

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ П. Н. ЛЕБЕДЕВА РОССИЙСКОЙ  
АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Жаднов Никита Олегович

Флуктуации частоты высокостабильных лазерных систем  
с опорным монолитным оптическим резонатором

Специальность 1.3.19 -  
Лазерная физика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук  
Колачевский Николай Николаевич

Москва, 2021

# Оглавление

<i><b>Введение.....</b></i>	<b>5</b>
<i><b>Глава 1. Стабилизация частоты излучения лазеров .....</b></i>	<b>13</b>
1.1 Методы стабилизации частоты .....	13
1.1.1 Стабилизация по моде резонатора .....	15
1.1.2 Стабилизация по переходам в атомах и молекулах.....	19
1.2 Применения ультрастабильных лазеров: обзор.....	22
1.2.1 Оптические часы .....	22
1.2.2 Фундаментальные задачи.....	26
1.3 Стабилизация частоты методом Паунда-Дривера-Холла.....	27
1.4 Шумы лазерных систем с опорными резонаторами .....	32
1.4.1 Шум фотодетектора.....	33
1.4.2 Остаточная амплитудная модуляция .....	33
1.4.3 Флуктуации давления.....	36
1.4.4 Вибрации.....	37
1.4.5 Флуктуации температуры .....	39
<i><b>Глава 2. Снижение тепловых шумов длины опорных резонаторов Фабри-Перо для ультрастабильных лазерных систем .....</b></i>	<b>42</b>
2.1 Введение .....	42
2.2 Флуктуационно-диссипационная теорема и тепловые шумы механических систем .....	43
2.3 Материалы ультрастабильных резонаторов .....	48
2.4 Методы снижения предела тепловых шумов опорных резонаторов.....	51
2.5 Прочие виды тепловых шумов опорных резонаторов .....	53
2.6 Частичная компенсация тепловых шумов в основной моде резонатора .....	54
2.6.1 Регистрация тепловых шумов моды резонатора.....	55
2.6.2 Численное моделирование метода компенсации тепловых шумов.....	57
2.7 Основные результаты главы 2 .....	62
<i><b>Глава 3. Часовые лазерные системы для стронциевых оптических часов на основе длинных ULE-резонаторов.....</b></i>	<b>63</b>
3.1 Устройство ULE-резонаторов и их систем подвеса .....	63
3.1.1 Оптимальная система опор горизонтального ULE-резонатора.....	67
3.1.2 Оптимальная форма вертикального резонатора .....	70
3.2 Устройство системы стабилизации частоты 698 нм лазера .....	71

3.2.1 Свойства ULE-резонаторов.....	71
3.2.2 Вакуумные камеры .....	73
3.2.3 Системы стабилизации частоты излучения лазеров .....	76
3.3 Стабильность и дрейф частоты лазерных систем с ULE-резонаторами.....	77
3.3.1 Относительный дрейф частоты .....	78
3.3.2 Ширина линии и нестабильность частоты .....	79
3.3.3 Исследование шумов петли обратной связи .....	82
3.3.4 Флуктуации остаточной амплитудной модуляции.....	84
3.3.5 Чувствительность частоты к мощности излучения .....	84
3.3.6 Отклик на ударное возмущение .....	85
3.4 Основные результаты главы 3 .....	86
<b>Глава 4. Стабилизация частоты лазеров телекоммуникационного диапазона по криогенным кремниевым резонаторам.....</b>	<b>88</b>
4.1 Экспериментальная установка .....	89
4.1.1 Резонатор Фабри-Перо из монокристаллического кремния.....	89
4.1.2 Высоковакуумный криостат .....	92
4.1.3 Оптоэлектронная система привязки частоты.....	98
4.2 Компенсация флуктуаций остаточной амплитудной модуляции .....	100
4.2.1 Схема детектирования остаточной амплитудной модуляции .....	100
4.2.2 Зависимость уровня остаточной амплитудной модуляции от температуры и угла поворота поляризатора .....	101
4.2.3 Влияние флуктуаций остаточной амплитудной модуляции на стабильность частоты лазерной системы.....	103
4.3 Основные результаты главы 4 .....	105
<b>Глава 5. Температурная стабилизация оптического резонатора Фабри-Перо.....</b>	<b>107</b>
5.1 Температурнонезависимый резонатор Фабри-Перо .....	107
5.2 Тепловое расширение температурнонезависимого резонатора.....	110
5.3 Основные результаты главы 5 .....	112
<b>Заключение.....</b>	<b>114</b>
<b>Литература.....</b>	<b>117</b>
<b>Приложение А. Характеристики стабильности и шумов частоты.....</b>	<b>126</b>
<b>Приложение Б. Стабилизация частоты лазера по опорному резонатору.....</b>	<b>131</b>
Б.1 Свойства резонаторов Фабри-Перо .....	131
Б.2 Поперечные моды .....	136
Б.3 Петля стабилизации шумов частоты .....	139

Б.4 Практическая реализация стабилизации лазера методом ПДХ.....	142
Б.5 Измерение стабильности частоты .....	146

## Введение

Диссертация посвящена разработке, созданию и исследованию характеристик высокостабильных лазерных источников на основе опорных монолитных оптических резонаторов Фабри-Перо для использования в качестве локальных осцилляторов в оптических часах, задачах дальнометрии, передачи сигналов времени и частоты, а также тестов фундаментальных теорий.

### Актуальность работы

Открытие принципов лазерной генерации и разработка концепции лазера, произошедшие в середине прошлого века, показали принципиальную возможность создания стандартов частоты в оптическом диапазоне [1]. Ключевым методом в данной области является стабилизация частоты излучения лазера по вершине спектральной линии внешнего резонансного элемента: атома, молекулы или оптического резонатора. На сегодняшний день наилучшими показателями относительных точности и стабильности среди всех стандартов обладают оптические часы [2] – устройства, в которых частота лазера стабилизируется по моде высокодобротного оптического резонатора Фабри-Перо [3], а затем по частоте электромагнитного перехода в лазерно-охлажденных атомах или ионах. Лазеры со стабилизацией частоты излучения только по опорному резонатору, имеющие относительную нестабильность частоты  $\Delta\nu/\nu$  на уровне  $10^{-14}$  и ниже на временах усреднения 100 мс – 10 с, в литературе принято называть ультрастабильными. Стабилизация по резонатору в оптических часах выполняет две важные функции. Во-первых, она обеспечивает сужение спектральной линии излучения лазера, необходимое для спектроскопии часовых переходов шириной от нескольких герц до малых долей герца. Линия нестабилизированного лазера в реальных условиях оказывается сильно уширена из-за шумов частоты и интенсивности излучения, вызванных практически неустраняемым влиянием окружающей среды или спонтанным излучением активной среды. Во-вторых, стабилизированный по частоте лазер играет роль хранителя частоты на временах, меньших чем характерное время опроса атомного репера частоты, составляющее порядка 100 мс. Часовой переход в атомах, в свою очередь, обеспечивает точность и долговременную стабильность оптических стандартов.

По характеристикам относительной нестабильности и систематической погрешности частоты лучшие на сегодняшний день оптические часы на атомах стронция [4] и ионе алюминия [5] более чем на два порядка превосходят первичные микроволновые стандарты – цезиевые фонтаны. В связи с этим актуальной задачей современной метрологии является формулировка

нового определения секунды системы СИ, которое будет иметь более точную экспериментальную реализацию при помощи оптических часов [6].

Ещё на первых этапах развития оптических стандартов частоты было отмечено не только их прикладное значение в области метрологии и глобальной навигации, но и исключительный потенциал для фундаментальных физических экспериментов [1]. К исследованиям такого рода относятся тесты теории относительности и квантовой теории, проверка постоянства законов природы во времени и поиски новой физики [7]. В частности, точность и стабильность современных оптических часов и ультрастабильных лазерных систем уже позволили осуществить ряд экспериментов, направленных на проверку Лоренц-инвариантности [8] и общей теории относительности [9], поиски возможного дрейфа постоянной тонкой структуры [10] и решение загадки радиуса протона [11].

Новым применением оптических стандартов частоты в фундаментальных исследованиях в настоящее время является поиск темной материи. Одним из возможных кандидатов на её роль являются скалярные поля, образованные сверхлегкими частицами ( $mc^2 \ll 1 \text{ eV}$ ) [12]. Присутствие таких полей должно приводить к гармоническим колебаниям фундаментальных констант, и, следовательно, частот переходов в атомах и частот оптических резонаторов. На сегодняшний день в результате экспериментов с атомными часами [13] и ультрастабильными резонаторами [14,15] удалось установить ограничения на константу связи между обыкновенной и тёмной материями в различных энергетических диапазонах.

Ультрастабильные лазеры находят применения не только в лабораторных исследованиях: существует ряд проектов, нацеленных на полевые и бортовые задачи. В 2018 году произведен запуск и начата работа пары спутников глобальной системы GRACE-FO [16], предназначенной для построения точной карты геопотенциала и мониторинга климатических изменений. Каждый из спутников оснащён ультрастабильной лазерной системой с опорным резонатором [17].

Лазеры с высокой стабильностью частоты также являются одним из ключевых инструментов для создания детекторов гравитационных волн типа LIGO [18]. Следует отметить, что тепловые шумы длины интерферометра, ограничивающие чувствительность лазерных интерферометрических гравитационно-волновых детекторов, также определяют фундаментальный предел стабильности частоты опорных резонаторов. Диапазон частот гравитационных волн, в котором работают наземные детекторы, из-за сейсмических и ньютоновских шумов ограничен снизу частотой  $\sim 10$  Гц. В низкочастотной области 3 мГц – 10 Гц детектирование гравитационных волн возможно осуществлять при помощи космической сети оптических часов [19].

Квантовый проекционный шум ограничивает относительную нестабильность частоты большинства современных оптических часов величиной  $\approx 10^{-17}/\sqrt{\tau}$ , где  $\tau$  – время измерения.

Тем не менее, даже в лучших на сегодняшний день экспериментах, указанная характеристика принимает приблизительно на порядок большее значение. Причиной этого являются шумы частоты стабилизированного по опорному резонатору лазера из-за эффекта Дика [20]. Повышение стабильности часовых лазеров позволит улучшить характеристики оптических часов благодаря подавлению данного эффекта, а также откроет возможность для увеличения времени опроса и улучшения спектрального разрешения.

На стабильность частоты лазерной системы с опорным резонатором оказывает влияние множество технических факторов, связанных с флуктуациями параметров окружающей среды (вибрации, колебания температуры, шумы электроники и др.). Фундаментальный предел нестабильности частоты ультрастабильного лазера связан с так называемыми броуновскими тепловыми шумами резонатора [21]. В последние годы в мире основной прогресс характеристик ультрастабильных лазеров произошёл благодаря применению опорных монолитных резонаторов Фабри-Перо нового типа: криогенных кремниевых резонаторов [22,23] и длинных ( $L \approx 0.5$  м) резонаторов из температурно-компенсированного стекла ULE<sup>1</sup> [24]. Значения фундаментального предела тепловых шумов относительной нестабильности частоты таких резонаторов составляют менее  $10^{-15}$ .

В России, в национальном метрологическом институте ВНИИФТРИ, ведутся работы по созданию оптических реперов частоты на холодных атомах стронция для государственного первичного эталона единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ-1. Часовой переход в атомах стронция ( $^{87}\text{Sr}$ ) является одним из наиболее вероятных претендентов на переопределение секунды СИ. В 2016 г. был завершён проект, нацеленный на достижение стронциевым репером величины относительной нестабильности частоты  $10^{-16}$ . Экспериментальная часть настоящей диссертационной работы посвящена проекту по созданию лазерных систем для нового поколения стронциевого репера с относительной нестабильностью частоты  $10^{-17}$ . С этой целью в ФИАН были разработаны ультрастабильные лазеры на длине волны 698 нм (соответствует часовому переходу в атоме стронция) с опорными длинными (48 см) ULE-резонаторами. Указанные резонаторы имеют на порядок меньший предел тепловых шумов, чем предыдущее поколение [25] и способны обеспечить лучшую стабильность. Новым направлением в рамках данного проекта стала разработка лазерных систем с длиной волны 1542 нм со стабилизацией частоты по криогенным резонаторам из монокристаллического кремния. Эти резонаторы характеризуются чрезвычайно низким уровнем тепловых шумов и малым дрейфом частоты. Созданные на их основе лазеры могут быть использованы для

---

<sup>1</sup> Ultra low expansion glass – стекло со сверхнизким коэффициентом теплового расширения

прецизионной спектроскопии в оптических часах путём передачи стабильности в другой спектральный диапазон через фемтосекундную гребёнку оптических частот.

Для достижения предельного уровня стабильности частоты лазерной системы с опорным монолитным резонатором необходимо оптимизировать его форму и подобрать материалы так, чтобы минимизировать тепловые шумы и чувствительность к вибрациям. Не менее важной задачей является разработка и сборка высоковакуумных камер, способных обеспечить стабильную температуру всего резонатора в точке нулевого теплового расширения. Для эффективной передачи стабильности частоты от моды резонатора лазерному излучению необходимо использование оптоэлектронной петли обратной связи также с низким уровнем собственных шумов. Решению задач по разработке и созданию ультрастабильных лазерных систем на основе опорных резонаторов с низким пределом тепловых шумов, а также исследованию влияния разного рода флуктуаций на стабильность частоты посвящена настоящая диссертационная работа.

**Целью** данной работы является: создание и исследование характеристик лазерных систем с опорными монолитными резонаторами Фабри-Перо для современных оптических атомных реперов частоты.

Для достижения поставленной цели требуется решить следующие **задачи**:

1. Провести анализ основных параметров ультрастабильных лазерных систем, влияющих на предел стабильности частоты лазерного излучения. Проанализировать существующие и перспективные методы минимизации тепловых шумов частоты опорных резонаторов.

2. Разработать и создать опорные резонаторы Фабри-Перо – длинные резонаторы из стекла ULE и криогенные кремниевые резонаторы – с относительной нестабильностью частоты моды ниже  $10^{-15}$ . Разработать и создать вакуумные камеры, системы подвеса и температурной стабилизации резонаторов.

3. Осуществить сличение частот двух полупроводниковых лазеров на длине волны 698 нм, стабилизированных по опорным резонаторам, определить относительную нестабильность частоты сигнала биений оптических частот на временах усреднения 10 мс – 10 с.

4. Разработать и исследовать систему минимизации шумового вклада остаточной амплитудной модуляции в нестабильность частоты лазерной системы, стабилизированной методом Паунда-Дривера-Холла.

5. Разработать новый метод компенсации изменения длины резонатора Фабри-Перо под действием температуры, альтернативный использованию материалов с нулевым коэффициентом теплового расширения.



**Научная новизна:**

1. Предложен метод частичной компенсации (до 50%) флуктуаций частоты лазерного излучения, вызванных тепловым шумом опорного резонатора Фабри-Перо, при помощи двух «пробных» мод старших порядков.

2. Впервые созданы лазерные системы со стабилизацией частоты по длинным (48 см) резонаторам из стекла ULE с относительной нестабильностью частоты на уровне  $10^{-15}$  на временах усреднения 30 мс – 20 с для использования в оптическом репере частоты на холодных атомах стронция, включенном в государственный первичный эталон единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ-1 Российской Федерации.

3. Разработаны и созданы высокостабильные лазерные системы с опорными монолитными криогенными резонаторами из монокристаллического кремния. В данных системах реализован оригинальный метод стабилизации температуры резонаторов в высоковакуумных камерах и экспериментально показано что вибрации, вызванные криогенной системой, не сказываются на стабильности длины резонатора на уровне не хуже  $10^{-15}$ .

5. В методе Паунда-Дривера-Холла экспериментально продемонстрировано более чем 100-кратное уменьшение вклада флуктуаций остаточной амплитудной модуляции в нестабильность частоты лазерной системы. Это удалось сделать за счёт стабилизации температуры кристалла электрооптического модулятора и управления постоянной составляющей напряжения на нём по величине остаточной амплитудной модуляции в цепи обратной связи.

6. Предложен и проверен путём моделирования новый метод компенсации изменения длины резонатора Фабри-Перо под действием температуры, позволяющий создавать оптические опорные резонаторы с нулевым тепловым расширением из материалов, которые таким свойством не обладают.

**Практическая значимость.**

Длинные ULE-резонаторы и криогенные кремниевые резонаторы имеют чрезвычайно низкий фундаментальный предел тепловых шумов и открывают возможность создания ультрастабильных лазеров с относительной нестабильностью частоты излучения ниже  $10^{-15}$ . Использование созданных лазерных систем на длине волны 698 нм с шириной спектральной линии  $<1.5$  Гц для опроса часовых переходов позволило создать оптический репер частоты на холодных атомах стронция ( $^{87}\text{Sr}$ ) в оптической решётке с точностью и относительной нестабильностью ниже  $10^{-17}$  в рамках завершившейся ФЦП "Поддержание, развитие и использование системы ГЛОНАСС на 2012 – 2020 годы", что соответствует современному мировому уровню. Указанный оптический репер является составной частью государственного

первичного эталона единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ-1, работающего в национальном метрологическом институте России ФГУП «ВНИИФТРИ». Стронциевый репер частоты участвует в формировании шкалы координированного времени UTC(SU). Проведённые эксперименты по сличению лазеров, стабилизированных по одному и двум разным резонаторам, позволяют охарактеризовать стабильность частоты лазерных систем и оптоэлектронных петель стабилизации в методе Паунда-Драйвера-Холла. Исследование шумов петель стабилизации частоты лазеров открывает возможности для их компенсации и достижения предельного уровня стабильности частоты, связанного с тепловыми шумами резонатора.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Частичная компенсация флуктуаций частоты лазера, обусловленных тепловыми шумами  $LG_{00}$  моды опорного резонатора Фабри-Перо, возможна по сигналу биений оптических полей двух «пробных» мод того же резонатора – лаггер-гауссовой моды  $LG_{10}$  и лаггер-гауссовой моды с орбитальным моментом  $LG_{03*}$ . Моделирование показало, что этот метод позволяет уменьшить флуктуации частоты лазера на 30 – 50 %.

2. Экспериментально измеренная спектральная ширина сигнала биений частот двух созданных полупроводниковых лазерных систем с длиной волны 698 нм, стабилизированных по ULE-резонаторам длиной 48 см, составляет  $\leq 1.5$  Гц (по уровню половины высоты) и ограничена временем измерения. Это обеспечивает величину девиации Аллана флуктуаций частоты каждой из систем на уровне  $< 2 \cdot 10^{-15}$  на временах усреднения 30 мс – 10 с, что удовлетворяет требованиям для оптического репера частоты нового поколения на атомах стронция.

3. Активная стабилизация температуры кристалла электрооптического модулятора и контроль постоянного напряжения на нём по величине остаточной амплитудной модуляции в методе Паунда-Драйвера-Холла позволяют уменьшить в эксперименте вклад её флуктуаций в нестабильность частоты лазерной системы более чем в 100 раз.

4. Напряжённое обжатие цилиндрического тела резонатора Фабри-Перо в радиальном направлении при помощи кольца из материала, коэффициент теплового расширения (КТР) которого значительно превосходит КТР тела, позволяет компенсировать тепловое расширение резонатора в аксиальном направлении. По результатам моделирования температурная зависимость коэффициента теплового расширения резонатора из кварца с алюминиевым обжимающим кольцом вблизи нулевой точки описывается линейной функцией с коэффициентом  $8 \cdot 10^{-10} 1/K^2$ , что приблизительно в два раза меньше, чем у резонатора из температурно-компенсированного стекла ULE (Corning 7972).

### **Личный вклад**

Все изложенные в работе результаты получены автором, либо при его непосредственном участии. Автор принимал ключевое участие в написании научных статей, которые легли в основу диссертационной работы.

### **Апробация работы**

Основные результаты диссертационной работы докладывались автором лично на 5 всероссийских и 5 международных научных конференциях:

1. Н. Жаднов, А. Масалов, К. Хабарова, Н. Колачевский, В. Сорокин «Новое поколение высокостабильных лазеров для тулиевых оптических часов», Физика ультрахолодных атомов (ФУХА), Новосибирск, 2016.

2. N. Zhadnov, A. Masalov, V. Sorokin, K. Khabarova, N. Kolachevsky «Cryogenic high-finesse Fabry-Perot cavities for ultrastable lasers», International Conference on Quantum Technologies (ICQT), Moscow, 2017.

3. N. Zhadnov, K. Kudeyarov, I. Semerikov, K. Khabarova, N. Kolachevsky «Low Thermal Noise Fabry-Perot Cavities for Ultrastable Lasers», European Frequency and Time Forum (EFTF), Turin, 2018.

4. N. Zhadnov, K. Kudeyarov, D. Kryuchkov, I. Semerikov, K. Khabarova, N. Kolachevsky «Lowering thermal noise of ultrastable cavities to  $1e-17$  level of fractional frequency instability», The European Group on Atomic Systems (EGAS) conference, Krakow, 2018.

5. Н. Жаднов, К. Кудеяров, Д. Крючков, К. Хабарова, Н. Колачевский «Ультростабильные лазеры для оптических часов и точной передачи времени», Физика ультрахолодных атомов (ФУХА), Новосибирск, 2018.

6. Н. Жаднов, К. Кудеяров, Д. Крючков, Г. Вишнякова, К. Хабарова, Н. Колачевский «Ультростабильные лазеры со стабилизацией частоты по криогенным кремниевым резонаторам», Фундаментальное и прикладное координатно-временное и навигационное обеспечение (КВНО), Санкт-Петербург, 2019.

7. N. Zhadnov, K. Kudeyarov, D. Kryuchkov, G. Vishnyakova, K. Khabarova, N. Kolachevsky «Ultrastable lasers for optical clocks and fundamental research», International Conference on Ultrafast Optical Science (UltraFastLight), Moscow, 2019.

8. Н. Жаднов, Д. Крючков, К. Кудеяров, Г. Вишнякова, К. Хабарова, Н. Колачевский «Часовые лазеры для стронциевых часов на основе длинных ULE резонаторов», Физика ультрахолодных атомов (ФУХА), Новосибирск, 2020.

9. N. Zhadnov, D. Kryuchkov, K. Kudeyarov, G. Vishnyakova, K. Khabarova, N. Kolachevsky «Sr clock laser systems based on long room-temperature cavities», Joint Conference of the European

Frequency & Time Forum & IEEE Intl Frequency Control Symposium (IEEE EFTF-IFCS), online, 2021.

10. Н. Жаднов, К. Кудеяров, Д. Крючков, Г. Вишнякова, К. Хабарова, А. Масалов, Н. Колачевский «Компенсация теплового расширения и тепловых шумов опорных оптических резонаторов», Форум «Микроэлектроника», Алушта, 2021.

### **Публикации автора по теме диссертации**

Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 статьях в журналах, индексируемых в международной базе данных Web of Science, и в патенте на полезную модель:

1. Н. О. Жаднов, К. С. Кудеяров, Д. С. Крючков, И. А. Семериков, К. Ю. Хабарова, Н. Н. Колачевский, “О пределе теплового шума высокостабильных оптических резонаторов”, Квантовая электроника, т. 48, № 5, 425–430 (2018)

2. Д. С. Крючков, Н. О. Жаднов, К. С. Кудеяров, Г. А. Вишнякова, К. Ю. Хабарова, Н. Н. Колачевский, “Компенсация флуктуаций остаточной амплитудной модуляции в оптоэлектронной системе стабилизации частоты лазерного излучения”, Квантовая электроника, т. 50, № 6, 590–594 (2020)

3. N. O. Zhadnov, K. S. Kudeyarov, D. S. Kryuchkov, G. A. Vishnyakova, K. Y. Khabarova, N. N. Kolachevsky “48-cm long room-temperature cavities in vertical and horizontal orientations for Sr optical clock”, Applied Optics, vol. 60, № 29, 9151-9159 (2021)

4. Н. О. Жаднов, Н. Н. Колачевский, “Частичная компенсация тепловых шумов в основной моде оптического резонатора”, Краткие сообщения по физике ФИАН, т. 8, 27–37 (2021)

5. Н. О. Жаднов, А. В. Масалов, «Устройство температурной стабилизации оптических резонаторов», патент на полезную модель RU 202420 U1 от 17.02.2021.

## Глава 1. Стабилизация частоты излучения лазеров

Ультростабильными лазерами принято называть источники излучения ближнего инфракрасного, оптического или ультрафиолетового диапазона, обладающие высокой когерентностью, стабильностью фазы и имеющие ширину спектральной линии  $\leq 10$  Гц. Такие устройства используются, например, в качестве опрашивающих генераторов и хранителей частоты в современных оптических часах. Подобные лазерные системы играют ключевую роль во множестве экспериментов в области фундаментальной физики, связанных с высокоточной спектроскопией и интерферометрией.

### 1.1 Методы стабилизации частоты

Открытие принципа работы лазера в 1954 г. дало науке мощный инструмент для решения самого широкого спектра задач. Высокая стабильность частоты лазерного излучения открыла новые возможности для прецизионной спектроскопии. Появились основные технические возможности для создания оптических стандартов времени и частоты, потенциально превосходящих по характеристикам микроволновые стандарты [1]. Для создания оптических часов, а также для разнообразных фундаментальных исследований, частота излучения лазерных источников требует дополнительной стабилизации.

Типичные спектральные ширины линий и причины, которые к ним приводят для некоторых видов коммерчески доступных нестабилизированных одночастотных лазеров, указаны в таблице 1.1. Относительная нестабильность частоты ( $\Delta\nu/\nu$ ) таких лазеров редко превосходит величину  $10^{-12}$ , тогда как для многих современных задач требуется нестабильность на уровне  $10^{-14}$  и ниже. Когда здесь и далее указываются величины относительной нестабильности частоты, девиации Аллана или ширины линии излучения, подразумеваются их значения на времени измерения 1 с.

Тип лазера	Причина шумов	Типичная ширина линии
Газовый	Флуктуации тока разряда и длины резонатора, колебания давления	10 кГц
Твердотельный	Флуктуации длины резонатора, мощности накачки, температуры усиливающего кристалла	10 кГц
На красителе	Флуктуации толщины струи красителя	1 МГц
Полупроводниковый без внешнего резонатора	Предел Шавлова-Таунса; сильная связь амплитуды и фазы излучения в активной среде (фактор Генри)	50 МГц

Полупроводниковый с внешним резонатором	Предел Шавлова-Таунса (+фактор Генри), уменьшенный за счёт внешнего резонатора; вибрации	100 кГц
Волоконный	Флуктуации мощности накачки, спонтанное излучение	1 – 10 кГц

Таблица 1.1 Характерные ширины линий разных типов лазеров.

### Предел Шавлова-Таунса

Величина фундаментального предела ширины спектральной линии лазера была предсказана А. Шавловым и Ч. Таунсом в работе [26]. В дальнейшем их вывод был скорректирован в работе [27] и выражение для ширины спектральной линии излучения лазера на полувысоте  $\Delta\nu_{шт}$  приняло вид:

$$\Delta\nu_{шт} = \frac{\pi h\nu(\Delta\nu_{cavity})^2}{P_{out}} \quad (1.1)$$

где  $h\nu$  – энергия фотона,  $\Delta\nu_{cavity}$  – ширина резонансного пика лазерного резонатора (по уровню половины высоты),  $P_{out}$  – выходная мощность излучения лазера. Причиной уширения линии лазерного излучения являются квантовые шумы (например, спонтанное излучение активной среды в лазерную моду), приводящие к сдвигу фазы поля волны. Ширина спектра большинства типов лазеров ограничена техническими шумами и значительно превосходит предел Шавлова-Таунса. Например, для He-Ne лазера, излучающего на длине волны 633 нм, с резонатором длиной 100 см и коэффициентами отражения зеркал  $R = 99\%$ , при выходной мощности 100 мкВт получим  $\Delta\nu_{шт} \approx 2$  мГц.

Для полупроводниковых лазеров формула 1.1 не является полностью корректной. Активная среда лазерных диодов характеризуется наличием сильной связи между показателем преломления и плотностью носителей заряда. В таком случае спонтанные распады приводят к флуктуациям плотности носителей, и, следовательно, локальным изменениям показателя преломления среды и увеличенным фазовым шумам. По сравнению с выражением 1.1, спектральная ширина линии излучения полупроводникового лазера увеличена в  $(1 + \alpha^2)$  раз, где  $\alpha = \Delta n' / \Delta n''$  – фактор Генри, задающий отношение отклика действительной части показателя преломления  $\Delta n'$  (отвечает за дисперсию) на изменение его мнимой части  $\Delta n''$  (отвечает за поглощение/усиление среды) [28]. Коэффициент  $\alpha$  зависит от материала лазерного диода и длины волны. С учетом довольно низкой добротности лазерного резонатора и фактора Генри предел Шавлова-Таунса лазерных диодов без дополнительной стабилизации обычно составляет величину  $> 50$  МГц.

Для уменьшения шумов и сужения спектральной линии лазера и можно стабилизировать его частоту по более стабильному внешнему эталону-осциллятору. Такой эталон должен иметь

узкую резонансную линию и стабильную центральную частоту. Для стабилизации используются либо спектральная зависимость поглощения осциллятора, либо его дисперсионные свойства. В природе и технике существует два вида возможных эталонов: атомы и резонаторы.

### 1.1.1 Стабилизация по моде резонатора

Одна из основных функций внутреннего резонатора любого лазерного источника – ограничение спектральной области, в которой происходит лазерная генерация. Для дополнительной стабилизации частоты лазера так же можно воспользоваться частотно-селективными свойствами внешнего резонатора.

В первых экспериментах по стабилизации лазерного излучения при помощи опорного высокочастотного резонатора привязка частоты осуществлялась по сигналу его пропускания [29,30]. Ширина полосы петли обратной связи в таком методе ограничена шириной резонанса опорного интерферометра. При этом увеличение ширины резонанса (уменьшение резкости) приводит к понижению частотной чувствительности метода. Чтобы решить эту проблему было предложено несколько способов формирования сигнала ошибки из излучения, отражённого от резонатора.

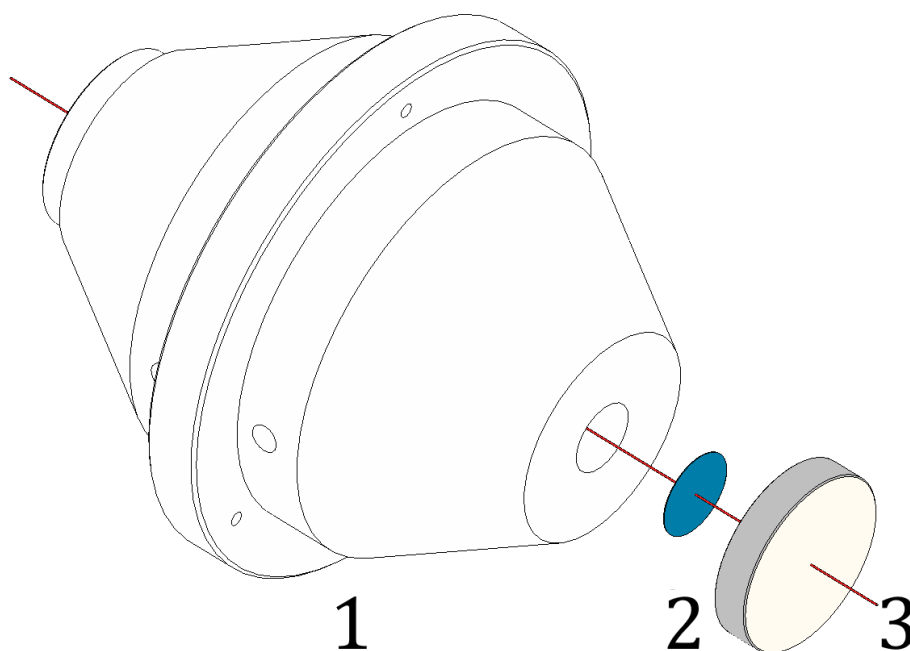
В одном из таких способов используется схема интерферометра Майкельсона, в первом плече которого находится зеркало, а во втором – резонатор Фабри-Перо [31]. Свет, прошедший через первое плечо, дополнительного фазового сдвига не приобретает. Свет из второго плеча, имеет сдвиг фазы, зависящий от отстройки частоты лазера от моды резонатора. Детектируя их совместно на фотодетекторе, можно сформировать сигнал ошибки, показывающий отстройку лазера от резонанса.

Т. В. Хэншем и Б. Ж. Куйо была разработана схема стабилизации частоты лазера по опорному резонатору при помощи поляризационной спектроскопии [32]. Данный метод требует, чтобы внутри резонатора находился поляризующий элемент, например поляризатор, двулучепреломляющий кристалл или брестеровская пластинка. Одна из поляризационных компонент падающего излучения имеет максимальные потери на поляризующем элементе и практически не ощущает влияние резонатора, отразившись от его переднего зеркала без дополнительного сдвига фазы. Сдвиг фазы ортогональной ей компоненты будет зависеть от отстройки частоты лазера от моды резонатора. Детектирование отражённого света при помощи балансного фотодетектора даёт сигнал ошибки метода Хэнша-Куйо.

Наиболее эффективный подход для стабилизации лазеров по высокочастотным резонаторам предложен Д. Холлом и Р. Драйвером в 1983 году [3]. Данный метод был адаптирован из работы Р. Паунда [33], посвященной стабилизации частоты микроволновых осцилляторов. Схема Паунда-Драйвера-Холла (ПДХ) использует методы фазово-модуляционной спектроскопии

и более устойчива к некоторым техническим шумам, чем метод Хэнша-Куйо. В работе [34] продемонстрирована техническая возможность привязки лазера к центральной частоте собственной моды опорного резонатора с точностью на уровне десятков мГц. Подробное изложение принципа работы метода ПДХ представлено в разделе 1.3 и в приложении к диссертации в пунктах Б.3-Б.4. Описанные методы позволяют как сузить линию генерации лазера, так и подавить шумы лазерного излучения при помощи внешнего элемента, способного контролировать его частоту (например, акустооптического модулятора).

Необходимость в создании лазеров с шириной спектральной линии, составляющей несколько герц и меньше, возникла с развитием оптических стандартов частоты [35]. Стабилизация частоты в так называемых «часовых» лазерных системах осуществляется при помощи метода ПДХ по опорному монолитному высокодобротному резонатору Фабри-Перо (рисунок 1.1). В состав таких резонаторов кроме пары зеркал, входит так же тело, необходимое для фиксации расстояния между зеркалами. Вдоль оптической оси тело имеет отверстие, внутри которого распространяется лазерный пучок. Обзор основных оптических свойств резонаторов Фабри-Перо изложен в пунктах Б.1-Б.2 приложения.



*Рисунок 1.1 Составные части опорного монолитного резонатора Фабри-Перо: 1 – тело, 2 – отражающее покрытие, 3 – подложка зеркала.*

При избавлении от возможных видов технических шумов (вибрации, нестабильность температуры, электронные шумы и пр.), предельная достижимая стабильность частоты лазера, привязанного к моде резонатора, будет ограничена его тепловыми шумами [21]. Повышение стабильности часовых лазеров в последние два десятилетия связано с созданием резонаторов, имеющих низкие тепловые шумы (в основном за счёт использования новых материалов), и



развитием методов устранения различных технических шумов. Рекордный для своего времени результат был достигнут в NIST в 1999 году [36]. Значение относительной нестабильности частоты  $3 \cdot 10^{-16}$  для часового лазера в стандарте на одиночном ионе  $^{199}\text{Hg}^+$ , полученное в данном эксперименте, продержалось непревзойдённым более десяти лет. Наиболее стабильная лазерная система на сегодняшний день создана на основе криогенного кремниевого резонатора [37].

График на рисунке 1.2 показывает временной ход уровня нестабильности частоты лазеров в некоторых экспериментах с 1980 года. На этом графике и в Таблице 1.2 перечислены не все известные эксперименты, а те, в которых удалось продемонстрировать наилучшую для своего времени стабильность частоты лазерного излучения.

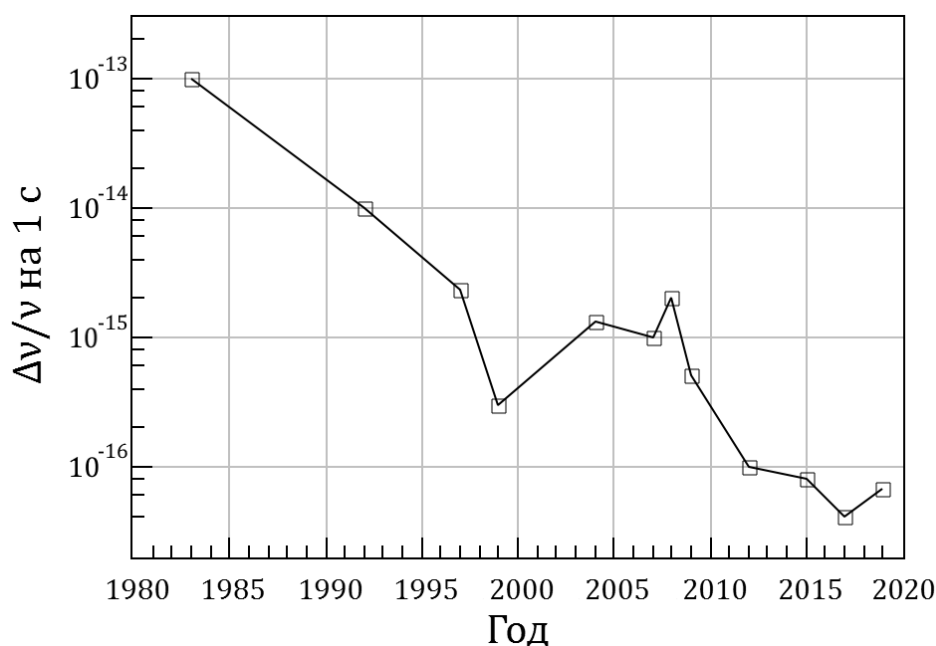


Рисунок 1.2 Минимальная относительная нестабильность частоты лазерных систем со стабилизацией по опорному резонатору (исторический прогресс).

Публикация	Год	$\lambda$ , нм	Материал резонатора	$\frac{\Delta\nu}{\nu}$ на 1 с
R. Drewer и др. [3]	1983	632	—	$10^{-13}$
J. Dirscherl и др. [38]	1992	595	Церодур	$10^{-14}$
S. Seel и др. [39]	1997	1064	Сапфир, 4К	$2.3 \cdot 10^{-15}$
B. Young и др. [36]	1999	563	ULE-стекло, Церодур	$3 \cdot 10^{-16}$
S. Webster и др. [40]	2004	1064	ULE-стекло	$1.3 \cdot 10^{-15}$
A. Ludlow и др. [41]	2007	698	ULE-стекло	$10^{-15}$
J. Alnis и др. [42]	2008	972	ULE-стекло	$2 \cdot 10^{-15}$

J. Millo и др. [43]	2009	1064	ULE-стекло, плавленный кварц	$5.6 \cdot 10^{-16}$
T. Kessler и др. [24]	2012	1542	Кристаллический кремний, 124К	$2.3 \cdot 10^{-15}$
S. Hafner и др. [24]	2015	698	ULE-стекло, плавленный кварц	$10^{-16}$
D. Matei и др. [37]	2017	1542	Кристаллический кремний, 124К	$4 \cdot 10^{-17}$
J. Robinson и др. [22]	2019	1542	Кристаллический кремний, 4К	$6.5 \cdot 10^{-17}$

Таблица 1.2 Результаты и некоторые особенности экспериментов, использованных для построения графика на Рисунке 1.2.

Любопытный, но затратный способ борьбы с тепловыми шумами предложен в работе [44], в которой показано, что усреднение частот двух идентичных ультрастабильных лазеров, произведённое при помощи АОМ<sup>2</sup> приводит к повышению стабильности в  $\sqrt{2}$  раз. Теоретически, аналогичное усреднение частот излучений для  $n$  лазеров приведёт к повышению стабильности в  $\sqrt{n}$  раз.

Перечисленные выше методы направлены на создание активной электронной петли обратной связи для подавления шумов частоты лазера. Для полупроводниковых лазеров типа Фабри-Перо без внешнего резонатора характерная ширина спектра излучения может достигать сотен мегагерц. Сужение такой линии с использованием электронной петли отрицательной обратной связи нереально, так как на практике невозможно обеспечить настолько широкую полосу работы сервоэлектроники. Указанную проблему можно решить используя оптическую обратную связь [45,46]. В данном методе излучение лазерного диода необходимо частично отразить обратно в диод при помощи зеркала, дифракционной решётки или резонатора Фабри-Перо. При верном выборе параметров оптической обратной связи [47] достигим режим одночастотной генерации с уменьшенными флуктуациями за счёт эффекта автоинжекционной привязки. Диодные лазеры с оптической обратной связью могут иметь ширину линии излучения на несколько порядков меньшую, чем фундаментальный предел Шавлова-Таунса для полупроводниковых лазерных диодов [28]. Сужения линии полупроводникового лазера можно добиться при помощи оптической обратной связи с высокодобротным микрорезонатором за счёт эффекта обратного рэлеевского рассеяния [48,49].

Узкая линия лазерной генерации может быть получена в волоконных лазерах на эффекте вынужденного рассеяния Мандельштама-Бриллюэна (ВРМБ). Показано, что лазерное излучение, которое генерируется в процессе ВРМБ, имеет существенно меньшие шумы, чем излучение

<sup>2</sup> Акустооптический модулятор

накачки [50]. Привязка частоты лазера накачки к моде высокочастотного волоконного резонатора позволяет получать сигнал ВРМБ с шириной линии 20 Гц [51].

### 1.1.2 Стабилизация по переходам в атомах и молекулах

Собственные частоты оптических резонаторов зависят от их размеров, на них оказывают влияние различные параметры окружающей среды: температура, давление, механические вибрации. Для обеспечения высокой стабильности частоты лазеров, привязанных к собственной моде такого резонатора, необходимо уметь контролировать и компенсировать флуктуации параметров внешней среды. С другой стороны, для стабилизации частоты лазеров можно использовать электромагнитные переходы в свободных атомах или молекулах, влияние внешних факторов на частоту которых не так значительно. Кроме того, частоты переходов в атомах являются точно определёнными величинами, одинаковыми для всех атомов одного химического элемента и могут быть рассчитаны. В противоположность оптическим резонаторам, имеющим широкий спектр эквидистантных резонансов (ограниченный диапазоном работы его зеркал), атомы обычно имеют довольно ограниченное число линий поглощения в заданном диапазоне спектра, поэтому не для каждого лазера оказывается возможным найти подходящий по частоте атомный переход. С другой стороны, гораздо большим набором спектральных линий обладают молекулы, которые могут служить источником эталонных частот перекрывая широкие спектральные интервалы. Приведенный в данном подразделе обзор методов стабилизации не является исчерпывающим, более подробное рассмотрение можно найти в [52].

Часто для стабилизации лазеров используются поглощающие ячейки с газом атомов или молекул. Важнейшей задачей в таком случае является подавление доплеровского уширения спектральных линий. Её можно относительно просто решить с использованием спектроскопии насыщенного поглощения. В указанном методе лазерный луч разделяется на два: насыщающий и пробный, которые вводятся в камеру с газом с противоположных сторон. Несмотря на то, что оба луча имеют одинаковые частоты, они вызывают возбуждение атомов (или молекул) двух различных скоростных групп, имеющих равные по модулю, но противоположные по направлению проекции скорости на оптическую ось. При сканировании частоты лазера

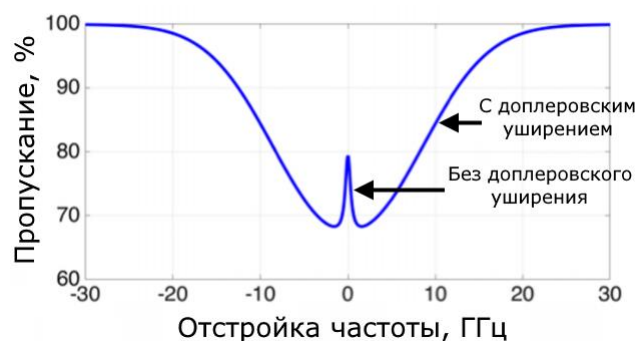


Рисунок 1.3 Спектр пропускания пробного пучка в методе спектроскопии насыщенного поглощения.

пропускание пробного пучка имеет пик при попадании в частоту перехода. В указанном случае оба лазерных пучка взаимодействуют с одной и той же скоростной группой, имеющей

околонулевую проекцию на оптическую ось. При этом насыщающий пучок насыщает переход в данной скоростной группе и пропускание пробного пучка резко возрастает (рисунок 1.3). Ширина полученного пика оказывается существенно уже по сравнению с шириной доплеровского контура пропускания и в предельном случае определяется естественной шириной линии. Формирование сигнала ошибки для привязки к вершине пика пропускания может быть осуществлено при помощи фазово-модуляционной спектроскопии. Схема данного метода во многом схожа со схемой Паунда-Драйвера-Холла. Метод фазово-модуляционной спектроскопии насыщения был использован, например, для стабилизации  $Nd:YAG$  лазера по переходам в молекулярном йоде и позволил достичь величины девиации Аллана сигнала биений двух лазерных систем  $3 \cdot 10^{-14}$  на времени усреднения 100 с [53].

Избавиться от влияния эффекта Доплера при регистрации частоты перехода можно также с использованием двухфотонной спектроскопии во встречных пучках. В данной схеме движущийся атом поглощает пару фотонов из противоположных пучков, при этом сдвиги частоты из-за эффекта Доплера взаимно уничтожаются при попадании в резонанс. Использование двухфотонного перехода в рубидии для стабилизации частоты позволило достичь величины девиации Аллана  $\sigma_y(\tau = 2000 \text{ с}) = 2 \cdot 10^{-14}$  [54].

Стабилизация частоты газовых лазеров зачастую осуществляется при помощи дополнительной поглощающей ячейки, размещённой внутри лазерного резонатора, при этом линия поглощения данной ячейки должна попадать в спектральную область лазерной генерации. Одни из лучших результатов по точности и стабильности частоты были получены для  $He - Ne$  лазера со стабилизацией по метану [53] и для  $CO_2$  –лазера, стабилизированного по  $OsO_4$  [55].

Новое развитие в последние несколько лет получило направление, посвященное созданию ультрастабильных лазерных систем со стабилизацией по тепловым коллимированным атомным пучкам. В работе [56] продемонстрирована привязка частоты лазера к переходу, регистрируемому в двух противоположно направленных пучках атомов кальция методом атомной интерферометрии Рэмси-Борде. Достигнутая относительная нестабильность частоты в данном эксперименте составила  $< 2 \cdot 10^{-16}$  для времён усреднения от 10 до 1000 с, что превосходит все прочие результаты, полученные с использованием тепловых атомных или молекулярных ансамблей как минимум на порядок. Альтернативный способ точной спектроскопии атомов кальция в тепловом пучке предложен в работе [57]. Основная идея заключается в том, чтобы производить опрос атомов при помощи лазерного луча, спектр которого представляет собой набор эквидистантных пиков, полученных в результате многокаскадной фазовой модуляции. Луч лазера распространяется перпендикулярно атомному пучку. В таком случае можно осуществить спектроскопию по схеме Рэмси многих скоростных групп (имеющих ненулевые проекции скорости на направление лазерного луча) и многократно

увеличить полезный сигнал. Как показывают расчёты, предельная достижимая относительная нестабильность частоты данного метода составляет  $2 \cdot 10^{-17} / \sqrt{\tau}$ , что сопоставимо с лучшими современными оптическими часами на коротких временах усреднения. Оба указанных метода предполагают использование двух лазеров: для формирования  $\frac{\pi}{2}$ -импульсов (657 нм) и детектирования итогового состояния кальция (431 нм). Каждый лазер предварительно стабилизируется по опорному высокочастотному резонатору.

Для стабилизации одночастотных лазеров активно применяется метод спектрального выжигания провалов [58]. В указанном методе в качестве эталона частоты используется спектрально-узкий оптический переход в редкоземельном ионе, встроенном в решётку охлажденного до криогенных температур кристалла. Энергетический переход в таком ионе испытывает неоднородное уширение вплоть до нескольких гигагерц. При помощи узкополосного лазера производится частотно-селективное насыщение узкой области спектра поглощения, что приводит к увеличению пропускания кристалла на частоте лазера. В  $Eu^{3+}:Y_2SiO_5$  при 4 К спектральные провалы на длине волны 580 нм могут иметь ширину около 122 Гц и время жизни  $10^6$  с. Чувствительности такой системы ко внешним электрическим и магнитным полям, вибрациям, колебаниям температуры и давления находятся на уровне относительной нестабильности частоты  $\approx 10^{-17}$ . Формирование сигнала ошибки, подобного получаемому в методе ПДХ, производится при помощи фазово-модуляционной спектроскопии. В эксперименте [59] произведено сличение частот лазера, стабилизированного методом спектрального выжигания провалов, с независимым ультрастабильным лазером и оптическими часами на атомах Yb, которое показало, что указанный лазер демонстрирует нестабильность частоты на уровне  $\approx 10^{-15} / \sqrt{\tau}$  и достигает  $8.5 \cdot 10^{-17}$  при  $\tau = 73$  с.

Методы стабилизации по атомным пучкам и спектральным провалам могут быть использованы для усовершенствования лазерных систем с опорными монолитными резонаторами Фабри-Перо в будущем для достижения уровня нестабильности частоты ниже  $10^{-17}$ .

Естественные резонансы (электромагнитные переходы в атомах и молекулах) являются хорошим выбором эталона в случае, когда требуется долговременная стабильность лазерного источника. Для эффективного подавления шумов частоты и сужения спектральной линии лазеров (свойства, необходимые для спектроскопии узких переходов в оптических часах) лучше всего подходит стабилизация по монолитному высокочастотному резонатору Фабри-Перо. Современные высокоотражающие зеркала обеспечивают ширину линии опорного резонатора порядка нескольких кГц. Метод Паунда-Драйвера-Холла позволяет формировать сигнал ошибки по отражённому резонатором излучению, без значимого ограничения рабочей полосы

частот и величины отношения сигнал/шум. Использование данного метода позволяет сузить линию лазера до малых долей ( $10^{-3} - 10^{-4}$ ) от ширины резонансного пика, достигая герцовых и субгерцовых величин. Существенным удобством является наличие большого числа резонансных пиков интерферометра Фабри-Перо в широком спектральном диапазоне (в котором эффективны зеркала), а также возможность изготовления зеркал, рассчитанных на любую длину волны.

## 1.2 Применения ультрастабильных лазеров: обзор

В данном разделе рассмотрены традиционные (оптические стандарты частоты, гравитационно-волновая интерферометрия) и относительно новые (тесты фундаментальных теорий, поиск тёмной материи) применения ультрастабильных лазеров.

### 1.2.1 Оптические часы

Развитие новых способов стабилизации частоты лазерного излучения и создание новых типов опорных резонаторов в большой степени связано с развитием области оптических часов.

Любые часы состоят из двух основных компонент: осциллятора, производящего периодические отсчеты и устройства для их подсчета и демонстрации соответствующего сигнала времени. В атомных часах присутствует третий компонент: высокостабильный резонансный переход в атоме или ионе, хорошо изолированный от внешних воздействий. Ультрастабильный лазер выполняет роль локального осциллятора оптических часов (рисунок 1.4), частота которого стабилизируется по атомному реперу, что обеспечивает точность и высокую долговременную стабильность сигнала времени оптических часов. В большинстве случаев сигнал ошибки для привязки лазера к атомному переходу получают, модулируя частоту лазерного излучения, опрашивающего атомы (или ион), в окрестности часового перехода, и измеряя получившиеся модуляцию вероятности его возбуждения. Фемтосекундная гребенка оптических частот [60] выполняет роль "часового механизма", транслируя стабильность сигнала на оптической частоте в радиочастотную область, в которой он может быть измерен, преобразован и использован радиоэлектронными методами. В современных оптических часах в качестве атомных реперов используются лазерно-охлаждённые ансамбли атомов в оптических решётках или одиночные ионы в радиочастотных ловушках.

Фундаментальный предел стабильности атомных часов определяется квантовым проекционным шумом [2]:

$$\sigma_{y, QPN}(\tau) = \frac{0.264}{\vartheta_c T_p} \cdot \sqrt{\frac{T_c}{N_a \tau}} \quad (1.2)$$

где  $T_p$  – время опроса атомов,  $T_c$  – время полного цикла (захват в ловушку, охлаждение, подготовка состояния, опрос),  $\nu_c$  – оптическая частота часового перехода,  $N_a$  – количество атомов. В качестве характеристики стабильности частоты чаще всего будем использовать девиацию Аллана относительных флуктуаций частоты  $\sigma_y(\tau)$  [61] (см. приложение А). В современных оптических часах на нейтральных атомах величина этого шума находится на уровне  $\sigma_{y, QPN}(\tau) \approx 3 \cdot 10^{-17} / \sqrt{\tau}$  и определяется количеством опрашиваемых атомов. Тем не менее реальное ограничение нестабильности частоты даже в лучших экспериментах обычно принимает на порядок большее значение. Причиной этого является влияние шумов частоты часового лазера за счет эффекта Дика [20]. Измерение часового перехода в оптических часах и корректировка частоты лазера происходят в течение временных промежутков, разделённых так называемым "мертвым временем", необходимым для подготовки (охлаждения и локализации) атомов. В результате того, что опрос атомов происходит периодически, в петле обратной связи, осуществляющей подстройку часового лазера, возникнет дополнительный белый шум.

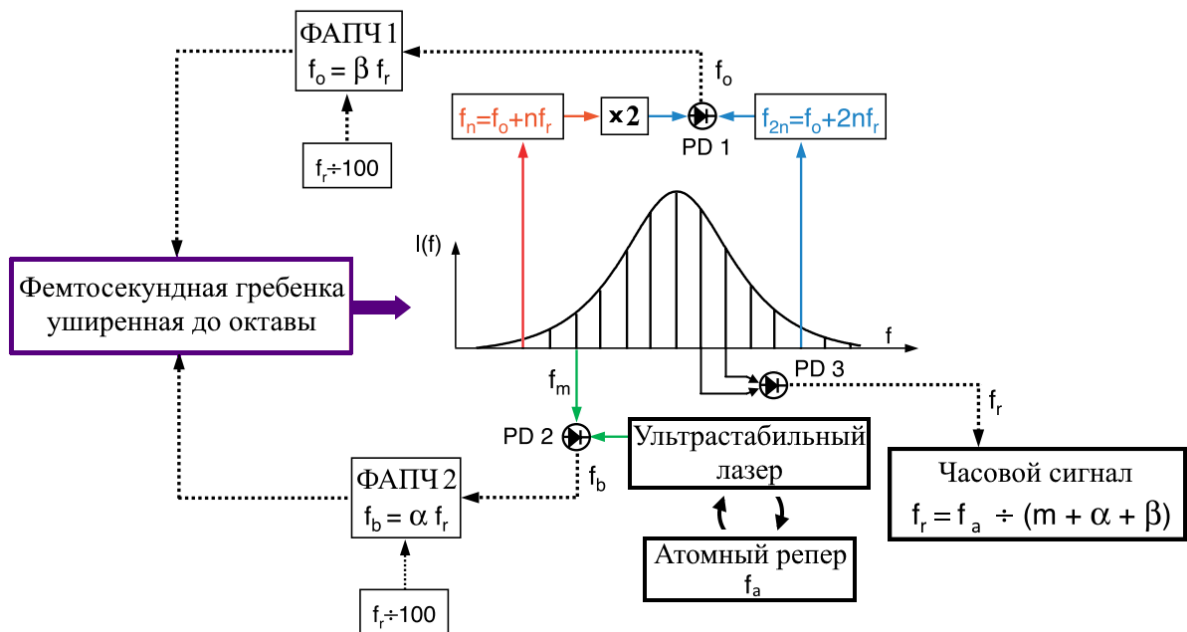


Рисунок 1.4 Схема оптических атомных часов (адаптирована из [35]). ФАПЧ – фазовая автоаподстройка частоты.  $f_r$  – частота повторений,  $f_o$  – частота отстройки,  $f_b$  – частота биений зуба гребенки с номером  $m$   $f_m = m f_r + f_o$  с часовым лазером  $f_a$ . Определение  $f_o$  реализовано при помощи  $f - 2f$  интерферометра. Две петли ФАПЧ  $f_b$  и  $f_o$  обеспечивают прямую фазовую привязку радиочастоты  $f_r$  к частоте атомного репера.

Этот шум возникает из-за того, что каждая шумовая компонента лазера на частоте, кратной частоте опроса, каждый раз наблюдается приблизительно в одной и той же фазе, приводя к флуктуирующей во времени отстройке лазера от перехода (рисунок 1.5). Указанный эффект

переноса высокочастотного шума в диапазон работы петли обратной связи называется алиасинг (близким аналогом данного явления является стробоскопический эффект).

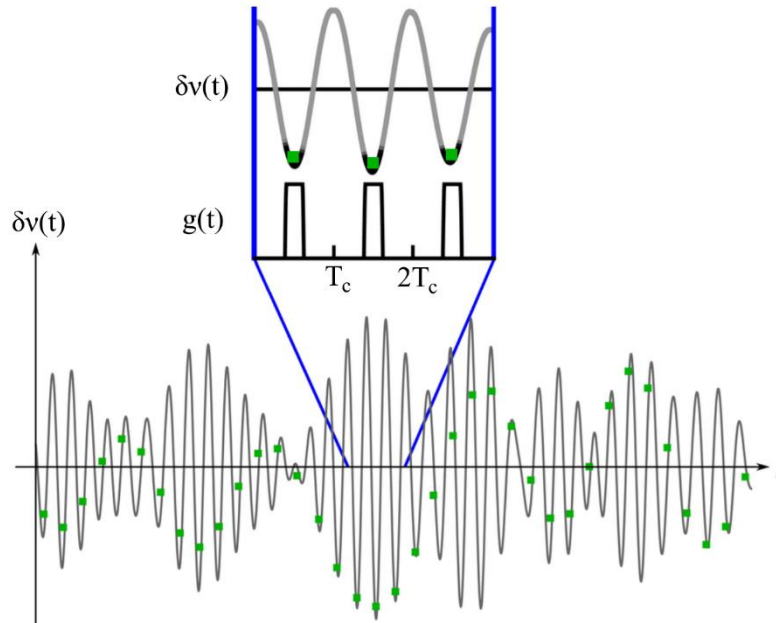


Рисунок 1.5 Иллюстрация эффекта Дика (рисунок адаптирован из [62]).  $T_c$  - длительность цикла работы часов. Шум лазера  $\delta\nu(t)$  на частоте, кратной  $\frac{1}{T_c}$ , вносит смещение лазера относительно часового перехода (зелёные квадраты).

Степень снижения стабильности из-за эффекта Дика зависит от отношения длительности опроса к мертвому времени и схемы опроса. Если  $g(t)$  – функция чувствительности [62] (описывающая взаимодействие атомов с излучением лазера) для выбранной схемы опроса, имеющая период  $T_c$ , а  $g_m^c, g_m^s, g_0$  – коэффициенты (при функциях  $\sin$  и  $\cos$ ) в её Фурье-разложении при слагаемых на частотах  $\frac{m}{T_c}$  ( $m$  – натуральное), тогда дисперсия Аллана, связанная с эффектом Дика:

$$\sigma_{y, Dick}^2(\tau) = \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{g_m^c{}^2}{g_0^2} + \frac{g_m^s{}^2}{g_0^2} \right) \cdot S_y^{laser} \left( \frac{m}{T_c} \right) \quad (1.3)$$

где  $S_y^{laser}(m/T_c)$  – спектральная плотность мощности относительных флуктуаций частоты часового лазера на частотах, кратных частоте опроса. Например для опроса по схеме Раби [4]:

$$g(t) = \begin{cases} \sin^2(\Theta) \cos(\Theta) \cdot \left[ \sin(\Omega_1(t)) \cdot (1 - \cos(\Omega_2(t))) + \sin(\Omega_2(t)) \cdot (1 - \cos(\Omega_1(t))) \right], & 0 \leq t \leq T_p \\ 0, & T_p < t \leq T_c \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $\Theta = \pi/2 - \arctan(2\Delta T_p)$ ,  $\Omega_1(t) = \pi\sqrt{1 + 2\Delta T_p} \cdot t/T_p$ ,  $\Omega_2(t) = \pi\sqrt{1 + 2\Delta T_p} \cdot (T_p - t)/T_p$ ;



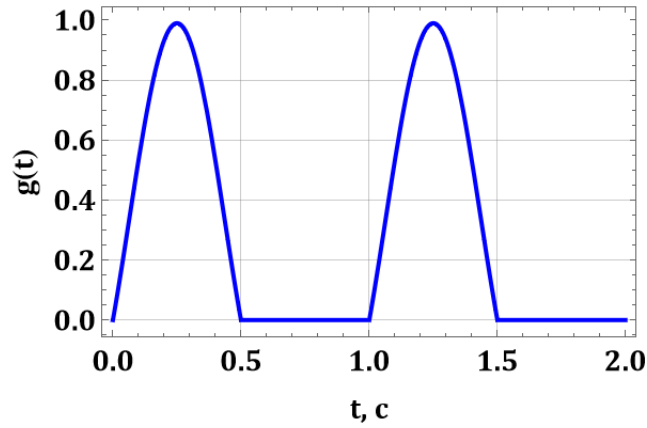


Рисунок 1.6 Функция чувствительности  $g(t)$  для схемы опроса Раби с  $T_c = 1$  с,  $T_p = 0.5$  с.

$$g_m^s = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} g(t) \cdot \sin(2\pi m \cdot t/T_c) \cdot dt,$$

$$g_m^c = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} g(t) \cdot \cos(2\pi m \cdot t/T_c) \cdot dt, \quad (1.5)$$

$$g_0 = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} g(t) \cdot dt.$$

Для лазера, стабилизированного по опорному резонатору, функция спектральной плотности мощности относительных флуктуаций частоты в большинстве случаев может быть аппроксимирована выражением [4]:

$$S_y^{laser}(f) = \frac{h_{-1}}{f} + h_0 + f^2 h_2 + \sum_{i=1}^N \frac{a_i f^2}{1 + \left(\frac{f - f_i}{\gamma_i/2}\right)^2}. \quad (1.6)$$

Предположим, что  $S_y^{laser}(f)$  ограничена исключительно тепловым шумом частоты моды опорного резонатора (см. глава 2), то есть описывается формулой  $S_y^{laser}(f) = h_{-1}/f$ . По формулам (1.3) и (2.18) можно подсчитать, что для снижения вклада эффекта Дика в нестабильность частоты оптического стандарта (работающего по схеме опроса Раби, изображенной на рисунке 1.6) ниже предела квантового проекционного шума, необходимо использовать опорный резонатор с пределом тепловых шумов  $\sigma_y$  на уровне нескольких единиц  $10^{-17}$ . Достижение данного, чрезвычайно низкого, значения на сегодняшний день оказывается возможным только с использованием криогенных кремниевых резонаторов достаточно большой длины [37]. Улучшение стабильности часовых лазеров позволит повысить стабильность оптических часов благодаря подавлению эффекта Дика, а также позволит увеличить время опроса атомов и улучшить спектральное разрешение. Наибольшее значение для оптических

часов имеет сохранение стабильности частоты часового лазера на времени между опросами атомного репера (обычно 100 мс – 1 с).

На сегодняшний день множество применений оптических стандартов частоты включает в себя не только прикладные задачи из области метрологии и навигации, но и многие прецизионные фундаментальные физические исследования. К экспериментам такого рода относятся тесты общей теории относительности и квантовой теории, проверка постоянства законов природы во времени и поиски новой физики. Точность и стабильность современных оптических часов уже позволила осуществить ряд экспериментов, наложивших ограничение на скорость возможного дрейфа постоянной тонкой структуры и отношения масс электрона и протона. Активно развиваются исследования, направленные на поиск различных возможных типов темной материи при помощи атомных часов и оптических резонаторов. Подробный обзор современного состояния области оптических часов приведён в [2].

### **1.2.2 Фундаментальные задачи**

Развитие высокостабильных лазерных систем в большой степени обеспечено технологиями и методами, пришедшими из области лазерных интерференционных детекторов гравитационных волн. Например, технологии привязки частоты лазера к резонатору, исследования нестабильностей оптоэлектронных систем обратной связи и методы расчета тепловых шумов оптических интерферометров возникли при разработке детектора LIGO [63].

Гравитационно-волновые детекторы LIGO представляют собой интерферометры Майкельсона, в схему которых встроено еще несколько интерферометров, повышающих чувствительность. Например, дополнительное входное зеркало рециркуляции мощности позволяет существенно снизить квантовый шум числа фотонов. Использование интерферометров Фабри-Перо в каждом 4-километровом плече детектора позволяет увеличить эффективную длину плеча до 1120 км. Назначение LIGO состоит в обеспечении максимальной чувствительности к изменению длин плеч относительно друг друга. Высокая стабильность частоты лазера необходима для корректной работы внутренних систем стабилизации интерферометра и для подавления влияния флуктуаций оптической частоты на гравитационно-волновой сигнал. Система стабилизации частоты лазера включает в себя ряд этапов ПДХ-привязки и модовой фильтрации при помощи нескольких резонаторов [18]. Финальным этапом является стабилизация лазера по 4-километровым интерферометрам в плечах LIGO. Лазер LIGO можно считать самым стабильным лазером в мире. Однако в отличие от часовых лазеров оптических часов, наименьший уровень шумов гравитационно-волновой детектор имеет в области 30 – 200 Гц, наиболее интересной для изучения гравитационных волн [64].

Интригующим способом применения ультрастабильных лазеров в настоящее время является поиск темной материи. Согласно некоторым теориям, тёмная материя состоит из скалярных полей, образованных сверхлегкими частицами ( $mc^2 \ll 1$  эВ). Такие поля приводят к гармоническим колебаниям фундаментальных констант, таких как постоянная тонкой структуры  $\alpha$  и масса электрона, что в свою очередь приводит к изменению радиуса Бора, определяющего длины межатомных связей и размеры материальных объектов. Таким образом, скалярные поля могут приводить к колебаниям резонансных частот опорных оптических интерферометров. В одном из экспериментов излучение стабилизированного лазера, прошедшее через опорный резонатор, было направлено в интерферометр Маха-Цандера, в одном из плеч которого находилась линия задержки из 52 км оптоволокна, а в другом – АОМ для отстройки частоты [15]. Такая схема позволяет наблюдать флуктуации длины резонатора, индуцированные присутствием тёмной материи, на частотах  $10^4 - 10^6$  Гц. Произведенные поиски в диапазоне энергий  $4 \cdot 10^{-11} - 8 \cdot 10^{-10}$  эВ не обнаружили её следов, но позволили наложить ограничения на константы взаимодействия обыкновенной и тёмной материи.

Другой предложенный эксперимент основан на использовании пары ультрастабильных резонаторов [65]. Один из резонаторов сформирован зеркалами, жестко закрепленными на теле, как в резонаторах оптических часов, а другой - зеркалами на подвесе, как в проекте LIGO, причем резонансная частота маятника подвешенных зеркал должна лежать ниже диапазона частот, в котором планируется производить поиски темной материи. Таким образом длина одного резонатора окажется подвержена изменениям  $\alpha$ , а на длине другого они не скажутся. Детектируя разницу резонансных частот резонаторов возможно детектировать темную материю с частицами, имеющими массу  $10^{-13} - 10^{-11}$  эВ и вызывающую колебания  $\alpha$  на частотах  $0.1 - 10$  кГц. Проекты, нацеленные на поиски темной материи при помощи оптических часов, основываются на том, что энергия часового перехода зависит от изменений  $\alpha$  иным образом нежели длина ультрастабильного резонатора. В эксперименте, посвященном сличению стронциевых оптических часов, криогенного кремниевого резонатора и водородного мазера был исследован диапазон масс  $10^{-16} - 10^{-21}$  эВ [14] и наложены новые ограничения на силу влияния тёмной материи на постоянную тонкой структуры и массу электрона.

### 1.3 Стабилизация частоты методом Паунда-Драйвера-Холла

Метод Паунда-Драйвера-Холла стабилизации частоты лазера по моде резонатора является ключевым для данной работы. Его основной принцип впервые был изложен Р. Паундом, в работе, посвященной стабилизации частоты микроволнового генератора по внешнему резонатору [33]. Впоследствии Р. Драйвер и Д. Холл адаптировали его для лазеров [3]. В этом методе (рисунок 1.7) излучение лазера на частоте  $\nu$  модулируется по фазе электрооптическим модулятором на частоте

$\vartheta_m$ . Для малой глубины модуляции  $\gamma \ll 1$  можно пренебречь всеми спектральными компонентами кроме  $\vartheta$  и  $\vartheta \pm \vartheta_m$ :

$$E_{FM}(\vartheta) = E_0 [J_0(\gamma)e^{2\pi i\vartheta t} + J_1(\gamma)e^{2\pi i(\vartheta+\vartheta_m)t} + J_1(\gamma)e^{2\pi i(\vartheta-\vartheta_m)t+\pi i}]. \quad (1.7)$$

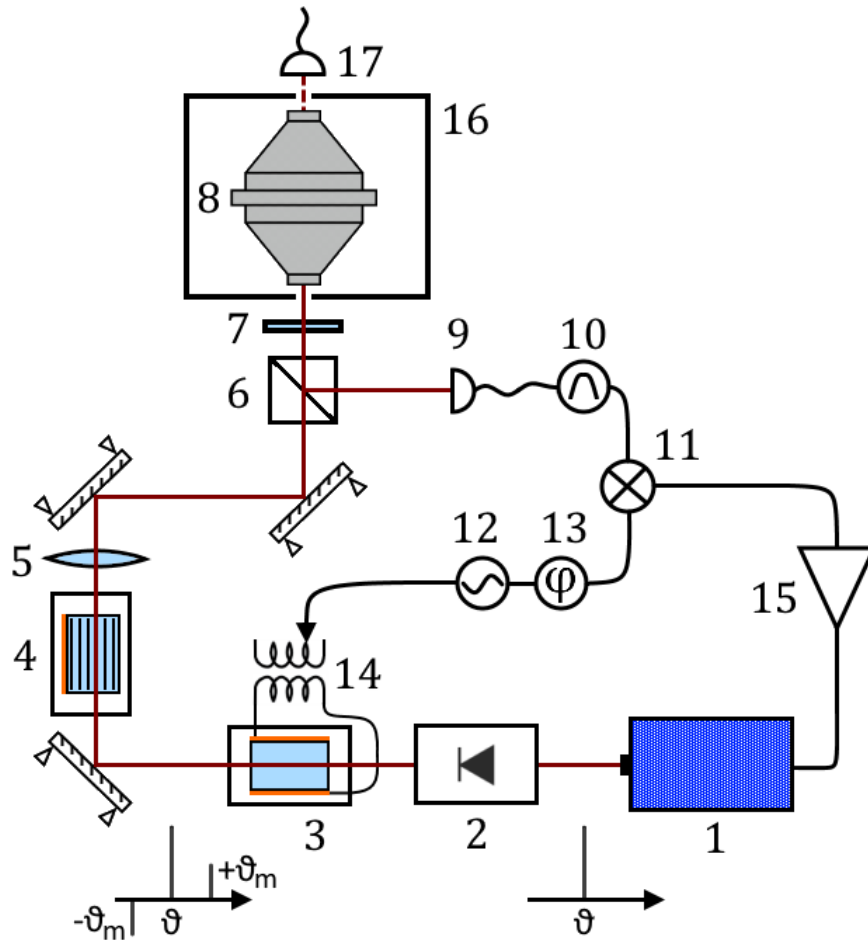


Рисунок 1.7 Схема системы стабилизации частоты лазера по опорному резонатору Фабри-Перо. 1 – лазер, 2 – фарадеевский изолятор, 3 – ЭОМ, 4 – АОМ, 5 – согласующая линза, 6 – поляризационный делитель пучка, 7 – четвертьволновая фазовая пластинка, 8 – опорный резонатор, 9 – фотодетектор ПДХ, 10 – полосовой усилитель на частоте  $\vartheta_m$ , 11 – фазовый детектор, 12 – радиочастотный генератор, 13 – фазовращатель радиочастотного сигнала, 14 – резонансный трансформатор, 15 – сервоконтроллер, 16 – вакуумная камера, 17 – фотодетектор пропускания резонатора.

где  $J_i(\gamma)$  – функции Бесселя первого рода. При отражении от интерферометра Фабри-Перо амплитуда и фаза волны преобразуются в соответствии с формулой (Б.7) для коэффициента отражения:

$$E_r(\vartheta) = E_0 \cdot [r_{FP}(\vartheta) \cdot J_0(\gamma)e^{2\pi i\vartheta t} + r_{FP}(\vartheta + \vartheta_m) \cdot J_1(\gamma)e^{2\pi i(\vartheta+\vartheta_m)t} + r_{FP}(\vartheta - \vartheta_m) \cdot J_1(\gamma)e^{2\pi i(\vartheta-\vartheta_m)t+\pi i}]. \quad (1.8)$$

Для того чтобы отделить падающий и отраженный пучки обычно используется комбинация из поляризационного светоделителя и четвертьволновой пластинки (6 и 7 на рисунке 1.7), при этом в интерферометр попадает излучение круговой поляризации. Отраженный свет направляется на фотодетектор с эффективностью  $\eta_{PD}$ , который преобразует интенсивность излучения в фототок:

$$I_{PD} = \eta_{PD} E_r E_r^*. \quad (1.9)$$

Поставив  $E_r(\vartheta)$  в данное выражение, и исключив компоненты на оптической частоте, получим:

$$\begin{aligned} I_{PD} = \eta_{PD} E_0^2 \cdot [ & J_0^2 |r_{FP}(\vartheta)|^2 + J_1^2 \{|r_{FP}(\vartheta + \vartheta_m)|^2 + |r_{FP}(\vartheta - \vartheta_m)|^2\} \\ & + J_0 J_1 r_{FP}(\vartheta) r_{FP}^*(\vartheta + \vartheta_m) e^{-2\pi i \vartheta_m t} - J_0 J_1 r_{FP}(\vartheta) r_{FP}^*(\vartheta - \vartheta_m) e^{2\pi i \vartheta_m t} \\ & + J_0 J_1 r_{FP}^*(\vartheta) r_{FP}(\vartheta + \vartheta_m) e^{2\pi i \vartheta_m t} - J_0 J_1 r_{FP}^*(\vartheta) r_{FP}(\vartheta - \vartheta_m) e^{-2\pi i \vartheta_m t} \\ & - J_1^2 \{r_{FP}(\vartheta + \vartheta_m) r_{FP}^*(\vartheta - \vartheta_m) e^{2\pi i \cdot 2\vartheta_m t} \\ & - r_{FP}^*(\vartheta + \vartheta_m) r_{FP}(\vartheta - \vartheta_m) e^{-2\pi i \cdot 2\vartheta_m t}\}] \end{aligned} \quad (1.10)$$

В фототоке присутствует постоянная компонента, компонента на частоте  $\vartheta_m$  биений несущей с сайдбэндами, а также вклад от биений сайдбэндов между собой на частоте  $2\vartheta_m$ . Сигнал фотодетектора необходимо отфильтровать так, чтобы остались только компоненты на частоте модуляции, тогда:

$$\begin{aligned} I_{PD}^{(\vartheta_m)} = \eta_{PD} E_0^2 J_0 J_1 \{ & (r_{FP}(\vartheta) r_{FP}^*(\vartheta + \vartheta_m) - r_{FP}^*(\vartheta) r_{FP}(\vartheta - \vartheta_m)) e^{-2\pi i \vartheta_m t} \\ & + (r_{FP}^*(\vartheta) r_{FP}(\vartheta + \vartheta_m) - r_{FP}(\vartheta) r_{FP}^*(\vartheta - \vartheta_m)) e^{2\pi i \vartheta_m t} \}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Примем во внимание, что мощность излучения на частоте несущей и сайдбэндов составляет соответственно:  $P_c = J_0^2(\gamma) \cdot P_0$  и  $P_s = J_1^2(\gamma) \cdot P_0$ , где  $P_0 = E_0^2$  – полная мощность излучения, заводимого в резонатор. В результате простых алгебраических преобразований из (1.11) получим:

$$\begin{aligned} I_{PD}^{(\vartheta_m)} = 2\eta_{PD} \sqrt{P_c P_s} [ & Re\{r_{FP}(\vartheta) r_{FP}^*(\vartheta + \vartheta_m) - r_{FP}^*(\vartheta) r_{FP}(\vartheta - \vartheta_m)\} \cos(2\pi \vartheta_m t) \\ & + Im\{r_{FP}(\vartheta) r_{FP}^*(\vartheta + \vartheta_m) - r_{FP}^*(\vartheta) r_{FP}(\vartheta - \vartheta_m)\} \sin(2\pi \vartheta_m t)] \\ = 2\eta_{PD} \sqrt{P_c P_s} \cdot [ & \mathbf{A}(\Delta\vartheta) \cdot \cos(2\pi \vartheta_m t) + \mathbf{D}(\Delta\vartheta) \cdot \sin(2\pi \vartheta_m t)], \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $\Delta\vartheta$  – отстройка частоты излучения от резонанса. Воспользуемся приближением  $r_{FP}(\Delta\vartheta)$  вблизи резонанса ( $\Delta\vartheta \ll \frac{c}{2L}$ ) высокочастотного ( $r \approx 1$ ) резонатора с одинаковыми коэффициентами отражения зеркал:

$$r_{FP}(\Delta\vartheta) = \frac{\Delta\vartheta \left( \Delta\vartheta + \frac{i\delta\vartheta}{2} \right)}{\left( \frac{\delta\vartheta}{2} \right)^2 + \Delta\vartheta^2}. \quad (1.13)$$

В результате подстановки получим:

$$D(\Delta\nu) = -\frac{\vartheta_m^2 \left(\frac{\delta\nu}{2}\right) \Delta\nu \left[\left(\frac{\delta\nu}{2}\right)^2 - \Delta\nu^2 + \vartheta_m^2\right]}{\left[\Delta\nu^2 + \left(\frac{\delta\nu}{2}\right)^2\right] \left[(\delta\nu + \vartheta_m)^2 + \left(\frac{\delta\nu}{2}\right)^2\right] \left[(\delta\nu - \vartheta_m)^2 + \left(\frac{\delta\nu}{2}\right)^2\right]}, \quad (1.14)$$

$$A(\Delta\nu) = \frac{\vartheta_m \left(\frac{\delta\nu}{2}\right)^2 \Delta\nu \left[\left(\frac{\delta\nu}{2}\right)^2 + \Delta\nu^2 + \vartheta_m^2\right]}{\left[\Delta\nu^2 + \left(\frac{\delta\nu}{2}\right)^2\right] \left[(\delta\nu + \vartheta_m)^2 + \left(\frac{\delta\nu}{2}\right)^2\right] \left[(\delta\nu - \vartheta_m)^2 + \left(\frac{\delta\nu}{2}\right)^2\right]}. \quad (1.15)$$

Сигнал с фотодетектора содержит две квадратурные компоненты с коэффициентами  $D(\Delta\nu)$  и  $A(\Delta\nu)$ . При помощи фазового детектора осуществляется фазово-чувствительная регистрация фототока. Можно выделить одну из его квадратур соответствующим подбором фазы сигнала опорного генератора. На рисунке 1.8 показаны спектральные зависимости сигналов, вычисленных по выражениям (1.14) и (1.15). Сигнал  $D(\Delta\nu)$  имеет крутую линейную зависимость от отстройки частот лазера и резонатора, поэтому его принято использовать в качестве сигнала ошибки петли обратной связи. Для получения  $D(\Delta\nu)$  на выходе фазового детектора необходимо сдвинуть фазу опорного сигнала на  $\pi/2$  относительно сигнала, подаваемого на ЭОМ. В дальнейшем сигнал ошибки направляется на сервоконтроллер, осуществляющий постоянную подстройку частоты излучения к моде резонатора (см. приложение Б.3).

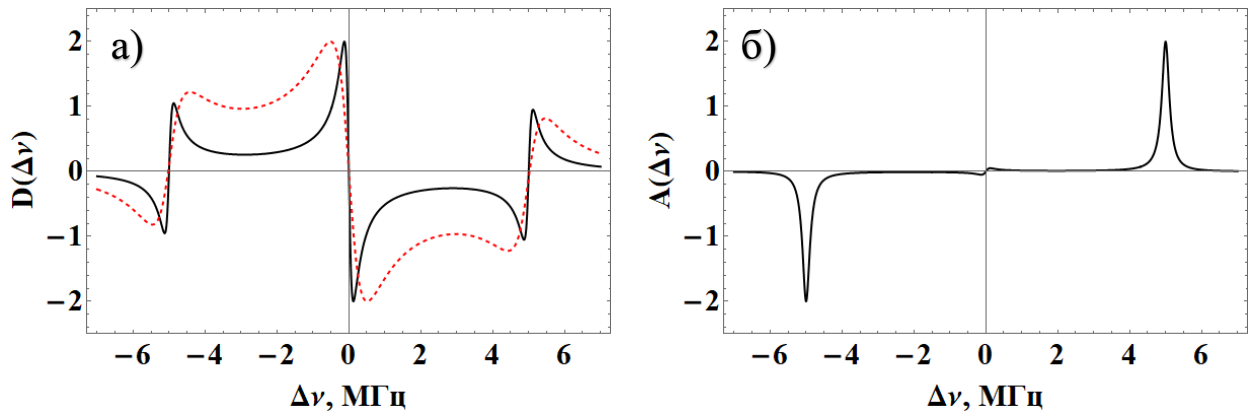


Рисунок 1.8 Квадратурные компоненты сигнала, возникающего при фазовом детектировании тока фотодиода ПДХ. (а) – сигнал  $D(\Delta\nu)$ , (б) –  $A(\Delta\nu)$ . Сплошная кривая соответствует ширине линии резонатора 500 кГц, пунктирная – 1 МГц. Частота модуляции 5 МГц.

Эффективность подавления флуктуаций частоты во многом определяется углом наклона сигнала ошибки. Чем круче его склон [В/Гц] тем слабее влияние шумовых процессов, происходящих в петле обратной связи (остаточная амплитудная модуляция, паразитные интерферометры, собственные шумы электронных компонентов и др.), на стабильность частоты лазера (рисунок 1.9).

Следует отметить, что в реальных условиях (зеркала имеют различные коэффициенты пропускания и потерь) только доля направленного в резонатор излучения принимает участие в формировании сигнала ошибки. Часть мощности несущей, которая при отражении "видит" моду резонатора, определяется параметром эффективности каплинга  $\zeta$ . Результаты расчёта данного параметра для разных комбинаций зеркал резонаторов приведены в [66]. В случае неодинаковых потерь зеркал более выгодным является установка зеркала с наибольшими потерями в качестве входного в резонатор. Вблизи частоты моды ( $\Delta\vartheta < \delta\vartheta/2, \Delta\vartheta \ll \vartheta_m$ ) сигнал ошибки близок к линейной функции (из 1.12 и 1.14):

$$D_v(\Delta\vartheta) = 8\eta_{PD}\sqrt{\zeta P_c P_s} \cdot \frac{\Delta\vartheta}{\delta\vartheta}. \quad (1.16)$$

Таким образом, важнейшими параметрами резонатора, определяющими величину наклона сигнала ошибки, являются ширина спектральной линии  $\delta\vartheta$  и эффективность каплинга  $\zeta$ .

Метод ПДХ даёт возможность не только удерживать центр линии излучения лазера в моде резонатора, но также позволяет сужать линию за счёт подавления быстрых фазовых шумов. При создании достаточно хорошей оптоэлектронной петли обратной связи, с помощью указанного метода возможно получить спектральную ширину лазерного излучения, составляющую малую долю от ширины пика опорного резонатора ( $10^{-3} - 10^{-4}$ ) на временах измерения порядка 1 с.

Замечательным качеством метода ПДХ, которое позволяет стабилизировать и сужать линию лазера, является способность работать в двух режимах одновременно: в режиме привязки фазы и режиме дискриминатора частоты. Рассмотрим флуктуации фазы лазерного излучения, происходящие на временах, много меньших времени жизни фотона в резонаторе. В таком случае фаза излучения в моде резонатора не успевает следовать за фазой излучения лазера и резонатор можно рассматривать как "хранитель" усреднённого по времени значения фазы. Излучение, попадающее на фотодетектор ПДХ состоит из двух компонент: свет лазера, отраженный от переднего зеркала резонатора вместе со связанными с ним по фазе модуляционными сайдбэндами, а также свет, "вытекающий" из резонатора. При отражении фазы сайдбэндов, обычно сильно удалённых от резонанса, не изменяются. Так как сайдбэнды при фазовой модуляции имеют противоположные фазы, то их биения с несущей в сумме дают нулевой сигнал. Биения сайдбэндов с вытекающей из резонатора световой волной содержат информацию о

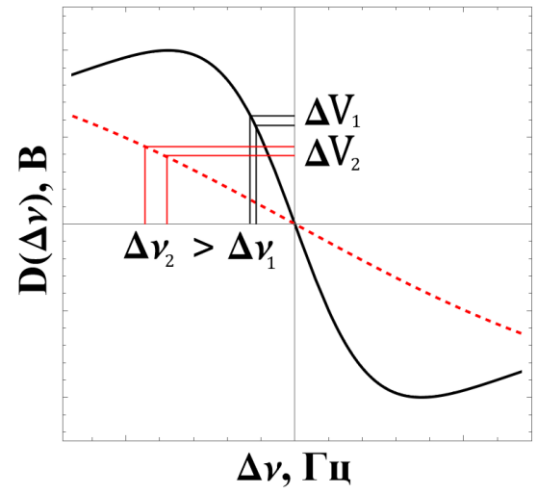


Рисунок 1.9 Влияние нестабильности управляющего напряжения на частоту лазера в случае сигнала ошибки меньшего и большего наклона.

разности мгновенной фазы лазера и усреднённой фазы моды резонатора. С помощью полученного сигнала осуществляется фазовая привязка лазерного излучения к излучению внутри резонатора.

В случае, когда флуктуации фазы лазера происходят достаточно медленно и поле в резонаторе успевают за ними следовать, реализуется режим частотного дискриминатора: любой сдвиг частоты лазера относительно резонансного пика преобразуется в сдвиг фазы (из-за сильной резонансной зависимости фазы отраженного сигнала вблизи резонанса) сигнала на частоте  $\vartheta_m$ . Множество экспериментальных реализаций данного метода доказали, что пререход между этими режимами – плавный и что метод ПДХ хорошо работает на временах, много меньших чем время отклика резонатора. Благодаря указанному свойству можно существенно увеличивать остроту резонансных пиков опорных резонаторов, не ограничивая ширину полосы обратной связи. В свою очередь использование более высокочастотных резонаторов позволяет увеличить наклон сигнала ошибки и подавить влияние электронных шумов на стабильность частоты.

Сервоконтроль частоты оптического излучения можно осуществить при помощи АОМа. Акустооптические модуляторы способны обеспечить ширину полосы обратной связи  $\approx 1$  МГц. В большинстве типов лазеров существует механизм для непосредственного контроля частоты линии генерации. В газовых лазерах и лазерах на красителях, например, можно изменять длину лазерного резонатора при помощи зеркала с пьезоэлементом. Для быстрого контроля частоты можно использовать внутррезонаторный ЭОМ. В диодных лазерах сервосигнал обычно контролирует инжекционный ток. Величина тока влияет как на температуру диода, так и на показатель преломления через изменение плотности носителей. На высоких частотах последний указанный механизм является основным. Для частот выше  $\approx 1$  ГГц зависимость частоты от тока инжекции приобретает резонансный вид, связанный с релаксационными осцилляциями. Практические аспекты реализации метода ПДХ рассмотрены в приложении Б.3-Б.4.

#### 1.4 Шумы лазерных систем с опорными резонаторами

Причины, приводящие к нестабильности частоты излучения лазерных систем с опорными резонаторами, можно разделить на две группы: 1) факторы, приводящие к нестабильности частоты собственной моды опорного резонатора Фабри-Перо; 2) факторы, нарушающие стабильность привязки частоты лазера к моде резонатора. Первая группа описывается соотношением, связывающим изменение частоты моды интерферометра Фабри-Перо при изменении его длины:

$$\frac{\delta\vartheta}{\vartheta} = -\frac{\delta L}{L} \quad (1.17)$$



и включает в себя все возможные факторы, которые могут повлиять на расстояние между зеркалами: колебания температуры и давления, вибрации, флуктуации интенсивности лазера, структурные нестабильности тела резонатора и тепловой шум. Вторая группа факторов включает в себя различные шумы оптоэлектронной системы стабилизации частоты лазера, связанные с детектированием оптических сигналов, формированием сигнала ошибки, остаточной амплитудной модуляцией, паразитными интерферометрами.

### 1.4.1 Шум фотодетектора

Фундаментальное ограничение на стабильность привязки частоты лазера к собственной моде опорного резонатора Фабри-Перо методом ПДХ определяется дробовым шумом фотодетектора. Он относится к белым шумам, и его спектральная плотность [34]:

$$S_{\vartheta} = \frac{2h\nu(\delta\nu)^2}{P_0\eta\kappa} \text{ [Гц}^2\text{/Гц]} \quad (1.18)$$

где  $\delta\nu$  – ширина линии резонатора,  $\nu$  – частота излучения,  $h$  – постоянная Планка,  $\eta$  – квантовая эффективность фотодетектора,  $P_0$  – мощность излучения, падающего на фотодетектор,  $\kappa$  – фактор  $\leq 1$ , отвечающий за потери сигнала в процессе модуляции, гетеродинирования, демодуляции. В ультрастабильных лазерных системах типичные значения составляют  $\delta\nu = 10$  кГц,  $\nu = 194$  ТГц,  $\eta = 0.6$ ,  $P_0 = 100$  мкВт,  $\kappa \approx 1$ , что даёт очень низкий уровень дробового шума  $S_{\vartheta} = 4 \cdot 10^{-7}$  Гц<sup>2</sup>/Гц. В пересчете на ширину линии лазера, ограниченную шумом фотодетектора, получим:  $\Delta\nu_{locked} = \pi \cdot S_{\vartheta} = 1.3$  мкГц. На существующем уровне развития ультрастабильных лазерных систем дробовой шум фотодетекторов не является ограничивающим фактором.

### 1.4.2 Остаточная амплитудная модуляция

Фазово-модуляционная спектроскопия зарекомендовала себя как наиболее точный способ определения центров резонансов оптических интерферометров и спектральных линий ансамблей атомов или молекул [3,67]. Радиочастотная модуляция фазы оптического излучения является необходимой для привязки частоты лазера к опорному интерферометру Фабри-Перо методом Паунда-Драйвера-Холла. На практике, как правило, при создании фазовой модуляции неизбежно возникает так называемая остаточная амплитудная модуляция (RAM<sup>3</sup>) [68,69] на той же самой частоте. В методе ПДХ RAM демодулируется совместно с полезным сигналом, содержащим информацию о положении резонанса интерферометра, и приводит к смещению сигнала ошибки по амплитуде. Таким образом, стабильность нулевого уровня сигнала ошибки, а значит и

---

<sup>3</sup> Residual Amplitude Modulation

значение отстройки лазера от моды резонатора в точке привязки (Рисунок 1.10), зависит от флуктуаций глубины и фазы RAM.

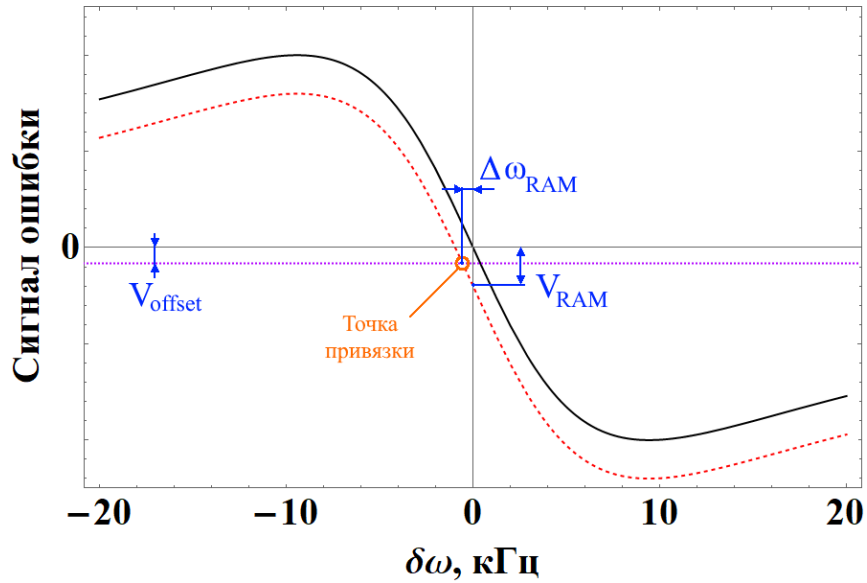


Рисунок 1.10 Сигнал ошибки ПДХ: невозмущённый (сплошная кривая) и в присутствии RAM (штриховая кривая). График соответствует резонатору с шириной резонансного пика на полувысоте  $\Delta\omega = 2\pi \cdot 3\text{кГц}$ .

Основным прибором для радиочастотной модуляции фазы лазерного излучения является электрооптический модулятор. Возникновение флуктуаций RAM может быть связано со следующими причинами [70]:

- 1) Несовпадение оптической оси кристалла ЭОМа и направления поляризации излучения;
- 2) Флуктуирующее пропускание паразитных интерферометров, возникающих между любой парой параллельных поверхностей в оптической части петли ПДХ;
- 3) Возникновение паразитных трёхзеркальных интерферометров, включающих в себя зеркала резонатора и плоские внешние грани подложек зеркал;
- 4) Температурные, пьезоэлектрические и фоторефрактивные эффекты в кристалле ЭОМа.

Первый механизм приводит к тому, что необыкновенная поляризационная компонента лазерного излучения оказывается модулированной, а обыкновенная — нет. В результате этого направление поляризации излучения на выходе ЭОМа колеблется с частотой модуляции, что неизбежно приведёт к возникновению амплитудной модуляции при проходе через следующий поляризационно-чувствительный элемент. Данный эффект смещает сигнал ошибки на величину [70]:

$$V_{\text{RAM}} = \frac{1}{2} E_0^2 G \sin(2\alpha) \sin(2\beta) J_1(M) \sin(\Delta\varphi + \varphi_{DC}) \quad (1.19)$$

где  $E_0$  – электрическое поле лазерного излучения;  $G$  – общее усиление процессов фотодетектирования и демодуляции;  $\alpha$  и  $\beta$  – углы между осью ЭОМа и поляризаторами на его входе и выходе соответственно;  $J_1$  – функция Бесселя первого порядка;  $M$  – разность коэффициентов фазовой модуляции для обыкновенной и необыкновенной поляризаций;  $\Delta\varphi$  – естественный сдвиг фазы между обыкновенной и необыкновенной поляризационными компонентами;  $\varphi_{DC}$  – сдвиг фазы под влиянием постоянного (DC) электрического поля.

Нестабильность сигнала ошибки может быть вызвана влиянием температурно-зависимых низкодобротных паразитных интерферометров (причины 2 и 3), чьи частотные функции пропускания и отражения медленно меняются со временем под действием окружающей температуры и давления [70]. Эффекты, вызванные интерферометрами, которые возникают между оптическими элементами перед резонатором, могут быть зарегистрированы и компенсированы. Влияние на RAM интерферометров, возникающих между оптическими элементами и ближайшим зеркалом резонатора, или трёхзеркальных интерферометров в резонаторе может быть зарегистрировано только совместно с сигналом ПДХ и неизбежно вносит вклад в его нестабильность. Часть интерферометров в оптической схеме можно устранить установкой оптических элементов под небольшим углом к оси пучка, просветлением их поверхностей и использованием оптических изоляторов [71]. В свою очередь, трёхзеркальные интерферометры, включающие зеркала резонатора, обычно очень стабильны, поскольку эти зеркала, как правило, имеют низкий коэффициент теплового расширения, стабилизированы по температуре, а также механически стабильны.

Изменение свойств нелинейной среды под действием колебаний температуры кристалла или радиочастотного/лазерного полей (механизм 4) вызывает дрейф глубины RAM, создаваемой ЭОМом. Как показано в [70], при пассивной стабилизации температуры ЭОМа наилучшим выбором нелинейного кристалла является KDP ( $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ). В случае активной петли стабилизации нестабильность RAM определяется влиянием паразитных интерферометров и будет одинаковой для большинства кристаллов.

Амплитудную модуляцию лазерного излучения, в отличие от фазовой, возможно детектировать при помощи фотодиода. Эффективным способом подавления флуктуаций RAM является создание комбинированной петли обратной связи с контролем DC напряжения на ЭОМе и его температуры [71,72]. RAM следует регистрировать в точке оптической схемы, максимально близкой к резонатору. Основная часть мощности шумов RAM сосредоточена в области до 100 Гц [71], поэтому для стабилизации достаточно узкополосной петли обратной связи. Данный метод позволяет стабилизировать глубину RAM с точностью до  $10^{-6}$ .

Альтернативным способом компенсации RAM ЭОМа является сложение сигналов, получаемых с фотодиодов, которые регистрируют излучение, отражённое от поляризационного

делителя перед резонатором, и излучение, отражённое от резонатора [73]. Это простой способ, но он сильно зависит от совпадения характеристик фотодиодов, кроме того, при его применении может не учитываться влияние некоторых паразитных интерферометров. К существенному снижению уровня РАМ приводят: использование ЭОМа с кристаллом, грани которого расположены под углом к направлению распространения излучения [74], что позволяет разделять обыкновенную и необыкновенную компоненты излучения в пространстве; аккуратный подбор температуры кристалла и места прохождения через него лазерного пучка [72]; использование в некоторых схемах Фарадеевских вращателей вместо оптических изоляторов, которые сами могут формировать паразитные интерферометры [75].

### 1.4.3 Флуктуации давления

Оптическая длина опорного резонатора Фабри-Перо может изменяться под действием термодинамических флуктуаций концентрации молекул воздуха ( $\rho$ ) в объёме лазерной моды. Оценим влияние этого эффекта исходя из простейшей модели показателя преломления ( $n$ ):

$$n = 1 + \alpha\rho, \quad (1.20)$$

где  $\alpha$  – поляризуемость одной молекулы. Нестабильность длины  $L$  интерферометра в присутствии преломляющей среды:

$$\frac{\delta L_{\text{опт}}}{L_{\text{опт}}} = \frac{L \cdot \delta n}{L \cdot n} \approx \delta n = \alpha \cdot \delta\rho = \alpha \cdot \frac{\delta N}{L \cdot \pi w_0^2}, \quad (1.21)$$

где  $N$  – количество молекул в объёме моды резонатора,  $w$  – средний размер перетяжки пучка (приложение Б.1). Стандартная девиация числа молекул в соответствии с распределением Пуассона и равна  $\sqrt{N}$ . Таким образом,

$$\delta n = \frac{\alpha}{\sqrt{L \cdot \pi w_0^2}} \cdot \sqrt{\frac{P}{kT}}. \quad (1.22)$$

$P$  – давление [Па]. С учетом того, что  $\alpha$  для молекулы азота составляет  $1.7 \text{ \AA}^{-3}$ ,  $L = 10$  см,  $w_0 = 330$  мкм,  $T = 300$  К, получим  $\frac{\delta L_{\text{опт}}}{L_{\text{опт}}} = \delta n = 1.44 \cdot 10^{-15} \cdot \sqrt{P}$ . При атмосферном давлении относительная нестабильность длины резонатора за счёт термодинамических флуктуаций составит  $\approx 5 \cdot 10^{-13}$ . В экспериментах, для которых не требуется более высокий уровень нестабильности частоты моды, резонатор достаточно поместить в герметичную камеру, чтобы исключить влияние колебаний внешнего давления. Для достижения уровня  $10^{-17}$  требуется давление остаточного газа не более  $5 \cdot 10^{-7}$  мбар, чего несложно достичь с использованием турбомолекулярного и ион-геттерного насосов.

Большой интерес представляет спектральная плотность данного шума, чем его среднеквадратичная амплитуда. Шум числа молекул является белым шумом вплоть до частоты

среза, которая определяется максимальной длительностью промежутка времени  $\tau_c$ , на котором  $N$  можно считать постоянным. Характерное время, которое молекула проводит внутри лазерной моды  $\tau_c = \frac{2w_0}{\bar{v}}$ , где  $\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m_{mol}}}$ . Тогда  $\tau_c = 260$  нс.

Вакуумирование опорных резонаторов также позволяет изолировать их от акустических шумов и колебаний температуры, которые могут эффективно передаваться от окружающей среды к резонатору через окружающий его газ.

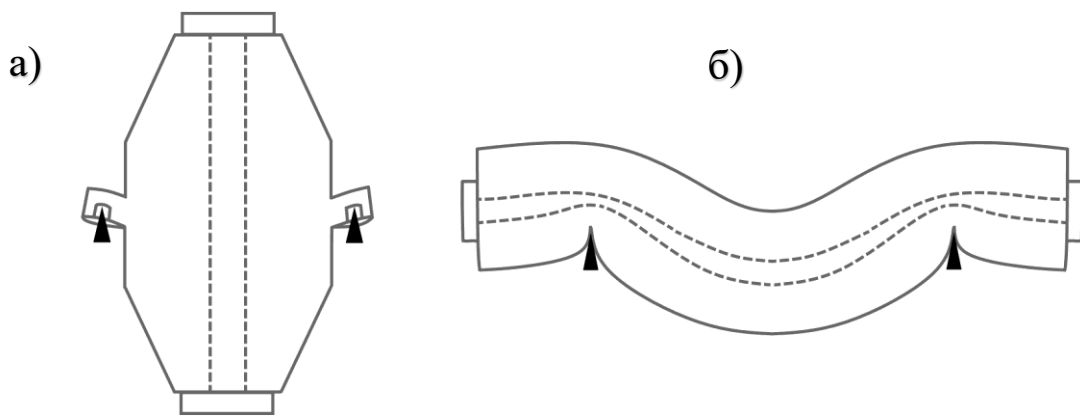
#### 1.4.4 Вибрации

Механические вибрации напрямую влияют на длину опорного резонатора, смещая и наклоняя зеркала друг относительно друга. Причинами таких вибраций могут являться атмосферные явления, шум города, приборы и люди, работающие в лаборатории. Из формулы (1.17) нетрудно понять, что даже колебания относительного положения зеркал на уровне фемтометра приведут к относительной нестабильности частоты моды менее  $10^{-15}$ . Полностью устранить все внешние шумы невозможно, но можно существенно ослабить механизмы их воздействия на опорный резонатор. Определяющим для вибрационной чувствительности длины резонатора является устройство системы его крепления в вакуумной камере. Аккуратный анализ деформаций резонатора под действием внешних сил позволяет оптимизировать положения точек опоры для достижения минимальной вибрационной чувствительности  $\vec{s}$ , которая определяется как:

$$\frac{\Delta L}{L} = (\vec{s}, \vec{a}), \quad (1.23)$$

где  $\vec{a}$  – ускорение. Чаще всего для такого анализа используют модель статических деформаций в программных системах конечно-элементного анализа. Вообще, для полного описания вибрационной восприимчивости необходим динамический анализ движения резонатора под действием периодических возмущающих сил на разных частотах, однако в нашем случае можно обойтись решением статической задачи по трем причинам [76]. Во-первых, основной интерес представляют низкие частоты, которые плохо усредняются в диапазоне  $\tau = 0,1 - 100$  с, наиболее важном для применений ультрастабильных лазеров. Во-вторых, частоты собственных механических резонансов опорного интерферометра Фабри-Перо обычно составляют несколько килогерц, из чего следует что в низкочастотной области разные части резонатора колеблются в фазе, поэтому достаточно рассмотреть деформацию под действием постоянной «мгновенной» силы. В-третьих, на частотах  $> 10$  Гц коммерческие системы активной виброизоляции способны обеспечить достаточно высокое качество подавления вибраций ( $\sim -40$  дБ).

Все известные способы подвеса опорного резонатора можно разделить на два типа: с вертикальной и горизонтальной ориентацией оптической оси (рисунок 1.11). Наименьшую вибрационную восприимчивость при вертикальном расположении резонатора обеспечивает его установка на трёх опорах, так, что точки соприкосновения тела резонатора с опорами находятся вблизи плоскости центра масс, нормальной к оптической оси [77]. Точная оптимизация положений точек подвеса свидетельствует о том, что их небольшое смещение ниже плоскости центра масс позволяет достичь наилучшего результата [78]. Телам вертикальных резонаторов обычно придают цилиндрическую [77] или биконическую [42] форму. Для биконических резонаторов характерна приблизительно в два раза меньшая чувствительность к горизонтальным возмущениям, чем для цилиндрических той же длины [76].



*Рисунок 1.11 Деформация вертикального (а) и горизонтального (б) резонаторов под действием вертикальной силы (значительно преувеличена для наглядности).*

Существует множество различных конструкций для крепления горизонтальных резонаторов, среди них: V-образный блок, U-образные кронштейны, системы с четырьмя точками опоры [24,79] и системы подвеса на стальных нитях [80]. Наиболее распространённым является подвес за четыре точки. При оптимизации положений точек опоры горизонтального резонатора следует учитывать не только относительные смещения, но и наклоны зеркал, вызванные изгибом тела резонатора. На вид деформации опорного резонатора влияет координата опорных точек вдоль его оптической оси и их расстояние от плоскости центра масс [43]. При помощи моделирования оказывается возможным найти так называемые точки Эйри [81] – точки опоры, в которых торцевые грани резонатора под действием вертикальных сил будут оставаться параллельными, а зеркала не будут смещаться друг относительно друга. Горизонтальные резонаторы чаще всего имеют форму цилиндра [24,79] или параллелепипеда [82]. В лучшей ультрастабильной лазерной системе своего времени [36], рекорд нестабильности которой оставался непобитым на протяжении десяти лет, была использована впечатляющая система защиты от вибраций: оптические столы целиком были подвешены на гигантских медицинских

резиновых тросах, длина которых контролировалась при помощи их нагрева. Каждый стол был обеспечен демпфером, компенсирующим качания.

Для транспортируемых систем [80,83] и бортовых применений [84,85] разработаны способы крепления резонатора, обеспечивающие его фиксацию по трём направлениям и сохранение работоспособности при любом направлении оптической оси. Для лабораторных задач и полевых экспериментов разработан метод активной компенсации шумов ультрастабильных лазерных систем, вызванных вибрациями [86] в реальном времени. Метод основан на измерении вибрационной функции отклика резонатора в процессе сличения частот исследуемой лазерной системы с эталонной, постоянном мониторинге линейных и угловых ускорений резонатора во всех направлениях и соответствующей корректировке частоты лазерной системы при помощи АОМа.

### 1.4.5 Флуктуации температуры

Тепловые деформации оказывают большое влияние на стабильность оптических интерферометров. Как известно, относительное изменение частоты моды монолитного резонатора Фабри-Перо связано с изменением его температуры законом теплового расширения:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta L}{L} = -\alpha\Delta T \quad (1.24)$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения (КТР) материала, из которого изготовлено тело [1/К]. Так, при изготовлении резонатора типа Фабри-Перо из кварца с  $\alpha = 5.5 \cdot 10^{-7}$  1/К девиация резонансной частоты составляет сотни МГц на градус. При достижимой стабилизации температуры в  $10^{-4}$  К [42] нестабильность частоты оказывается на много порядков больше требований современных устройств. Поэтому для создания тел и подложек зеркал опорных резонаторов распространение получили материалы с нулевым тепловым расширением: при достижении некоторой температуры  $T_0$  в таких материалах тепловое расширение сменяется тепловым сжатием.

Материалы с нулевым и отрицательным КТР в природе встречаются редко. Такое поведение было обнаружено в некоторых твёрдых телах: сложных оксидах металлов, цеолитах, полимерах [87]. В производстве опорных резонаторов используются смеси стекла и керамики Zerodur ( $T_0 \in 0 - 50$  °С) и ситалл ( $T_0 \in -60 - 60$  °С), температурно-компенсированное стекло ULE (смесь  $SiO_2$  и  $TiO_2$ ,  $T_0 \in 5 - 35$  °С), монокристаллический кремний ( $T_0 \approx 124$  К, 17 К). Отметим, что при приближении к абсолютному нулю температур коэффициент теплового расширения любого материала стремится к нулевому значению в соответствии с моделью Дебая теплоёмкости твёрдых тел [88]. С этим фактом связана возможность использования кремниевых резонаторов при температуре 4 К [22].

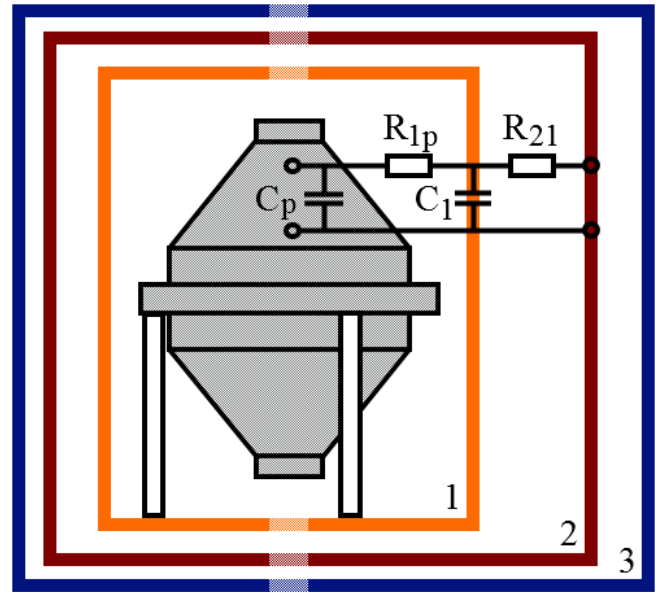
ULE-стекло является наиболее удобным материалом для создания опорных резонаторов, что в первую очередь связано с тем, что температура, при которой становится равным нулю его коэффициент теплового расширения лежит вблизи комнатной. Кроме того, оно прозрачно, имеет высокий модуль Юнга и не представляет большой сложности для механической обработки. Зависимость КТР ULE-стекла от температуры вблизи  $T_0$  описывается соотношением [89]:

$$\alpha_{ULE}(T) = a(T - T_0) + b(T - T_0)^2, \quad (1.25)$$

где линейный температурный коэффициент  $a \approx 1.6 \cdot 10^{-9} \text{ 1/K}^2$ , а квадратичный коэффициент  $b \approx -10^{-11} \text{ 1/K}^3$  (реальные значения коэффициентов и величина  $T_0$  зависят от марки стекла и определяются условиями при его производстве). Нетрудно заключить, что отклонение температуры резонатора на 1 мК от  $T_0$  приведёт к относительному изменению длины, равному  $10^{-15}$ , что является приемлемым.

Стабильность температуры опорных резонаторов поддерживает активная петля обратной связи, обычно включающая в себя:

сенсор температуры (термометр сопротивления или датчик с токовым выходом), устройство нагрева/охлаждения (резистивный нагреватель или элемент Пельтье), пропорционально-интегральный контроллер температуры. Хорошо



спроектированный термоконтроллер способен обеспечить стабильность температуры на уровне  $\pm 100 \text{ мК}$  на протяжении нескольких дней [90]. Тепловую изоляцию резонатора от температурных колебаний окружающей среды обеспечивает вакуумная камера с внутренним давлением  $\sim 10^{-7} - 10^{-9} \text{ мбар}$ , в которой он размещен. При таком давлении основными механизмами теплообмена являются тепловое излучение и теплопроводность по опорам, на которых установлен резонатор. Для уменьшения подвода тепла извне опоры изготавливают из материалов с низкой теплопроводностью (фторопласт, полиэфирэфиркетон). Как изображено на рисунке 1.12 между резонатором и экраном с нагревателем/охладителем устанавливают дополнительный тепловой экран, который выступает в роли фильтра высокочастотных колебаний температуры и обеспечивает однородное распределение температур.

Рисунок 1.12 Схематичное изображение вакуумной камеры опорного резонатора. 1 – тепловой экран резонатора, 2 – тепловой экран с нагревателем/охладителем, 3 – стенка вакуумной камеры (электрическая цепь приведена для аналогии).



Важнейшим и наиболее фундаментальным видом шума ультрастабильных лазерных систем является тепловой шум опорного резонатора. Ему посвящена следующая глава.

## Глава 2. Снижение тепловых шумов длины опорных резонаторов Фабри-Перо для ультрастабильных лазерных систем

Данная глава посвящена явлению теплового шума, которое определяет предельную стабильность длины опорного интерферометра Фабри-Перо. Изложен формализм, позволяющий оценить влияние разных видов тепловых шумов на длину интерферометра. Для различных длин резонаторов, изготовленных из материалов с разными физическими свойствами, выполнен расчет предельного уровня нестабильности частоты. Выявлены основные методы, позволяющие уменьшить потенциальные тепловые шумы резонаторов при их проектировании. Предложен оригинальный метод частичной компенсации тепловых шумов частоты основной моды резонатора.

### 2.1 Введение

Тепловой шум — это фундаментальный физический эффект, проявления которого встречаются в самых разных областях физики. Классическим примером этого явления является непрекращающееся броуновское движение микроскопических частиц, взвешенных в жидкости, вызванное колебаниями частоты ударов отдельных молекул жидкости по частице с разных сторон. Причиной шума Джонсона-Найквиста сопротивлений в электрических цепях является тепловое движение электронов. Макроскопические тела так же совершают постоянные случайные тепловые колебания, амплитуда которых слишком мала для обнаружения невооружённым глазом, однако в физике прецизионных измерений они становятся фундаментальным ограничивающим фактором. В современных лазерно-интерферометрических гравитационно-волновых обсерваториях (aLIGO) тепловые шумы зеркал (тестовых масс) накладывают ограничение на чувствительность детекторов в важном диапазоне частот гравитационных волн 30 – 200 Гц [64].

Влияние броуновского движения на стабильность частоты оптических лазерных систем впервые было замечено Ч. Таунсом и соавторами [91]. Всестороннее исследование разных видов тепловых шумов лазерных интерферометров (броуновского движения, термодинамических шумов, тепловых шумов системы подвеса) впервые было выполнено при расчёте бюджета нестабильностей гравитационно-волновых интерферометров LIGO. В соответствии с Формулой (1.17)  $\frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta \vartheta}{\vartheta}$ , любое движение зеркал интерферометров неизбежно приводит к изменению их собственных частот. Тепловые шумы опорных монолитных резонаторов Фабри-Перо впервые исследовал К. Нумата и соавторы в [21].

Физические свойства тепловых шумов позволяет рассчитать Флуктуационно-диссипационная теорема (ФДТ). С помощью ФДТ получены основные формулы для расчёта

вкладов тепловых колебаний тела, отражающих покрытий и подложек зеркал опорного резонатора в нестабильность частоты его моды [92]. Тепловые шумы накладывают фундаментальное ограничение на стабильность частоты лазерной системы с внешним монолитным резонатором. Их аккуратный расчёт необходим для создания резонаторов с предельной относительной нестабильностью частоты ниже  $10^{-15}$ .

## 2.2 Флуктуационно-диссипационная теорема и тепловые шумы механических систем

Флуктуационно-диссипационная теорема – теорема статистической физики, которая связывает спектральную плотность тепловых флуктуаций системы с её диссипативными свойствами. Используя методы статистики и термодинамики Г. Каллен и Р. Грин доказали [93,94], что спектральная плотность мощности флуктуаций  $S_x(f)$  обобщённой координаты  $x$  равновесной термодинамической системы связана с мнимой частью её функции отклика (ответственной за диссипацию энергии движения)  $H(f)$  как (все обозначения см. в таблице 2.1):

$$S_x(f) = -\frac{2k_B T}{\pi f} \cdot \text{Im}[H(f)]. \quad (2.1)$$

*Тепловой шум одномерного осциллятора*

Рассмотрим одномерную колебательную систему (рисунок 2.1) с обобщённой координатой  $x(t)$  под действием обобщённой силы  $F(t)$ . В соответствии с теоремой о свёртке, функция отклика такой линейной системы:

$$H(f) = \frac{\tilde{x}(f)}{\tilde{F}(f)}, \quad (2.2)$$

где  $\tilde{x}(f)$  и  $\tilde{F}(f)$  – Фурье-образы координаты и силы.  $H(f)$  имеет ненулевую мнимую часть если в системе в той или иной форме присутствуют потери энергии (затухание).

Уравнение движения для осциллятора с резонансной частотой  $\omega_0 = \sqrt{k/M}$  и с затуханием в Фурье-представлении:

$$-M\omega^2 \tilde{x} + M\omega_0^2 [1 + i\varphi(\omega)] \tilde{x} = \tilde{F}. \quad (2.3)$$

Функция  $\varphi(\omega)$  – угол потерь, отвечающая за степень неэластичности пружины, даёт значение отставания фазы (в радианах)  $x(t)$  от гармонической движущей силы. Величины  $\varphi(\omega)$  для разных материалов

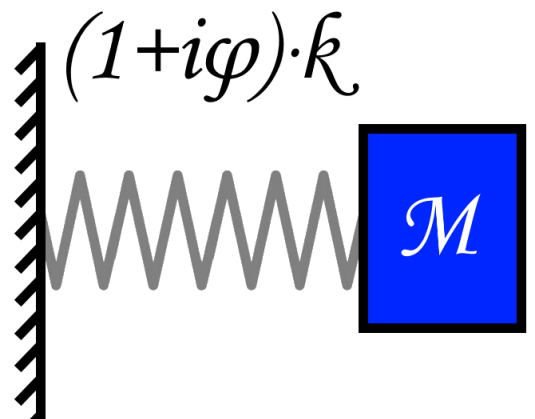


Рисунок 2.1 Пружинный маятник с затуханием.

могут быть определены экспериментально [95]. Из (2.3) получим функцию отклика осциллятора с затуханием:

$$H(\omega) = \frac{1}{M\omega_0^2} \cdot \frac{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 - i\varphi(\omega)}{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + \varphi^2(\omega)}. \quad (2.4)$$

В соответствии с (2.1) спектральная плотность мощности флуктуаций координаты гармонического осциллятора будет выражаться формулой:

$$S_x(f) = \frac{k_B T}{2\pi^3 M f} \cdot \frac{f_0^2 \varphi(f)}{(f_0^2 - f^2)^2 + f_0^4 \varphi^2(f)}. \quad (2.5)$$

Вид функции  $\varphi(f)$  зависит от того, какой тип диссипаций энергии присутствует в системе [96]: вязкое трение ( $\varphi(f) = f/2\pi f_0^2 Q$ ) или структурное затухание ( $\varphi(f) = 1/Q$ ). Величина  $Q = 1/\varphi(f_0)$  – механическая добротность системы. Тепловые флуктуации системы со структурным затуханием будем называть броуновским движением.

Упростим формулу (2.5), используя особенности опорных резонаторов Фабри-Перо как колебательной системы. Тепловой шум оптических интерферометров обычно вызван структурным затуханием, например неэластичностью материалов зеркал [97], в то время как эффекты, связанные с вязким трением, такие как давление остаточного газа, оказывают малое влияние. Собственные резонансные частоты опорных интерферометров достаточно велики и составляют несколько килоггерц, поэтому резонансное увеличение тепловых флуктуаций происходит далеко за границей рабочего диапазона времён усреднения ультрастабильных лазерных систем 0.1 – 100 с. Предполагая  $f \ll f_0$  и учитывая, что для всех используемых материалов  $\varphi \ll 1$ :

$$S_x(f) = \frac{k_B T}{2\pi^3 M f} \cdot \frac{\varphi}{f_0^2} = \frac{2k_B T}{\pi f} \cdot \frac{\varphi}{k}. \quad (2.6)$$

Данное выражение иллюстрирует ряд важных свойств системы, совершающей тепловое броуновское движение:

- спектральная плотность мощности имеет вид  $1/f$  (фликкер-шум частоты) при частотах, много меньших резонансной
- спектр мощности шумов прямо пропорционален температуре и углу потерь
- спектр мощности шумов обратно пропорционален коэффициенту жёсткости.

#### *Броуновский шум опорного резонатора*

Реальные опорные резонаторы Фабри-Перо являются значительно более сложной системой чем одномерный осциллятор. Проще рассчитывать тепловой шум не для всего резонатора сразу, а для разных его элементов в отдельности: тела, подложек и покрытий зеркал (Рисунок 2.2). Так как лазерная мода на зеркалах резонатора имеет конечный размер, то вклад в тепловые колебания

его длины дают все участки отражающей поверхности, на которые падает излучение. Можно показать, что сдвиг фазы пучка с характерным нормированным на единицу профилем интенсивности  $g(\vec{r})$  (обычно это профиль  $TEM_{00}$  гауссовой моды)

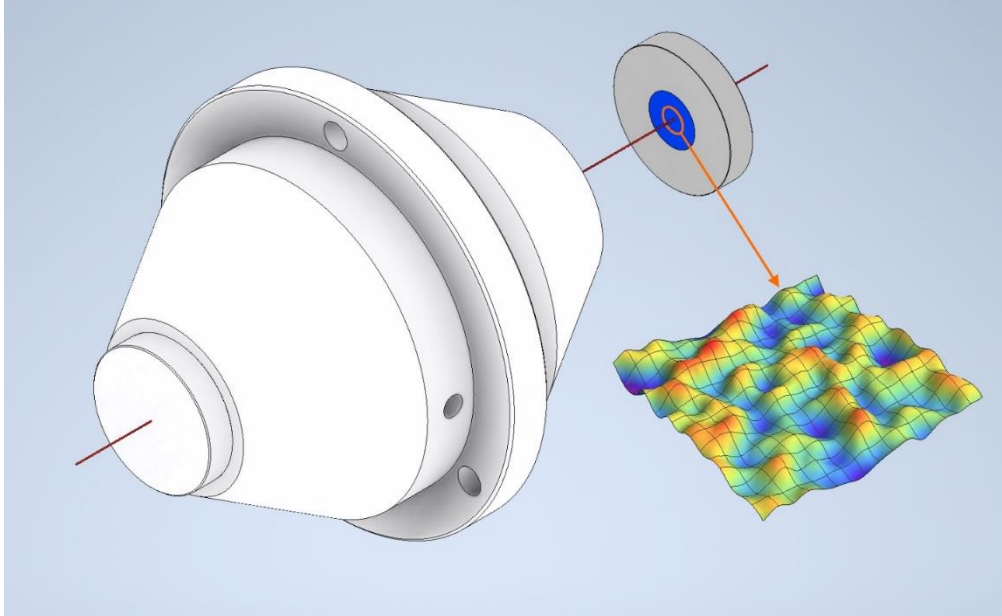


Рисунок 2.2 Элементы, создающие тепловой шум длины резонатора Фабри-Перо: тело, подложки зеркал, отражающие покрытия. Иллюстрацией тепловым колебаниям поверхности зеркала могут служить случайные волнения водной глади озера.

при его отражении от поверхности зеркала, возмущённой тепловыми шумами  $\vec{u}(\vec{r}, t)$ , выражается как [98]:

$$\Delta\phi(t) = \int_S g(\vec{r}) \cdot (\vec{k}, \vec{u}(\vec{r}, t)) \cdot d^2r. \quad (2.7)$$

Интегрирование здесь производится по поверхности зеркала  $S$ ;  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки на поверхности зеркала;  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  – смещение точки зеркала с координатой  $\vec{r}$  от невозмущенного положения;  $\vec{k}$  – волновой вектор падающего излучения, направленный вдоль перпендикулярной к поверхности зеркала оси  $z$  (рисунок 2.3). Используя сдвиг фазы  $\Delta\phi(t)$ , можно ввести обобщённую координату - «эффективное» смещение поверхности одного из зеркал вдоль оси  $x$ :

$$X(t) = \frac{\Delta\phi(t)}{|\vec{k}|} = \int_S g(\vec{r}) \cdot u_x(\vec{r}, t) \cdot d^2r. \quad (2.8)$$

Именно этим выражением мы будем пользоваться для описания влияния тепловых шумов на стабильность длины интерферометра.

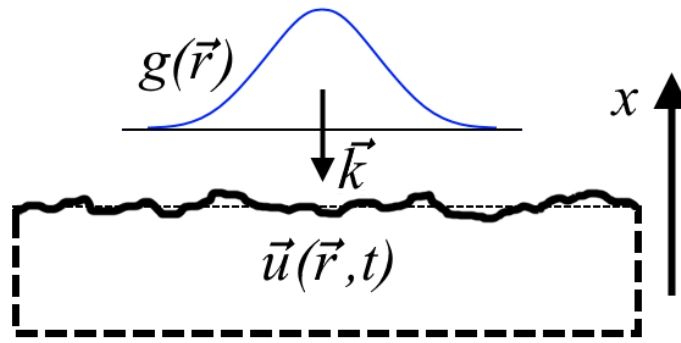


Рисунок 2.3 Гауссов пучок, падающий на поверхность зеркала, искаженную тепловыми шумами.

В соответствии с ФДТ для вычисления искомой плотности мощности флуктуаций координаты  $X(t)$  необходимо знать мнимую часть функции отклика  $H_X(\omega)$ . Прямое измерение  $Im[H_X(\omega)]$  в широком диапазоне частот является сложной задачей, так как в большинстве случаев действительная часть функции отклика во много раз больше, чем мнимая [96]. Поэтому вместо измерения пользуются вычислительными оценками. Для таких оценок разработаны два метода: разложение по нормальным модам (метод Фурье) и «прямой подход». В первом методе  $X(t)$  раскладывают в ряд по нормальным колебательным модам, что позволяет свести уравнение движения системы под действием пробной внешней силы к системе уравнений для одномерных гармонических осцилляторов, решить его и по определению (2.2) найти функцию отклика. В реальном случае для этого нужен полный расчёт большого числа собственных мод системы: их форм и частот. В общем случае этот способ должен работать, но на практике он является громоздким и сходится медленно.

В 1997 году Ю. Левин опубликовал знаковую работу [99], в которой был описан простой и эффективный метод расчёта броуновских тепловых шумов оптических интерферометров. В работе получено количественное описание связи  $Im[H_X(\omega)]$  со средней мощностью потерь энергии в системе:

$$2\pi f Im[H_X(f)] = \frac{2W_{diss}}{F_0^2} = \frac{4\pi f U_{max}\varphi}{F_0^2} \quad (2.9)$$

где  $W_{diss}$  – мощность потерь энергии за один цикл колебаний под действием внешнего давления  $F_0 \cos(2\pi f t) g(\vec{r})$ , приложенного к поверхности зеркала. Вычислить  $W_{diss}$  проще чем мнимую часть функции отклика. Чаще всего частоты собственных механических резонансов исследуемой системы лежат значительно выше диапазона, в котором требуется вычисление тепловых шумов. В таком случае достаточно рассчитать энергию упругой деформации системы под действием постоянного давления  $F_0 \cdot g(\vec{r})$ . Последнее равенство в (2.9) связывает мощность потерь энергии

с энергией упругой деформации  $U_{max}$  в момент, когда деформация максимальна. ФДТ теперь можно представить в виде:

$$S_X(f) = \frac{2k_B T}{\pi^2 f^2} \cdot \frac{W_{diss}}{F_0^2} = \frac{2k_B T \varphi}{\pi f} \cdot \frac{U_{max}}{F_0^2}. \quad (2.10)$$

Метод Левина позволяет рассчитать спектральную плотность тепловых шумов для всех составляющих частей резонатора. Предполагая, что зеркала резонатора идентичны, спектральная плотность мощности тепловых флуктуаций его длины является суммой вкладов от пары отражающих покрытий ( $ct$ ), подложек ( $sb$ ) и тела ( $sp$ ):

$$S_X(f) = 2S_X^{sb}(f) + 2S_X^{ct}(f) + S_X^{sp}(f). \quad (2.11)$$

С учетом того, что затухание в элементах резонатора является структурным  $E = E_0(1 + i\varphi)$  (броуновские шумы), при помощи методов теории упругости [99] получены формулы для спектральных плотностей тепловых шумов всех частей опорного резонатора Фабри-Перо [21,92]:

$$S_X^{sb}(f) = \frac{4k_B T}{\pi f} \cdot \frac{1 - \sigma_{sb}^2}{2\sqrt{\pi}E_{sb}w} \cdot \varphi_{sb}, \quad (2.12)$$

$$S_X^{ct}(f) = S_X^{sb}(f) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1 - 2\sigma_{sb}}{1 - \sigma_{sb}} \cdot \frac{\varphi_{ct}}{\varphi_{sb}} \cdot \frac{d_{ct}}{w}, \quad (2.13)$$

$$S_X^{sp}(f) = \frac{4k_B T}{\pi f} \cdot \frac{L}{2\pi E_{sp}(r_1^2 - r_2^2)} \cdot \varphi_{sb}. \quad (2.14)$$

Данные соотношения были подтверждены экспериментально для различных опорных резонаторов [100]. Все величины, входящие в формулы (2.12) – (2.14) представлены в Таблице 2.1.

$T$	Температура резонатора
$E_{sb,ct,sp}$	Модуль Юнга подложки, покрытия, тела
$\sigma_{sb,ct}$	Коэффициент Пуассона подложки, покрытия
$\varphi_{sb,ct,sp}$	Обратная добротность подложки, покрытия, тела
$w_{1,2}$	Радиус пятна моды по уровню интенсивности $1/e^2$
$R_1, R_2$	Радиусы кривизны зеркал
$\lambda$	Длина волны излучения лазера
$L$	Длина резонатора
$r_{1,2}$	Внешний радиус тела резонатора, радиус отверстия
$d_{ct}$	Толщина отражающего покрытия

Таблица 2.1 Физические величины, использованные для расчета тепловых шумов опорных монолитных резонаторов.

Размер пятна моды резонатора на зеркалах влияет на уровень тепловых шумов отражающих покрытий, так как от него зависит площадь поверхности, по которой будут усредняться тепловые флуктуации. Размер моды определяется длиной волны излучения, длиной резонатора и радиусами кривизны его зеркал (Формула Б.16).

Любопытен тот факт, что  $S_X^{sb} \sim 1/w$ , а  $S_X^{ct} \sim 1/w^2$ . Эти зависимости можно объяснить, оценив  $W_{diss}$  для подложки и покрытия. Потери энергии в каждой точке тела пропорциональны квадрату механического напряжения в данной точке. Так как толщина отражающего покрытия значительно меньше  $w$ , можно считать, что на всей её глубине напряжение одинаковое, тогда:

$$W_{diss}^{ct} \sim \left(\frac{F_0}{w^2}\right)^2 \cdot w^2 d_{ct} = \frac{F_0^2}{w^2} \cdot d_{ct}. \quad (2.15)$$

Механическое напряжение в подложке зеркала убывает с глубиной. Как показывает расчёт [99], для подложки справедливо:

$$W_{diss}^{sb} \sim \left(\frac{F_0}{w^2}\right)^2 \cdot w^3 = \frac{F_0^2}{w}. \quad (2.16)$$

Для вычисления девиации Аллана можно воспользоваться (А.12) и тем, что:

$$S_y(f) = \frac{S_x(f)}{L^2}. \quad (2.17)$$

Так как тепловой шум в низкочастотном пределе является фликкер-шумом частоты, его девиация Аллана принимает одинаковое значение для всех времён усреднения. Это значение принято называть «пределом тепловых шумов»:

$$\sigma_y = \sqrt{2 \ln 2 S_y(f) f}. \quad (2.18)$$

### 2.3 Материалы ультрастабильных резонаторов

Как следует из формул (2.12) – (2.14) предел теплового шума опорных резонаторов определяется свойствами материалов его тела и зеркал. Поэтому к материалам, из которых изготавливаются элементы резонатора, предъявляются строгие требования. Во-первых, необходима высокая механическая добротность ( $Q = 1/\varphi$ ). Данный параметр известен не для всех доступных материалов, но для тех, которые активно используются для производства опорных резонаторов, он был измерен. Традиционным способом для его нахождения является метод ring-down, в котором измеряется время затухания  $\tau = Q/\pi f_0$  свободных механических колебаний на резонансных частотах образцов. Экспериментально показано что параметр  $Q$  для большинства материалов не зависит от частоты колебаний (структурное затухание), однако может иметь сильную зависимость от рабочей температуры. Например, параметр добротности плавленого кварца в области криогенных температур падает более чем на три порядка, в сравнении с комнатными температурами [101].



Вторую важную группу параметров, влияющую на предел тепловых шумов, составляют упругие константы материала. Наиболее важно, чтобы модуль Юнга имел высокое значение. Этот фактор влияет как на устойчивость к вибрациям, так и к тепловым шумам.

Понять влияние указанных характеристик материалов на уровень тепловых шумов помогает следующий взгляд. Тепловые колебания системы можно представить в виде разложения по её собственным колебательным модам. При этом частоты собственных механических резонансов таких систем как опорные резонаторы лежат значительно выше границы той области частот, в которой представляют интерес их шумовые характеристики ( $< 100$  Гц) (см. переход от (2.5) к (2.6)). Таким образом в этой области тепловые колебания можно представить как сумму низкочастотных крыльев всех спектральных контуров собственных резонансов. Увеличение модуля Юнга материала приводит к росту собственных частот, а увеличение механической добротности – к повышению резкости резонансных пиков (рисунок 2.4).

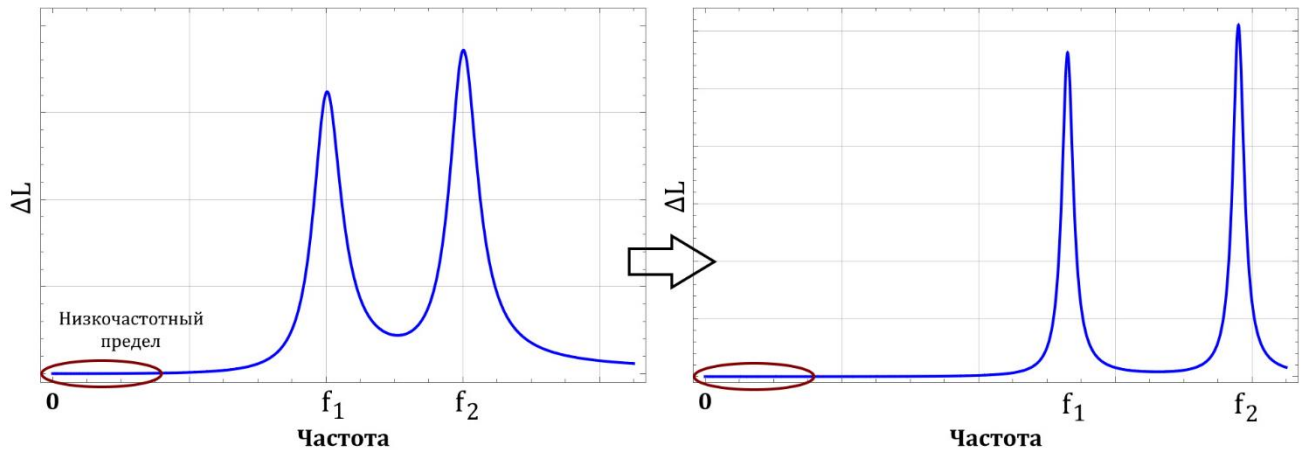


Рисунок 2.4 Иллюстрация влияния механической добротности и жёсткости материала на уровень тепловых шумов. Слева-направо: с ростом  $Q$  и  $E$  вклад собственных резонансов на низких частотах уменьшается.

Существует ряд важных параметров материалов, которые не влияют на тепловые флуктуации системы, но важны для уменьшения прочих видов шумов. Для защиты от теплового расширения резонатора из-за колебаний температуры, для тела резонатора необходимо использовать материалы, имеющие температуру нулевого теплового расширения. Чтобы избежать градиентов температуры резонатора, желательно использовать материалы с высокой теплопроводностью. Необходимо, чтобы подложки зеркал были прозрачны на рабочей длине волны. Наиболее распространённым материалом тела и подложек зеркал является стекло ULE [102] благодаря наличию точки нулевого теплового расширения в районе комнатной температуры, хорошим оптическим и упругим свойствам и достаточно высокой добротности в сравнении со стеклокерамическими материалами (Zerodur, ситалл). Перспективным материалом

является монокристаллический кремний, превосходящий ULE по всем параметрам, но требующий охлаждения до криогенных температур для достижения нулевой точки и непрозрачный в оптическом диапазоне.

Важным следствием формул (2.12) – (2.18) является то, что отражающие покрытия толщиной несколько микрон являются основным источником тепловых шумов для наиболее распространённых конфигураций резонаторов. Для создания ультрастабильных лазеров необходимы зеркала с рекордно высокими коэффициентами отражения, поэтому обычно используются диэлектрические отражающие структуры, в которых высокий коэффициент отражения обеспечивается эффектом Брэгговской дифракции. Интерференционные зеркала состоят из множества чередующихся слоев с высоким и низким показателем преломления, каждый имеет оптическую толщину  $\lambda/4$ . Изготовление таких многослойных структур производится методами вакуумного напыления. С 1980-х годов и по сегодняшний день наибольшим коэффициентом отражения обладают многослойные диэлектрические зеркала из  $SiO_2/Ta_2O_5$ . Несмотря на их превосходные оптические свойства, они значительно подвержены тепловым шумам. Лучшее значение угла потерь в таких структурах [103] составляет  $2 \cdot 10^{-4}$ , и было получено путём включения небольшой доли  $TiO_2$  в состав слоёв оксида тантала, имеющих высокую оптическую плотность. В первом эксперименте, в котором тело и подложки зеркал были изготовлены из высокодобротного кремния [104], тепловой шум отражающих покрытий оказался единственным фактором, ограничившим стабильность.

#### *GaAs как материал для зеркал и тела*

Наиболее перспективными для будущего использования в качестве зеркал выглядят высокоотражающие кристаллические гетероструктуры  $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$  [105]. Такие структуры создают методом молекулярно-пучкового эпитаксиального роста в условиях сверхвысокого вакуума на подложке из чистого  $GaAs$ . Полученную тончайшую пленку ( $d = 6$  мкм) при помощи притирания и травления освобождают от подложки, тщательно очищают и переносят на новую подложку из плавленого кварца или кремния. В силу непрозрачности арсенида галлия в оптическом диапазоне, кристаллические зеркала могут быть изготовлены только для длин волн излучения  $> 900$  нм. Перспективно выглядит использование непосредственно арсенида галлия, прозрачного в инфракрасном диапазоне, в качестве материала тела и подложек. Это позволило бы заметно упростить технологию изготовления покрытий  $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ . К сожалению, в литературе не удаётся найти результаты измерений добротности  $GaAs$ , что не позволяет сделать достоверные выводы о его перспективности. Можно лишь оценить, что если основным механизмом диссипации в этом материале является термоупругое затухание, то  $\varphi_{GaAs} = 2.5 \cdot 10^{-7}$  [106]. В таком случае расчётный предел тепловых

шумов резонатора из *GaAs* длиной 78 мм с кристаллическими зеркалами при температуре 56 К окажется в 4.5 раз ниже, чем у резонатора той же длины из ULE-стекла с кварцевыми подложками и кристаллическими зеркалами при комнатной температуре.

В Таблице 2.2 приведены основные характеристики материалов, из которых изготавливаются подложки, покрытия зеркал и тела резонаторов.

<b>Материалы тела и подложек зеркал</b>					
<b>Материал</b>	<b>E, ГПа</b>	<b><math>\sigma</math></b>	<b><math>\varphi</math></b>	<b>T<sub>0</sub>, К</b>	<b>Ссылка на измерение <math>\varphi</math></b>
<b>Плавленный кварц (SiO<sub>2</sub>)</b>	72	0.17	10 <sup>-6</sup>	–	[107]
<b>Сапфир</b>	400	0.29	10 <sup>-7</sup>	–	[108]
<b>ULE</b>	67.6	0.17	1.6·10 <sup>-5</sup>	290±25	[102], [21]
<b>Церодур</b>	90	0.24	3.3·10 <sup>-4</sup>	290±25	[21]
<b>Si</b>	$E_{[100]} = 130$ $E_{[110]} = 170$ $E_{[111]} = 185$	0.27	10 <sup>-8</sup>	17, 124	[109], [95]
<b>GaAs</b>	86	0.31	2.5 · 10 <sup>-7</sup>	56	[106]
<b>Материалы отражающих покрытий</b>					
<b>SiO<sub>2</sub>/Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub></b>	110	0.2	4·10 <sup>-4</sup>	–	[103]
<b>GaAs/Al<sub>1-x</sub>Ga<sub>x</sub>As</b>	85	0.32	2.5·10 <sup>-5</sup>	–	[105]

Таблица 2.2 Параметры материалов опорных резонаторов. Значения упругих констант взяты из общедоступных баз данных. T<sub>0</sub> – температура нулевого теплового расширения материала.

## **2.4 Методы снижения предела тепловых шумов опорных резонаторов**

Результаты подсчёта по формулам (2.12) – (2.18), выполненные для резонаторов разных длин и из разных материалов, и вклады различных элементов в общий уровень тепловых шумов показаны в Таблице 2.3. Расчёт произведён для резонаторов с радиусами зеркал  $R_1 = R_2 = 1$  м, толщиной отражающих покрытий 7 мкм, для длины волны излучения 1542 нм. Для всех резонаторов были использованы одинаковые значения  $R_{1,2}, \lambda, d$  чтобы упростить их сравнение. В действительности толщина отражающих покрытий зависит от длины волны, материала и числа слоёв, которое определяет коэффициент отражения.

Из расчётов следует несколько наблюдений, которые полезно учитывать при проектировании резонаторов. В большинстве случаев основной вклад в тепловые шумы вносит отражающее покрытие. Вклад тела несущественен во всех случаях кроме 5-го (Таблица 2.3),

когда и зеркала, и подложки изготовлены из очень высокодобротных материалов, а тело - нет. В резонаторах с подложками зеркал из ULE именно подложки вносят наибольший тепловой шум (1 и 3 конфигурация). Использование кварцевых подложек вместо ULE позволяет понизить тепловые шумы системы приблизительно в два раза. При сочетании кристаллических зеркал и кварцевых подложек последние имеют наибольшие тепловые шумы. Предельная нестабильность частоты кремниевых резонаторов полностью определяется шумами отражающих покрытий.

	Материал тела/подложки	Отражающее покрытие	$L$ , см	$T$ , К	$w$ , мкм	$\sigma_y$ , $10^{-16}$	Отношение вкладов покрытия/подложки/тела
1	ULE/ULE	SiO <sub>2</sub> /Ta <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	78	290	315	<b>8.8</b>	22/78/0
2	ULE/SiO <sub>2</sub>	SiO <sub>2</sub> /Ta <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	78	290	315	<b>4.4</b>	82/18/0
3	ULE/ULE	SiO <sub>2</sub> /Ta <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	480	290	525	<b>1.1</b>	14.5/85/0.5
4	ULE/SiO <sub>2</sub>	SiO <sub>2</sub> /Ta <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	480	290	525	<b>0.46</b>	71/26/3
5	ULE/SiO <sub>2</sub>	GaAs/AlGaAs	480	290	525	<b>0.27</b>	13/79/8
6	Si/Si	SiO <sub>2</sub> /Ta <sub>2</sub> O <sub>5</sub>	78	124	315	<b>1.7</b>	99.7/0.3/0
7	Si/Si	GaAs/AlGaAs	78	124	315	<b>0.43</b>	96/4/0
8	Si/Si	GaAs/AlGaAs	480	124	525	<b>0.04</b>	93/7/0
9	GaAs/GaAs	GaAs/AlGaAs	78	56	315	<b>0.59</b>	66/34/0

Таблица 2.3 Расчётный предел нестабильности частоты, связанный с тепловыми шумами, для резонаторов разной длины и состава.

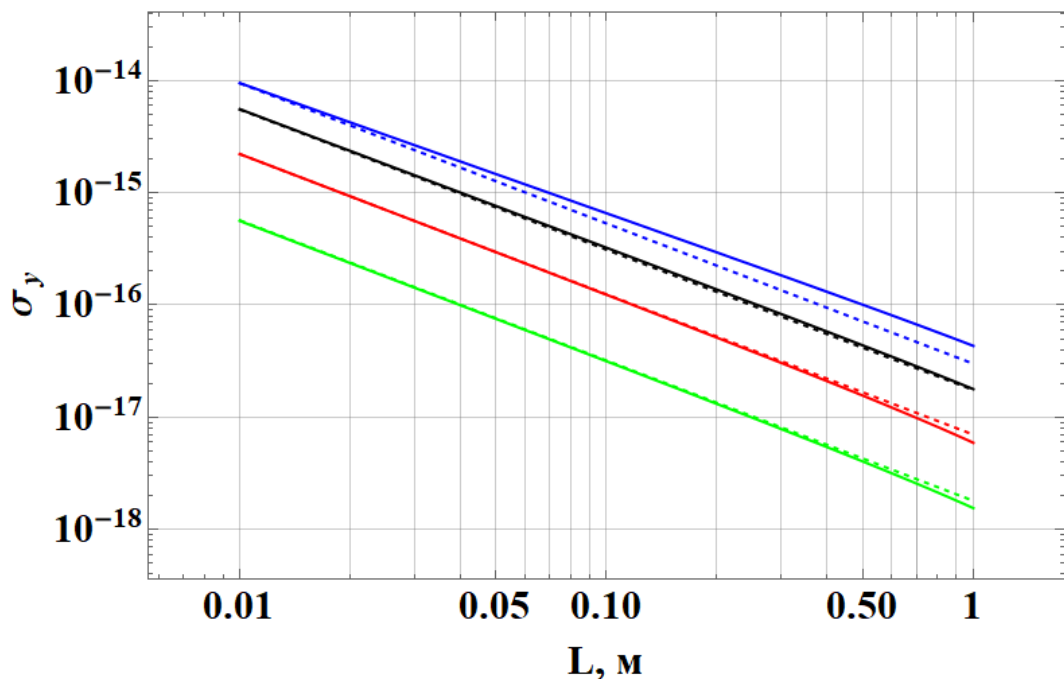


Рисунок 2.5 Графики (в двойном логарифмическом масштабе) зависимости предела тепловых шумов от длины для различных типов резонаторов (материал тела-подложек-зеркал): ULE-ULE-SiO<sub>2</sub>/Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> (синий), ULE-SiO<sub>2</sub>-SiO<sub>2</sub>/Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> (черный), Si-Si-SiO<sub>2</sub>/Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub> (красный), Si-Si-

*GaAs/AlGaAs. Рядом с каждой кривой зависимости  $\sigma_y(L)$  проведена пунктирная линия с наклоном  $\sim L^{-5/4}$ . Для расчета был использован резонатор с парой вогнутых зеркал радиусом  $1\text{ м}$ , толщиной отражающих покрытий –  $7\text{ мкм}$ , длина волны излучения –  $1542\text{ нм}$ .*

На Рисунке 2.5 показаны зависимости нестабильности частоты опорных резонаторов разного состава от их длины. Наклон трёх нижних графиков свидетельствует о зависимости  $\sigma_y \sim L^{-5/4}$ . Такая зависимость имеет место если подложки зеркал изготовлены из высокодобротных материалов (кварц, Si) и тепловые шумы отражающих покрытий имеют доминирующий вклад. Когда подложки сделаны из ULE-стекла их вклад в тепловой шум резонатора оказывается наибольшим и зависимость приобретает вид  $\sigma_y \sim L^{-9/8}$ .

Интерферометры, сформированные парой вогнутых зеркал, имеют более низкий предел тепловых шумов чем плоско-вогнутые конфигурации. Для заданного значения длины резонатора лучше всего подбирать как можно большие радиусы зеркал, соответствующие границе устойчивости. Это позволяет увеличить размер моды и лучше усреднять тепловые шумы. Расчёты позволяют сделать вывод, что для понижения предела броуновских тепловых шумов опорных резонаторов существует три основных метода:

- Понижение температуры, приводящее к уменьшению тепловой энергии и флуктуаций системы,
- Увеличение расстояния между зеркалами, подавляющее вклад колебаний поверхности зеркал за счет фактора  $1/L$  и позволяющее увеличить размер моды на зеркалах (а значит, и площадь усреднения шумов),
- Использование высокодобротных (например, кристаллических) материалов.

Принципиально важным наблюдением является то, что для уменьшения предела тепловых шумов опорного интерферометра ниже  $10^{-17}$  необходимо использование материалов тела и подложек более высокодобротных, чем плавленый кварц и ULE-стекло.

## 2.5 Прочие виды тепловых шумов опорных резонаторов

Броуновское движение составных частей – не единственный вид теплового шума, который может влиять на длину опорного интерферометра.

В любой термодинамической системе, в том числе в опорном резонаторе Фабри-Перо, присутствуют термодинамические флуктуации температуры, величина которых определяется формулой:

$$\langle \delta T^2 \rangle = \frac{k_B T^2}{\rho C V}, \quad (2.19)$$

$\rho$  – плотность материала,  $C$  – его теплоёмкость,  $V$  – объём части резонатора, для которой рассматриваются температурные колебания. Термодинамические флуктуации температуры приводят к спонтанному возникновению горячих и холодных областей в объёме зеркал резонатора. В этих областях возникают тепловые деформации из-за эффекта теплового расширения и локальные изменения показателя преломления из-за термооптического эффекта. Термодинамические шумы покрытий зеркал называют термо-оптическими, а подложек – термоупругими. Поскольку лазерное излучение проникает в отражающие покрытия, в них имеют место и тепловое расширение и термооптический эффект. Оба эффекта скоррелированы и имеют близкие амплитуды. Показано, что при вычислении суммарного влияния теплового расширения и термооптического эффекта на длину резонатора в условиях флуктуирующей температуры, их вклады взаимно вычитаются [110], что существенно подавляет термо-оптический шум.

Подложки зеркал вносят вклад в случайные колебания отражающей поверхности только из-за теплового расширения [111]. Так как подложки резонаторов зачастую изготавливаются из материалов с нулевым тепловым расширением (ULE, кремний) или из плавленого кварца, у которого коэффициент теплового расширения очень низок, термоупругий шум опорных резонаторов значительно слабее, чем броуновский. Характерные значения броуновских шумов опорных резонаторов более чем на порядок превышают их термодинамические шумы.

К возмущению длины резонатора Фабри-Перо может привести броуновское тепловое движение его системы подвеса. Наибольший эффект будет наблюдаться если тело резонатора установлено на резиновых шариках, что является стандартным способом подавления вибраций горизонтальных резонаторов. Резина имеет низкую механическую добротность и подвержена тепловым шумам, тем не менее, оценки показывают, что вклад системы подвеса с четырьмя шариками из фторкаучука составляет не более 1% от теплового шума тела резонатора [92].

Тепловые шумы, связанные с вязким трением (сопротивлением остаточного газа, вихревыми токами), которые имеют место в зеркалах гравитационно-волновых детекторов [96], в опорных монолитных интерферометрах Фабри-Перо пренебрежимо малы.

## **2.6 Частичная компенсация тепловых шумов в основной моде резонатора**

Методы снижения предела тепловых шумов относительной нестабильности частоты ультрастабильных лазеров, рассмотренные в разделе 2.4 данной главы, сводятся к разработке новых типов опорных резонаторов (увеличение длины, использование новых материалов). В текущем разделе предложен метод регистрации тепловых шумов частоты  $TEM_{00}$  моды резонатора, при помощи двух «пробных» мод старших порядков, позволяющий частично

компенсировать шумы в основной моде. Математическое моделирование подтвердило эффективность данного метода.

### 2.6.1 Регистрация тепловых шумов моды резонатора

Резонатор Фабри-Перо обладает набором собственных мод, каждая из которых может быть представлена в виде суперпозиции эрмит-гауссовых или лагерь-гауссовых мод. Каждая мода характеризуется функцией профиля интенсивности  $g(\vec{r})$  на зеркале резонатора (нормирована на единицу). Из соотношения (2.8) следует, что тепловые шумы длины резонатора для выбранной моды излучения определяются теми частями поверхности его зеркал, где сосредоточена её интенсивность. Распределение интенсивности  $g(\vec{r})$  для каждой моды имеет свой характерный вид, в результате чего тепловые шумы для разных мод могут определяться тепловыми флуктуациями в практически не пересекающихся частях зеркала. На этом факте основан предлагаемый метод частичного измерения тепловых шумов частоты моды.

Для реализации метода необходимо выбрать три моды резонатора:  $M_1$  – «основная», то есть та, тепловой шум которой требуется частично охарактеризовать и компенсировать,  $M_2$ ,  $M_3$  – «пробные». Три лазерных пучка, соответствующие данным модам, заведены в один и тот же резонатор, и привязаны к нему по частоте. Будем считать, что стабильность их частот определяется только его тепловыми шумами (соответствующими каждой из выбранных мод). Чтобы избежать интерференционных эффектов моды должны иметь различные частоты, что возможно обеспечить, разделив излучение одного лазера на три луча и осуществив необходимые отстройки частот при помощи акустооптических модуляторов. Разделим поверхность зеркала на две условные непересекающиеся области:  $O_1$  – где сосредоточена интенсивность моды  $M_1$  и  $O_2$  – в которой сосредоточена  $M_2$ . Моду  $M_2$  следует выбирать так чтобы её перекрытие с  $M_1$  было минимальным. Моде  $M_3$ , в свою очередь должна сильно перекрываться и с  $M_1$ , и с  $M_2$ . Набором мод, удовлетворяющим данным требованиям являются лагерь-гауссовы моды  $LG_{00}$  ( $M_1$ ) (другое используемое название -  $TEM_{00}$ ),  $LG_{03^*}$  ( $M_2$ ),  $LG_{10}$  ( $M_3$ ), представленные на рисунке 2.6 и в таблице 2.4.  $LG_{03^*}$  относится к лагерь-гауссовым модам с орбитальным моментом [112] (Приложение Б.2). Заметим, что данные моды совместимы с резонаторами Фабри-Перо со сферическими зеркалами.

$LG_{00}$	$g_1(r, \varphi) = \tilde{g}_1 \cdot \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)$
$LG_{03^*}$	$g_2(r, \varphi) = \tilde{g}_2 \cdot \left(1 - \frac{2r^2}{w^2}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)$

LG <sub>10</sub>	$g_3(r, \varphi) = \tilde{g}_3 \cdot \left(\frac{r}{w}\right)^6 \cdot \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)$
------------------	---

Таблица 2.4 Функции интенсивности для трех используемых в расчёте мод. Коэффициенты  $\tilde{g}$  отвечают за нормировку на 1 (см. Приложение Б.2).

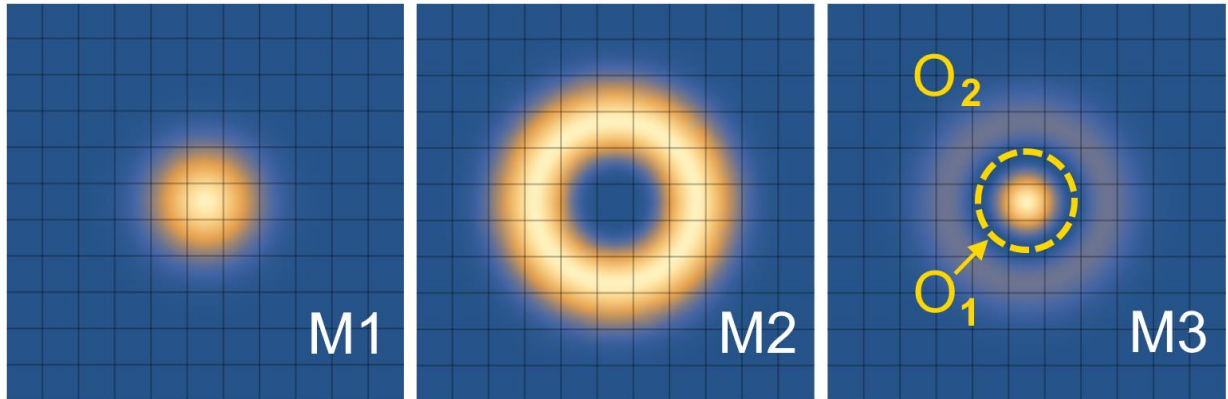


Рисунок 2.6 Профили лазер-гауссовых мод. Слева на право: основная LG<sub>00</sub> (M<sub>1</sub>), и пробные LG<sub>03</sub>\* (M<sub>2</sub>), LG<sub>10</sub> (M<sub>3</sub>). Также указаны области O<sub>1</sub> и O<sub>2</sub>, описанные в тексте.

При гетеродинировании оптических полей мод M<sub>2</sub> и M<sub>3</sub> тепловые шумы в области O<sub>2</sub> окажутся коррелированы и частично компенсируются в сигнале биений, которые лежат в радиочастотном диапазоне. При этом в сигнале останутся флуктуации частоты, вызванные тепловым шумом зеркала в области O<sub>1</sub>, которая покрывается основной модой M<sub>1</sub>. Таким образом, флуктуации частоты полученного сигнала могут быть вычтены из частоты излучения моды M<sub>1</sub>, например, при помощи акустооптического модулятора (рисунок 2.7). Это снижает вклад тепловых шумов в нестабильность частоты лазерного излучения в основной моде M<sub>1</sub>. При этом остаточные флуктуации частоты  $\delta\nu_{132}$  составят:

$$\delta\nu_{132}(t) = -\frac{\vartheta_1}{L} \int_S [g_1(\vec{r}) - (g_3(\vec{r}) - g_2(\vec{r}))] \cdot u_x(\vec{r}, t) \cdot d^2r. \quad (2.20)$$

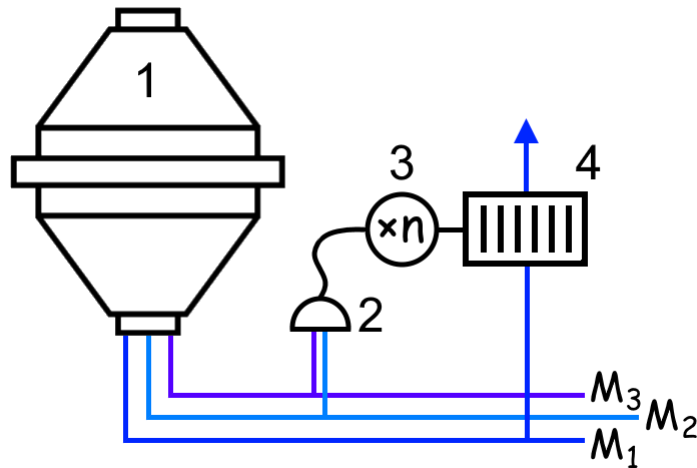


Рисунок 2.7 Упрощённая схема эксперимента по измерению и частичной компенсации теплового шума основной моды M<sub>1</sub>. 1 – высокостабильный монолитный резонатор Фабри-Перо, 2 –



фотодетектор для регистрации биений  $M_2$  и  $M_3$ , 3 – радиочастотный умножитель, 4 – акустооптический модулятор.

## 2.6.2 Численное моделирование метода компенсации тепловых шумов

Эффективность данного метода сильно зависит от того, насколько хорошо окажутся согласованы между собой профили интенсивностей  $g(\vec{r})$  мод  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . Одна из возможных проблем состоит в том, что сигнал биений пробных мод между собой несёт не только информацию о тепловых шумах в области  $O_1$ , но и частично содержит шум из  $O_2$ . Таким образом, АОМ, предназначенный для компенсации флуктуаций частоты, вызванных тепловыми шумами в  $O_1$ , будет вносить и дополнительные шумы.

Предложенный метод был проанализирован при помощи численного моделирования, в котором рассмотрены тепловые шумы мод, изображённых на рисунке 2.6 с характерными профилями интенсивности, показанными на рисунке 2.8(а). Для этого в программе Wolfram Mathematica многократно генерировалась случайная поверхность  $u_x(\vec{r})$ , соответствующая броуновским тепловым колебаниям зеркала, а затем в соответствии с формулой (2.8) было выполнено вычисление интегральных смещений данной поверхности для профиля интенсивности каждой моды. Для простоты в расчёте рассмотрены только тепловые шумы одной отражающей поверхности в статическом случае.

Роль зеркала, возмущенного тепловыми шумами, выполняла фрактальная поверхность, сформированная в результате броуновского процесса. Метод создания таких поверхностей описан в [113]. Полученные в результате функции  $u_x(\vec{r})$  описываются при помощи двух параметров: лакуарности  $r_l$  и коэффициента Хёрста  $h$ . Последний параметр в большей степени отвечает за «зашумленность» поверхности (рисунок 2.9). Для моделирования теплового шума, являющегося  $1/f$ -шумом, наиболее подходят значения  $h$ , близкие к 1 [114]. Параметр лакуарности для всех подсчетов был выбран равным 0.5.

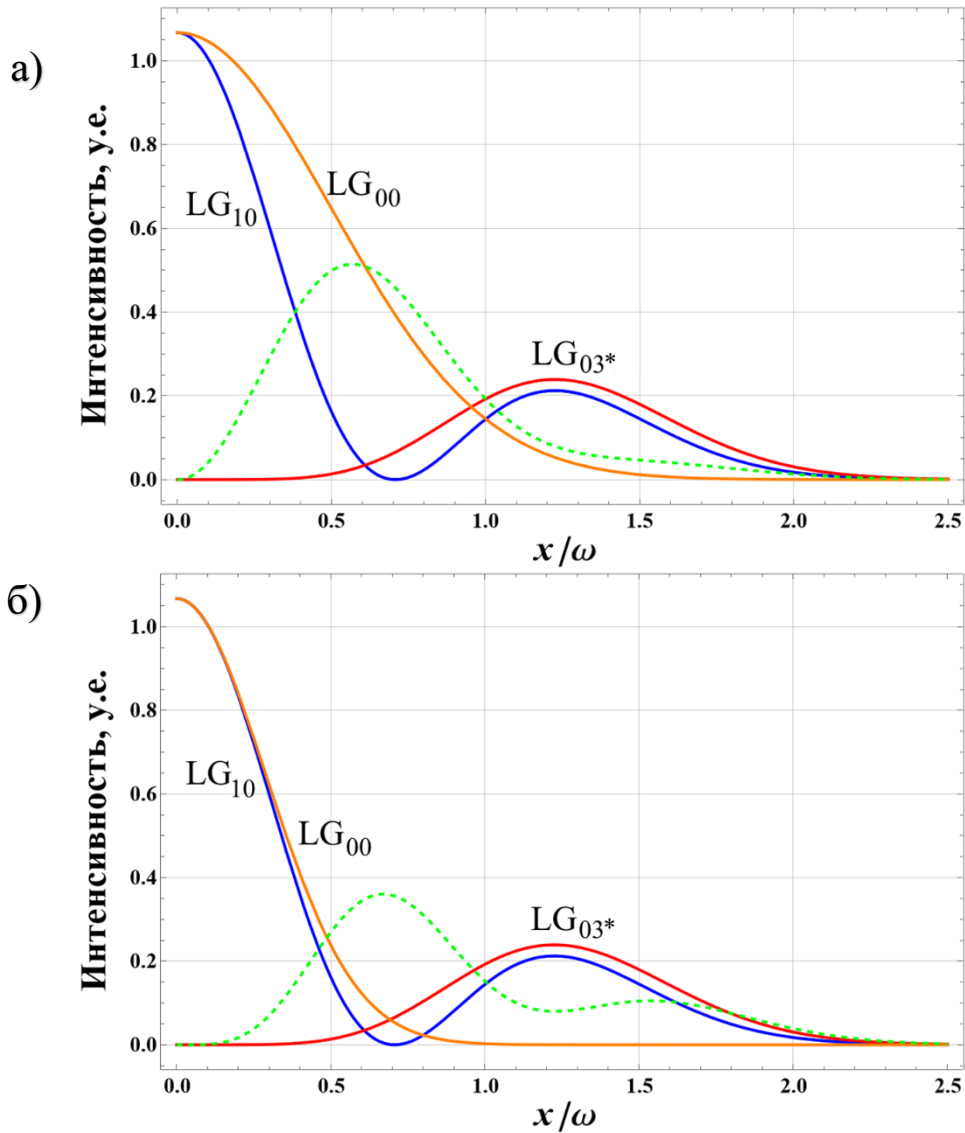


Рисунок 2.8 (а) - графики интенсивности мод, представленных на рисунке 2.6. Оранжевая кривая (основная мода  $M_1$ ,  $LG_{00}$ ) соответствует функции  $g_1(x/\omega)$ , красная (пробная мода  $M_2$ ,  $LG_{03*}$ ) -  $g_2(x/\omega)$ , синяя (пробная мода  $M_3$ ,  $LG_{10}$ ) -  $g_3(x/\omega)$ . Зеленая пунктирная линия соответствует комбинации  $[g_1(\vec{r}) - (g_3(\vec{r}) - g_2(\vec{r}))]$ .  $\omega$  - радиус пятна основной моды  $LG_{00}$  на зеркале по уровню интенсивности  $1/e^2$ ; (б) - аналогичный (а) график, но мода  $LG_{00}$  имеет в три раза меньшую длину волны чем  $LG_{10}$ ,  $LG_{03*}$ . Интенсивность моды  $LG_{00}$  на графике (оранжевая кривая) уменьшена в три раза для более наглядной демонстрации совпадения с профилем центрального пятна моды  $LG_{10}$ . Зеленая пунктирная линия соответствует комбинации  $[g_1(\vec{r}) - 3 * (g_3(\vec{r}) - g_2(\vec{r}))]$ .

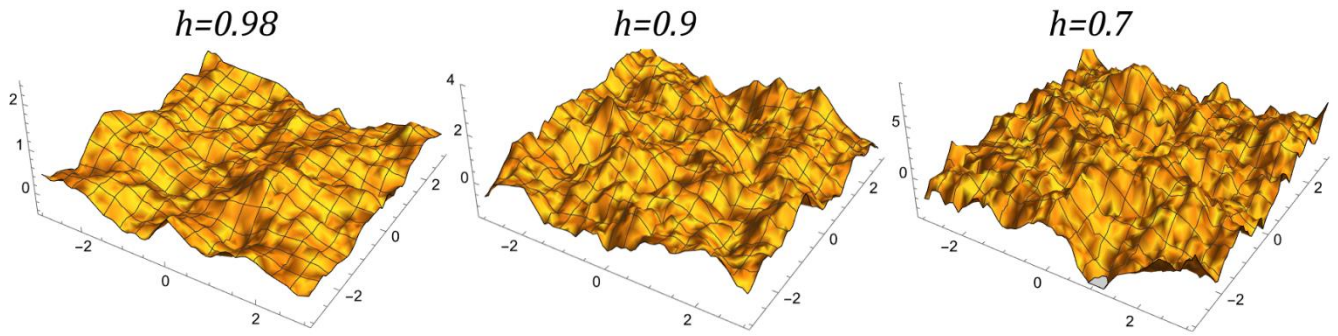


Рисунок 2.9 Случайные броуновские поверхности с различными значениями экспоненты Хёрста  $h$ , отвечающей за «зашумлённость» поверхности. Такие поверхности были использованы для моделирования отражающего покрытия зеркала резонатора, возмущённого тепловыми шумами.

В расчётах были использованы броуновские поверхности различной зашумлённости, со значениями коэффициента Хёрста в диапазоне 0.5 – 1 (таблица 2.5). Для каждого значения было сгенерировано 15 случайных поверхностей и выполнены вычисления  $X_i$  по формуле (2.8) для каждой из трёх мод  $i = 1, 2, 3$  (рисунок 2.10). Полученные значения  $X_i$  составили выборки из 15 членов, для которых были подсчитаны стандартные отклонения  $\sigma_{X_i}$ . Также были вычислены среднеквадратичные отклонения поверхности  $\sigma_{X_{132}}$  для комбинаций  $X_{132} = X_1 - (X_3 - X_2)$ , величины которых позволяют судить об эффективности предложенного метода определения тепловых шумов. Полученные данные представлены в таблице 2.5. В силу того, что характерные величины горбов и провалов использованных в расчёте броуновских поверхностей не связаны с физическими свойствами реальных зеркал, показательными являются не абсолютные значения вычисленных величин, а их отношения. Как можно заметить из последнего столбца таблицы 2.5, отношение  $\sigma_{X_{132}}/\sigma_{X_1}$  колеблется в окрестности 0.7 и не превышает 1 для различных  $h$ , что говорит об уменьшении шумов частоты основной моды при вычитании разности шумов пробных мод. Это уменьшение оказывается относительно небольшим из-за недостаточно хорошего согласования профилей мод (рисунок 2.8(a)).

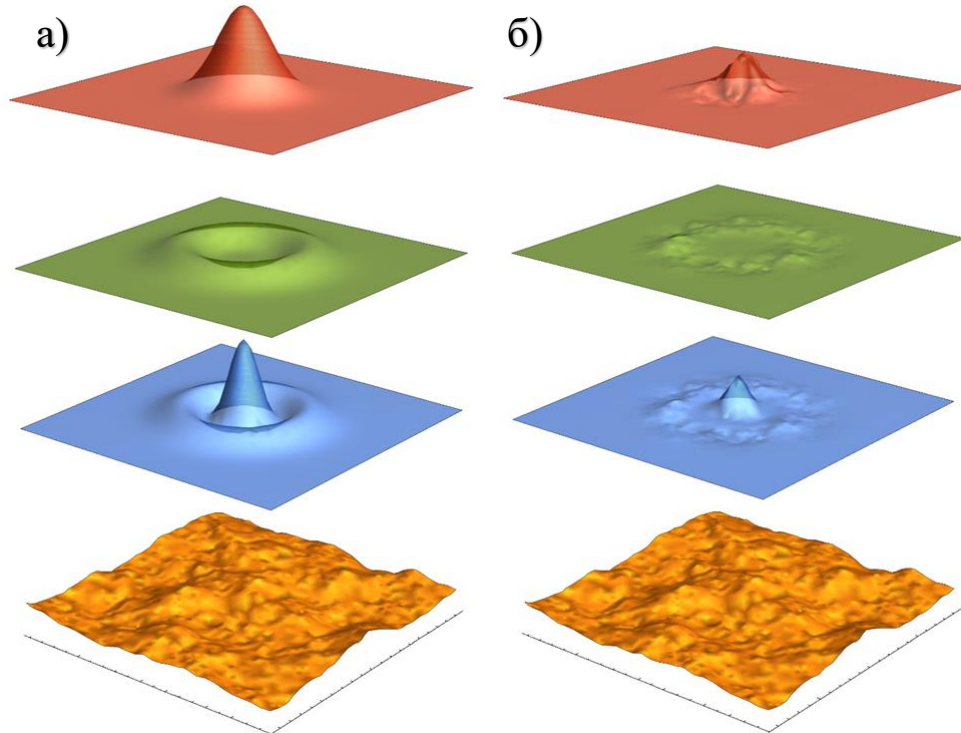


Рисунок 2.10 Иллюстрация тепловых шумов для трех мод. (а) (сверху вниз) – пространственные профили интенсивности мод  $LG_{00}$  ( $M_1$ ),  $LG_{03^*}$  ( $M_2$ ),  $LG_{10}$  ( $M_3$ ) и броуновская поверхность  $u_x(\vec{r})$  с  $h = 0.8$ . (б) – функции, полученные умножением соответствующих профилей интенсивности на  $u_x(\vec{r})$ .

h	$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x3}$	$\sigma_{x132}$	$\sigma_{x132}/\sigma_{x1}$
0.5	11.47	7.52	9.19	9.35	0.82
0.6	11.29	6.13	6.95	8.40	0.75
0.7	9.27	4.46	5.66	6.74	0.73
0.8	4.01	2.56	2.68	3.14	0.79
0.9	3.15	1.58	1.27	1.72	0.55
0.94	3.68	1.40	2.25	2.54	0.69
0.95	2.63	0.86	1.33	1.79	0.68
0.98	1.52	0.70	0.90	1.12	0.74

Таблица 2.5 Результаты моделирования для случая, когда все моды имеют одну и ту же длину волны.

Улучшить согласование профилей выбранных мод возможно путём подбора длины волны излучения  $\lambda$ , поскольку радиус гауссова пучка  $\omega$  пропорционален  $\sqrt{\lambda}$ . При уменьшении длины волны моды  $M_1$  в 3 раза возможно добиться достаточно точного совпадения её контура и контура центрального пятна моды  $M_3$ , как показано на рисунке 2.8(б). В этом случае сигнал биений пробных мод более точно описывает тепловые шумы центральной области зеркала, в которой сосредоточена интенсивность моды  $M_1$ . Результаты соответствующих расчетов представлены в таблице 2.6.

h	$\sigma_{X1}$	$\sigma_{X2}$	$\sigma_{X3}$	$\sigma_{X132}^*$	$\sigma_{X132}^*/\sigma_{X1}$
0.5	14.49	6.62	6.86	6.66	0.46
0.6	12.21	4.95	4.73	4.41	0.36
0.7	11.41	4.35	5.90	5.39	0.47
0.8	6.68	2.89	3.22	3.32	0.50
0.9	5.59	1.04	2.01	1.64	0.29
0.94	2.99	1.04	1.36	1.19	0.40
0.96	2.54	0.98	1.26	1.16	0.46
0.98	1.49	1.11	0.94	0.99	0.66

Таблица 2.6 Результаты подсчёта для случая, когда моды  $M_1$  и  $M_2$  имеют одинаковую длину волны, а мода  $M_3$  - в три раза меньшую.

Вычисления  $\sigma_{X132}^*$  производились для величины  $X_{312}^* = X_1 - 3 * (X_3 - X_2)$ , которая учитывает отношение интенсивностей мод  $M_3$  и  $M_1$  в центре зеркала, равное 3. В эксперименте трёхкратное увеличение частоты сигнала биений  $M_3$  и  $M_2$  можно обеспечить при помощи умножителя частоты. Полученные значения  $\sigma_{X132}^*/\sigma_{X1}$ , находящиеся в окрестности 0.5, свидетельствуют о том, что улучшение геометрического согласования приводит к более эффективной компенсации шума.

Аналогичные вычисления были проведены с другим видом случайных поверхностей: с Б-сплайнами, построенными на матрице точек со случайной координатой. Полученные результаты свидетельствуют о том, что метод работает с приблизительно такой же эффективностью, как и в случае броуновских поверхностей.

### Итоги моделирования

Численное моделирование показало, что для трёх выбранных мод предложенный метод частичной компенсации тепловых шумов позволяет уменьшить шумы основной моды приблизительно на 30% при работе на близких по значению длинах волн. Если основная мода будет иметь в три раза меньшую длину волны, то за счёт лучшего совпадения профилей интенсивности удаётся компенсировать около 50% тепловых шумов. Следует отметить, что характерные значения стандартного отклонения  $\sigma_{X132}$  смещения поверхности зеркала для основной моды даже после вычитания части тепловых шумов оказываются большими, чем значения  $\sigma_X$ , соответствующие пробным модам  $LG_{10}$  и  $LG_{03}^*$  (таблицы 2.5, 2.6). Тем не менее, предложенный метод может быть использован для повышения стабильности основной  $TEM_{00}$  моды, на которой работают большинство гравитационно-волновых детекторов и ультрастабильных лазеров.  $TEM_{00}$  гораздо проще возбуждать, она имеет лучшее согласование с лазерной модой и соответственно, большую мощность. Три моды, для которых был выполнен анализ, выбраны для иллюстрации метода и, скорее всего, не являются оптимальной

комбинацией. Более оптимальный выбор мод, имеющих лучшее согласование профилей интенсивности, позволит еще качественнее компенсировать шумы в основной моде.

## 2.7 Основные результаты главы 2

1. Предложен метод частичной компенсации тепловых шумов частоты излучения лазера, стабилизированного по основной моде резонатора Фабри-Перо  $LG_{00}$  и проведены соответствующие расчеты. Метод основан на том, что тепловой шум каждой отдельной моды определяется шумами в той области поверхности зеркала, на которой сосредоточена её интенсивность. Для оценки флуктуаций частоты основной моды используется сигнал биений оптических полей лаггерр-гауссовой моды  $LG_{10}$  и лаггерр-гауссовой моды с орбитальным моментом  $LG_{03*}$  того же резонатора. Моделирование показало возможность компенсации от 30 до 50 % тепловых шумов.

2. Показано что предел тепловых шумов монолитного резонатора уменьшается при использовании кристаллического материала вместо аморфного за счёт увеличения добротности механических резонансов. Основной вклад (более 90 %) дают шумы покрытий и подложек зеркал. Зависимость предела тепловых шумов от длины резонатора  $L$  находится в диапазоне  $L^{-9/8} - L^{-10/8}$ .

3. Предложен ранее не использовавшийся материал для тела и подложек зеркал резонатора – кристаллический арсенид галлия и проведён расчет тепловых шумов частоты такого резонатора. Использование арсенида галлия позволяет существенно упростить технологию создания кристаллических многослойных зеркал за счет использования одного и того же материала подложки и отражающего покрытия. Предел тепловых шумов такого резонатора в 4.5 раза ниже, чем у резонатора из ULE-стекла с кристаллическими зеркалами на кварцевых подложках.

Основные результаты главы опубликованы в статьях:

- Н. О. Жаднов, К. С. Кудеяров, Д. С. Крючков, И. А. Семериков, К. Ю. Хабарова, Н. Н. Колачевский, “О пределе теплового шума высокостабильных оптических резонаторов”, Квантовая электроника, т. 48, № 5, стр. 425–430 (2018).

- Н. О. Жаднов, Н. Н. Колачевский, “Частичная компенсация тепловых шумов в основной моде оптического резонатора”, Краткие сообщения по физике ФИАН, т. 8, стр. 27–37 (2021).

## Глава 3. Часовые лазерные системы для стронциевых оптических часов на основе длинных ULE-резонаторов

Сличение стронциевых оптических часов в Национальном Институте Стандартов и Технологий (NIST) в США на сегодняшний день продемонстрировало рекордную относительную нестабильность частоты  $4.8 \cdot 10^{-17} / \sqrt{\tau}$  [4], где  $\tau$  - время усреднения. В большой степени это стало возможным благодаря повышению стабильности часового лазера.  $1S^0 - 3P^0$  переход в атоме стронция рассматривается как один из основных кандидатов для формулировки нового определения секунды системы СИ [6]. По этой причине ведутся активные разработки стронциевых оптических часов в ведущих лабораториях мира, в том числе в России.

Разработку оптического репера частоты на холодных атомах  $^{87}\text{Sr}$  в России ведёт национальный метрологический институт ВНИИФТРИ. В 2016 году в данном институте был успешно завершён проект по созданию репера частоты на холодных атомах стронция с относительной нестабильностью частоты  $10^{-16}$ , в которых стабилизация часового лазера осуществлялась по опорным ULE-резонаторам длиной 78 мм [25]. Данная глава посвящена созданию и исследованию характеристик двух часовых ультрастабильных лазерных систем на длине волны 698 нм, предназначенных для нового поколения стронциевого репера частоты с относительной нестабильностью  $10^{-17}$ . Вопросы построения стронциевых оптических часов в эту диссертацию не входят. Часовые лазерные системы основаны на опорных резонаторах из ULE-стекла с вертикальной и горизонтальной ориентациями оптических осей. Отличительной особенностью данных резонаторов является большая длина (48 см) и, следовательно, на порядок сниженный уровень тепловых шумов ( $\sigma_{\text{Тш}} \approx 1.1 \cdot 10^{-16}$ ), в сравнении с предыдущим поколением. Лазерные системы были созданы и исследованы в лаборатории оптики сложных квантовых систем ФИАН им. П. Н. Лебедева, а затем транспортированы на расстояние 60 км во ВНИИФТРИ, где были использованы для построения оптических часов, на сегодняшний день встроенных в систему российского первичного эталона единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ-1.

### 3.1 Устройство ULE-резонаторов и их систем подвеса

Создание пары лазерных систем необходимо для их дальнейшей настройки и определения стабильности частоты путём сличения. По этой же причине было запланировано создание пары оптических часов на атомах стронция-87, использующих разработанные ультрастабильные лазеры. В данной работе рассмотрены две различные конфигурации опорного резонатора (с вертикальной и горизонтальной ориентацией оптических осей). Горизонтальная конфигурация длинного резонатора со специально подобранными положениями точек подвеса уже была

реализована несколькими группами по всему миру [24,82] и доказала удачность конструкции. К её недостаткам можно отнести определенные сложности изготовления: обработка и сверление ULE, громоздкая система опор, прямоугольная вакуумная камера. С другой стороны, наша группа имеет положительный опыт работы с вертикальными резонаторами с подвесом в плоскости центра масс [42,115], которые значительно более удобны в производстве и демонстрируют схожие показатели чувствительности к вертикальным ускорениям. По технологическим причинам (сверление) и исходя из стоимости материалов было решено собрать вертикальный резонатор из трех отдельно изготовленных деталей.

ULE-резонаторы и системы их подвеса изображены на рисунке 3.1. При создании вертикального резонатора было использовано тело биконической формы, расположенное на трёх опорах, находящихся в плоскости центра масс – принцип, хорошо зарекомендовавший себя ранее в работах с более короткими резонаторами. В случае вертикального резонатора оптимизация системы подвеса не потребовалась. Для резонаторов большой длины ( $\approx 48$  см) выбор вертикальной ориентации оптической оси является нестандартным из-за повышенной чувствительности такой системы к горизонтальным вибрациям. Максимальная длина опорного резонатора с вертикальной осью, известная из литературы ранее, составляла 21 см [33]. Вертикальный резонатор состоит из трех частей: центральной цилиндрической длиной 169.5 мм и пары концевых, имеющих форму усеченных конусов длинами 155 мм. Все части соединены между собой оптическим контактом.

Стоит отметить, что в процессе изготовления технически сложной задачей оказалось создание двух идентичных по форме и массе конических деталей из ULE, что важно для минимизации вибрационной чувствительности. Отдельную трудность представляет полировка поверхностей большой площади для создания оптического контакта.

Горизонтальный резонатор установлен на четыре опорные точки, положения которых подобраны специальным образом для обеспечения минимальной вибрационной чувствительности (см. следующий раздел). Тело горизонтального резонатора создано из цельного куска стекла ULE длиной 50 см. Самой сложной задачей при его обработке оказалось сверление сквозного отверстия диаметром 12 мм в 50-сантиметровом бруске стекла.



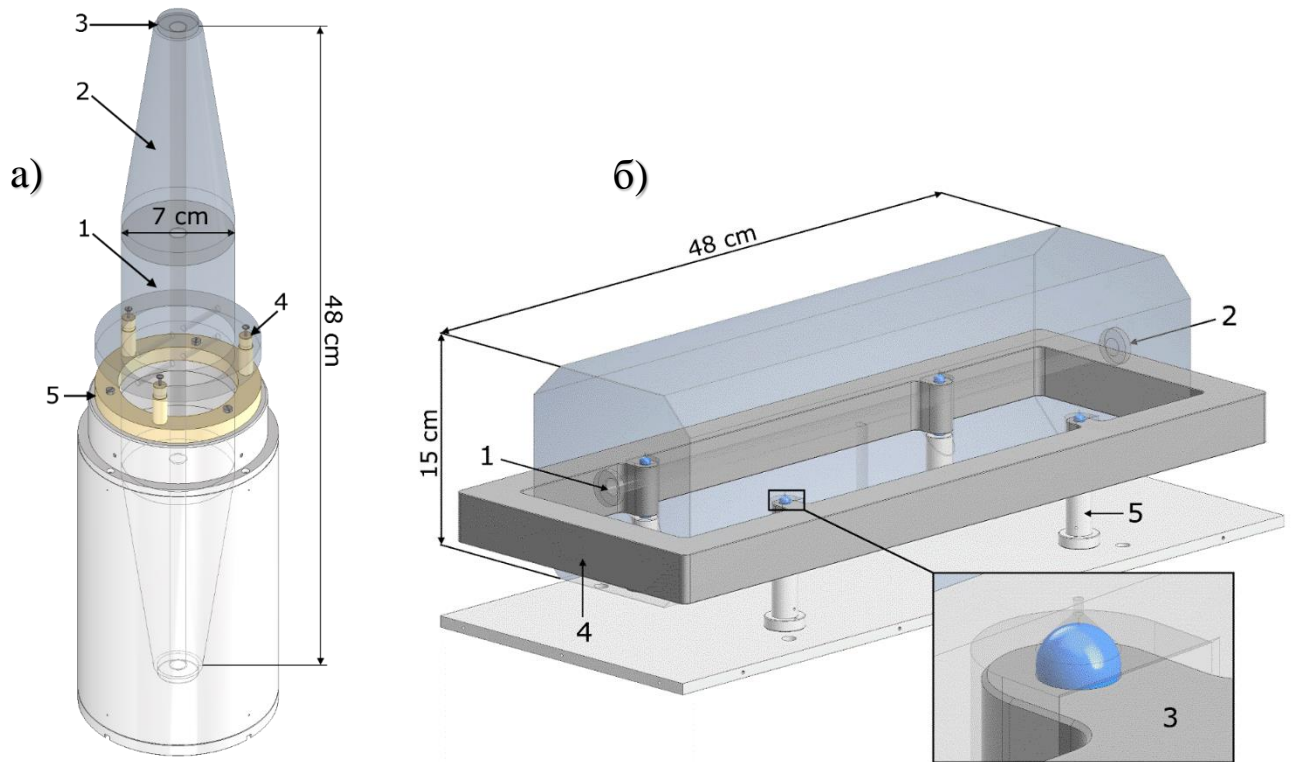


Рисунок 3.1 (а) Модель вертикального резонатора в системе подвеса за плоскость центра масс. 1 – центральная часть резонатора, 2 – краевая часть резонатора, 3 – верхнее зеркало, 4 – точка опоры в плоскости центра масс, 5 – система подвеса из РЕЕК. Составные части тела резонатора соединены оптическим контактом. (б) Модель горизонтального резонатора и его опоры. 1, 2 – зеркала, 3 – точка опоры с витоновым шариком, 4 – опорная рама из инвара, 5 – алюминиевая стойка.

Сверление было выполнено в лаборатории ФИАН им. П. Н. Лебедева с использованием длинной алмазной коронки с двух сторон на глубину 25 см с каждой. Для этого был разработан аппарат, осуществляющий точную фиксацию направления движения коронки вдоль оси блока ULE-стекла (рисунок 3.2). Чтобы избежать повреждения стекла, сверление выполнялось медленно и в сумме длилось около 30 часов. Важным приемом при сверлении глубоких и ровных отверстий в ULE-стекле оказалось использование дрели в ударном режиме. В противном случае сверление останавливается на глубине около 1 см. Другим важным решением является подача воды напрямую через трубку алмазной коронки для вымывания продуктов сверления и охлаждения стекла. Несовпадение между двумя отверстиями в месте их смычки составило менее 0.1 мм.

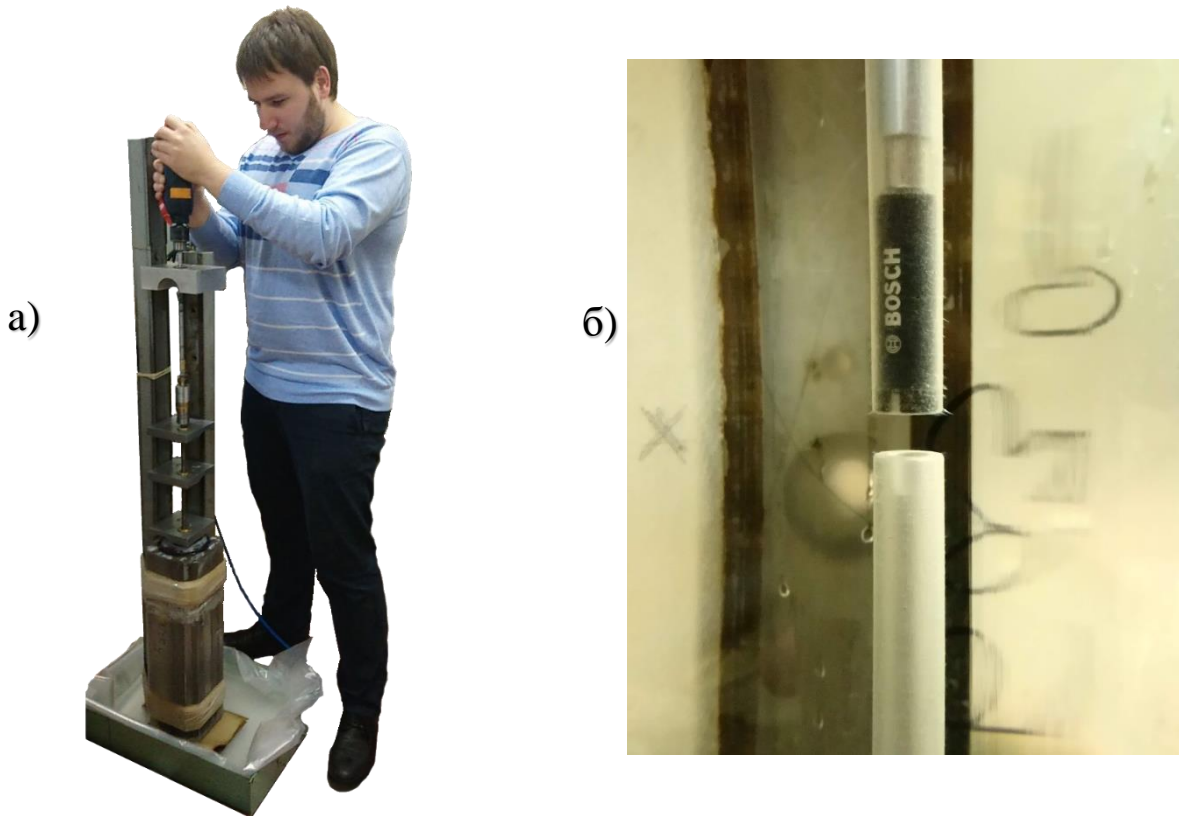


Рисунок 3.2 (а) Аппарат для сверления ULE-стекла, (б) – место смычки двух отверстий в блоке ULE-стекла.

Даже с учетом того, что длина резонатора в формуле  $\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{\delta L}{L}$  представляет собой эффективную длину, усреднённую по профилю моды на зеркалах, кажется поразительным, что для создания лазерных систем с герцовой и суб-герцовой шириной спектральной линии ( $\Delta\nu/\nu \approx 10^{-15}$ ) необходимо обеспечить стабильность длины на уровне лучше 1 фм. Неудивительно, что проектирование и создание таких систем является сложной технической задачей. Важнейшим источником нестабильности частоты моды резонатора являются окружающие вибрации. Влияние вибраций на стабильность длины опорного резонатора рассмотрено в разделе 1.4.4. Как выясняется, для резонаторов с вертикально и горизонтально ориентированными оптическими осями возможно подобрать такие положения точек опоры, что длина резонатора окажется нечувствительной к внешним вертикальным силам (вибрации в лаборатории в основном имеют вертикальное направление). Поиск таких конфигураций опор для заданной формы резонатора и выбранного устройства системы подвеса можно произвести путём моделирования его статической деформации при помощи метода конечных элементов. Подобранная таким образом система подвеса обеспечивает малую чувствительность к низкочастотным вибрациям, которые далеки от собственных механических резонансов системы и имеют наибольший вклад в рабочем диапазоне времён усреднения ультрастабильных лазерных систем (см. раздел 1.4.4).

### 3.1.1 Оптимальная система опор горизонтального ULE-резонатора

Внешние возмущающие силы приводят к изменению длины резонатора за счёт двух механизмов: смещений и наклонов зеркал. Одним из достоинств горизонтального расположения резонатора является его слабая восприимчивость к вертикальным возмущениям при расположении опор в так называемых точках Эйри. Существование такого расположения, при котором смещение и угол наклона зеркал под действием внешней вертикальной силы равны нулю, можно понять из следующих рассуждений. В случае, когда точки подвеса находятся близко друг к другу, края резонатора прогибаются вниз под действием силы тяжести, а поверхности зеркал разворачиваются вверх. Если же опоры расположены близко к краям, то прогибается центральная часть тела интерферометра, а зеркала разворачиваются вниз. Очевидно, что должно существовать промежуточное положение опор, при котором поверхности зеркал под действием вертикальной силы остаются параллельными друг другу. Аналогично, если выбрать в качестве опорной плоскости верхнюю грань резонатора, то его тело вытянется в перпендикулярном оптической оси направлении, и за счёт коэффициента Пуассона зеркала придвинутся друг к другу. При опоре на нижнюю грань они, наоборот, разъедутся. Таким образом, наименее восприимчивое к возмущениям положение всегда можно найти, оптимизируя глубину расположения опор  $d$  и расстояние от них до торца резонатора  $l$  (Рисунок 3.3). Из-за линейности закона Гука оптимальное расположение не зависит от величины силы, вызывающей упругую деформацию.

Смещение и поворот зеркал резонатора под действием постоянной силы тяжести моделировались методом конечно-элементного анализа в программной системе ANSYS (рисунок 3.5). В силу того, что тело резонатора имеет две плоскости симметрии, достаточно осуществить моделирование одной

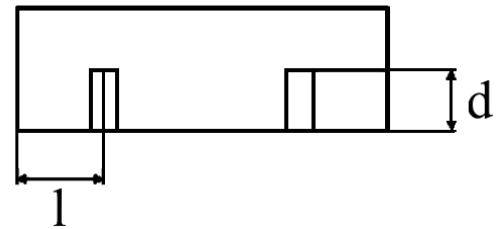


Рисунок 3.3 Оптимизируемые в ходе конечно-элементного моделирования параметры точек опоры резонатора: глубина расположения опор  $d$  и расстояние от них до торца резонатора  $l$ .

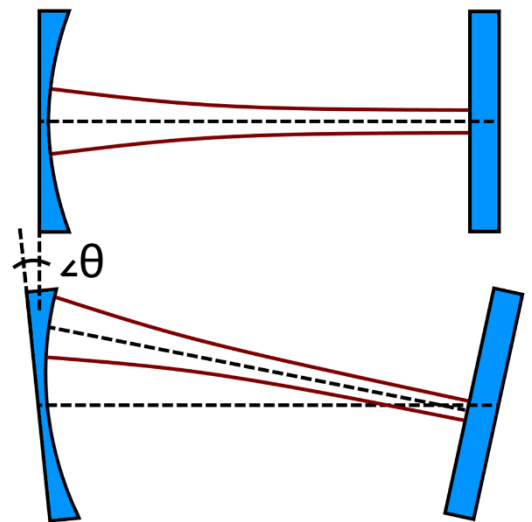


Рисунок 3.4 Влияние наклона зеркал на положение моды резонатора, сформированного плоским и вогнутым зеркалами. Угол наклона сильно преувеличен для явной иллюстрации эффекта.

четверти резонатора, установив симметричные граничные условия для областей, где проходят плоскости симметрии.

В первоначальном проекте было предложено устанавливать резонатор непосредственно на опорную раму из инвара. Величины смещения  $\Delta z$  и угла наклона  $\alpha$  зеркал (усреднённые по центральной области зеркала) были вычислены при различных расположениях опор  $d$  и  $l$ . Расчет оптимальных положений точек подвеса в таком случае изложен в работе [76]. В указанной работе показано, что на угол наклона зеркал наиболее сильно влияет величина  $l$ , а на смещение –  $d$ . Оптимальные координаты оказались равны:  $l' = 96.7$  мм,  $d' = 74.8$  мм.

В дальнейшем было решено устанавливать резонатор на шарики из фтористой резины (Viton) для того, чтобы уравнивать силы давления в точках опоры, неодинаковость которых может возникнуть из-за градиентов температуры и несовершенства механической обработки деталей. Кроме того, такой способ подвеса имеет лучшую изоляцию от акустических шумов и обеспечивает устойчивость резонатора при его транспортировке. Моделирование гиперупругих свойств резины было осуществлено с использованием модели Муни-Ривлина, встроенной в ANSYS. Размер "лунки" для шарика (рисунок 3.1(б)), диаметром 9 мм был выбран таким образом, чтобы в результате его неупругой деформации тело шарика не проникало в щель между резонатором и опорной рамой. Для вакуумирования полостей, образованных между шариком и лунками просверлены специальные каналы, соединяющие лунки и объём вакуумной камеры.

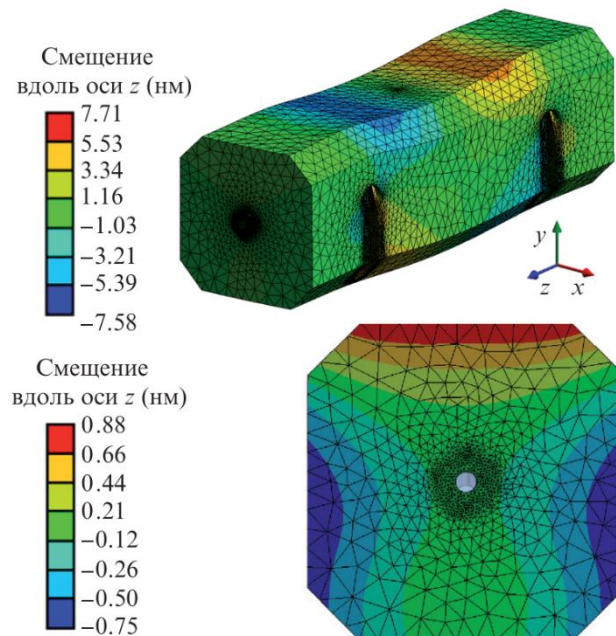


Рисунок 3.5 Модель горизонтального ULE-резонатора, деформированная силой тяжести при расположении опор в точках Эйри. На нижнем изображении, демонстрирующем смещение точек, расположенных на грани, видно, что центральная область (там где установлено зеркало) претерпевает минимальное смещение.

В расчетах использовалась пространственная сетка, состоящая из  $\sim 10^5$  тетраэдрических и призматических элементов. Контакт между резиновым шариком и поверхностями лунок в модели описан как контакт с коэффициентом трения, равным 2.

Предварительные поиски оптимального положения опор показали, что  $\Delta z$  и  $\alpha$  становятся равными нулю в области  $\{l_1, l_2\} \times \{d_1, d_2\} = \{97, 100\} \times \{58, 60\}$ , [мм]. В пределах указанной зоны было выбрано 12 точек, в каждой из которых произведено моделирование статической деформации резонатора из ULE-стекла и определены средние значения смещений и поворотов точек на поверхности зеркала. Полученные результаты продемонстрированы на рисунке 3.6. Зависимость угла наклона зеркала от  $d$  и  $l$  [мм] в заданной области аппроксимируется плоскостью:

$$\alpha(l, d) = 6.1887 \cdot l + 0.1237 \cdot d - 619.11. \quad (3.1)$$

Зависимость смещения можно приблизить поверхностью второго порядка:

$$\begin{aligned} \Delta z(l, d) = & 9.7433 \cdot l^2 - 7.4212 \cdot d^2 + 4.1935 \cdot l \cdot d \\ & - 2175.03 \cdot l + 432.83 \cdot d + 95625.5. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение системы уравнений  $\{\alpha(l, d) = 0, \Delta z(l, d) = 0\}$ , позволяет найти значения, при которых  $\Delta z$  и  $\alpha$  равны нулю вне зависимости от величины приложенной вертикальной силы. Существует два возможных решения, из которых было выбрано:  $l = 98.98$  мм,  $d = 59.90$  мм. Тело резонатора изготовлено в соответствии с указанными размерами. Как и в случае жесткой опоры резонатора на раму, наибольшее влияние на угол наклона зеркал имеет параметр  $l$ , а на смещение –  $d$ .

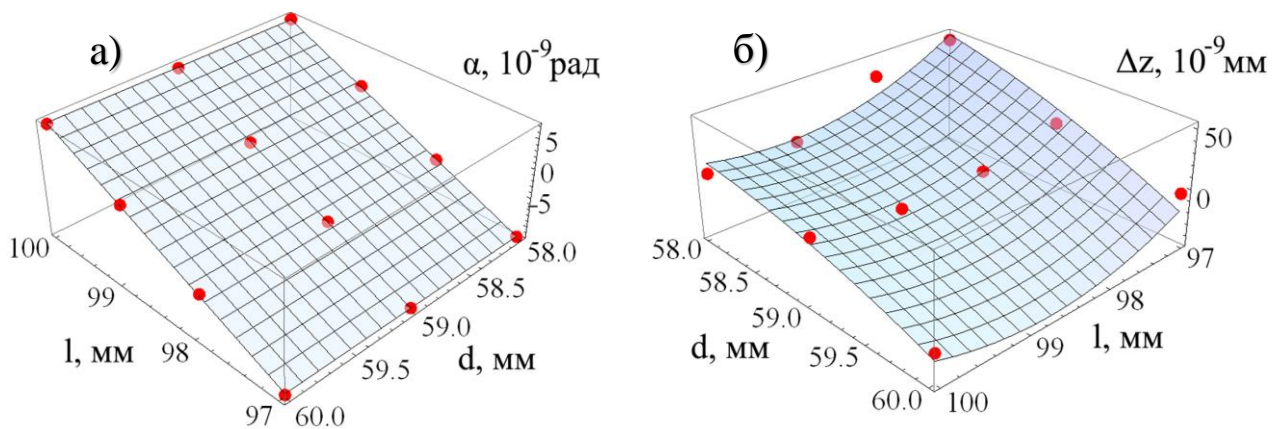


Рисунок 3.6 Результаты моделирования: зависимости угла наклона (а) и смещения (б) зеркал от параметров  $d$  и  $l$  под действием силы тяжести. Красные точки и голубые поверхности – результаты расчета и аппроксимации. Пересечения данных поверхностей с плоскостями  $\alpha=0$  и  $\Delta z=0$  позволяет определить положения точек Эйри.

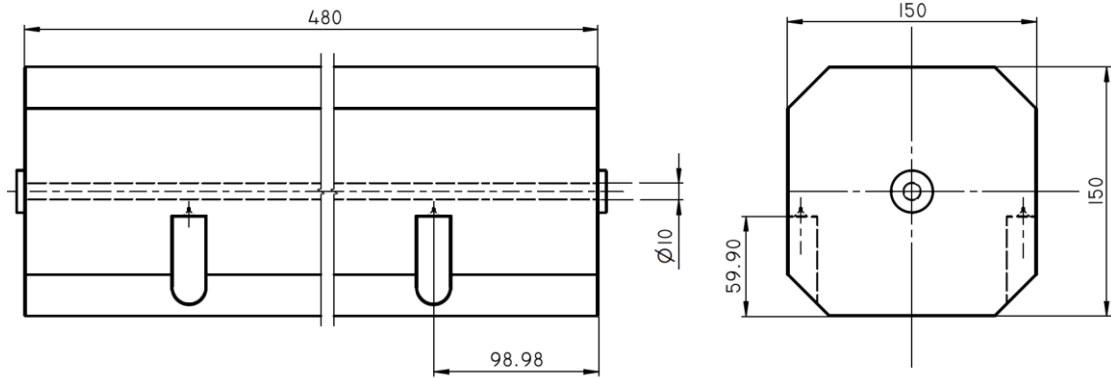


Рисунок 3.7 Чертёж тела горизонтального резонатора с положениями опор для системы подвеса на резиновых шариках.

### 3.1.2 Оптимальная форма вертикального резонатора

Вертикальный резонатор может иметь цилиндрическую или биконическую форму. Первый вариант значительно более прост в изготовлении, а второй должен обладать меньшей чувствительностью к вибрациям за счёт меньшей массы концевых частей. Моделирование деформаций указанных вариантов резонаторов показало, что вертикальные воздействия приводят к одинаковому относительному смещению зеркал. Горизонтальные силы в случае цилиндрической формы приводят к сдвигам и наклонам зеркал, в два раза большим, чем для биконического тела (рисунок 3.8). Так как вибрационная восприимчивость вертикального резонатора к горизонтальным вибрациям, соответствующая полученным смещениям, оказалась высока, принято решение остановиться на биконической форме.

#### *Вибрационная чувствительность резонаторов*

Согласно моделированию, вертикальный резонатор имеет наибольшую вибрационную чувствительность (формула 1.23) в горизонтальном направлении  $s_{x,y}^{vert} = 8.5$  кГц/гал (1 гал =  $1 \text{ см/с}^2$ ), а в вертикальном она составляет менее  $s_z^{vert} = 45$  Гц/гал. Здесь учтено, что частота излучения с длиной волны 698 нм составляет 426 ТГц. Для уменьшения вибрационной чувствительности вертикальных резонаторов в горизонтальном направлении в дальнейшем следует увеличивать их диаметр. Вибрационная чувствительность горизонтального резонатора во всех направлениях не превышает  $s_{x,y,z}^{hor} \leq 250$  Гц/гал. Для пересчёта угла наклона зеркал в нестабильность длины резонатора, было сделано предположение, что оптическая ось параллельна механической оси тела резонатора и отстоит от неё на 1 мм [43].

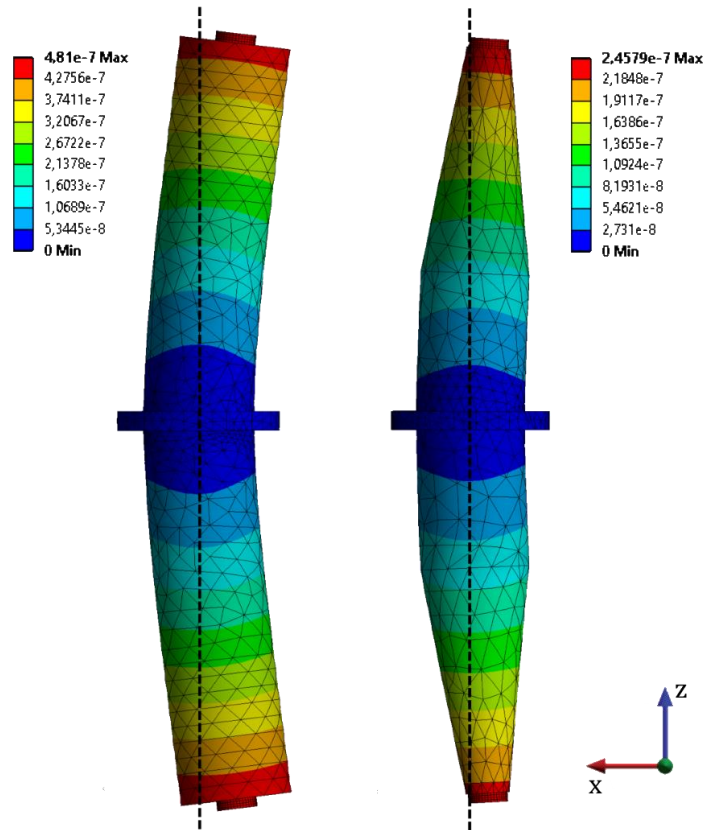


Рисунок 3.8 Деформации вертикального цилиндрического и биконического ULE-резонаторов под действием одинакового горизонтального ускорения, равного  $9.8 \text{ м/с}^2$ . Расчет показывает, что использование биконической формы понижает вибрационную восприимчивость в два раза.

## 3.2 Устройство системы стабилизации частоты 698 нм лазера

Ультростабильная лазерная система для оптических часов состоит из лазерного источника, монолитного высокочастотного резонатора Фабри-Перо в вакуумной камере и оптоэлектронной петли обратной связи, осуществляющей привязку частоты излучения к моде резонатора.

### 3.2.1 Свойства ULE-резонаторов

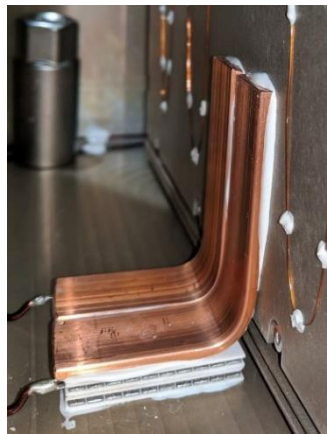
Тела резонаторов изготовлены из ULE-стекла класса Laser grade, для которого температура нулевой точки  $T_0$  должна быть заведомо выше комнатной. Зеркала представляют собой многослойные брэгговские структуры  $\text{SiO}_2/\text{Ta}_2\text{O}_5$  на подложке из кварца и закреплены на теле резонатора при помощи оптического контакта. Кварц имеет высокую механическую добротность и малый уровень тепловых шумов, его использование в качестве материала подложек вместо стекла ULE позволяет понизить предел теплового шума резонатора более чем в два раза. Каждый резонатор сформирован плоским и сферическим зеркалами. Радиус кривизны сферического зеркала составляет 500 мм. С учетом длины волны излучения лазера 698 нм радиус основной гауссовой моды излучения по уровню  $1/e^2$  составит 147 мкм на плоском зеркале и 737 мкм на

вогнутом. Расчётное значение предела тепловых шумов (формулы 2.11-2.18) составляет  $1.1 \cdot 10^{-16}$ . Зеркала произведены компанией SigmaKoki (Япония). Измерения методом ring-down (приложение Б.1) показали, что резкости вертикального и горизонтального резонаторов составляют 120000 и 80000, что соответствует ширинам резонансных линий 2.6 кГц и 3.9 кГц, соответственно. Пропускание мощности основной моды излучения резонатором составляет около 2% для каждой из систем. Принимая во внимание характеристики резонатора и предполагая полное согласование импедансов, коэффициент пропускания зеркал оказывается равным 5/4 ppm, а потери (на поглощение и рассеяние) составляют 34/22 ppm для вертикального/горизонтального резонаторов соответственно.

Чтобы уменьшить влияние флуктуаций температуры и обеспечить минимальное значение дрейфа частоты необходимо стабилизировать температуру опорного резонатора в точке нулевого теплового расширения ULE-стекла. Поскольку изначально точное значение  $T_0$  неизвестно (зависит от условий процесса изготовления), требуется провести ее поиск. На первом этапе температура каждого резонатора была стабилизирована в значении 21.0 °С при помощи нагревательного провода, установленного на внутренний тепловой экран. Затем температура вертикального резонатора была перестроена в точку 24.12 °С. В результате перестройки температуры было выяснено, что частота биений  $f_b = f_v - f_h$  между двумя лазерами уменьшилась на 7.43 МГц, из чего следует, что вертикальный резонатор с увеличением температуры увеличивался в длине, а значит имел положительный коэффициент теплового расширения. По положению этих двух точек и характерной зависимости коэффициента теплового расширения (КТР) ULE стекла  $\alpha_{ULE} \approx 1.6 \cdot 10^{-9} \cdot (T - T_0)$  возможно оценить температуру нулевого теплового расширения, которая составляет ориентировочно 19.5 °С. Полученное значение лежит ниже заявленной температуры нулевого расширения стекла ULE, из которого изготовлено тело резонатора. Причина этого заключается в различии коэффициентов теплового расширения стекла ULE и кварца, из которого изготовлены подложки зеркал, и которое создаёт температурно-зависимую деформацию зеркала резонатора [89]. В результате значение  $T_0$  для сборки резонатора смещается в область  $< 20$  °С. Для того, чтобы доказать наличие точки нулевого теплового расширения в области температур ниже комнатной, не открывая вакуумную камеру, была реализована система водяного охлаждения: внешняя стенка вакуумной камеры вертикального резонатора была обёрнута шлангом, по которому текла вода температурой  $\sim 12$  °С из системы водоснабжения. За трое суток внутреннюю часть вакуумной камеры удалось охладить до температуры 15 °С. В ходе охлаждения непрерывно фиксировалась частота сигнала биений и было обнаружено, что частота моды вертикального резонатора сначала растёт, а затем начинает уменьшаться. Такое поведение характерно для перехода температуры



через точку нулевого теплового расширения: из области с положительным КТР в область с отрицательным. Для обеспечения возможности стабилизации температуры в значениях ниже комнатной, внутрь каждой вакуумной камеры были установлены два элемента Пельтье, соединенные с одним из внутренних тепловых экранов медной шиной (рисунок 3.9). Проблема смещения нулевой точки сборки резонатора из материалов с разными зависимостями коэффициента теплового расширения в область низких, даже отрицательных по шкале Цельсия температур, может быть решена с использованием компенсационных колец из ULE-стекла [89]. В описываемых системах их применение оказалось затруднительно из-за конструктивных особенностей вакуумных камер.



*Рисунок 3.9 Двухкаскадные термоэлектрические элементы Пельтье охлаждают внутренние части вакуумных камер. Отвод тепла производится при помощи медных шин. Тепловой контакт обеспечивается вакуумным клеем TorrSeal.*

Описанным выше методом в несколько итераций были определены точки  $T_0$  для обоих резонаторов. Температуры вертикального и горизонтального резонаторов были стабилизированы соответственно в значениях  $17.20\text{ }^{\circ}\text{C}$  и  $15.10\text{ }^{\circ}\text{C}$ . В силу того, что резонаторы имеют большую теплоёмкость, установление температуры происходит с постоянной времени 12 часов на горизонтальной системе и 8 часов на вертикальной.

### **3.2.2 Вакуумные камеры**

Вакуумные камеры горизонтального и вертикального резонаторов (рисунок 3.10) изготовлены из дюралюминия и содержат четыре внутренних тепловых экрана. Наружные стенки толщиной 2 см обеспечивают большую теплоёмкость камеры и делают ее малочувствительной к колебаниям температуры в лаборатории. Большая масса камер также снижает чувствительность к низкочастотным колебаниям. Внутренние и внешние детали камер были хромированы для защиты поверхности. Все оптические окна для ввода и вывода лазерного излучения просветлены и установлены под наклоном  $4^{\circ}$  к оптической оси для

подавления нежелательных интерференционных эффектов. Роль вакуумных уплотнений выполняет проволока из индия [38].

Камеры были вакуумированы при помощи турбомолекулярного насоса, затем был произведён их отжиг при температуре 100 °С для удаления остаточных веществ с внутренних поверхностей. В дальнейшем вакуум поддерживался ионно-геттерным насосом *NexTorr D 100-5* с расходом откачки около 100 л/с. Рабочее давление составляет  $1.4 \cdot 10^{-8}$  и  $3.4 \cdot 10^{-8}$  мбар при комнатной температуре в вертикальной и горизонтальной камерах соответственно. Полученный уровень вакуума достаточен для того, чтобы влияние флуктуаций показателя преломления остаточного газа на стабильность частоты моды было пренебрежимо мало.

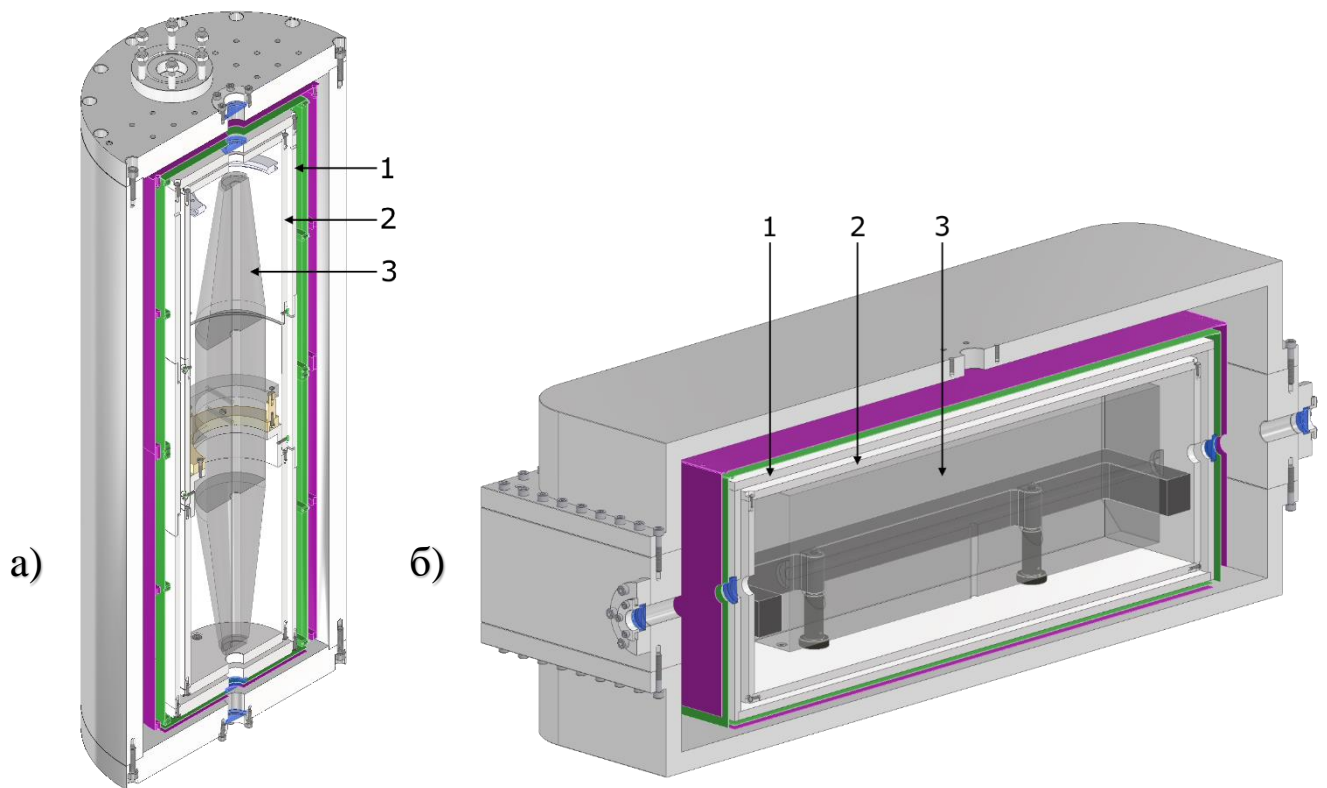
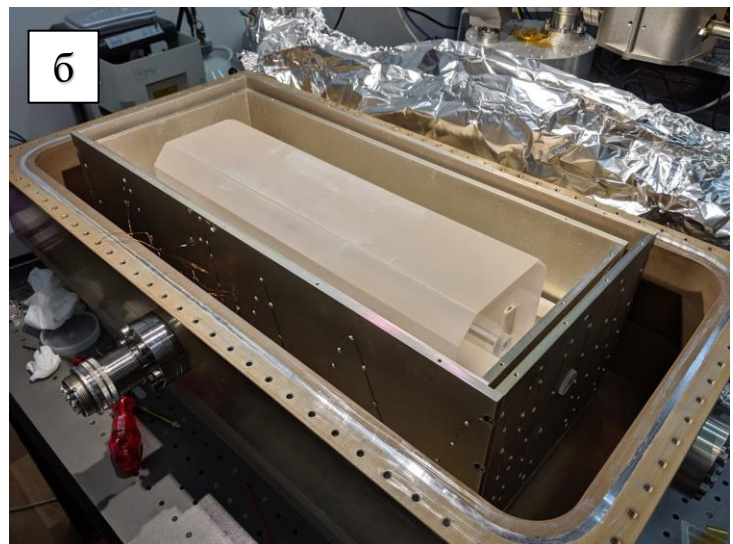


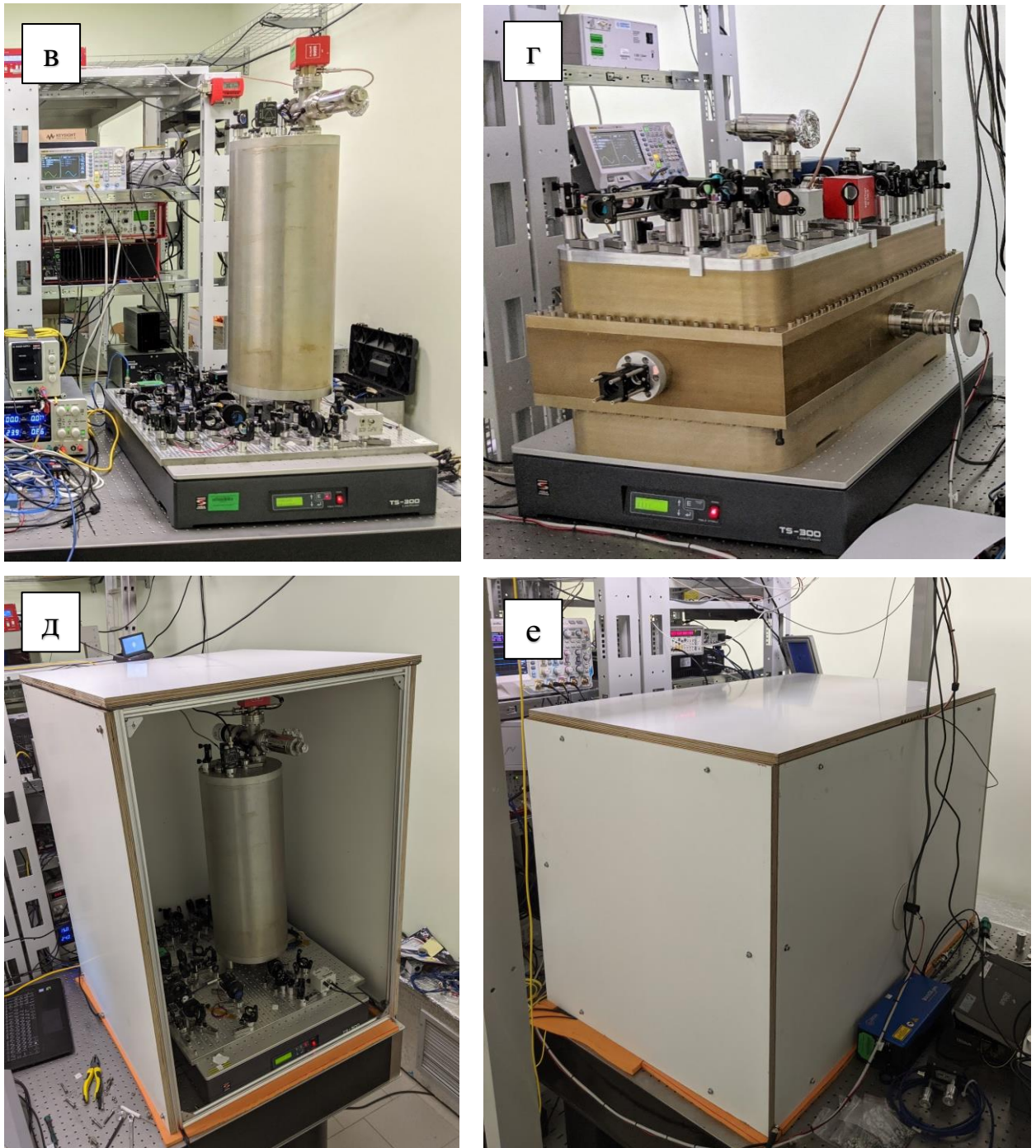
Рисунок 3.10 Модели вакуумных камер вертикального (а) и горизонтального (б) резонаторов. 1 – тепловой экран со стабилизацией температуры, 2 – тепловой экран – фильтр, 3 – резонатор. Внешние тепловые экраны, изготовленные из тонких листов дюралюминия выделены зелёным и фиолетовым цветами.

Температурная стабилизация резонатора осуществляется путём контроля температуры теплового экрана 1 при помощи пары элементов Пельтье (ТЕС). При стабилизации температуры резонаторов в нулевых точках ТЕС потребляют приблизительно 5 Вт мощности в условиях температуры в помещении 21 °С. Передача тепла от теплозащитного экрана 1 к стенке камеры обеспечивается медными шинами, установленными при помощи вакуумного клея TorrSeal (Рисунок 3.9). Температура экрана 1 измеряется датчиком температуры AD590 и регулируется

ПИ-регулятором (пропорционально-интегральным) с точностью и стабильностью 10 мК (судя по показаниям регулятора). Хотя ТЕС производят отвод тепла локально с торцевых частей теплового экрана, мы не ожидаем высоких температурных градиентов на теле резонатора, вызванных несимметричным охлаждением, поскольку нулевые температуры КТР не слишком далеки от комнатной, а дополнительный тепловой экран 2 работает как температурный фильтр нижних частот.

Вакуумная камера с вертикальным резонатором размещается на оптической плите с лазером и всей оптической схемой (Рисунок 3.11 (в)). Оптическая плита горизонтальной системы размещается на верхней грани ее вакуумной камеры (Рисунок 3.11 (г)). Механическую устойчивость камер обеспечивают системы активной виброизоляции TS-300 (Table Stable Ltd., Швейцария), которые эффективны в диапазоне вибраций от 1 Гц до 300 Гц и на частотах  $> 10$  Гц имеют коэффициент передачи  $-40$  дБ.





*Рисунок 3.11 (а), (б) – вакуумные камеры с вертикальным и горизонтальным резонаторами на этапе сборки; вертикальная (в) и горизонтальная (г) вакуумные камеры и их оптические системы привязки частот лазеров в лаборатории; (д), (е) – коробка для акустической изоляции резонаторов.*

### **3.2.3 Системы стабилизации частоты излучения лазеров**

Для привязки частоты лазера к моде резонатора используется метод Паунда-Драйвера-Холла [3] (рисунок Б.7). Подробное изложения принципа стабилизации частоты и практические особенности привязки диодных лазеров изложены в пунктах Б.3-Б.5 приложения.

Оптоэлектронные петли обратной связи обеих систем не имеют принципиальных различий. В качестве лазерного источника используется диодный лазер с внешним резонатором Toptica DL pro. Характерное значение ширины спектральной линии такого лазера составляет 100 кГц. Контроль частоты в данном лазере может быть осуществлён путем изменения тока накачки, температуры диода и напряжения на пьезоэлементе, который поворачивает дифракционную решётку. В нашем случае сервосигнал подаётся на электронную цепь, создающую сигнал “feed-forward”, который осуществляет одновременную подстройку тока лазерного диода и напряжения на пьезоэлементе. Данный метод позволяет поддерживать диодный лазер в широком диапазоне частот без скачков моды (mode-hops).

Излучение лазера проходит через акустооптический модулятор (АОМ), который используется для стабилизации оптической мощности и предотвращает возникновение паразитных эталонов, разделяя оптический путь от лазера к резонатору на два участка с разной оптической частотой. Фазовая модуляция на двух различных частотах, находящихся вблизи 20 МГц, обеспечивается электрооптическим модулятором на основе двулучепреломляющего кристалла ниобата лития. Задняя грань кристалла имеет наклон к оси падения пучка, что приводит к пространственному разделению обыкновенного и необыкновенного лучей. Это существенно подавляет остаточную амплитудную модуляцию (RAM) лазерного излучения, которая может повлиять на стабильность частоты. Типичная мощность излучения, направляемого в резонатор, составляет 20 мкВт, при этом пропускание резонатора составляет 2% от этой мощности, что говорит о высоком поглощении зеркал. Отраженный резонатором свет регистрируется кремниевым лавинным фотоприемником. Сервосигнал формируется быстрым аналоговым ПИД<sup>4</sup>-регулятором Toptica FALC и подается на регулятор тока, который является единственным каналом, достаточно быстрым для подавления высокочастотного фазового шума диодного лазера и сужения его спектральной ширины линии. Ширина петли обратной связи составляет 800 кГц для вертикальной системы (рисунок Б.10) и 540 кГц для горизонтальной системы.

### **3.3 Стабильность и дрейф частоты лазерных систем с ULE-резонаторами**

Данный раздел посвящён исследованию стабильности частоты лазеров с ULE-резонаторами и определению влияния различных источников шума. Исследования проводились путем измерения сигнала биений двух лазеров, постоянно привязанных к модам ULE-резонаторов (см. приложение, Б.6). Полученный радиочастотный сигнал биений направлялся на

---

<sup>4</sup> Пропорционально-интегрально-дифференциальный

счётчик частоты К+К (Messtechnik GmbH, Германия). Во время измерений лазерные системы размещались на разных оптических столах на расстоянии 5 м друг от друга. Приёмник излучения для регистрации биений был расположен на оптической плите вертикального резонатора. Стабилизированное излучение с горизонтальной системы передавалось к вертикальной по оптоволоконной линии с компенсацией наведенного оптоволоконном фазового шума [120].

### 3.3.1 Относительный дрейф частоты

Одной из важных характеристик ультрастабильных лазерных систем является скорость дрейфа частоты моды опорного резонатора. Необходимо, чтобы дрейфы частоты лазеров, используемых в стандартах частоты, были как можно более медленными и постоянными во времени, поскольку ими определяется стабильность опроса часового перехода.

Измерения относительного дрейфа частоты лазерных систем производились после того, как температура резонаторов установилась с точностью не хуже  $0.01\text{ }^{\circ}\text{C}$  (предельная точность показаний датчиков температуры) в значениях, соответствующих нулевому тепловому расширению. Скорость относительного дрейфа после установления температуры составила  $-216\text{ мГц/с}$ , что соответствует относительной скорости дрейфа частоты менее  $5 \cdot 10^{-16}/\text{с}$  [117] (рисунок 3.12).

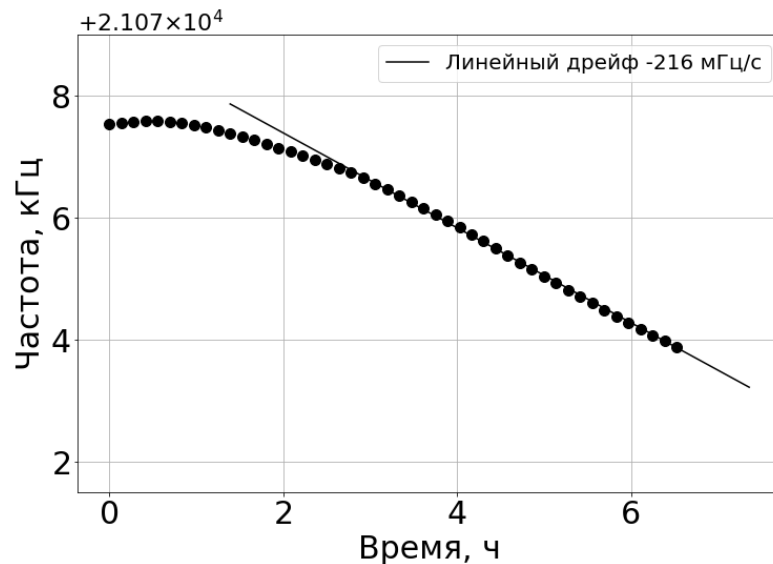


Рисунок 3.12 Дрейф частоты сигнала биений лазерных систем после стабилизации температуры в точках нулевого теплового расширения  $T_0$ . Аппроксимация линейной функцией произведена для части графика, соответствующей стабильным температурам резонаторов (для времён  $> 3$  часов).

Использованным в работе методом можно исследовать только относительный дрейф частот мод резонаторов, что не дает возможности получить точное представление о скорости дрейфа

частоты каждой системы. Характерный и довольно медленный дрейф 216 мГц/с может в некоторых случаях означать и то, что обе системы дрейфуют с большими, но близкими по значению скоростями в одну и ту же сторону. Нестабильности, связанные с процессами в петле привязки частоты или в системе сличения лазерных частот, не могут вызвать смещение, превосходящее ширину линии резонатора, поэтому причины дрейфа связаны с изменением частот мод самих резонаторов. Абсолютный дрейф частоты резонатора обычно связан с процессом дегазации ULE-стекла. Резонатор длиной 48 см, изготовленный из нового стекла в условиях вакуума, сжимается со скоростью  $\sim 7$  пм/час, что соответствует скорости дрейфа частоты 2 Гц/с. В результате старения резонатора дрейф, вызванный дегазацией стекла, замедляется [115].

Измеренный в ходе исследований относительный дрейф частот двух лазерных систем обладает практически линейной зависимостью от времени с наклоном 216 мГц/с. Полученные данные свидетельствуют о стабильности температур резонаторов и целостности оптических контактов. Порядок величины дрейфа соответствует лучшим системам, реализованным в мире, и позволяет реализовывать высокоточную спектроскопию часового перехода в стронции. Абсолютные значения дрейфа частоты будут измерены в дальнейшем в результате спектроскопии перехода  $1S^0 - 3P^0$  в атомах стронция. По полученным данным будет произведена компенсация линейного абсолютного дрейфа частоты.

### 3.3.2 Ширина линии и нестабильность частоты

Спектр плотности мощности биений двух лазерных систем представлен на рисунке 3.13(a). Сигнал биений был записан с помощью осциллографа четыре раза (с длительностью измерения 1 с), затем для каждого набора данных было сделано преобразование Фурье с окном Ханна (разрешение метода составило 1.5 Гц). Центр каждой полученной линии был смещён в начало координат, после чего данные (черные точки на рисунке 3.13(a)) были аппроксимированы функцией Лоренца. Значение FWHM наблюдаемой линии составляет 1.5 Гц, что значительно больше величины, соответствующей пределу тепловых шумов ( $\sim 100$  мГц).

Относительная нестабильность частоты систем была исследована путем регистрации их сигнала биений с помощью частотомера К+К (Messtechnik GmbH, Германия) без мертвого времени в  $\Delta$ -режиме (типичная частотная дорожка показана на рисунке 3.14). График модифицированной девиации Аллана относительных флуктуаций частоты биений и соответствующая спектральная плотность мощности фазового шума (PSD) показаны на рисунке 3.15. Нестабильность частоты усредняется за короткие промежутки времени, на временах 50 мс — 5 с девиация Аллана достигает минимального значения  $1.5 - 2 \cdot 10^{-15}$ .

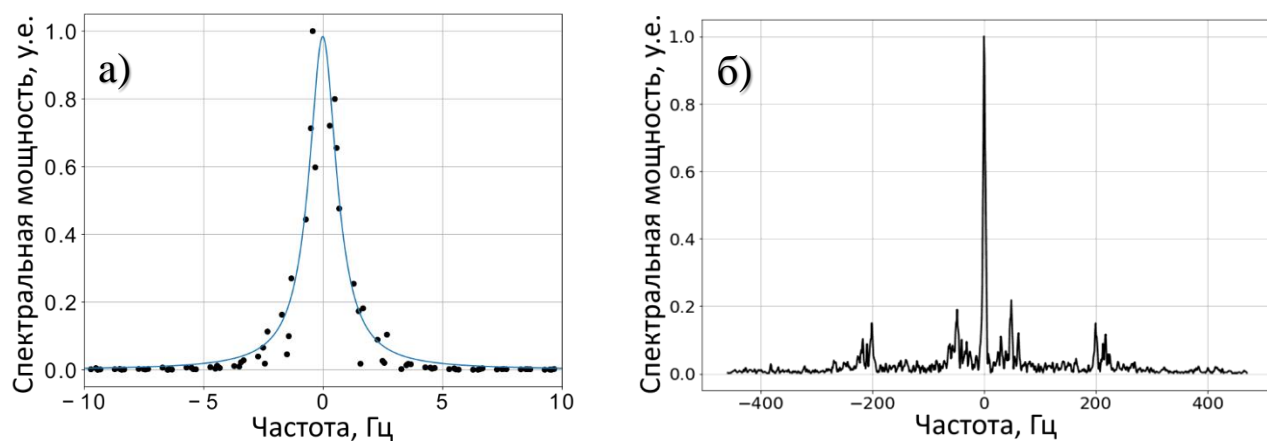


Рисунок 3.13 (а) Спектральная плотность мощности сигнала биений между лазерными системами со стабилизацией по вертикальному и горизонтальному резонаторам. Время измерения – 1 с. FWHM наблюдаемой линии составляет 1.5 Гц, что соответствует разрешению. (б) Спектральная плотность мощности сигнала биений между лазерными системами со стабилизацией по вертикальному и горизонтальному резонаторам. Сайдбэнды на частотах 50 и 200 Гц возникают из-за вибраций резонаторов.

На более долгих временах усреднения нестабильность частоты растёт, что указывает на наличие случайных уходов частоты. Стоит отметить, что индивидуальная нестабильность каждой лазерной системы окажется лучше приведенных значений нестабильности частоты биений в  $\sqrt{2}$  раз в случае эквивалентности систем. Однако, может случиться так, что большая часть нестабильности вызвана одной из систем. Выявить это можно только с использованием дополнительного ультрастабильного лазера, осуществив сличение методом треуголки. Резкие пики PSD в диапазоне 20 – 100 Гц вероятнее всего относятся к акустическим шумам.

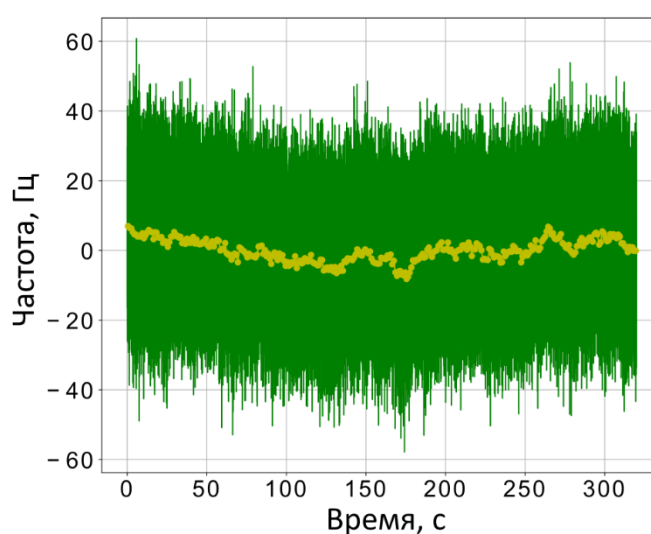


Рисунок 3.14 Флуктуации частоты сигнала биений между лазерными системами со стабилизацией по вертикальному и горизонтальному резонаторам (зеленый – данные со



счётчика частоты с временем измерения 0.005 с, желтый – данные, усредненные за время 1 с).  
График построен для данных, из которых вычтен линейный дрейф частоты.

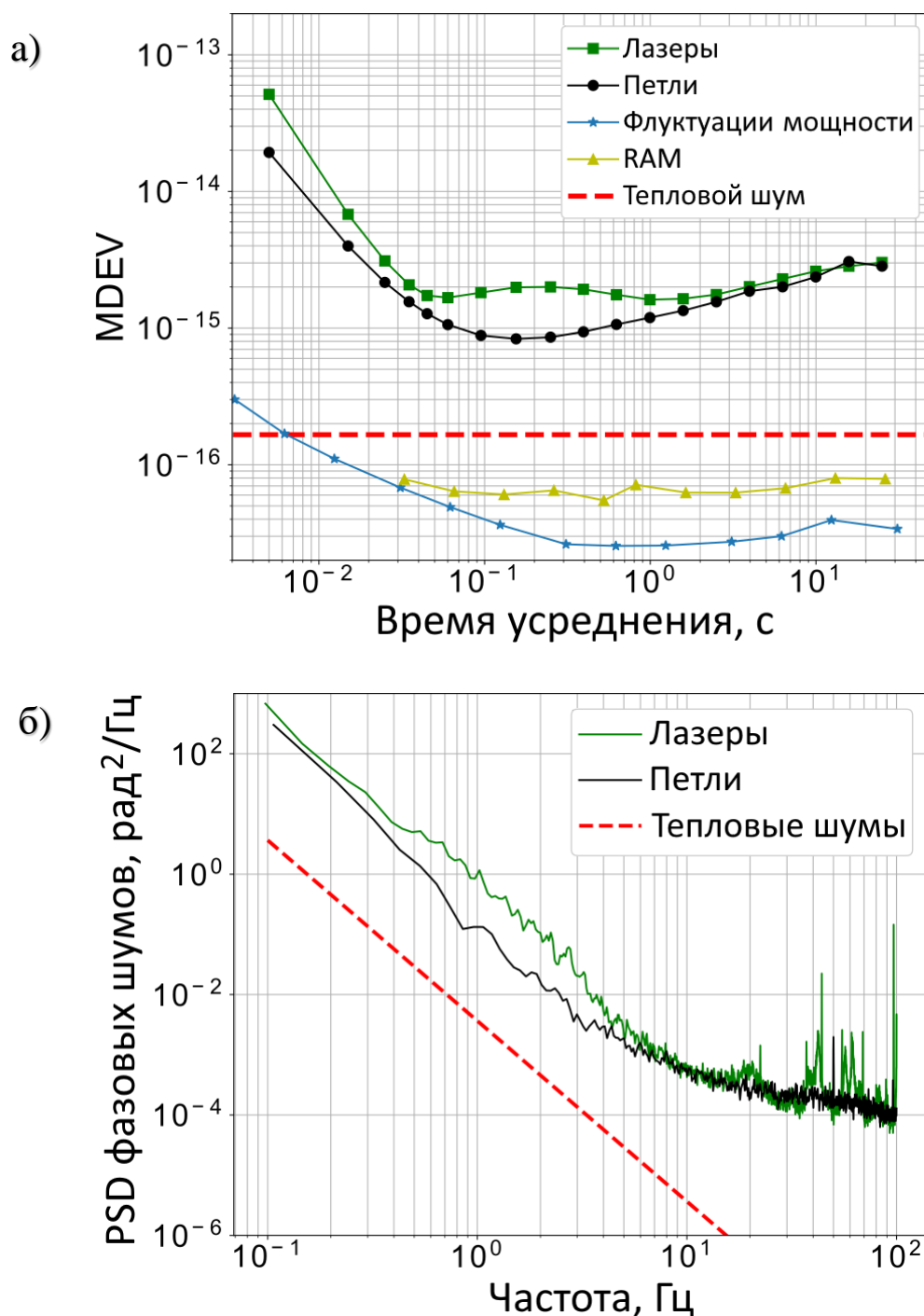


Рисунок 3.15 (а) - Модифицированная девиация Аллана и (б) - спектральная плотность мощности фазового шума сигнала биений между двумя стабилизированными лазерными системами 698 нм. Зеленые кривые (построены для данных с вычитанием линейного дрейфа, как на рисунке 3.14) - лазеры привязаны к вертикальному и горизонтальному резонаторам. Черные кривые - оба лазера привязаны к соседним  $TEM_{00}$  модам вертикального резонатора для определения вклада нестабильности оптоэлектронных петель обратной связи. Красные

пунктирные кривые - ожидаемый уровень теплового шума. Измеренные вклады технических шумов: желтый - остаточная амплитудная модуляция и синий - флуктуации мощности.

### Оценка девиации Аллана стронциевых часов из-за эффекта Дика

Оценим вклад эффекта Дика в предположении, что для опроса холодных атомов стронция в оптических часах будет использована схема Раби с характерными временами  $T_c = 1$  с,  $T_p = 0.5$  с (рисунок 1.6). По формуле (1.3) и измеренной спектральной плотности мощности флуктуаций частоты сигнала биений (рисунок 3.16 – для одного лазера, в предположении что лазеры идентичны) получим, что оценочный вклад эффекта Дика в девиацию Аллана стронциевых часов составит  $\sigma_{y, Dick}(\tau) = 1.03 \cdot 10^{-15} / \sqrt{\tau}$ . На времени усреднения в 10000 с ( $\approx 3$  часа) получим  $\sigma_{y, Dick}(10000 \text{ с}) \approx 1 \cdot 10^{-17}$ .

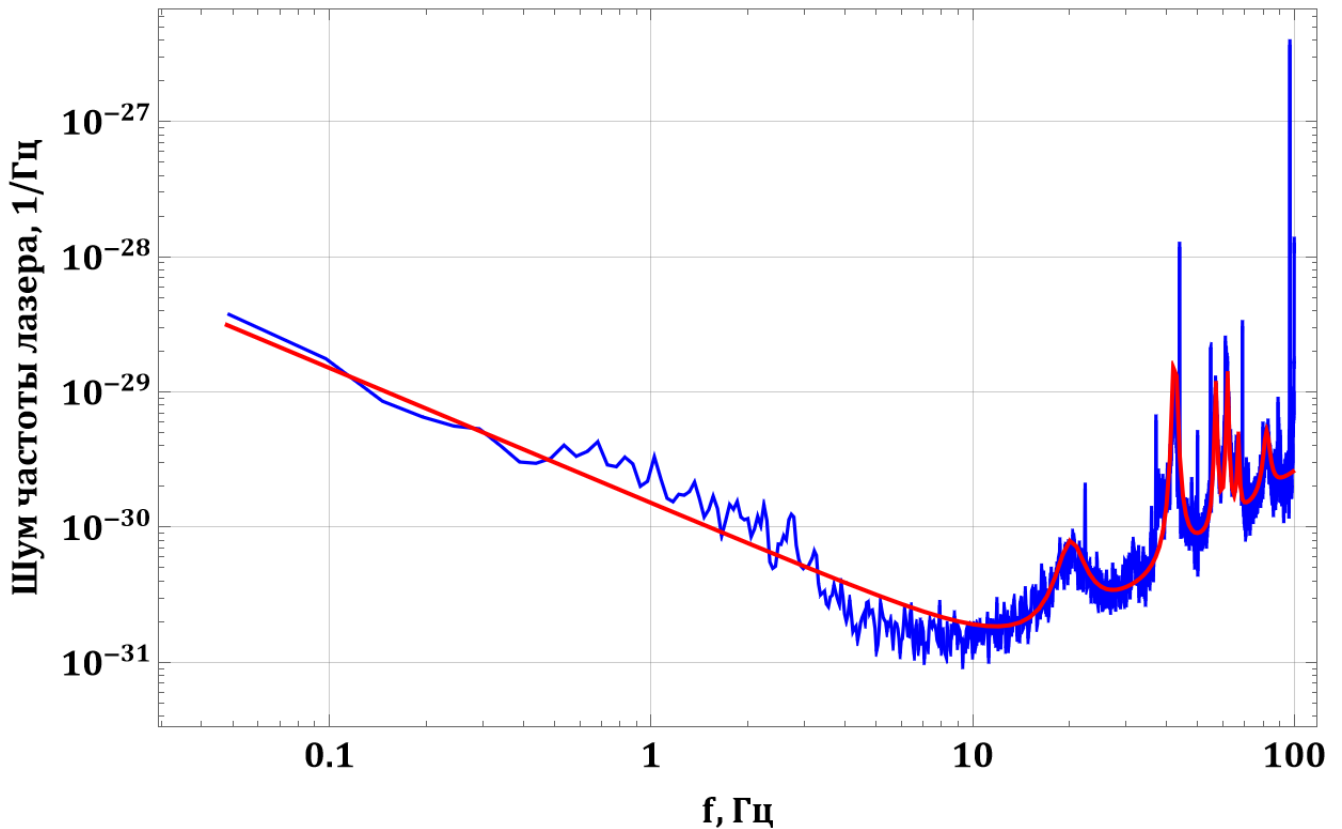


Рисунок 3.16 спектральная плотность мощности относительных флуктуаций частоты лазера, стабилизированного по длинному ULE-резонатору. Аппроксимирована по формуле (1.6) с параметрами:  $h_{-1} = 1.5 \cdot 10^{-30}$ ,  $h_0 = 1 \cdot 10^{-32}$  1/Гц,  $h_2 = 2.5 \cdot 10^{-34}$  1/Гц<sup>3</sup>.

### 3.3.3 Исследование шумов петли обратной связи

Полученные значения девиации Аллана сигнала биений лазерных систем существенно (на порядок) превосходят фундаментальный предел относительной нестабильности частоты, связанный с тепловыми шумами резонаторов. Основной вклад в нестабильность в таком случае

вносит один или несколько возможных видов технических шумов (остаточная амплитудная модуляция, вибрации, электронные шумы петли обратной связи). Чтобы охарактеризовать шум оптоэлектронных петель обратной связи, проведено сличение частот двух лазеров, привязанных к одному (вертикальному) резонатору, так же как это было сделано в [3,34,118]. Таким образом, шум, связанный с нестабильностью резонатора, является общим для обоих лазеров и взаимно компенсируется при гетеродинировании.

При одновременной привязке частот двух лазеров к одному резонатору, излучение каждого лазера попадает на оба фотодетектора ПДХ, что приводит к избыточным шумам в петлях обратной связи. Чтобы исключить влияние излучения первого лазера на петлю стабилизации второго и наоборот, их поляризации были установлены перпендикулярно друг другу, а частоты модуляции были значительно отстроены друг от друга. Тем не менее даже с этими мерами предосторожности мы все еще наблюдали перекрестные помехи между двумя петлями обратной связи, существенно нарушающие стабильность привязки. Данного эффекта удалось избежать полностью, осуществив ввод излучения лазеров с двух разных концов вертикального резонатора. В такой схеме резонатор выступает в роли фильтра оптических частот, не пропуская модуляционные компоненты.

Мы провели сличение двух лазеров, привязанных к  $TEM_{00}$  модам вертикального резонатора, разделенным двумя межмодовыми расстояниями ( $FSR = 312.5$  МГц). Модифицированная девиация Аллана флуктуаций частоты биений при привязке к одному резонатору (рисунок 3.15, черная кривая) на временах усреднения  $< 600$  мс составляет приблизительно половину от  $mod\sigma_y$  (рисунок 3.15, зелёная кривая) в случае привязки к двум резонаторам. Выпуклость графика  $mod\sigma_y$ , наблюдаемая при временах усреднения около 100 – 500 мс, в рассматриваемом случае отсутствует, что говорит о значительном вкладе флуктуаций длины резонаторов в нестабильность частоты на указанных временах. При времени усреднения более  $\geq 2$  с шум петель обратной связи полностью определяет нестабильность лазерной системы.

Полученные результаты оказались разочаровывающими, однако попытки наладки системы стабилизации частоты не привели к успеху. Относительно невысокие значения резкости наших резонаторов повышают требования к качеству сервоэлектроники. Действительно, уменьшение резкости и эффективности каплинга резонаторов  $\zeta$  приводят к меньшему наклону сигнала ошибки в соответствии с выражением (1.16). Решением данной проблемы в дальнейшем может быть замена зеркал резонатора и разработка низкошумящей электроники петли ПДХ.

### 3.3.4 Флуктуации остаточной амплитудной модуляции

Фазовая модуляция, необходимая в методе ПДХ, приводит к возникновению остаточной амплитудной модуляции оптического сигнала на частоте модуляции. Колебания глубины и фазы РАО, приводящие к нестабильности среднего уровня сигнала ошибки, могут быть вызваны флуктуациями поляризации и паразитными эталонами (см. раздел 1.4.2). Разделение обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле используемого ЭОМа приводит к значительному подавлению РАО и её влияния на стабильность частоты лазера. При оптимально выставленном угле поворота входного поляризатора уровень величина РАО на фотоприемнике ПДХ не более чем на 5 дБ превышала уровень дробового шума фотодиода. Колебания глубины РАО были измерены при помощи дополнительного фотоприёмника по схеме, описанной в [71]. Исходя из того, что измеренный угол наклона сигнала ошибки составил 0.2 В/кГц, был подсчитан вклад РАО в общую девиацию Аллана флуктуаций частоты (рисунок 3.15, жёлтая кривая), который оказался менее  $10^{-16}$  на временах усреднения 0.03 – 30 с.

### 3.3.5 Чувствительность частоты к мощности излучения

Одним из факторов, которые могут приводить к случайным сдвигам частоты моды опорного резонатора, являются флуктуации мощности заводимого в него лазерного излучения. Поглощение света отражающими покрытиями приводит к их нагреву, тепловой деформации и, следовательно, к изменению длины резонатора.

Для исследования зависимости частоты моды опорного резонатора от мощности излучения, введённого в эту моду, проведён эксперимент по регистрации отклика частоты сигнала биений на скачкообразное изменение мощности, подаваемой в исследуемый резонатор. Значение величины отстройки сигнала ошибки было установлено нулевым, для того чтобы изменение его амплитуды (при скачке мощности излучения) не приводило к смещению точки привязки. Изменение мощности пропускания с 11.5 мкВт до 1.6 мкВт осуществлялось при помощи переключения амплитуды радиочастотного сигнала, подаваемого на АОМ. Наблюдаемое поведение можно описать с помощью функции  $A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2}$ , где более быстрый отклик соответствует тепловым эффектам в отражающих покрытиях, а более медленный - эффектам в подложках [119]. После повторения измерения несколько раз (рисунок 3.17 - для вертикального резонатора) и аппроксимации всего набора данных для обоих резонаторов были получены одинаковые чувствительности: 1.5 Гц на 1 мкВт передаваемой мощности для экспоненты с  $\tau_1 = 0.2$  с и 5 Гц/мкВт для  $\tau_2 = 2$  с. Принимая во внимание полученные значения чувствительности и величину флуктуаций мощности излучения используемых лазеров, нестабильность частоты, вызванная флуктуациями оптической мощности в наших системах, составляет значительно ниже

$10^{-16}$  на временах усреднения 0.01 – 30 с (рисунок 3.15(а), синяя кривая). Дополнительная стабилизация мощности с помощью АОМ не влияет на стабильность частоты лазера.

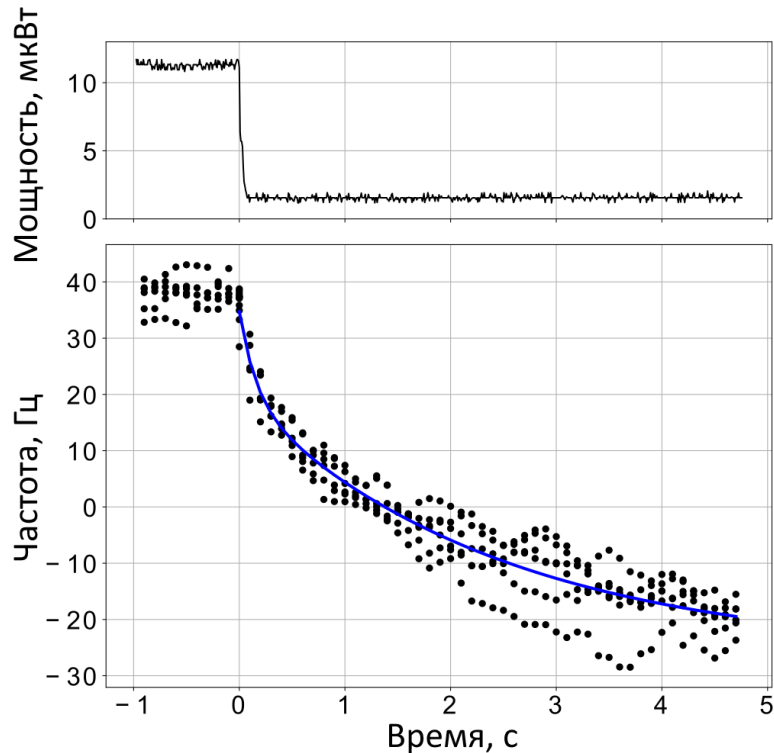


Рисунок 3.17 Сдвиг частоты биений (нижний график; линейный дрейф частоты вычтен; черные точки – данные шести последовательных измерений; синяя кривая – аппроксимация двойной экспонентой), вызванный изменением мощности пропускания вертикального резонатора с 11.6 мкВт до 1.6 мкВт (верхнее изображение).

Горизонтальный резонатор длиной 48 см в работе РТВ [40] имел частотную чувствительность к мощности пропускания 120 Гц/мкВт. В сравнении с этим значением, чувствительности резонаторов в нашем случае малы, что объясняется приблизительно в 3.5 раза меньшей резкостью, и, следовательно, меньшей мощностью излучения в моде.

### 3.3.6 Отклик на ударное возмущение

Вибрационная чувствительность является одним из главных факторов, ограничивающих возможности создания более длинных опорных резонаторов: чем длиннее резонатор, тем более он подвержен влиянию вибраций. Чтобы оценить действие вибраций на резонаторы мы провели простой эксперимент по измерению отклика на ударное воздействие. Для этого каждая из систем подвергалась однократному удару небольшого резинового шарика, который падал на оптическую плиту, в то время как частота биений между двумя лазерными системами непрерывно регистрировалась. Упругое столкновение с мячом вызывает широкий спектр

колебаний, которые влияют на частоту биений за счет изменения частоты оптической моды (деформации длины резонатора) и эффекта Доплера (движение резонатора в целом).

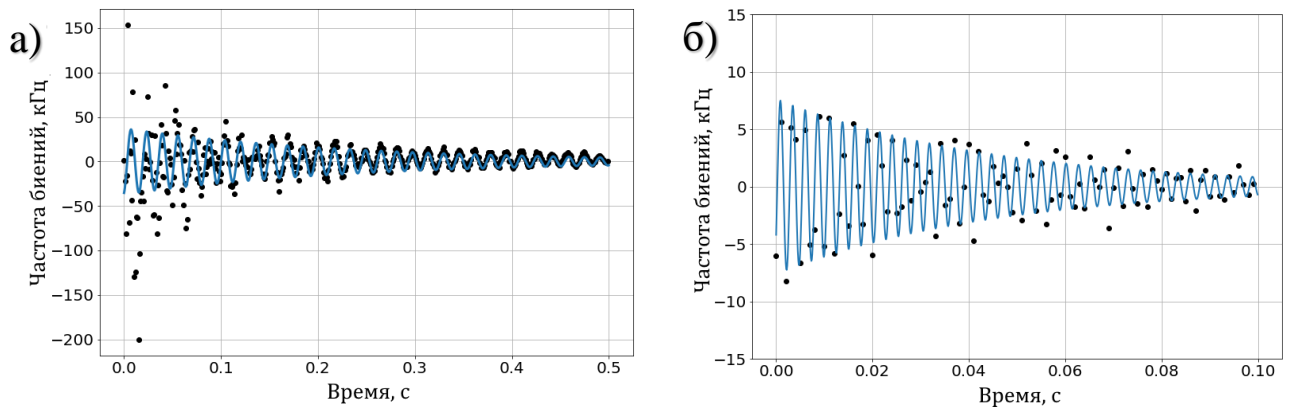


Рисунок 3.18 Отклик частоты биений стабилизированных лазеров на удар падающего резинового шара (диаметром 2 см, с высоты 15 см) по оптической плите: (а) для вертикальной системы и (б) для горизонтальной системы. Черные точки – экспериментальные данные, синие – аппроксимация экспоненциально затухающей гармонической функцией.

В первом эксперименте резиновый мяч диаметром 2 см падал с высоты 15 см на оптическую плиту вертикальной системы; во втором - на плиту горизонтальной. Отклик частоты биений показывает, что вертикальная опорная конструкция резонатора обладает резонансом 62 Гц, а горизонтальная - 387 Гц (рисунок 3.18). Измеренные добротности этих резонансов равны:  $Q_{vert} = 45$  и  $Q_{horiz} = 55$  соответственно. Амплитуда отклика была больше в случае возбуждения вертикального резонатора, однако это не позволяет количественно сравнить вибрационные чувствительности двух резонаторов. Тем не менее, наш опыт работы с резонаторами разной ориентации показывает, что вертикальная конфигурация значительно более подвержена акустическому шуму в лаборатории, чем горизонтальная. Эти наблюдения согласуются с результатами конечно-элементного моделирования деформаций резонаторов. Чтобы изолировать лазерные системы от акустического шума, были сконструированы герметичные ящики из толстой фанеры (рисунок 3.11(д), (е)).

### 3.4 Основные результаты главы 3

1. Рассчитаны координаты опор горизонтального резонатора длиной 48 см, обеспечивающие нулевые смещения и наклоны его зеркал под действием вертикальных возмущений. Показано, что вертикальный резонатор биконической формы в два раза менее чувствителен к вибрациям, чем резонатор цилиндрической формы с тем же максимальным диаметром. В соответствии с расчётами изготовлены горизонтальный и вертикальный

резонаторы из температурно-компенсированного стекла ULE длиной 48 см и системы их подвеса в вакуумных камерах.

2. Осуществлена стабилизация частоты двух полупроводниковых лазеров с длиной волны излучения 698 нм по модам горизонтального и вертикального ULE-резонаторов длиной 48 см. Измеренная спектральная ширина на полувысоте сигнала биений указанных лазерных систем составляет  $< 1.5$  Гц и ограничена временем измерения. Девиация Аллана относительных флуктуаций частоты излучения каждой из лазерных систем составляет менее  $2 \cdot 10^{-15}$  на временах усреднения 30 мс – 10 с, что на порядок величины выше предела тепловых шумов. Доминирующий вклад в нестабильность частоты вносят шумы оптоэлектронных систем обратной связи. Полученные спектральные характеристики созданных лазеров достаточны для достижения уровня относительной нестабильности частоты  $10^{-17}$  стронциевого оптического репера в составе государственного первичного эталона единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ-1 при усреднении длительностью более 3 часов.

Основные результаты главы опубликованы в статьях:

- Н. О. Жаднов, К. С. Кудеяров, Д. С. Крючков, И. А. Семериков, К. Ю. Хабарова, Н. Н. Колачевский, “О пределе теплового шума высокостабильных оптических резонаторов”, Квантовая электроника, т. 48, № 5, стр. 425–430 (2018).

- N. O. Zhadnov, K. S. Kudeyarov, D. S. Kryuchkov, G. A. Vishnyakova, K. Y. Khabarova, N. N. Kolachevsky “48-cm long room-temperature cavities in vertical and horizontal orientations for Sr optical clock”, Applied Optics, vol. 60, № 29, P. 9151-9159 (2021).

## Глава 4. Стабилизация частоты лазеров телекоммуникационного диапазона по криогенным кремниевым резонаторам

В соответствии с флуктуационно-диссипационной теоремой, уменьшения тепловых шумов опорного резонатора Фабри-Перо можно добиться, повышая его механическую добротность. Наиболее эффективным способом увеличить добротность является изготовление тела и зеркал резонатора из кристаллических материалов. Данный метод позволяет уменьшить фундаментальный предел стабильности длины резонатора без увеличения его размеров и избежать повышения чувствительности к техническим шумам (вибрациям, градиентам температуры).

Использование монокристаллов кремния в качестве материала для тела и зеркал было предложено Фрицем Риле в работе [104]. Кремний обладает рядом свойств, благоприятных для применения в качестве материала монокристаллических опорных резонаторов:

- Механическая добротность монокристаллического кремния более чем на два порядка превышает добротность ULE-стекла (таблица 2.2), что позволяет создавать компактные резонаторы с пределом тепловых шумов ниже  $10^{-16}$  (глава 2).
- У кремния есть две точки нулевого теплового расширения: 124 К и  $\sim 17$  К [120].
- Модуль Юнга кремния в 2.5 раза превышает таковой для ULE и плавленого кварца (таблица 2.2), что позволяет уменьшить чувствительность к механическим вибрациям.
- Монокристалл кремния обладает высокой стабильностью кристаллической структуры и не подвержен процессам старения, характерным для стекол и приводящим к дрейфу частоты резонаторов.
- Кремний широко используется в микроэлектронике благодаря чему технологии роста и обработки больших монокристаллов хорошо отработаны. Рост больших монокристаллов кремния – более распространённая технология, чем производство ULE-стекла.

Ширина запрещённой зоны кремния составляет  $\sim 1,2$  эВ, поэтому он непрозрачен для излучения видимого диапазона. Кремниевые резонаторы могут быть использованы для стабилизации лазеров ближнего и среднего инфракрасного (ИК) диапазона ( $\lambda > 1200$  нм). Стабилизация частоты излучения лазеров на длине волны 1.5 мкм позволит использовать стандартные оптоволоконные сети дальней связи для передачи ультрастабильных сигналов частоты и времени на расстояния более 1000 км [121] и для сличения удалённых оптических стандартов частоты [122].

Использование кремниевых резонаторов для стабилизации локального осциллятора на сегодняшний день является передовым направлением в области создания оптических стандартов времени и частоты. Путём передачи стабильности через фемтосекундную гребёнку от 1.5 мкм



лазера с опорным кремниевым резонатором 698 нм лазеру с длинным ULE-резонатором удалось создать оптические часы с лучшими сегодня показателями стабильности [4].

Работы с новым типом резонаторов требуют изучения его особенностей, разработки специализированной вакуумной камеры и системы стабилизации частоты. Эта глава посвящена созданию и исследованию свойств криогенных резонаторов из монокристаллического кремния и высоковакуумных криостатов для их охлаждения до температуры нулевой точки. Созданы системы стабилизации частоты волоконных лазеров на длине волны 1542 нм по таким резонаторам. Проведены исследования шумов петли обратной связи стабилизации частоты, вызванных флуктуациями остаточной амплитудной модуляции (RAM - см. раздел 1.4.2) излучения лазера. Выявлены основные факторы, влияющие на уровень RAM. Измерен вклад этого типа флуктуаций в нестабильность частоты лазерной системы. Разработан и реализован метод подавления шумов остаточной амплитудной модуляции, уменьшающий их вклад в нестабильность частоты лазерной системы более чем в 50 раз.

## 4.1 Экспериментальная установка

### 4.1.1 Резонатор Фабри-Перо из монокристаллического кремния

Для стабилизации частоты двух лазеров с длиной волны 1542 нм были разработаны и созданы два одинаковых резонатора из монокристаллического кремния. Кремниевый резонатор изображен на рисунке 4.1. Вдоль оптической оси его тела просверлено отверстие диаметром 10 мм, формирующее полость резонатора. Тело резонатора имеет биконическую форму, которая, в сравнении с цилиндрической, обеспечивает приблизительно в два раза меньшую чувствительность к горизонтальным ускорениям за счет облегчения концевых частей.

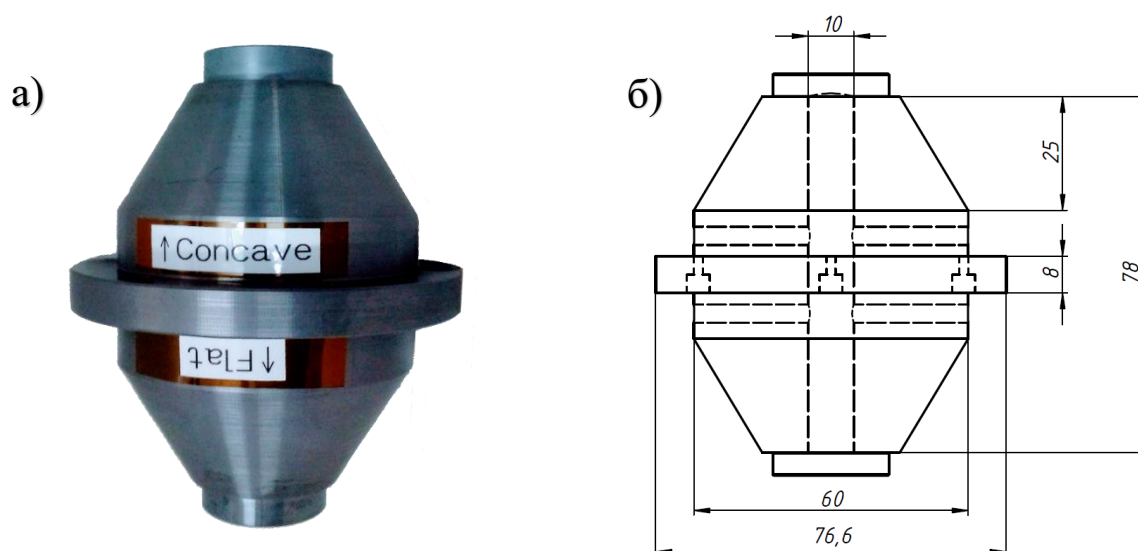


Рисунок 4.1 Резонатор из монокристаллического кремния (а) и его чертёж (б). Размеры указаны в миллиметрах.

Подвес резонатора осуществляется традиционным способом – в трех точках плоскости, проходящей через центр масс [42,77,78]. Данный метод обеспечивает низкую чувствительность длины резонатора к вертикальным ускорениям за счет равенства масс частей, расположенных выше и ниже плоскости подвеса. Резонатор устанавливается на стойки из полиэфирэфиркетона (ПЕЕК) и закреплён при помощи болтов (рисунок 4.2 (а)).

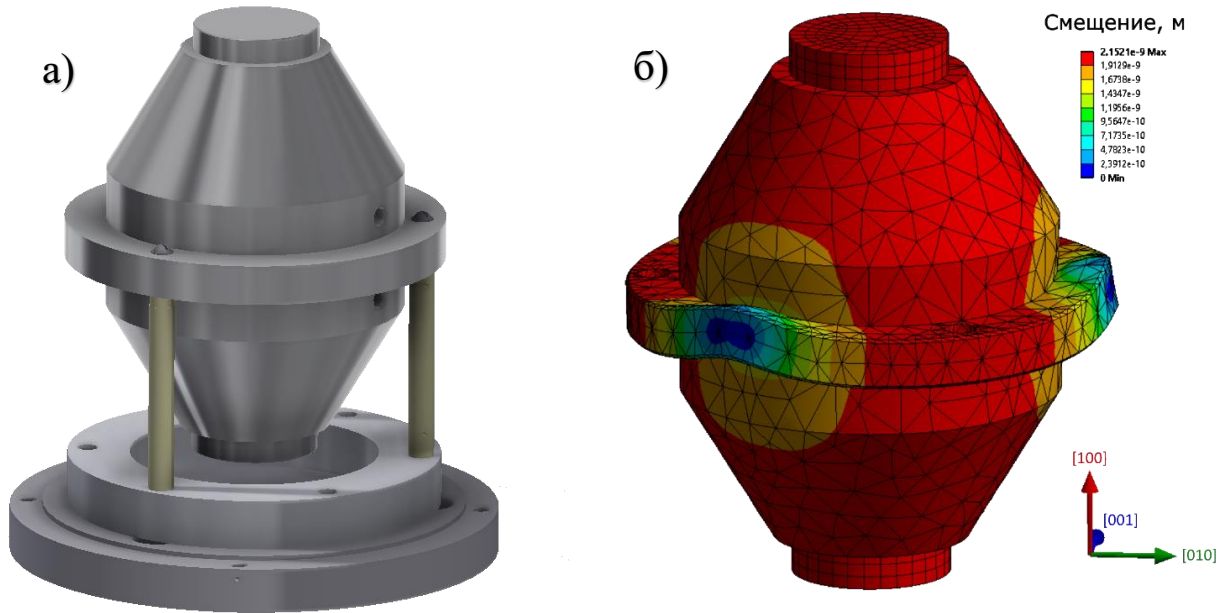


Рисунок 4.2 (а) - резонатор из монокристаллического кремния, установленный в систему подвеса; (б) - модель резонатора, деформированная под действием силы тяжести; оси системы координат отвечают кристаллографическим направлениям монокристалла кремния.

Кремний имеет кубическую гранецентрированную кристаллическую решётку типа алмаза. В данной работе направление оптической оси резонатора совпадает с кристаллографическим направлением  $[100]$ , что обусловлено ориентацией исходного кристалла. Упругие свойства кремния анизотропны и описываются тензором упругих постоянных [109]. Закон Гука для кристалла кремния в осях  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$  представляет собой:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \times \varepsilon_{kl} = \begin{bmatrix} 165.7 & 63.9 & 63.9 & 0 & 0 & 0 \\ 63.9 & 165.7 & 63.9 & 0 & 0 & 0 \\ 63.9 & 63.9 & 165.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 79.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 79.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 79.6 \end{bmatrix} \times \varepsilon_{kl}, \quad (4.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений,  $\varepsilon_{kl}$  – тензор деформаций,  $c_{ijkl}$  – тензор упругих постоянных, компоненты которого имеют размерность [ГПа]. Резонатор располагается в системе подвеса так, что направление  $[010]$  проходит через одну из опор. Конечно-элементный анализ (рисунок 4.2 (б)) показал, что вибрационная чувствительность резонатора в вертикальном направлении

равняется  $5 \cdot 10^{-11} \text{ 1/g}$ . Под действием силы тяжести каждое из зеркал смещается вниз приблизительно на 2 нм.

В работе [104] оптическая ось была выбрана в направлении  $[111]$ , вдоль которого модуль Юнга имеет наибольшее значение, что обеспечивает минимальную чувствительность к вибрациям. Кроме того, выбор данного направления позволяет ориентировать кристаллографические оси симметрично относительно подвеса за три точки. Было показано, что расположение опор на кристаллографических направлениях  $[110]$ ,  $[101]$ ,  $[011]$  обеспечивает минимальную чувствительность к вибрациям.

Замечательным свойством кремния является температурная зависимость его коэффициента теплового расширения: существует два значения температуры, находящиеся в окрестности 17 К и 124 К, при которых он обращается в ноль, а между этими температурами он принимает отрицательные значения [120].

Зеркала резонаторов представляют собой многослойные структуры  $\text{SiO}_2/\text{Ta}_2\text{O}_5$ , нанесённые методом ионно-лучевого распыления [123] на кремниевые подложки. Подложки закреплены на теле резонатора методом оптического контактирования. При температуре 124 К была измерена резкость  $F^*$  кремниевых резонаторов для  $\text{TEM}_{00}$  моды, которая для обоих резонаторов составила более 580000. Измерение осуществлялось путем регистрации затухания световой волны в резонаторе (ring-down, приложение Б.1) (рисунок 4.3). Соответствующее значение ширины резонансной линии на полувысоте для таких резонаторов составляет  $\sim 3.5 \text{ кГц}$ .

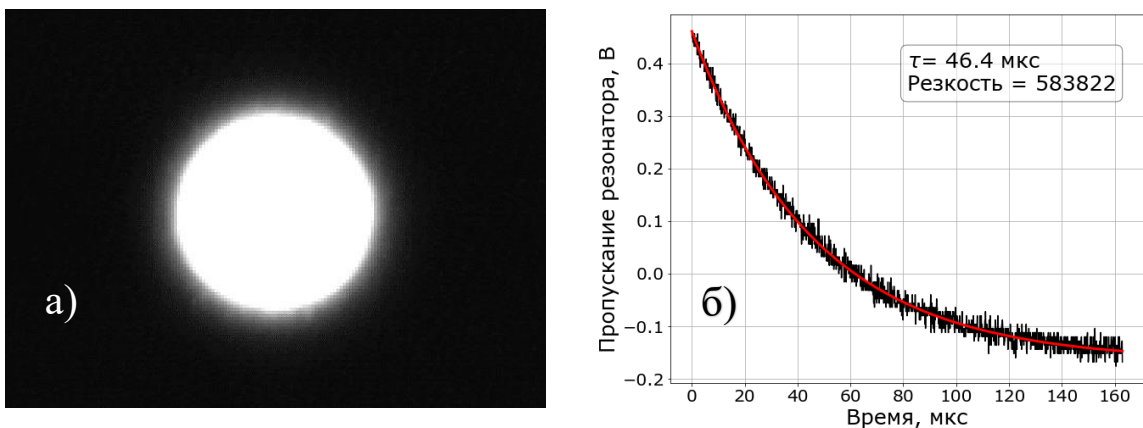


Рисунок 4.3 (а) – фотография моды  $\text{TEM}_{00}$  кремниевого резонатора; (б) - измерение резкости  $F^*$  одного из резонаторов по времени затухания  $\tau$  его пропускания после выключения лазерного излучения.

У каждого резонатора одно из зеркал – плоское, другое – вогнутое с радиусом кривизны 1 м. С учетом длины волны излучения лазера 1.542 мкм радиус основной гауссовой моды излучения по уровню интенсивности  $1/e^2$  составит 360 мкм на плоском зеркале и 380 мкм на вогнутом.

Межмодовый диапазон резонатора составляет  $f_{sr} = c/2L = 1.92$  ГГц. Оценка предела тепловых шумов при температуре 124 К для данных резонаторов по формулам (2.11)-(2.18) даёт значение  $\sigma_y \approx 2 \cdot 10^{-16}$ . Полученная величина практически полностью определяется механическими потерями диэлектрических отражающих покрытий.

Кривые теплового расширения резонаторов были определены путём измерения частоты биений двух стабилизированных лазеров в трех значениях температуры для каждого резонатора [42]. Предполагая, что в окрестности температуры нулевого теплового расширения  $T_0$  кривая  $L(T)$  близка к параболе, оказалось, что  $T_0^{Si1} = 123.0$  К, а  $T_0^{Si2} = 123.5$  К. Различие данных температур объясняется разной калибровкой датчиков температуры.

#### 4.1.2 Высоковакуумный криостат

Основные технические шумы, нарушающие стабильность частоты моды опорного резонатора Фабри-Перо – это механические вибрации и колебания температуры. Уменьшить влияние вибраций возможно при помощи системы активной виброизоляции и оптимального выбора точек подвеса резонатора. Для обеспечения высокой стабильности температуры ( $\delta T < 1$  мК) необходима хорошая тепловая изоляция и эффективная система контроля с обратной связью. В нашем эксперименте за термостабилизацию резонатора отвечает высоковакуумный криостат [124]. Данный криостат представляет собой вакуумную камеру, внутри которой расположена система тепловых экранов, экран с жидким азотом, опоры для установки резонатора, нагреватель и датчики для контроля температуры. Сечение криостата представлено на рисунке 4.4.

Объём вакуумной камеры предварительно обезгаживается при помощи форвакуумного насоса до давления  $10^{-1}$  мбар и, затем, при помощи турбомолекулярного до  $10^{-7}$  мбар. Для дополнительной дегазации внутренних поверхностей вакуумной камеры производится её нагрев до температуры около 100 °С на протяжении 1–2 недель при постоянной откачке турбомолекулярным насосом. Для поддержания высокого вакуума в ходе экспериментов используется ион-геттерный насос с неиспаряемым поглотителем SAES d100-5. Ионная часть насоса имеет производительность 5 л/с и предназначена для откачки инертных газов. Геттерная часть имеет производительность 100 л/с при откачке азота. Применение такой комбинации и охлаждение криостата до криогенных температур позволяет достичь давления в вакуумной камере менее  $10^{-9}$  мбар.

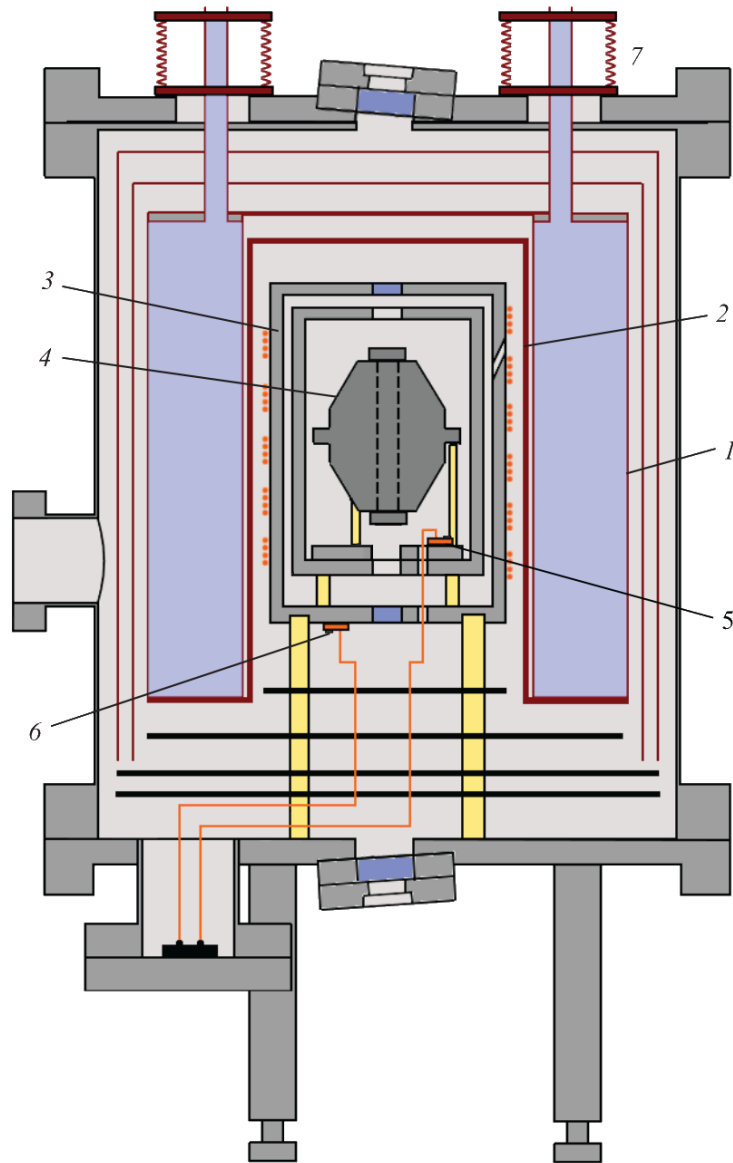


Рисунок 4.4 1 – ёмкость с жидким азотом; 2 – внутренняя поверхность ёмкости, подвергавшаяся чернению; 3 – тепловой экран с нагревательным проводом; 4 – кремниевый резонатор; 5, 6 – платиновые термосопротивления PT-100; ёмкость с жидким азотом соединена с вакуумной камерой с помощью мягких сильфонов 7.

Режим теплопроводности газа при низких давлениях определяется так называемым числом Кнудсена  $K_n = \lambda/l$ , где  $\lambda$  - длина свободного пробега молекулы газа, а  $l$  - характерное расстояние между телами, обменивающимися теплом. В случае, когда  $K_n \ll 1$  реализуется вязкостный режим и передача тепла не зависит от давления и описывается уравнением теплопроводности. При понижении давления, когда  $K_n$  становится  $\gg 1$  работает молекулярный режим, мощность теплопередачи подчиняется закону Кеннарда:  $dQ/dt \sim P \cdot \Delta T$ . В нашем криостате типичное расстояние между тепловыми экранами составляет  $l \approx 2$  см. Длина свободного пробега молекул в газе:

$$\lambda = 115 \cdot \frac{\eta}{P} \cdot \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (4.2)$$

где  $\eta$  – вязкость [Па·с],  $P$  – давление [Па],  $T$  – температура [К],  $\mu$  – молекулярная масса [г/моль]. Исходя из этого, для остаточного газа в криостате молекулярный режим начинается при давлении  $P < 10^{-2}$  мбар. При давлении  $10^{-8}$  мбар мощность теплообмена между тепловыми экранами 2 и 3 (рисунок 4.4) за счёт остаточного газа составляет менее 1 мВт. Наибольший вклад в обмен теплом при высоком вакууме приходится на тепловое излучение.

Охлаждение оптического элемента в высоковакуумной камере осуществляется в процессе обмена излучением с азотным экраном с температурой 79 К (температура кипения азота при атмосферном давлении). Мощность теплообмена излучением определяется по формуле Планка. Для двух параллельных пластин площадью  $S$ , находящихся на близком расстоянии друг от друга она выражается как

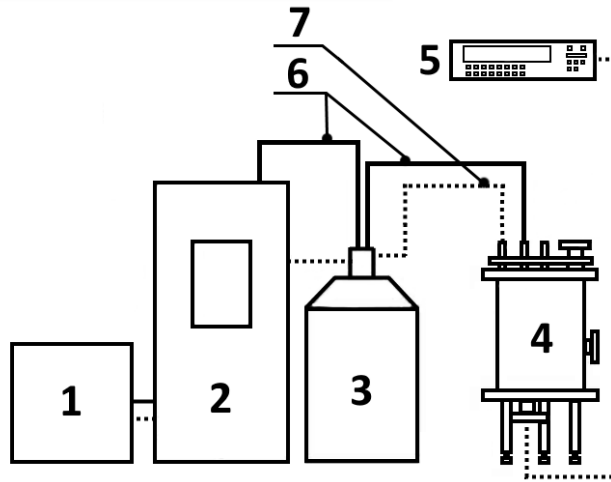
$$\dot{q} = \frac{\sigma \cdot S \cdot (T_2^2 - T_1^2)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (4.3)$$

где  $T_{1,2}$ ,  $\varepsilon_{1,2}$  - температуры и коэффициенты черноты пластин,  $\sigma$  - постоянная Стефана-Больцмана. Для лучшей теплоизоляции внутренних частей криостата и фильтрации температурных флуктуаций используются тепловые экраны. Тепловой экран, поглощая излучение по большей части одной поверхностью, но излучая полученное тепло с обеих, уменьшает поток тепла приблизительно в два раза. Все криогенные экраны, предназначенные для снижения теплопритока к охлаждаемым элементам криостата и азотный экран, выполнены из полированной никелированной меди. Цилиндрическая камера (3 на рисунке 4.4), в которую помещён резонатор изготовлена из анодированного алюминия. Внутренний алюминиевый экран служит дополнительным тепловым фильтром, позволяющим выравнять профиль температуры для равномерного охлаждения оптического элемента от изотермической поверхности. Контроль температуры оптического элемента осуществляется регулировкой температуры внешнего алюминиевого экрана. Для этого последний оснащён нагревательным элементом (медным проводом) и датчиком температуры. В качестве датчиков температуры используются платиновые термометры сопротивления с номинальным сопротивлением 100 Ом при 0 °С. Термосопротивления позволяют проводить измерения с точностью выше 10 мК в диапазоне температур от комнатных до азотных. Управление температурой внешнего алюминиевого экрана производится температурным контроллером LakeShore 335.

Конструкция криостата так же предусматривает возможность вибрационной развязки части криостата, на которой закреплён интерферометр, и азотного экрана, потенциально являющегося источником вибраций за счёт кипения жидкого азота (7 на рисунке 4.4). Стоит заметить, что при

установившейся температуре в криостате испарение жидкого азота в экране происходит плавно, без признаков кипения. Как показали дальнейшие эксперименты по сличению двух лазерных систем с длиной волны 1542 нм [125], относительная нестабильность частоты биений находится на уровне  $3 - 6 \cdot 10^{-15}$  на времени усреднения 10 мс – 10 с. Эксперимент, в котором кипение азота поддерживалось искусственно (в азотный экран был погружен нагреватель мощностью 10 Вт), показал, что вибрации, возникающие в криостате, не вносят регистрируемого вклада в нестабильность частоты лазерной системы.

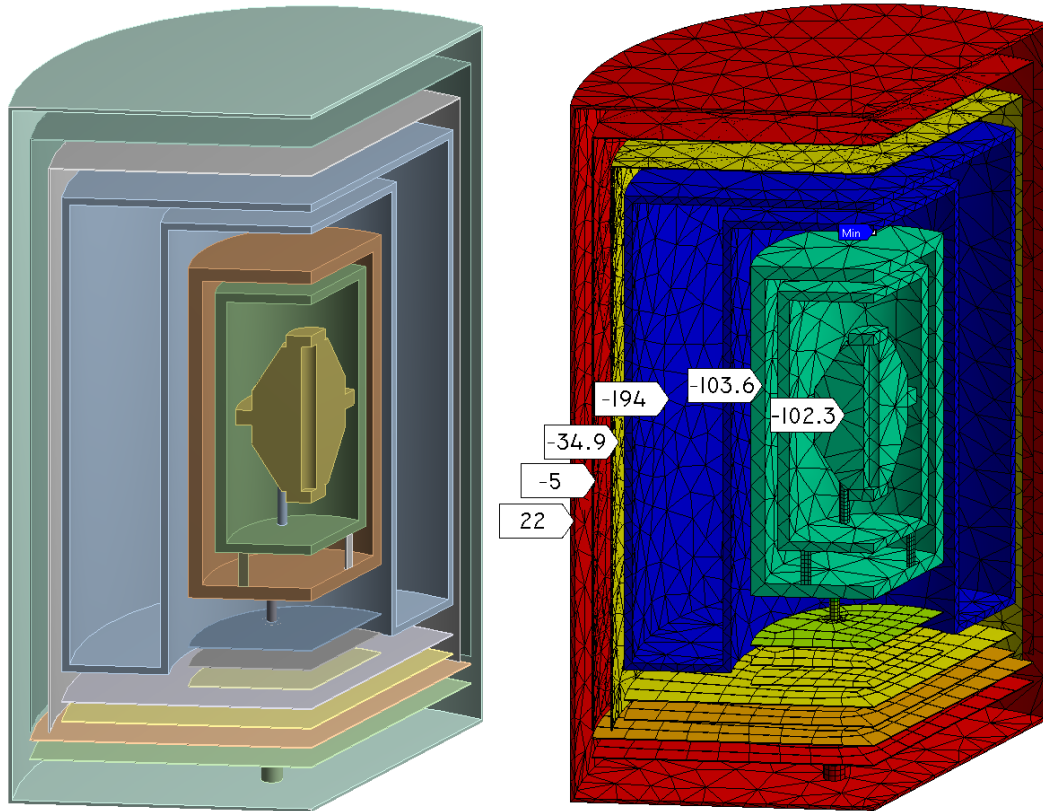
Отличительной чертой используемой схемы является наличие генератора жидкого азота из окружающего воздуха (рисунок 4.5). Данный генератор способен производить 7 литров жидкого азота в сутки, что полностью компенсирует потребление криостата. В азотный экран помещён измеритель уровня жидкого азота, состоящий из нескольких термосопротивлений, установленных на различной высоте. Для охлаждения кремниевых опорных резонаторов так же используются азотные криостаты проточного типа [104], в которых охлаждение осуществляется благодаря внутривакуумному хладопроводу, по которому протекает холодный газообразный азот. Известно, что в таких системах расход жидкого азота приблизительно в десять раз больше, чем в заливных криостатах.



*Рисунок 4.5 Криосистема непрерывного охлаждения: 1 – воздушный компрессор, 2 – генератор жидкого азота, 3 – сосуд Дьюара, 4 – высоковакуумная камера, 5 – контроллер температуры, 6 – переливное устройство, 7 – система автоматического наполнения азотного экрана. Автоматическая система 7 определяет уровень жидкого азота в экране и при его падении подаёт сигнал на генератор 2, который нагнетает в сосуд Дьюара 3 газообразный азот. Жидкий азот под действием давления в сосуде переливается в азотный экран криостата.*

В ходе тестовых экспериментов было выяснено, что резонатор не может быть охлажден до температуры нулевой точки кремния 124 К (рисунок 4.7 (а)). Мощность теплообмена между азотным экраном и экраном с нагревателем оказалась меньше, чем мощность подвода тепла по

ножкам из РЕЕК, на которых установлены внутренние части криостата. Для того, чтобы увеличить теплообмен с внутренним экраном, было принято решение уменьшить альбедо ёмкости с азотом за счёт удаления слоя никеля и покрытия её каптоновым скотчем. Эксперимент показал, что использование каптонового скотча внутри вакуумного объёма при криогенной температуре не сказывается на уровне вакуума.



*Рисунок 4.6 Моделирование установившегося распределения температур в криостате при заданных температурах внешней стенки (22 °С) и азотного экрана (−194 °С), при выключенном нагревателе (после чернения азотного экрана). Теплообмен происходит за счет теплового излучения и теплопроводности опор.*

После чернения поверхности резервуара с жидким азотом теплообмен с экранами заметно усилился, что позволило охладить тело резонатора до требуемой температуры 124 К. Ввиду большой постоянной времени системы (более 9 часов) стабилизация к заданной температуре происходит длительное время, которое может составлять вплоть до нескольких дней. На рисунке 4.7(б) показаны графики температуры датчика, установленного на внешнем экране с нагревателем, а также непосредственно на теле модельного резонатора из алюминия, снятые на интервале трёх суток после начала стабилизации температуры. Для достижения начальной температуры ниже 120 К в камеру напускался газ при давлении ниже  $10^{-2}$  мбар, что обеспечивало быстрый теплообмен с азотным резервуаром, после этого газ откачивался и начинались измерения динамики температуры.



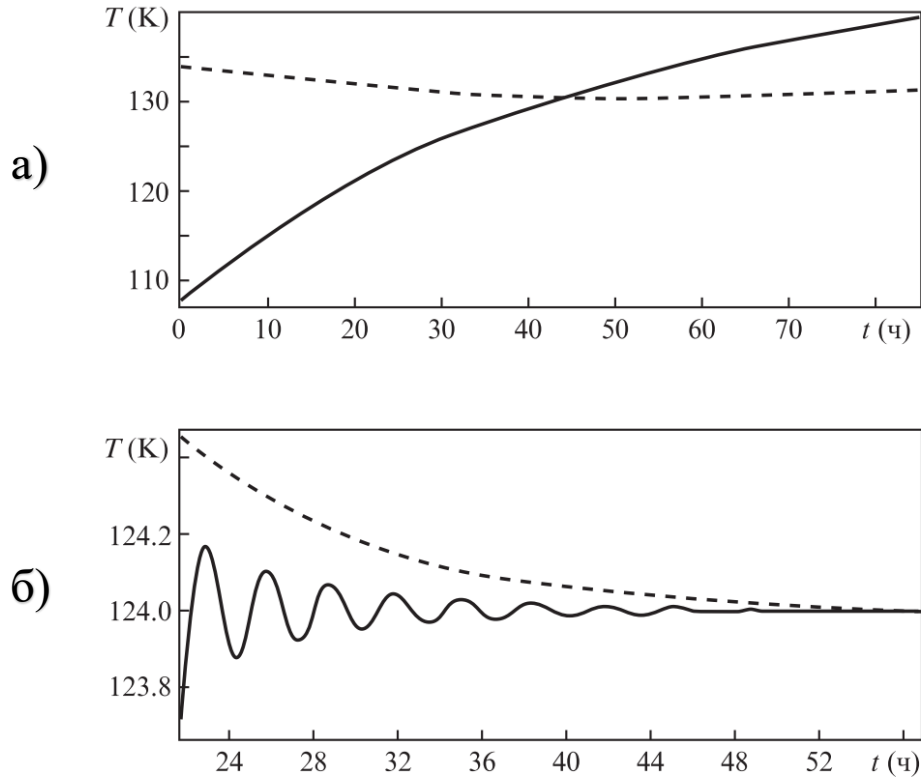
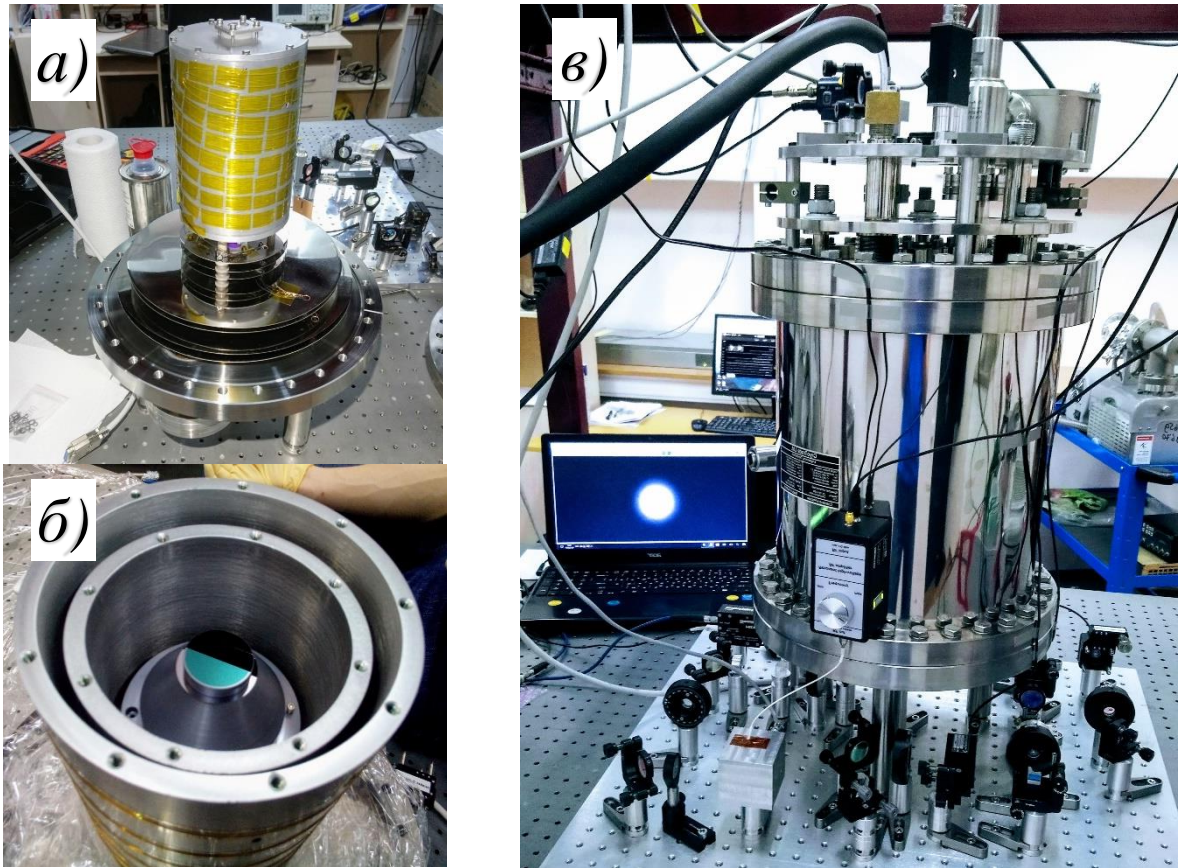


Рисунок 4.7 Временные зависимости температур экрана с нагревателем (сплошные кривые) и модели резонатора (штриховые кривые) при использовании азотной ёмкости с никелированной (а) и покрытой каптоновым скотчем (б) поверхностями.

#### Расчёт влияния дрейфа температуры на стабильность частоты резонатора

Для оценки влияния флуктуаций температуры на стабильность частоты моды кремниевого резонатора в описанном криостате, проведено длительное (более суток) измерение температуры пассивного теплового экрана (ближайший к резонатору на рисунке 4.4). Оказалось, что температура этого экрана дрейфует со скоростью около 0.7 мК/ч. Этот уход может быть связан с колебаниями температуры в лаборатории, которые вызывают дрейфы регулирующей электроники, а также влияют на температуру внешней стенки криостата. По полученным данным рассчитан временной ход температуры резонатора для двух случаев: когда начальные температуры резонатора и окружающего его экрана равны либо когда они различаются на  $\sim 1$  мК (метод расчёта изложен в [126]). Предполагая, что ошибка установки температуры в нулевой точке составляет  $\sim 10$  мК, а величина коэффициента теплового расширения при такой отстройке  $\approx 2 \cdot 10^{-10}$  1/К [120], можно оценить что уход частоты моды на времени 1 час должен составить не более 3 Гц ( $< 1$  мГц/с) (для обоих случаев).

Внешний вид криостата и его внутренних частей показан на рисунке 4.8.



*Рисунок 4.8 Фотографии: (а) – внутренний экран с нагревательным проводом, (б) – резонатор, установленный в криостат, (в) – внешний вид криостата на оптической плите.*

### 4.1.3 Оптоэлектронная система привязки частоты

Источниками лазерного излучения в эксперименте служат одночастотные эрбиевые волоконные лазеры Koheras ADJUSTIC с длиной волны 1542 нм. Резонатор лазера сформирован парой внутриволоконных брэгговских решёток и активным волокном между ними. Изменяя температуру лазера в пределах  $15^{\circ}\text{C}$  в окрестности комнатной температуры возможно перестраивать частоту излучения в диапазоне  $\sim 125$  ГГц. Для быстрого контроля частоты генерации лазера используется пьезоэлемент, деформирующий резонатор лазера. Изменение напряжения на пьезоэлементе от 0 до 150 В приводит к перестройке частоты излучения на 2 ГГц (что немного превосходит межмодовый диапазон резонатора Фабри-Перо длиной 78 мм). Максимальная частота перестройки линии генерации составляет 15 кГц и ограничена первым механическим резонансом пьезоэлемента.

Стабилизация частоты волоконного лазера по кремниевому резонатору реализуется при помощи метода Паунда-Драйвера-Холла [3] (см. разделы 1.3, Б.3, Б.4). Схема стабилизации изображена на рисунке 4.9. Фазовая модуляция частоты обеспечивается волноводным электрооптическим модулятором на основе кристалла  $\text{LiNbO}_3$  с поляризационно-



*Тейлора;  $\lambda/2$  – полуволновая фазовая пластинка;  $\lambda/4$  – четвертьволновая фазовая пластинка; Из – оптический изолятор; ПД – поляризационный светоделитель; З – зеркало; НПД – неполяризационный светоделитель; ФП – резонатор Фабри – Перо; ФД ПДХ – фотодетектор, используемый для детектирования сигнала в схеме Паунда – Дривера – Холла стабилизации частоты излучения лазера; ФД ОАМ – фотодетектор, используемый для детектирования остаточной амплитудной модуляции; ПФ – полосовой фильтр; Дет – фазовый детектор; ПИ – пропорционально-интегральный усилитель; Фаз – фазовращатель; Ген – радиочастотный генератор; Осц – осциллограф; Дип – дуплексер; РЧ – радиочастотный вход; НЧ – низкочастотный вход.*

## **4.2 Компенсация флуктуаций остаточной амплитудной модуляции**

Остаточная амплитудная модуляция (см. пункт 1.4.2) в большинстве случаев является одним из главных факторов, нарушающих стабильность привязки спектральной линии лазера к центру резонансного пика моды резонатора. Флуктуации RAM могут стать препятствием для достижения уровня стабильности частоты, определённого тепловым шумом кремниевых резонаторов. Как показали дальнейшие измерения, в разрабатываемых высокостабильных лазерных системах вклад флуктуаций RAM в результирующую нестабильность частоты очень велик и почти на два порядка величины превышает оценку предела тепловых шумов. В данном разделе описан способ стабилизации флуктуаций RAM и экспериментальные результаты его применения в системах стабилизации частоты кремниевых резонаторов.

### **4.2.1 Схема детектирования остаточной амплитудной модуляции**

На рисунке 4.9 приведена схема детектирования и стабилизации RAM, встроенная в схему Паунда-Дривера-Холла стабилизации частоты лазера по внешнему интерферометру. Фазовая модуляция частоты осуществляется волноводным электрооптическим модулятором на основе кристалла  $\text{LiNbO}_3$  с поляризационно-поддерживающими волоконными выводами (iXblue MPX-LN-0.1). С одной стороны, из-за неидеального совмещения осей кристалла и волоконных выводов использование волноводного модулятора приводит к неизбежному появлению RAM, глубина которой будет флуктуировать из-за воздействия окружающей среды на ЭОМ. В то же время полуволновое напряжение (т. е. напряжение, необходимое для сдвига фазы излучения на  $\pi$ ) используемого модулятора составляет всего 3.5 В, что на два порядка меньше характерного полуволнового напряжения ЭОМа открытого типа и упрощает создание системы активной компенсации флуктуаций RAM. Кроме того, волноводный ЭОМ обеспечивает однородность модуляции по всему сечению светового пучка.

Сигнал на частоте 29 МГц подаётся на ЭОМ с генератора Stanford Research Systems DS345 (Ген 1) через диплексер Mini-Circuits ZFBT-4R2GW-FT+, который предназначен для сложения радиочастотного и DC сигналов. Поляризация излучения, вышедшего из ЭОМа, фильтруется при помощи призмы Глана-Тейлора, которая обеспечивает высокую степень поляризации (100000:1). Свет, отражённый от резонатора, направляется на фотодетектор ПДХ для формирования сигнала ошибки. Так как сигнал фотодетектора ПДХ не может быть использован для независимой регистрации РАМ в режиме привязки частоты лазера, перед вводом излучения в вакуумную камеру с резонатором, оно разделяется неполяризационным светоделителем (НПД) и часть его направляется на фотодетектор регистрации РАМ. НПД представляет собой кварцевую пластинку с диэлектрическим покрытием, отражающую около 50% излучения, падающего на неё под углом  $45^\circ$ , причём коэффициенты отражения для s- и p- поляризаций различаются не более чем на  $\sim 30\%$ . Сигнал фотодетектора демодулируется путём смещения с частотой опорного генератора на фазовом детекторе, в результате чего получается сигнал, характеризующий остаточную амплитудную модуляцию.

#### **4.2.2 Зависимость уровня остаточной амплитудной модуляции от температуры и угла поворота поляризатора**

Для определения условий, при которых влияние РАМ на стабильность частоты лазерной системы минимально, произведены исследования зависимости глубины амплитудной модуляции от температуры ЭОМа и угла поворота выходного поляризатора. Зависимость РАМ от температуры заключена в множителе  $\sin(\Delta\varphi + \varphi_{DC})$  в уравнении (1.19). На величину сдвига фазы между обыкновенным и необыкновенным лучами  $\Delta\varphi$  в ЭОМе влияют температурно-зависимые характеристики двойного лучепреломления кристалла.

Температура корпуса ЭОМа измеряется при помощи термистора с отрицательным температурным коэффициентом и номинальным сопротивлением 10 кОм. Поддержание заданной температуры осуществлено при помощи резистивного нагревателя (тонкой медной проаволоки) и термконтроллера. Измерения зависимости РАМ от температуры производились при угле  $\beta = 5^\circ$ . Полученная температурная зависимость (рисунок 4.10) аппроксимируется гармонической функцией с периодом  $0.8^\circ\text{C}$ , что отвечает зависимости  $d(\Delta\varphi)/dT = 7.85$  рад/К [127].

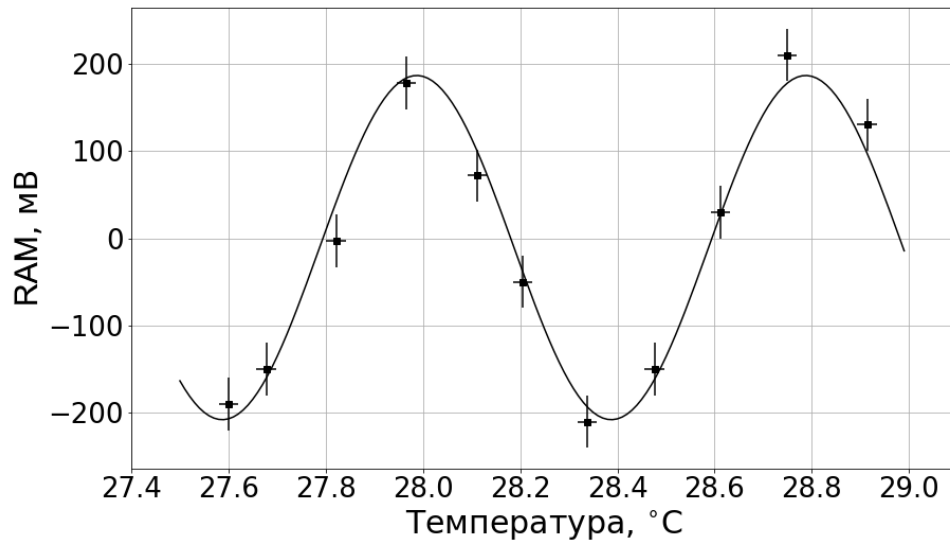


Рисунок 4.10 Зависимость уровня RAM от температуры электрооптического модулятора при угле поворота выходного поляризатора  $\beta = 5^\circ$ .

В ходе измерения температурной зависимости остаточной амплитудной модуляции температура стабилизировалась в исследуемой точке, что отслеживалось по затуханию колебаний сигнала. При некоторых измерениях наблюдались остаточные колебания с амплитудой около 60 мВ, связанные, скорее всего, с температурно-зависимыми паразитными интерферометрами. Для сравнения размах сигнала ошибки в схеме ПДХ стабилизации частоты лазера составляет 0.5 В.

Зависимость RAM от угла поворота призмы Глана-Тейлора изображена на Рисунке 4.11. Для исключения влияния тепловых эффектов на результаты измерений для каждого значения угла  $\beta$  было произведено сканирование температуры в диапазоне  $27.5 - 29^\circ$ . Значение RAM фиксировалось в четырёх различных экстремумах, а затем усреднялось. Зависимость уровня остаточной амплитудной модуляции от направления выходного поляризатора описывается членом  $\sin(2\beta)$  в уравнении (1.19). Используемая нами схема эксперимента обуславливает появление дополнительного множителя  $\cos^2(\gamma - \beta)$ , где  $\gamma$  – угол между направлением поляризации света, выходящего из ЭОМа, и осью оптического изолятора, на которую проецируется вектор поляризации света после призмы Глана-Тейлора. Результаты измерений были аппроксимированы зависимостью  $A + B \sin(2\beta) \cos^2(\gamma - \beta)$  с параметрами  $A = -11(6)$  мВ,  $B = 5.1(8)$  В,  $\gamma = 12(1)^\circ$ .

Исследование позволяет определить угол поворота выходного поляризатора, при котором величина RAM минимальна. Однако даже точное выставление  $\beta$  не позволит полностью избежать флуктуаций остаточной амплитудной модуляции, из-за влияния колебаний окружающей температуры на волокно ЭОМа, приводящего к поворотам направления поляризации.

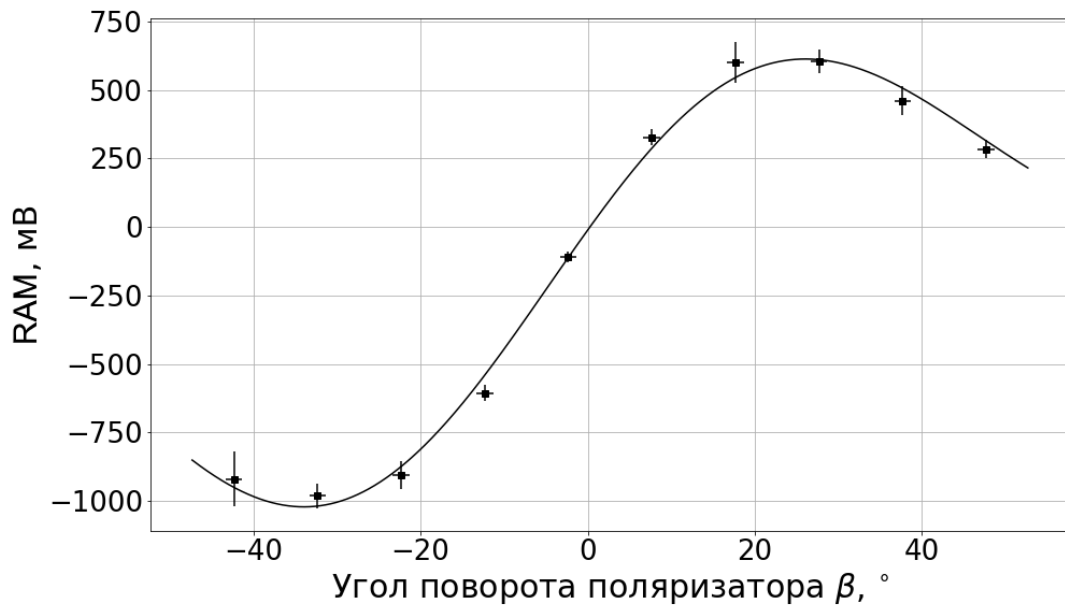


Рисунок 4.11 Зависимость уровня RAM от угла поворота выходного поляризатора  $\beta$ .

### 4.2.3 Влияние флуктуаций остаточной амплитудной модуляции на стабильность частоты лазерной системы

Полученный сигнал RAM преобразуется пропорционально-интегральным усилителем (на базе одноплатного компьютера Red Pitaya), и может быть использован в петле обратной связи для стабилизации. Наблюдать текущее значение RAM можно при помощи осциллографа.

Для исследования вклада флуктуаций амплитудной модуляции в нестабильность частоты излучения лазерной системы зависимость RAM от времени записывалась при помощи осциллографа и анализировалась путём вычисления девиации Аллана [61]. Чтобы перейти от нестабильности сигнала RAM, измеряемой в вольтах, к нестабильности частоты излучения в герцах, была измерена соответствующая чувствительность. Для этого был использован сигнал биений излучений двух лазерных систем с опорными кремниевыми резонаторами. Одновременно с измерением частоты биений сигнал RAM одной из систем модулировался путем подачи синусоидального сигнала амплитудой 4 В и частотой 1 Гц на НЧ-вход диплексера. Соответствующие зависимости RAM и частоты биений от времени приведены на рисунке 4.12. Усредненное значение изменения частоты под влиянием модуляции позволило определить чувствительность, составившую 0.9(1) Гц/мВ. С учетом полученной чувствительности относительная нестабильность частоты излучения лазера, обусловленная флуктуациями RAM в условиях наших экспериментов, составляет  $2.5 \cdot 10^{-15}$  при времени усреднения 0.01 с и достигает  $5 \cdot 10^{-14}$  при временах усреднения 1 – 10 с (рисунок 4.13, верхняя кривая). Таким образом, шумы RAM не позволяют достичь предела тепловых шумов криогенного кремниевого резонатора.

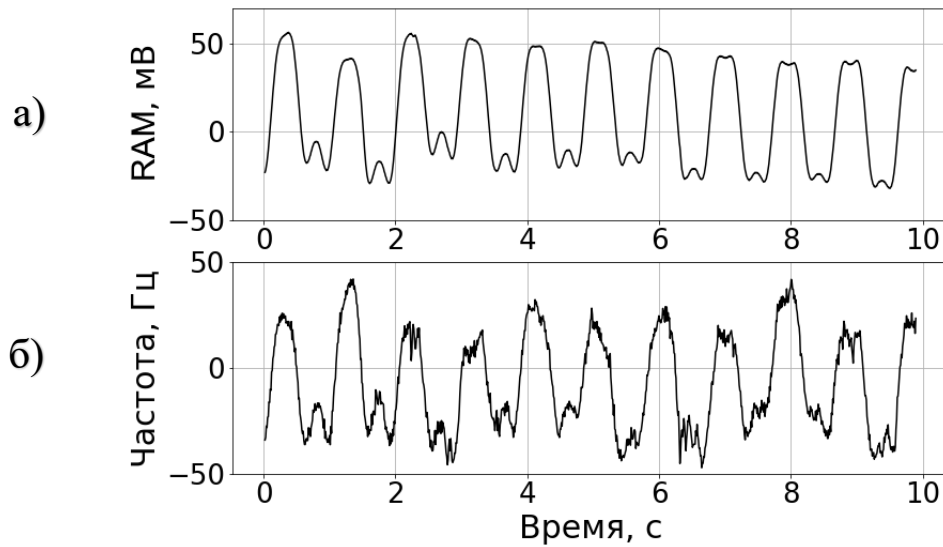


Рисунок 4.12 Зависимость RAM от времени при подаче синусоидального сигнала амплитудой 4 В и частотой 1 Гц на НЧ-вход дуплексера (а), а также изменение частоты биений излучений двух лазерных систем под воздействием модуляции ОАМ (б).

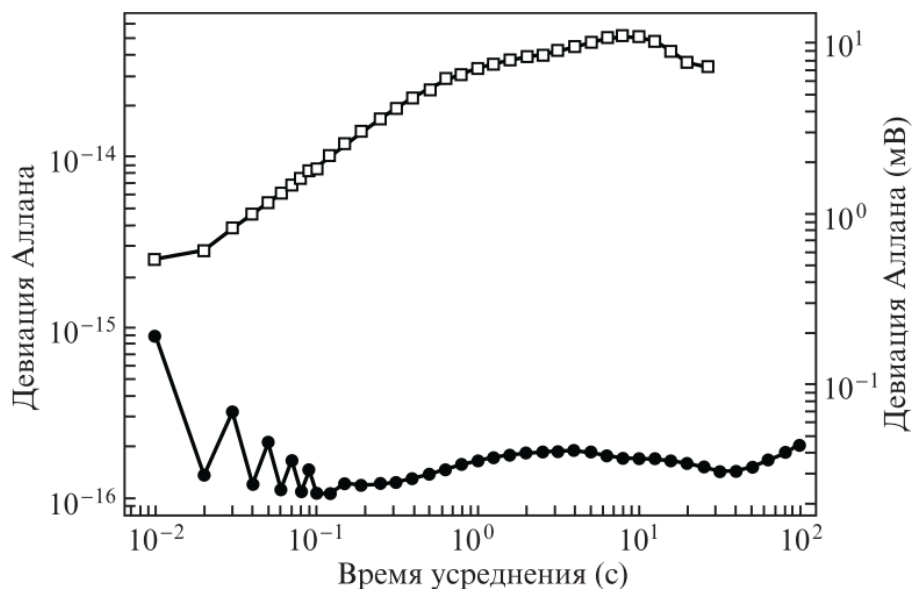


Рисунок 4.13 Нестабильность RAM (шкала справа), и ее вклад в относительную нестабильность частоты излучения лазера (шкала слева) в отсутствие активной стабилизации (□) и при включении петли активной стабилизации (●). Характерный вид нестабильности на малых временах объясняется наводками электрической сети на частоте 50 Гц, которые могут быть устранены при усовершенствовании электронной схемы.

Для уменьшения влияния флуктуаций RAM на частоту излучения была реализована система активной компенсации (рисунок 4.9). Демодулированный сигнал RAM подавался на пропорционально-интегральный усилитель на базе одноплатного компьютера Red Pitaya (ПИ на



рисунке 4.9), формирующий сигнал ошибки. Через НЧ-вход диплексера сигнал ошибки подавался на ЭОМ и стабилизировал сигнал RAM в нуле, изменяя фазу  $\varphi_{DC}$  (1.19). Изменение постоянного напряжения на кристалле ЭОМа эквивалентно изменению его температуры, поэтому выбор рабочей точки стабилизации можно осуществить, настроившись на склон температурной зависимости (например, в точку 28.6 °С для нашей системы). Также необходимо учитывать, что множитель, зависящий от угла поворота поляризатора, задает диапазон возможных изменений RAM при помощи постоянного напряжения и температуры. Диапазон должен быть достаточным для компенсации наблюдаемых флуктуаций RAM, поэтому для его расширения выходной поляризатор был повернут на угол около 1° от оптимального положения, что соответствовало диапазону изменения RAM порядка 80 мВ. Чтобы полностью использовать данный диапазон, необходимо иметь возможность изменять постоянное напряжение, подаваемое на ЭОМ, вплоть до полуволнового напряжения.

Применение системы активной компенсации позволило добиться нестабильности RAM на временах усреднения 0.1 – 100 с на уровне  $4 \cdot 10^{-2}$  мВ (что соответствует абсолютной нестабильности глубины амплитудной модуляции  $6 \cdot 10^{-6}$ ). На этих временах усреднения подавление вклада флуктуаций RAM в нестабильность частоты излучения лазера составило приблизительно два порядка величины. Измеренный вклад этих флуктуаций не превышает  $2.1 \cdot 10^{-16}$  (рисунок 4.13, нижняя кривая) [127], что соответствует расчётному пределу девиации Аллана тепловых шумов частоты кремниевого резонатора.

### 4.3 Основные результаты главы 4

1. Определены характеристики двух опорных резонаторов Фабри-Перо из монокристаллического кремния с диэлектрическими покрытиями зеркал  $\text{SiO}_2/\text{Ta}_2\text{O}_5$ : резкость и чувствительность к вибрациям. Резкости резонаторов определены методом ring-down и составляют более 580000. Чувствительность частоты моды резонатора к вибрациям в системе подвеса за плоскость центра масс вычислена методом конечно-элементного анализа и составила 10 Гц/(см · с<sup>-2</sup>).

2. Спроектированы и созданы два высоковакуумных криостата с остаточным давлением менее  $10^{-8}$  мбар, позволяющие охлаждать опорные резонаторы из монокристаллического кремния до температуры нулевого теплового расширения (124 К). Охлаждение осуществляется радиационным теплообменом с заливным азотным экраном. Полученная величина нестабильности температуры составляет < 1 мК на времени 1 час, что обеспечило дрейф частоты моды кристаллического кремниевого резонатора < 3 Гц/час.

3. Разработана система подавления шумов остаточной амплитудной модуляции в методе Паунда-Драйвера-Холла с помощью активной стабилизации температуры кристалла ЭОМа и контроля напряжения на нём. Удалось экспериментально уменьшить влияние флуктуаций остаточной амплитудной модуляции на нестабильность частоты лазерной системы до уровня  $< 2 \cdot 10^{-16}$ , соответствующего пределу тепловых шумов криогенных кремниевых монокристаллических резонаторов.

Результаты главы опубликованы в работе:

▪ Д. С. Крючков, Н. О. Жаднов, К. С. Кудеяров, Г. А. Вишнякова, К. Ю. Хабарова, Н. Н. Колачевский, “Компенсация флуктуаций остаточной амплитудной модуляции в оптоэлектронной системе стабилизации частоты лазерного излучения”, Квантовая электроника, т. 50, № 6, стр. 590–594, (2020).

## Глава 5. Температурная стабилизация оптического резонатора Фабри-Перо

В главах 3 и 4 были описаны опорные резонаторы, изготовленные из материалов с уникальным свойством – нулевым тепловым расширением, которое позволяет избавиться от влияния неустраняемых флуктуаций температуры на длину резонатора. Такие материалы зачастую являются труднодоступными и дорогостоящими. Технологии создания температурно-компенсированного стекла ULE или его аналогов принадлежат небольшому числу компаний (США, Япония). В России такое стекло, необходимое для создания ультрастабильных лазерных систем при комнатной температуре, не производится. Тем не менее, нулевого теплового расширения монокристаллического резонатора Фабри-Перо можно достичь и без использования материалов с этим свойством. В данной главе предложена конструкция монокристаллического резонатора Фабри-Перо, компенсирующая его КТР и рассчитаны её характеристики.

Принцип, позволяющий компенсировать тепловое расширение схож с описанным в работе [128], посвященной температурно-независимому эталону Фабри-Перо. Создание температурно-независимого оптического резонатора является шагом к компактизации, упрощению и удешевлению систем стабилизации лазеров.

### 5.1 Температурнонезависимый резонатор Фабри-Перо

Резонатор данного типа состоит из цилиндрического тела со сквозным отверстием вдоль оси, которое заглушено с обеих сторон рабочими зеркалами (рисунок 5.1).

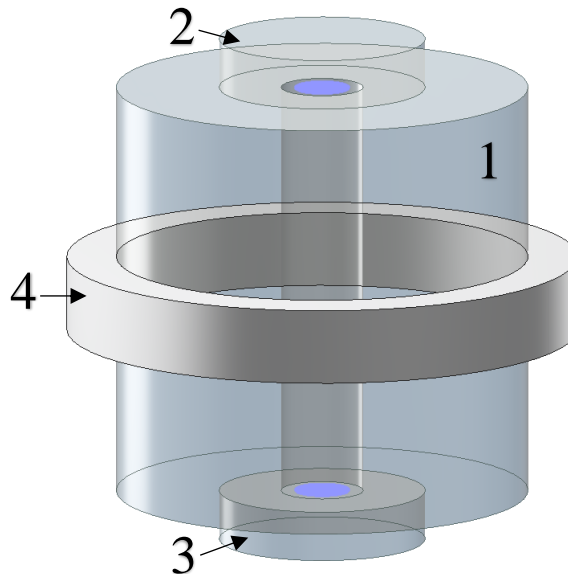


Рисунок 5.1 Общий вид опорного резонатора Фабри-Перо с компенсационным кольцом. 1 – тело, 2,3 – зеркала, 4 – компенсационное кольцо.

С изменением температуры тело изменяет свою длину  $L$ , и выделенная резонансная частота резонатора  $\vartheta$  изменяет свою величину. Уход резонансной частоты при изменении температуры  $T$  оценивается по формуле:

$$\frac{d\vartheta}{dT} = -\vartheta \left( \frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \right) = -\alpha\vartheta, \quad (5.1)$$

где  $\vartheta = \frac{m}{2L/c}$  – резонансная частота в Гц,  $m$  – порядковый номер моды,  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения материала тела резонатора,  $L(T) = L(T_0)(1 + \alpha \cdot (T - T_0))$ .

Для температурной стабилизации длины резонатора используется обжатие диаметра тела кольцом из металла или другого материала, у которого коэффициент теплового расширения  $\alpha_M$  больше, чем у материала тела  $\alpha$ :  $\alpha_M > \alpha$ . При обжатии резонатора температурная зависимость расстояния между зеркалами изменяется. Если коэффициент теплового расширения кольца  $\alpha_M$  значительно больше  $\alpha$ , то при тепловом расширении тела и кольца снижается давление на стенки тела и возникает тенденция к сокращению длины резонатора (рисунок 5.2).

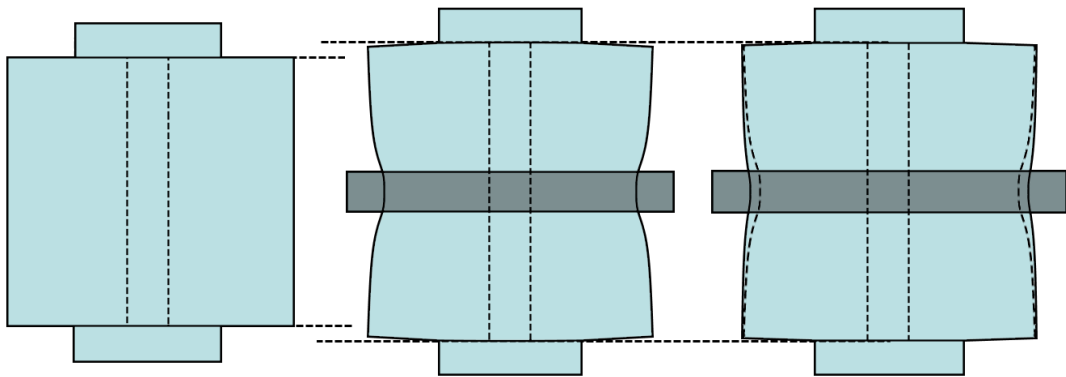


Рисунок 5.2 Резонатор в недеформированном состоянии (слева), резонатор, обжатый компенсационным кольцом (посередине), резонатор с кольцом при повышении температуры (справа).

Рассчитаем тепловое расширение тела с кольцом, считая, что оно насажено на резонатор в напряженном состоянии. Обозначим радиусы тела и кольца в свободном состоянии (до посадки кольца)  $R_0$  и  $R_{M0}$ :  $R_{M0} < R_0$ . После посадки кольца на тело на поверхности их соприкосновения возникает давление  $P_0$ , которое увеличит радиус кольца и уменьшит радиус тела (в области соприкосновения). Новый радиус тела примет значение:

$$R \approx R_0 \left( 1 - \frac{P_0}{E} \right), \quad (5.2)$$

а для нового радиуса кольца имеем оценку:

$$R_M \approx R_{M0} \left( 1 + \frac{P_0}{E_M} \cdot \frac{R_0}{b} \right), \quad (5.3)$$

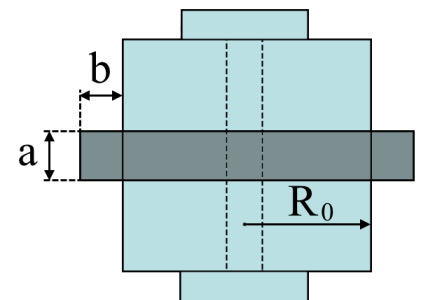


Рисунок 5.3

где  $E$  и  $E_M$  – модули Юнга упругости тела и кольца;  $b$  – толщина кольца (рисунок 5.3). Первая формула оценивает эффект двустороннего сжатия объемного тела, а вторая описывает расширение тонкостенной трубы под действием давления внутри ([129], гл. 1, §7, задача 4). Из равенства этих величин следует выражение для силы давления:

$$P_0 \approx \frac{R_0 - R_{M0}}{R_0 \left( \frac{R_0/b}{E_M} + \frac{2}{E} \right)} \quad (5.4)$$

При этом длина резонатора увеличится на величину:

$$L(T_0, P_0) \approx L_0 \left( 1 + \frac{2\sigma a}{L_0} \cdot \frac{P_0}{E} \right), \quad (5.5)$$

где  $\sigma$  – коэффициент Пуассона тела,  $a$  – высота кольца. В этой формуле подразумевается, что длина корпуса увеличивается только за счет области обжатия размером  $a$  (рисунок 5.3).

С изменением температуры изменится давление обжатия  $P$  и оценки радиусов примут вид:

$$R \approx R_0 \left( 1 + \alpha \cdot (T - T_0) - \frac{2P}{E} \right) \quad (5.6)$$

$$R_M \approx R_{M0} \left( 1 + \alpha_M \cdot (T - T_0) + \frac{P}{E_M} \cdot \frac{R_0}{b} \right) \quad (5.7)$$

Опять в силу равенства радиусов получаем новую величину давления:

$$P \approx \frac{(R_0 - R_{M0}) + R_0(\alpha - \alpha_M)(T - T_0)}{R_0 \left( \frac{R_0/b}{E_M} + \frac{2}{E} \right)} = P_0 + \frac{(\alpha - \alpha_M)(T - T_0)}{\left( \frac{R_0/b}{E_M} + \frac{2}{E} \right)} \quad (5.8)$$

и новую длину резонатора:

$$L(T, P) \approx L_0 \left( 1 + \alpha(T - T_0) + \frac{2\sigma a}{L_0} \cdot \frac{P}{E} \right) \quad (5.9)$$

Условие температурной независимости сводится к следующему равенству длин (5.5) и (5.9):

$$\frac{2\sigma a}{L_0} \cdot \frac{P_0}{E} = \alpha(T - T_0) + \frac{2\sigma a}{L_0} \cdot \frac{P}{E}, \quad (5.10)$$

что с учетом (5.8) дает:

$$\alpha - \frac{2\sigma a}{L_0 E} (\alpha_M - \alpha) \left( \frac{R_0/b}{E_M} + \frac{2}{E} \right)^{-1} = 0. \quad (5.11)$$

Видно, что условие температурной стабилизации (5.11) не зависит от силы обжатия. От неё будет зависеть лишь температура, при которой достигается стабилизация. Условие (5.11) является условием на размер кольца. Примем для примера, что тело резонатора изготовлено из плавленого кварца ( $\alpha = 0.55 \cdot 10^{-6}$  1/К,  $E = 72$  ГПа,  $\sigma = 0.17$ ) а кольцо – из алюминия ( $\alpha_M = 23 \cdot 10^{-6}$  1/К,  $E_M = 68$  ГПа). Тогда при  $R_0 = 25$  мм,  $b = 6$  мм из (5.11) получаем оценку необходимых размеров кольца:  $a/L_0 \approx 0.42$ , что является вполне практичным. Когда условие температурной независимости точно не выполнено, представленные формулы позволяют

рассчитать эффективный коэффициент теплового расширения тела резонатора с кольцом. В этом случае совокупный КТР очевидно составляет:

$$\alpha_{\text{eff}} \approx \alpha - \frac{2\sigma a}{L_0 E} (\alpha_M - \alpha) \left( \frac{R_0/b}{E_M} + \frac{2}{E} \right)^{-1}. \quad (5.12)$$

## 5.2 Тепловое расширение температурнонезависимого резонатора

Поскольку полученные аналитические формулы носят оценочный характер и не учитывают нелинейного характера теплового расширения, был предпринят расчет эффективного КТР резонатора с кольцом при помощи программы конечно-элементного анализа ANSYS. Расчёт был произведён для резонатора, изображённого на рисунке 5.1 со следующими размерами: длина тела  $L = 50$  мм, радиус тела  $R_0 = 25$  мм, радиус осевого отверстия – 10 мм, толщина кольца  $b = 6$  мм. Высота кольца  $a$  будет подобрана в результате расчёта. В качестве материала для тела и зеркал был выбран плавленый кварц, а для кольца – алюминий. В силу того, что кварцевое стекло имеет малый КТР, для материала кольца подойдут многие металлические конструкционные материалы.

Чтобы имитировать напряженное обжатие кварцевого тела кольцом, кольцо согласовывалось по внутреннему диаметру с внешним диаметром тела при повышенной температуре (100 °С). Из-за высокого КТР алюминия по отношению к кварцу с понижением температуры возникало напряженное обжатие. В симуляции исследовалось изменение расстояния между зеркалами такого резонатора с температурой. Для описания оптического контакта между телом и зеркалами был использован тип контакта «Bonded», исключающий любые относительные смещения точек поверхностей скреплённых объектов. Связь между телом и обжимным кольцом имела тип «No separation», допускающий малое взаимное смещение только в направлении поверхности между скреплёнными объектами. Для вычисления КТР резонатора при каждом выбранном значении температуры  $T$  проводилось две симуляции, в которых резонатор с кольцом охлаждался от 100 °С до температур  $T \pm 0.25$  °С. Для вычисления КТР разницу полученных в симуляциях смещений зеркал относительно друг друга нужно разделить на разницу температур (0.5 °С) и на длину резонатора. Моделирование позволяет варьировать геометрические параметры резонатора, изменять материалы его составляющих частей. В соответствии с формулой (5.12) КТР резонатора должен зависеть от размеров компенсационного кольца. Для достижения нулевого теплового расширения при температуре 23 °С в ходе симуляции подбиралась оптимальная высота кольца  $a$ . График зависимости  $\alpha_{\text{eff}}(a)$  при температуре 23 °С, полученный в результате моделирования, представлен на рисунке 5.4. При  $a \approx 8.6$  мм КТР длины резонатора обращается в ноль. Полученная зависимость линейна с наклоном  $-7.8 \cdot 10^{-8}$  [(1/K)/мм]. В свою очередь, по формуле (5.12) получаем:  $2\sigma \cdot (\alpha -$

$\alpha_M)/L_0(2 + R_0E/E_Mb) \approx -2.8 \cdot 10^{-8} [(1/K)/\text{мм}]$ . Расхождение результатов моделирования с аналитической формулой обусловлено приближенностью использованных выражений (5.2)-(5.9) и отсутствием учета влияния осевого отверстия и зеркал. Выражение (5.12) верно описывает зависимости  $\alpha_{\text{eff}}$  от размеров и свойств материалов.

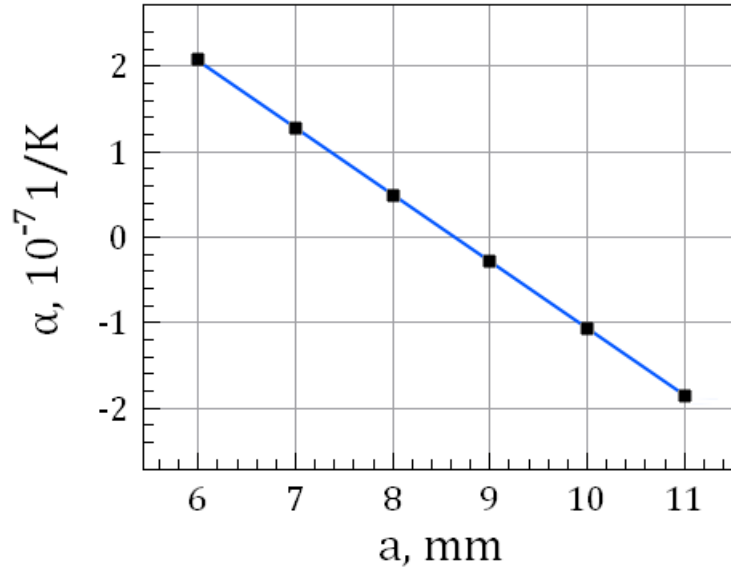


Рисунок 5.4 График зависимости коэффициента теплового расширения кварцевого резонатора с кольцом из алюминия от высоты  $a$  кольца. График получен в результате расчёта методом конечных элементов. КТР вычислялся для температуры 23 °С.

Коэффициент теплового расширения резонатора с компенсационным кольцом при разных температурах определяется температурными зависимостями упругих констант и КТР составляющих его материалов. Данные о таких зависимостях КТР, модуля Юнга и коэффициента Пуассона плавленого кварца были взяты в [130,131], а для алюминия – в [132,133]. Проведено моделирование тепловых деформаций исследуемого резонатора с оптимальным подобранным значением размера  $a$  кольца. Полученная зависимость величины  $\frac{\Delta L}{L}(T)$  для такой конструкции представлена на рисунке 5.5. Резонатор имеет температуру нулевого теплового расширения около 23 °С (именно для этой температуры производилась оптимизация параметра  $a$  кольца). Несовпадение координаты экстремума параболы с точкой 23 °С вызвано небольшой неточностью при установке размера  $a$  в модели. Линейный коэффициент температурной зависимости КТР исследуемого резонатора вблизи нулевой точки составляет  $8.1 \cdot 10^{-10} \frac{1}{K^2}$ . Для сравнения указанный параметр для температурно-компенсированного стекла ULE (номер в каталоге Corning 7972) равняется  $15.7 \cdot 10^{-10} 1/K^2$ . Зависимость  $\Delta L/L$  для ULE-резонатора была получена экспериментально в работе [89]. Стоит отметить, что для различных заготовок такого

стекла, даже относящихся к одной марке, положение нулевой точки и температурные коэффициенты могут различаться.

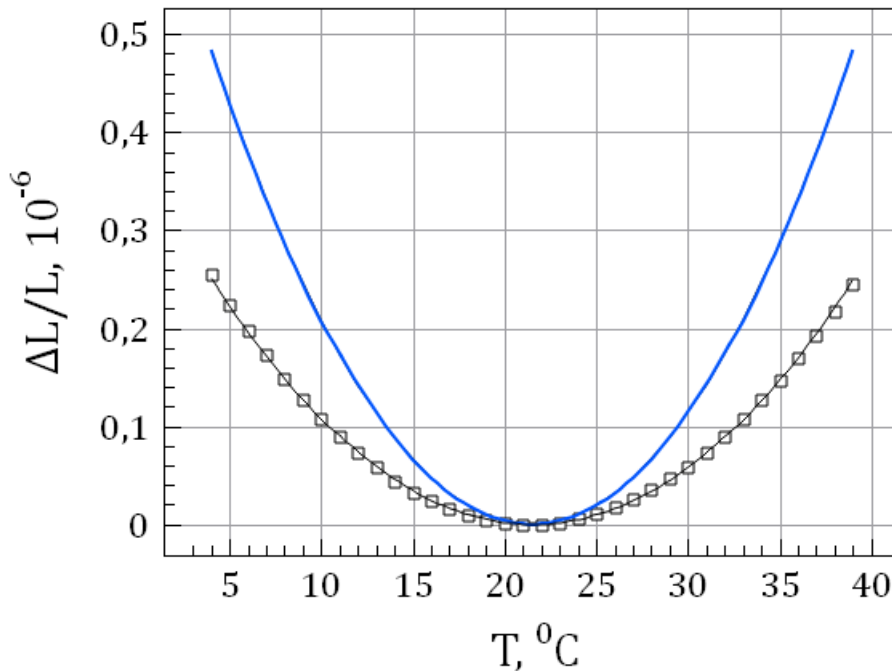


Рисунок 5.5 График теплового расширения длины резонаторов Фабри-Перо из ULE-стекла (синяя кривая) и кварца с компенсационным кольцом: серые квадраты – результат расчёта, черная кривая – их аппроксимация параболой.

Любопытно, что для ULE-резонаторов с кварцевыми подложками зеркал характерны смещение нулевой точки в область низких температур, а также более крутой наклон зависимости КТР от температуры, чем для случая с подложками из ULE [89].

Представленные оценки и численный расчёт показывают, что в комбинации монолитного оптического резонатора Фабри-Перо и компенсационного металлического кольца может быть достигнут нулевой КТР. Использование напрягающих элементов наиболее эффективно для резонаторов с небольшой величиной КТР (кварц). Температура нулевого теплового расширения в комбинированном устройстве зависит от начального напряжения, при котором осуществлялась посадка кольца. Моделирование демонстрирует, что чувствительность кварцевого резонатора с алюминиевым кольцом к флуктуациям температуры приблизительно в два раза меньше, чем у резонатора из ULE-стекла.

### 5.3 Основные результаты главы 5

1. Предложен способ компенсации теплового расширения, позволяющий создавать оптические опорные резонаторы с нулевым тепловым изменением длины из материалов, не обладающих таким свойством и проведено моделирование, подтвердившее эффективность подхода. Конструкция резонатора этого типа состоит из цилиндрического тела с осевым



отверстием для оптического излучения и пары зеркал. Тело резонатора сжато в радиальном направлении кольцом из материала, КТР (коэффициент теплового расширения) которого превосходит КТР тела. Размеры кольца подобраны так, чтобы при увеличении температуры сборки тенденция к тепловому расширению тела компенсировалась тенденцией к сжатию из-за уменьшения давления на тело резонатора со стороны кольца. Моделирование показало, что резонатор из плавленого кварца, обжатый алюминиевым кольцом, имеет точку нулевого теплового расширения и демонстрирует приблизительно в два раза меньшую чувствительность к изменению температуры в сравнении с резонатором из температурно-компенсированного стекла ULE (Corning 7972).

Получен патент RU 202420 U1 от 17.02.2021 на полезную модель «Устройство температурной стабилизации оптических резонаторов».

## Заключение

В работе были получены следующие основные результаты:

1. Предложен метод частичной компенсации тепловых шумов частоты излучения лазера, стабилизированного по основной моде резонатора Фабри-Перо  $LG_{00}$  и проведены соответствующие расчеты. Метод основан на том, что тепловой шум каждой отдельной моды определяется шумами в той области поверхности зеркала, на которой сосредоточена её интенсивность. Для оценки флуктуаций частоты основной моды используется сигнал биений оптических полей лаггер-гауссовой моды  $LG_{10}$  и лаггер-гауссовой моды с орбитальным моментом  $LG_{03*}$  того же резонатора. Моделирование показало возможность компенсации от 30 до 50 % тепловых шумов.
2. Рассчитаны координаты опор горизонтального резонатора длиной 48 см, обеспечивающие нулевые смещения и наклоны его зеркал под действием вертикальных возмущений. Показано, что вертикальный резонатор биконической формы в два раза менее чувствителен к вибрациям, чем резонатор цилиндрической формы с тем же максимальным диаметром. В соответствии с расчётами изготовлены горизонтальный и вертикальный резонаторы из температурно-компенсированного стекла ULE длиной 48 см и системы их подвеса в вакуумных камерах.
3. Осуществлена стабилизация частоты двух полупроводниковых лазеров с длиной волны излучения 698 нм по модам горизонтального и вертикального ULE-резонаторов длиной 48 см. Измеренная спектральная ширина на полувысоте сигнала биений указанных лазерных систем составляет  $< 1.5$  Гц и ограничена временем измерения. Девиация Аллана относительных флуктуаций частоты излучения каждой из лазерных систем составляет менее  $2 \cdot 10^{-15}$  на временах усреднения 30 мс – 10 с, что на порядок величины выше предела тепловых шумов. Доминирующий вклад в нестабильность частоты вносят шумы оптоэлектронных систем обратной связи. Полученные спектральные характеристики созданных лазеров достаточны для достижения уровня относительной нестабильности частоты  $10^{-17}$  стронциевого оптического репера в составе государственного первичного эталона единиц времени, частоты и национальной шкалы времени ГЭТ-1 при усреднении длительностью более 3 часов.
4. Показано что предел тепловых шумов монолитного резонатора уменьшается при использовании кристаллического материала вместо аморфного за счёт увеличения добротности механических резонансов. Основной вклад (более 90 %) дают шумы покрытий

и подложек зеркал. Зависимость предела тепловых шумов от длины резонатора  $L$  находится в диапазоне  $L^{-9/8} - L^{-10/8}$ .

5. Предложен ранее не использовавшийся материал для тела и подложек зеркал резонатора – кристаллический арсенид галлия и проведён расчёт тепловых шумов частоты такого резонатора. Использование арсенида галлия позволяет существенно упростить технологию создания кристаллических многослойных зеркал за счёт использования одного и того же материала подложки и отражающего покрытия. Предел тепловых шумов такого резонатора в 4.5 раза ниже, чем у резонатора из ULE-стекла с кристаллическими зеркалами на кварцевых подложках.
6. Определены характеристики двух опорных резонаторов Фабри-Перо из монокристаллического кремния с диэлектрическими покрытиями зеркал  $\text{SiO}_2/\text{Ta}_2\text{O}_5$ : резкость и чувствительность к вибрациям. Резкости резонаторов определены методом *ring-down* и составляют более 580000. Чувствительность частоты моды резонатора к вибрациям в системе подвеса за плоскость центра масс вычислена методом конечно-элементного анализа и составила  $10 \text{ Гц}/(\text{см} \cdot \text{с}^{-2})$ .
7. Спроектированы и созданы два высоковакуумных криостата с остаточным давлением менее  $10^{-8}$  мбар, позволяющие охлаждать опорные резонаторы из монокристаллического кремния до температуры нулевого теплового расширения (124 К). Охлаждение осуществляется радиационным теплообменом с заливным азотным экраном. Полученная величина нестабильности температуры составляет  $< 1 \text{ мК}$  на времени 1 час, что обеспечило дрейф частоты моды кристаллического кремниевого резонатора  $< 3 \text{ Гц}/\text{час}$ .
8. Разработана система подавления шумов остаточной амплитудной модуляции в методе Паунда-Драйвера-Холла с помощью активной стабилизации температуры кристалла ЭОМа и контроля напряжения на нём. Удалось экспериментально уменьшить влияние флуктуаций остаточной амплитудной модуляции на нестабильность частоты лазерной системы до уровня  $< 2 \cdot 10^{-16}$ , соответствующего пределу тепловых шумов криогенных кремниевых монокристаллических резонаторов.
9. Предложен способ компенсации теплового расширения, позволяющий создавать оптические опорные резонаторы с нулевым тепловым изменением длины из материалов, не обладающих таким свойством и проведено моделирование, подтвердившее эффективность подхода. Конструкция резонатора этого типа состоит из цилиндрического тела с осевым отверстием для оптического излучения и пары зеркал. Тело резонатора сжато в радиальном направлении кольцом из материала, КТР (коэффициент теплового расширения) которого превосходит КТР тела. Размеры кольца подобраны так, чтобы при увеличении температуры сборки тенденция к тепловому расширению тела компенсировалась тенденцией к сжатию из-за

уменьшения давления на тело резонатора со стороны кольца. Моделирование показало, что резонатор из плавленого кварца, обжатый алюминиевым кольцом, имеет точку нулевого теплового расширения и демонстрирует приблизительно в два раза меньшую чувствительность к изменению температуры в сравнении с резонатором из температурно-компенсированного стекла ULE (Corning 7972).

## Благодарности

Начну с благодарности моему научному руководителю – Николаю Николаевичу Колачевскому. Мне с детства хотелось заниматься наукой и так и сложилось благодаря тому, что Николай Николаевич принял меня в состав лаборатории, в которой я работаю уже почти семь лет. Сорокин Вадим Николаевич помогал мне писать диссертацию, упорядочить основные результаты и поддерживал, когда дело не ладилось. Хабарова Ксения Юрьевна была моим научным руководителем в магистратуре. Жизнь в лаборатории без её постоянного участия заметно бы опустела. Научное чутьё, отзывчивость и безустанная работа этих людей многие годы формирует творческий климат и оптимистичное настроение в нашей лаборатории.

Выражаю глубокую благодарность Масалову Анатолию Викторовичу за лекции, ценные обсуждения и за то, что поделился со мной идеей метода компенсации теплового расширения резонатора Фабри-Перо, которому посвящена часть данной диссертации.

Я очень благодарен моим коллегам: Кудярову Константину, Денису Крючкову и Гульнаре Вишняковой за их трудолюбие, профессионализм и постоянную готовность помочь, а также всему коллективу лаборатории оптики сложных квантовых систем за годы счастливой совместной работы.

## Литература

1. Басов Н.Г., Летохов В.С. Оптические Стандарты Частоты // *Успехи Физических Наук*, 1968, т. 96, № 4, стр. 585–631.
2. Ludlow A.D., Boyd M.M., Ye J. Optical atomic clocks // *Rev. Mod. Phys.*, 2015, vol. 87, № 2, P. 637–701.
3. Drever R.W.P. et al. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator // *Appl. Phys. B*, 1983, vol. 31, № 2, P. 97–105.
4. Oelker E. et al. Demonstration of  $4.8e-17$  stability at 1 s for two independent optical clocks // *Nat. Photonics*, 2019, vol. 13, № 10, P. 714–719.
5. Brewer S.M. et al.  $27\text{Al}^+$  Quantum-Logic Clock with a Systematic Uncertainty below  $1e-18$  // *Phys. Rev. Lett.*, 2019, vol. 123, № 3, P. 33201.
6. Gill P. When should we change the definition of the second // *Philos. Trans. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2011, vol. 369, № 1953, P. 4109–4130.
7. Safronova M.S. et al. Search for new physics with atoms and molecules // *Rev. Mod. Phys.*, 2018, vol. 90, № 2, P. 025008.
8. Sanner C. et al. Optical clock comparison for Lorentz symmetry testing // *Nature*, 2019, vol. 567, № 7747, P. 204–208.
9. Takamoto M. et al. Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks // *Nat. Photonics*, 2020, vol. 14, № 7, P. 411–415.
10. Godun R.M. et al. Frequency ratio of two optical clock transitions in  $171\text{Yb}^+$  and constraints on the time variation of fundamental constants // *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 113, № 21, P. 210801.
11. Beyer A. et al. The Rydberg Constant and Proton Size From Atomic Hydrogen // *Science*, 2017, vol. 358, № 6359, P. 79–85.
12. Derevianko A. Atomic clocks and dark-matter signatures // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016, vol. 723.
13. Wcisło P. et al. New bounds on dark matter coupling from a global network of optical atomic clocks // *Sci. Adv.*, 2018, vol. 4, № 12, P. 1–8.
14. Kennedy C.J. et al. Precision Metrology Meets Cosmology: Improved Constraints on Ultralight Dark Matter from Atom-Cavity Frequency Comparisons // *Phys. Rev. Lett.*, 2020, vol. 125, № 20, P. 201302.
15. Savalle E. et al. Searching for Dark Matter with an Optical Cavity and an Unequal-Delay Interferometer // *Phys. Rev. Lett.*, 2021, vol. 126, № 5, P. 051301.
16. Abich K. et al. In-Orbit Performance of the GRACE Follow-on Laser Ranging Interferometer // *Phys. Rev. Lett.*, 2019, vol. 123, № 3, P. 031101.
17. Thompson R. et al. A flight-like optical reference cavity for GRACE follow-on laser frequency

- stabilization // 2011 Joint Conference of the IEEE International Frequency Control and the European Frequency and Time Forum (FCS) Proceedings, 2011, P. 1-3.
18. *Kwee P. et al.* Stabilized high-power laser system for LIGO // *Opt. Express*, 2012, vol. 20, № 10, P. 459–465.
  19. *Kolkowitz S. et al.* Gravitational wave detection with optical lattice atomic clocks // *Phys. Rev. D*, 2016, vol. 94, № 12, P. 124043.
  20. *Dick G. et al.* Local oscillator induced degradation of medium-term stability in passive atomic frequency standards // *The 22nd Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Applications and Planning Meeting Proceedings*, 1990, P. 487–508.
  21. *Numata K., Kemery A., Camp J.* Thermal-noise limit in the frequency stabilization of lasers with rigid cavities // *Phys. Rev. Lett.*, 2004, vol. 93, № 25, P. 250602.
  22. *Zhang W. et al.* Ultrastable Silicon Cavity in a Continuously Operating Closed-Cycle Cryostat at 4 K // *Phys. Rev. Lett.*, 2017, vol. 119, № 24, P. 243601.
  23. *Robinson J.M. et al.* Crystalline optical cavity at 4 K with thermal noise limited instability and ultralow drift // *Optica*, 2019, vol. 6, № 2, P. 240–243.
  24. *Häfner S. et al.* 8e–17 Fractional Laser Frequency Instability With a Long Room-Temperature Cavity // *Opt. Lett.*, 2015, vol. 40, № 9, P. 2112.
  25. *Бердасов О.И. и др.* Ультростабильная лазерная система для спектроскопии часового перехода  $1S_0 - 3P_0$  в атомах Sr // *Квантовая Электроника*, 2017, т. 47, № 5, P. 400–405.
  26. *Schawlow A.L., Townes C.H.* Infrared and optical masers // *Phys. Rev.*, 1958, vol. 112, № 6, P. 1940–1949.
  27. *Lax M.* Classical noise. V. Noise in self-sustained oscillators // *Phys. Rev.*, 1967, vol. 160, № 2, P. 290–307.
  28. *Henry C.H.* Theory of the Linewidth of Semiconductor Lasers // *IEEE J. Quantum Electron.*, 1982, vol. 18, № 2, P. 259–264.
  29. *White A.D.* Frequency Stabilization of Gas Lasers // *IEEE J. Quantum Electron.*, 1965, vol. QE-1, № 8, P. 349–357.
  30. *Barger R.L., Sorem M.S., Hall J.L.* Frequency stabilization of a cw dye laser // *Appl. Phys. Lett.*, 1973, vol. 22, № 11, P. 573–575.
  31. *Wieman C.E., Gilbert S.L.* Laser-frequency stabilization using mode interference from a reflecting reference interferometer // *Opt. Lett.*, 1982, vol. 7, № 10, P. 480.
  32. *Hansch T.W., Couillard B.* Laser frequency stabilisation by polarization spectroscopy of a reflecting reference cavity // *Opt. Commun.*, 1980, vol. 35, № 3, P. 441–444.
  33. *Pound R. V.* Electronic frequency stabilization of microwave oscillators // *Rev. Sci. Instrum.*, 1946, vol. 17, № 11, P. 490–505.

34. Salomon C., Hils D., Hall J.L. Laser stabilization at the millihertz level // *J. Opt. Soc. Am. B*, 1988, vol. 5, № 8, P. 1576.
35. Diddams S.A. et al. An optical clock based on a single trapped  $88\text{Hg}^+$  ion // *Science*, 2001, vol. 293, № 5531, P. 825–828.
36. Young B.C. et al. Visible lasers with subhertz linewidths // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 82, № 19, P. 3799–3802.
37. Matei D.G. et al.  $1.5\ \mu\text{m}$  Lasers with Sub-10 mHz Linewidth // *Phys. Rev. Lett.*, 2017, vol. 118, № 26, P. 263202.
38. Dirscherl J. et al. A dye laser spectrometer for high resolution spectroscopy // *Opt. Commun.*, 1992, vol. 91, № 1–2, P. 131–139.
39. Seel S. et al. Cryogenic optical resonators: A new tool for laser frequency stabilization at the 1 Hz Level // *Conf. Quantum Electron. Laser Sci. - Tech. Dig. Ser.*, 1997, vol. 12, P. 219.
40. Webster S.A., Oxborrow M., Gill P. Subhertz-linewidth Nd:YAG laser // *Opt. Lett.*, 2004, vol. 29, № 13, P. 1497.
41. Ludlow A.D. et al. Compact, thermal-noise-limited optical cavity for diode laser stabilization at  $1\text{e-}15$  // *Opt. Lett.*, 2007, vol. 32, № 6, P. 641–643.
42. Alnis J. et al. Subhertz linewidth diode lasers by stabilization to vibrationally and thermally compensated ultralow-expansion glass Fabry-Pérot cavities // *Phys. Rev. A*, 2008, vol. 77, № 5, P. 053809.
43. Millo J. et al. Ultrastable lasers based on vibration insensitive cavities // *Phys. Rev. A*, 2009, vol. 79, № 5, P. 053829.
44. Tai Z. et al. Multi-cavity ultra-stable laser towards  $1\text{e-}18$  // arXiv:1802.01775, 2018.
45. Величанский В.Л. и др. О предельной ширине линии генерации инжекционного лазера // *Письма в ЖТФ*, 1978, т. 4, № 18, стр. 1087–1090.
46. Fleming M.W., Mooradian A. Spectral Characteristics of External-Cavity Controlled Semiconductor Lasers // *IEEE J. Quantum Electron.*, 1981, vol. 17, № 1, P. 44–59.
47. Mork J. et al. Instabilities in a laser diode with strong optical feedback // *Proc. SPIE*, 1993, vol. 1837, P. 90–104.
48. Vassiliev V. V. et al. Narrow-line-width diode laser with a high-Q microsphere resonator // *Opt. Commun.*, 1998, vol. 158, P. 305–312.
49. Liang W. et al. Whispering-gallery-mode resonator-based ultranarrow linewidth external-cavity semiconductor laser // *Opt. Lett.*, 2010, vol. 35, № 16, P. 2822–2824.
50. Debut A., Randoux S., Zemmouri J. Linewidth narrowing in Brillouin lasers: Theoretical analysis // *Phys. Rev. A*, 2000, vol. 62, № 2, P. 1–4.
51. Loh W. et al. Ultra-narrow linewidth Brillouin laser with nanokelvin temperature self-referencing

- // *Optica*, 2019, vol. 6, № 2, P. 152.
52. *Риле. Ф.* Стандарты частоты. Принципы и приложения, *Физматлит*, 2009, 511 стр.
  53. *Nevsky A.Y. et al.* Frequency comparison and absolute frequency measurement of I2-stabilized lasers at 532 nm // *Opt. Commun.*, 2001, vol. 192, № 3–6, P. 263–272.
  54. *Millერიoux Y. et al.* Towards an accurate frequency standard at  $\lambda=778$  nm using a laser diode stabilized on a hyperfine component of the Doppler-free two-photon transitions in rubidium // *Opt. Commun.*, 1994, vol. 108, № 1–3, P. 91–96.
  55. *Acef O.* Metrological properties of CO<sub>2</sub>/OsO<sub>4</sub> // *Opt. Commun.*, 1997, vol. 134, P. 479–486.
  56. *Olson J. et al.* Ramsey-Bordé Matter-Wave Interferometry for Laser Frequency Stabilization at 1e-16 Frequency Instability and below // *Phys. Rev. Lett.*, 2019, vol. 123, № 7, P. 073202.
  57. *Shang H. et al.* Prospects for 1e-18 Instability Laser Referenced on Thermal Atomic Ensembles // arXiv:2012.03430, 2020.
  58. *Julsgaard B. et al.* Understanding laser stabilization using spectral hole burning // *Optics Express*, 2007, vol. 15, № 18, P. 11444-11465.
  59. *Cook S., Rosenband T., Leibrandt D.R.* Laser-Frequency Stabilization Based on Steady-State Spectral-Hole burning in Eu<sup>3+</sup>:Y<sub>2</sub>SiO<sub>5</sub> // *Phys. Rev. Lett.*, 2015, vol. 114, № 25, P. 253902.
  60. *Theodor H., Nathalie P.* Frequency comb spectroscopy // *Nat. Photonics*, 2019, vol. 13, P. 146–157.
  61. *Allan D.W.* Statistics of Atomic Frequency Standards // *Proc. IEEE*, 1966, vol. 54, № 2, P. 221–230.
  62. *Westergaard P.G., Lodewyck J., Lemonde P.* Minimizing the Dick effect in an optical lattice clock // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 2010, vol. 57, № 3, P. 623–628.
  63. *Abbott B.P. et al.* LIGO: The laser interferometer gravitational-wave observatory // *Reports Prog. Phys.*, 2009, vol. 72, P. 113–132.
  64. *Buikema A. et al.* Sensitivity and performance of the Advanced LIGO detectors in the third observing run // *Phys. Rev. D*, 2020, vol. 102, № 6, P. 062003.
  65. *Geraci A.A. et al.* Searching for Ultralight Dark Matter with Optical Cavities // *Phys. Rev. Lett.*, 2019, vol. 123, № 3, P. 031304.
  66. *Jiao D. et al.* Sub-Hertz frequency stabilization of 1.55 $\mu$ m laser on Higher order HG<sub>mn</sub> mode // *Opt. Commun.*, 2020, vol. 463, № 3, P. 125460.
  67. *Schenzle A., Devoe R.G., Brewer R.G.* Phase-modulation laser spectroscopy // *Phys. Rev. A*, 1982, vol. 25, № 5, P. 2606–2621.
  68. *Whittaker E.A., Gehrtz M., Bjorklund G.C.* Residual amplitude modulation in laser electro-optic phase modulation // *J. Opt. Soc. Am. B*, 1985, vol. 2, № 8, P. 1320.
  69. *Domínguez A.E., Larcher W.E.O., Kozameh C.N.* Fundamental residual amplitude modulation in



- electro-optic modulators // arXiv:1710.10719, 2017.
70. Shen H. et al. Systematic and quantitative analysis of residual amplitude modulation in Pound-Drever-Hall frequency stabilization // *Phys. Rev. A*, 2015, vol. 92, № 6, P. 063809.
  71. Zhang W. et al. Reduction of residual amplitude modulation to 1e-6 for frequency modulation and laser stabilization // *Opt. Lett.*, 2014, vol. 39, № 7, P. 1980-1983.
  72. Li L. et al. Measurement and control of residual amplitude modulation in optical phase modulation // *Rev. Sci. Instrum.*, 2012, vol. 83, № 4, P. 043111.
  73. Yu Y., Wang Y., Pratt J.R. Active cancellation of residual amplitude modulation in a frequency-modulation based Fabry-Perot interferometer // *Rev. Sci. Instrum.*, 2016, vol. 87, № 3, P. 033101.
  74. Tai Z. et al. Electro-optic modulator with ultra-low residual amplitude modulation for frequency modulation and laser stabilization // *Opt. Lett.*, 2016, vol. 41, № 23, P. 5584.
  75. Bi J. et al. Suppressing residual amplitude modulation to the 1e-7 level in optical phase modulation // *Appl. Opt.*, 2019, vol. 58, № 3, P. 690.
  76. Жаднов Н.О. и др. О пределе теплового шума высокостабильных оптических резонаторов // *Квантовая электроника*, 2018, т. 48, № 5, стр. 425–430.
  77. Notcutt M. et al. Simple and compact 1-Hz laser system via an improved mounting configuration of a reference cavity // *Opt. Lett.*, 2005, vol. 30, № 14, P. 1815.
  78. Chen L. et al. Vibration-induced elastic deformation of Fabry-Perot cavities // *Phys. Rev. A*, 2006, vol. 74, № 5, P. 053801.
  79. Wu L. et al. 0.26-Hz-linewidth ultrastable lasers at 1557 nm // *Sci. Rep.*, 2016, vol. 6, № 24969.
  80. Häfner S. et al. A transportable interrogation laser system with an instability of mod  $\sigma_y=3e-16$  // *Opt. Express*, 2020, vol. 28, № 11, P. 16407–16416.
  81. Phelps F.M. Airy Points of a Meter Bar // *Am. J. Phys.*, 1966, vol. 34, № 5, P. 419–422.
  82. Swallows M.D. et al. Operating a 87Sr optical lattice clock with high precision and at high density // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 2012, vol. 59, № 3, P. 416–425.
  83. Vogt S. et al. Demonstration of a transportable 1 Hz-linewidth laser // *Appl. Phys. B*, 2011, vol. 104, № 4, P. 741–745.
  84. Chen Q.F. et al. A compact, robust, and transportable ultra-stable laser with a fractional frequency instability of 1e-15 // *Rev. Sci. Instrum.*, 2014, vol. 85, № 11, P. 113107.
  85. Swierad D. et al. Ultra-stable clock laser system development towards space applications // *Sci. Rep.*, 2016, vol. 6, № 33973.
  86. Thorpe M.J. et al. Measurement and real-time cancellation of vibration-induced phase noise in a cavity-stabilized laser // *Opt. Express*, 2010, vol. 18, № 18, P. 18744.
  87. Miller W. et al. Negative thermal expansion: A review // *J. Mater. Sci.*, 2009, vol. 44, № 20, P. 5441–5451.

88. *Garai J.* Correlation between thermal expansion and heat capacity // *Calphad*, 2006, vol. 30, № 3, P. 354–356.
89. *Legero T., Kessler T., Sterr U.* Tuning the thermal expansion properties of optical reference cavities with fused silica mirrors // *J. Opt. Soc. Am. B*, 2010, vol. 27, № 5, P. 914.
90. *Madhavan Unni P.K., Gunasekaran M.K., Kumar A.*  $\pm 30$   $\mu\text{K}$  temperature controller from 25 to 103°C: Study and analysis // *Rev. Sci. Instrum.*, 2003, vol. 74, P. 231–242.
91. *Jaseja T.S., Javan A., Townes C.H.* Frequency stability of He-Ne masers and measurements of length // *Phys. Rev. Lett.*, 1963, vol. 10, № 5, P. 165–167.
92. *Kessler T., Legero T., Sterr U.* Thermal noise in optical cavities revisited // *J. Opt. Soc. Am. B*, 2011, vol. 29, № 1, P. 178–184.
93. *Callen H.B., Greene R.F.* On a theorem of irreversible thermodynamics // *Phys. Rev.*, 1952, vol. 86, № 5, P. 702–710.
94. *Greene R.F., Callen H.B.* On a Theorem of Irreversible Thermodynamics. II\* // *Phys. Rev.*, 1952, vol. 88, № 6.
95. *Nawrodt R. et al.* A new apparatus for mechanical Q-factor measurements between 5 and 300 K // *Cryogenics*, 2006, vol. 46, № 10, P. 718–723.
96. *Yamamoto K.* Study of the thermal noise caused by inhomogeneously distributed loss // *PhD Thesis University of Tokyo*, 2000.
97. *Zener C.M., Siegel S.* Elasticity and Anelasticity of Metals // *J. Phys. Chem.*, 1949, vol. 53, № 9, P. 1468.
98. *Gillespe A., Raab F.* Thermally excited vibrations of the mirrors of laser interferometer gravitational-wave detectors // *Phys. Rev. D*, 1995, vol. 52, № 2, P. 577–585.
99. *Levin Y.* Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach // *Phys. Rev. D*, 1998, vol. 57, № 2, P. 659.
100. *Notcutt M. et al.* Contribution of thermal noise to frequency stability of rigid optical cavity via Hertz-linewidth lasers // *Phys. Rev. A*, 2006, vol. 73, № 3, P. 031804.
101. *Schroeter A. et al.* On the mechanical quality factors of cryogenic test masses from fused silica and crystalline quartz // arXiv:0709.4359, 2007.
102. *Corning inc.* ULE Ultra Low Expansion Glass Corning Code 7972, Product Information.
103. *Harry G.M. et al.* Titania-doped tantala/silica coatings for gravitational-wave detection // *Class. Quantum Gravity*, 2007, vol. 24, № 2, P. 405–415.
104. *Kessler T. et al.* A sub-40-mHz-linewidth laser based on a silicon single-crystal optical cavity // *Nat. Photonics*, 2012, vol. 6, P. 687–692.
105. *Cole G.D. et al.* Tenfold reduction of Brownian noise in high-reflectivity optical coatings // *Nat. Photonics*, 2013, vol. 7, № 8, P. 644–650.

106. *Cole G.D. et al.* Monocrystalline Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As heterostructures for high-reflectivity high-Q micromechanical resonators in the megahertz regime // *Appl. Phys. Lett.*, 2008, vol. 92, № 26, P. 30–33.
107. *Penn S.D. et al.* High quality factor measured in fused silica // *Rev. Sci. Instrum.*, 2001, vol. 72, № 9, P. 3670–3673.
108. *Uchiyama T. et al.* Mechanical quality factor of a cryogenic sapphire test mass for gravitational wave detectors // *Phys. Lett. A*, 1999, vol. 261, P. 5–11.
109. *Hopcroft M., Nix W., Kenny T.* What is the Young's Modulus of Silicon? // *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2010, vol. 19, № 2, P. 229–238.
110. *Evans M. et al.* Thermo-optic noise in coated mirrors for high-precision optical measurements // *Phys. Rev. D*, 2008, vol. 78, № 10, P. 102003.
111. *Braginsky V.B., Gorodetsky M.L., Vyatchanin S.P.* Thermodynamical fluctuations and photo-thermal shot noise in gravitational wave antennae // *Phys. Lett. A*, 1999, vol. 264, № 1, P. 1–10.
112. *Allen L. et al.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes // *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 45, № 11, P. 31–35.
113. *Maeder R.* The Mathematica Programmer II, *Academic Press*, 1996.
114. *Mandelbrot B.B., Ness J.W.V.* Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications // *SIAM Rev.*, 1968, vol. 10, № 4, P. 422–437.
115. *Golovizin A. et al.* Ultrastable Laser System for Spectroscopy of the 1.14 μm Inner-Shell Clock Transition in Tm and Its Absolute Frequency Measurement // *J. Russ. Laser Res.*, 2019, vol. 40, № 6, P. 540–546.
116. *Хабарова К.Ю. и др.* Короткая оптоволоконная линия связи с системой компенсации фазовых шумов для передачи сигналов оптической частоты // *Квантовая Электроника*, 2017, т. 47, № 9, стр. 794–797.
117. *Жаднов Н.О. и др.* Длинные резонаторы ULE с относительной скоростью дрейфа частоты 5e-16/с для стабилизации частоты лазерного излучения // *Краткие сообщения по физике ФИАН*, 2020, т. 9, стр. 3–11.
118. *Chen Q.F., Nevsky A., Schiller S.* Locking the frequency of lasers to an optical cavity at the 1.6e-17 relative instability level // *Appl. Phys. B*, 2012, vol. 107, № 3, P. 679–683.
119. *Farsi A. et al.* Photothermal and thermo-refractive effects in high reflectivity mirrors at room and cryogenic temperature // *J. Appl. Phys.*, 2012, vol. 111, № 4, P. 043101.
120. *Okada Y., Tokumaru Y.* Precise determination of lattice parameter and thermal expansion coefficient of silicon between 300 and 1500 K // *J. Appl. Phys.*, 1984, vol. 56, № 2, P. 314–320.
121. *Droste S. et al.* Optical frequency dissemination for metrology applications // *Comptes Rendus Phys.*, 2015, vol. 16, № 5, P. 524–530.

122. *Beloy K. et al.* Frequency ratio measurements with 18-digit accuracy using a network of optical clocks // *Nature*, 2021, vol. 591, P. 564–569.
123. *Wei D.T.* Ion beam interference coating for ultralow optical loss // *Appl. Opt.*, 1989, vol. 28, № 14, P. 2813.
124. *Жаднов Н.О. и др.* Новое поколение охлаждаемых высокодобротных резонаторов Фабри – Перо для ультрастабильных лазеров // *Квантовая электроника*, 2017, vol. 47, № 5, P. 1–5.
125. *Kudeyarov K. et al.* Laser systems stabilized to cryogenic silicon cavities for precision measurements // *EPJ Web Conf.*, 2019, vol. 220, № 03020.
126. *Жаднов Н.О. и др.* Вклад температурных дрейфов в нестабильность частоты кремниевых резонаторов Фабри – Перо // *Квантовая электроника*, 2021, т. 49, № 5, стр. 424–428.
127. *Крючков Д.С. и др.* Компенсация флуктуаций остаточной амплитудной модуляции в оптоэлектронной системе стабилизации частоты лазерного излучения // *Квантовая электроника*, 2020, т. 6, № 50, стр. 590–594.
128. *Shirasaki M.* Temperature insensitive design of Fabry-Perot etalon // *IEEE Photonics Technol. Lett.*, 1999, vol. 11, № 11, P. 1431–1433.
129. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том 7. Теория упругости // *Наука*, 2007.
130. *Beattie J.A. et al.* An Experimental Study of the Absolute Temperature Scale VIII. The Thermal Expansion and Compressibility of Vitreous Silica and the Thermal Dilation of Mercury // *Proc. Am. Acad. Arts Sci.*, 1941, vol. 74, № 11, P. 371–388.
131. *Fukuhara M., Sanpei A., Shibuki K.* Low Temperature-Elastic Moduli, Debye Temperature and Internal Dilational and Shear Frictions of Fused Quartz // *J. Mater. Sci.*, 1997, vol. 32, P. 1201–1211.
132. *Kroeger F.R., Swenson C.A.* Absolute linear thermal-expansion measurements on copper and aluminum from 5 to 320 K // *J. Appl. Phys.*, 1977, vol. 48, P. 853.
133. *Hopkins D.C. et al.* Extreme thermal transient stress analysis with pre-stress in a metal matrix composite power package // *Proc. - IMAPS Int. Conf. Exhib. High Temp. Electron. HiTEC 2012*, 2012, P. 361–372.
134. *Riley W.J.* Handbook of Frequency Stability Analysis // *NIST Special Publication 1065*, 1994.
135. *Rutman J., Walls F.L.* Characterization of Frequency Stability in Precision Frequency Sources // *Proc. IEEE*, 1991, vol. 79, № 7, P. 952–960.
136. *Быков В.П., Силичев О.О.* Лазерные резонаторы // *Физматлит*, 2004, 320 стр.
137. *Fox R.W., Oates C.W., Hollberg L.W.* Stabilizing diode lasers to high-finesse cavities // *Experimental Methods in the Physical Sciences*, 2003, vol. 40, 1–46 p.
138. *Ананьев Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки // *Наука*, 1990, 264 стр.
139. *Солимено С., Крозиньяни Б., Порто П.Д.* Дифракция и волноводное распространение

оптического излучения // *Мур*, 1989, 664 стр.

140. *Chelkowski S., Hild S., Freise A.* Prospects of higher-order Laguerre-Gauss modes in future gravitational wave detectors // *Phys. Rev. D*, 2009, vol. 79, № 12, P. 122002.
141. *Zhang J. et al.* Characterization of electrical noise limits in ultra-stable laser systems // *Rev. Sci. Instrum.*, 2016, vol. 87, № 12, P. 123105.
142. *Rakhmanov M. et al.* Dynamic resonance of light in Fabry-Perot cavities // *Phys. Lett. A*, 2002, vol. 305, № 5, P. 239–244.
143. *Gray J.E., Allan D.W.* Method for Estimating the Frequency Stability of an Individual Oscillator. // *28th Annu. Symp. Freq. Control*, 1974, P. 243–246.
144. *Kramer G., Klische W.* Multi-channel synchronous digital phase recorder // *IEEE Int. Freq. Control Symp. PDA Exhib.*, 2001, P. 144–151.

## Приложение А. Характеристики стабильности и шумов частоты

Частота сигнала любого реального генератора гармонических колебаний подвержена воздействию большого количества плохо поддающихся контролю физических процессов. Вследствие этого она флуктуирует случайным образом. Эти флуктуации называют шумом, а для их анализа используют статистические методы. Количественные значения статистических характеристик генераторов высокостабильной частоты, таких как ультрастабильные лазерные системы с опорным резонатором, позволяют оценить качество генератора и сравнивать различные системы между собой.

Для описания мгновенного значения выходного сигнала генератора будем использовать формулу:

$$U(t) = [U_0 + \Delta U_0(t)] \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi(t)), \quad (\text{A.1})$$

где  $U$  представляет собой, например, напряженность лазерного поля. Для описания флуктуаций частоты генераторов, работающих в разных спектральных диапазонах, принято пользоваться понятием относительных (нормированных) флуктуаций:

$$y(t) = \frac{\Delta\nu(t)}{\nu_0} = \frac{1}{\nu_0} \Delta \left( \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (\text{A.2})$$

Рассмотрим зависимость от времени флуктуирующей величины  $y(t)$ . Чаще всего в эксперименте данная функция бывает представлена в виде последовательности дискретных отсчетов  $\bar{y}_i$ , усреднённых за время  $\tau_0$  и называемых нормированными девиациями частоты:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{\tau_0} \cdot \int_{t_i}^{t_i + \tau_0} y(t) dt, \quad i = \overline{1, N}. \quad (\text{A.3})$$

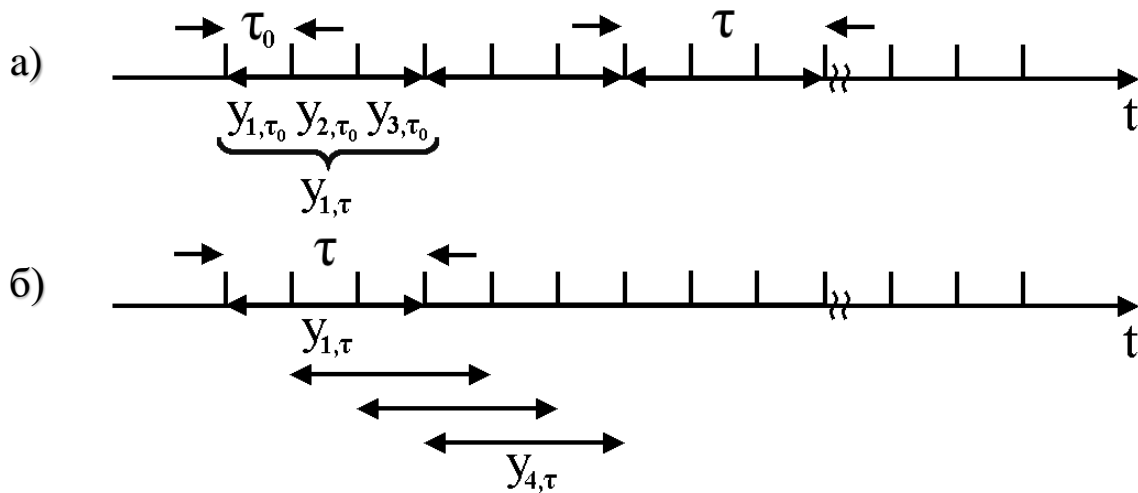
Статистическое описание флуктуаций случайной величины, представленной выборкой  $\{\bar{y}_i\}$  при помощи понятий среднего значения и стандартного отклонения часто бывает затруднено наличием корреляций. Как известно, если между элементами выборки присутствует зависимость, то центральная предельная теорема становится неприменима и вышеупомянутые статистические величины становятся малоинформативными, так как не ясно к какому виду распределения вероятности они относятся. В зависимости от характера флуктуаций среднее значение, стандартное отклонение и вид распределения могут быть различными на разных фрагментах выборки. Наборы последовательных измерений частоты генераторов гармонических колебаний часто имеют внутренние корреляции.

*Временное описание флуктуаций частоты*

Для характеристики стабильности частоты различных осцилляторов, в том числе лазеров, принято пользоваться величиной, получившей название девиации Аллана ( $\sigma_y(\tau_0)$ ). Вычисление дисперсии Аллана производится по следующей формуле [61]:

$$\sigma_y^2(\tau_0) = \left\langle \sum_{i=1}^2 (\bar{y}_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \bar{y}_j)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \rangle \quad (\text{A.4})$$

где  $\bar{y}_{1,2}$  - средние значения частоты на последовательных интервалах времени, длиной  $\tau_0$ . Таким образом, для нахождения  $\sigma_y(\tau_0)$  необходимо измерить и запомнить  $N$  средних значений частоты на последовательных промежутках времени длительностью  $\tau_0$  (без мертвого времени), затем усреднить квадраты разностей частот между парами соседних измерений, поделить на 2 и извлечь квадратный корень. Для нахождения дисперсии Аллана на большем времени измерения, например, при  $\tau = 3\tau_0$  вычисляются средние значения  $\bar{y}_{1,\tau} = (\bar{y}_{1,\tau_0} + \bar{y}_{2,\tau_0} + \bar{y}_{3,\tau_0})/3$ ,  $\bar{y}_{2,\tau} = (\bar{y}_{4,\tau_0} + \bar{y}_{5,\tau_0} + \bar{y}_{6,\tau_0})/3$  и так далее (рисунок А.1 (а)).



*Рисунок А.1 Вычисление девиации Аллана для  $\tau = 3\tau_0$  (а), вычисление девиации Аллана с пересекающимися участками данных (б).*

Рассчитать девиацию Аллана для промежутков времени усреднения вплоть до  $(N - 1)\tau_0$ , а также уменьшить погрешность позволяет использование девиации Аллана с пересекающимися участками данных (рисунок А.1 (б)) [134]:

$$\sigma_y^2(m\tau_0) = \frac{1}{2m^2(N - 2m + 1)} \sum_{j=1}^{N-2m+1} \left( \sum_{i=j}^{j+m-1} (\bar{y}_{i+m} - \bar{y}_i) \right)^2 \quad (\text{A.5})$$

Погрешность вычисления девиации Аллана описывается распределением  $\chi^2$  (для суммы квадратов независимых стандартных нормальных случайных величин) и зависит от типов шумов

в сигнале, объёма выборки измерений, способа расчёта девиации. Приблизительно оценить размер доверительного интервала  $\sigma_y(\tau)$  можно как  $\pm\sigma_y/\sqrt{N}$ . Подробное исследование погрешности девиации Аллана изложено в [134].

### Спектральное описание флуктуаций частоты

Девиация Аллана хорошо демонстрирует зависимость нестабильности сигнала от времени его усреднения. Для детального описания шумовых процессов в сигнале частоты принято пользоваться величиной спектральной плотности мощности флуктуаций частоты. Автокорреляционная функция относительных флуктуаций частоты  $y$  имеет вид:

$$R_y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t + \tau)y(t)dt. \quad (\text{A.6})$$

Тогда, в соответствии с теоремой Хинчина–Колмогорова, спектральная плотность мощности относительных флуктуаций частоты будет вычисляться по формуле:

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) \cdot \exp(-2\pi i f \tau) d\tau, \quad \left[ \frac{1}{\Gamma_{Ц}} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Наравне с  $S_y(f)$  используются так же функции спектральной плотности мощности флуктуаций частоты  $S_\vartheta(f) = \vartheta_0^2 \cdot S_y(f)$ ,  $\left[ \frac{\Gamma_{Ц}^2}{\Gamma_{Ц}} \right]$  и фазы  $S_\varphi(f) = S_y(f) \cdot \frac{\vartheta_0^2}{f^2}$ ,  $\left[ \frac{\text{рад}^2}{\Gamma_{Ц}} \right]$ . На практике для вычисления спектральной плотности мощности флуктуаций частоты используют оценку:

$$S_y(f) = \frac{|\langle F[\bar{y}_i](f) \rangle \cdot \tau_0|^2}{T}, \quad (\text{A.8})$$

где  $\langle F[\bar{y}_i](f) \rangle$  – усреднённое по нескольким наборам данных  $\{\bar{y}_i\}$  дискретное преобразование Фурье,  $T$  – полное время измерения.

Исследования различных стандартов частоты показали, что их характерные функции  $S_y(f)$  могут быть с хорошей точностью представлены в виде суммы пяти шумовых процессов, со спектральными плотностями, имеющими вид степенных функций [135] (таблица А.1):

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^2 h_\alpha f^\alpha. \quad (\text{A.9})$$

$S_y(f)$	$S_\varphi(f)$	Тип шума	$\sigma_y^2(\tau)$
$h_{-2}f^{-2}$	$\vartheta_0^2 h_{-2}f^{-4}$	Случайные уходы частоты	$(2\pi^2 h_{-2}/3)\tau^{+1}$
$h_{-1}f^{-1}$	$\vartheta_0^2 h_{-2}f^{-3}$	Фликкер-шум частоты	$2h_{-1} \ln 2 \tau^0$



$h_0 f^0$	$\vartheta_0^2 h_0 f^{-2}$	Белый шум частоты (случайные уходы фазы)	$(h_0/2)\tau^{-1}$
$h_1 f^1$	$\vartheta_0^2 h_1 f^{-1}$	Фликкер-шум фазы	$h_1 [1.038 + 3 \ln(2\pi f_h \tau)] \cdot \tau^{-2} / 4\pi^2$
$h_2 f^2$	$\vartheta_0^2 h_2 f^0$	Белый шум фазы	$[3h_2 f_h / (4\pi^2)] \cdot \tau^{-2}$

Таблица А.1 Компоненты спектральной плотности флуктуаций частоты со степенной частотной зависимостью  $S_y(f) = h_\alpha f^\alpha$  и соответствующие им компоненты спектральной плотности флуктуаций фазы  $S_\varphi(f)$ . Значения дисперсии Аллана  $\sigma_y^2(\tau)$  вычислены в предположении наличия низкочастотного фильтра с частотой среза  $f_h$ ,  $2\pi f_h \tau \gg 1$  (это предположение необходимо чтобы избежать расходимости интеграла (А.12)).

Случайные уходы частоты обычно бывают вызваны изменениями факторов окружающей среды (температуры, давления) и вибрациями. Считается, что фликкер-шум частоты характерен для резонаторов в кварцевых генераторах, водородных мазеров, полупроводниковых лазеров. Кроме того, спектральную характеристику  $1/f$  имеет тепловой шум опорных резонаторов Фабри-Перо в оптических атомных часах. Белый шум частоты возникает в активных стандартах из-за теплового шума в петле обратной связи генератора и в пассивных стандартах из-за пуассоновского шума фотонов или атомов. Источником фликкер-шума фазы чаще всего являются шумы электроники. Белый шум фазы обычно проявляется на высоких частотах и может быть уменьшен при помощи фильтрации выходного сигнала генератора частоты.

Если частота генератора линейно дрейфует со временем  $y(t) = kt$ , то  $\bar{y}_1 = (kt_0 + k(t_0 + \tau))/2$ ,  $\bar{y}_2 = (k(t_0 + \tau) + k(t_0 + 2\tau))/2$ , из чего следует:

$$\sigma_y(\tau) = \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \tau. \quad (\text{A.10})$$

Для сигнала с модулированной частотой  $y(t) = \frac{\delta\vartheta_0}{\vartheta_0} \sin(2\pi f_m t)$ :

$$\sigma_y(\tau) = \frac{\delta\vartheta_0}{\vartheta_0} \frac{\sin^2(\pi f_m t)}{\pi f_m t}. \quad (\text{A.11})$$

*Переход от частотного к временному представлению флуктуаций частоты*

Связь функции спектральной плотности мощности флуктуаций частоты и дисперсией Аллана задаётся следующим соотношением [52]:

$$\sigma_y^2(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f) \frac{\sin^4(\pi f t)}{\pi f t} df. \quad (\text{A.12})$$

Таким образом, зависимость девиации Аллана от времени усреднения носит различный характер для разных типов шумов, присутствующих в сигнале частоты (Рисунок А.2 (а)). Благодаря этому

свойству по наклону графика девиации Аллана в двойном логарифмическом масштабе возможно определить преобладающий тип шума в выбранном спектральном диапазоне.

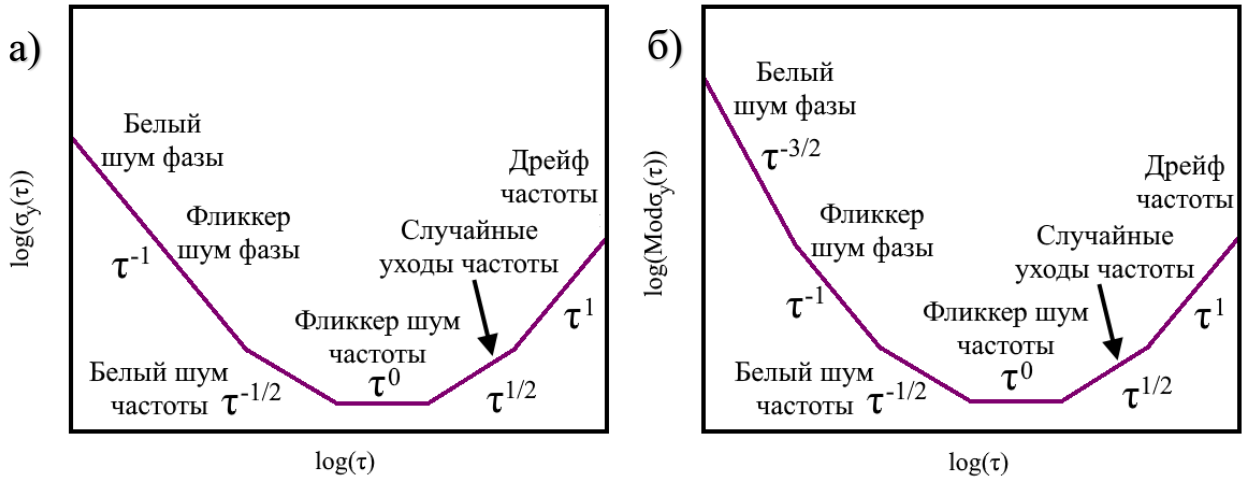


Рисунок А.2 Девиация Аллана (а) и модифицированная девиация Аллана (б) для разных типов шумов.

Обыкновенная девиация Аллана имеет одинаковую частотную зависимость для белого и фликкер-шумов фазы. Чтобы дифференцировать эти два типа шумов можно пользоваться модифицированной формулой [135]:

$$Mod\sigma_y^2(n\tau_0) = \frac{1}{2n^2\tau_0^2} \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{i+2n} - 2x_{i+n} - x_i)^2 \right\rangle. \quad (A.13)$$

Графики  $Mod\sigma_y(\tau)$  белого и фликкер шумов фазы имеют наклоны, соответствующие зависимостям  $\tau^{-3/2}$  и  $\tau^{-1}$  соответственно (Рисунок А.2 (б)).

#### Спектральная линия лазерного источника

Нетрудно показать, что частотные шумы приводят к размытию мощности лазерного излучения в окрестности среднего значения частоты. Спектральной линией одночастотного лазера называют распределение плотности мощности электрического поля в излученной волне в зависимости от частоты. Ширину этого спектрального распределения на половине высоты принято называть шириной линии. Ширина линии определяет минимальное спектральное разрешение, которое лазер способен обеспечить. Форма линии определяется типами шумов, преобладающими в сигнале частоты, и далеко не всегда может быть описана огибающей в виде функции Лоренца или Гаусса. Обычно линия лазера зависит от времени измерения. В качестве примера можно рассмотреть спектральную плотность мощности с большим вкладом фликкер-шума частоты ( $1/f$ ). Для больших времен наблюдения центральная частота линии будет дрейфовать. В данном случае не будет однозначно определённой ширины линии, поскольку

измеренный спектр мощности зависит от времени наблюдения. В некоторых случаях спектр мощности можно вычислить исходя из заданной  $S_\varphi(f)$  [52]. Например, для белого шума частоты  $S_\varphi(f) = \frac{A}{f^2}$  спектр мощности лазера имеет вид функции Лоренца с шириной на полувысоте  $\Delta\nu_{1/2} = \pi A$ .

## Приложение Б. Стабилизация частоты лазера по опорному резонатору

В данном разделе приведены основные теоретические и практические сведения, позволяющие осуществить стабилизацию частоты лазерного излучения по опорному оптическому резонатору при помощи метода Паунда-Драйвера-Холла (ПДХ). Введены основные характеристики и описаны физические свойства резонаторов Фабри-Перо. Изложен принцип работы ПДХ-привязки, приведены базовые сведения и приёмы для его практической реализации.

### Б.1 Свойства резонаторов Фабри-Перо

Резонатор Фабри-Перо представляет собой простейший вид оптического интерферометра и состоит из пары зеркал, установленных на одной оптической оси напротив друг друга (рисунок Б.1).

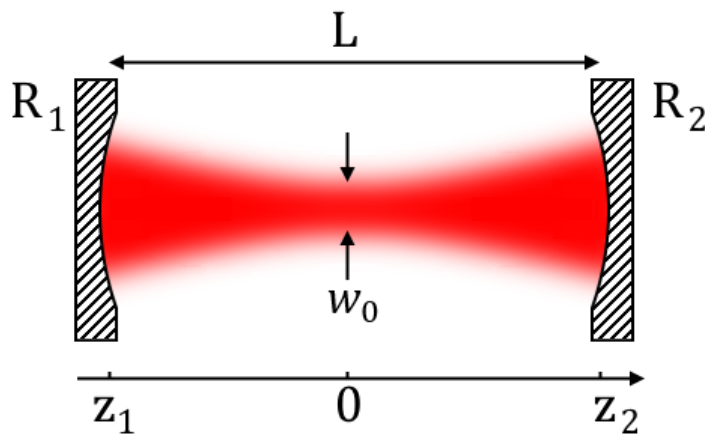


Рисунок Б.1 Оптический резонатор Фабри-Перо, сформированный парой вогнутых сферических зеркал с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ .

Длина  $L$ , радиусы кривизны зеркал  $R_1$  и  $R_2$ , и их амплитудные коэффициенты отражения  $r_1$  и  $r_2$ , частота излучения  $\nu$  определяют следующие основные характеристики резонатора Фабри-Перо:

- Область свободной дисперсии или межмодовое расстояние  $FSR$  – разность частот двух соседних  $TEM_{00}$  мод:

$$FSR = c/2L = 1/t_{rt} \quad (Б.1)$$

- Время жизни фотона в моде резонатора  $\tau$ :

$$\tau = -\frac{2L/c}{\ln(r_1^2 r_2^2)} \approx \frac{1}{FSR} \cdot \frac{1}{1 - r_1^2 r_2^2} \quad (\text{Б.2})$$

- Ширина резонансной линии:

$$\delta\vartheta = 1/2\pi\tau \quad (\text{Б.3})$$

- Добротность резонатора:

$$Q = \vartheta/\delta\vartheta = 2\pi \cdot \vartheta \cdot \tau \quad (\text{Б.4})$$

- Резкость резонатора:

$$F^* = \frac{FSR}{\delta\vartheta} = 2\pi \cdot \frac{\tau}{t_{rt}} = \frac{2\pi}{1 - r_1^2 r_2^2}. \quad (\text{Б.5})$$

Пусть на интерферометр Фабри-Перо с указанными выше характеристиками вдоль оптической оси падает монохроматическое излучение с частотой  $\vartheta$ . Пусть  $t_1 = \sqrt{1 - r_1^2}$ ,  $t_2 = \sqrt{1 - r_2^2}$  – амплитудные коэффициенты пропускания зеркал, а эффекты поглощения и рассеяния света в зеркалах пренебрежимо малы. Можно показать, что для излучения на частоте, кратной  $FSR$ , интерферометр окажется полностью прозрачным. Указанный эффект возникает в результате интерференции многократно переотражённых внутри резонатора лучей. При этом амплитудный коэффициент пропускания (отношение амплитуд прошедшей и падающей волн) зависит от частоты излучения как [52]:

$$t_{FP}(\vartheta) = \frac{E_T}{E_0} = \frac{t_1 t_2 \exp(-2\pi i \vartheta \cdot L/c)}{1 - r_1 r_2 \exp(-2\pi i \vartheta \cdot 2L/c)}, \quad (\text{Б.6})$$

а амплитудный коэффициент отражения (отношение амплитуд отражённой и падающей волн):

$$r_{FP}(\vartheta) = \frac{E_R}{E_0} = \frac{r_1 - r_2(r_1^2 + t_1^2) \exp(-2\pi i \vartheta \cdot 2L/c)}{1 - r_1 r_2 \exp(-2\pi i \vartheta \cdot 2L/c)}. \quad (\text{Б.7})$$

Коэффициент пропускания интерферометра Фабри-Перо по интенсивности:

$$T_{FP}(\vartheta) = \frac{E_T E_T^*}{E_0^2} = \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(2\pi\vartheta/FSR)}. \quad (\text{Б.8})$$

Пики пропускания интерферометра возникают, когда набег фазы световой волны за двойной проход интерферометра составит  $q \cdot 2\pi$ , где  $q \in \mathbb{N}$ . В таком случае между зеркалами формируется стоячая волна. Максимумы интерференционной картины становятся более острыми с увеличением числа парциальных волн, вносящих вклад в прошедшую волну, то есть с увеличением коэффициента отражения зеркал (Рисунок Б.2).

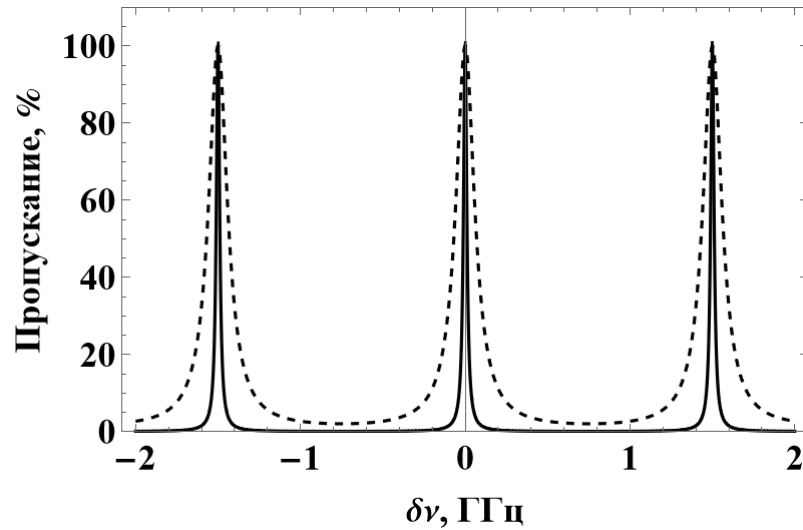


Рисунок Б.2 Зависимость мощности, прошедшей через интерферометр Фабри-Перо, от частоты излучения представляет собой функцию Эйри. График соответствует резонатору с  $FSR = 1.5$  ГГц ( $L = 10$  см). Сплошная линия для  $r_1^2 = r_2^2 = 0.95$ , пунктирная линия -  $r_1^2 = r_2^2 = 0.75$ . Эффекты поглощения и рассеяния в зеркалах не учтены.

Вблизи резонанса ( $|\vartheta - \vartheta_0| \ll FSR$ ) функцию  $T_{FP}(\vartheta)$  (Б.8) можно преобразовать, разложив косинус в знаменателе в ряд:

$$T_{FP}(\vartheta) \approx \frac{t_1^2 t_2^2}{16 \cdot r_1 r_2 \pi^2 \cdot \frac{L^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{(\vartheta - \vartheta_0)^2 + \left( \frac{1 - r_1 r_2}{\pi \sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{c}{2L} \right)^2}. \quad (\text{Б.9})$$

Полученное выражение задаёт функцию Лоренца с шириной  $\delta\vartheta = \frac{1 - r_1 r_2}{\pi \sqrt{r_1 r_2}} \cdot \frac{c}{2L}$ . Функция пропускания интерферометра Фабри-Перо имеет вид, характерный для резонансного фильтра. Поэтому невозможно обеспечить привязку частоты лазера к моде резонатора с полосой шире  $\delta\vartheta$ , используя прошедший свет.

Отражение света от реальных зеркал сопряжено с потерями на поглощение и рассеяние. Эти факторы ограничивают максимальную пропускаемую резонатором мощность (рисунок Б.3).

Обычно опорные резонаторы для оптических часов имеют зеркала с коэффициентом отражения по мощности  $r^2 > 0,99995$  и резкостью более 100000. Для нахождения величин резкости, добротности, коэффициентов отражений зеркал резонаторов принято использовать метод ring-down. Лазерное излучение заводится в моду резонатора, а затем резко прерывается. После выключения света лазера на выходе резонатора наблюдается экспоненциальное затухание мощности прошедшего света с постоянной времени  $\tau$ . Время жизни фотона в моде для высокодобротных резонаторов составляет от нескольких единиц до сотен микросекунд. Измерение этого затухания при помощи достаточно быстрого фотодетектора не представляет большой сложности.

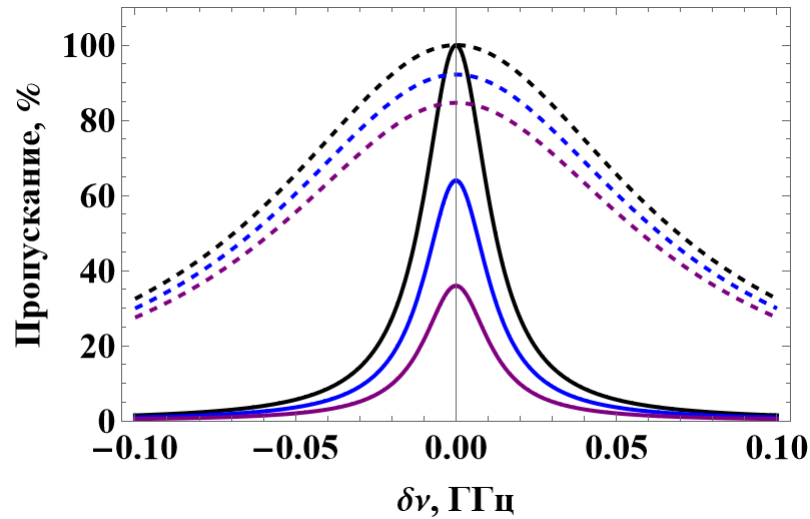


Рисунок Б.3 Контуры мощности пропускания интерферометра Фабри-Перо. Сплошные линии для  $r_1^2 = r_2^2 = 0.95$ , пунктирные линии -  $r_1^2 = r_2^2 = 0.75$ . Черные, синие и фиолетовые контуры соответствуют коэффициентам  $l^2$  потерь зеркал ( $l^2 = 1 - r^2 - t^2$ ) 0, 0.01 и 0.02 соответственно.

Резонатор, составленный из плоских зеркал, имеет большие дифракционные потери, поэтому для создания высокодобротных резонаторов обычно используются вогнутые сферические зеркала. Для того чтобы свет, попавший в резонатор, при распространении внутри оставался в пределах ограниченной области, необходимо выполнение следующего условия:

$$0 < \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) < 1. \quad (\text{Б.10})$$

В таком случае резонатор называют устойчивым. Введём обозначение:

$$g_i = 1 - \frac{L}{R_i}. \quad (\text{Б.11})$$

Можно показать [52], что  $\Delta\zeta = -\arccos(\sqrt{g_1 g_2})$ . Тогда частоты всех собственных мод резонатора Фабри-Перо:

$$\nu_{mnp} = \frac{c}{2L} \cdot \left( p + \frac{1}{\pi} (m + n + 1) \cdot \arccos(\sqrt{g_1 g_2}) \right). \quad (\text{Б.12})$$

Для стабилизации частоты лазера чаще всего используют привязку к  $TEM_{00}$  ( $m = 0, n = 0$ ) моде резонатора Фабри-Перо. Мода  $TEM_{00}$  имеет гауссов профиль распределения интенсивности. Его радиус по уровню интенсивности  $1/e^2$  зависит от координаты вдоль оси пучка как:

$$w^2(z) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_r} \right)^2 \right], \quad (\text{Б.13})$$

где  $w_0$  – радиус перетяжки (место, где пучок имеет минимальный размер, а его волновой фронт – плоский),  $z$  – расстояние от перетяжки,  $z_r = \pi w_0^2 / \lambda$  – рэлеевское расстояние. У резонатора,

сформированного парой сферических зеркал, с параметрами  $g_1, g_2$  перетяжка основной моды излучения имеет координату  $z_1$ :

$$z_1 = -L \frac{(1 - g_1) \cdot g_2}{(1 - g_1) \cdot g_2 + (1 - g_2) \cdot g_1}, \quad (\text{Б.14})$$

а её радиус составляет:

$$w_0 = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \cdot \left[ \frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} \right]^{1/4}. \quad (\text{Б.15})$$

Радиус моды на зеркалах резонатора составит [136]:

$$w_i(z_i) = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \cdot \left[ \frac{g_j}{g_i \cdot (1 - g_i g_j)} \right]^{1/4}. \quad (\text{Б.16})$$

Для эффективного ввода лазерного излучения в моду резонатора необходимо геометрически согласовать вид гауссова пучка внутри и снаружи резонатора. Чаще всего этого можно добиться при помощи одной или двух линз, установленных перед резонатором. Необходимо измерить радиус пучка, выходящего из лазера, в двух произвольных точках. Таким образом из (Б.13) можно вычислить размер и положение перетяжки. Подбор фокусных расстояний и положений согласующих линз можно осуществить при помощи матричной оптики [136]. В данном методе гауссов пучок описывается при помощи комплексного параметра:

$$q = (z - z_0) + iz_r. \quad (\text{Б.17})$$

Преобразование параметра пучка  $q_1 \rightarrow q_2$  при его прохождении через свободное пространство или оптические элементы может быть описано уравнением:

$$\begin{bmatrix} q_2 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Б.18})$$

где  $k$  – нормировочный множитель, который обеспечивает равенство единице второй компоненты вектора, ABCD-матрица характеризует объект, через который распространялся пучок. Для луча, распространяющегося в свободном пространстве на расстояние  $d$ :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{Б.19})$$

При прохождении через тонкую линзу с фокусным расстоянием  $f$ :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{Б.20})$$

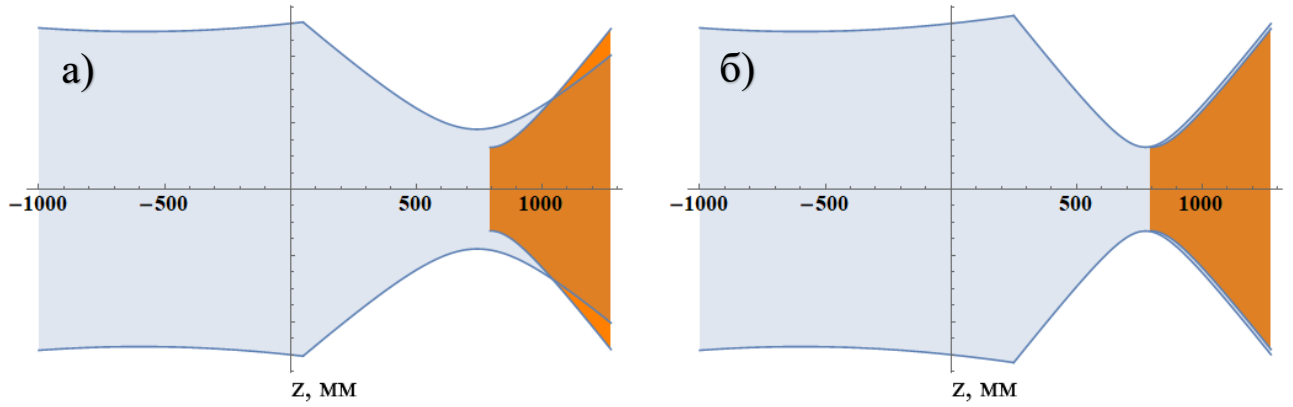


Рисунок Б.4 а, б - иллюстрация расчёта пространственного каулинга лазерного излучения в  $TEM_{00}$  моды резонатора Фабри-Перо длиной 48 см с плоским и вогнутым зеркалами. Синим обозначена каустика пучка, вышедшего из лазера и прошедшего через согласующую линзу. Оранжевым обозначена каустика моды резонатора. Варьируя положение и фокусное расстояние линзы можно добиться согласования пучка снаружи и внутри резонатора (б).

Кроме геометрического согласования моды лазера и резонатора на величину максимального пропускания влияет так же согласование импедансов зеркал резонатора. Максимальное пропускание достигается в том случае, когда коэффициент пропускания переднего зеркала равен всем остальным потерям в резонаторе в сумме [137].

## Б.2 Поперечные моды

Реальные пучки света, в том числе соответствующие модам резонатора, ограничены в поперечном оптической оси направлении и, как и любые волны, подвержены дифракции. Указанный эффект приводит к гауссову распределению интенсивности по профилю световой волны. Набег фазы гауссова пучка за двойной проход интерферометра составит:

$$\varphi = 2\pi\vartheta \cdot \frac{2L}{c} + \tilde{\varphi}_{m,n} \quad (\text{Б.21})$$

где  $\tilde{\varphi}_{m,n}$  – набег фазы, связанный с дифракционными эффектами. Дополнительная фаза  $\tilde{\varphi}_{m,n}$  вызвана перемещением пучка в направлении, перпендикулярном оптической оси и зависит от вида поперечного распределения интенсивности в моде.

$$\tilde{\varphi}_{m,n} = -2 \cdot (m + n + 1) \cdot \Delta\zeta \quad (\text{Б.22})$$

где  $\Delta\zeta$  – дифференциальная фаза Гуи,  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Поперечное распределение поля стоячей световой волны в резонаторе Фабри-Перо декартовых координатах можно описать с помощью двух систем функций (которые имеют удобный вид в декартовых и полярных координатах):

$$\tilde{u}_{HG}(x, y, m, n) = \kappa_{HG} \cdot \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2\rho(z)}\right) \cdot H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \cdot H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right), \quad (\text{Б.23})$$



$$\tilde{u}_{LG}(r, \Phi, p, l) = \kappa_{LG} \cdot \exp\left(ik \frac{r^2}{2\rho(z)}\right) \cdot L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \cdot \left(\frac{r}{w(z)}\right)^l \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \cdot \cos(l\Phi), \quad (\text{Б.24})$$

где индексы  $m, n, p, l$  принимают натуральные значения или равны нулю [138]. Функции  $H_m$  и  $L_p^l$  – полиномы Эрмита и Лагерра соответственно. Моды, соответствующие указанным системам функций, называют эрмит-гауссовыми ( $HG_{mn}$ ) и лаггер-гауссовыми ( $LG_{pl}$ ). Полином Эрмита с номером  $n$  имеет  $n$  нулей, что приводит к появлению  $n$  тёмных областей в поперечном профиле пучка эрмит-гауссовой моды вдоль соответствующей оси (рисунок Б.5(а)). Аналогично для случая лаггер-гауссовых мод, индекс  $l$  определяет число темных полос в радиальных направлениях, а  $p$  – количество темных колец (рисунок Б.5(б)).

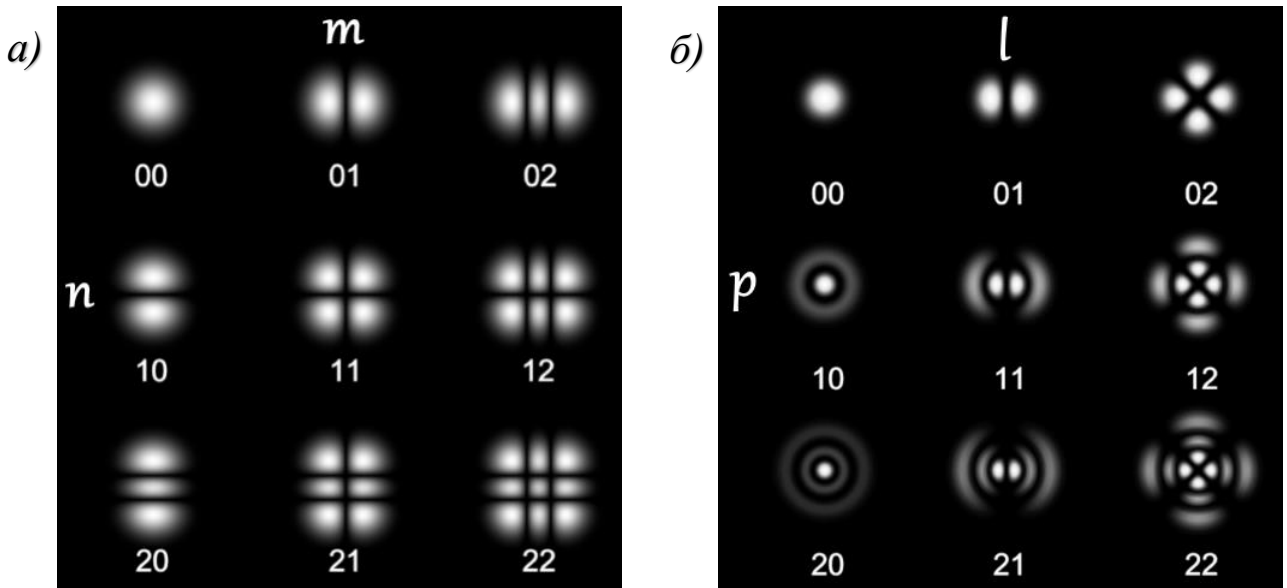


Рисунок Б.5 Профили интенсивности эрмит-гауссовых (а) и лаггер-гауссовых (б) мод.

Функции Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса представляют собой полные системы собственных функций. Любую моду резонатора можно представить в виде суперпозиции эрмит-гауссовых или лаггер-гауссовых мод. Выражения для первых полиномов Эрмита и Лагерра представлены в таблице Б.1. Заметим, что обычно выходная мода лазера имеет наибольшее перекрытие с основной  $TEM_{00}$  модой, однако направив этот пучок на резонатор с заметной эффективностью можно возбудить и моды старших порядков, которые будут видно в пропускании резонатора.

$H_0(q) = 1$	$L_0^l(q) = 1$
$H_1(q) = 2q$	$L_1^l(q) = -q + 1 + l$
$H_2(q) = -4q^2 - 2$	$L_2^0(q) = \frac{1}{2}(q^2 - 4q + 2)$
$H_3(q) = 8q^3 - 12q$	$L_3^0(q) = \frac{1}{6}(-q^3 + 9q^2 - 18q + 6)$

Таблица Б.1 Выражения для первых четырёх полиномов Эрмита и Лагерра.

В отдельную группу выделяют так называемые моды Лагерра-Гаусса с орбитальным угловым моментом [112], которые принято обозначать как  $LG_{pl^*}$  [139]. Различие в записи выражений для лагеровых пучков с нулевым (Б.24, рисунок Б.5(б)) и ненулевым (Б.25, рисунок Б.6) орбитальным моментом состоит в виде азимутального множителя:  $\cos(l\Phi)$  и  $\exp(il\Phi)$  соответственно. Распределение интенсивности излучения в профиле мод с орбитальным моментом представляет собой концентрические кольца, при этом в отличие от обыкновенных мод Лагерра-Гаусса, поле в центре всегда нулевое (рисунок Б.6). Радиус колец увеличивается с ростом индекса  $l$ . Поле моды  $LG_{pl^*}$  задаётся выражением [140]:

$$\tilde{u}_{LG^*}(r, \varphi, p, l) = \kappa_{LG^*} \cdot \exp\left(ik \frac{r^2}{2\rho(z)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right) \cdot \left(\frac{r}{w(z)}\right)^l \cdot L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \cdot \exp(il\Phi). \quad (\text{Б.25})$$

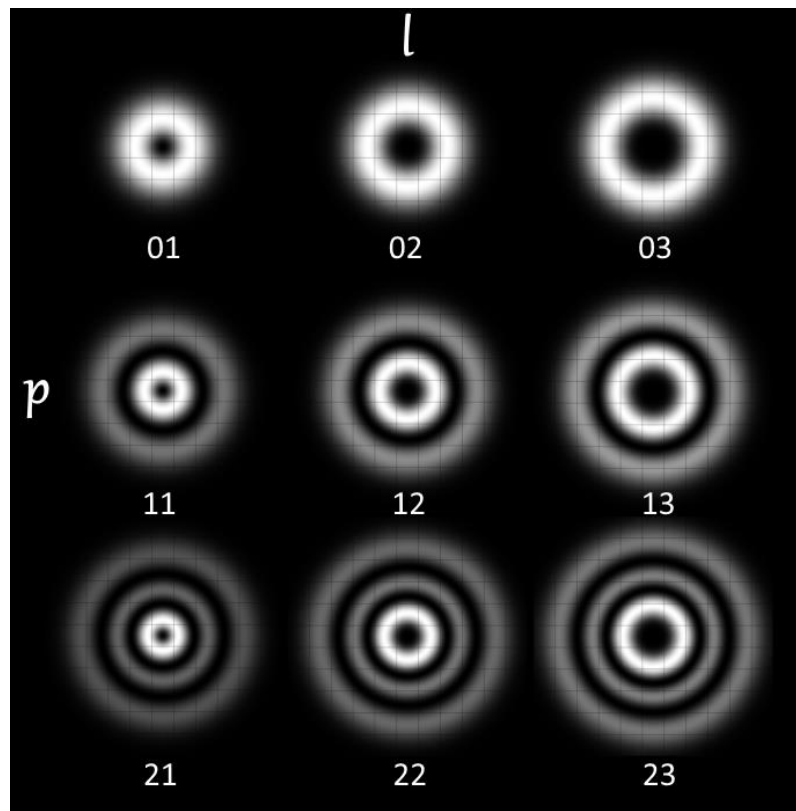


Рисунок Б.6 Профили интенсивности лаггер-гауссовых мод с орбитальным моментом.

Волновой фронт световой волны с орбитальным угловым моментом имеет винтовой вид. Угловым моментом электромагнитной волны в такой моде составляет  $l \cdot h$ . Сформировать моду  $LG_{pl^*}$  можно из моды  $TEM_{00}$  при помощи специализированных спиральных фазовых пластинок (в которых набег фазы луча изменяется на целое число  $\pi$  при обходе вдоль окружности вокруг центра пластинки), голограмм (Pitch-Fork Hologram), пространственных модуляторов света или из моды  $HG_{10}$  при помощи пары цилиндрических линз. Коэффициенты  $\kappa$ , присутствующие в формулах (Б.23), (Б.24) и (Б.25) отвечают за амплитуду волны.

### Б.3 Петля стабилизации шумов частоты

Система стабилизации частоты лазера представляет собой замкнутую петлю с отрицательной обратной связью (рисунок Б.7). Блок дискриминатора частоты конвертирует её флуктуации в электрическое напряжение с коэффициентом преобразования  $D(f)$ . Он состоит из опорного резонатора и схемы формирования сигнала ошибки методом Паунда-Дривера-Холла. Сервоконтроллер представляет собой электрическую цепь с функцией пропускания  $G(f)$ , трансформирующую сигнал ошибки в сигнал управления частотой излучения. Указанный сигнал направляется на вход лазера, преобразующий напряжение в сдвиг частоты генерации с коэффициентом преобразования  $K(f)$ . Устройством управления может выступать токовый вход лазерного диода, пьезоэлемент, контролирующий положение зеркала лазерного резонатора и другие механизмы контроля линии генерации в зависимости от типа лазера. Блок лазера на рисунке Б.7 преобразования не выполняет. Пусть  $S_{laser}(f)$  – спектральная плотность мощности собственных флуктуаций частоты лазера в случае разомкнутой петли (нет сигнала  $A(f)$  с устройства управления). В случае замыкания петли обратной связи спектр флуктуаций частоты выходного сигнала лазера:

$$P(f) = A(f) + S_{laser}(f) = -P(f) \cdot D(f)G(f)K(f) + S_{laser}(f) \Rightarrow \quad (\text{Б.26})$$

$$P(f) = \frac{S_{laser}(f)}{1 + D(f)G(f)K(f)}, \quad (\text{Б.27})$$

из чего следует, что флуктуации частоты лазера при наличии обратной связи оказываются подавлены в  $1 + F(f)$  раз, где

$$F(f) = D(f)G(f)K(f) \quad (\text{Б.28})$$

– трансфер-функция петли обратной связи. Для лучшего подавления шумов частоты выходного сигнала лазера нужно увеличивать  $F(f)$ , однако для этого существуют ограничения.

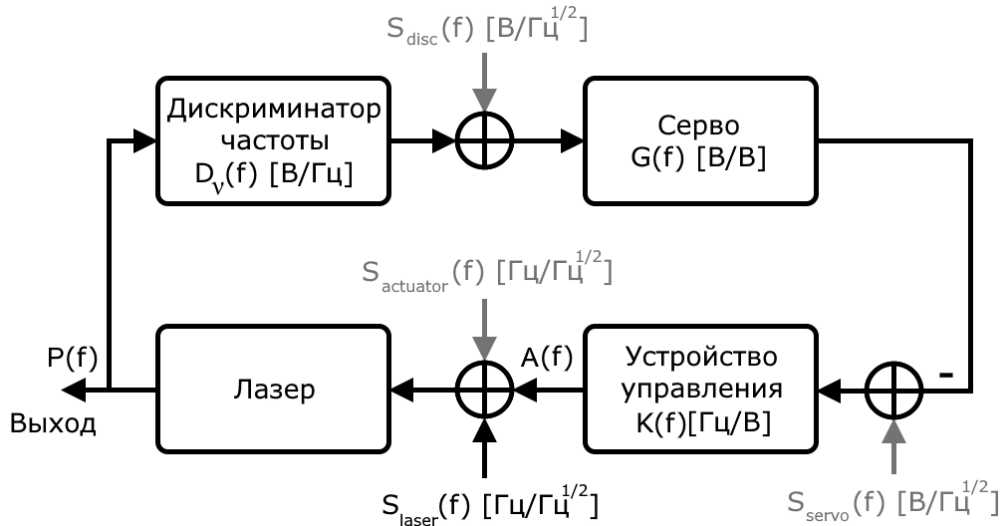


Рисунок Б.7 Блок-схема петли обратной связи для стабилизации флуктуаций частоты лазера по моде опорного резонатора. Серым цветом обозначены шумовые входы, не учтённые в расчете, но присутствующие в реальных системах. Их влияние исследовано в [141].

При распространении по петле обратной связи сигнал приобретает фазовый набег, связанный с присутствием фильтров нижних частот, линий передачи и прочих элементов, сдвигающих фазу. Заметим, что распространение электромагнитной волны по кабелю RG58 длиной 1 м занимает 5 нс. На частоте 1 МГц это вызывает сдвиг фазы в 1.8 градуса. Обыкновенный фильтр нижних частот, приводит к сдвигу фазы  $\pi/4$  сигнала на частоте среза  $(2\pi RC)^{-1}$ . Для большинства элементов набег фазы увеличивается с ростом частоты сигнала. Для волны на некоторой, достаточно высокой частоте, изменение фазы между флуктуациями частоты и управляющим сигналом при проходе через петлю окажется равен  $\pi$ , что приводит к формированию положительной обратной связи. Если сигнал обратной связи приводит к увеличению флуктуаций частоты – возникают осцилляции. Чтобы этого избежать, следует обеспечить величину усиления петли менее 1 (0 дБ) в диапазоне частот, в котором набег фазы приближается к  $\pi$ . В [137] указано, что для избегания осцилляций желательно, чтобы фазовый сдвиг сигнала на частоте, соответствующей усилению петли 0 дБ, составлял не более  $3\pi/4$ .

Таким образом, функция усиления петли обратной связи  $|F(f)|$  должна принимать большие значения на низких частотах и спадать ниже 0 дБ для частот, когда набег фазы становится достаточным для возникновения осцилляций. Форма функции  $F(f)$  определяется тремя элементами: резонатором, лазером и сервоконтроллером. Трансфер-функция резонатора Фабри-Перо соответствует фильтру нижних частот с частотой среза, равной ширине резонансной линии (рисунок Б.8(а)) [142]. Для неё характерно поведение пропорционального усилителя на низких частотах и интегратора выше частоты среза (с наклоном  $1/f$  или  $-20$  дБ при росте частоты на порядок). Частотная характеристика  $G(f)$  сервоконтроллера определяется устройством его

электрической цепи. Цепь контроллера, предназначенного для стабилизации лазера, обычно комбинируется из пропорциональных усилителей, интеграторов, двойных интеграторов, дифференциаторов, фильтров. Подбирая общее усиление сервоконтроллера и характерные частоты входящих в него электронных систем, можно сформировать оптимальную форму его функции пропускания, обеспечивающую устойчивую работу петли и эффективное сужение линии лазера. При проектировании и настройке сервоконтроллера для стабилизации диодного лазера следует придерживаться эмпирического правила: амплитудно-частотная характеристика полной петли при величине усиления 0 дБ не должен спадать быстрее, чем  $-20$  дБ/порядок ( $1/f$ ) [137]. Данное правило, возможно, связано с тем, что в области частот до нескольких сотен кГц у лазерного диода преобладает фликкер-шум частоты ( $1/f$ ), а после – белый шум (вплоть до возникновения релаксационных осцилляций). За счет перехода от интегрирующего поведения сервоконтроллера к пропорциональному (рисунок Б.8(б)) диаграмма Боде петли (резонатор+контроллер) преодолевает уровень усиления 0 дБ с наклоном  $-20$  дБ/порядок (рисунок Б.8(в)). В области высоких частот многие специализированные контроллеры имеют функцию включения дифференциатора (с положительным наклоном амплитудно-частотной характеристики  $+20$  дБ/порядок).

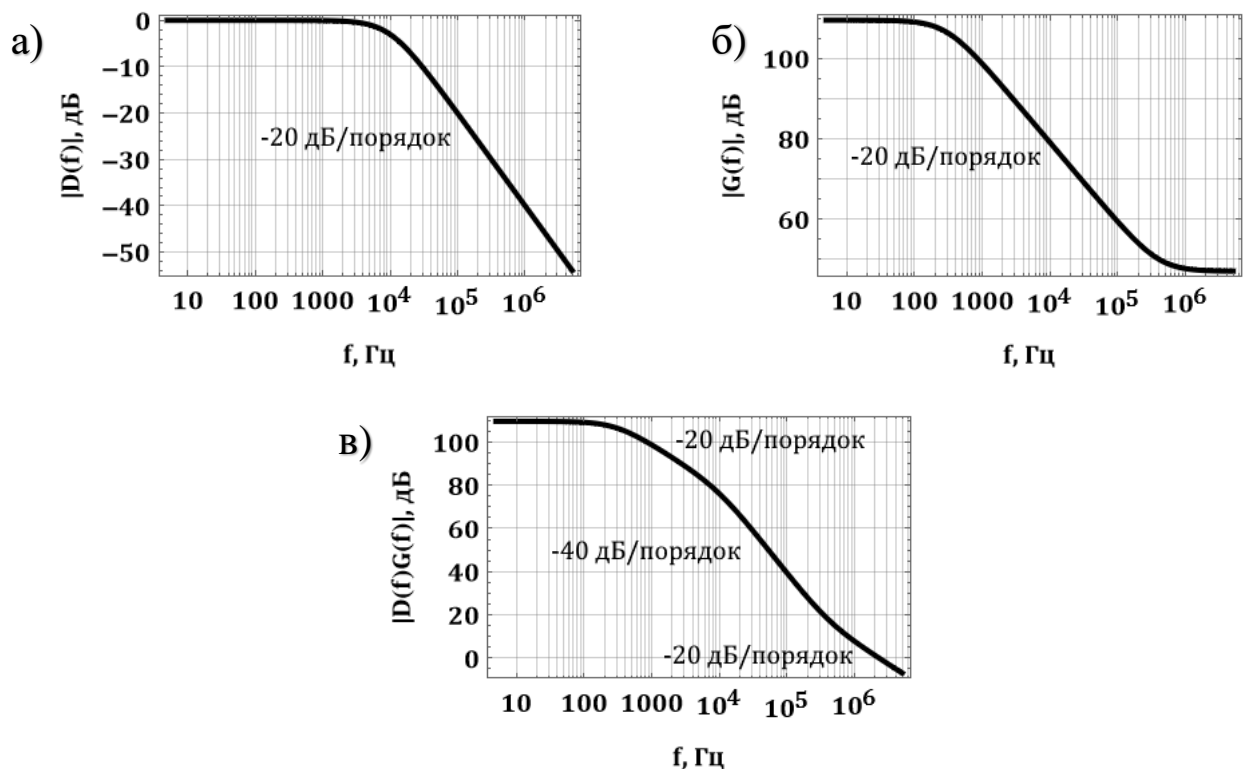


Рисунок Б.8 Диаграммы Боде (логарифмические амплитудно-частотные характеристики) для резонатора Фабри-Перо с шириной спектральной линии 10 кГц (а), сервоконтроллера (б) и петли обратной связи (резонатор+сервоконтроллер) (в). Переход от пропорционального к

*интегрирующему поведению сервоконтроллера соответствует частоте 300 Гц, а от интегрирующего – к пропорциональному – 400 кГц.*

Амплитудная и фазовая частотные характеристики лазера зависят от его типа. Его влияние на функцию пропускания петли в требуемой полосе частот обычно не является очень сильным и может быть учтено при настройке сервоконтроллера. Наилучшим вариантом является измерение трансфер-функций всех входящих в петлю элементов и осознанный выбор параметров контроллера, однако зачастую хорошего результата можно добиться эмпирическим подбором параметров. В данной работе при создании систем стабилизации частоты лазерного излучения по опорному резонатору используются коммерческие лазеры и сервосистемы, поэтому их настройка производилась в основном опытным путём.

#### **Б.4 Практическая реализация стабилизации лазера методом ПДХ**

Процесс привязки частоты лазерного излучения к моде опорного резонатора состоит из нескольких этапов. Данный раздел содержит практическое руководство по реализации метода Паунда-Драйвера-Холла для диодного лазера (для полупроводникового отличия незначительны).

а) **Изоляция обратного отражения.** Частота генерации диодного лазера крайне чувствительна к излучению, отражённому обратно в лазерный резонатор извне: от граней элементов оптической схемы, несовершенного торца оптоволокна или переднего зеркала опорного резонатора. Поэтому, кроме оптического просветления всех возможных поверхностей на пути луча, требуется использование оптической изоляции с уровнем подавления  $> 50 \text{ dB}$  [137]. Коммерческие изоляторы на эффекте Фарадея обеспечивают изоляцию на уровне  $< 35 \text{ dB}$ , поэтому обычно требуется использование пары таких устройств.

б) **Фазовая модуляция.** Частота модуляции излучения должна быть выбрана достаточно большой для того, чтобы процессы фильтрации и демодуляции сигнала не приводили к сдвигу фазы компонент на частотах внутри требуемой ширины полосы обратной связи. Выбор  $\vartheta_m$ , на порядок большей, чем ширина полосы обратной связи обычно оказывается достаточным для этой цели. Для диодных лазеров с внешним резонатором (ECDL) эффективное сужение спектральной линии достигается при помощи петли обратной связи с полосой  $\sim 2 \text{ МГц}$ . Частоту модуляции в таком случае можно выбрать  $\approx 20 \text{ МГц}$ . Желательно выбирать частоту модуляции в диапазоне, в котором прочие лабораторные радиочастотные поля отсутствуют чтобы избежать наводок. Выбор глубины модуляции обычно не является критичным и её можно варьировать для подбора оптимального усиления или мощности несущей. Обычно амплитуда сайдбэндов в 5 – 10 % от несущей оказывается достаточной. Модуляцию частоты диодного лазера осуществляют непосредственной модуляцией тока диода или при помощи ЭОМа. Второй способ более затратен,

но создаёт меньшую амплитудную модуляцию (на 1–2 порядка) и открывает возможность для её стабилизации.

с) **Ввод излучения в моду резонатора.** Согласование мод лазера и резонатора обычно можно осуществить при помощи одной линзы или телескопа (приложение Б.1). Излучение, выходящее из диодного лазера, обычно имеет эллиптический профиль, что связано с формой его активной среды. Скорректировать данный эффект можно при помощи пары призм. Геометрически попасть в моду резонатора (направить излучение вдоль оптической оси) можно при помощи системы двух юстируемых заводящих зеркал. Для этого, найдя основную моду резонатора (по камере, регистрирующей пропускание), удобно сканировать частоту лазера в её окрестности и максимизировать пропускание настройкой зеркал. Начинать ввод излучения в резонатор лучше на высоких мощностях (порядка милливатта), чтобы сделать сигнал пропускания более заметным. При переходе к этапу привязки мощность можно снизить до нескольких десятков микроватт.

d) **Детектирование отраженного света.** Отражённый резонатором свет направляется на фотодетектор ПДХ как показано на рисунке 1.7. Фотодетектор должен иметь достаточную полосу для детектирования частоты модуляции. Избежать формирования паразитных эталонов помогает установка детектора под небольшим углом к направлению лазерного луча.

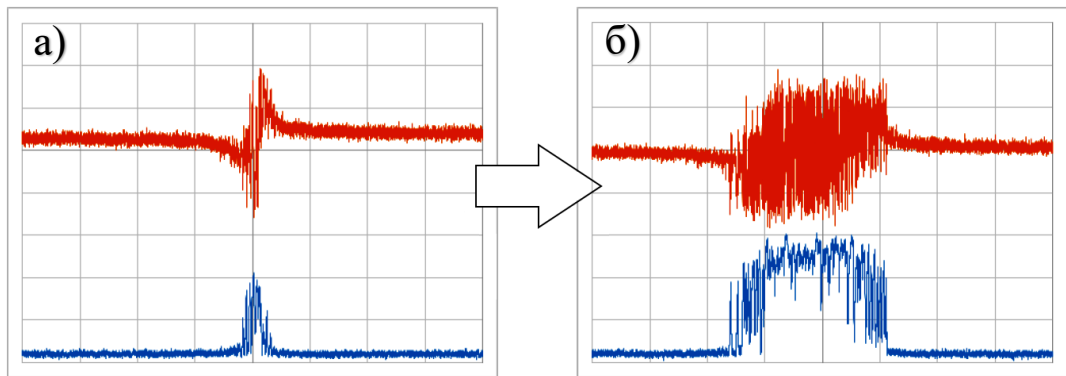
e) **Формирование сигнала ошибки.** Сигнал ошибки конвертирует отстройку частоты лазерного излучения от пика пропускания резонатора в напряжение. Его формирование путём смещения сигнала с фотодетектора ПДХ с опорным сигналом на частоте модуляции производится радиочастотным миксером. Для того чтобы сформировать сигнал ошибки оптимальной формы (рисунок 1.8(a)) нужно обеспечить разность фаз  $\pi/2$  сигналов на смесителе. Сделать это можно как при помощи фазовращателя, так и подбирая задержку между сигналами, меняя частоту модуляции или длины кабелей, по которым они распространяются. Качественный сигнал ошибки имеет ключевое значение для эффективности привязки. Необходимо соблюсти баланс мощностей опорного сигнала и сигнала фотодетектора на миксере (входные мощности заявляются производителем). В некоторых случаях трансимпедансный усилитель, встроенный в фотодетектор не в состоянии обеспечить достаточный уровень радиочастотного сигнала и требуется установка дополнительных низкошумящих усилителей. Сигнал ошибки наблюдают при помощи осциллографа при сканировании моды резонатора. В случае волоконного лазера ширина линии излучения сопоставима с шириной резонанса интерферометра и удаётся наблюдать достаточно гладкий сигнал как показано на рисунке 1.8(a). Спектр диодного лазера обычно значительно шире, чем линия резонатора и изображение сигнала ошибки получается более шумным (рисунок Б.9(a)). Обычно достаточно благоприятной оказывается ситуация, когда размах полученного сигнала как минимум на порядок превышает ширину шумовой дорожки. В

случае, если полученный сигнал оказывается слишком зашумлённым, полезно установить полосовой фильтр после фотодетектора. Ширина полосы такого фильтра не должна ограничивать полосу петли обратной связи.

f) **Сервоконтроллер.** Сервоконтроллер преобразует сигнал ошибки в сигнал управления частотой лазера. Его основная задача – обеспечить достаточное усиление, чтобы подавить фазовые шумы лазера до минимального уровня в как можно большей полосе частот. Электронный контроллер не должен ограничивать ни уровень остаточных шумов частоты, ни ширину полосы обратной связи. Для этой цели удобно использовать ПИД-регулятор с широкими возможностями для настройки функции пропускания. Настройка контроллера осуществляется путём подбора регулировочных параметров (у контроллеров разных производителей набор таких параметров обычно различается), задающих оптимальное значение усиления на каждой частоте в полосе обратной связи. Данный процесс не является строго детерминированным и может занимать длительное время. Оптимальный вид функции пропускания сервоконтроллера зависит от ширины и формы линии лазера и вида шума, преобладающего на различных частотах. Электрическую схему и описание принципов работы такого контроллера можно найти в [137]. Так как токовый вход диодного лазера является крайне высокочувствительным к изменению тока, перед подачей сервосигнала полезным оказывается установить на него ослабитель (10 дБ и более), чтобы уменьшить влияние шумов выхода контроллера.

g) **Настройка петли обратной связи.** После того как излучение лазера заведено в моду резонатора, получен приемлемый сигнал ошибки и сервоконтроллер подключен ко входу управления частотой лазера, все готово к привязке. Перед привязкой желательно устранить отстройку среднего значения сигнала ошибки от нулевого уровня, что обеспечит привязку к центру линии резонатора. На первом этапе удобнее всего запустить сканирование частоты лазера в окрестности моды, и осуществлять привязку только пропорциональной составляющей, наблюдая сигнал ошибки и сигнал пропускания с помощью осциллографа. Если полярность сигнала ошибки выбрана правильно, то с увеличением коэффициента усиления пик, соответствующий пропусканию, должен становиться шире с формированием плоской верхней части (рисунок Б.9(б)) – это первый признак привязки.





*Рисунок Б.9 Осциллограмма сигнала ошибки (красный) и сигнала пропуска резонатора (синий) в отсутствие обратной связи (а) и при наличии обратной связи (б). Осциллограммы получены в процессе сканирования частоты лазера через моду резонатора.*

Добавление интегральной компоненты в сигнал привязки должно сгладить сигнал пропуска и обеспечить привязку на длительных временах (сканирование можно отключить). Для определения оптимального усиления петли можно плавно его увеличивать, наблюдая за сигналом пропуска: при малом усилении пропускание будет зашумлено, увеличение усиления сначала приводит к подавлению шумов в пропускании, а затем вызывает осцилляции в петле обратной связи, которые проявляются в падении уровня пропуска. Оптимальное усиление петля будет иметь непосредственно перед началом осцилляций. Дальнейшую настройку сервоконтроллера можно произвести, ориентируясь на уровень шумов в сигнале пропуска и стабильность привязки.

Для лучшей диагностики петли обратной связи можно использовать сигнал фотодетектора ПДХ, из которого формируется сигнал ошибки. При помощи ответвителя небольшую долю этого сигнала можно вывести из петли, не изменяя существенно её усиление, и направить на спектроанализатор. Полученный в режиме привязки спектр (рисунок Б.10) характеризует фазовые шумы лазера. Центральный пик на частоте модуляции связан с остаточной амплитудной модуляцией и наводкой на кабель. Расстояние от боковых пиков до центрального пика характеризует ширину полосы петли обратной связи. Для увеличения эффективности привязки и лучшего сужения спектральной линии при настройке контроллера лучше всего ориентироваться на увеличение ширины полосы обратной связи и уменьшение уровня шумов, в особенности в низкочастотной области (в окрестности центрального пика). Более тонкую настройку петли можно производить по сигналу сличения лазерной системы с эталоном.

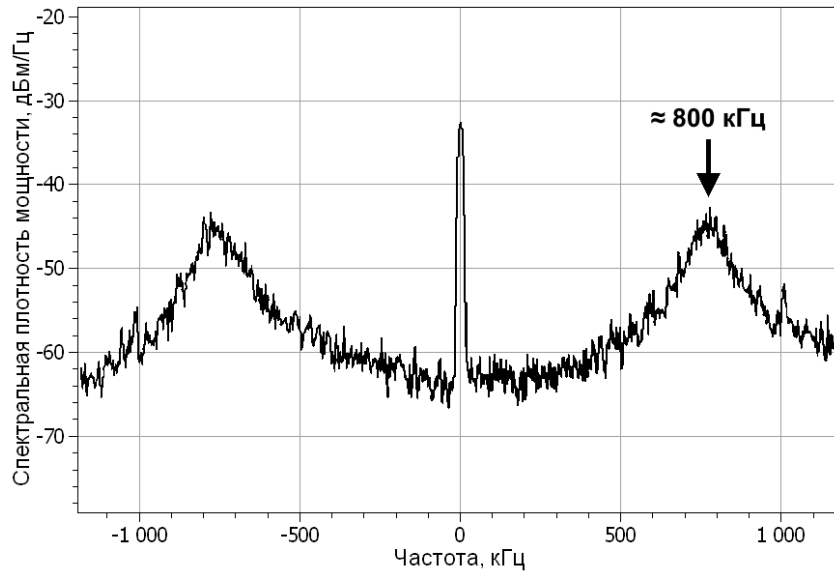


Рисунок Б.10 Спектр шумов сигнала с фотодетектора ПДХ, в стабилизированном состоянии. Данные получены на системе стабилизации лазера 698 нм по горизонтальному ULE-резонатору (глава 3). “Сервоуши” петли стабилизации находятся на частоте 800 кГц от центра (центральный пик сдвинут в 0).

## Б.5 Измерение стабильности частоты

Девияция Аллана и спектральная плотность флуктуаций частоты лазера на практике определяются исходя из измеренной временной последовательности  $\vartheta(t)$ . Поскольку частота оптического излучения очень высока, её непосредственное измерение электронными методами невозможно. Измерение частоты лазерного излучения осуществляется с помощью техники гетеродинирования, позволяющей перейти из оптического диапазона в радиодиапазон. Для гетеродинирования кроме исследуемого генератора необходим также опорный генератор, имеющий близкую частоту. Рассмотрим два лазерных поля с частотами  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_0$ , которые накладываются друг на друга на фотодетекторе. Фотодетектор реагирует на квадрат амплитуды суммарного поля:

$$\begin{aligned} I_{PD} &= [E_1 \cos(2\pi\vartheta_1 t) + E_2 \cos(2\pi\vartheta_0 t + \varphi)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_2^2 + \frac{1}{2} E_1 E_2 \cos(2\pi(\vartheta_1 - \vartheta_0)t - \varphi). \end{aligned} \quad (\text{Б.29})$$

В данном выражении опущены слагаемые на оптических частотах, так как фотодиод не способен их отследить. Сигнал на частоте биений  $\vartheta_{beat} = |\vartheta_1 - \vartheta_0|$  содержит информацию о шумах частоты исследуемого источника и опорного генератора. В случае когда их шумы некоррелированы, дисперсия относительных флуктуаций частоты сигнала биений будет складываться из девиаций отдельных генераторов:

$$\sigma_{10}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_0^2. \quad (\text{Б.30})$$

Обычно в качестве опорного выбирают осциллятор, либо заведомо более стабильный, либо идентичный исследуемому. При наличии трёх некоррелированных осцилляторов (0, 1, 2) со сравнимым уровнем стабильности частоты возможна реализация «метода треуголки» [143]. Для этого проводят измерения нестабильности между всеми системами попарно, а затем определяют дисперсии Аллана для каждой системы в отдельности:

$$\begin{aligned}\sigma_0^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{01}^2 + \sigma_{02}^2 - \sigma_{12}^2), \\ \sigma_1^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{01}^2 + \sigma_{12}^2 - \sigma_{02}^2), \\ \sigma_2^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{02}^2 + \sigma_{12}^2 - \sigma_{01}^2).\end{aligned}\tag{Б.31}$$

Полоса пропускания фотодиода накладывает ограничение на максимальную разность частот сличаемых лазеров. Типичные значения ширины полосы фотодиодов на сегодняшний день составляют не более 10 ГГц. Преодолеть это ограничение позволяют фемтосекундные оптические гребёнки частот.

Для исследования стабильности частоты на временах измерения от долей секунды до нескольких дней, принято использовать счётчики частоты. Данные приборы определяют частоту радиочастотного сигнала путём подсчёта числа периодов колебаний в течении последовательных промежутков времени, имеющих заданную длительность. Для корректного вычисления девиации Аллана следует использовать счётчики без мёртвого времени между последовательными измерениями, принцип работы которых представлен в [144]. Указанные приборы с высокой точностью отслеживают фазу исследуемого сигнала, за счёт чего при подсчёте частоты учитывают все периоды колебаний.

Существует два вида счётчиков, различающихся способом подсчёта значения частоты. В П-счётчиках частота вычисляется как  $\vartheta = \frac{k}{\tau_0}$ , где  $k$  – число колебаний, произошедших за  $\tau_0$ . Л-счётчики проводят измерения много раз за время  $\tau_0$ , а затем усредняют их с использованием треугольной весовой функции. При подстановке данных П-счётчика в (А.4) получится величина обыкновенной дисперсии Аллана. При подстановке значений, измеренных в Л-режиме, в формулу (А.4), вычисляется так называемая «треугольная» девиация, совпадающая с модифицированной девиацией Аллана по виду зависимости от времени усреднения, но отличающаяся нормировкой.

Для определения ширины линии биений двух лазерных источников сигнал с фотодетектора записывается при помощи осциллографа, а затем вычисляется его преобразование Фурье. При этом максимальное разрешение спектра будет Фурье ограничено  $\Delta\vartheta \geq \frac{1}{t}$ , где  $t$  – время измерения. В соответствии с теоремой Котельникова, максимальная частота сигнала  $\vartheta_N$ , которую может

измерить прибор, в два раза меньше частоты дискретизации прибора  $\vartheta_{\text{sampl}} = 2\vartheta_N$ . Шумы на частотах выше  $\vartheta_N$  будут пренесены в низкочастотную область за счет эффекта переноса спектра. Чтобы этого избежать, необходимо использовать фильтр нижних частот с частотой отсечки  $< \vartheta_N$ .