На правах рукописи

Ваховский Владислав Николаевич

Ковариантные методы в современной квантовой теории поля и квантовой гравитации

Специальность 1.3.3 —
«Теоретическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук» (ФИАН).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Барвинский Андрей Олегович**
Официальные оппоненты:	**Бухбиндер Иосиф Львович,** доктор физико-математических наук, профессор, Объединённый институт ядерных исследований (ОИЯИ), ведущий научный сотрудник
	Катанаев Михаил Орионович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (МИАН), ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт ядерных исследований Российской академии наук» (ИЯИ РАН)

Защита состоится 14 октября 2024 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 24.1.262.04 при Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФИАН, а также на сайте www.lebedev.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53, ученому секретарю диссертационного совета Д 24.1.262.04.

Автореферат разослан ________________ 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 24.1.262.04,
канд. физ.-мат. наук Чернышов Дмитрий Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В современной квантовой теории поля (КТП) чрезвычайно возросло значение функциональных методов [1; 2]. Функциональный подход в КТП основан на изучении производящих функционалов для корреляторов квантовых полей, кодирующих всю информацию о рассматриваемой модели теории поля. Они являются функционалами фоновых полей, т.е. внешних источников, либо средних полей общего вида. Использование функциональных методов в значительной мере обусловило прогресс в изучении различных моделей КТП.

Более того, поскольку сама геометрия пространства-времени может рассматриваться как такое фоновое поле, это открывает возможность для развития подхода, в котором вначале строится КТП на фиксированном классическом пространственно-временном фоне, а уже на следующем этапе рассматривается обратное воздействие квантовых полей (как полей материи, так и гравитонов) на классический искривленный фон, на котором они живут [1; 3—5]. Хотя такой подход заведомо теряет свою применимость на планковском масштабе, он важен как с практической, так и с общетеоретической точки зрения. С практической — для изучения явлений, в которых существенны как квантовые, так и гравитационные эффекты, но которые далеки от планковского масштаба (например, физики массивных черных дыр и ранних стадий космологической эволюции). С общетеоретической — как необходимый шаг на пути построения полной квантовой гравитации.

Применение функциональных методов в КТП основывается на комбинации двух основных идей: метода фонового поля и метода теплового ядра, позволяющего эффективно описывать особенности квантово-полевых пропагаторов и, далее, регуляризовать и перенормировать фейнмановские интегралы.

В действительности сфера применимости метода теплового ядра выходит далеко за рамки КТП. Можно сказать, что в настоящее время этот метод является одним из ключевых и наиболее употребительных инструментов всей современной математической физики, находящим широкий спектр практических приложений — от физики твердого тела до анализа рынков. С точки зрения чистой математики он глубоко связан с теоремами об индексе, K-теорией, спектральной и некоммутативной геометриями и т.д. Это обусловило интенсивное развитие математического направления в теории теплового ядра, основанного на развитой теории псевдо-дифференциальных операторов [6] и использовании специальных «свойств функториальности», начиная от ранних работ Адамара [7] и Минакшисундарама [8; 9] до своего полного развития у Сили [10] и Гилки [11—18].

Поскольку метод теплового ядра интересует нас с точки зрения применений в КТП, нам ближе другой, физический подход, берущий свое начало от Фока [19], заметившего, что многие величины в квантовой теории удобно представлять в виде интегралов по вспомогательной переменной «собственного времени» τ, и Швингера [20], использовавшего это наблюдение для перенормировки расходящихся фейнмановских интегралов. Но подлинный прорыв в развитии метода произошел, когда ДеВитт [1], во-первых, показал, что однопетлевое квантовое эффективное действие теории на искривленном пространстве-времени может быть выражено через коэффициенты асимптотического разложения *диагонали* теплового ядра (когда два аргумента теплового ядра совпадают $x = x'$). Это приводит к локальному градиентному разложению эффективного действия по производным фоновых полей возрастающей размерности. Во-вторых, для минимальных операторов 2-го порядка $\hat{F}(\nabla) = \hat{1}\Box + \ldots$, где $\Box = -g^{ab}\nabla_a\nabla_b$, ДеВитт предложил простой и эффективный способ вычисления коэффициентов теплового ядра. Этот способ основан на использовании специального анзаца, подсказанного квазиклассическим приближением и представляющим собой *внедиагональное* (т.е. при несовпадающих аргументах $x \neq x'$) разложение теплового ядра по степеням собственного времени τ. Подстановка этого анзаца в уравнение теплопроводности приводит к цепочке рекуррентных соотношений, позволяющую последовательно находить пределы совпадения коэффициентов.

Эти результаты ДеВитта лежат в основе большинства результатов о (не)перенормируемости квантово-полевых моделей, их ренормгрупповом поведении, аномалях и т.д., что обуславливает исключительню важность метода теплового ядра — известного в физике ткаже как метод собственного времени или техника Швингера-ДеВитта — при анализе калибровочных теорий и моделей модифицированной (супер)гравитации.

Метод Швингера-ДеВитта был успешно применен к полям низших спинов и калибровочным теориям Янга-Миллса [21—23], лежащим в основе современной Стандартной модели физики элементарных частиц, а также к теории гравитации и супергравитации [24—26]. Обычная эйнштейновская гравитация с действием, линейными по кривизне, как известно [1], неперенормируема. Эта проблема решается путем введения в лагранжиан теории членов с высшими производными — в простейшем случае добавлением к действию членов, квадратичных по кривизне [27]. Такие модифицированные модели также анализировались в рамках общего подхода Швингера-ДеВитта. В частности, была изучена их асимптотическая свобода [28; 29]. В рамках техники Швингера-ДеВитта изучались общие свойства размерной и дзета-функциональной регуляризаций [24; 30], конформная аномалия различных конформно-инвариантных на классическом уровне моделей в искривленном пространстве [31—34], вычислялось квантовое среднее тензора энергии импульса в метрике общего вида и на пространствах с различного вида симметриями [35—39], включая эффективный потенциал на пространстве де Ситтера [40]. Перенормируемая и, в частности, свободная от вейлевской аномалии конформная супергравитация изучалась в [41; 42].

Хотя R^2-гравитация служит основой предложенной Старобинским модели космологической инфляции [43], наличие высших производных приводит к появлению духов Остроградского и нарушению унитарности. Для преодоления этой проблемы в последние годы большое внимание привлекли модели типа Хоравы-Лифшица [44], в которых удается одновременно сохранить перенормируемость и унитарность ценой нарушения лоренц-инвариантности при высоких энергиях и которые также анализировались методом Швингера-ДеВитта и его обобщений [45—47].

Существенная трудность состоит в том, что предложенный ДеВиттом способ вычисления коэффициентов теплового ядра непосредственно применим только к минимальным операторам 2-го порядка. Поэтому анализ моделей с вышими производными или неминимальным оператором потребовал развития непрямых методов вычисления, с помощью которых более сложный случай некоторым образом сводится к уже известному девиттовскому. Их изложение, включая так называемый метод универсальных функциональных следов, и применение к квантово-полевым моделям содержатся в работе Барвинского и Вилковыского [48]. Также следует выделить цикл работ Гусынина с соавторами [49—54], вычислявших коэффициенты теплового ядра с помощью преобразования Фурье. Дальнейшие ссылки можно найти в обзорных работах [55—57].

Однако, хотя для моделей с высшими производными или неминимальным волновым оператором непрямые методы позволяют получить локальное градиентное разложение однопетлевого эффективного действия в любом порядке по фоновой размерности, соответстующие вычисления чрезвычайно трудны технически. Кроме того, непрямые методы дают информацию о поведении теплового ядра только на диагонали (т.е. при $x = x'$), что также недостаточно для потенциальных физических приложений — например, если мы захотим учесть вклады высших петель. В связи с этим долгое время ощущалась потребность в некотором обобщении первоначального девиттовского подхода на этот более общий случай. Однако предпринимавшиеся время от времени попытки некоторым образом модифицировать девиттовский анзац, исходя из квазиклассического приближения или других соображений (например, [58]), не увенчались успехом.

Несмотря на это, главы 2 и 3 настоящей работы посвящены решению именно этой стоящей долгое время задачи. Для минимальных операторов высшего порядка $\hat{F}(\nabla) = \hat{1}\Box^\nu + \ldots$, при $\nu > 1$, нам удалось получить внедиагональное разложение теплового ядра, являющееся непосредственным обобщением девиттовского анзаца. Отличие от классического случая состоит двух моментах: во-первых, вместо обычной экспоненты в девиттовском анзаце наше разложение ведется по системе некоторых новых специальных функций гипергеометрического типа, которые мы назвали «обобщенными экспонентами». Свойства этих функций, включая преобразование Меллина, связь с функциями Бесселя, замечательное правило дифференцирования и довольно тонкий вопрос об их асимптотическом поведении и его связи с квазиклассическим приближением, подробно изучены в работе. Эти свойства обобщенных экспонент позволяют эффективно манипулировать нашими обобщенными внедиагональными разложениями. Более того, мы показываем, что выход за пределы диагонали теплового ядра позволяет гораздо более гибко и эффективно использовать технику интегральных преобразований, что, в частности, чрезвычайно упрощает доказательство «свойств функториальности» и позволяет по-новому взглянуть на некоторые проблемы, связанные с дзета-функциональной регуляризацией.

Второе ключевое отличие от классического метода ДеВитта состоит в появлении в обобщенном внедиагональном разложении членов со сколь угодно большими отрицательными степенями собственного времени τ. Все эти члены исчезают в пределе совпадения и потому не видны на диагонали, однако отсутствие «дна» у системы внедиагональных коэффициентов делает невозможным построение для них цепочки рекуррентных соотношений, аналогичной той, что возникает в методе ДеВитта. Несмотря на это мы разработали сразу два различных алгоритма их получения — на основе обобщенного преобразования Фурье в искривленном пространстве и по теории возмущений — и реализовали эти алгоритмы в системе символьных вычислений *Wolfram Mathematica*. Причем в некотором смысле наши методы дают даже больше, чем классическая техника ДеВитта: если последняя позволяет вычислять только пределы совпадения $x = x'$ коэффициентов, то наши методы гененрируют замкнутые выражения для коэффициентов при $x \neq x'$.

Резюмируя, хотя наш метод внедиагональных разложений пока делает свои самые первые шаги, полученных к настоящему моменту результатов достаточно для того, чтобы без преувеличений заключить, что его появление открывает новые перспективы как в исследовании теплового ядра, так и в широком спектре его потенциальных приложений, включая КТП и исследования моделей модифицированной гравитации.

Другая трудность связана с тем, что практически мы можем вычислить только несколько самых первых членов локального градиентного разложения по степеням фоновой размерности. По своим физическим свойствам полученное таким образом локальное выражение может кардинально отличаться от полного однопетлевого эффективного действия, которое является существенно нелокальным функционалом. Поэтому возникает потребность некоторым образом учесть также вклад всех высших членов градиентного разложения.

Сделать это можно двумя способами: во-первых, можно проинтегрировать конформную аномалию по параметру конформного преобразования, получив таким образом гененрирующее ее нелокальное аномальное действие. В случае двух измерений эта процедура приводит к известному нелокальному действию Полякова [59], причем, поскольку всякое двумерное пространство локально является конформно-плоским, действие Полякова по существу является полным эффективным действием и, поэтому, например, полностью определяет излучение Хокинга двумерных черных дыр [36]. Для четырехмерья аналогичное аномальное действие было получено в нелокальной форме Ригертом [60] и Фрадкиным и Цейтлиным [41] в локальной форме конформного действия Весса-Зумино, включающего вспомогательное скалярное поле — дилатон. Нелокальность этого аномального действия Ригерта-Фрадкина-Цейтлина (RFT) связана с наличием в нем оператора, обратного к конформно-инвариантному оператору Паница 4-го порядка [61].

Вторым способом учета нелокальности является ковариантная теория возмущений [62—66], в которой локальное градиентное разложение частично пересумируется в ряд по степеням кривизны с нелокальными формфакторами. Однако гененрируемые этим методом выражения с типичными логарифмическими формфакторами по видимости находятся в радикальном противоречии со структурой RFT-действия [67], что вызвало длительную дискуссию в литературе между сторонниками двух подходов.

Помимо этого RFT-действие вызвало другую критику, связанную с его противоречием конформным тождествам Уорда [68] и с двухполюсной структурой функции Грина оператора Паница [69]. Хотя эти возражения были опровергнуты явным вычислением $\langle TTT \rangle$-корреляторов в [70], вопрос все еще остается открытым [71]. Тем не менее, существует твердое убеждение [70; 72; 73], что инфракрасные эффекты конформной моды, описываемой RFT-действием, в ряде случаев могут модифицировать гравитацию и определять собой макроскопическую физику, в частности, поведение квантового тензора энергии-импульса вблизи горизонта черной дыры [74], вклад в скалярный сектор гравитационных волн [75] или динамическую вакуумную энергию в эффективной теории гравитации [76].

Все вышесказанное делает крайне актуальной задачу прояснения физического статуса RFT-действия, что и является задачей глав 4 и 5. Для этого мы замечаем, что аномальное действие определено лишь с точностью до некоторого конформно-инвариантного функционала и показываем, что этот произвол может быть параметризован с помощью процедуры фиксации конформной калибровки [77]. Мы подробно рассматриваем две такие калибровки, одна из которых приводит к RFT-действию, а вторая связана с конформным преобразованием, предложенным Фрадкиным и Вилковыским [34], и приводит к другой форме нелокального действия, которую мы называем FV-действием. Затем мы показываем, что FV-действие можно получить в результате некоторой процедуры пересуммирования разложения ковариантной теории возмущений, что разрешает проблему кажущегося противоречия между двумя подходами.

Далее мы рассматриваем два важных физических приложения RFT-действия: вычисление вакуумного тензора энергии-импульса, где мы получаем закон его конформного преобразования, обобщающий известную формулу Брауна-Кэссиди для тензора энергии-импульса в конформно-плоском пространстве [39] на общий случай, и космологию с метрикой Фридмана, определяемую конформной аномалией большого количества конформно-инвариантных полей [78], которая играет важную роль в модели начальных условий инфляции [79; 80]. Наконец, в последнем разделе главы рассматривается тесно связанная с вопросом нелокального эффективного действия проблема о ренормгрупповом поведении гравитационной G и космологической Λ констант, которая в последнее время активно обсуждается в литературе [81—87].

Таким образом, **целями** данной диссертационной работы являются:

1. Получение внедиагонального разложения теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка, обобщающих стандартный девиттовский анзац для минимальных операторов 2-го порядка.
2. Разработка алгоритмов вычисления внедиагональных коэффициентов теплового ядра.
3. Прояснение физического статуса аномального RFT-действия.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Изучение свойств входящих в обобщенное внедиагональное разложение «обобщенных экспоненциальных функций», в частности, получение их экспоненциальных асимптотик в случае целых порядков ν.
2. Развитие техники интегральных преобразований для получения внедиагональных разложений для функций оператора.
3. Применение метода обобщенных преобразований Фурье в искривленном пространстве к вычислению внедиагональных коэффициентов теплового ядра.
4. Реализация алгоритмов вычисления коэффициентов в системе символьных вычислений *Wolfram Mathematica* и проверка их согласованности с ранее полученными результатами.
5. Рассмотрение функционального семейства аномальных действий, получающихся с помощью фиксации конформной калибровки, проверка согласия FV-действия с разложением ковариантной теории возмущений.

6. Вывод закона конформных преобразований тензора энергии-импульса на фоне произвольного искривленного пространства-времени.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Внедиагональное разложение теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка в виде двойного функционального ряда по «обобщенным экспоненциальным функциям» с исчезающими в пределе совпадения нетривиальными членами при сколь угодно больших отрицательных степенях собственного времени.
2. «Обобщенная функториальность» — применение техники интегральных преобразований с учетом свойств «обобщенных экспоненциальных функций» позволяет получить внедиагональные разложения для широкого класса функций от оператора с одинаковыми универсальными внедиагональными коэффициентами.
3. Два алгоритма вычисления внедиагональных коэффициентов теплового ядра — с помощью обобщенного преобразования Фурье в искривленном пространстве и по теории возмущений. Явные выражения пределов совпадения коэффициентов размерности 4 для минимального оператора 4-го порядка общего вида.
4. Согласованность нелокального аномального RFT-действия с нелокальным разложением по степеням кривизны в ковариантной теории возмущений.
5. Закон конформного преобразования вакуумного тензора энергии-импульса, обобщающий известное локальное выражение Брауна-Кэссиди в конформно-плоском пространстве на случай общих пространств с ненулевым тензором Вейля. Параметр конформного преобразования конформно- и асимптотически-плоского пространства в плоское является решением линейного уравнения с оператором Паница и условиями Дирихле на бесконечности.
6. Вакуумная энергия Казимира конформных полей в статической вселенной Эйнштейна выводится из аномального действия Ригерта-Фрадкина-Цейтлина и тем самым определяется их конформной аномалией.
7. Свойства нелокальных формфакторов эффективного действия в перенормируемых моделях гравитации подтверждают известное утверждение об отсутствии ренормгруппового бега у гравитационной G и космологической Λ констант.

Научная новизна, достоверность и личный вклад автора. Новизна рассматриваемых вопросов, а также достоверность полученных результатов привели к значительному прогрессу в понимании структуры теплового ядра для минимальных операторов высшего порядка и нелокального аномального действия. Все представленные в диссертации результаты являются оригинальными и получены автором лично или при его непосредственном участии. Приведённые в диссертации результаты являются актуальными, используются и развиваются как российскими, так и зарубежными научными группами.

Научная и практическая значимость. Изучаемые в диссертации проблемы представляют научный интерес в области теоретической и математической физики. Впервые полученные внедиагональные разложения для минимальных операторов высшего порядка проливают свет на ряд вопросов об общей структуре и поведении теплового ядра: о причине эффективности первоначального метода ДеВитта и неудач предыдущих попыток его обобщения, о природе логарифмических по собственному времени членов в разложениях диагонали теплового ядра и т.д. Также метод может быть относительно легко обобщен на гораздо более широкий важный класс причинных операторов. Дальнейшее развитие метода, в частности, более аккуратный учет свойств производных мировой функции и тензора параллельного переноса, позволит создать более эффективные алгоритмы вычисления коэффициентов теплового ядра и, следовательно, вычисления и анализа эффективного действия сложных моделей КТП и модифицированной гравитации, включая модели типа Хоравы-Лифшица, что имеет большое практическое значение. Результаты, касающиеся аномального RFT-действия, вносят значительный вклад в дискуссию о его физическом статусе и правомерности его применения в широком физическом контексте, включающем физику черных дыр и построение моделей космологической инфляции.

Апробация работы. Основные результаты работы опубликованы в 4 [A1—A4] статьях в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus. Помимо этого, основные результаты диссертации докладывались на семинаре ОТФ ФИАН и на международных конференциях “Models in Quantum Field Theory” (MQFT-2022) в Санкт-Петербурге и “International Conference on Particle Physics and Cosmology” (2023) в Ереване, Армения.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 2 приложений. Полный объем диссертации 160 страниц текста, включая 6 рисунков и 0 таблиц. Список литературы содержит 166 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования и приводится обзор научной литературы по изучаемым проблемам. Также формулируются цели, задачи и защищаемые положения диссертации.

Первая глава носит вводный и вспомогательный характер. В ней кратко описываются классические результаты, а также вводятся основные понятия и обозначения, использующиеся в основной части диссертации.

Разделы 1.1 и 1.2 появящены методам фонового поля и теплового ядра, соответственно. Затем в разделе 1.3 вводятся важные геометрические объекты — мировая функция Синга $\sigma(x,x')$, тензор параллельного переноса вдоль геодезической $\hat{\mathcal{I}}(x,x')$ и определитель Паули-Ван Флека-Моретт $\Delta(x,x')$. В разделе 1.4 описывается предложенный ДеВиттом способ вычисления коэффициентов теплового ядра для минимального оператора второго порядка, основанный на использовании квазиклассического анзаца

$$\hat{K}_F(\tau|x,x') = \frac{\Delta^{1/2}(x,x')}{(4\pi\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\sigma(x,x')}{2\tau}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \tau^m \cdot \hat{a}_m(F|x,x'),$$

и последовательном решении следующей из него цепочки рекуррентных соотношений. Затем в разделе 1.5 обсуждается применение этих результатов к вычислению эффективного действия теоретико-полевых моделей, перенормировке ультрафиолетовых расходимостей и конформным аномалиям. Последний раздел 1.6 посвящен важному классу моделей, волновой оператор которых имеет порядок выше второго и/или не является минимальным. Описанный выше метод ДеВитта не применим к таким моделям, что приводит к необходимости развития непрямых методов, таких, как метод универсальных функциональных следов.

Вторая глава основана на работах [A1; A2] и посвящена детальному изучению введенных нами «обобщенных экспоненциальных функций» $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$, являющихся ключевым ингредиентом при построении обобщенных внедиагональных разложений. В разделе 2.1 обсуждаются мотивация и исходная идея нашего метода. В то время как вид асимптотического разложения диагонали теплового ядра фиксируется размерными соображениями, вне диагонали появляются новые размерные величины σ и σ^a, в результате чего в разложении могут появляться сколь угодно большие отрицательные степени собственного времени τ в безразмерных комбинациях $z = \sigma/2\tau^{1/\nu}$ и $\sigma^a/\tau^{1/2\nu}$. Поэтому *a priori* не может быть уверенности, что эти множители изолируются в некоторых функциях, аналогичных $(4\pi\tau)^{-d/2}\exp(-\sigma/2\tau)$ в девиттовском анзаце. Далее делается следующее основное наблюдение: поскольку последняя функция представляет собой не что иное, как тепловое ядро лапласиана $\Box = -g^{ab}\nabla_a\nabla_b$ в плоском d-мерном пространстве, обобщение на случай минимальных операторов высшего порядка естественно начать с нахождения точного теплового ядра степени лапласиана $\Box^\nu$ также в плоском пространстве. Обобщенные экспоненты вводятся нами как специальные функции, стоящие на месте обычных экспонент в этом тепловом ядре, после чего находится их разложение в ряд Тейлора

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z) = \frac{1}{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+m}{\nu}\right)}{\Gamma(\alpha+m)} \frac{z^m}{m!}.$$

Очевидно, при $\nu = 1$ они вырождаются в обычную экспоненту $\mathcal{E}_{1,\alpha}(z) = \exp(z)$, что обеспечивает согласованность рассмотрения. Однако в других аспектах эти новые функции заметно отличаются от обычной экспоненты: например, в то время как $\exp(-z)$ монотонно убывает при $z \to \infty$, $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z)$ убывают осциллирующим образом.

Обобщенные экспоненты $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ являются функциями «гипергеометрического типа», точнее — специальным случаем так называемых Ψ-функций Фокса-Райта и H-функций Фокса. Хорошо развитая теория последних, кратко изложенная в приложении A, служит основой нашего изучения свойств обобщенных экспонент в разделе 2.2. Основные свойства $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$, делающими манипулирование ими крайне эффективным, — это простое правило дифференцирования

$$\frac{d^\beta}{dz^\beta}\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z) = \mathcal{E}_{\nu,\alpha+\beta}(z)$$

и представление в виде интеграла Меллина-Барнса (иными словами, прямое и обратное преобразования Меллина)

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C ds\, \varepsilon_{\nu,\alpha}(s)\, z^{-s},$$

$$\varepsilon_{\nu,\alpha}(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{\alpha-s}{\nu}\right)}{\nu\Gamma(\alpha-s)} = \int\limits_0^\infty dz\, z^{s-1}\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z),$$

где контур интегрирования C разделяет полюса гамма-функций, уходящие направо и налево. Замыкание этого контура слева возвращает нас к исходному ряду Тейлора вблизи $z = 0$, а замыкание справа дает ряд по $z^{-\nu}$ вблизи $z = \infty$. Показано, что про $\nu > 1/2$ первый ряд сходится всюду и определяет целую функцию, а второй — является асимптотическим; при $0 < \nu < 1/2$ ситуация противоположна; в критическом случае $\nu = 1/2$ обобщенная экспонента находится точно: $\mathcal{E}_{1/2,\alpha}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1/2)}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{4} - z\right)^{1/2-\alpha}$. Помимо определения областей параметров ν и α, при которых обобщенные экспоненты $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(z)$ хорошо определены, этот раздел также включает в себя ряд любопытных результатов об их связи с функциями Бесселя $J_\alpha(z)$ и Бесселя-Клиффорда $\mathcal{C}_\alpha(z)$.

Наиболее интересный случай целых значений параметра ν является выделенным, т.к. тогда все уходящие направо полюса гамма-функции в числителе сокращаются с полюсами гамма-функции в знаменателе. В силу этого при $z \to \infty$ функции $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z)$ убывают уже не степенным, а экспоненциальным образом (что отражает различие между локальными дифференциальными и нелокальными псевдо-дифференциальными операторами). Вопрос о нахождении асимптотик обобщенных экспонент в этом случае является довольно тонким и подробно разобран нами в разделе 2.3.

Использованный нами метод позволяет последовательно находить члены асимптотического разложения $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z)$ при $z \to \infty$, которые в первом порядке согласуются с выражениями, подсказываемыми квазиклассическим приближением и методом перевала (а также позволяет решить непростой вопрос о выборе перевальных точек и вкладах от них). С другой стороны, функции, по которым ведется это разложение, являются сингулярными в пределе совпадения $z \to 0$, что не позволяет использовать их для интересующих нас приложений. Эти результаты объясняют неудачу попыток применения квазиклассического приближения к операторам высших порядков и подтверждают вывод о необходимости использования точных функций $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z)$, одинаково хорошо описывающих оба предела $z \to \infty$ и $z \to 0$.

Наконец, в разделе 2.4 свойства обобщенных экспонент используются для нахождения внедиагонального разложения теплового ядра степени опертора типа Лапласа $\hat{H}^\nu(\nabla)$. Это делается с помощью следующего простого технического приема: вначале к известному девиттовскому анзацу для оператора $\hat{H}(\nabla)$ почленно применяется преобразование Меллина, что приводит к адамаровскому разложению функции Грина для степени $\hat{H}^s(\nabla)$

$$\hat{G}_{H^s}(x,x') = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d/2-m-s)}{\Gamma(s)} \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{s+m-d/2} \cdot \hat{a}_m(H|x,x').$$

Если затем к этому разложению почленно применить обратное преобразование Меллина, получим внедиагональное разложение теплового ядра для степени $\hat{H}^\nu(\nabla)$

$$\hat{K}_{H^\nu}(\tau|x,x') = \frac{\tau^{d/2\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \tau^{-m/\nu} \mathcal{E}_{\nu,d/2-m}\left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}}\right) \cdot \hat{a}_m(H|x,x').$$

Мы видим, что это разложение в функциональный ряд с теми же самыми коэффициентами $\hat{a}_m(H|x,x')$ является прямым обобщением стандартного девиттовского анзаца с заменой обычной экспоненты на обобщенные. Переход в нем к пределу совпадения $\sigma \to 0$ воспроизводит известную формулу Фегана-Гилки для диагональных коэффициентов теплового ядра степени оператора, однако выход за пределы диагонали позволяет существенно упростить ее вывод. Это является простейшим примером гораздо более общего явления «обобщенной функториальности», позволяющего с помощью интегральных преобразований получать внедиагональные разложения для широкого класса функций от операторов. Возникает желание использовать последнее разложение в качестве обобщения девиттовского анзаца для общего минимального оператора высшего порядка. Однако нетрудно убедиться, что его подстановка в уравнение теплопроводности не приводит к непротиворечивой цепочке рекуррентных соотношений. Это означает, что для операторов, не представимых в виде степени оператора типа Лапласа, внедиагональное разложение имеет более сложную форму, установление которой требует привлечения новых методов.

Разработка этих методов составляет содержание **третьей главы**, основанной на работе [A3]. В разделе 3.1 для этой цели используется ковариантный метод «обобщенного преобразования Фурье» в искривленном пространстве. Его идея состоит в том, чтобы представить тепловое ядро в виде интеграла

$$\hat{K}(\tau|x,x') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp(ik_{a'}\sigma^{a'})\, \hat{\boldsymbol{K}}(\tau,\boldsymbol{k}|x,x')$$

от вспомогательной переменной импульса $\boldsymbol{k}$ (являющегося кокасательным вектором в точке x'), обеспечивающей дополнительную гибкость. В отличие от стандартного преобразования Фурье в плоском пространстве, это представление не является обратимым и содержит в себе произвол, который устраняется после взятия интеграла по $\boldsymbol{k}$. Мы используем естественное представление дельта-функции в виде интеграла от тензора параллельного переноса

$$\hat{1}\delta(x,x') = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp\Big(ik_{a'}\sigma^{a'}\Big)\, \hat{\mathcal{I}}(x,x'),$$

что сразу же приводит к следующему выражению для «фурье-образа»

$$\hat{\boldsymbol{K}}(\tau,\boldsymbol{k}|x,x') = \exp\Big(-\tau\,\hat{F}\big(\nabla_a + ik_{b'}\sigma_a^{b'}\big)\Big)\,\hat{\mathcal{I}}(x,x').$$

Нашей конечной целью является построение разложений по размерности фоновых полей, однако в последнем выражении оператор с «удлиненной производной» $\hat{F}(\nabla_a + ik_{b'}\sigma_a^{b'})$ содержит в себе безразмерную часть $\hat{\mathcal{F}}(\boldsymbol{k})$, получающуюся из старшего члена оператора заменой всех производных ∇_a на функции вида $ik_{b'}\sigma_a^{b'}$ (это выражение в нашем формализме играет роль более привычного главного символа). Его необходимо выделить и учесть точно, поэтому мы ищем решение для «фурье-образа» в форме анзаца

$$\hat{\boldsymbol{K}}(\tau,\boldsymbol{k}) = \exp\Big(-\tau\hat{\mathcal{F}}\Big)\,\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla)\,\hat{\mathcal{I}},$$

где $\hat{\boldsymbol{T}}(\nabla) = \hat{\boldsymbol{T}}(\nabla,\tau,\boldsymbol{k}|x,x')$ есть некоторый искомый оператор. Если мы разобъем его на однородные части $\hat{T}_{n,l}(\nabla)$, имеющие степень n по τ и l по $\boldsymbol{k}$, для них можно построить разрешимую систему рекуррентных соотношений и последовательно вычислить эти операторы вплоть до требуемой размерности. Затем остается лишь взять интеграл по вспомогательному импульсу $\boldsymbol{k}$. Для общего минимального оператора высшего порядка 2ν это можно сделать, что приводит к следующему внедиагональному разложению теплового ядра в двойной функциональный ряд по обобщенным экспонентам

$$\hat{K}_F(\tau|x,x') = \frac{\Delta^{-1}\tau^{-d/2\nu}}{(4\pi)^{d/2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n\geq N_m}^{\infty} \tau^{m/\nu}\, \mathcal{E}_{\nu,\frac{d}{2}+n\nu-m}\left(-\frac{\sigma}{2\tau^{1/\nu}}\right) \cdot \hat{b}_{m,n}(x,x'),$$

где внедиагональные коэффициенты $\hat{b}_{m,n}(x,x')$ даются свертками некоторых вспомогательных тензоров с рекуррентно вычисляемыми выражениями $\hat{T}_{n,l}(\nabla)\hat{\mathcal{I}}(x,x')$ (в отличие от стандартного метода ДеВитта, метод обобщенного преобразования Фурье позволяет получить не только их пределы совпадения, но и замкнутые выражения при $x \neq x'$). Мы показываем, что предел совпадения этих коэффициентов зануляется при $n > 4m$ и что их размерности положительны и растут вместе с m и n. Поэтому в пределе совпадения имеется лишь конечное количество членов при каждой степени τ, а внедиагональное разложение является эффективным как разложение по размерности фоновых полей. Наиболее характерной чертой полученного разложения является появление в нем членов при сколь угодно больших отрицательных степенях τ. Все эти члены исчезают в пределе совпадения, но их наличие делает невозможным построение системы рекуррентных соотношений непосредственно в координатном пространстве.

Основанный на методе обобщенного преобразования Фурье алгоритм получения внедиагональных коэффициентов был реализован нами в системе символьных вычислений *Wolfram Mathematica* с использованием пакетов *xAct* и *xTras*. Результаты этих вычислений подробно обсуждаются в разделе 3.2. Прежде всего мы воспроизводим нашим методом хорошо известные результаты для минимального оператора 2го порядка. При этом возникает проблема, связанная с тем, что наш метод генерирует члены при сколь угодно больших отрицательных степенях τ, но в случае оператора 2го порядка, как мы знаем из стандартного метода ДеВитта, их нет. Наша гипотеза состоит в том, что все такие коэффициенты являются «ложными», т.е. тождественно зануляются при $x \neq x'$ в силу неучтенных соотношений, связывающих производные мировой функции $\sigma(x,x')$ и тензора параллельного переноса $\hat{\mathcal{I}}(x,x')$. Это предположение подтверждается прямым вычислением нескольких первых коэффициентов. Далее, мы получили также коэффициенты общего минимального оператора 4го порядка до размерности 4. Ранее в литературе публиковались лишь выражения для следа их пределов совпадения без учета членов третьего порядка по производным и дивергентных членов, поэтому эти результаты являются существенно новыми. Объемные выражения, связанные с членами третьего порядка, приведены в приложении Б.

Наконец, в разделе 3.3 наши выводы дополнительно подтверждаются развитием дополнительного метода, основанного на теории возмущений над степенью оператора типа Лапласа. Согласно результатам раздела 2.4, для последней внедиагональное разложение может быть получено с помощью приема с прямым/обратным преобразованием Меллина. Хотя для общего минимального оператора высшего порядка 2ν это неверно, его во всяком случае можно представить в виде $\hat{F}(\nabla) = \hat{H}^{\nu}(\nabla) + \hat{W}(\nabla)$, где $\hat{H}(\nabla)$ есть оператор типа Лапласа, а $\hat{W}(\nabla)$ — некоторая добавка. Тогда можно сформулировать теорию возмущений, позволяющую строить внедиагональное разложение теплового ядра $\hat{K}_F(\tau|x,x')$ как деформацию невозмущенного теплового ядра $\hat{K}_{H^{\nu}}(\tau|x,x')$, вызванную введением возмущения $\hat{W}(\nabla)$. Хотя этот метод основан на принципиально иной идее, он также приводит к двойному функциональному ряду по обобщенным экспонентам, совпадающему по форме с результатом метода преобразования Фурье, включая наличие нетривиальных слагаемых при сколь угодно больших отрицательных степенях τ.

Четвертая глава, основаная на работе [A5], посвящена обсуждению физического статуса нелокального аномального действия Ригерта-Фрадкина-Цейтлина (RFT). В разделе 4.1 рассматриваются два крайне важных в конформной геометрии при $d = 4$ объекта: плотность Θ_4 размерности 4 (объединяющая в себе свойства топологической плотности Гаусса-Бонне E и конформной Q-кривизны Брансона) и связанный с нею оператор Паница Δ_4 четвертого порядка

$$\begin{aligned}\Theta_4 &= \sqrt{g}\left(R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2 + \tfrac{2}{3}\Box R\right),\\ \Delta_4 &= \sqrt{g}\left(\Box^2 + 2R^{ab}\nabla_a\nabla_b + \tfrac{2}{3}R\Box + \tfrac{1}{3}(\nabla^a R)\nabla_a\right).\end{aligned}$$

Они обладают следующими замечательными свойствами: при конформных (вейлевских) преобразованиях метрики $g_{ab} \mapsto e^{2\sigma}g_{ab}$ плотность Θ_4 преобразуется линейно по параметру конформного преобразования, а оператор Δ_4 является конформно-инвариантным

$$\tilde{\Theta}_4 = \Theta_4 + 4\Delta_4\sigma, \qquad \tilde{\Delta}_4 = \Delta_4.$$

Из этих двух объектов и строится аномальное RFT-действие: если некоторая теория имеет в искривленном пространстве-времени конформную аномалию

$$\langle\, T^a_a \,\rangle \equiv \frac{2\, g_{ab}}{\sqrt{g}}\frac{\delta\varGamma}{\delta g_{ab}} = \frac{1}{16\pi^2}\big(\alpha W^2 + \beta E - \gamma\Box R\big),$$

где $W^2 = W_{abcd}W^{abcd}$ есть квадрат тензора Вейля, а константы α, β и γ определяются составом полей теории, то интегрирование этой аномалии по параметру конформного преобразования σ приводит к следующему выражению для генерирующей ее части эффективного действия

$$\varGamma_A[g] = \frac{1}{64\pi^2}\int d^4x\,\left(\alpha\, W^2 + \tfrac{\beta}{2}\Theta_4\right)\frac{1}{\Delta_4}\Theta_4 - \frac{1}{32\pi^2}\left(\tfrac{\gamma}{6} + \tfrac{\beta}{9}\right)\Gamma_{R^2}[g],$$

где $\Gamma_{R^2}[g] = \int d^4x\,\sqrt{g}R^2$. В разделе 4.2 мы формулируем основную проблему, которая которая породила длительную дискуссию в литературе и которую мы разрешаем в этой главе: именно, что последнее выражение для RFT-действия находится в видимом противоречии с разложением эффективного действия по степеням кривизны с нелокальными формфакторами, получаемым в рамках ковариантной теории возмущений. Это разложение начинается с членов

$$\mathit{\Gamma}_{\rm ren} = \frac{1}{32\pi^2}\int dx\,\sqrt{g}\Big[-\alpha\,W_{abcd}\ln\Big(\frac{\Box}{\mu^2}\Big)W^{abcd} - \tfrac{\gamma}{6}R^2\Big] + O(\mathfrak{R}^3).$$

В этом выражении нет ничего похожего на оператор 4го порядка, точно так же как в первом нет никаких логарифмических формфакторов. Наша задача состоит в том, чтобы согласовать эти два подхода, выделив в нелокальном разложении по степеням кривизны часть, которая порождала бы конформную аномалию.

Эта задача решается в два шага: на одном мы некоторым образом модифицируем аномальное действие, а на другом — разложение ковариантной теории возмущений. Вначале в разделе 4.3 мы стартуем с очевидного наблюдения, что аномальная часть эффективного действия определена лишь с точностью до конформно-инвариантного функционала. Этот произвол может быть описан с помощью процедуры «фиксации конформной калибровки», когда в каждой орбите конформной группы выбирается единственный представитель $\bar g_{ab}$, удовлетворяющий калибровочному условию $\chi[\bar g] = \chi[e^{-2\Sigma_\chi}g] = 0$. Решение последнего уравнения дает параметр конформного преобразования $\Sigma_\chi[g]$ от представителя $\bar g_{ab}$ к заданной метрике g_{ab}. Тогда каждому выбору калибровки будет соответствовать свое аномальное действие $\Gamma_\chi[g]$, исчезающее на калибровочной поверхности $\Gamma_\chi[\bar g] = 0$. Два таких действия будут отличаться на конформно-инвариантный функционал и потому порождать одну и ту же аномалию. В частности, RFT-действие задается выбором калибровки Ригерта-Фрадкина-Цейтлина $\chi_{\rm RFT}[\bar g] = \bar\Theta_4 = 0$, $\Sigma_{\rm RFT} = \frac{1}{4\Delta_4}\Theta_4$. Однако для наших целей более удобной оказывается калибровка Фрадкина-Вилковыского $\chi_{\rm FV}[\bar g] = \bar R = 0$,

$$\Sigma_{\rm FV} = -\ln\left(1 - \frac{1}{6}\frac{1}{\Box + R/6}R\right).$$

Мы показываем, что аномальные действия в RFT- и FV-калибровке совпадают вплоть до третьего порядка по кривизне. На следующем шаге, в разделе 4.4 мы также модифицируем разложение ковариантной теории возмущений, переходя от разложения по степеням скалярной кривизны R и тензора Риччи R_{ab} к более естественному с конформной точки зрения разложению по степеням скалярной кривизны R и тензора W_{ab}, определяемого по тензору Вейля

$$\mathfrak{R} = (R_{ab}, R) \mapsto \tilde{\mathfrak{R}} = (W_{ab}, R),$$
$$W_{ab} = -\frac{2}{\Box}\nabla^d\nabla_c W^c{}_{adb}.$$

В этом случае полное эффективное действие Γ можно разбить на две части, такие, что в первую войдут все слагаемые, построенные исключительно из W_{ab}, а во вторую — все слагаемые, содержащие хотя бы одну степень R:

$$\Gamma = W + \Gamma_R.$$

Очевидно, на поверхности $\bar{R} = 0$ зануляется как аномальное FV-действие Γ_{FV}, так и член Γ_R, откуда сразу же получаем следующее конформное разложение эффективного действия

$$\Gamma[g] = \Gamma_{\mathrm{FV}}[g] + W[\bar{g}],$$

означающее что «риччевская» часть эффективного действия не является независимой, а полностью определяется конформной аномалией и «вейлевской» частью. Поскольку конформная аномалия содержится в первых трех порядках разложения по кривизне, правильность всех соотношений проверяется прямым вычислением. Этот результат полностью разрешает вопрос о кажущемся противоречии между RFT-действием и разложением по степеням кривизны. Помимо этого в главе обсуждается также ряд вопросов о проблеме двойных полюсов, пространствах, не являющихся асимптотически плоскими, глобальных конформных преобразованиях и нулевых модах оператора Паница и т.д.

Наконец, в заключительной **пятой главе**, основанной на работе [A5], рассматриваются некоторые приложения аномального RFT-действия и нелокального разложения по степеням кривизны. В разделе 5.1 рассматривается закон конформных преобразований тензора энергии-импульса. Поскольку вариации по метрике и конформному параметру коммутируют, он определяется вариацией конформной аномалии по метрике. Или, если мы определим действие в форме Весса-Зумино, как отклонение действия от конформно-инвариантного $\Delta\Gamma[\bar{g},\sigma] = \Gamma_{\mathrm{ren}}[g] - \Gamma_{\mathrm{ren}}[\bar{g}]$, конформное преобразование тензора энергии-импульса будет определаться вариацией $\Delta\Gamma[\bar{g},\sigma]$ по метрике

$$\sqrt{g}\,\langle T^a_b\rangle - \sqrt{\bar{g}}\,\langle \bar{T}^a_b\rangle = 2\bar{g}_{bc}\frac{\delta}{\delta\bar{g}_{ac}}\Delta\Gamma[\bar{g},\sigma].$$

Это выражение, очевидно, будет нелокально. В то же самое время, для конформно-плоских пространств большое значение имеет локальная формула Брауна-Кэссиди для тензора энергии-импульса. Чтобы понять, как эта формула возникает из существенно нелокального выражения, мы вначале получаем преобразования тензора энергии-импульса непосредственно из предела расходящейся части эффективного действия. Это приводит нас к следующему обобщению формулы Брауна-Кэссиди на случай пространств с ненулевым тензором Вейля:

$$\sqrt{g}\,\langle T^a_b\rangle\Big|^g_{\bar g} = -\frac{\alpha}{4\pi^2}\sqrt{\bar g}\,\big(\bar R^{cd} + 2\bar\nabla^{(c}\bar\nabla^{d)}\big)\big(\sigma \bar W^a{}_{cbd}\big) + \frac{1}{8\pi^2}\sqrt{g}\,\Big[\,\beta\,{}^{(3)}\!H^a_b + \frac{\alpha}{18}\,{}^{(1)}\!H^a_b + 2\beta R^{cd} W^a{}_{cbd}\Big]^g_{\bar g},$$

где ${}^{(1)}H^a_b$ и ${}^{(3)}H^a_b$ есть некоторые стандартные комбинации тензоров кривизны. Здесь нелокальность содержится только в первом слагаемом, очевидно, исчезающем для конформно-плоских пространств. Далее мы варьируем действие Весса-Зумино и прямым вычислением показываем, что оно приводит к тому же результату. Помимо этого в разделе также обсуждается вопрос о связи минимального действия Весса-Зумино с a-теоремой.

В разделе 5.2 обсуждается случай конформно-плоского пространства времени и его приложение к интересной модели космологии, определяющейся конформной аномалией большого количества конформно-инвариантных полей. При этом Вселенная с метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW) сначала конформно отображается в статическую эйнштейновскую вселенную, а затем — в плоское пространство. Это приводит к преобразованиям эффективного действия конформных полей, выражающимся через нелокальное RFT-действие. В частности, вакуумная энергия Казимира полностью определяется конформной аномалией

$$E_{\text{vac}} = \frac{3}{4}\left(\beta - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Заключительный раздел 5.3 носит дискуссионный характер и посвящен связи нелокального разложения по степеням кривизны с ренормгрупповым поведением теорий. Проведенное рассмотрение подтверждает сделанный в литературе тезис об отсутствии ренормгруппового бега у гравитационной G и космологической Λ констант. Обычно рассматриваемые ренормгрупповые уравнения на них можно реинтерпретировать как преобразования нелокальных формфакторов при квадратичных по кривизне инвариантах («высокоэнергетических партнеров»).

В **заключении** приведены основные результаты работы.

Заключение

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Для минимальных операторов высшего порядка на искривленном пространстве-времени впервые получено внедиагональное разложение теплового ядра, являющееся прямым обобщением известного девиттовского анзаца для операторов типа Лапласа. Оно имеет

вид двойного функционального ряда по «обобщенным экспонентам» — некоторым новым спецфункциям гипергеометрического типа. Отличительной особенностью этого внедиагонального разложения является наличие в нем исчезающих в пределе совпадения членов при сколь угодно больших отрицательных степенях собственного времени, что делает невозможным построение для коэффициентов системы рекуррентных соотношений, аналогичой той, которая возникает в методе ДеВитта.

2. Были подробно изучены свойства «обобщенных экспонент» $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(-z)$: их представление в виде интеграла Меллина-Барнса, правило дифференцирования, области определения, связь с функциями Бесселя и т.д. Интересно, что, в отличие от обычной экспоненты, при $z \to \infty$ обобщенные экспоненты убывают не монотонно, а оциллирующим образом, имея степенную асимптотику при незелых значениях порядка ν и экспоненциальную при целых ν. В последнем случае нахождение асимптотического разложения является нетривиальной задачей, но нами было показано, что в этом случае ответ согласуется с квазиклассическим приближением и методом перевала.
3. Показано, что выход за пределы диагонали теплового ядра вместе со свойствами обобщенных экспонент открывает возможность для очень эффективного использования техники интегральных преобразований. В частности, зная внедиагональное разложение для некоторого оператора можно простым образом получить внедиагональные разложения для любой его степени — что является далеко идущим обобщением формулы Фегана-Гилки и «свойства функториальности».
4. На основе метода обобщенного преобразования Фурье в искривленном пространстве-времени и теории возмущений разработано два алгоритма для получения замкнутых выражений для внедиагональных коэффициентов теплового ядра вне предела совпадения в виде сверток коэффициентов оператора с производными мировой функции Синга и тензора параллельного переноса. Соответствующие вычисления являются очень объемными и могут быть осуществлены только с применением современных систем символьных вычислений. Оба алгоритма были реализованы в системе *Wolfram Mathematica*, была проверена согласованность нашего метода с техникой ДеВитта, а также вычислены коэффициенты для минимального оператора 4-го порядка общего вида. При этом выяснилось, что в силу дополнительных соотношений, существующих между производными мировой функции и тензора параллельного переноса некоторые коэффициенты, генерируемые нашими методами, тождественно исчезают, а для оператора типа

Лапласа исчезают все члены при отрицательных степенях собственного времени. Именно это обстоятельство лежит в основе эффективности первоначальной техники ДеВитта.

5. Нами был рассмотрен широкий класс аномальных действий, получающихся в результате процедуры фиксации конформной калибровки, и два выделенных представителя этого класса — аномальные дейсствия Ригерта-Фрадкина-Цейтлина (RFT) и Фрадкина-Вилковыского (FV), отличающиеся на некоторый конформно-инвариантный функционал. Далее было показано, что FV-действие может быть получено некоторым пересуммированием нелокального разложения ковариантной теории возмущений по степеням кривизны. Эти результаты ставят точку в длительной дискуссии о кажущемся противоречии между структурой RFT-действия и разложения ковариантной теории возмущений.
6. Аномальное RFT-действие было использовано нами для вывода закона конформного преобразования вакуумного тензора энергии-импульса на искривленном пространственно-временном фоне. Этот результат является обобщением известного локального выражения Брауна-Кэссиди для тензора энергии-импульса в конформно-плоском пространстве на случай пространств с ненулевым тензором Вейля.
7. Приложение идей ренормгруппы к ковариантному нелокальному разложению эффективного действия по степеням кривизны пространства-времени показало, что космологическая и гравитационная константы не подлежат бегу в силу их природы «головастиков», в то время как дополнительный ренормгрупповой бег квадратичных по кривизне инвариантов — партнеров космологического и эйнштейновского членов — возникает как метаморфоза якобы «бегущих» космологической и гравитационной констант.

Метод внедиагональных разложений теплового ядра может быть относительно легко обобщен на гораздо более широкий важный класс неминимальных операторов — так называемые причинные операторы. Также могут быть существенно усилены результаты, касающиеся «обобщенной функториальности» и использования техники интегральных преобразований. Эти задачи будут решены в дальнейших статьях, готовящихся к публикации. Другим важным направлением исследований должно стать улучшение полученных внедиагональных разложений путем детального учета соотношений, существующих между обобщенными экспонентами, также как между производными мировой функции и тензора параллельного переноса. Автор надеется, что дальнейшая работа области изучения внедиагональной структуры теплового ядра приведет к созданию новых, гораздо более эффективных алгоритмов вычисления его коэффициентов, что крайне важно для анализа сложных моделей модифицированной гравитации, включая модели типа Хоравы-Лифшица.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *Wachowski, W. N.* The evolution function of the operator $-(-\Delta)^\nu$ [Текст] / W. N. Wachowski, P. I. Pronin // Moscow University Physics Bulletin. — 2019. — Т. 74, № 1. — С. 17—23.

A2. *Barvinsky, A. O.* Heat kernel for higher-order differential operators and generalized exponential functions [Текст] / A. O. Barvinsky, P. I. Pronin, W. Wachowski // Phys. Rev. — 2019. — Т. D100. — С. 105004. — arXiv: 1908.02161 [hep-th].

A3. *Barvinsky, A. O.* Heat kernel expansion for higher order minimal and nonminimal operators [Текст] / A. O. Barvinsky, W. Wachowski // Phys. Rev. — 2022. — Т. D105. — С. 065013. — arXiv: 2112.03062 [hep-th].

A4. *Barvinsky, A. O.* Notes on conformal anomaly, nonlocal effective action, and the metamorphosis of the running scale [Текст] / A. O. Barvinsky, W. Wachowski // Phys. Rev. — 2023. — Т. D108. — С. 045014. — arXiv: 2306.03780 [hep-th].

A5. *Barvinsky, A. O.* Off-diagonal heat kernel expansion for causal operators [Текст] / A. O. Barvinsky, A. V. Kurov, W. Wachowski. — Work in progress.

Список литературы

1. *ДеВитт, Б. С.* Динамическая теория групп и полей [Текст] / Б. С. ДеВитт. — Москва : «Наука», 1987.

2. *Васильев, А. Н.* Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике [Текст] / А. Н. Васильев. — Ленинград : Издательство Ленинградского университета, 1976.

3. *Gibbons, G. W.* Quantum field theory in curved spacetime [Текст] / G. W. Gibbons // General Relativity. An Einstein Centenary Survey. — Cambridge, England : Cambridge University Press, 1979. — С. 639—679.

4. *Биррелл, Н.* Квантовые поля в искривленном пространстве-времени [Текст] / Н. Биррелл, П. Девис. — Москва : «Мир», 1984.

5. *Wald, R. M.* Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics [Текст] / R. M. Wald. — Chicago, London : The University of Chicago Press, 1994.

6. *Шубин, М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория [Текст] / М. А. Шубин. — Москва : Добросвет, 2005.

7. *Адамар, Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа [Текст] / Ж. Адамар. — Москва : «Наука», 1978.
8. *Minakshisundaram, S.* Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-operator on Riemannian manifolds [Текст] / S. Minakshisundaram, A. Pleijel // Can. J. Math. — 1949. — Т. 1. — С. 242—256.
9. *Minakshisundaram, S.* Eigenfunctions on Riemannian manifolds [Текст] / S. Minakshisundaram // J. Indian Math. Soc. — 1953. — Т. 17, № 4. — С. 158—165.
10. *Seeley, R. T.* Complex powers of an elliptic operator [Текст] / R. T. Seeley // Singular Integrals. Т. 10. — Chicago, Ill : Amer. Math. Soc., 1967. — С. 288—307. — (Proc. Sympos. Pure Math.)
11. *Gilkey, P. B.* The spectral geometry of a Riemannian manifold [Текст] / P. B. Gilkey // J. Differ. Geom. — 1975. — Т. 10. — С. 601—618.
12. *Gilkey, P. B.* Recursion relations and the asymptotic behavior of the eigenvalues of the Laplacian [Текст] / P. B. Gilkey // Compositio Math. — 1979. — Т. 38, № 2. — С. 201—240.
13. *Gilkey, P. B.* The spectral geometry of the higher order Laplacian [Текст] / P. B. Gilkey // Duke Math. J. — 1980. — Т. 47, № 3. — С. 511—528.
14. *Fegan, H. D.* Invariants of the heat equation [Текст] / H. D. Fegan, P. B. Gilkey // Pac. J. Math. — 1985. — Т. 117, № 2. — С. 233—254.
15. *Gilkey, P. B.* Heat equation asymptotics of “nonminimal” operators on differential forms [Текст] / P. B. Gilkey, T. P. Branson, S. A. Fulling // J. Math. Phys. (N.Y.) — 1991. — Т. 32, № 8. — С. 2089—2091.
16. *Gilkey, P. B.* Logarithmic terms in asymptotic expansions of heat operator traces [Текст] / P. B. Gilkey, G. Grubb // Commun. Partial Differ. Equations. — 1998. — Т. 23, № 5/6. — С. 777—792.
17. *Gilkey, P. B.* Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem [Текст] / P. B. Gilkey. — Boca Raton, Florida : CRC Press, 1995.
18. *Gilkey, P. B.* Asymptotic Formulae in Spectral Geometry [Текст] / P. B. Gilkey. — Boca Raton, London, New York, Washington, DC : Chapman, Hall/CRC, 2003.
19. *Fock, V.* Die Eigenzeit in der Klassischen- und in der Quantennechanik [Текст] / V. Fock // Phys. Z. Sowjetunion. — 1937. — Т. 12. — С. 404—425.
20. *Schwinger, J.* On gauge invariance and vacuum polarization [Текст] / J. Schwinger // Phys. Rev. — 1951. — Т. 82, № 5. — С. 664—679.

21. *Deser, S.* One-loop divergences of quantized Einstein-Maxwell fields [Текст] / S. Deser, P. van Nieuwenhuizen // Phys. Rev. D. — 1974. — Т. 10, № 2—15. — С. 401.

22. *Deser, S.* Nonrenormalizability of the quantized Dirac-Einstein system [Текст] / S. Deser, P. van Nieuwenhuizen // Phys. Rev. D. — 1974. — Т. 10, № 2—15. — С. 411.

23. *Deser, S.* One-loop divergences of the Einstein-Yang-Mills system [Текст] / S. Deser, P. Tsao H.-Sh. van Nieuwenhuizen // Phys. Rev. D. — 1974. — Т. 10, № 10—15. — С. 3337.

24. *'t Hooft, G.* One loop divergencies in the theory of gravitation [Текст] / G. 't Hooft, M. Veltman // Ann. Inst. Henri Poincare. — 1974. — A20. — С. 69—94.

25. *Christensen, S. M.* Axial and conformal anomalies for arbitrary spin in gravity and supergravity [Текст] / S. M. Christensen, M. J. Duff // Phys. Lett. B. — 1978. — Т. 76, № 5. — С. 571—574.

26. Chirality, self-duality, and supergravity counterterms [Текст] / S. M. Christensen [и др.] // Phys. Lett. B. — 1979. — Т. 84, № 4. — С. 411—415.

27. *Stelle, K. S.* Renormalization of higher-derivative quantum gravity [Текст] / K. S. Stelle // Phys. Rev. — 1977. — Т. D16, № 4. — С. 953—969.

28. *Fradkin, E. S.* Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity [Текст] / E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin // Nucl. Phys. B. — 1982. — Т. B201, № 3. — С. 469—491.

29. *Avramidy, I. G.* Asymptotic freedom in higher-derivative quantum gravity [Текст] / I. G. Avramidy, A. O. Barvinsky // Phys. Lett. B. — 1985. — Т. 159, № 4—6. — С. 269—274.

30. *Hawking, S. W.* Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime [Текст] / S. W. Hawking // Comm. Math. Phys. — 1977. — Т. 55. — С. 133—148.

31. *Capper, D. M.* Trace anomalies in dimensional regularization [Текст] / D. M. Capper, M. J. Duff // Nuovo Cim. A. — 1974. — Т. 23, № 1. — С. 173—183.

32. *Capper, D. M.* Conformal anomalies and the renormalizability problem in quantum gravity [Текст] / D. M. Capper, M. J. Duff // Phys. Lett. A. — 1975. — Т. 53, № 5. — С. 361—362.

33. *Duff, M. J.* Observations on Conformal Anomalies [Текст] / M. J. Duff // Nucl. Phys. B. — 1977. — Т. 125. — С. 334—348.

34. *Fradkin, E. S.* Conformal off-mass-shell extension and elimination of conformal anomalies in quantum gravity [Текст] / E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky // Phys. Lett. B. — 1978. — Т. 73, № 2. — С. 209—213.

35. *Dowker, J. S.* Covariant Casimir calculations [Текст] / J. S. Dowker, R. Critchley // J. Phys. A. — 1976. — Т. 9, № 4. — С. 535—540.

36. *Christensen, S. M.* Trace anomalies and the Hawking effect [Текст] / S. M. Christensen, S. A. Fulling // Phys. Rev. D. — 1977. — Т. 15, № 8. — С. 2088—2104.

37. *Bunch, T. S.* Stress tensor and conformal anomalies for massless fields in a Robertson–Walker universe [Текст] / T. S. Bunch, P. C. Davies // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1977. — Т. 356. — С. 569—574.

38. *Adler, S. L.* Regularization of the stress-energy tensor for vector and scalar particles propagating in a general background metric [Текст] / S. L. Adler, J. Lieberman, Y. J. Ng // Ann. Phys. — 1977. — Т. 106, № 2. — С. 279—321.

39. *Brown, L. S.* Stress tensors and their anomalies in conformally flat space-time [Текст] / L. S. Brown, J. P. Cassidy // Phys. Rev. D. — 1977. — Т. 16, № 6. — С. 1712—1716.

40. *Fradkin, E. S.* One-loop effective potential in gauged $O(4)$ supergravity and the problem of the Λ term [Текст] / E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin // Nucl. Phys. B. — 1984. — Т. 234, № 2. — С. 472—508.

41. *Fradkin, E. S.* Conformal anomaly in Weyl theory and anomaly free superconformal theories [Текст] / E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin // Phys. Lett. B. — 1984. — Т. 134, № 3/4. — С. 187—193.

42. *Fradkin, E. S.* Conformal supergravity [Текст] / E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin // Phys. Rep. — 1985. — Т. 119, № 4/5. — С. 233—362.

43. *Starobinsky, A. A.* A new type of isotropic cosmological models without singularity [Текст] / A. A. Starobinsky // Phys. Lett. B. — 1980. — Т. 91, № 1. — С. 99—102.

44. *Horava, P.* Quantum gravity at a Lifshitz point [Текст] / P. Horava // Phys. Rev. D. — 2009. — Т. 79. — С. 084008. — arXiv: 0901.3775 [hep-th].

45. Hořava gravity is asymptotically free in 2 + 1 dimensions [Текст] / A. O. Barvinsky [и др.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Т. 119, № 21. — С. 211301. — arXiv: 1706.06809 [hep-th].

46. *Barvinsky, A. O.* Beta functions of (3+1)-dimensional projectable Hořava gravity [Текст] / A. O. Barvinsky, A. V. Kurov, S. M. Sibiryakov // Phys. Rev. — 2022. — Т. D105. — С. 044009. — arXiv: 2110.14688 [hep-th].

47. *Barvinsky, A. O.* Asymptotic freedom in (3 + 1)-dimensional projectable Hořava gravity: connecting ultraviolet to infrared [Текст] / A. O. Barvinsky, A. V. Kurov, S. M. Sibiryakov. — 2022.

48. *Barvinsky, A. O.* The generalized Schwinger–DeWitt technique in gauge theories and quantum gravity [Текст] / A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky // Phys. Rep. — 1985. — Т. 119, № 1. — С. 1—74.

49. *Gusynin, V. P.* New algorithm for computing the coefficients in the heat kernel expansion [Текст] / V. P. Gusynin // Phys. Lett. — 1989. — Т. B225, № 3. — С. 233—239.

50. *Gusynin, V. P.* Seeley–Gilkey coefficients for fourth-order operators on a Riemannian manifold [Текст] / V. P. Gusynin // Nucl. Phys. — 1990. — Т. B333, № 1. — С. 296—316.

51. *Gusynin, V. P.* Asymptotics of the heat kernel for nonminimal differential operators [Текст] / V. P. Gusynin // Ukr. Math. J. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1432—1441.

52. *Gusynin, V. P.* Local heat kernel asymptotics for nonminimal differential operators [Текст] / V. P. Gusynin, E. V. Gorbar // Phys. Lett. — 1991. — Т. B270, № 1. — С. 29—36.

53. *Gusynin, V. P.* Heat kernel expansion for nonminimal differential operations and manifolds with torsion [Текст] / V. P. Gusynin, E. V. Gorbar, V. V. Romankov // Nucl. Phys. — 1991. — Т. B362, № 1/2. — С. 449—471.

54. *Gorbar, E. V.* Heat kernel expansion for operators containing a root of the Laplace operator [Текст] / E. V. Gorbar // J. Math. Phys. (N.Y.) — 1997. — Т. 38, № 3. — С. 1692—1699. — arXiv: 9602018 [hep-th].

55. *Buchbinder, I. L.* Effective Action in Quantum Gravity [Текст] / I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, I. L. Shapiro. — Bristol, Philadelphia : Institute of Physics Publishing, 1992.

56. *Vassilevich, D. V.* Heat kernel expansion: user's manual [Текст] / D. V. Vassilevich // Phys. Rep. — 2003. — Т. 388, № 5/6. — С. 279—360. — arXiv: 0306138 [hep-th].

57. *Barvinsky, A. O.* Heat kernel expansion in the background field formalism [Текст] / A. O. Barvinsky. — 2015. — Scholarpedia, 10(6):31644.

58. *Carinhas, P. A.* Computational asymptotics of fourth-order operators [Текст] / P. A. Carinhas, S. A. Fulling // Asymptotic and computational analysis: conference in honor of Frank W.J. Olver's 65th birthday. — New York : MARCEL DEKKER, Inc., 1990. — (Proc. Sympos. Pure Math.)

59. *Polyakov, A. M.* Quantum Geometry of Bosonic Strings [Текст] / A. M. Polyakov // Phys. Lett. B. — 1981. — Т. 103. — С. 207—210.

60. *Riegert, R. J.* A nonlocal action for the trace anomaly [Текст] / R. J. Riegert // Phys. Lett. B. — 1984. — Т. 134, № 1/2. — С. 56—60.

61. *Paneitz, S. M.* A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds (summary) [Текст] / S. M. Paneitz // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods ans Applications (SIGMA). Т. 4. — 2008. — arXiv: 0803.4331 [math.DG].

62. *Deser, S.* Nonlocal conformal anomalies [Текст] / S. Deser, M. J. Duff, C. J. Isham // Nucl. Phys. B. — 1976. — Т. 111, № 1. — С. 45—55.

63. *Barvinsky, A. O.* Beyond the Schwinger–DeWitt technique: Converting loops into trees and in-in currents [Текст] / A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky // Nucl. Phys. B. — 1987. — Т. 282. — С. 163—188.

64. *Barvinsky, A. O.* Covariant perturbation theory (II). Second order in the curvature. General algorithms [Текст] / A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky // Nucl. Phys. B. — 1990. — Т. 333, № 2. — С. 471—511.

65. *Barvinsky, A. O.* Covariant perturbation theory (III). Spectral representations of the third-order form factors [Текст] / A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky // Nucl. Phys. B. — 1990. — Т. 333, № 2. — С. 512—524.

66. Covariant Perturbation Theory (IV). Third order in the curvature [Текст] : тех. отч. / A. O. Barvinsky [и др.] ; Report of the University of Manitoba. — Winnipeg, 1993. — SPIRES-HEP: PRINT-93—0274. — arXiv: 0911.1168 [hep-th].

67. *Deser, S.* Geometric classification of conformal anomalies in arbitrary dimensions [Текст] / S. Deser, A. Schwimmer // Phys. Lett. B. — 1993. — Т. 309, № 3/4. — С. 279—284. — arXiv: hep-th/9302047 [hep-th].

68. *Erdmenger, J.* Conserved currents and the energy momentum tensor in conformally invariant theories for general dimensions [Текст] / J. Erdmenger, H. Osborn // Nucl. Phys. B. — 1997. — Т. 483. — С. 431—474. — arXiv: hep-th/9605009.

69. *Deser, S.* Closed form effective conformal anomaly actions in $D \geq 4$ [Текст] / S. Deser // Phys. Lett. B. — 2000. — Т. 479, № 1—3. — С. 315—320. — arXiv: hep-th/9911129 [hep-th].

70. *Coriano, C.* TTT in CFT: trace identities and the conformal anomaly effective action [Текст] / C. Coriano, M. M. Maglio, E. Mottola // Nucl. Phys. B. — 2019. — Т. 942. — С. 303—328. — arXiv: 1703.08860 [hep-th].

71. *Duff, M. J.* Weyl, Pontryagin, Euler, Eguchi and Freund [Текст] / M. J. Duff // J. Phys. A: Math. Theor. — 2020. — Т. 53. — С. 301001. — arXiv: 2003.02688 [hep-th].

72. *Antoniadis, I.* Four-dimensional quantum gravity in the conformal sector [Текст] / I. Antoniadis, E. Mottola // Phys. Rev. D. — 1992. — Т. 45. — С. 2013.

73. *Antoniadis*, *I.* Scaling behavior of quantum four-geometries [Текст] / I. Antoniadis, P. O. Mazur, E. Mottola // Phys. Lett. B. — 1994. — Т. 323, № 3/4. — С. 284—291. — arXiv: hep-th/9301002 [hep-th].

74. *Mottola*, *E.* Macroscopic effects of the quantum trace anomaly [Текст] / E. Mottola, R. Vaulin // Phys. Rev. D. — 2006. — Сент. — Т. 74, вып. 6. — С. 064004. — URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.064004.

75. *Mottola*, *E.* Scalar Gravitational Waves in the Effective Theory of Gravity [Текст] / E. Mottola // JHEP. — 2017. — Т. 07. — С. 043. — arXiv: 1606.09220 [gr-qc]. — [Erratum: JHEP 09, 107 (2017)].

76. *Mottola*, *E.* The effective theory of gravity and dynamical vacuum energy [Текст] / E. Mottola // JHEP. — 2022. — Т. 11. — С. 037. — arXiv: 2205.04703 [hep-th].

77. *Barvinsky*, *A. O.* Conformal decomposition of the effective action and covariant curvature expansion [Текст] / A. O. Barvinsky, A. G. Mirzabekian, V. V. Zhytnikov. — 1995.

78. *Fischetti*, *M. V.* Quantum effects in the early universe. I. Influence of trace anomalies on homogeneous, isotropic, classical geometries [Текст] / M. V. Fischetti, J. B. Hartle, B. L. Hu // Phys. Rev. D. — 1979. — Т. 20, № 8. — С. 1757—1771.

79. *Barvinsky*, *A. O.* Cosmological landscape from nothing: some like it hot [Текст] / A. O. Barvinsky, A. Y. Kamenshchik // JCAP. — 2006. — Т. 09, № 014. — arXiv: hep-th/0605132 [hep-th].

80. *Barvinsky*, *A. O.* Why there is something rather than nothing: Cosmological constant from summing over everything in Lorentzian quantum gravity [Текст] / A. O. Barvinsky // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Т. 99. — С. 071301. — arXiv: 0704.0083 [hep-th].

81. *Anber*, *M. M.* Running of the gravitational constant [Текст] / M. M. Anber, J. F. Donoghue // Phys. Rev. D. — 2012. — Т. 85. — С. 104016. — arXiv: 1111.2875 [hep-th].

82. *Donoghue*, *J. F.* A critique of the asymptotic safety program [Текст] / J. F. Donoghue // Front. Phys. — 2020. — Т. 8, № 56. — arXiv: 1911.02967 [hep-th].

83. *Woodard*, *R. P.* Cosmology is not a renormalization group flow [Текст] / R. P. Woodard // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Т. 101. — С. 081301. — arXiv: 0805.3089 [gr-qc].

84. *Donoghue*, *J. F.* Non-local partner to the cosmological constant [Текст] / J. F. Donoghue // Phys. Rev. D. — 2022. — Т. 105. — С. 105025. — arXiv: 2201.12217 [hep-th].

85. *Gorbar, E. V.* Nonlocality of quantum matter corrections and cosmological constant running [Текст] / E. V. Gorbar, I. L. Shapiro // JHEP. — 2022. — Т. 7, № 103. — arXiv: 2203.09232 [gr-qc].

86. *Appelquist, T.* Infrared Singularities and Massive Fields [Текст] / T. Appelquist, J. Carazzone // Phys. Rev. D. — 1975. — Т. 11. — С. 2856.

87. *Gorbar, E. V.* Renormalization group and decoupling in curved space [Текст] / E. V. Gorbar, I. L. Shapiro // JHEP. — 2003. — Т. 02, № 021. — arXiv: hep-ph/0210388 [hep-ph].

Ваховский Владислав Николаевич

Ковариантные методы в современной квантовой теории поля и квантовой гравитации

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________