qquad (2.70)$$

а все остальные переменные лежат в ядре $\overset{4}{\omega}$. Для удобства перепишем данную функцию, как форму на $\widetilde{E}$, введя обозначения $C = \overset{0}{C}$, $C^* = \overset{3}{F}{}^{abc}{}_{abc}$, $C_a = \overset{1}{C}_a$, $C^{*a} = 3\overset{2}{F}{}^{abc}{}_{bc}$, $A^{*ab} = 3\overset{1}{F}{}^{abc}{}_c$, $F^*_{abc} = \overset{3}{C}_{abc}$.

$$\overset{4}{\widetilde{\omega}} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}C\mathrm{d}C^* - \mathrm{d}C_a\mathrm{d}C^{*a} + \mathrm{d}A_{ab}\mathrm{d}A^{*ab} - \mathrm{d}F^*_{abc}\mathrm{d}F^{abc})(dx)^4 \qquad (2.71)$$

Очевидно, что симплектическая структура является канонической: все поля и духи стоят в ней вместе с соответствующими антиполями. Для удобства можно выписать духовую градуировку всех входящих в систему переменных в виде таблицы:

field	A_{ab}	A^{*ab}	F^{abc}	F^{*}_{abc}	C_a	C^{*a}	C	C^*
$gh(\cdot)$	0	-1	0	-1	1	-2	2	-3

Наконец, можно выписать соответствующее BV-AKSZ-действие для данной системы.

$$S_{BV} = \int d^4x(\frac{1}{2}F^{abc}(\partial_a A_{bc} + \partial_b A_{ca} + \partial_c A_{ab}) - \frac{1}{4}F^{abc}F_{abc} + \\ + \frac{1}{2}A^{*ab}(\partial_a C_b - \partial_b C_a) + \frac{1}{2}C^{*}_{a}\partial^a C) \quad (2.72)$$

Таким образом была получена стандартная BV-формулировка электродинамики старших форм на расслоении $\widetilde{E} \to X$.

2.9 Модель Фридмана-Таунсенда

Рассмотрим теперь неабелеву деформацию для электродинамики 2-формы - модель Фридмана-Таунсенда [76]. Действие первого порядка для данной модели

$$S[B^{ab},A_a] = \int d^4x Tr(-\frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}B^{ab}(\partial^c A^d - \partial^d A^c + [A^c,A^d]) + \frac{1}{4}A^a A_a) \qquad (2.73)$$

инвариантно относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\delta B^{ab} = \partial^a \lambda^b - \partial^b \lambda^a + [A^a,\lambda^b] - [A^b,\lambda^a]\,, \qquad \delta A^a = 0\,. \qquad (2.74)$$

Легко убедиться в том, что (2.73) является неабелевой модификацией модели 2-формы в размерности $n = 4$. Для этого достаточно ввести замену переменных $A_a = \varepsilon_{abcd}F^{bcd}$, а также исключить все члены из действия, кроме квадратичных. В результате получится действие (2.67) при $p = 2$ с соответствующей калибровочной симметрией.

Следуя тем же шагам, что и в предыдущем разделе, построим обобщённую BV-AKSZ формулировку данной теории. Введём на слое E расслоения $E \to T[1]X$ матричнозначные координаты C, $gh(C) = 2$ и A_a, $gh(A_a) = 0$ вместе с координатами x^a и θ^a. Q-дифференциал на $E \to T[1]X$ действует следующим образом:

$$\begin{gathered} Qx^a = \theta^a \,, Q\theta^a = 0 \,, \\ QC = -\frac{1}{6}\varepsilon_{abcd}A^a\theta^b\theta^c\theta^d - 2[C,A_a]\theta^a \,, QA_a = -[A_a,A_b]\theta^b \,. \end{gathered} \tag{2.75}$$

Предсимплектическая структура и предсимплектический потенциал для данной модели имеют вид:

$$\omega = \mathrm{d}\chi \,, \qquad \chi = -\frac{1}{2}Tr(C\mathrm{d}A_a\theta^a) \,. \tag{2.76}$$

Из аксиомы $i_Q\omega - \mathrm{d}\mathcal{H} \in \mathcal{I}$ легко найти ковариантный Гамильтониан:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}Tr(\frac{1}{2}A^aA_a(\theta)^4 + C[A_a,A_b]\theta^a\theta^b) \,. \tag{2.77}$$

Легко убедиться, что аксиомы $d\omega = 0$ и $\frac{1}{2}i_Qi_Q\omega - Q\mathcal{H} = 0$ выполнены (последняя выполняется тривиально благодаря $i_Qi_Q\omega = Q\mathcal{H} = 0$.

Рассмотрим суперсечения $\widehat{\sigma} : T_x[1]X \to E$ и введём переменные, необходимые для построения BV формулировки теории, как коэффициенты разложения по θ:

$$\begin{gathered} \widehat{\sigma}^*(C) = \overset{0}{C} + \overset{1}{C}_a\theta^a + \frac{1}{2}B_{ab}\theta^a\theta^b + \frac{1}{6}\overset{3}{C}_{abc}\theta^a\theta^b\theta^c + \dots \,, \\ \widehat{\sigma}^*(A^a) = A^a + \overset{1}{A^a}_b\theta^b + \frac{1}{2}\overset{2}{A^a}_{bc}\theta^b\theta^c + \frac{1}{6}\overset{3}{A^a}_{bcd}\theta^b\theta^c\theta^d + \dots \,, \end{gathered} \tag{2.78}$$

Предсимплектическая структура на суперсечении примет вид:

$$\overset{4}{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\varepsilon^{abcd}(\frac{1}{6}\mathrm{d}\overset{0}{C}\mathrm{d}\overset{3}{A}_{abcd} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\overset{1}{C^a}\mathrm{d}\overset{2}{A}^{bcd} + \frac{1}{6}\mathrm{d}\overset{3}{C}^{bcd}\mathrm{d}A^a) + \frac{1}{4}\mathrm{d}B^{ab}\mathrm{d}\overset{1}{A}_{ab})(\theta)^4 \,, \tag{2.79}$$

Все остальные переменные лежат в ядре предсимплектической структуры. Введя обозначения $C = \overset{0}{C}$, $C^* = \varepsilon^{abcd}\overset{3}{A}_{abcd}$, $C^a = \overset{1}{C^a}$, $C^*_a = \varepsilon_{abcd}\overset{2}{A}^{bcd}$, $A^*_a = \varepsilon_{abcd}\overset{3}{C}^{bcd}$, $B^*_{ab} = \overset{1}{A}_{ab}$ и переписав предсимплектическую структуру, как форму на $\widetilde{E}$, и отфакторизовавшись по ядру, получим

$$\overset{4}{\widetilde{\omega}} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\frac{1}{6}\mathrm{d}C\mathrm{d}C^* + \frac{1}{2}\mathrm{d}C^a\mathrm{d}C^*_a + \frac{1}{6}\mathrm{d}A^*_a\mathrm{d}A^a + \frac{1}{4}\mathrm{d}B^{ab}\mathrm{d}B^*_{ab})(dx)^4\,. \qquad (2.80)$$

Данная структура с точностью до переопределения полей совпадает с симплектической структурой (2.71). Этого можно было ожидать, так как симплектическая структура не зависит от взаимодействий в теории.

Наконец, мы можем записать BV-действие для данной модели:

$$S_{BV} = \int d^4x\mathrm{Tr}(-\frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}B^{ab}(\partial^c A^d - \partial^d A^c + [A^c,A^d]) + \frac{1}{4}A^a A_a - \\ - \frac{1}{4}\varepsilon^{abcd}C_a\partial_{[b}B^*_{cd]} - \frac{1}{4}C\partial^a C^*_a)\,. \qquad (2.81)$$

Данное действие совпадает с полученным ранее BV-действием для теории Фридмана-Таунсенда, полученным в статье [77]. Таким образом нам удалось получить полную BV-формулировку неабелевой модели электродинамики 2-формы в рамках обобщённого BV-AKSZ формализма. Как и в предыдущем, абелевом случае, преимущество обобщённого BV-AKSZ формализма состоит в том, что полная BV-формулировка модели восстанавливается всего по двум переменным на слое расслоения $E \to T[1]X$, в данном случае по переменным C и A_a.

Выводы

К основным результатам данной главы относится следующее:

1. Было показано, что в случае, когда Q-дифференциал не содержит информации о калибровочной симметрии теории (аналог BV-несобственной теории) обобщённый предсимплектический формализм воспроизводит внутреннее действие. Таким образом данный формализм является естественным расширением рассмотренного в предыдущей главе формализма внутреннего действия на калибровочные теории.
2. Была получена минимальная предсимплектическая формулировка электродинамики p-форм.
3. Была получена минимальная предсимплектическая формулировка модели Фридмана-Таунсенда.

Глава 3. Бездуховая массивная теория бигравитации

История изучения массивной теории гравитации известна возникновением различных проблем, которые ставили под сомнение статус данной теории, как приемлемой модели для описания космологических систем. Поэтому для того, чтобы лучше понять структуру центральной для данной главы теории, а именно бездуховой массивной теории бигравитации, важно для начала понять, какие проблемы стояли при построении данной теории и как они решались. А потому в первом разделе данной главы будет рассмотрен скачок ван Дама-Вельтмана-Захарова, а также пути решения данной проблемы. Затем будет изложена проблема лишней степени свободы у массивной теории (би-)гравитации, обнаруженной Д. Бульваром и С. Дезером. Далее будет предложен способ решения этой проблемы, предложенный К. де Рам, Г. Габададзе и А. Толли. После этого будет показан альтернативный способ получения потенциала де Рам-Габададзе-Толли. И, наконец, будет построена минимальная предсимплектическая формулировка бездуховой массивной теории бигравитации при помощи обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма.

3.1 Скачок ван Дама-Вельтмана-Захарова

Одна из первых проблем, связанная с количеством степеней свободы, возникла при рассмотрении массивной теории гравитации уже на линейном уровне. Впервые её заметили Х. ван Дам и М. Вельтман [23], а также независимо от них В.И. Захаров [24].

Рассмотрим две точечные частицы в пространстве Минковского (для простоты рассмотрим случай $n = 4$), рассеивающиеся на слабом гравитационном поле. Тензоры энергии-импульса, соответствующие этим частицам, обозначим за $T_{(1)}^{\mu\nu}$ и $T_{(2)}^{\mu\nu}$. Далее зададимся вопросом о виде амплитуды рассеяния A для данной системы. Для начала рассмотрим безмассовое гравитационное поле, описываемое лагранжианом (1.63) в случае $s = 2$. Уравнения движения для такой системы в калибровке де Дондера примут вид

$$\Box\varphi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\varphi^{\lambda}_{\lambda} = -\sqrt{\kappa}T_{\mu\nu}\,, \tag{3.1}$$

где $\kappa = 8\pi G$ и G - гравитационная постоянная. Взяв след данного уравнения, получим $\Box\varphi^{\mu}_{\mu} = \sqrt{\kappa}T^{\mu}_{\mu}$, и тогда можно выразить $\varphi_{\mu\nu}$ в терминах $T^{\alpha\beta}$:

$$\varphi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{\kappa}\Box^{-1}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})T^{\alpha\beta} = \sqrt{\kappa}D_{\alpha\beta\mu\nu}T^{\alpha\beta}\,. \tag{3.2}$$

Величина $D_{\alpha\beta\mu\nu}$ является пропагатором для гравитационного взаимодействия в рассматриваемой системе. Тогда в данном случае амплитуда рассеяния $A(x) = (\sqrt{\kappa})^2 T^{\mu\nu}_{(1)}(x)D_{\alpha\beta\mu\nu}T^{\alpha\beta}_{(2)}(-x)$ имеет вид

$$A(x) = -\frac{1}{2}\kappa(2T^{\mu\nu}_{(1)}\Box^{-1}T_{(2)\mu\nu} - T_{(1)}{}^{\mu}_{\mu}\Box^{-1}T_{(2)}{}^{\nu}_{\nu})\,. \tag{3.3}$$

По данной амплитуде можно восстановить потенциал, действующий на частицы в безмассовом гравитационном поле. Для этого необходимо задать $T^{\mu\nu}_{(1)}(x) = M_1\delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0}\delta(x^a - x^a_1)$ и $T^{\mu\nu}_{(2)}(-x) = M_2\delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0}\delta(x^a_2 - x^a)$, где $M_{1,2}$ - массы первой и второй частиц, а $x^a_{1,2}$ - пространственные координаты первой и второй частиц соответственно, $a = 1{,}2{,}3$. Тогда, произведя преобразование Фурье, получим $T^{\mu\nu}_{(1)}(k) = M_1\delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0}e^{k_a(x^a - x^a_1)}$ $T^{\mu\nu}_{(2)}(-k) = M_2\delta^{\mu}_{0}\delta^{\nu}_{0}e^{k_a(x^a_2 - x^a)}$ и

$$A(k) = \frac{1}{2k^2}M_1M_2e^{ik_ar^a}\,, \tag{3.4}$$

где $r^a = x^a_1 - x^a_2$. Наконец, найдём потенциал, проинтегрировав по k полученную амплитуду:

$$U(r) = -\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}A(k) = -\frac{\kappa}{2}\frac{M_1M_2}{r} = -G\frac{M_1M_2}{r}\,. \tag{3.5}$$

Легко увидеть, что полученный потенциал представляет собой потенциал Ньютона.

Проделаем теперь эти же шаги в случае массивной теории гравитации. Для этого рассмотрим обсуждавшуюся ранее теорию Фирца-Паули в присутствии материи. В таком случае система уравнений (1.78) перейдёт в

$$\begin{cases}(\Box - m^2)\varphi_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}\varphi^{\lambda}_{\lambda} + m^2\eta_{\mu\nu}\varphi^{\lambda}_{\lambda} = -\sqrt{\kappa}T_{\mu\nu}\\ \partial^{\mu}\varphi_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\varphi^{\mu}_{\mu}\\ \varphi^{\mu}_{\mu} = -\frac{\sqrt{\kappa}}{3m^2}T^{\mu}_{\mu}\end{cases} \tag{3.6}$$

Проделаем все те же шаги, что и в случае безмассовой гравитации, а именно построим пропагатор и по нему найдём амплитуду рассеяния. Из первого уравнения (3.6) с учётом третьего получим

$$D_{\mu\nu\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(\Box - m^2)^{-1}(\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} + \frac{2}{3m^2}\eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\nu)\,. \qquad (3.7)$$

Последний член в пропагаторе не даёт вклад в амплитуду, поскольку по определению $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Вместе с тем, множитель $\frac{2}{3}$ во втором слагаемом пропагатора приводит к заметному изменению в амплитуде. Действительно, амплитуда рассеяния в случае массивной гравитации,

$$A(x) = -\frac{1}{2}\kappa(2T^{\mu\nu}_{(1)}(\Box - m^2)^{-1}T_{(2)\mu\nu} - \frac{2}{3}T_{(1)}{}^{\mu}_{\mu}(\Box - m^2)^{-1}T_{(2)}{}^{\nu}_{\nu})\,, \qquad (3.8)$$

из-за этого множителя не переходит в амплитуду рассеяния (3.3) в пределе $m \to 0$. Перейдя, как и в случае безмассовой гравитации, к Фурье-представлению, можно увидеть, что в случае массивной гравитации

$$U(r) = -\frac{4}{3}G\frac{M_1 M_2}{r}e^{-mr}\,, \qquad (3.9)$$

то есть массивная гравитация даже в пределе $m \to 0$ предсказывает большее тяготение, чем безмассовая. Подобное расхождение пределов связано с разницей в количестве степеней свободы у данных теорий: у массивной теории гравитации 5 степеней свободы, в то время как у безмассовой их только 2. И в пределе $m \to 0$ остаётся лишняя степень свободы, приводящая к большему по сравнению с безмассовым случаем притяжению. Данная проблема называется скачком ван Дама-Вельтмана-Захарова.

Несмотря на то, что скачок ван Дама-Вельтмана-Захарова является серьёзной проблемой в интерпретации массивной теории гравитации, от него можно избавиться двумя способами. Первый из них был предложен А.И. Вайнштейном в работе [25]. Для этого он рассмотрел нелинейную массивную теорию гравитации после чего задался вопросом о том, когда в подобной теории справедлив линейный предел, в котором возникает скачок ван Дама-Вельтмана-Захарова. Но для начала рассмотрим общий случай нелинейной массивной теории гравитации. В общем случае действие подобной теории имеет вид $\int\sqrt{-g}(R + \frac{m^2}{\kappa}U(g))$, где $U(g)$ - потенциал, приводящий к появлению массового члена в уравнениях движения. Однако метрический тензор $g^{\mu\nu}$ имеет лишь две нетривиальные свёртки: след и метрику. Это связано с тем, что само понятие свёртки тензоров содержит в себе метрический тензор. Это приводит к тому, что $U(g)$ способно сгенерировать в действии (и, следовательно, в уравнениях движения) лишь член, пропорциональный космологической постоянной. Для того, чтобы обойти это ограничение, необходимо ввести дополнительный тензор $f^{\mu\nu}$, играющий роль фонового метрического тензора, и определить массовый потенциал при помощи него в том числе. Таким образом общий вид действие массивной теории гравитации имеет вид

$$S[g,f] = \int \sqrt{-g}(R + \frac{m^2}{\sqrt{\kappa}}U(g,f)) \,, \tag{3.10}$$

то есть массивная теория гравитации всегда является как минимум биметрической. Существуют также массивные теории гравитации, включающие в себя большее количество метрик - мультиметрические массивные теории гравитации. Однако данные теории не будут рассматриваться в данном разделе.

Вслед за А.И. Вайнштейном, рассмотрим нелинейную массивную теорию гравитации, в которой $f^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \varphi^{\mu\nu}$, то есть динамическое гравитационное поле совпадает с фоновым с точностью до поправки $\varphi^{\mu\nu}$. Более того, пусть массовый потенциал выбран таким образом, что уравнения движения приобретают вид

$$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h^{\lambda}_{\lambda}) = -\sqrt{\kappa}T_{\mu\nu} \\ \nabla^{\mu}\varphi_{\mu\nu} = \nabla_{\nu}\varphi^{\mu}_{\mu} \,, \end{cases} \tag{3.11}$$

где $T_{\mu\nu}$ - источник. Предположим, что источник сферически симметричен и рассмотрим стандартный анзац для решения в такой ситуации в сферических координатах $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$:

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\sigma(r)}dr^2 + r^2e^{\mu(r)}(d\theta^2 + \sin(\theta)d\varphi^2) \,, \tag{3.12}$$

где $\nu(r)$, $\sigma(r)$ и $\mu(r)$ - функции, определяющие $\varphi^{\mu\nu}$ (то есть при $\nu(r) = \sigma(r) = \mu(r) = 0$ $g^{\mu\nu}$ переходит в $\eta^{\mu\nu}$). Введём две координатные замены:

1. $e^{\sigma(r)} = e^{\lambda(r)+\mu(r)}(1 + \frac{1}{2}r\frac{d\mu}{dr})$, где $\lambda(r)$ - новая функция,
2. $\rho = re^{\frac{1}{2}\mu(r)}$.

В таком случае вне сферически симметричного источника (то есть при $T_{\mu\nu} = 0$) система (3.11) определяет следующие уравнения на неизвестные функции $\nu(\rho)$, $\mu(\rho)$ и $\lambda(\rho)$:

$$e^{\nu(\rho)-\lambda(\rho)}\Big(\frac{\lambda'(\rho)}{\rho}+\frac{1}{\rho^2}(e^{\lambda(\rho)}-1)\Big)=-\frac{1}{2}m^2\Big(\frac{1}{(1-\frac{1}{2}\mu'(\rho)\rho)^2}e^{\lambda(\rho)+\mu(\rho)}+2e^{\mu(\rho)}-3\Big)\,, \tag{3.13}$$

$$\frac{e^{\mu(\rho)}}{(1-\frac{1}{2}\mu'(\rho)\rho)^2}\Big(\frac{\nu'(\rho)}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}(e^{\lambda(\rho)}-1)\Big)=-\frac{1}{2}m^2(3-e^{\nu(\rho)}-2e^{\mu(\rho)})\,, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}&e^{-\mu(\rho)-\lambda(\rho)}\Big(-(1-\frac{1}{2}\mu'(\rho)\rho)^2(\nu'(\rho)\rho e^{\nu(\rho)}+2\mu'(\rho)\rho e^{\mu(\rho)})+(e^{\nu(\rho)}+2e^{\mu(\rho)}-\\&-3)(\frac{1}{2}\nu'(\rho)\rho-2)\Big)-(e^{\nu(\rho)}+2e^{\mu(\rho)}-3)\rho\frac{d}{d\rho}\Big(e^{-\mu(\rho)-\lambda(\rho)}(1-\frac{1}{2}\mu'(\rho)\rho)^2\Big)-\\&-\frac{1}{2}\nu'(\rho)\rho e^{-\nu(\rho)}\Big(\frac{e^{\mu(\rho)+\lambda(\rho)}}{(1-\frac{1}{2}\mu'(\rho)\rho)^2}+2e^{\mu(\rho)}-3\Big)+2e^{-\mu(\rho)}\Big(e^{\nu(\rho)}+e^{\mu(\rho)}+\\&+\frac{e^{\mu(\rho)+\lambda(\rho)}}{(1-\frac{1}{2}\mu'(\rho)\rho)^2}-3\Big)=0\,,\end{aligned} \tag{3.15}$$

где штрихом обозначена производная по ρ.

На очень больших расстояниях $\rho \gg \frac{\kappa M}{4\pi}$, где M - масса сферически симметричного источника, и при малых массах m решения (3.13) и (3.14) совпадают с решениями в безмассовом случае: $\lambda(\rho)=\frac{\kappa M}{4\pi\rho}$, $\nu(\rho)=-\frac{\kappa M}{4\pi\rho}$. Решение же (3.15) будет представлять собой ряд теории возмущений по параметру $\frac{\kappa M}{4\pi m^4\rho^5}$. Для того, чтобы эта величина была маленькой, и, следовательно, ряд теории возмущений сходился, необходимо выполнение условия $\rho \gg (\frac{\kappa M}{4\pi m^4})^{\frac{1}{5}}$ ($(\frac{\kappa M}{4\pi m^4})^{\frac{1}{5}}$ - радиус Вайнштейна). В обратном же случае теория возмущений неприменима, а значит в этом случае линеаризованная теория, как первое приближение теории возмущений, не является справедливым. Таким образом Вайнштейн показал, что при $\rho < (\frac{\kappa M}{4\pi m^4})^{\frac{1}{5}}$ случай линеаризованной теории не является справедливым, что может указывать на то, что внутри радиуса Вайнштейна степени свободы характеризуются сильным самодействием, а значит скачок ван Дама-Вельтмана-Захарова не будет наблюдаться. При этом радиус Вайнштейна является очень большой величиной. В частности, для Солнца он составляет примерно 400000 световых лет.

Другой способ обойти проблему скачка ван Дама-Вельтмана-Захарова предложил М. Поррати в работе [26]. Суть этого способа состоит в том, чтобы повторить вычисления, проделанные ван Дамом, Вельтманом и независимо от них Захаровым, но не в случае пространства Минковского, а в случае пространства анти-де Ситтера. Для этого пространства справедливы выражения для кривизн $R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{1}{3}\Lambda(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})$ и $R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ (до конца этого раздела под $g_{\mu\nu}$ будет подразумеваться именно метрика пространства анти-де Ситтера). Уравнения движения (3.6) в данном случае примут вид

$$\begin{cases} \Delta^{(L)}\varphi_{\mu\nu} + \nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}\varphi^{\lambda}_{\lambda} - 2\Lambda\varphi_{\mu\nu} + m^2\varphi_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 g_{\mu\nu}\varphi^{\lambda}_{\lambda} = -\sqrt{\kappa}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda}) \\ \nabla^{\mu}\varphi_{\mu\nu} = \nabla_{\nu}\varphi^{\mu}_{\mu} \\ \varphi^{\mu}_{\mu} = -\frac{\sqrt{\kappa}}{3m^2-\Lambda}T^{\mu}_{\mu}\,, \end{cases} \tag{3.16}$$

где круглыми скобками обозначена симметризация и $\Delta^{(L)}$ - оператор Лихнеровича, определяемый для пространства анти-де Ситтера, как

$$\Delta^{(L)}\varphi_{\mu\nu} = \nabla^2\varphi_{\mu\nu} - 2R_{\mu\lambda\nu\rho}\varphi^{\lambda\rho} + 2R^{\rho}_{(\mu}\varphi_{\nu)\rho}\,, \tag{3.17}$$

где $\nabla^2 = \nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}$.

Проделав все те же шаги, что и в начале данного раздела, выпишем амплитуду рассеяния для двух точечных частиц:

$$A(x) = \frac{1}{2}\kappa(T^{\mu\nu}_{(1)}(\Delta^{(L)} + m^2 - 2\Lambda)^{-1}T_{(2)\mu\nu} - \frac{2}{3}T^{(1)}{}^{\mu}_{\mu}(-\nabla^2 + m^2 - 2\Lambda)^{-1}T^{(2)}{}^{\nu}_{\nu} + \\ + \frac{2}{9}\Lambda T^{(1)}{}^{\mu}_{\mu}(-\nabla^2 + m^2 - 2\Lambda)^{-1}(\nabla^2 + \frac{4}{3}\Lambda)^{-1}T^{(2)}{}^{\nu}_{\nu} + \frac{2}{6 + \frac{9m^2}{\Lambda}}T^{(1)}{}^{\mu}_{\mu}(\nabla^2 + \frac{4}{3}\Lambda)^{-1}T^{(2)}{}^{\nu}_{\nu})\,. \tag{3.18}$$

Данная амплитуда интересна тем, что пределы $\Lambda \to 0$ и $m^2 \to 0$ в данном случае не коммутируют. Действительно, взяв сначала предел $\Lambda \to 0$, мы увидим, что амплитуда (3.18) перейдёт в амплитуду (3.8). Однако взяв сначала предел $m^2 \to 0$ и только потом $\Lambda \to 0$, мы получим амплитуду (3.3), то есть амплитуда (3.18) воспроизведёт правильный закон Ньютона. Таким образом Поррати показал, что скачок ван Дама-Вельтмана-Захарова может быть не проблемой массивной теории гравитации как таковой, а особенностью пространства Минковского, как фона для данной теории.

3.2 Дух Бульвара-Дезера

Несмотря на то, что работа [25] должна была реабилитировать массивную теорию гравитации в качестве адекватной и согласованной космологической модели, в том же 1972 году вышла работа [27] за авторством Д. Бульвара и С. Дезера, которая выявила серьёзные проблемы в данной теории, а именно наличие лишней, шестой, степени свободы и отсутствие ограничения снизу на энергию.

Для того, чтобы увидеть данные проблемы, вслед за Д. Бульваром и С. Дезером проведём разложение Арновитта-Дезера-Мизнера (ADM-разложение, подробности об этом формализме можно найти в работе [78]) для случая массивной гравитации (3.10), выбрав при этом в качестве фонового пространства пространство Минковского:

$$\begin{aligned} ds_g^2 &= -N^2dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + N^idt)(dx^j + N^jdt)\,, \\ ds_f^2 &= -dt^2 + \delta_{ij}dx^idx^j\,, \end{aligned} \tag{3.19}$$

где $i,j = 1,2,3$, функция N называется функцией хода, вектор N^i - функцией сдвига, а γ_{ij} - трёхмерный метрический тензор. Данное разбиение может быть проведено для любого метрического тензора, поскольку оно отвечает разбиению многообразия на трёхмерные гиперповерхности с индуцированной на них метрикой γ_{ij}.

В случае подобного разбиения действие (3.10) примет вид (в данном разделе примем $\kappa = 1$ для простоты)

$$S[N,N^i,\gamma_{ij}] = \int dtd^3xN\sqrt{\gamma}(\frac{1}{2}(K^{ij}K_{ij}-K^i_iK^j_j+R(\gamma_{ij}))-m^2U(N,N^i,\gamma))\,, \tag{3.20}$$

где $\gamma = \det(\gamma_{ij})$, $R(\gamma_{ij})$ - скалярная кривизна, построенная по метрическому тензору γ_{ij}, а K_{ij} - вторая фундаментальная форма:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\dot{\gamma}_{ij} - \nabla^{(3)}_iN_j - \nabla^{(3)}_jN_i)\,, \tag{3.21}$$

где точкой обозначена производная по времени, а $\nabla^{(3)}_i$ - ковариантная производная, определённая по метрическому тензору γ_{ij}.

Для подсчёта количества степеней свободы данной теории перейдём к Гамильтоновому формализму. Для этого введём плотность лагранжиана

$$\mathcal{L} = N\sqrt{\gamma}(\frac{1}{2}(K^{ij}K_{ij} - K^i_iK^j_j + R(\gamma_{ij})) - m^2U(N,N^i,\gamma)) \tag{3.22}$$

и рассчитаем канонические импульсы. Для последующего удобства введём обозначение $N^\mu = (N,N^i)$.

$$\begin{gathered}\pi^{ij} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma_{ij}} = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}(K^{ij} - K^l_l\gamma^{ij}) \\ p_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N^\mu} = 0\end{gathered} \tag{3.23}$$

Таким образом в силу связей $p_\mu = 0$ фазовое пространство оказывается 12-мерным, что соответствует 6-ти степеням свободы. В качестве координат на нём выступают π^{ij} и γ_{ij}. Далее для подсчёта количества степеней свободы необходимо ввести Гамильтониан, а также проверить устойчивость полученных связей, поскольку в процессе этой проверки могут возникнуть новые, вторичные, связи, которые уменьшат количество степеней свободы. Более того, устойчивость вторичных связей также сама по себе не гарантирована, в следствие чего условие устойчивости вторичных связей может приводить к новым связям, которые также уменьшают количество степеней свободы, и так далее.

Гамильтониан (или в данном случае скорее плотность Гамильтониана) теории может быть получен стандартным образом.

$$\mathcal{H} = N^\mu H_\mu + m^2\sqrt{\gamma}U + \lambda^\mu p_\mu\,, \tag{3.24}$$

где λ^μ - множитель Лагранжа, а $H_\mu = (H_0,H_i)$ определяется условиями

$$\begin{gathered}H_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}(2\pi^{ij}\pi_{ij} - \pi^i_i\pi^j_j) - \frac{1}{2}\sqrt{\gamma}R(\gamma_{ij})\,, \\ H_i = \nabla^{(3)}_j\pi^j_i\,.\end{gathered} \tag{3.25}$$

Зададимся теперь вопросом об устойчивости связей. Иными словами, проверим, как связи эволюционируют со временем, и потребуем, чтобы из условия $p_\mu = 0$ следовало $\dot{p}_\mu = 0$.

$$\dot{p}_\mu = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial N^\mu} = H_\mu + m^2\sqrt{\gamma}\frac{\partial U}{\partial N^\mu} = 0\,. \tag{3.26}$$

Для начала рассмотрим случай $m = 0$. В таком случае условие устойчивости связей (3.26) приводит к появлению четырёх вторичных связей первого рода $H_\mu = 0$. Более того, эти связи оказываются устойчивыми, а значит на этом процедура поиска связей заканчивается. Связи $H_\mu = 0$ уменьшают размерность фазового пространства до 4-х, а значит в безмассовом случае у гравитации остаётся 2 степени свободы, чего и следовало ожидать.

Рассмотрим теперь массивный случай. Это означает, что второе слагаемое в уравнении (3.26) не равняется 0, а значит уравнение (3.26) представляет собой алгебраические уравнения на $N^\mu = N^\mu(\pi^{ij},\gamma_{ij})$. Таким образом фазовое пространство остаётся 12-мерным, а значит в нелинейной массивной теории гравитации присутствует в общем случае 6 степеней свободы.

Однако, согласно работе [27], главной проблемой нелинейной массивной теории гравитации является не наличие лишней степени свободы, а её природа. Рассмотрев в качестве примера квадратичный по N^μ потенциал $U(N^\mu,\gamma_{ij})$, можно увидеть, что уравнения (3.26) решаются в таком случае относительно N^μ. Однако подстановка этого решения в плотность Гамильтониана $\mathcal{H}$ приводит, вообще говоря, к появлению в нём слагаемых вида $-\pi_{ij}\pi^{ij}$. Подобное слагаемое указывает на отсутствие ограничения у энергии системы снизу, что приводит к сильной неустойчивости решений нелинейной массивной теории гравитации, а значит шестая степень свободы данной теории является духом. И даже несмотря на то, в работе [27] указано, что доказательства присутствия духа в нелинейной теории для произвольного вида потенциала $U(N^\mu,\gamma_{ij})$ нет, само по себе наличие подобной проблемы в массивной теории гравитации остановило развитие данной теории, как космологической модели, на 40 лет.

3.3 Бездуховая массивная теория бигравитации

Несмотря на наличие в работе [27] доказательства присутствия шестой степени свободы в нелинейной массивной теории гравитации, доподлинно известно, что в линейном пределе массивная теория гравитации обладает лишь пятью степенями свободы. В этом можно убедиться, например, проведя по аналогии с предыдущим разделом Гамильтонов анализ количества степеней свободы для массивной теории спина 2, представленной в первой главе данной работы. В связи с этим возникает вопрос о том, что происходит с лишней, духовой степенью свободы в линейном пределе.

Впервые данный вопрос был поднят в работе К. де Рам, Г. Габададзе и А. Толли в работе [28] (более подробное изложение представлено в обзорной работе [79]). Более того, проследив за тем, что происходит с лишней степенью свободы, авторы смогли предложить потенциал $U(g,f)$, который не приводит к появлению лишней степени свободы.

Для начала рассмотрим, как и в прошлом разделе, ADM-разложение для нелинейной массивной теории гравитации, однако при этом наложим условия

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \varphi_{ij}\,, \qquad N = 1 + \nu\,, \qquad N^i = \nu^i\,, \tag{3.27}$$

где φ_{ij}, ν и ν^i - малые величины. Иными словами, компоненты динамического метрического тензора $g_{\mu\nu}$ слабо отличаются от компонент фонового метрического тензора $f_{\mu\nu}$.

При этом потенциал $U(g,f)$ выберем следующим образом:

$$U = \frac{1}{8}(S^\mu_\nu S^\nu_\mu - S^\mu_\mu S^\nu_\nu)\,, \tag{3.28}$$

где $S^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu - g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}$. Подобный выбор потенциала не случаен, поскольку именно он приводит при линеаризации к массовому члену Фирца-Паули $\frac{1}{2}(\varphi^\mu_\mu \varphi^\nu_\nu - \varphi^{\mu\nu}\varphi_{\mu\nu})$. Раскладывая S^μ_ν по степеням малости и ограничиваясь линейным уровнем, получим

$$S^0_0 = 2\nu\,, \qquad S^0_i = -\nu_i\,, \qquad S^i_j = h^i_j\,. \tag{3.29}$$

Теперь все полученные соотношения можно подставить в плотность Гамильтониана $\mathcal{H}$, рассмотренную в предыдущем разделе. В результате получится

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = 2\pi^{ij}\pi_{ij} - \pi^i_i\pi^j_j + \frac{1}{4}\varphi^{ij}(-\frac{1}{2}\Delta\varphi_{ij} + \frac{1}{2}\Delta\varphi^k_k - \partial_i\partial_j\varphi^k_k + \frac{1}{2}\partial_i\partial^k\varphi_{kj} + \\ + \frac{1}{2}\partial_j\partial^k\varphi_{ki}) + \frac{m^2}{8}(\varphi^{ij}\varphi_{ij} - \varphi^i_i\varphi^j_j - 2\nu^i\nu_i) - \nu^i\partial^j\pi_{ij} - \nu^j\partial^i\pi_{ij} + \nu(\frac{1}{2}(\Delta\varphi^i_i - \\ - \partial^i\partial^j\varphi_{ij}) - \frac{m^2}{2}\varphi^i_i) + \lambda^\mu p_\mu\,, \end{aligned} \tag{3.30}$$

где $\Delta = \partial^i\partial_i$.

При проверке устойчивости связей $p_i = 0$ возникнет условие

$$-\frac{m^2}{2}\nu_i - \partial^j\pi_{ij} = 0\,. \tag{3.31}$$

Данное условие, как и ранее, не генерирует новые связи и, очевидно, может быть решено относительно ν_i: $\nu_i = -\frac{2}{m^2}\partial^j\pi_{ij}$. Однако то же самое не получится сказать по поводу устойчивости связи $p = 0$, поскольку ν входит в плотность Гамильтониана линейно. А потому условие устойчивости связи $p = 0$, то есть

$$\frac{1}{2}(\Delta\varphi_i^i - \partial^i\partial^j\varphi_{ij}) - \frac{m^2}{2}\varphi_i^i) = 0\,, \tag{3.32}$$

само по себе является вторичной связью, причём связью второго рода. Более того, можно показать, что условие устойчивости этой связи генерирует ещё одну связь второго рода:

$$m^2\pi_i^i + 2\partial^i\partial^j\pi_{ij} = 0\,. \tag{3.33}$$

Условие устойчивости этой связи в свою очередь приводит к уравнению

$$\frac{3}{4}m^4(\varphi_i^i - \nu) + \frac{3}{2}m^2\Delta\varphi_i^i + \Delta^2\varphi_i^i = 0\,. \tag{3.34}$$

Данное уравнение очевидным образом решается относительно ν. Таким образом процедура поиска связей на этом заканчивается, и найденные две связи второго рода являются единственными вторичными связями данной теории. Более того, две вторичные связи уменьшают размерность фазового пространства на 2, то есть до 10-ти, а следовательно рассматриваемая теория описывает 5 степеней свободы.

Данная информация позволяет сделать вывод о том, что, хоть в общем случае нелинейная массивная теория гравитации содержит лишнюю степень свободы, приводящую к неустойчивости решений в данной теории, тем не менее в частном случае можно построить потенциал $U(g,f)$ таким образом, чтобы данная лишняя степень свободы не возникала. Для этого достаточно потребовать линейности потенциала по функции хода N. Общий вид потенциала в данном случае записывается в терминах матрицы $\gamma_\mu^\nu = (\sqrt{\widehat{g}^{-1}\widehat{f}})_\mu^\nu$ (под $\widehat{g}$ и $\widehat{f}$ здесь подразумеваются матрицы с компонентами $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$ соответственно) и имеет вид [79; 80]

$$U(\gamma) = \beta_0 + \beta_1 Tr(\widehat{\gamma}) + \frac{1}{2}\beta_2(Tr(\widehat{\gamma})^2 - Tr(\widehat{\gamma}^2)) + \frac{1}{6}\beta_3(Tr(\widehat{\gamma})^3 - 3Tr(\widehat{\gamma}^2)Tr(\widehat{\gamma})) + \\ + \beta_4(Tr(\widehat{\gamma})^4 - 6Tr(\widehat{\gamma}^2)Tr(\widehat{\gamma})^2 + 3Tr(\widehat{\gamma}^2)^2 + 8Tr(\widehat{\gamma})Tr(\widehat{\gamma}^3) - 6Tr(\widehat{\gamma}^4)) \tag{3.35}$$

Более того, само по себе наличие потенциала, который не приводит к неустойчивости решений системы, позволяет рассмотреть вопрос о дальнейшей модификации массивной теории гравитации. Например, можно заметить, что действие (3.10) с потенциалом (3.35) не является калибровочно инвариантным в привычном смысле этого слова. Действительно, несмотря на то, что можно выписать калибровочные преобразования для данного действия, калибровочная симметрия подобной теории будет сводиться лишь к выбору фонового метрического тензора $f_{\mu\nu}$. Иными словами, у данного действия нет калибровочных преобразований, затрагивающих динамический сектор теории. В этом смысле кажется естественной модификация данной теории путём включенния в неё динамики фонового поля.

$$S[g,f] = \int d^4x \left(\frac{1}{\kappa_1}\sqrt{-g}R_{\mu\nu}(g)g^{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa_2}\sqrt{-f}R_{\mu\nu}(f)f^{\mu\nu} + \frac{m^2}{\kappa_1+\kappa_2}\sqrt{-g}U(\gamma)\right), \tag{3.36}$$

где $U(\gamma)$ определён формулой (3.35). Данная теория называется бездуховой массивной теорией биграпитации, поскольку она теперь не просто является биметрической, но и описывает динамику обоих метрических тензоров. Для краткости эта теория в дальнейшем будет называться просто биграпитацией.

Интересной особенностью бигравитации является то, что данная теория описывает динамику не пяти, а семи степеней свободы: 5 из них относятся к динамике массивного гравитона и ещё 2 - к динамике безмассового. Однако, будет неправильным сказать, что метрический тензор $g_{\mu\nu}$ описывает динамику массивного гравитона, а метрический тензор $f_{\mu\nu}$ - безмассового, как и сказать наоборот. Степени свободы массивного и безмассового гравитонов распределены между метрическими тензорами $g_{\mu\nu}$ и $f_{\mu\nu}$, а степень "перемешивания"определяется параметром η, $\mathrm{tg}^2(\eta) = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$. Именно поэтому в действии (3.36) были возвращены параметры $\kappa_i = 8\pi G_i$, где G_i - гравитационная постоянная, соответствующая конкретной метрике.

3.4 Бигравитация на реперном языке

Существует более компактный способ описания бигравитации. Для его использования нужно переписать действие (3.36) на реперном языке. Напомним, что этот язык подразумевает переход от криволинейного пространства с метрикой $g_{\mu\nu}$ к плоскому пространству с метрикой η_{ab} при помощи матриц e^a_μ:

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a_\mu(x) e^b_\nu(x) \eta_{ab} \,. \tag{3.37}$$

Таким образом в качестве динамического объекта теперь рассматривается не метрический тензор, а матрицы $e^a_\mu(x)$, называемые репером. Более того, для консистентности формулировки необходимо также ввести понятие обратного репера (по аналогии с обратным метрическим тензором) $e^\mu_a(x)$, удовлетворяющего условиям

$$e^a_\mu e^\nu_a = \delta^\nu_\mu \,, \qquad e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a_b \,. \tag{3.38}$$

При этом за свёртку, поднятие и опускание индексов a отвечает метрический тензор η_{ab} и обратный ему тензор η^{ab}, в то время как за те же операции с индексами μ всё ещё отвечает тензор $g_{\mu\nu} = e^a_\mu e_{\nu b}$. При этом репер можно использовать для перевода индексов типа a в индексы типа μ и наоборот:

$$e^a_\mu T^\mu = T^a \,, \qquad e^\mu_a T^a = T^\mu \,. \tag{3.39}$$

Также введём дополнительную структуру $\omega^{ab}_\mu = -\omega^{ba}_\mu$, называемую Лоренц-связностью. Лоренц связность в реперном формализме играет схожую роль со связностью Леви-Чивита в метрическом формализме. В частности, при помощи Лоренц-связности можно определить понятия ковариантной производной D_μ и кривизны $R_{\mu\nu}{}^{ab}$:

$$\begin{aligned} D_\mu T^a &= \partial_\mu T^a + \omega^a_{\mu b} T^b \\ D_\mu T_a &= \partial_\mu T_a - \omega^b_{\mu a} T_b \,, \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = \partial_\mu \omega^{ab}_\nu - \partial_\nu \omega^{ab}_\mu + \omega^a_{\mu k} \omega^{kb}_\nu - \omega^a_{\nu k} \omega^{kb}_\mu \,. \tag{3.41}$$

Для дальнейшего удобства можно перейти на язык форм. Для этого определим 1-формы $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ и $\omega^{ab} = \omega^{ab}_\mu dx^\mu$, а также 2-форму $R^{ab} = R_{\mu\nu}{}^{ab} dx^\mu \wedge dx^\mu$ и выпишем действие для гравитации в терминах этих величин:

$$S[e,\omega] = \frac{1}{\kappa_1} \int \varepsilon_{abcd} R^{ab}(\omega) e^c e^d \,. \tag{3.42}$$

Данная компактная формулировка носит название формулировки Картана для гравитации. Выписанное действие является действием первого порядка.

Проварьировав его по ω^{ab}, мы получим уравнение (для краткости выпишем его на языке форм)

$$de^a + \omega^a{}_k e^k = 0\,, \tag{3.43}$$

которое называется уравнением нулевого кручения. Данное уравнение можно решить относительно Лоренц-связности, после чего подстановка решения в (3.42) даёт действие второго порядка.

Наконец, напишем действие для биграватации на реперном языке:

$$S[e,f] = \int \varepsilon_{abcd}(\frac{1}{\kappa_1}R^{ab}(e)e^c e^d + \frac{1}{\kappa_2}R^{ab}(f)f^c f^d + \frac{m^2}{\kappa_1+\kappa_2}A^{abcd})\,, \tag{3.44}$$

где $f^a = f^a_\mu dx^\mu$ - фоновый репер, соответствующий фоновой метрике $f_{\mu\nu} = f^a_\mu f^b_\nu \eta_{ab}$, и

$$A^{abcd} = C_0 e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + C_1 f^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + C_2 f^a \wedge f^b \wedge e^c \wedge e^d + \\ + C_3 f^a \wedge f^b \wedge f^c \wedge e^d + C_4 f^a \wedge f^b \wedge f^c \wedge f^d\,, \tag{3.45}$$

где $C_0, \ldots, C_4$ - произвольные константы.

В том, что потенциал (3.45) не приводит к появлению духов, можно убедиться, применив к нему ADM-разложение. При этом, как указывалось в предыдущем разделе, для отсутствия духовой степени свободы необходимо, чтобы массовый потенциал был линеен по функции хода N. Однако при ADM-разложении данная функция будет содержаться исключительно в компоненте e^0. В то же время по виду потенциала (3.45) очевидно, что благодаря антисимметризации e^0 в каждом слагаемом встречается лишь один раз, а значит (3.45) линеен по N.

Выбор констант $C_0, \ldots, C_4$ в потенциале (3.45) (ровно как и выбор констант $\beta_0, \ldots, \beta_4$ в потенциале (3.35)) не влияет на факт отсутствия духовой степени свободы. Тем не менее, обычно выбор этих констант фиксируется (хоть и не полностью) введением двух условий. Во-первых, несмотря на то, что пространство Минковского (то есть $e^a_\mu = \delta^a_\mu$) является решением для уравнений, получаемых при варьировании действия (3.42), наличие подобного решения для уравнений, получаемых при варьировании действия (3.44), не гарантировано. Для того, чтобы $e^a_\mu = \delta^a_\mu$ и $f^a_\mu = \delta^a_\mu$ было решением уравнений, следующих из (3.44), необходимо потребовать $4C_0 + 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$ и $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 = 0$. Во-вторых, при линеаризации действия (3.44) вокруг решений $e^a_\mu = \delta^a_\mu$ и $f^a_\mu = \delta^a_\mu$ и переходе к метрическому языку мы получим теорию Фирца-Паули, у которой квадрат массы будет умножен на линейную комбинацию констант $C_0, \ldots, C_4$. Приравняв эту комбинацию к единице, мы получим третье линейное уравнение на константы $C_0, \ldots, C_4$. Решение подобной системы имеет вид:

$$\begin{gathered} C_0 = 1 - \alpha + \beta\,, \qquad C_1 = -2 + 3\alpha - 4\beta\,, \\ C_2 = 1 - 3\alpha + 6\beta\,, \qquad C_3 = \alpha - 4\beta\,, \\ C_4 = \beta\,, \end{gathered} \tag{3.46}$$

где α и β - произвольные константы.

Несмотря на то, что действие (3.44), как было сказано раньше, не содержит в себе духовых степеней свободы, оно, вообще говоря, не эквивалентно действию (3.36). Для того, чтобы эти действия были эквивалентны, необходимо в случае реперной формулировки наложить дополнительное условие, а именно условие $f^a_\mu e_{\nu a} = f^a_\nu e_{\mu a}$. Данное условие называется калибровкой Дезера-ван-Невенхойзена. Подробнее о данной калибровке можно прочитать в работах [81—83].

Действие (3.44) инвариантно относительно диффеоморфизмов и локальных преобразований Лоренца обоих полей e^a и f^a одновременно. Это означает, что параметры диффеоморфизмов $\varepsilon^a = \varepsilon^\mu e^a_\mu$ и локальных преобразований Лоренца ε^{ab} должны быть одинаковыми для секторов "e" и "f". Поэтому формулировка первого порядка для бигравитации,

$$S[e,\omega, f,\tilde{\omega}] = \int \varepsilon_{abcd}(\kappa_1 R^{ab}(\omega)e^c e^d + \kappa_2 R^{ab}(\tilde{\omega}) f^c f^d + m^2 A^{abcd})\,, \tag{3.47}$$

инвариантна относительно следующих калибровочных преобразований:

$$\begin{gathered} \delta e^a = \mathrm{d}(e^a_\mu \varepsilon^\mu) + \omega^a{}_k e^k_\mu \varepsilon^\mu + i_\varepsilon(\mathrm{d}e^a + \omega^a_k e^k) - \varepsilon^a{}_b e^b \\ \delta\omega^{ab} = \mathrm{d}\varepsilon^{ab} + \omega^a{}_c \varepsilon^{cb} + \omega^b{}_c \varepsilon^{ac} \\ \delta f^a = \mathrm{d}(f^a_\mu \varepsilon^\mu) + \tilde{\omega}^a{}_k f^k_\mu \varepsilon^\mu + i_\varepsilon(\mathrm{d}f^a + \tilde{\omega}^a_k e^k) - \varepsilon^a{}_b f^b \\ \delta\tilde{\omega}^{ab} = \mathrm{d}\varepsilon^{ab} + \tilde{\omega}^a{}_c \varepsilon^{cb} + \tilde{\omega}^b{}_c \varepsilon^{ac} \end{gathered} \tag{3.48}$$

Несмотря на то, что действие (3.47) до этого отсутствовало в литературе, в том, что действие (3.47) эквивалентно действию (3.44) легко можно убедиться, проварьировав (3.47) по вспомогательным полям ω_μ^{ab} и $\widetilde{\omega}_\mu^{ab}$ (получив при этом условия нулевого кручения для секторов "e" и "f") и исключив их.

Легко увидеть, что условие $f^a_{[\mu}e_{\nu]a} = 0$ (его можно представить в более удобном виде: $e^\nu_{[a}f_{\nu b]} = 0$ или $f^a \wedge e_a = 0$) инвариантно относительно калибровочных преобразований (3.48). Более того, данное условие накладывает связь на $\widetilde{\omega}^{ab}$ и ω^{ab}, поскольку, как было сказано ранее, эти вспомогательные поля определяются по полям f^a и e^a при помощи уравнений нулевого кручения. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим уравнение, которое получается из действия (3.47) путём варьирования по связности $\widetilde{\omega}^{ab}$:

$$\mathrm{d}f^a + \widetilde{\omega}^a{}_k f^k = 0\,. \tag{3.49}$$

Домножим внешне данное уравнение на e^a и преобразуем получившееся выражение:

$$0 = \mathrm{d}f^a \wedge e_a + \widetilde{\omega}^a{}_k \wedge f^k \wedge e_a = \mathrm{d}(f^a \wedge e_a) + \mathrm{d}e^a \wedge f_a + \widetilde{\omega}^a_k \wedge e^k \wedge f_a \tag{3.50}$$

где в последнем слагаемом индексы k и a поменялись местами. Первое слагаемое в данном выражении равно 0, поскольку является ранее наложенной связью. Таким образом для того, чтобы равенство нулю всего выражения сохранялось, необходимо, чтобы выраженние $(\mathrm{d}e^a + \widetilde{\omega}^a{}_k \wedge e^k) \wedge f_a$ обращалось в 0. Этого можно добиться, если потребовать, чтобы выражение в скобках было уравнением нулевого кручения для ω^{ab}, то есть $(\mathrm{d}e^a + \omega^a{}_k \wedge e^k) = 0$, но для этого нужно потребовать выполнение условия $(\omega^{ab} - \widetilde{\omega}^{ab}) \wedge e_a \wedge f_b = 0$, которое, как легко убедиться, также является калибровочно инвариантным относительно (3.48).

Таким образом рассматриваемой системой является действие (3.47) с наложенными на него алгебраическими условиями

$$\begin{cases} (\omega^{ab} - \widetilde{\omega}^{ab}) \wedge e_a \wedge f_b = 0 \\ f^a \wedge e_a = 0\,. \end{cases} \tag{3.51}$$

3.5 Размерная редукция

Не смотря на то, что в предыдущем разделе описан способ написания массового потенциала бездуховой массивной теории биграфитации, существует также систематический способ получения подобной теории биграфитации из действия Картана для гравитации в размерности $n = 5$. Данный способ называется размерной редукцией через дискретизацию. Для формализма второго порядка он описан в работе [79]. Данный раздел будет посвящён применению данного метода к формализму первого порядка.

Прежде, чем описать процедуру дискретизации, важно напомнить, как выглядит в общем случае алгоритм размерной редукции:

1. Путём использования симметрий теории, уравнений движения и/или переопределения переменных выделяется или исключается $n+1$-я компонента поля.
2. Во всех компонентах поля фиксируется функциональная зависимость от $n+1$-й компоненты зависимых переменных (координат базы).
3. Действие теории интегрируется по $n+1$-й компоненте, в результате чего получается действие для новой теории в размерности n.

Размерная редукция часто используется для построения действия для массивной теории по известной безмассовой теории. При этом вне зависимости от того, какая именно процедура размерной редукции используется, представленный алгоритм работает практически в любой из них. Различие же между подходами к размерной редукции в основном состоит в методах, используемых в шаге 2. Также важно отметить, что размерную редукцию важно интерпретировать в первую очередь именно как удобный технический приём для генерации новых теорий, вид которых может быть не вполне известен, по хорошо известным старым, а не как фундаментальный принцип физики.

Рассмотрим действие Картана для гравитации в размерности $n = 5$.

$$S[e, \omega] = \int \varepsilon_{ABCDE}[d\omega^{AB} + \omega^{A}{}_{F}\omega^{FB}]e^{C}e^{D}e^{E}\,, \tag{3.52}$$

где $A, B, \ldots, E = 0, \ldots, 4$.

Проведём ADM-разложение для данного действия. Пусть $x^{\mathfrak{A}} = (y, x^{\mu})$ (здесь готическими индексами обозначены индексы базы, в то время как заглавными латинскими - индексы слоя, по аналогии с греческими и латинскими индексами, которые были использованы в прошлом разделе для $n = 4$). Тогда ADM-разложение для репера e^A выглядит следующим образом:

$$e^A = \begin{bmatrix} e^a_\mu(dx^\mu + N^\mu dy) \\ N dy \end{bmatrix} , \tag{3.53}$$

где N и N^μ, как и ранее, это функции хода и сдвига. Далее, следуя пункту 1 алгоритма, необходимо исключить $n+1$-е компоненты репера и связности, то есть e^a_4, e^4_4, ω^{ab}_4, ω^{a4}_μ и ω^{a4}_4. Для этого можно использовать калибровочные симметрии имеющейся теории. В частности, размерность группы Лоренца для действия (3.52) равна $\frac{5(5-1)}{2} = 10$. Используем 4 из 10 преобразований Лоренца для того, чтобы перейти к синхронной калибровке, то есть к калибровке, в которой $N = 1$ и $N^\mu = 0$:

$$e^i = \begin{bmatrix} e^a_\mu dx^\mu \\ dy \end{bmatrix} . \tag{3.54}$$

Таким образом осталось исключить только ω^{ab}_4, ω^{a4}_μ и ω^{a4}_4. Для этого проварьируем действие (3.52) по $\omega^{AB}_{\mathfrak{A}}$ и выпишем решение получившегося уравнения нулевого кручения:

$$\begin{aligned} \omega^{ab}_\mu &= 2e^{\nu[a}\partial_{[\mu}e^{b]}_{\nu]} - e^{\lambda c}e^{\rho d}\partial_{[\lambda}e_{\rho]g}e^g_\mu \,, \\ \omega^{ab}_4 &= \frac{1}{2}(e^{\mu a}\partial_4 e^b_\mu - e^{\mu b}\partial_4 e^a_\mu) \,, \\ \omega^{a4}_\mu &= \frac{1}{2}(\partial_4 e^a_\mu + e^{\nu a}e^b_\mu \partial_4 e_{\nu b}) \,, \\ \omega^{a4}_4 &= 0 \,, \end{aligned} \tag{3.55}$$

где $\partial_4 = \frac{\partial}{\partial y}$.

Поскольку неиспользованными остались 6 преобразований Лоренца, и ω^{ab}_4 имеет как раз 6 независимых компонент, можно использовать оставшиеся преобразования Лоренца для того, чтобы положить $\omega^{ab}_4 = 0$. В то же время ω^{a4}_μ и ω^{a4}_4 можно исключить, подставив их значение обратно в действие (3.52). В результате получим:

$$S[e,\omega] = \int \varepsilon_{abcd}(\mathrm{d}\omega^{ab}\wedge e^c\wedge e^d + \omega^a{}_g\omega^{gb}\wedge e^c\wedge e^d + K^a\wedge K^b\wedge e^c\wedge e^d)\wedge dy\,. \tag{3.56}$$

Здесь, как и ранее, K^a - это вторая фундаментальная форма. В данном случае она определяется соотношениями $K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(e_{\mu a}\partial_4 e^a_\nu + e_{\nu a}\partial_4 e^a_\mu)$, $K^a_\mu = e^{\nu a}K_{\mu\nu}$ и $K^a = K^a_\mu dx^\mu$. Несложно увидеть, что действие (3.56) является действием второго порядка благодаря слагаемым, содержащим вторую фундаментальную форму. Тем не менее, данный результат является лишь промежуточным в процедуре размерной редукции.

На этом заканчивается первый шаг алгоритма размерной редукции, а значит мы можем перейти ко второму. Для этого дискретизируем переменную y, то есть от непрерывной переменной y перейдём к дискретному набору точек y_i, $i = 1,\dots,N$, где N - количество точек. При этом репер e^a_μ перейдёт в N реперов ${e_i}^a_\mu(x) = e^a_\mu(x,y_i)$, а связность ω^{ab}_μ - в N связностей ${\omega_i}^{ab}_\mu(x) = \omega^{ab}_\mu(x,y_i)$. В качестве же производной репера по y (то же самое справедливо и для связности, однако производная по переменной y отсутствует в действии (3.56)) запишем разность реперов в соседних точках y_i, домноженную на константу m. Итого, сформулированные правила дискретизации имеют вид:

$$\begin{aligned} y &\to y_i \\ e^a_\mu(x,y) &\to {e_i}^a_\mu(x) = e^a_\mu(x,y_i) \\ \omega^{ab}_\mu(x,y) &\to {\omega_i}^{ab}_\mu(x) = \omega^{ab}_\mu(x,y_i) \\ \partial_4 e^a_\mu(x,y) &\to m({e_{i+1}}^a_\mu(x) - {e_i}^a_\mu(x)) \end{aligned}$$

Здесь важно отметить, что последнее правило по дискретизации для производной не является универсальным: его можно было бы заменить на любую другую линейную комбинацию реперов ${e_i}^a_\mu$. Однако, данный выбор является достаточно естественным и, как мы увидим далее, уже он приводит к простейшему виду потенциала для бигравитации.

Легко увидеть, что при рассмотренных правилах дискретизации вторая фундаментальная форма переходит в разность двух реперов $K^a_\mu \to m({e_{i+1}}^a_\mu(x) - {e_i}^a_\mu(x))$. А поскольку мы перешли от непрерывной переменной y к дискретной переменной y_i, то и интегрирование по y заменим на суммирование по i. Наконец, положим $N = 2$ и введём обозначения ${e_1}^a_\mu = e^a_\mu$, ${e_2}^a_\mu = f^a_\mu$, ${\omega_1}^{ab}_\mu = \omega^{ab}_\mu$ и ${\omega_1}^{ab}_\mu = \widetilde{\omega}^{ab}_\mu$. Тогда легко увидеть, что второе слагаемое в (3.56) перейдёт в частный случай знакомого потенциала (3.45). Итоговое действие будет иметь вид:

$$S[e,f,\omega,\widetilde{\omega}] = \int \varepsilon_{abcd}(\kappa_1 d\omega^{ab}e^c e^d + \kappa_2 d\widetilde{\omega}^{ab} f^c f^d + \kappa_1 \omega^a{}_g \omega^{gb} e^c e^d + \\ + \kappa_2 \widetilde{\omega}^a{}_g \widetilde{\omega}^{gb} f^c f^d + m^2 A^{abcd}) \,, \quad (3.57)$$

где

$$A^{abcd} = e^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d - 2f^a \wedge e^b \wedge e^c \wedge e^d + f^a \wedge f^b \wedge e^c \wedge e^d \qquad (3.58)$$

Таким образом при помощи размерной редукции путём дискретизации было получено действие (3.47) в случае $\alpha = \beta = 0$.

3.6 Бигравитация в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма

Перейдём к построению минимальной предсимплектической формулировки биградитации в рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма. Отметим сразу, что рассмотрение биградитации с произвольным потенциалом (3.45) является крайне затруднительным. Поэтому в данной работе будет рассмотрен частный случай, соответствующий $C_1 = C_3 = 0$. Тем не менее, данное ограничение охватывает также и описываемый ранее "физический"сектор биградитации, соответствующий $\alpha = 1$ и $\beta = \frac{1}{4}$ (и, соответственно, $C_0 = \frac{1}{4}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$ и $C_4 = \frac{1}{4}$). Пусть координатами на расслоении $E = \mathcal{M} \times T[1]X \to T[1]X$ являются x^a, θ^a, а также ξ^a, $\mathrm{gh}(\xi^a) = 1$, ρ^{ab}, $\mathrm{gh}(\rho^{ab}) = 1$ $\widetilde{\xi}^a$, $\mathrm{gh}(\widetilde{\xi}^a) = 1$ и $\widetilde{\rho}^{ab}$, $\mathrm{gh}(\widetilde{\rho}^{ab}) = 1$, а также Q-дифференциал, который в данных координатах будет иметь вид:

$$\begin{gathered} Q\xi^a = \rho^a{}_k \xi^k \\ Q\rho^{ab} = \rho^a{}_k \rho^{kb} + \frac{4C_0 m^2}{\kappa_1}\xi^a\xi^b + \frac{2C_2 m^2}{\kappa_1}\widetilde{\xi}^a\widetilde{\xi}^b \\ Q\widetilde{\xi}^a = \widetilde{\rho}^a{}_k \widetilde{\xi}^k \\ Q\widetilde{\rho}^{ab} = \widetilde{\rho}^a{}_k \widetilde{\rho}^{kb} + \frac{2C_2 m^2}{\kappa_2}\xi^a\xi^b + \frac{4C_4 m^2}{\kappa_2}\widetilde{\xi}^a\widetilde{\xi}^b \,. \end{gathered} \qquad (3.59)$$

При этом легко увидеть, что данный Q-дифференциал не является нильпотентным, поскольку $Q\rho^{ab}$ и $Q\widetilde{\rho}^{ab}$ содержат $\frac{2C_2m^2}{\kappa_1}\widetilde{\xi}^a\widetilde{\xi}^b$ и $\frac{2C_2m^2}{\kappa_2}\xi^a\xi^b$ соответственно.

Поскольку динамический сектор бигравитации содержит отдельно секторы ”e” и ”f”, а их смешивание происходит в потенциале, логично выбрать в качестве предсимплектической структуры сумму предсимплектических структур из секторов ”e” и ”f” соответственно. Сразу отметитм, что в данной главе, в отличие от двух предыдущих, симплектическая структура будет обозначаться заглавной буквой Ω вместо строчной ω для того, чтобы исключить путаницу с Лоренц-связностью ω^{ab}.

$$\Omega = \varepsilon_{abcd}(\kappa_1 d\rho^{ab} d\xi^c \xi^d + \kappa_2 d\widetilde{\rho}^{ab} d\widetilde{\xi}^c \widetilde{\xi}^d) = \Omega_{(e)} + \Omega_{(f)}\,. \tag{3.60}$$

Очевидно, что первая аксиома обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма (2.38) для такой предсимплектической структуры будет выполнена. Легко убедиться, что это справедливо и для второй аксиомы:

$$i_Q\Omega = \varepsilon_{abcd}\mathrm{d}(\frac{1}{2}\kappa_1 \rho^a{}_k \rho^{kb} \xi^c \xi^d + \frac{1}{2}\kappa_2 \widetilde{\rho}^a{}_k \widetilde{\rho}^{kb} \widetilde{\xi}^c \widetilde{\xi}^d + C_0 m^2 \xi^a \xi^b \xi^c \xi^d + C_2 m^2 \widetilde{\xi}^a \widetilde{\xi}^b \xi^c \xi^d + \\ + C_4 m^2 \widetilde{\xi}^a \widetilde{\xi}^b \widetilde{\xi}^c \widetilde{\xi}^d)\,. \tag{3.61}$$

При проверке третьей аксиомы возникает выражение

$$i_Q i_Q \Omega = 4C_2 m^2 \varepsilon_{abcd}(\widetilde{\xi}^a \widetilde{\xi}^b \rho^c{}_k \xi^k \xi^d + \xi^a \xi^b \widetilde{\rho}^c{}_k \widetilde{\xi}^k \widetilde{\xi}^d) = Q\mathcal{H}\,. \tag{3.62}$$

То есть, третья аксиома (2.38) оказывается невыполненной. Тем не менее, из того, что на всём расслоении $E \to T[1]X$ аксиомы (2.38) не выполняются, не следует тот факт, что они не выполняются на какой-либо его части. И действительно, можно ввести систему уравнений

$$\begin{cases} (\rho_{ab} - \widetilde{\rho}_{ab})\xi^a \widetilde{\xi}^b = 0 \\ \xi^a \widetilde{\xi}_a = 0\,, \end{cases} \tag{3.63}$$

определяющую сингулярную поверхность $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, на которой для бигравитации выполняются аксиомы (2.38). Взаимосвязь между условиями фиксации калибровки Дезера-ван Невенхойзена и поверхностью $\mathcal{N}$ будет раскрыта в следующем.

3.7 Квазирегулярность поверхности связей

Прежде, чем строить BV-формулировку бигравитации, полезно взглянуть на то, как данная теория устроена на сечениях $\sigma : T[1]X \to \mathcal{N}$. На данных сечениях $\sigma^*(\rho^{ab}) = \omega^{ab}_{\mu}\theta^{\mu}$, $\sigma^*(\widetilde{\xi}^{a}) = f^{a}_{\mu}\theta^{\mu}$, $\sigma^*(\widetilde{\rho}^{ab}) = \widetilde{\omega}^{ab}_{\mu}\theta^{\mu}$. Таким образом первое уравнение системы (3.63) принимает вид $(\omega_{ab} - \widetilde{\omega}_{ab}) \wedge e^a \wedge f^b = 0$, а второе - $e^a \wedge f_a = 0$. Таким образом система (3.63) воспроизводит калибровку Дезера-ван Невенхойзена на сечениях. Действие бигравитации на этих сечениях принимает вид (3.47).

Перейдём теперь к построению BV-формулировки для бигравитации. Для этого рассмотрим компоненты суперсечений $\widehat{\sigma} : T[1]X \to \mathcal{M}$ для данной теории (для удобства здесь и далее также будем говорить о секторах "e" и "f", помня при этом о нетривиальном распределении степеней свободы между ними).

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^*\xi^a &= \xi^a + e^a_{\mu}\theta^{\mu} + \frac{1}{2!}\xi^a_{\mu\nu}\theta^{\mu}\theta^{\nu} + \frac{1}{3!}\xi^a_{\mu\nu\lambda}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\theta^{\lambda} + \frac{1}{4!}\xi^a_{\mu\nu\lambda\rho}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\theta^{\lambda}\theta^{\rho} \\
\widehat{\sigma}^*\rho^{ab} &= \rho^{ab} + \omega^{ab}_{\mu}\theta^{\mu} + \frac{1}{2!}\rho^{ab}_{\mu\nu}\theta^{\mu}\theta^{\nu} + \frac{1}{3!}\rho^{ab}_{\mu\nu\lambda}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\theta^{\lambda} + \frac{1}{4!}\rho^{ab}_{\mu\nu\lambda\rho}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\theta^{\lambda}\theta^{\rho} \qquad (3.64)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^*\widetilde{\xi}^a &= \widetilde{\xi}^a + f^a_{\mu}\theta^{\mu} + \frac{1}{2!}\widetilde{\xi}^a_{\mu\nu}\theta^{\mu}\theta^{\nu} + \frac{1}{3!}\widetilde{\xi}^a_{\mu\nu\lambda}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\theta^{\lambda} + \frac{1}{4!}\widetilde{\xi}^a_{\mu\nu\lambda\rho}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\theta^{\lambda}\theta^{\rho} \\
\widehat{\sigma}^*\widetilde{\rho}^{ab} &= \widetilde{\rho}^{ab} + \widetilde{\omega}^{ab}_{\mu}\theta^{\mu} + \frac{1}{2!}\widetilde{\rho}^{ab}_{\mu\nu}\theta^{\mu}\theta^{\nu} + \frac{1}{3!}\widetilde{\rho}^{ab}_{\mu\nu\lambda}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\theta^{\lambda} + \frac{1}{4!}\widetilde{\rho}^{ab}_{\mu\nu\lambda\rho}\theta^{\mu}\theta^{\nu}\theta^{\lambda}\theta^{\rho} \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

Рассмотрим предсимплектическую структуру на этих суперсечениях. В секторе "e" она принимает вид

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_{(e)} = \varepsilon_{abcd}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(&\frac{1}{24}d\rho^{ab}_{\mu\nu\lambda\rho}d\xi^c\xi^d - \frac{1}{6}d\rho^{ab}_{\mu\nu\lambda}de^c_{\rho}\xi^d + \frac{1}{6}d\rho^{ab}_{\mu\nu\lambda}d\xi^c e^d_{\rho} + \frac{1}{4}d\rho^{ab}_{\mu\nu}d\xi^c_{\rho\lambda}\xi^d + \\
&+ \frac{1}{2}d\rho^{ab}_{\mu\nu}de^c_{\lambda}e^d_{\rho} + \frac{1}{4}d\rho^{ab}_{\mu\nu}d\xi^c\xi^d_{\lambda\rho} - \frac{1}{6}d\omega^{ab}_{\mu}d\xi^c_{\nu\lambda\rho}\xi^d + \frac{1}{2}d\omega^{ab}_{\mu}d\xi^c_{\nu\lambda}e^d_{\rho} - \frac{1}{2}d\omega^{ab}_{\mu}de^c_{\nu}\xi^d_{\lambda\rho} + \\
&+ \frac{1}{6}d\omega^{ab}_{\mu}d\xi^c\xi^d_{\nu\lambda\rho} + \frac{1}{24}d\rho^{ab}d\xi^c_{\mu\nu\lambda\rho}\xi^d + \frac{1}{6}d\rho^{ab}d\xi^c_{\mu\nu\lambda}e^d_{\rho} + \frac{1}{4}d\rho^{ab}d\xi^c_{\mu\nu}\xi^d_{\lambda\rho} + \frac{1}{6}d\rho^{ab}de^c_{\mu}\xi^d_{\nu\lambda\rho} + \\
&+ \frac{1}{24}d\rho^{ab}d\xi^c\xi^d_{\mu\nu\lambda\rho})\,. \qquad (3.66)
\end{aligned}$$

Аналогичный вид она имеет и в секторе "f". Данная предсимплектическая структура явным образом не имеет канонический вид. С одной стороны, можно было бы, используя теорему Дарбу, привести данную структуру к каноническому виду в обоих секторах. Однако, во-первых, данная задача является крайне трудоёмкой, а во-вторых, секторы ”e” и ”f” не являются независимыми на поверхности $\mathcal{N}$ (а также на её продолжении на суперсечения, которое обозначим $\bar{\mathcal{N}}$), что ещё сильнее осложняет данную процедуру. В качестве альтернативы можно рассмотреть особую точку p, определяемую условиями $e^a_\mu = \delta^a_\mu$ и $\xi^a_{\dots} = \tilde{\xi}^a_{\dots} = 0$. В данной точке предсимплектическая структура имеет вид

$$\bar{\Omega}_{(e)} = (d\rho^{ab}_{abc}d\xi^c + d\omega^{ab}_c d\xi^c_{ab} + d\rho^{ab}d\xi^c_{abc} + 2d\rho^{ab}_{bc}de^c_a)\,, \tag{3.67}$$

а также аналогичный вид в секторе ”f”. Данная предсимплектическая структура является регулярной на суперсечениях. Доказательство этого факта, основанное на том, что ранг предсимплектической структуре не может измениться в окрестности точки, представлено в статье [42].

Прежде, чем рассмотреть данную предсимплектическую структуру на продолженной на суперсечения поверхности $\bar{\mathcal{N}}$, важно рассмотреть эту поверхность отдельно. Несмотря на то, что поверхность $\mathcal{N}$, очевидно, является сингулярной, её продолжение на суперсечения, $\bar{\mathcal{N}}$, вообще говоря, может быть регулярным. Подобные поверхности, по аналогии с предсимплектическими структурами из прошлой главы, мы будем называть квазирегулярными. Более того, $\mathcal{N}$ как раз оказывается квазирегулярной поверхностью. Для того, чтобы доказать это, необходимо показать, что продолженная на суперсечения система уравнений (3.63), может быть решена в каждом порядке однородности по θ^a. Рассмотрим для начала первый порядок:

$$\begin{cases} (\omega_{\mu ab} - \tilde{\omega}_{\mu ab})\xi^a\tilde{\xi}^b - (\rho_{ab} - \tilde{\rho}_{ab})e^a_\mu\tilde{\xi}^b + (\rho_{ab} - \tilde{\rho}_{ab})\xi^a f^b_\mu = 0 \\ \xi^a f_{a\mu} - e^a_\mu\tilde{\xi}_a = 0 \end{cases} \tag{3.68}$$

Из второго уравнения данной системы получим $\tilde{\xi}_b = \xi^a f_{\mu a} e^\mu_b$. Для решения же первого уравнения (а также для решения аналогичных уравнений в последующих порядках разложения по θ^a) удобно ввести обозначение $\Sigma^{ab}_{\dots} = \rho^{ab}_{\dots} - \tilde{\rho}^{ab}_{\dots}$. Тогда, первое уравнение (3.68) можно переписать в следующем виде:

$$\xi^m(\Sigma_{\mu|mb}\xi^l f_{\nu l}e^{\nu b} + \frac{1}{2}\Sigma_{mb}f^b_\mu - \frac{1}{2}\Sigma_{am}f^a_\mu - \Sigma_{ab}f_{\nu m}e^{\nu b}e^a_\mu) = 0\,. \tag{3.69}$$

Поскольку мы интересуемся вопросом разрешимости (или неразрешимости) данных уравнений, а не подробностями того, как выглядит их общее решение, для дальнейшего удобства можно перейти к подмногообразию p' : $e^a_\mu = \delta^a_\mu$. На этом подмногообразии, использовав тот факт, что $\Sigma_{ak} f^k_b = \Sigma_{ab}$, легко увидеть решение данного уравнения относительно Σ_{ab}: $\Sigma_{ab} = \frac{1}{2}\Sigma_{[a|bk]}\xi^k$

Второй порядок имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Sigma^{ab}(\xi)\xi_{\mu\nu|a}\widetilde{\xi}_b + \frac{1}{2}\Sigma^{ab}(\xi)\xi_a\widetilde{\xi}_{\mu\nu|b} + \Sigma^{ab}_{[\mu}e_{\nu]a}\widetilde{\xi}_b - \Sigma^{ab}_{[\mu}\xi_a f_{\nu]b} + \Sigma^{ab}(\xi)e_{[\mu a}f_{\nu]b} + \\ + \frac{1}{2}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}\xi_a\widetilde{\xi}_b = 0 \\ \xi^a\widetilde{\xi}_{\mu\nu a} + \frac{1}{2}e^a_\mu f_{\nu a} - \frac{1}{2}e^a_\nu f_{\mu a} + \xi^a_{\mu\nu}\widetilde{\xi}_a = 0\,, \end{cases} \tag{3.70}$$

Первое уравнение данной системы может быть решено относительно Σ^{ab}_μ. Действительно, для начала перепишем данное уравнение в виде $\xi^a(\ldots)$. На подмногообразии p' выражение в скобках имеет вид:

$$\frac{1}{2}\Sigma_{mn|ab}\xi^b + \frac{1}{2}\Sigma_{m|na} - \frac{1}{2}\Sigma_{n|ma} - \frac{1}{2}\Sigma_{m|an} + \frac{1}{2}\Sigma_{n|am} + \frac{1}{8}\Sigma_{b|ak}\xi^k\xi^b_{mn} - \frac{1}{8}\Sigma_{a|bk}\xi^k\xi^b_{mn} + \\ + \frac{1}{8}\Sigma_{b|ak}\xi^k\widetilde{\xi}^b_{mn} - \frac{1}{8}\Sigma_{a|bk}\xi^k\widetilde{\xi}^b_{mn} + \frac{1}{2}\Sigma_{m|na} - \frac{1}{2}\Sigma_{n|am} = 0 \tag{3.71}$$

Будем искать решение для $\Sigma_{[m|ab]}$ в виде ряда по ξ^a. В первом порядке $\Sigma_{[m|na]} = -\frac{1}{3}\Sigma_{[mn|a]b}\xi^b$. Подставляя это выражение в (3.71), мы получим выражение, связывающее $\Sigma_{mn|ab}$, ξ^a, ξ^a_{mn} и $\widetilde{\xi}^a_{mn}$, которое будет являться вторым членом ряда, и так далее. Данная процедура (а, следовательно, и сам ряд) оказывается конечной благодаря тому, что $|\xi_a| = 1$, а значит (при учёте $n = 4$!) $\xi_a\xi_b\xi_c\xi_d\xi_e = 0$. И, поскольку, как уже было отмечено ранее, мы не интересуемся конкретным решением, полный вид ряда в данной работе будет опущен.

Второе уравнение системы (3.70) может быть решено относительно антисимметричной компоненты $f^{ba} = e^{\mu b}f^a_\mu$. Для этого умножим данное уравнение на $e^{\mu c}e^{\nu d}$:

$$f^c_\nu e^{\nu d} - f^d_\nu e^{\nu c} = f^{[dc]} = -e^{\mu c}e^{\nu d}(\xi^a\widetilde{\xi}_{\mu\nu a} + \xi^a_{\mu\nu}\xi^b f_{\kappa b}e^\kappa_a)\,. \tag{3.72}$$

Третий порядок разложения по θ^a продолженной системы (с учётом решения предыдущих порядков) даёт:

$$\begin{cases} \frac{1}{3!}\Sigma_{\mu\nu\lambda|ab}\xi^a\widetilde{\xi}^b - \frac{1}{2}\Sigma_{[\mu\nu|ab}e^a_{\lambda]}\widetilde{\xi}^b + \frac{1}{2}\Sigma_{[\mu\nu|ab}\xi^a f^b_{\lambda]} + \frac{1}{2}\Sigma_{[\mu|ab}(\xi)\xi^a_{\nu\lambda]}\widetilde{\xi}^b + \\ +\frac{1}{2}\Sigma_{[\mu|ab}(\xi)\xi^a\widetilde{\xi}^a_{\nu\lambda]} + \Sigma_{[\mu|ab}(\xi)e^a_{\nu}f^b_{\lambda]} - \frac{1}{3!}\Sigma_{ab}(\xi)\xi^a_{\mu\nu\lambda}\widetilde{\xi}^b + \frac{1}{2}\Sigma_{ab}(\xi)\xi^a_{[\mu\nu}f^b_{\lambda]} - \\ -\frac{1}{2}\Sigma_{ab}(\xi)e^a_{[\mu}\widetilde{\xi}^b_{\nu\lambda]} + \frac{1}{3!}\Sigma_{ab}(\xi)\xi^a\widetilde{\xi}^b_{\mu\nu\lambda} = 0 \\ \xi^a\widetilde{\xi}_{\mu\nu\lambda a} - \frac{1}{3}e^a_{[\mu}\widetilde{\xi}_{\nu\lambda]a} + \frac{1}{3}\xi^a_{[\mu\nu}f_{\lambda]a} - \xi^a_{\mu\nu\lambda}\xi_b f^{\tau b}e_{\tau a} = 0 \end{cases} \tag{3.73}$$

Алгоритм действий, использованный ранее, работает и с первым уравнением системы (3.73): выделим ξ^a в отдельный множитель, выпишем оставшийся множитель на p' и найдём решение в виде ряда по ξ^a. Поскольку данная процедура работает и в этом случае, первое уравнение системы (3.73) может быть решено относительно $\Sigma_{[mn|ab]}$.

Второе уравнение системы (3.73) может быть решено тем же способом, что и второе уравнение системы (3.70). Домножим второе уравнение из (3.73) на $e^{\mu m}e^{\nu n}e^{\lambda l}$ и заметим, что полученное уравнение решается относительно полностью антисимметричного тензора $\frac{1}{3}\widetilde{\xi}^{m|nl} - \frac{1}{3}\widetilde{\xi}^{m|nl} - \frac{1}{3}\widetilde{\xi}^{m|nl}$.

Наконец, четвёртый, последний, порядок разложения продолженной системы (3.63) по θ^a, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{4!}\Sigma_{\mu\nu\lambda\rho|ab}\xi^a\widetilde{\xi}^b + \frac{1}{3!}\Sigma_{[\mu\nu\lambda|ab}e^a_{\rho]}\widetilde{\xi}^b - \frac{1}{3!}\Sigma_{[\mu\nu\lambda|ab}\xi^a f^b_{\rho]} + \frac{1}{4}\Sigma_{[\mu\nu|ab}\xi^a_{\lambda\rho]}\widetilde{\xi}^b + \\ +\frac{1}{2}\Sigma_{[\mu\nu|ab}e^a_{\lambda}f^b_{\rho]} + \frac{1}{4}\Sigma_{[\mu\nu|ab}\xi^a\widetilde{\xi}^b_{\lambda\rho]} + \frac{1}{3!}\Sigma_{[\mu|ab}\xi^a_{\nu\lambda\rho]}\widetilde{\xi}^b - \frac{1}{2}\Sigma_{[\mu|ab}\xi^a_{\nu\lambda}f^b_{\rho]} + \\ +\frac{1}{2}\Sigma_{[\mu|ab}e^a_{\nu}\widetilde{\xi}^b_{\lambda\rho} - \frac{1}{3!}\Sigma_{[\mu|ab}\xi^a\widetilde{\xi}^b_{\nu\lambda\rho]} + \frac{1}{4!}\Sigma_{ab}\xi^a_{\mu\nu\lambda\rho}\widetilde{\xi}^b + \frac{1}{3!}\Sigma_{ab}\xi^a_{[\mu\nu\lambda}f^b_{\rho]} + \\ +\frac{1}{4}\Sigma_{ab}\xi^a_{[\mu\nu}\widetilde{\xi}^b_{\lambda\rho]} + \frac{1}{3!}\Sigma_{ab}e^a_{[\mu}\widetilde{\xi}^b_{\nu\lambda\rho]} + \frac{1}{4!}\Sigma_{ab}\xi^a\widetilde{\xi}^b_{\mu\nu\lambda\rho} = 0 \\ \xi^a\widetilde{\xi}_{a|\mu\nu\lambda\rho} + \frac{1}{4}e^a{}_{[\mu}\widetilde{\xi}_{a|\nu\lambda\rho]} + \frac{1}{6}\xi^a{}_{[\mu\nu}\widetilde{\xi}_{a|\lambda\rho]} + \frac{1}{4}\xi^a{}_{[\mu\nu\lambda}f_{a|\rho]} + \xi^a{}_{\mu\nu\lambda\rho}\widetilde{\xi}_a = 0 \end{cases} \tag{3.74}$$

Вновь, для первого уравнения используем прежний трюк, который даст решение для $\Sigma_{[mnl|ab]}$ в виде ряда по ξ^a, в то время как второе уравнение (3.74) домножим на $e^{\mu m}e^{\nu n}e^{\lambda l}e^{\rho r}$.

Таким образом продолжение $\mathcal{N}$ на суперсечения является регулярным, а значит сама поверхность $\mathcal{N}$ является квазирегулярной в смысле данного ранее определения.

Рассмотрим теперь сектор "f" предсимплектической структуры. В той же точке p он имеет вид.

$$\bar{\Omega}_{(f)} = (d\widetilde{\rho}^{ab}_{abc}d\widetilde{\xi}^c + d\widetilde{\omega}^{ab}_c d\widetilde{\xi}^c_{ab} + d\widetilde{\rho}^{ab}d\widetilde{\xi}^c_{abc} + 2d\widetilde{\rho}^{ab}_{bc}df^c_a) \tag{3.75}$$

Тем не менее, при ограничении на $\bar{\mathcal{N}}$ $\bar{\Omega}_{(f)}$, в отличие от $\bar{\Omega}_{(e)}$, может претерпеть изменения, поскольку не все компоненты суперсечений в секторе "f" на $\bar{\mathcal{N}}$ независимы (впрочем, данное утверждение неинвариантно: в силу симметрий связей можно было бы, наоборот, сделать зависимым сектор "e". Однако в данной работе именно сектор "f" будет рассматриваться зависимым). В частности, зависимыми являются полностью антисимметричные компоненты тензоров $\widetilde{\xi}^{a}_{\dots}$ - они определяются антисимметричными компонентами $\xi^{a}_{\dots}$ (в то время как $\widetilde{xi}^{a} = \xi^{a}$ на $\bar{\mathcal{N}}$). Данные антисимметричные компоненты далее будут обозначаться как $\overset{-}{\widetilde{\xi}}{}^{a}_{\dots} \overset{def}{=} \overset{-}{\xi}{}^{a}_{\dots}$ для оставшихся независимыми на $\bar{\mathcal{N}}$ компонент $\widetilde{\xi}^{a}_{\dots}$ (то есть для Юнговских крюков) будем использовать обозначение $\overset{+}{\widetilde{\xi}}{}^{a}_{\dots}$. Те же обозначения будут использоваться для зависимых $(-)$ и независимых $(+)$ компонент $\widetilde{\rho}^{ab}_{\dots}$ с единственной разницей, что независимыми и зависимыми компонентами на $\bar{\mathcal{N}}$ в данном случае являются приводимые тензорные компоненты: в качестве $\overset{+}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{\dots}$ подразумевается антисимметризация первого индекса с теми, что стоят в многоточии.

Рассмотрим внимательнее решения для $\overset{-}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{\dots}$ продолженной на суперсечения системы (3.63):

$$\overset{-}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{\dots} = \overset{-}{\rho}{}^{ab}_{\dots} + series(\xi)\,. \tag{3.76}$$

Таким образом $\mathrm{d}\overset{-}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{\dots}$ отличается в точке p от $\mathrm{d}\overset{-}{\rho}{}^{ab}_{\dots}$ только в случае наличия во втором слагаемом (3.76) линейных слагаемых по ξ^{a}. В силу того, что при решении каждого из последующих порядков по θ^{a} в коэффициенты рядов $\overset{-}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{\dots}$ сами начинали зависеть от ξ^{a}, подобный линейный порядок присутствует лишь в $\overset{-}{\widetilde{\rho}}_{mnl|ab}$.

$$\overset{-}{\widetilde{\rho}}_{mnl|ab} = \rho_{[mnl|ab]} + \frac{1}{8}(\rho_{[mnla|b]r} - \widetilde{\rho}_{[mnla|b]r})\xi^{r} + \dots \tag{3.77}$$

Ряды всех остальных компонент $\overset{-}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{\dots}$ начинаются как минимум с $\xi^{a}\xi^{b}$, таким образом для них в точке p справедливо $\mathrm{d}\overset{-}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{\dots} = \mathrm{d}\overset{-}{\rho}{}^{ab}_{\dots}$. Более того, все члены в $\overset{-}{\widetilde{\rho}}_{[a}{}^{b}{}_{mnl]}$, за исключением первого, обращаются в 0 при взятии следа по a с m и b с n, в то время как именно этот след в дальнейшем нам и будет интересен. А потому для этой компоненты также справедливо $\mathrm{d}\overset{-}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{\dots} = \mathrm{d}\overset{-}{\rho}{}^{ab}_{\dots}$.

Таким образом, предсимплектическая структура бигравитации в секторе "f" в точке p принимает вид

$$\bar{\Omega}_{(f)} = (\mathrm{d}\overset{+}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{abc}\mathrm{d}\xi^{c} + \mathrm{d}\overset{+}{\widetilde{\omega}}{}^{ab}_{c}\mathrm{d}\overset{+}{\widetilde{\xi}}{}^{c}_{ab} + \mathrm{d}\overset{-}{\omega}{}^{ab}_{c}\mathrm{d}\overset{-}{\xi}{}^{c}_{ab} + \mathrm{d}\rho^{ab}d\overset{+}{\widetilde{\xi}}{}^{c}_{abc} + 2\mathrm{d}\overset{+}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{bc}\mathrm{d}f^{c}_{a})\,. \tag{3.78}$$

Тогда для полного предсимплектической структуры (сектора "e" и "f" вместе) имеем

$$\bar{\Omega} = (\mathrm{d}\xi^{*}_{c}\mathrm{d}\xi^{c} + \mathrm{d}\omega^{ab}_{c}\mathrm{d}\omega^{*c}{}_{ab} + \mathrm{d}\rho^{ab}\mathrm{d}\rho^{*}_{ab} + \mathrm{d}e^{*a}{}_{c}\mathrm{d}e^{c}_{a} + \mathrm{d}\widetilde{\omega}^{ab}_{c}\mathrm{d}\widetilde{\omega}^{*c}{}_{ab} + \mathrm{d}f^{*a}{}_{c}\mathrm{d}f^{c}_{a})\,, \tag{3.79}$$

где $\xi^{*}_{c} = \rho^{ab}_{abc} + \overset{+}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{abc}$, $\omega^{*c}{}_{ab} = \xi^{c}_{ba}$, $\rho^{*}_{ab} = \xi^{c}_{abc} + \overset{+}{\widetilde{\xi}}{}^{c}_{abc}$, $e^{*a}{}_{c} = 2\rho^{ab}_{bc}$, $\widetilde{\omega}^{ab}_{c} = \overset{+}{\widetilde{\omega}}{}^{ab}_{c} + \overset{-}{\omega}{}^{ab}_{c}$, $\widetilde{\omega}^{*c}{}_{ab} = \overset{-}{\xi}{}^{c}_{ba} + \overset{+}{\widetilde{\xi}}{}^{c}_{ba}$ и $f^{*a}{}_{c} = 2\overset{+}{\widetilde{\rho}}{}^{ab}_{bc}$.

Данная предсимплектическая структура является очевидным образом канонической. Все остальные компоненты, не вошедшие в неё, лежат в её ядре.

Выводы

Бездуховую массивную теорию бигравитации в рамках формализма первого порядка удобно рассматривать вместе с алгебраическими условиями, первое из которых является условием Дезера-ван Невенхойзена, а второе связывает между собой компоненты связностей из секторов "e" и "f". Аналоги этих условий задают в рамках предсимплектического BV-AKSZ формализма квазирегулярную поверхность связей, приводящую к правильной симплектической структуре на суперсечениях

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Построено внутреннее действие для массивных теорий спина 2 и 3 и показано, что оно является неполным в том смысле, что приводит не ко всем уравнениям движения теории: в обоих случаях отсутствует уравнение бездивергентности поля. Для решения данной проблемы рассмотрена Parent-формулировка данных теорий, поскольку она обладает той же предсимплектической формой, что и внутреннее действие. Затем из полученных формулировок исключением части вспомогательных полей, получены необходимые расширения стационарной поверхности и предсимплектической структуры для массивных теорий спина 2 и 3 и выписан соответствующий спектр переменных для обеих теорий.
2. При помощи отображения Υ между алгеброй вертикальных форм на расслоении $E \to T[1]X$ и алгеброй всех форм на расслоении $\widetilde{E} \to X$ показано, что предсимплектический BV-AKSZ формализм в случае, когда Q-дифференциал не содержит информации о калибровочной симметрии теории, позволяет получить внутренее действие данной теории. В то же время обобщённый предсимплектический BV-AKSZ формализм в ситуации, Q-дифференциал не содержит информации о калибровочной симметрии теории, оказывается эквивалентным известной в литературе мультисиммплектической формулировке теории с дополнительной структурой, которую можно интерпретировать, как распределение Картана, не являющееся, вообще говоря, инволютивным на конечномерном расслоении.
3. В рамках обобщённого предсимплектического BV-AKSZ формализма построена минимальная формулировка для ряд теорий с приводимыми калибровочными преобразованиями, в частности для электродинамики p-формы и её неабелевой модификации данной теории в случае $p = 2$, $n = 4$ - модели Фридмана-Таунсенда. При этом весь BV-спектр переменных данных теории восстанавливается лишь по двум переменным слоя E расслоения $E \to T[1]X$.

Список литературы

1. *Vinogradov, A. M.* The logic algebra for the theory of linear differential operators [Текст] / A. M. Vinogradov // Sov. Math., Dokl. — 1972. — Т. 13. — С. 1058—1062.
2. *Henneaux, M.* Equations of motion, commutation relations and ambiguities in the Lagrangian formalism [Текст] / M. Henneaux // Annals Phys. — 1982. — Т. 140. — С. 45—64.
3. *Khavkine, I.* Presymplectic current and the inverse problem of the calculus of variations [Текст] / I. Khavkine // J. Math. Phys. — 2012. — Окт. — Т. 54. — С. 111502. — eprint: 1210.0802.
4. *Fierz, M.* On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field [Текст] / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. Lond. — 1939. — Т. A173. — С. 211—232.
5. *Singh, L. P. S.* Lagrangian formulation for arbitrary spin. 1. The boson case [Текст] / L. P. S. Singh, C. R. Hagen // Phys. Rev. — 1974. — Т. D9. — С. 898—909.
6. *Zinoviev, Y. M.* First order formalism for massive mixed symmetry tensor fields in Minkowski and (A)dS spaces [Текст] / Y. M. Zinoviev. — 2003. — arXiv: hep-th/0306292.
7. *Ponomarev, D. S.* Frame-Like Action and Unfolded Formulation for Massive Higher-Spin Fields [Текст] / D. S. Ponomarev, M. A. Vasiliev // Nucl. Phys. — 2010. — Т. B839. — С. 466—498. — arXiv: 1001.0062 `[hep-th]`.
8. *Polchinski, J.* String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string [Текст] / J. Polchinski. — Cambridge University Press, 12.2007. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
9. *Polchinski, J.* String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond [Текст] / J. Polchinski. — Cambridge University Press, 12.2007. — (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

10. *Hydon, P.* Multisymplectic conservation laws for differential and differential-difference equations [Текст] / P. Hydon // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. Т. 461. — The Royal Society. 2005. — С. 1627—1637.
11. *Saunders, D.* Thirty years of the inverse problem in the calculus of variations [Текст] / D. Saunders // Reports on Mathematical Physics. — 2010. — Т. 66. — С. 43—53.
12. *Kijowski, J.* A Symplectic Framework for Field Theories [Текст] / J. Kijowski, W. Tulczyjew. — Springer Berlin Heidelberg, 1979. — (Lecture Notes in Physics). — URL: https://books.google.de/books?id=d6%5C_vAAAAMAAJ.
13. *Anderson, I. M.* Aspects of the inverse problem to the calculus of variations [Текст] / I. M. Anderson // Archivum Mathematicum. — 1988. — Т. 024, № 4. — С. 181—202. — URL: http://eudml.org/doc/18247.
14. *Anderson, I.* Introduction to the variational bicomplex [Текст] / I. Anderson // Mathematical Aspects of Classical Field Theory. Т. 132 / под ред. M. Gotay, J. Marsden, V. Moncrief. — Amer. Math. Soc., 1992. — С. 51—73. — (Contemporary Mathematics).
15. *Anderson, I.* The variational bicomplex [Текст] : тех. отч. / I. Anderson ; Formal Geometry ; Mathematical Physics, Department of Mathematics, Utah State University. — 1989.
16. *Grigoriev, M.* Presymplectic structures and intrinsic Lagrangians [Текст] / M. Grigoriev. — 2016. — arXiv: 1606.07532 `[hep-th]`.
17. *Abakumova, V. A.* Reducible Stueckelberg symmetry and dualities [Текст] / V. A. Abakumova, S. L. Lyakhovich // Phys. Lett. B. — 2021. — Т. 820. — С. 136552. — arXiv: 2106.09355 `[hep-th]`.
18. *Batalin, I.* Gauge Algebra and Quantization [Текст] / I. Batalin, G. Vilkovisky // Phys.Lett. — 1981. — Т. B102. — С. 27—31.
19. *Batalin, I.* Feynman Rules For Reducible Gauge Theories [Текст] / I. Batalin, G. Vilkovisky // Phys.Lett. — 1983. — Т. B120. — С. 166—170.
20. *Batalin, I. A.* OPERATOR QUANTIZATION OF RELATIVISTIC DYNAMICAL SYSTEMS SUBJECT TO FIRST CLASS CONSTRAINTS [Текст] / I. A. Batalin, E. S. Fradkin // Phys. Lett. — 1983. — Т. 128B. — С. 303—308.

21. *Batalin, I.* A Generalized Canonical Formalism and Quantization of Reducible Gauge Theories [Текст] / I. Batalin, E. Fradkin // Phys. Lett. B. — 1983. — Т. 122. — С. 157—164.
22. The Geometry of the master equation and topological quantum field theory [Текст] / M. Alexandrov [и др.] // Int.J.Mod.Phys. — 1997. — Т. A12. — С. 1405—1430. — eprint: hep-th/9502010.
23. *Dam, H. van.* Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields [Текст] / H. van Dam, M. J. G. Veltman // Nucl. Phys. B. — 1970. — Т. 22. — С. 397—411.
24. *Zakharov, V. I.* Linearized gravitation theory and the graviton mass [Текст] / V. I. Zakharov // JETP Lett. — 1970. — Т. 12. — С. 312.
25. *Vainshtein, A. I.* To the problem of nonvanishing gravitation mass [Текст] / A. I. Vainshtein // Phys. Lett. B. — 1972. — Т. 39. — С. 393—394.
26. *Porrati, M.* No van Dam-Veltman-Zakharov discontinuity in AdS space [Текст] / M. Porrati // Phys. Lett. B. — 2001. — Т. 498. — С. 92—96. — arXiv: hep-th/0011152.
27. *Boulware, D. G.* Can gravitation have a finite range? [Текст] / D. G. Boulware, S. Deser // Phys. Rev. D. — 1972. — Т. 6. — С. 3368—3382.
28. *Rham, C. de.* Resummation of Massive Gravity [Текст] / C. de Rham, G. Gabadadze, A. J. Tolley // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Т. 106. — С. 231101. — arXiv: 1011.1232 `[hep-th]`.
29. *Donder, T. de.* Théorie invariantive du calcul des variations [Текст] / T. de Donder. — Gauthier-Villars, 1930. — URL: https://books.google.ru/books?id=3kI7AQAAIAAJ.
30. *Weyl, H.* Geodesic Fields in the Calculus of Variation for Multiple Integrals [Текст] / H. Weyl // Annals of Mathematics. — 1935. — Т. 36, № 3. — С. 607—629. — URL: http://www.jstor.org/stable/1968645 (дата обр. 02.08.2024).
31. *Aldaya, V.* Higher Order Hamiltonian Formalism in Field Theory [Текст] / V. Aldaya, J. A. de Azcarraga // J. Phys. A. — 1980. — Т. 13. — С. 2545.

32. *Echeverria-Enriquez, A.* Geometry of Lagrangian first order classical field theories [Текст] / A. Echeverria-Enriquez, M. C. Munoz-Lecanda, N. Roman-Roy // Fortsch. Phys. — 1996. — Т. 44. — С. 235—280. — arXiv: dg-ga/9505004.

33. Hamiltonian systems in multisymplectic field theories [Текст] / A. Echeverria-Enriquez [и др.] // J. Math. Phys. — 2007. — Т. 48. — С. 112901. — arXiv: math-ph/0506003.

34. *Roman-Roy, N.* Multisymplectic Lagrangian and Hamiltonian formalism of first-order classical field theories [Текст] / N. Roman-Roy // 1st Joint Congress of Mathematics RSME-SCM-SEIO-SEMA (MAT.ES 2005) (In Spanish). — 06.2005. — arXiv: math-ph/0506022.

35. Lagrangian-Hamiltonian unified formalism for field theory [Текст] / A. Echeverria-Enriquez [и др.] // J. Math. Phys. — 2004. — Т. 45. — С. 360—380. — arXiv: math-ph/0212002.

36. *Gotay, M. J.* Momentum maps and classical relativistic fields. II: Canonical analysis of field theories [Текст] / M. J. Gotay, J. Isenberg, J. E. Marsden. — 2004. — arXiv: math-ph/0411032.

37. *Gaset, J.* Variational principles and symmetries on fibered multisymplectic manifolds [Текст] / J. Gaset, P. D. Prieto-Martínez, N. Román-Roy // Commun. Math. — 2016. — Т. 24, № 2. — С. 137—152.

38. *Echeverria-Enriquez, A.* On the multimomentum bundles and the Legendre maps in field theories [Текст] / A. Echeverria-Enriquez, M. C. Munoz-Lecanda, N. Roman-Roy // Rept. Math. Phys. — 2000. — Т. 45. — С. 85—105. — arXiv: math-ph/9904007.

39. *Gaset, J.* Multisymplectic formulation of Lagrangian models in gravitation [Текст] / J. Gaset, N. Román-Roy //. — 10.2019. — arXiv: 1910 . 01521 `[math-ph]`.

40. *Gaset, J.* Geometric Gauge Freedom in Multisymplectic Field Theories [Текст] / J. Gaset. — 2022. — Сент. — arXiv: 2209.11212 `[math-ph]`.

41. *Alkalaev, K. B.* Frame-like Lagrangians and presymplectic AKSZ-type sigma models [Текст] / K. B. Alkalaev, M. Grigoriev // Int. J. Mod. Phys. — 2014. — Т. A29, № 18. — С. 1450103. — arXiv: 1312.5296 `[hep-th]`.

42. *Grigoriev, M.* Presymplectic AKSZ formulation of Einstein gravity [Текст] / M. Grigoriev, A. Kotov // JHEP. — 2021. — Т. 09. — С. 181. — arXiv: 2008.11690 `[hep-th]`.

43. *Dneprov, I.* Presymplectic BV-AKSZ formulation of conformal gravity [Текст] / I. Dneprov, M. Grigoriev // Eur. Phys. J. C. — 2023. — Т. 83, № 1. — С. 6. — arXiv: 2208.02933 `[hep-th]`.

44. *Sharapov, A.* Higher spin gravities and presymplectic AKSZ models [Текст] / A. Sharapov, E. Skvortsov // Nucl. Phys. B. — 2021. — Т. 972. — С. 115551. — arXiv: 2102.02253 `[hep-th]`.

45. *Grigoriev, M.* Gauge PDE and AKSZ-type Sigma Models [Текст] / M. Grigoriev, A. Kotov // Fortsch. Phys. — 2019. — arXiv: 1903.02820 `[hep-th]`.

46. *Grigoriev, M.* Notes on the L∞-approach to local gauge field theories [Текст] / M. Grigoriev, D. Rudinsky // J. Geom. Phys. — 2023. — Т. 190. — С. 104863. — arXiv: 2303.08990 `[hep-th]`.

47. *Grigoriev, M.* Asymptotic symmetries of gravity in the gauge PDE approach [Текст] / M. Grigoriev, M. Markov. — 2023. — Окт. — arXiv: 2310.09637 `[math-ph]`.

48. *Grigoriev, M.* Presymplectic gauge PDEs and Lagrangian BV formalism beyond jet-bundles [Текст] / M. Grigoriev // Contemp. Math. — 2023. — Т. 788. — С. 111—134. — arXiv: 2212.11350 `[math-ph]`.

49. Consistent deformations of free massive field theories in the Stueckelberg formulation [Текст] / N. Boulanger [и др.] // JHEP. — 2018. — Т. 07. — С. 021. — arXiv: 1806.04695 `[hep-th]`.

50. Deformations of massive field theories [Текст] / S. Garcia-Saenz [и др.] // 15th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories. — 2022.

51. *Fronsdal, C.* Massless Fields with Integer Spin [Текст] / C. Fronsdal // Phys.Rev. — 1978. — Т. D18. — С. 3624.

52. *Weinberg, S.* Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of Maxwell's and Einstein's equations [Текст] / S. Weinberg // Phys. Rev. — 1965. — Т. 138. — B988—B1002.

53. *Fradkin, E. S.* On the Gravitational Interaction of Massless Higher Spin Fields [Текст] / E. S. Fradkin, M. A. Vasiliev // Phys. Lett. B. — 1987. — Т. 189. — С. 89—95.

54. *Vasiliev, M. A.* Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions [Текст] / M. A. Vasiliev // Phys. Lett. — 1990. — Т. B243. — С. 378—382.

55. *Vasiliev, M. A.* Properties of equations of motion of interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions [Текст] / M. A. Vasiliev // Class.Quant.Grav. — 1991. — Т. 8. — С. 1387—1417.

56. *Vasiliev, M. A.* Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in (A)dS(d) [Текст] / M. A. Vasiliev // Phys. Lett. — 2003. — Т. B567. — С. 139—151. — eprint: hep-th/0304049.

57. Nonlinear higher spin theories in various dimensions [Текст] / X. Bekaert [и др.] // 1st Solvay Workshop on Higher Spin Gauge Theories. — 2004. — С. 132—197. — arXiv: hep-th/0503128.

58. *Tarusov, A. A.* On the variational principle in the unfolded dynamics [Текст] / A. A. Tarusov, M. A. Vasiliev // Phys. Lett. B. — 2022. — Т. 825. — С. 136882. — arXiv: 2111.12691 `[hep-th]`.

59. *Sharapov, A.* On auxiliary fields and Lagrangians for relativistic wave equations [Текст] / A. Sharapov, D. Shcherbatov // J. Phys. A. — 2024. — Т. 57, № 1. — С. 015210. — arXiv: 2308.02074 `[hep-th]`.

60. *Delplanque, W.* Symmetric vs. chiral approaches to massive fields with spin [Текст] / W. Delplanque, E. Skvortsov. — 2024. — Май. — arXiv: 2405.13706 `[hep-th]`.

61. *Henneaux, M.* Quantization of gauge systems [Текст] / M. Henneaux, C. Teitelboim. — Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 520 p, 1992.

62. *Barnich, G.* Local BRST cohomology in gauge theories [Текст] / G. Barnich, F. Brandt, M. Henneaux // Phys.Rept. — 2000. — Т. 338. — С. 439—569. — eprint: hep-th/0002245.

63. *Grigoriev, M.* Parent formulations, frame-like Lagrangians, and generalized auxiliary fields [Текст] / M. Grigoriev // JHEP. — 2012. — Т. 1212. — С. 048. — arXiv: 1204.1793 `[hep-th]`.

64. *Sharapov, A. A.* On presymplectic structures for massless higher-spin fields [Текст] / A. A. Sharapov // Eur. Phys. J. — 2016. — Т. C76, № 6. — С. 305. — arXiv: 1602.06393 `[hep-th]`.

65. *Vasiliev, M. A.* 'gauge' Form Of Description Of Massless Fields With Arbitrary Spin. (in Russian) [Текст] / M. A. Vasiliev // Yad. Fiz. — 1980. — Т. 32. — С. 855—861.

66. *Rahman, R.* Comments on Higher-Spin Fields in Nontrivial Backgrounds [Текст] / R. Rahman, M. Taronna //. — 2016. — arXiv: 1603.03050 `[hep-th]`. — URL: http://inspirehep.net/record/1427047/%Files/arXiv:1603.03050.pdf.

67. *Kotov, A.* Characteristic classes associated to Q-bundles [Текст] / A. Kotov, T. Strobl // Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. — 2014. — Т. 12, № 01. — С. 1550006. — arXiv: 0711.4106 `[math.DG]`.

68. *Barnich, G.* First order parent formulation for generic gauge field theories [Текст] / G. Barnich, M. Grigoriev // JHEP. — 2011. — Т. 01. — С. 122. — arXiv: 1009.0190 `[hep-th]`.

69. *Barnich, G.* BRST Extension of the Non-Linear Unfolded Formalism [Текст] / G. Barnich, M. Grigoriev // Bulg. J. Phys. — 2006. — Т. 33, s1. — С. 547—556. — eprint: hep-th/0504119.

70. *Khudaverdian, H.* On complexes related with calculus of variations [Текст] / H. Khudaverdian, T. Voronov // J. Geom. Phys. — 2002. — Т. 44. — С. 221—250. — arXiv: math/0105223.

71. *Krasil'shchik, J.* Geometry of jet spaces and integrable systems [Текст] / J. Krasil'shchik, A. Verbovetsky // J. Geom. Phys. — 2011. — Т. 61. — С. 1633—1674. — arXiv: 1002.0077 `[math.DG]`.

72. *Kijowski, J.* A finite-dimensional canonical formalism in the classical field theory [Текст] / J. Kijowski // Commun. Math. Phys. — 1973. — Т. 30. — С. 99—128.

73. *Crnkovic, C.* Covariant Description Of Canonical Formalism In Geometrical Theories [Текст] / C. Crnkovic, E. Witten. — 1986. — in Three hundred years of gravitation, S. W. Hawking and W. Israel, eds., pp. 676-684. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

74. *Lee, J.* Local symmetries and constraints [Текст] / J. Lee, R. M. Wald // J. Math. Phys. — 1990. — Т. 31. — С. 725—743.

75. Momentum maps and classical relativistic fields. I: Covariant field theory [Текст] / M. J. Gotay [и др.]. — 1997. — arXiv: physics/9801019.

76. *Freedman, D. Z.* Antisymmetric Tensor Gauge Theories and Nonlinear Sigma Models [Текст] / D. Z. Freedman, P. K. Townsend // Nucl. Phys. B. — 1981. — Т. 177. — С. 282—296.

77. *Batlle, C.* Lagrangian and Hamiltonian BRST Structures of the Antisymmetric Tensor Gauge Theory [Текст] / C. Batlle, J. Gomis // Phys. Rev. D. — 1988. — Т. 38. — С. 1169.

78. *Arnowitt, R. L.* The Dynamics of general relativity [Текст] / R. L. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner // Gen. Rel. Grav. — 2008. — Т. 40. — С. 1997—2027. — arXiv: gr-qc/0405109.

79. *Rham, C. de.* Massive Gravity [Текст] / C. de Rham // Living Rev. Rel. — 2014. — Т. 17. — С. 7. — arXiv: 1401.4173 `[hep-th]`.

80. *Rham, C. de.* Ghost free Massive Gravity in the Stückelberg language [Текст] / C. de Rham, G. Gabadadze, A. J. Tolley // Phys. Lett. B. — 2012. — Т. 711. — С. 190—195. — arXiv: 1107.3820 `[hep-th]`.

81. *Ondo, N. A.* Complete Decoupling Limit of Ghost-free Massive Gravity [Текст] / N. A. Ondo, A. J. Tolley // JHEP. — 2013. — Т. 11. — С. 059. — arXiv: 1307.4769 `[hep-th]`.

82. *Deffayet, C.* A note on 'symmetric' vielbeins in bimetric, massive, perturbative and non perturbative gravities [Текст] / C. Deffayet, J. Mourad, G. Zahariade // JHEP. — 2013. — Т. 03. — С. 086. — arXiv: 1208.4493 `[gr-qc]`.

83. *Gratia, P.* Self-accelerating Massive Gravity: How Zweibeins Walk through Determinant Singularities [Текст] / P. Gratia, W. Hu, M. Wyman // Class. Quant. Grav. — 2013. — Т. 30. — С. 184007. — arXiv: 1305.2916 `[hep-th]`.